

Secciones de cuerpos convexos por el centro de masas



Sofía Sirón Barluenga
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: David Alonso Gutiérrez
11 de junio de 2023

Prólogo

Un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n es un conjunto convexo, compacto con interior no vacío. El objetivo de este trabajo es estudiar las secciones de cuerpos convexos resultantes al intersecar un cuerpo convexo K en \mathbb{R}^n con el centro de masas en el origen con un subespacio lineal k -dimensional.

Se dice que un cuerpo convexo K es simétrico si $\forall x \in K, -x \in K$ y se deduce que todo cuerpo convexo simétrico tiene el centro de masas en el origen.

Consideremos primeramente el caso en el que nuestro cuerpo convexo K es simétrico e intersequémoslo por el centro de masas con un subespacio k -dimensional E . La sección obtenida es la de máximo volumen de entre todas las secciones de K resultantes al intersecar dicho cuerpo convexo con subespacios paralelos a E . Por otra parte, si dividimos K en dos conjuntos resultantes de intersecarlo por su centro de masas con un hiperplano, es claro que los dos conjuntos tienen la mitad del volumen de K .

Parece coherente preguntarse qué sucedería al aplicar el procedimiento descrito sobre cuerpos convexos no simétricos: ¿Seguirá siendo la sección que pasa por el centro de masas la de máximo volumen?, ¿existe algún tipo de cota para el ratio entre el volumen de la sección máxima y el volumen del resto de secciones?, y en caso de existir, ¿de qué párametros dependería dicha cota? A lo largo del trabajo se dará respuesta a estas cuestiones.

Demostraremos que si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo con centro de masas en el origen y E es un subespacio lineal k -dimensional entonces:

$$\max_{x \in P_{E^\perp} K} |K \cap (x + E)| \leq \left(\frac{n+1}{k+1} \right)^k |K \cap E|,$$

donde $P_{E^\perp} K$ denota la proyección ortogonal de K sobre E^\perp y $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue k -dimensional.

Consideremos sin pérdida de generalidad un cuerpo convexo K en \mathbb{R}^n (no necesariamente simétrico) con el centro de masas en el origen y un hiperplano H pasando por el origen. Al intersecar K con el hiperplano, el cuerpo convexo quedará dividido en dos fragmentos. Resulta interesante pensar acerca de una posible cota para el ratio entre el volumen del cuerpo convexo y el volumen de cada uno de los fragmentos. La desigualdad de Grünbaum, que estudiaremos en el último capítulo, aporta la siguiente cota que depende de la dimensión n :

$$\frac{|K^+|}{|K|} \geq \left(\frac{n}{n+1} \right)^n,$$

donde K^+ es el conjunto $K^+ = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \geq 0\}$ para cualquier $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, la esfera euclídea en \mathbb{R}^n , y $|\cdot|$ denota el volumen n -dimensional.

Para demostrar las desigualdades anteriormente expuestas, es necesario introducir algunos conceptos relacionados con la convexidad y demostrar teoremas a los que recurriremos en el grueso del trabajo. Uno de los más importantes será el principio de concavidad de Brunn:

Principio de concavidad de Brunn. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, sea E subespacio lineal k -dimensional y sea f la función dada por:

$$f : P_{E^\perp}K \longrightarrow [0, \infty) \\ x \longmapsto f(x) = |K \cap (E + x)|.$$

Entonces la función $f^{\frac{1}{k}}$ es cóncava en su soporte.

Obtendremos el principio de concavidad de Brunn como corolario de la desigualdad de Brunn-Minkowski:

Desigualdad de Brunn-Minkowski. Las siguientes afirmaciones equivalentes son ciertas:

1. $|A|^{1-\lambda}|B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|$, $\forall A, B$ borelianos no vacíos de \mathbb{R}^n y $\lambda \in [0, 1]$.
2. $|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A + B|^{\frac{1}{n}}$, $\forall A, B$ borelianos no vacíos de \mathbb{R}^n .
3. $(1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}} \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}}$, $\forall A, B$ borelianos no vacíos de \mathbb{R}^n y $\lambda \in [0, 1]$.

Para demostrar la desigualdad de Brunn-Minkowski, nos centraremos inicialmente en demostrar la equivalencia entre las tres afirmaciones y finalmente probaremos que $|A|^{1-\lambda}|B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|$, $\forall A, B$ borelianos no vacíos de \mathbb{R}^n y $\lambda \in [0, 1]$. Obtendremos esta desigualdad como consecuencia de la desigualdad de Prékopa-Leindler, desigualdad funcional que demostraremos en el primer capítulo y que afirma lo siguiente:

Desigualdad de Prékopa-Leindler. Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles no negativas y $\lambda \in [0, 1]$ tal que $f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda \leq h(z)$ siempre que $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Entonces,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz.$$

Abstract

A convex body in \mathbb{R}^n is a compact convex set with non-empty interior. The aim of this paper is to study sections of centered convex bodies in \mathbb{R}^n through their centroids by k -dimensional subspaces.

We understand that a convex body $K \subseteq \mathbb{R}^n$ is symmetric if $\forall x \in K, -x \in K$. Notice that every symmetric convex body has its centroid at the origin.

At first, let's assume that our convex body K is symmetric and let's intersect it through its centroid by a linear k -dimensional subspace E . The resultant section has the maximum volume of all the sections of K by parallel subspaces of E . On the other hand, if we intersect K through its centroid by a hyperplane, we get two sets that have a half of the volume of K .

It seems coherent to wonder about what would happen if we apply these previous ideas to non-symmetric convex bodies: Will the section through the centroid still be the one with the maximum volume? Will there be some bound for the ratio between the volume of the section with maximum volume and the volume of the rest of the sections? In this case, which parameters will this bound depend on? We will give answers to all these questions in this paper.

We will show that given a convex body $K \subseteq \mathbb{R}^n$ whose centroid is at the origin and given a k -dimensional linear subspace E :

$$\max_{x \in P_{E^\perp} K} |K \cap (x + E)| \leq \left(\frac{n+1}{k+1} \right)^k |K \cap E|,$$

with $P_{E^\perp} K$ the orthogonal projection of K onto E^\perp and $|\cdot|$ the k -dimensional Lebesgue measure.

Let's consider without loss of generality a convex body K in \mathbb{R}^n (no necessarily symmetric) with its centroid at the origin and let's consider a hyperplane H passing through the origin. When we intersect K with the hyperplane H , K will be divided into two sets. Will there be some bound for the ratio between the volume of the convex body and the volume of each set? Grünbaum's inequality, which we will study in the last chapter, gives us the following bound which depends on the dimension n :

$$\frac{|K^+|}{|K|} \geq \left(\frac{n}{n+1} \right)^n,$$

where K^+ is the set $K^+ = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \geq 0\}$ for any $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, the Euclidean sphere in \mathbb{R}^n , and $|\cdot|$ the n -dimensional volume.

In order to show these previous inequalities, we will need to introduce some concepts linked with convexity and some auxiliary results. One of the most important will be Brunn's concavity principle:

Brunn's concavity principle. Let $K \subseteq \mathbb{R}^n$ be a convex body, let E be a k -dimensional linear subspace and let f be the function given by:

$$f : P_{E^\perp} K \longrightarrow [0, \infty)$$

$$x \longmapsto f(x) = |K \cap (E + x)|.$$

Then, the function $f^{\frac{1}{k}}$ is concave on its support.

We will get Brunn's concavity principle as a corollary of Brunn-Minkowski's inequality:

Brunn-Minkowski's inequality. The following equivalent statements are true:

1. $|A|^{1-\lambda}|B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|$, $\forall A, B$ non-empty Borel sets in \mathbb{R}^n and $\lambda \in [0, 1]$.
2. $|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A + B|^{\frac{1}{n}}$, $\forall A, B$ non-empty Borel sets in \mathbb{R}^n .
3. $(1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}} \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}}$, $\forall A, B$ non-empty Borel sets in \mathbb{R}^n and $\lambda \in [0, 1]$.

In order to prove Brunn-Minkowski's inequality, we will initially show the equivalence between the three statements and we will finally prove that $|A|^{1-\lambda}|B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|$, $\forall A, B$ non-empty Borel sets in \mathbb{R}^n y $\lambda \in [0, 1]$. This last inequality will be consequence of Prékopa-Leindler's inequality. We will prove it in the first chapter and it's stated as follows:

Prékopa-Leindler's inequality. Let $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ be three non-negative measurable functions and let $\lambda \in [0, 1]$ such that $f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda \leq h(z)$ whenever $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Then,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz.$$

Índice general

Prólogo	III
Abstract	V
1. Convexidad. Definiciones y notación.	1
1.1. Conjuntos convexos.	1
1.1.1. Suma de Minkowski.	1
1.2. Cuerpos convexos.	2
1.2.1. Notación para el volumen de secciones de cuerpos convexos	2
1.3. Funciones convexas y cóncavas. Definición y propiedades.	3
2. Desigualdad de Brunn-Minkowski y principio de concavidad de Brunn.	5
2.1. Equivalencias de la desigualdad de Brunn-Minkowski.	5
2.2. Desigualdad de Prékopa-Leindler.	6
2.3. Demostración de la desigualdad de Brunn-Minkowski a partir de la desigualdad de Prékopa-Leindler.	9
2.4. Principio de concavidad de Brunn.	10
3. Sección por el centro de masas y sección máxima.	13
3.1. Cota para el volumen de las secciones resultantes al intersectar un cuerpo convexo y un hiperplano.	14
3.2. Generalización al caso k -dimensional.	17
3.3. Observaciones.	21
4. Desigualdad de Grünbaum.	23
Bibliografía	29

Capítulo 1

Convexidad. Definiciones y notación.

El objetivo de este capítulo introductorio es presentar las definiciones, notación y conceptos básicos que usaremos a lo largo del trabajo. Estos conceptos pueden encontrarse en [7].

1.1. Conjuntos convexos.

Definición 1.1. Un conjunto A en \mathbb{R}^n es *convexo* si $\forall x, y \in A$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, se tiene que $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$.

Definición 1.2. Un conjunto A en \mathbb{R}^n se dice *simétrico* si: $x \in A$ implica $-x \in A$.

Observación. Las intersecciones de conjuntos convexos son convexas. En efecto:

Sean A, B conjuntos convexos de \mathbb{R}^n y sea $\lambda \in [0, 1]$. Tomamos $x, y \in A \cap B$, por consiguiente, $x, y \in A$ y dado que A es convexo se sigue que $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$. Análogamente $(1 - \lambda)x + \lambda y \in B$. Por tanto, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A \cap B$.

Definición 1.3. Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$ diremos que es una *combinación lineal convexa* de los puntos $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = x$.

Definición 1.4. Dado un conjunto $A \in \mathbb{R}^n$ se define la *envolvente convexa* de A , $\text{conv}(A)$, como el conjunto de todas las combinaciones lineales convexas de cualquier subconjunto finito de elementos de A .

