Funciones Holomorfas Universales

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad
Zaragoza
1542

Carlos Villa Maluenda
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Luis Carlos García Lirola
14 de junio de 2023

Abstract

The main objective of this work is to study the different results that prove the existence of a holomorphic function to which, after applying an operation repeatedly, such as derivation or translation, this function approximates any other holomorphic function. To do so, we will deal with two important results. The first one is Birkhoff's Theorem, which states that there exists a holomorphic function that, by performing the appropriate translation, approximates any holomorphic function. For this we will first see that for any holomorphic function in an open set, there exists a polynomial that approximates it within a compact contained in the open set. Finally we will see Maclane's Theorem that proves the existence of a holomorphic function that by repeated derivation can approximate any holomorphic function.

For this purpose, I have structured the memory in three chapters. In the first chapter I introduce the notation I will use, as well as important topological and complex variable definitions and results that will be helpful for the different propositions and theorems of the work. Our aim will be to prove a particular case of Runge's Theorem on approximation of holomorphic functions by polynomial functions, which we will do in several steps. First we will explicitly find the existence of a rational function with simple poles that approximates a holomorphic function on a compact set using mainly the properties of Winding Number and Cauchy's holomorphic Theorem in order to express this function as an integral and approximate it by a Riemann sum. Then we will prove that for any function of the form $\dfrac{1}{z-z_0}$ with $z, z_0 \in \mathbb{C}$ and any compact set there exists a polynomial approximating it on that set, applying the definition of connected set and the convergence of power series. Finally, we will state Runge's Theorem that speaks about the existence of a rational function with poles that approximates a given function in a compact set. We will conclude using the previous results that by approximating our holomorphic function by a rational function with simple poles and this in turn by polynomials, we can find a polynomial function that approximates our holomorphic function, which was our objective.

During the second chapter we will prove the existence of universal holomorphic functions that allow us to approximate in compacts any entire function by means of translations according to Birkhoff's Theorem or derivations according to Maclane's Theorem. To achieve this, we will first see that there exists a sequence of polynomials that allows us to approximate any entire function locally in compacts by applying the last result of chapter one. To prove Birkhoff's theorem, after a careful selection of closed disks, we can apply Runge's Theorem at each step to construct our