Definición 1.5. Se llama *símplex* a la envolvente convexa de $(n + 1)$ puntos afínmente independientes en \mathbb{R}^n . A dichos puntos se les llama *vértices* del símplex.

1.1.1. Suma de Minkowski.

Definición 1.6. Dados A y B dos conjuntos en \mathbb{R}^n , se define su *suma de Minkowski* como sigue:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

y el producto por un escalar $\mu \in \mathbb{R}$ como $\mu A = \{\mu a : a \in A\}$.

Observación. Sean A, B dos conjuntos convexos en \mathbb{R}^n y sea $\mu \in \mathbb{R}$: $A + B$ y μA son convexas. En efecto:

Dados $a \in A$ y $b \in B$, existirán $x_1, y_1 \in A$ y $x_2, y_2 \in B$ tales que $a = x_1 + x_2$ y $b = y_1 + y_2$. Tomando $\lambda \in [0, 1]$ cualquiera, consideramos: $(1 - \lambda)a + \lambda b = (1 - \lambda)x_1 + (1 - \lambda)x_2 + \lambda y_1 + \lambda y_2 = [(1 - \lambda)x_1 + \lambda y_1] + [(1 - \lambda)x_2 + \lambda y_2] \in A + B$, por ser A y B convexas.

Consideramos $x, y \in \mu A$ y $\lambda \in [0, 1]$. Entonces, $x = \mu a_1, y = \mu a_2$ para algunos $a_1, a_2 \in A$, entonces $(1 - \lambda)x + \lambda y = (1 - \lambda)\mu a_1 + \lambda \mu a_2 = \mu [(1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2]$ y dado que A es un conjunto convexo, $(1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2 \in A$ y por tanto $\mu [(1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2] \in \mu A$.

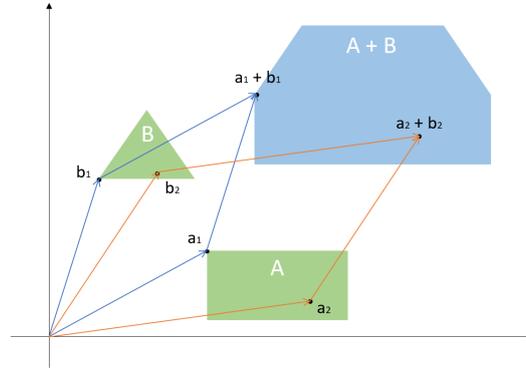


Figura 1.1: Suma de Minkowski de dos conjuntos convexos en \mathbb{R}^2

1.2. Cuerpos convexos.

Definición 1.7. Un *cuerpo convexo* es un conjunto convexo de \mathbb{R}^n que es compacto y de interior no vacío.

Definición 1.8. Dado un cuerpo convexo K de \mathbb{R}^n definimos su *centro de masas* (o *centroide*) como sigue:

$$g_K = \frac{1}{|K|} \int_K x dx,$$

donde $|K|$ denota la medida de Lebesgue de K . Esta es una integral vectorial. Es la integral componente a componente de x sobre el cuerpo convexo K .

Se dice que un cuerpo convexo K de \mathbb{R}^n está *centrado* si su centro de masas está en el origen. Es claro que todo cuerpo convexo simétrico está centrado.

1.2.1. Notación para el volumen de secciones de cuerpos convexos

Definición 1.9. Llamaremos *volumen* de un conjunto A de \mathbb{R}^n a su medida de Lebesgue y lo denotaremos por $|A|$.

Observación. Notar que en el caso de conjuntos contenidos en subespacios afines k -dimensionales (de \mathbb{R}^n), consideraremos la medida de Lebesgue k -dimensional pese a que en la notación $|\cdot|$ no se especifique la dimensión.

Por ejemplo, dado un cuerpo convexo K en \mathbb{R}^n y dado $t \in \mathbb{R}$ tal que la intersección de K con el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = t\}$ es no vacía, se sigue que $K_t := K \cap H = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in K\}$ es $(n-1)$ -dimensional, luego $|K_t|$ denota la medida de Lebesgue $(n-1)$ -dimensional de K_t .

1.3. Funciones convexas y cóncavas. Definición y propiedades.

Definición 1.10. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es convexa si f es propia, es decir, si $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = -\infty\} = \emptyset$, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\} \neq \mathbb{R}^n$ y

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. En este caso, f se dice que es una función convexa si su extensión \bar{f} definida por:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \infty & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$$

es convexa.

Definición 1.11. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es cóncava si $-f$ es propia, es decir, si $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\} = \emptyset$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = -\infty\} \neq \mathbb{R}^n$ y

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. En este caso, f se dice que es una función cóncava si su extensión \bar{f} definida por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ -\infty & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$$

es cóncava.

Observación. En ambas definiciones D ha de ser necesariamente convexo.

Observación. Una función f es cóncava si y solo si $-f$ es convexa.

Proposición 1.1. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, f es continua en el interior de D .

Demostración. Tomamos $x_0 \in \text{int} D$ y escogemos un simplex S tal que $x_0 \in \text{int} S \subseteq S \subseteq \text{int} D$ y un número $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \subseteq S$, donde $B(x_0, \varepsilon)$ es la bola euclídea de centro x_0 y radio ε . Dado un $x \in S$, podemos expresarlo como $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, con $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, donde los x_1, \dots, x_{n+1} son los vértices del simplex S . Además deducimos de la convexidad de f :

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \leq c := \max\{f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\}.$$

Consideramos $\alpha \in [0, 1]$ y $\|u\|_2 = \varepsilon$. Definimos $y = x_0 + \alpha u = (1-\alpha)x_0 + \alpha(x_0 + u)$ y se sigue $f(y) \leq (1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x_0 + u)$. Por consiguiente, se tiene:

- $f(y) - f(x_0) \leq \alpha(c - f(x_0))$.
- $\frac{1}{1+\alpha}y + \frac{\alpha}{1+\alpha}(x_0 - u) = \frac{y + \alpha x_0 - \alpha u}{1+\alpha} = \frac{\alpha u + x_0 + \alpha x_0 - \alpha u}{1+\alpha} = \frac{x_0(1+\alpha)}{1+\alpha} = x_0$

Aplicando f , que es convexa por hipótesis, se tiene: $f(x_0) \leq \frac{1}{1+\alpha}f(y) + \frac{\alpha}{1+\alpha}f(x_0 - u)$, y se sigue:

$$f(x_0) - f(y) \leq \alpha(c - f(x_0))$$

Por tanto, $|f(y) - f(x_0)| \leq \frac{1}{\varepsilon}[c - f(x_0)]|y - x_0| \quad \forall y \in B(x_0, \varepsilon)$, es decir, queda probado que f es continua en $x_0 \in \text{int} D$ cualquiera y por tanto, f es continua en $\text{int} D$. □

Observación. Dado que f es convexa si y solo si $-f$ es cóncava, se deduce que la proposición anterior también es cierta para funciones cóncavas, pues el signo no influye en la continuidad.

Capítulo 2

Desigualdad de Brunn-Minkowski y principio de concavidad de Brunn.

El objetivo de este capítulo es demostrar el principio de concavidad de Brunn que afirma que dado $K \subseteq \mathbb{R}^n$, cuerpo convexo y E subespacio lineal k -dimensional, la función

$$f : P_{E^\perp} K \longrightarrow [0, \infty) \\ x \longmapsto f(x) = |K \cap (E + x)|^{\frac{1}{k}}$$

es cóncava en su soporte.

Para ello, introduciremos la desigualdad de Brunn-Minkowski, que relaciona el volumen de la suma de Minkowski de dos borelianos con los volúmenes de dichos borelianos. Veremos primero que la desigualdad de Brunn-Minkowski se puede expresar de varias formas equivalentes y posteriormente veremos que es cierta, obteniéndola como consecuencia de la desigualdad funcional de Prékopa-Leindler.

Presentamos aquí la demostración dada por Ball en [2, Teorema 21] la cual puede encontrarse de manera más explícita en [6, Teorema 1.1, Lema 1.2] y en [1, Teorema A.2, Teorema A.3].

2.1. Equivalencias de la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Teorema 2.1. (DESIGUALDAD DE BRUNN-MINKOWSKI) Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $|A|^{1-\lambda}|B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|$, $\forall A, B$ borelianos no vacíos de \mathbb{R}^n y $\lambda \in [0, 1]$.
2. $|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A + B|^{\frac{1}{n}}$, $\forall A, B$ borelianos no vacíos de \mathbb{R}^n .
3. $(1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}} \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}}$, $\forall A, B$ borelianos no vacíos de \mathbb{R}^n y $\lambda \in [0, 1]$.

Observación. La desigualdad 1, no depende de la dimensión.

Demostración. Veamos las distintas implicaciones entre las afirmaciones para deducir su equivalencia:

$(1 \Rightarrow 2)$ Tomamos $A, B \neq \emptyset$, borelianos en \mathbb{R}^n .

Definimos: $A' = \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}}$, $B' = \frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}}$ y $\lambda = \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}} \in [0, 1]$.

Es claro que por construcción $A', B' \neq \emptyset$ borelianos y de volumen 1, ya que considerando la medida de Lebesgue se sigue que: $|A'| = \left| \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}} \right| = \frac{|A|}{(|A|^{\frac{1}{n}})^n} = 1$. Análogamente, se deduce $|B'| = 1$.

Se tiene entonces, $|(1-\lambda)A' + \lambda B'| \geq |A'|^{1-\lambda} |B'|^\lambda = 1$.

Además reescribiendo la siguiente expresión y tomando volúmenes,

$$(1-\lambda)A' + \lambda B' = \frac{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} - |B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}} \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}} + \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}} \frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}} = \frac{A+B}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}$$

y entonces,

$$1 \leq |(1-\lambda)A' + \lambda B'| = \left| \frac{A+B}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}} \right| = \frac{|A+B|}{(|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}})^n} \Rightarrow |A+B| \geq (|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}})^n.$$

Basta con tomar la raíz n -ésima a ambos lados de la desigualdad y se obtiene el resultado buscado:

$$|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A+B|^{\frac{1}{n}}.$$

(2 \Rightarrow 3) Tomamos $A, B \neq \emptyset$, borelianos en \mathbb{R}^n y $\lambda \in [0, 1]$.

Definimos $A' = (1-\lambda)A$, $B' = \lambda B$ que son borelianos por construcción.

$$\begin{aligned} |(1-\lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}} &= |A' + B'|^{\frac{1}{n}} \geq |A'|^{\frac{1}{n}} + |B'|^{\frac{1}{n}} = |(1-\lambda)A|^{\frac{1}{n}} + |\lambda B|^{\frac{1}{n}} \\ &= ((1-\lambda)^n)^{\frac{1}{n}} |A|^{\frac{1}{n}} + ((\lambda)^n)^{\frac{1}{n}} |B|^{\frac{1}{n}} = (1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Notar que la desigualdad es cierta, ya que estamos suponiendo que se verifica 2.

(3 \Rightarrow 1) Tomamos $A, B \neq \emptyset$, borelianos en \mathbb{R}^n y $\lambda \in [0, 1]$.

Recordemos la desigualdad aritmético-geométrica: $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \geq \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i}$, para todo $a_i \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda_i \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Ahora tomando volúmenes y aplicando la desigualdad aritmético-geométrica, tenemos:

$$|(1-\lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1-\lambda}{n}} |B|^{\frac{\lambda}{n}}.$$

Por tanto, $|A|^{1-\lambda} |B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|$, $\forall A, B$ borelianos no vacíos de \mathbb{R}^n . □

2.2. Desigualdad de Prékopa-Leindler.

A continuación probaremos la desigualdad de Prékopa-Leindler, se trata de una desigualdad funcional que nos permitirá demostrar la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Comenzamos con un lema previo antes de demostrar la desigualdad de Prékopa-Leindler.

Lema 2.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ una función integrable en \mathbb{R}^n . Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^{+\infty} |\{f(x) \geq t\}| dt.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Aplicando el teorema de Fubini, (estamos en condiciones de aplicarlo dado que la medida producto Lebesgue es σ -finita y \mathbb{R}^n y $[0, \infty)$ son borelianos):

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\{f(x) \geq t\}| dt &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f(x) \geq t\}}(x) dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \chi_{\{f(x) \geq t\}}(x) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{f(x)} dt dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. (DESIGUALDAD DE PRÉKOPA-LEINDLER) Sean $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles no negativas y $\lambda \in [0, 1]$ tal que $f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \leq h(z)$ siempre que $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Entonces,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz. \quad (2.1)$$

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre n , donde n es la dimensión de \mathbb{R}^n .

CASO $n=1$ y $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$

Consideramos A, B compactos en \mathbb{R} tales que $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. Definimos: a_{\min} el elemento mínimo de A , b_{\max} el elemento máximo de B , ambos existen y están bien definidos pues hemos asumido A y B compactos no vacíos de \mathbb{R} .

Por las propiedades de la suma de Minkowski se tiene:

$$(a_{\min} + B) \cup (A + b_{\max}) = \{a_{\min} + t : t \in B\} \cup \{t + b_{\max} : t \in A\} \subseteq A + B.$$

$$\text{Por tanto. } |(a_{\min} + B) \cup (A + b_{\max})| \leq |A + B|.$$

$$(a_{\min} + B) \cap (A + b_{\max}) = \{a_{\min} + t : t \in B\} \cap \{t + b_{\max} : t \in A\} = \{a_{\min} + b_{\max}\}.$$

Así $|\{a_{\min} + b_{\max}\}| = 0$, dado que la medida de Lebesgue de un punto es nula. Se tiene entonces:

$$|A + B| \geq |(a_{\min} + B) \cup (A + b_{\max})| = |a_{\min} + B| + |A + b_{\max}| - \underbrace{|(a_{\min} + B) \cap (A + b_{\max})|}_{=0} = |B| + |A|.$$

Observación. Estamos considerando la medida de Lebesgue 1-dimensional, ya que estamos considerando el caso $n = 1$ con A y B compactos no vacíos de \mathbb{R} .

Hemos probado

$$|A + B| \geq |A| + |B|$$

para conjuntos compactos en \mathbb{R} y dado que la σ -álgebra engendrada por los compactos contiene a los borelianos, esta desigualdad también se verifica para borelianos cualesquiera de \mathbb{R} .

Hemos asumido que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$, de aquí se deduce que $|f(x)|, |g(x)| \leq 1$, c.t.p. $x \in \mathbb{R}$, además hemos considerado f y g funciones no negativas, por tanto: $0 \leq f(x), g(x) \leq 1$, c.t.p. $x \in \mathbb{R}$ y $\forall t \in [0, 1)$, los conjuntos $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\}$, $\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) > t\}$ tienen medida positiva y consecuentemente son no vacíos.

Además, para cualquier $z \in (1-\lambda)\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\} + \lambda\{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq t\}$, han de existir $x \in \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$ e $y \in \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq t\}$ tales que $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ y se tiene $h(z) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \geq t^{1-\lambda} t^\lambda =$

t . Así, $z \in \{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq t\}$.

Por lo tanto se tiene:

$$\{z \in \mathbb{R} \mid h(z) \geq t\} \supseteq (1 - \lambda)\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq t\} + \lambda\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \geq t\}, \forall t \in [0, 1)$$

y usando el lema 2.1, se sigue:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(z) dz &= \int_0^1 |\{z \in \mathbb{R} \mid h(z) \geq t\}| dt \geq (1 - \lambda) \int_0^1 |\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq t\}| dt + \lambda \int_0^1 |\{y \in \mathbb{R} \mid g(y) \geq t\}| dt \\ &= (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} g(y) dy \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right)^{\lambda}, \end{aligned}$$

siendo la última desigualdad consecuencia de la desigualdad aritmético-geométrica.

CASO $n=1$ y NO necesariamente $\|f\|_{\infty} = \|g\|_{\infty} = 1$

Definimos las funciones: $\hat{f} = \frac{f}{\|f\|_{\infty}}$, $\hat{g} = \frac{g}{\|g\|_{\infty}}$ y $\hat{h} = \frac{h}{\|f\|_{\infty}^{1-\lambda} \|g\|_{\infty}^{\lambda}}$, que son medibles no negativas definidas en \mathbb{R} por serlo las f, g y h del enunciado. Además, $\|\hat{f}\|_{\infty} = \|\hat{g}\|_{\infty} = 1$. Aplicando la hipótesis del enunciado $f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \leq h(z)$ si $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\hat{f}(x)^{1-\lambda} \hat{g}(y)^{\lambda} = \left(\frac{f(x)}{\|f\|_{\infty}} \right)^{1-\lambda} \left(\frac{g(y)}{\|g\|_{\infty}} \right)^{\lambda} = \frac{f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}}{\|f\|_{\infty}^{1-\lambda} \|g\|_{\infty}^{\lambda}} \leq \frac{h(z)}{\|f\|_{\infty}^{1-\lambda} \|g\|_{\infty}^{\lambda}} = \hat{h}(z),$$

y aplicando el resultado ya demostrado a \hat{f}, \hat{g} y \hat{h} , ya que estamos en condiciones de aplicar la desigualdad (2.1), se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(z) dz &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) dy \right)^{\lambda} \iff \\ &\iff \int_{\mathbb{R}} \frac{h(z)}{\|f\|_{\infty}^{1-\lambda} \|g\|_{\infty}^{\lambda}} dz \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\|f\|_{\infty}} dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{g(y)}{\|g\|_{\infty}} dy \right)^{\lambda} \iff \\ &\iff \int_{\mathbb{R}} h(z) dz \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right)^{\lambda}. \end{aligned}$$

Queda probado el caso $n = 1$ y podemos continuar con la inducción:

CASO $n > 1$

En esta ocasión no es necesario separar en subcasos $\|f\|_{\infty} = \|g\|_{\infty} = 1$ y $\|f\|_{\infty}, \|g\|_{\infty}$ no necesariamente 1. Veremos que en la demostración no usaremos estas hipótesis, y el resultado se probará en general:

Supuesto cierto el resultado para $n - 1$, con $n > 1$, veamos que se verifica para n :

Sean $f, g, h: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow [0, \infty)$ verificando las hipótesis del enunciado. Fijamos $x_1 \in \mathbb{R}$ y consideramos:

$$\begin{aligned} f_{x_1}: \quad \mathbb{R}^{n-1} &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_2, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Se definen análogamente g_{y_1}, h_{z_1} .

Por hipótesis de inducción se verifica $\forall \lambda \in [0, 1]$ y $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$h((1-\lambda)(x_1, \dots, x_n) + \lambda(y_1, \dots, y_n)) \geq f(x_1, \dots, x_n)^{1-\lambda} g(y_1, \dots, y_n)^\lambda.$$

Así $\forall x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$ tales que $z_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1$ y $\forall (x_2, \dots, x_n), (y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tenemos:

$$h(z_1, (1-\lambda)(x_2, \dots, x_n) + \lambda(y_2, \dots, y_n)) \geq f(x_1, \dots, x_n)^{1-\lambda} g(y_1, \dots, y_n)^\lambda.$$

Por definición se tiene:

$$h_{z_1}((1-\lambda)(x_2, \dots, x_n) + \lambda(y_2, \dots, y_n)) \geq f_{x_1}(x_2, \dots, x_n)^{1-\lambda} g_{y_1}(y_2, \dots, y_n)^\lambda.$$

Aplicando la hipótesis de inducción a f_{x_1}, g_{y_1} y h_{z_1} con $z_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1$, vemos que:

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(z_2, \dots, z_n) dz_2 \cdots dz_n}_{I_1(z_1)} \geq \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n}_{I_2(x_1)} \right)^{1-\lambda} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(y_2, \dots, y_n) dy_2 \cdots dy_n}_{I_3(y_1)} \right)^\lambda$$

Aplicando de nuevo la hipótesis de inducción a I_1, I_2 e I_3 , donde I_1, I_2 e I_3 son funciones medibles no negativas en \mathbb{R} . Como $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$ verificando las hipótesis del enunciado con $I_1(z_1) \geq (I_2(x_1))^{1-\lambda} (I_3(y_1))^\lambda$ si $z_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1$ y dado que hemos demostrado el caso $n = 1$, se sigue:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(z_2, \dots, z_n) dz_2 \cdots dz_n \right) dz_1 \geq \\ & \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n \right) dx_1 \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(y_2, \dots, y_n) dy_2 \cdots dy_n \right) dy_1 \right)^\lambda. \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de aplicar el teorema de Fubini-Tonelli, ya que tal y como hemos justificado en la demostración del lema 2.1 la medida producto Lebesgue es σ -finita y estamos integrando sobre borelianos funciones medibles. Por tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(z_1, \dots, z_n) dz_1 \cdots dz_n \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n \right)^\lambda.$$

Queda probado que dadas $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles no negativas y $\lambda \in [0, 1]$ tal que $f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \leq h(z)$ siempre que $z = (1-\lambda)x + \lambda y$, se verifica (2.1) □

2.3. Demostración de la desigualdad de Brunn-Minkowski a partir de la desigualdad de Prékopa-Leindler.

Para obtener la demostración de la desigualdad de Brunn-Minkowski como consecuencia de la desigualdad de Prékopa-Leindler, basta con tomar A y B borelianos cualesquiera de \mathbb{R}^n y considerar sus funciones características: $f = \chi_A$ y $g = \chi_B$. Definimos $h = \chi_{(1-\lambda)A + \lambda B}$.

Dado que h es una función característica tomará valor 0 ó 1. Podemos considerar dos casos:

- Sea $x \in A$ e $y \in B \Rightarrow \chi_A(x)\chi_B(y) = 1$. Tomando $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in (1 - \lambda)A + \lambda B$, se tiene que $\chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}(z) = 1$, luego se verifica la desigualdad $\chi_A(x)\chi_B(y) \leq \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}(z)$.
- Si $x \notin A$ ó $y \notin B$, entonces $\chi_A(x)\chi_B(y) = 0$ y la desigualdad anterior es trivial

Dado que la desigualdad anterior equivale a $\chi_A^{1-\lambda}(x)\chi_B^\lambda(y) \leq \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}(z)$, para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ siempre que $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$, al aplicar Prékopa-Leindler a $f = \chi_A$, $g = \chi_B$ y $h = \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}$ se tiene:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}(z) dz \iff |A|^{1-\lambda} |B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|.$$

Queda así probada la desigualdad de Brunn-Minkowski para todo par de conjuntos borelianos de \mathbb{R}^n y para todo $\lambda \in [0, 1]$.

2.4. Principio de concavidad de Brunn.

A continuación demostraremos como corolario, el principio de concavidad de Brunn que mencionábamos al inicio del capítulo y para ello recurriremos a la desigualdad de Brunn-Minkowski:

Corolario 2.1. (PRINCIPIO DE CONCAVIDAD DE BRUNN) Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ cuerpo convexo y E subespacio lineal k -dimensional. Consideramos la función

$$f : P_{E^\perp} K \longrightarrow [0, \infty) \\ x \longmapsto f(x) = |K \cap (E + x)|.$$

Entonces $f^{\frac{1}{k}}$ es cóncava en $P_{E^\perp} K$.

Demostración. Consideramos E subespacio lineal k -dimensional y $P_{E^\perp} K$ la proyección ortogonal del cuerpo convexo K sobre el subespacio E^\perp . Podemos suponer sin pérdida de generalidad $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ y $E^\perp = \{\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ donde $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ es la base canónica de \mathbb{R}^n . Si no fuese así bastaría considerar UK , con U aplicación lineal ortogonal adecuada. Por tanto se tiene:

$$P_{E^\perp} K = \{x \in E^\perp \mid K \cap (x + E) \neq \emptyset\} \subseteq E^\perp \cong \mathbb{R}^{n-k} \quad \text{y} \quad E \cong \mathbb{R}^k.$$

Ahora $\forall x \in P_{E^\perp} K (\subseteq \mathbb{R}^{n-k})$, definimos $K_x = \{(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k \mid (y_1, \dots, y_k, x) \in K\}$. Tal y como hemos definido K_x , tenemos que:

$$f(x) = |K \cap (E + x)| = |K_x|. \quad (2.2)$$

Tomamos, $x_1 \neq x_2 \in P_{E^\perp} K$, cualesquiera. Entonces para cualesquiera $y_1 \in K_{x_1}$, $y_2 \in K_{x_2}$ y $\forall \lambda \in [0, 1]$, veamos que $(1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \in K_{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}$.

Observación. Los y_i con $i = 1, 2$ que hemos tomado, son de la forma $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{ik}) \in \mathbb{R}^k$. Seguiremos esta notación en lo que resta de demostración.

Se tiene que $((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2, (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) = (1 - \lambda)(y_1, x_1) + \lambda(y_2, x_2) \in K$, esto se sigue de que $(1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \in \mathbb{R}^k$ y $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$ donde $(y_1, x_1), (y_2, x_2) \in K$, con K convexo por hipótesis. Dado que lo hemos probado para y_1, y_2 cualesquiera de K_{x_1}, K_{x_2} se sigue que:

$$(1 - \lambda)K_{x_1} + \lambda K_{x_2} \subseteq K_{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}. \quad (2.3)$$

Aplicando (2.2) se dan las siguientes igualdades:

$$f^{\frac{1}{k}}((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) = |K_{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}|^{\frac{1}{k}}.$$

$$(1 - \lambda)f^{\frac{1}{k}}(x_1) + \lambda f^{\frac{1}{k}}(x_2) = (1 - \lambda)|K_{x_1}|^{\frac{1}{k}} + \lambda|K_{x_2}|^{\frac{1}{k}}.$$

Del contenido (2.3), se sigue la desigualdad:

$$|K_{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}|^{\frac{1}{k}} \geq |(1 - \lambda)K_{x_1} + \lambda K_{x_2}|^{\frac{1}{k}}.$$

Por último, aplicamos la desigualdad de Brunn-Minkowski en \mathbb{R}^k , ya que estamos tomando la medida de Lebesgue k -dimensional dado que $K_{x_1}, K_{x_2}, K_{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2} \subseteq \mathbb{R}^k$. Por tanto aplicando la desigualdad de Brunn-Minkowski en su versión: $(1 - \lambda)|A|^{\frac{1}{k}} + \lambda|B|^{\frac{1}{k}} \leq |(1 - \lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{k}}$, obtenemos:

$$|(1 - \lambda)K_{x_1} + \lambda K_{x_2}|^{\frac{1}{k}} \geq (1 - \lambda)|K_{x_1}|^{\frac{1}{k}} + \lambda|K_{x_2}|^{\frac{1}{k}}.$$

Luego queda probado que:

$$f^{\frac{1}{k}}((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1 - \lambda)f^{\frac{1}{k}}(x_1) + \lambda f^{\frac{1}{k}}(x_2).$$

Equivalentemente, $f^{\frac{1}{k}}$ es cóncava en $P_{E^\perp}K$.

□

En la siguiente figura, damos un ejemplo concreto de los objetos considerados en el corolario anterior. Tomamos el subespacio lineal E de dimensión $n - 1$ y consecuentemente E^\perp de dimensión 1. Obviamente para poder representarlo gráficamente, ha de ser $n = 3$.

Consideramos un elipsoide (cuerpo convexo K) cuya sección $K_x = K \cap (E + x)$ aparece sombreada y donde estamos considerando E un plano (dimensión $2 = n - 1$) y E^\perp el subespacio 1-dimensional perpendicular al plano. La función f definida en el corolario anterior corresponde al área de la sección sombreada.

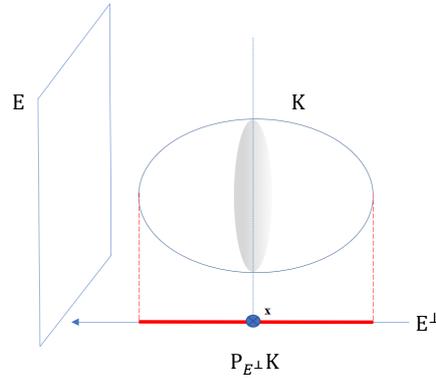


Figura 2.1: Ejemplo con $n = 3$, K elipsoide y subespacio E de dimensión $n - 1$.

Observación. Aunque hayamos considerado el ejemplo de K elipsoide, este corolario también es cierto para cuerpos convexos no simétricos así como para subespacios lineales de dimensión arbitraria (no necesariamente ha de ser E de dimensión $n - 1$). Este hecho se deduce directamente de la demostración, donde no hemos recurrido a ninguna de estas dos hipótesis adicionales, es decir, lo hemos probado en general.

Capítulo 3

Sección por el centro de masas y sección máxima.

El objetivo de este capítulo es establecer comparaciones entre la sección de un cuerpo convexo obtenida al intersecar dicho cuerpo convexo con un subespacio afín por su centro de masas y la sección paralela de mayor volumen. Dado un cuerpo convexo K en \mathbb{R}^n y un subespacio E k -dimensional pasando por el centro de masas de K , veremos que el ratio entre el volumen de la sección obtenida al intersecar el cuerpo convexo con el subespacio k -dimensional y el volumen de la máxima sección obtenida al intersecar el cuerpo convexo con algún subespacio k -dimensional paralelo a E , está acotada por una expresión que depende tanto de la dimensión del subespacio, k , como de n .

Los resultados de este capítulo fueron demostrados por Fradelizi en [3] en 1997.

Primeramente enunciaremos y demostraremos el caso $k = n - 1$, en el cual se puede acotar el ratio anterior por una constante independiente de n .

Observación. *Estamos considerando el caso en el que el subespacio E con el que intersecamos nuestro cuerpo convexo es de dimensión $k = n - 1$, consecuentemente será $E^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = 0, \forall u \in E\}$ 1-dimensional y lo identificaremos con \mathbb{R} .*

Por tanto, podemos escribir $E = \theta^\perp$, con $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Como el volumen de las secciones es invariante por rotación y traslación, podemos suponer sin pérdida de generalidad $\theta = \vec{e}_n$ y $g_K = 0$, basta con aplicar una rotación y traslación adecuadas al cuerpo convexo K . Análogamente consideramos $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}\}$ ya que es un subespacio $(n - 1)$ -dimensional verificando $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$.

Sea f (descrita en el principio de concavidad de Brunn) la función que nos da el volumen de las secciones de cuerpos convexos resultantes de intersecar el cuerpo convexo con subespacios afines:

$$\begin{aligned} f : P_{E^\perp}K &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto f(x) = |K \cap (E + x)|. \end{aligned}$$

En este caso en el que el subespacio E con el que intersecamos el cuerpo convexo K es de dimensión $k = n - 1$, a consecuencia de la identificación anteriormente justificada: $E = \theta^\perp$ con $\theta = \vec{e}_n$, podemos reescribir la función f como sigue:

$$\begin{aligned} f : [-a, b] &\longrightarrow [0, \infty) \\ t &\longmapsto f(t) = |K \cap (\vec{e}_n^\perp + t\vec{e}_n)|, \end{aligned}$$

donde $[-a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (con $a, b \geq 0$) es el soporte de f y se tiene por definición $P_{E^\perp}K = [-a\vec{e}_n, b\vec{e}_n]$.

3.1. Cota para el volumen de las secciones resultantes al intersecar un cuerpo convexo y un hiperplano.

Teorema 3.1. *Sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n tal que su centro de masas está en el origen, $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $E = \theta^\perp$ un subespacio $(n-1)$ -dimensional. Consideramos:*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty) \\ t \longmapsto f(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|.$$

Entonces se verifica:

$$\|f\|_\infty \leq f(0) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \leq e \cdot |K \cap \theta^\perp|.$$

Demostración. Toda función cóncava es continua en el interior de su soporte (Proposición 1.1) y sabemos por el principio de concavidad de Brunn que tomando $f(t) = |K \cap (E + t\theta)| = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|$, $f^{\frac{1}{n-1}}$ es cóncava en su soporte (ya que estamos considerando el subespacio E de dimensión $(n-1)$), y por tanto es continua en el interior de su soporte. En consecuencia f será continua en su soporte, $[-a, b]$, y podemos afirmar que existe $t_0 \in [-a, b]$ tal que $f(t_0) = \|f\|_\infty$. Además podemos suponer que $0 < t_0 \leq b$ (si fuera necesario, podríamos cambiar θ por $-\theta$). Además vamos a considerar $f(0) < f(t_0)$, pues en el resto de casos la desigualdad sería trivial ya que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Estamos asumiendo que K tiene su centro de masas en el origen y podemos suponer sin pérdida de generalidad $|K| = 1$. Por tanto:

$$g_K = \frac{1}{|K|} \int_K x dx = 0 \iff \int_K x dx = \int_K (x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} (x_1, \dots, x_n) \chi_K(x) dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Podemos reescribir esta expresión, aplicando el teorema de Fubini-Tonelli, ya que estamos en condiciones de aplicarlo, pues la medida producto Lebesgue es σ -finita y estamos integrando sobre un cuerpo convexo (boreliano), una función medible. Además se observa que si un vector $x = 0$ entonces $[x]_n = 0$, donde $[\cdot]_n$ denota la n -ésima coordenada de un vector respecto a la base canónica. En este caso consideramos el vector $|K|g_K$ con coordenadas respecto a la base canónica, tal y como se ha explicado al inicio del capítulo. Por tanto se tiene la siguiente igualdad:

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} (x_1, \dots, x_n) \chi_K(x) dx_1 \dots dx_n \right]_n = \int_{\mathbb{R}} t |\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in K\}| dt = \\ = \int_{\mathbb{R}} t f(t) dt = \int_{-a}^b t f(t) dt. \quad (3.1)$$

En la última desigualdad hemos usado que $f(x) = 0, \forall x \notin [-a, b]$. Se obtiene la siguiente igualdad:

$$\int_{-a}^b t f(t) dt = 0.$$

De aquí se sigue:

$$0 = \int_{-a}^b t f(t) dt = \int_{-a}^0 t f(t) dt + \int_0^b t f(t) dt \iff \int_0^b t f(t) dt = \int_{-a}^0 -t f(t) dt.$$

Dado que $\forall t \in [0, b] \ t f(t) \geq 0$ y $0 < t_0 \leq b$ (así lo hemos asumido al inicio de la demostración). Tenemos:

$$\int_{-a}^0 -t f(t) dt = \int_0^b t f(t) dt \geq \int_0^{t_0} t f(t) dt. \quad (3.2)$$

Definimos:

- $h(t) = f^{\frac{1}{n-1}}(t)$, por el principio de concavidad de Brunn $h(t)$ es cóncava en $[-a, b]$ (es decir, es cóncava en su soporte, que claramente es el soporte de f).
- $g(t)$ función afín verificando:
 - $g(0) = h(0)$ y $g(t_0) = h(t_0)$. Notar que podemos definir g sin problemas, pues dados dos puntos siempre existe una función afín pasando por ellos.

A consecuencia de las definiciones de h y g sabemos que g corta a h en t_0 y en $0 \in [0, t_0]$ y como $f(t_0) = \|f\|_\infty$ se tiene $h(t_0) = \|h\|_\infty$. Además, dado que h es cóncava y g es afín se deduce que $g(t) \geq h(t)$, $\forall t \in [-a, 0]$ y $g(t) \leq h(t)$, $\forall t \in [0, t_0]$.

Notar que $g(0) = h(0) < h(t_0) = g(t_0)$ luego por ser g afín, podemos afirmar que g es estrictamente creciente y obviamente cortará al eje de abscisas en un punto $-\gamma$, luego será $g(-\gamma) = 0$ para algún $\gamma \geq a \iff -\gamma \leq -a$, ya que en caso contrario, llegaríamos a una contradicción con el hecho de que h es cóncava y de que $g(0) = h(0)$ y $g(t_0) = h(t_0)$, pues habría un único punto de corte. Luego la función g está bien definida y es $g(t) = c(t + \gamma)$ con $c > 0$ y $\gamma \geq a$.

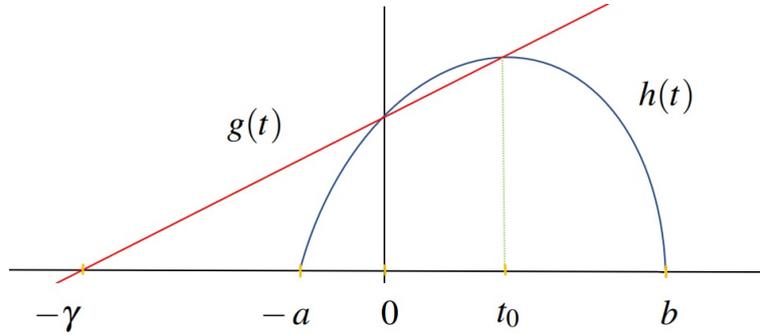


Figura 3.1: Puntos de corte y comportamiento de $g(t)$ (en rojo) y $h(t)$ (en azul).

Consideramos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\int_{-\gamma}^0 -t g^{n-1}(t) dt \stackrel{(1)}{\geq} \int_{-a}^0 -t g^{n-1}(t) dt \stackrel{(2)}{\geq} \int_{-a}^0 -t h^{n-1}(t) dt \stackrel{(3)}{\geq} \int_0^{t_0} t h^{n-1}(t) dt \stackrel{(4)}{\geq} \int_0^{t_0} t g^{n-1}(t) dt,$$

donde (1) se deduce de que $-t g^{n-1}(t) \geq 0$ en $[-\gamma, 0]$ y $[-a, 0] \subseteq [-\gamma, 0]$. Se verifica (2) ya que $-t h^{n-1}(t)$ y $-t g^{n-1}(t) \geq 0$ en $[-a, 0]$ y $g(t) \geq h(t)$, $\forall t \in [-a, 0]$. La desigualdad (3) es directa de (3.2) y de que $t h^{n-1}(t) = t f(t)$. Por último se verifica (4) dado que $g(t) \leq h(t)$, $\forall t \in [0, t_0]$. Queda probado:

$$0 \geq \int_{-\gamma}^{t_0} t g^{n-1}(t) dt.$$

y reescribiendo esta última integral tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\gamma}^{t_0} t g^{n-1}(t) dt &= c^{n-1} \int_{-\gamma}^{t_0} t (t + \gamma)^{n-1} dt \stackrel{t+\gamma=u}{=} c^{n-1} \int_0^{t_0+\gamma} u^{n-1} (u - \gamma) dt = \\
&= c^{n-1} \left(\frac{(t_0 + \gamma)^{n+1}}{n+1} - \frac{(t_0 + \gamma)^n}{n} \gamma \right) = c^{n-1} (t_0 + \gamma)^n \left(\frac{t_0 + \gamma}{n+1} - \frac{\gamma}{n} \right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Tenemos la siguiente desigualdad:

$$0 \geq \underbrace{c^{n-1}}_{\geq 0} \underbrace{(t_0 + \gamma)^n}_{\geq 0} \left(\frac{t_0 + \gamma}{n+1} - \frac{\gamma}{n} \right) \iff \frac{\gamma}{n} \geq \frac{t_0 + \gamma}{n+1}. \tag{3.4}$$

Por definición tenemos:

$$\frac{f(0)}{f(t_0)} = \left(\frac{g(0)}{g(t_0)} \right)^{n-1} = \left(\frac{\gamma}{\gamma + t_0} \right)^{n-1} \stackrel{(3.4)}{\geq} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n-1} \stackrel{f(t_0)=\|f\|_\infty}{\iff} \|f\|_\infty \leq f(0) \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n-1}.$$

y queda probada la desigualdad del enunciado.

La desigualdad $f(0) \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n-1} \leq e \cdot |K \cap E|$ se sigue de que $f(0) = |K \cap E|$ y de que $\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n-1} \leq e$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Veamos esta última desigualdad:

Definimos $b_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1}$, bastará con demostrar que $b_n \leq b_{n+1}$ equivalentemente $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n$. Notar que para el caso $n = 1$ se verifica la desigualdad. A continuación consideramos $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y aplicamos la desigualdad aritmético-geométrica.

Tomamos $\lambda_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$ y $a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{1}{n}, \dots, a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Notar que se verifican las condiciones necesarias para aplicar la desigualdad aritmético-trigonométrica pues: $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ con $\lambda_i, a_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i}_{1 + \frac{n-1}{n^2}} &\geq \underbrace{\prod_{i=1}^n a_i}_{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1}} \iff \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq 1 + \frac{n-1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \iff \\
&\iff \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^n \stackrel{(*)}{\leq} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n,
\end{aligned}$$

donde (*) se deduce de que: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{n-1}{n^2-1} = \frac{1}{n+1}$ y de que $1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \geq 1$.

Así queda probado que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos no decreciente y además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 \text{ y dado que ambos límites existen y son finitos:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1} = e$$

Por tanto, se verifica:

$$\forall n \in \mathbb{N}, e \geq \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n-1} \stackrel{f(0) \geq 0}{\iff} f(0) \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n-1} \leq f(0) e = |K \cap E| e.$$

□

3.2. Generalización al caso k -dimensional.

A continuación generalizaremos el resultado anterior, de modo que el subespacio E con el que intersecamos el cuerpo convexo K , será de dimensión k arbitraria. El caso $k = n - 1$ visto anteriormente estaría incluido en el resultado que vamos a ver. No obstante, dado que se ha utilizado una demostración diferente, se ha optado por demostrarlo de manera separada, dando así dos demostraciones del caso $k = n - 1$.

Comenzamos enunciando una proposición cuya demostración posponemos.

Proposición 3.1. Sea $q \in \mathbb{N}$ y $p > 0$. Sea $C \subset \mathbb{R}^q$ cuerpo convexo y $f : C \rightarrow [0, \infty)$, $f \not\equiv 0$, tal que $f^{\frac{1}{p}}$ es cóncava. Entonces

$$\max_{x \in \mathbb{R}^q} f(x) \leq \left(\frac{p+q+1}{p+1} \right)^p f(x_f) \quad \text{donde} \quad x_f = \frac{\int_{\mathbb{R}^q} x f(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^q} f(x) dx}.$$

A partir de esta proposición se podrá probar el siguiente teorema:

Teorema 3.2. Sea E un subespacio k -dimensional de \mathbb{R}^n tal que $1 \leq k \leq n - 1$ y sea $K \subset \mathbb{R}^n$ cuerpo convexo cuyo centro de masas es g_K . Consideramos:

$$\begin{aligned} f : K &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto f(x) = |K \cap (E + x)|. \end{aligned}$$

Entonces se verifica:

$$\|f\|_{\infty} \leq \left(\frac{n+1}{k+1} \right)^k f(g_K).$$

Demostración. Hacemos las siguientes identificaciones:

- Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $E^{\perp} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-k}\}$ y $E = \{e_{n-k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ con $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$ la base canónica de \mathbb{R}^n . En otro caso bastaría con aplicar una rotación y traslación adecuadas. Por tanto, identificando E con \mathbb{R}^k y E^{\perp} con \mathbb{R}^{n-k} , se tiene $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \cong E^{\perp} \times E$.
- Se define $\forall x \in \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\begin{aligned} f|_{P_{E^{\perp}}K} : P_{E^{\perp}}K &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto f(x) = |K \cap (E + x)| = |\{(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k \mid (x, y_1, \dots, y_k) \in K\}|. \end{aligned}$$

Por el principio de concavidad de Brunn $f^{\frac{1}{k}}$ es cóncava sobre $P_{E^{\perp}}K$.

Observar que $\forall x \in K$, $f(x) = f(P_{E^{\perp}}x)$.

- Definimos $C = P_{E^{\perp}}K$, $p = k$, $q = n - k$, para aplicar la proposición 3.1.

Dado que hemos considerado $g_K = \frac{1}{|K|} \int_K x dx$ el centro de masas del cuerpo convexo K , se sigue que $f(g_K) = |K \cap (E + g_K)| = f(P_{E^{\perp}}(g_K))$.

Por otro lado se tiene:

$$\begin{aligned}
P_{E^\perp}(g_K) &= \frac{\int_K (x_1, \dots, x_{n-k}) dx_1 \dots dx_n}{\int_K dx_1 \dots dx_n} = \frac{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} (x_1, \dots, x_{n-k}) |\{y \in \mathbb{R}^k; (x, y) \in K\}| dx_1 \dots dx_{n-k}}{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} |\{y \in \mathbb{R}^k; (x, y) \in K\}| dx_1 \dots dx_{n-k}} = \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} x f(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x) dx} = x_f.
\end{aligned}$$

Notar que en la penúltima igualdad, para simplificar la notación hemos tomado $x = (x_1, \dots, x_{n-k})$ y análogamente $dx = dx_1 \dots dx_{n-k}$.

En esta cadena de igualdades hemos aplicado el teorema de Fubini-Tonelli dado que estamos integrando funciones medibles sobre borelianos y la medida producto Lebesgue es σ -finita.

Teniendo en cuenta los parámetros que hemos tomado al inicio de la demostración, tras haber comprobado que se verifican las hipótesis de la proposición 3.1, estamos en condiciones de aplicar la desigualdad de la proposición 3.1:

$$\|f\|_\infty \leq \left(\frac{n+1}{k+1}\right)^k f(x_f) \leq \left(\frac{n+1}{k+1}\right)^k f(g_k).$$

A falta de demostrar la proposición 3.1, queda probada la desigualdad cuando intersecamos el cuerpo convexo con un subespacio E , k -dimensional para $1 \leq k \leq n-1$.

A continuación enunciaremos y demostraremos un lema auxiliar, que usaremos en la demostración de la proposición 3.1.

Lema 3.1. Sea $p > 0$ y $q > 0$ en \mathbb{R} . Sea $\varphi : [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$, $\varphi \neq 0$ una función no creciente tal que $\varphi^{\frac{1}{q}}$ es cóncava. Entonces

$$\int_0^M t^p \varphi(t) dt \geq \frac{p}{p+q+1} M \int_0^M t^{p-1} \varphi(t) dt.$$

Demostración. Tomamos $c = \frac{p}{p+q+1}$ y consideramos h verificando: h no creciente en $[0, M]$, $h^{\frac{1}{q}}$ afín, $h(M) = 0$ y $h(cM) = \varphi(cM)$.

Es claro que $\exists a > 0$ tal que tomando $h(t) = a \left(1 - \frac{t}{M}\right)^q$, $\forall t \in [0, M]$ verifica las condiciones anteriores.

Como $\varphi^{\frac{1}{q}}$ es cóncava sobre $[0, M]$, $h^{\frac{1}{q}}$ afín, $\varphi(M) \geq h(M) = 0$ y $h(cM) = \varphi(cM)$, obtenemos $\varphi^{\frac{1}{q}} \leq h^{\frac{1}{q}}$ sobre $[0, cM]$ y $\varphi^{\frac{1}{q}} \geq h^{\frac{1}{q}}$ sobre $[cM, M]$. Dado que h y φ son funciones no crecientes, $\varphi \leq h$ sobre $[0, cM]$ y $\varphi \geq h$ sobre $[cM, M]$. Se representa la situación propuesta en la figura 3.2.

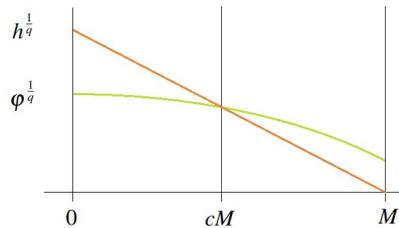


Figura 3.2: Representación de $h^{\frac{1}{q}}$ en naranja y $\varphi^{\frac{1}{q}}$ en verde.

Si consideramos la integral:

$$\int_0^M (t - cM)t^{p-1} (\varphi(t) - h(t)) dt = \underbrace{\int_0^{cM} (t - cM)t^{p-1} (\varphi(t) - h(t)) dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{cM}^M (t - cM)t^{p-1} (\varphi(t) - h(t)) dt}_{I_2}$$

Es fácil ver que: $(t - cM)t^{p-1} (\varphi(t) - h(t)) \geq 0$ en $[cM, M]$ y análogamente se verifica:

$$(t - cM)t^{p-1} (\varphi(t) - h(t)) \geq 0 \text{ en } [0, cM].$$

Por tanto se deduce:

$$\int_0^M (t - cM)t^{p-1} (\varphi(t) - h(t)) dt \geq 0 \iff \int_0^M (t - cM)t^{p-1} \varphi(t) dt \geq \int_0^M (t - cM)t^{p-1} h(t) dt.$$

Por último basta con ver que $\int_0^M (t - cM)t^{p-1} h(t) dt = 0$. De este modo obtendremos:

$$\int_0^M (t - cM)t^{p-1} \varphi(t) dt \geq 0 \iff \int_0^M t^p \varphi(t) dt \geq \int_0^M cMt^{p-1} \varphi(t) dt.$$

Se tiene por definición de h la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \int_0^M (t - cM)t^{p-1} h(t) dt &= \int_0^M (t - cM)t^{p-1} a \left(1 - \frac{t}{M}\right)^q dt \stackrel{x=\frac{t}{M}}{=} aM^{p+1} \int_0^1 (x - c)x^{p-1} (1 - x)^q dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 x^p (1 - x)^q dx}_{\beta(p+1, q+1)} - c \underbrace{\int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^q dx}_{\beta(p, q+1)} = \beta(p+1, q+1) - \frac{p}{p+q+1} \beta(p, q+1) = 0. \end{aligned}$$

□

Para terminar, reformularemos la proposición 3.1 y la demostraremos apoyándonos en el lema 3.1:

Observación. *Obtenemos la proposición 3.2 tomando $f^{\frac{1}{p}} := g$ en la proposición 3.1. Notar que se trata de resultados equivalentes.*

Proposición 3.2. *Sea $q \in \mathbb{N}$ y $p > 0$. Sea $C \subset \mathbb{R}^q$ un cuerpo convexo y $g : C \rightarrow [0, \infty)$, $g \not\equiv 0$ una función cóncava. Entonces*

$$g \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^q} x g^p(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^q} g^p(x) dx} \right) \geq \left(\frac{p+1}{p+q+1} \right) \max_{x \in \mathbb{R}^q} g(x), \quad (3.5)$$

Demostración. Por hipótesis hemos supuesto g cóncava. La desigualdad de Jensen nos dice que dada una función cóncava f (suponiendo que las integrales siguientes están bien definidas y no divergen) y siendo $\mu(x)$ medida de probabilidad, se verifica: $f \left(\int_{\mathbb{R}^q} x d\mu(x) \right) \geq \int_{\mathbb{R}^q} f(x) d\mu(x)$. Tomando en este caso: $d\mu(x) = \frac{g^p(x)}{\int_{\mathbb{R}^q} g^p(x) dx} dx$ (que es medida de probabilidad pues $\int_{\mathbb{R}^q} d\mu(x) = 1$) y $f = g$, se sigue que:

$$g \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^q} x g^p(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^q} g^p(x) dx} \right) \geq \frac{\int_{\mathbb{R}^q} g^{p+1}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^q} g^p(x) dx}.$$

A continuación definimos $\varphi(t) = |\{x \in \mathbb{R}^q \mid g(x) \geq t\}|$ y tomamos $M = \|g\|_\infty$. Entonces tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^q} g^p(x) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_0^{g(x)} p t^{p-1} dt \right) dx \stackrel{(*)}{=} \int_0^M p t^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^q; g(x) \geq t\}| dt = p \int_0^M t^{p-1} \varphi(t) dt. \quad (3.6)$$

Hemos usado en (*) Fubini-Tonelli e inducción sobre la dimensión q de \mathbb{R}^q .

Ahora, para demostrar la desigualdad (3.5), basta con probar:

$$\int_0^M t^p \varphi(t) dt \geq \frac{p}{p+q+1} M \int_0^M t^{p-1} \varphi(t) dt. \quad (3.7)$$

Esto se debe a que por (3.6)

- $\int_{\mathbb{R}^q} g^p(x) dx = p \int_0^M t^{p-1} \varphi(t) dt$
- $\int_{\mathbb{R}^q} g^{p+1}(x) dx = (p+1) \int_0^M t^p \varphi(t) dt$

De aquí se sigue:

$$g \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^q} x g^p(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^q} g^p(x) dx} \right) \geq \frac{\int_{\mathbb{R}^q} g^{p+1}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^q} g^p(x) dx} = \frac{p+1}{p} \frac{\int_0^M t^p \varphi(t) dt}{\int_0^M t^{p-1} \varphi(t) dt} := A.$$

Se verificará:

$$\begin{aligned} A \geq \left(\frac{p+1}{p+q+1} \right) \max_{x \in \mathbb{R}^q} g(x) &= \left(\frac{p+1}{p+q+1} \right) M \iff \frac{p+1}{p} \frac{\int_0^M t^p \varphi(t) dt}{\int_0^M t^{p-1} \varphi(t) dt} \geq \left(\frac{p+1}{p+q+1} \right) M \\ &\iff \int_0^M t^p \varphi(t) dt \geq \frac{p}{p+q+1} M \int_0^M t^{p-1} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Para demostrar (3.7) comprobemos que se cumplen las hipótesis del lema 3.1: Veamos que $\varphi^{\frac{1}{q}}$ es cóncava sobre $[0, M]$.

Tomamos $x, y \in [0, M]$ tales que $g(x) \geq t$ y $g(y) \geq s$. Dado que g es cóncava se tiene $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda t + (1-\lambda)s$. Viéndolo conjuntamente se verifica: $\lambda\{g \geq t\} + (1-\lambda)\{g \geq s\} \subseteq \{g \geq \lambda t + (1-\lambda)s\}$. Aplicando la desigualdad de Brunn-Minkowski (Teorema 2.1) y teniendo en cuenta que $\varphi(t) = |\{x \in \mathbb{R}^q \mid g(x) \geq t\}|$, se sigue:

$$\varphi^{\frac{1}{q}}(\lambda t + (1-\lambda)s) \geq \lambda \varphi^{\frac{1}{q}}(t) + (1-\lambda) \varphi^{\frac{1}{q}}(s)$$

y queda probado que $\varphi^{\frac{1}{q}}$ es cóncava sobre $[0, M]$.

Tal y como hemos definido φ es claro que $\forall t_1 \leq t_2, \{x \in \mathbb{R}^q \mid g(x) \geq t_2\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^q \mid g(x) \geq t_1\} \implies \varphi(t_1) \geq \varphi(t_2)$, de aquí se deduce que φ es una función no creciente, (y también lo será $\varphi^{\frac{1}{q}}$).

Así, para probar la desigualdad (3.7), es suficiente con aplicar el lema 3.1. □

3.3. Observaciones.

A continuación recalcamos mediante esta observación el interés de los resultados probados, principalmente para cuerpos convexos no simétricos.

Observación. *Debemos destacar el hecho de que todas las desigualdades demostradas son totalmente válidas para cuerpos convexos no simétricos, siendo triviales en el caso de cuerpos convexos simétricos, dado que en ese caso al intersectar el cuerpo convexo con un subespacio k -dimensional el volumen de la sección que pasa por el centro de masas coincidirá con el volumen de la sección máxima, ya que tomando $x = x$, $y = -x$, $\lambda = \frac{1}{2} \implies 1 - \lambda = \frac{1}{2}$ por el principio de concavidad de Brunn, tomando $f(x) = |K \cap (E + x)|$, $f^{\frac{1}{k}}$ es cóncava en su soporte. Por tanto:*

$$\begin{aligned} f^{\frac{1}{k}}(0) &= f^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)\right) \geq \frac{1}{2}f^{\frac{1}{k}}(x) + \frac{1}{2}f^{\frac{1}{k}}(-x) \stackrel{K \text{ simétrico}}{=} f^{\frac{1}{k}}(x) \iff f^{\frac{1}{k}}(0) \geq f^{\frac{1}{k}}(x) \iff \\ &\iff f(0) \geq f(x) \iff |K \cap E| \geq |K \cap (E + x)|. \end{aligned}$$

Por tanto como $0 = g_K$, se sigue:

$$\|f\|_{\infty} = f(0) \stackrel{\binom{n+1}{n}^{n-1} \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}}{\leq} f(0) \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}.$$

Para terminar el capítulo damos un ejemplo concreto en el que las desigualdades anteriores son igualdades:

Observación. *En el caso $k = n - 1$, se obtendrá la igualdad en el teorema 3.1 cuando K sea un cono convexo en la dirección del vector normal al hiperplano H , $\theta = \vec{e}_n$, (identificación justificada al inicio del capítulo).*

La función f definida en el principio de concavidad de Brunn, nos da el volumen de las secciones de un cuerpo convexo resultantes al intersectar el cuerpo con subespacios afines. De modo que si el soporte de f es $[-a, b]$, se sigue $|K| = \int_{-a}^b f(t) dt$.

Sea g una función $\left(\frac{1}{n-1}\right)$ -afín. Equivalentemente, sea $g(t) = (c(t + \gamma))^{n-1}$ tal que $\gamma, c > 0$ con soporte $[-\gamma, t_0]$. Tomando $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ cualquiera. Se define C , como convexo centrado en el origen, como el cuerpo de revolución cuya sección resultante al intersectarlo con el hiperplano $H_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = t\}$ es una bola $(n-1)$ -dimensional de radio $(g(t)/|B^{n-1}|)^{1/(n-1)}$ con el eje de revolución paralelo a θ , es decir $|C(t)| = |K \cap H_t|$. Veamos que $|C| = \int_{-\gamma}^{t_0} g(t) dt$. Es suficiente con demostrar que $|C(t)| = g(t), \forall t \in [-\gamma, t_0]$. Sabemos que $C(t)$ es la bola $(n-1)$ -dimensional de radio $(g(t)/|B^{n-1}|)^{1/(n-1)}$, y el volumen de una $(n-1)$ -dimensional de radio R viene dado por $|B^{n-1}|R^{n-1}$, donde B^{n-1} es la bola unidad de dimensión $(n-1)$. Por tanto $|C(t)| = g(t) \implies |C| = \int_{-\gamma}^{t_0} g(t) dt$.

Dado que C estaba centrado en el origen (por hipótesis), se sigue de (3.1):

$$\begin{aligned} 0 = g_c \implies 0 = [gC]_n &= \frac{\int_{-\gamma}^{t_0} t g(t) dt}{\int_{-\gamma}^{t_0} g(t) dt} \stackrel{(3.3)}{=} \frac{c^{n-1} (t_0 + \gamma)^n \left(\frac{t_0 + \gamma}{n+1} - \frac{\gamma}{n}\right)}{\frac{c^{n-1} (t_0 + \gamma)^n}{n}} \\ &= \frac{n}{n+1} (t_0 + \gamma) - \gamma \iff \frac{n}{n+1} (t_0 + \gamma) = \gamma. \end{aligned}$$

Además se tiene: $\|g\|_\infty = g(t_0) = (c(t_0 + \gamma))^{n-1}$ y $g(0) = (c\gamma)^{n-1}$. Por tanto:

$$\frac{g(t_0)}{g(0)} = \left(\frac{t_0 + \gamma}{\gamma}\right)^{n-1} \stackrel{g_{c=0}}{=} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}.$$

Vemos que en efecto se verifica la igualdad en el teorema 3.1 (caso $k = n - 1$) cuando el cuerpo convexo K , es un cono convexo.

Capítulo 4

Desigualdad de Grünbaum.

El objetivo de este capítulo es establecer una cota inferior que depende de la dimensión n (de \mathbb{R}^n) para el ratio entre $|K^+|$ y $|K|$, donde K es un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n con el centro de masas en el origen y K^- , K^+ son las partes de K resultantes de intersectar K con el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = 0\}$ (para algún $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$), es decir, consideramos: $K^- = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \leq 0\}$ y $K^+ = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \geq 0\}$.

Sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n , H un subespacio $(n-1)$ -dimensional, es decir $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = 0\} = \theta^\perp$ para algún $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad $\theta = \vec{e}_n$ (n -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n). En otro caso bastaría con realizar una rotación y traslación adecuadas. Sea $P_{H^\perp}K$ la proyección ortogonal de K sobre H^\perp , consideramos la función:

$$\begin{aligned} f : P_{H^\perp}K &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto f(x) = |K \cap (H + x)|. \end{aligned}$$

Tal y como se explica al inicio del capítulo 3, dado que el subespacio con el que estamos intersectando el cuerpo convexo es un hiperplano (dimensión $n-1$), consideramos la siguiente definición de f (totalmente análoga a la anterior):

$$\begin{aligned} f : [-a, b] &\longrightarrow [0, \infty) \\ t &\longmapsto f(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|, \end{aligned}$$

donde el soporte de f es $[-a, b]$ con $a, b \geq 0$ (dado que habíamos supuesto $g_K = 0$). Aplicando el teorema de Fubini-Tonelli (estamos en condiciones de hacerlo pues la medida de Lebsgue es σ -finita, los intervalos de \mathbb{R} son borelianos y f es una función medible) se obtiene:

$$|K| = \int_{-a}^b f(t) dt, \quad |K^-| = \int_{-a}^0 f(t) dt \quad \text{y} \quad |K^+| = \int_0^b f(t) dt$$

A continuación probaremos el resultado central del capítulo, que fue demostrado por el matemático croata Branko Grünbaum en [4]. Esta demostración puede encontrarse de manera más explícita en [5].

Teorema 4.1. (DESIGUALDAD DE GRÜNBAUM) *Sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n con el centro de masas en el origen y sea $K^+ = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \geq 0\}$, con $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Entonces:*

$$\frac{|K^+|}{|K|} \geq \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Demostración. Primeramente notar que a consecuencia del principio de concavidad de Brunn, podemos afirmar que la función $f : [-a, b] \rightarrow [0, \infty)$ dada por $f(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|$ es $\frac{1}{n-1}$ -cóncava en su soporte $[-a, b]$.

Tomemos una función $\frac{1}{n-1}$ -afín:

$$h : [-\gamma, \delta] \rightarrow [0, \infty)$$

$$t \mapsto h(t) = c(\delta - t)^{n-1}.$$

con $\gamma, \delta, c > 0$, verificando:

- a) $h(0) = f(0)$.
- b) $\int_0^\delta h(t) dt = \int_0^b f(t) dt$.
- c) $\int_{-\gamma}^0 h(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt$.

Siempre existe una función h de la forma $h(t) = c(\delta - t)^{n-1}$ verificando las condiciones impuestas. Se puede construir imponiendo la condición a), obteniendo después c y δ al imponer la condición b), fijando así la pendiente de $h^{\frac{1}{n-1}}$ y finalmente obteniendo γ al exigir la condición c).

Observación. Por definición las funciones f y h son no negativas sobre sus respectivos soportes $[-a, b]$ y $[-\gamma, \delta]$ y también lo serán $f^{\frac{1}{n-1}}$ y $h^{\frac{1}{n-1}}$. Además $h^{\frac{1}{n-1}}$ es afín decreciente y $f^{\frac{1}{n-1}}$ es cóncava como consecuencia del principio de concavidad de Brunn. Por otro lado sabemos que f y h se intersecan en $t = 0$, para que se verifiquen las condiciones (b) y (c) ha de ser necesariamente $-a \leq -\gamma$ y $b \leq \delta$. Obtenemos: $-a \leq -\gamma < 0 < b \leq \delta$.

Se tiene por definición:

$$|K^-| = \int_{-a}^0 f(t) dt \quad |K^+| = \int_0^b f(t) dt \quad \text{y} \quad |K| = \int_{-a}^b f(t) dt.$$

Dado que h es una función $(\frac{1}{n-1})$ -afín con soporte $[-\gamma, \delta]$. Tomando θ como al inicio de la demostración, se define C , como convexo centrado en el origen, como el cuerpo de revolución cuya sección resultante al intersecarlo con el hiperplano $H_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = t\}$ es una bola $(n-1)$ -dimensional de radio $(h(t)/|B^{n-1}|)^{1/(n-1)}$ con el eje de revolución paralelo a θ , es decir $|C(t)| = |K \cap H_t|$. Se deduce de la última observación (3.3) del capítulo anterior:

$$|C^-| = \int_{-\gamma}^0 h(t) dt \quad |C^+| = \int_0^\delta h(t) dt \quad \text{y} \quad |C| = \int_{-\gamma}^\delta h(t) dt.$$

Teniendo en cuenta las condiciones (b) y (c) impuestas al inicio de la demostración:

$$|C^-| = \int_{-\gamma}^0 h(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt = |K^-| \quad \text{y} \quad |C^+| = \int_0^\delta h(t) dt = \int_0^b f(t) dt = |K^+| \quad (4.1)$$

Sumando ambas expresiones obtenemos:

$$\int_{-\gamma}^{\delta} h(t) dt = |C| = |K| = \int_{-a}^b f(t) dt. \quad (4.2)$$

Además definimos dos funciones: $\bar{f}, \bar{h}: [-a, \delta] \rightarrow [0, \infty)$ que vienen dadas por:

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [-a, b], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \text{y} \quad \bar{h}(t) = \begin{cases} h(t) & \text{si } t \in [-\gamma, \delta], \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A consecuencia de la construcción de h y de las condiciones impuestas sobre h y f , podemos afirmar que existirá $x_0 \in [0, b]$ tal que $\bar{f}(t) \leq \bar{h}(t) \quad \forall t \in [-\gamma, 0] \cup [x_0, \delta]$ y $\bar{f}(t) \geq \bar{h}(t)$ en caso contrario. (Véase figura 4.1).

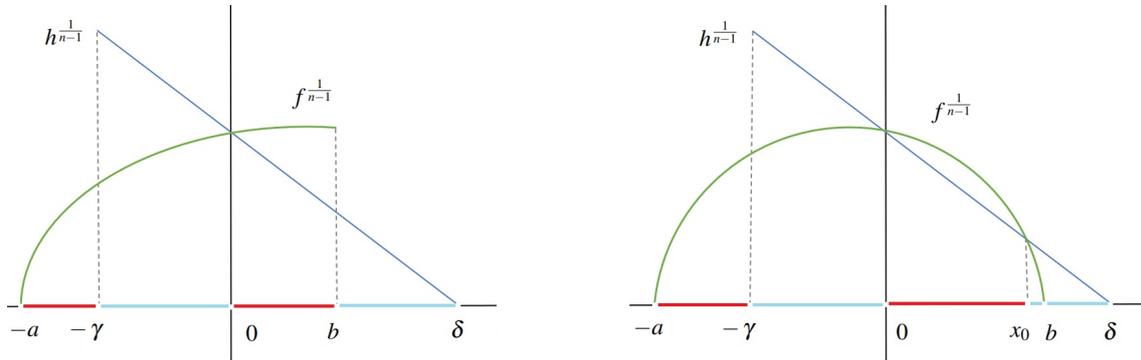


Figura 4.1: Se representa en verde $f^{\frac{1}{n-1}}$ y en azul marino $h^{\frac{1}{n-1}}$. Aparecen en azul claro los intervalos en los que $h^{\frac{1}{n-1}} \geq f^{\frac{1}{n-1}}$ y en rojo los intervalos en los que $f^{\frac{1}{n-1}} \geq h^{\frac{1}{n-1}}$.

Tras aplicar una rotación adecuada podemos tomar $\theta = \vec{e}_n$. Por tanto, la siguiente igualdad (4.3) se deduce en (3.1) en la demostración del teorema 3.1 del capítulo anterior, aplicando el teorema de Fubini-Tonelli:

$$\langle g_K, \theta \rangle = \frac{1}{|K|} \int_{-a}^b t f(t) dt = [g_K]_n. \quad (4.3)$$

Se tiene por hipótesis $g_K = 0$, se sigue de (4.3) y de las condiciones (b) y (c):

$$\begin{aligned} |C| \langle g_C, \theta \rangle &= \int_{-\gamma}^{\delta} t h(t) dt = \int_{-\gamma}^{\delta} t h(t) dt - \underbrace{\int_{-a}^b t f(t) dt}_{g_K=0 \implies \langle g_K, \theta \rangle = 0} = \int_{-a}^{\delta} t (\bar{h}(t) - \bar{f}(t)) dt = \\ &= \int_{-a}^0 t (\bar{h}(t) - \bar{f}(t)) dt + \int_0^{\delta} t (\bar{h}(t) - \bar{f}(t)) dt = \\ &= \underbrace{\int_{-a}^0 (t + \gamma) (\bar{h}(t) - \bar{f}(t)) dt}_{(*)} + \underbrace{\int_0^{\delta} (t - x_0) (\bar{h}(t) - \bar{f}(t)) dt}_{(*)} = \\ &= \int_{-a}^{-\gamma} \underbrace{(t + \gamma)}_{\leq 0} \underbrace{(\bar{h}(t) - \bar{f}(t))}_{\leq 0} dt + \int_{-\gamma}^0 \underbrace{(t + \gamma)}_{\geq 0} \underbrace{(\bar{h}(t) - \bar{f}(t))}_{\geq 0} dt + \\ &+ \int_0^{x_0} \underbrace{(t - x_0)}_{\leq 0} \underbrace{(\bar{h}(t) - \bar{f}(t))}_{\leq 0} dt + \int_{x_0}^{\delta} \underbrace{(t - x_0)}_{\geq 0} \underbrace{(\bar{h}(t) - \bar{f}(t))}_{\geq 0} dt \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

(*) : A consecuencia de las condiciones (b) y (c) se deduce $0 = \int_{-a}^0 (\bar{h}(t) - \bar{f}(t)) dt = \gamma \int_{-a}^0 (\bar{h}(t) - \bar{f}(t)) dt$ y análogamente $0 = \int_0^\delta (\bar{h}(t) - \bar{f}(t)) dt = x_0 \int_0^\delta (\bar{h}(t) - \bar{f}(t)) dt$.

Por tanto, se tiene $\langle g_C, \theta \rangle \geq 0$ y deducimos a partir de (4.2), de (4.4) y de que $h(t) \geq 0$ sobre su soporte:

$$\frac{|K^+|}{|K|} = \frac{\int_0^b f(t) dt}{\int_{-a}^b f(t) dt} = \frac{\int_0^\delta h(t) dt}{\int_{-\gamma}^\delta h(t) dt} \geq \frac{\int_{\langle g_C, \theta \rangle}^\delta h(t) dt}{\int_{-\gamma}^\delta h(t) dt}. \quad (4.5)$$

A continuación calculamos $\langle g_C, \theta \rangle$ aplicando la fórmula del capítulo anterior (4.3) y usamos el cambio de variable $\delta - t = u$:

$$\langle g_C, \theta \rangle = \frac{\int_{-\gamma}^\delta t h(t) dt}{\int_{-\gamma}^\delta h(t) dt} = \frac{c \int_{-\gamma}^\delta t (\delta - t)^{n-1} dt}{c \int_{-\gamma}^\delta (\delta - t)^{n-1} dt} = \frac{\int_0^{\delta+\gamma} (\delta - u) u^{n-1} du}{\int_0^{\delta+\gamma} u^{n-1} du} = \frac{(\delta - \gamma n) (\delta + \gamma)^n}{\frac{n(n+1)}{n}} = \frac{\delta - \gamma n}{n+1}. \quad (4.6)$$

Hemos hallado $|C| = \int_{-\gamma}^\delta h(t) dt = \frac{(\delta + \gamma)^n}{n}$ en el cálculo del denominador de $\langle g_C, \theta \rangle$.

Por último calculamos $\int_{\langle g_C, \theta \rangle}^\delta h(t) dt$ aplicando el cambio de variable $u = \delta - t$ y (4.6) :

$$\int_{\langle g_C, \theta \rangle}^\delta h(t) dt = c \frac{(\delta - [g_C]_1)^n}{n} \stackrel{\delta - \langle g_C, \theta \rangle = (\delta + \gamma) \frac{n}{n+1}}{=} c \frac{\left((\delta + \gamma) \frac{n}{n+1} \right)^n}{n}. \quad (4.7)$$

Finalmente sustituyendo en (4.5) el valor de $|C|$ y el valor obtenido en (4.7), obtenemos:

$$\frac{\int_{\langle g_C, \theta \rangle}^\delta h(t) dt}{\int_{-\gamma}^\delta h(t) dt} = \frac{\left((\delta + \gamma) \frac{n}{n+1} \right)^n}{\frac{(\delta + \gamma)^n}{n}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Se sigue de (4.5):

$$\frac{|K^+|}{|K|} \geq \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

y queda probada la desigualdad de Grünbaum. □

Observación. Del mismo modo que en el capítulo anterior, se alcanzará la igualdad en el caso del cono. Es decir, cuando $f = h$ pues en tal caso se tendría (siguiendo la notación de la demostración de la desigualdad de Grünbaum) $\langle g_C, \theta \rangle = 0$ y consecuentemente la desigualdad de (4.5) sería una igualdad y se seguiría $\frac{|K^+|}{|K|} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$. Además si $f = h$, necesariamente f es $(\frac{1}{n-1})$ -afín, sumando al hecho de

que K es un cuerpo convexo, se deduce del caso de la igualdad del capítulo anterior que $C = K$ ha de ser un cono en la dirección del vector normal al hiperplano H .

Observación. El resultado es totalmente análogo para el caso en el que se considera la sección K^- . Bastaría con aplicar el resultado probado al cuerpo obtenido al reflejar K respecto del hiperplano θ^\perp .

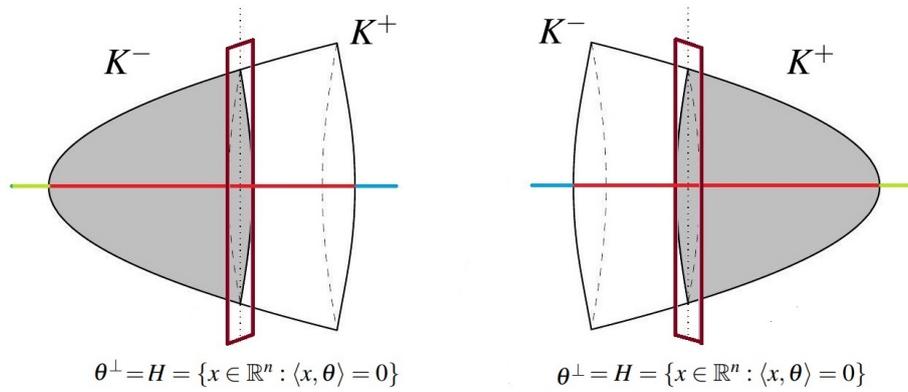


Figura 4.2: Ejemplo para un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^3$, es decir, caso $n=3$ donde el hiperplano θ^\perp será un plano (dimensión 2).

Bibliografía

- [1] ALONSO-GUTIÉRREZ, D.; BASTERO, J. *Approaching the Kannan-Lovász-Simonovits and Variance Conjectures.* Lecture Notes in mathematics 2131. Springer (2015). ISBN 978 – 3 – 319 – 132624.
- [2] BALL, K. *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in \mathbb{R}^n .* Studia Math 88 (1988), 69 – 84.
- [3] FRADELIZI, M. *Sections of convex bodies through their centroid.* Arch. Math 69 (1997), 515 – 522.
- [4] GRÜNBAUM, B. *Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes.* Pacific J.Math 10 (1960), 1257 – 1261.
- [5] MARÍN SOLA, F; YEPES NICOLÁS, J. *On Grünbaum type inequalities.* J. Geom. Anal. 31 (10) (2021), 9981 – 9995.
- [6] PISIER, G. *The volume of convex bodies and Banach space geometry.* Cambridge Tracts in Mathematics 94. Cambridge University Press (1989). ISBN 978 – 0 – 521 – 36465 – 2.
- [7] SCHNEIDER, R. *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory.* Encyclopedia of Mathematics and its applications, 2nd Edition 151 (Cambridge University press, Cambridge 2014).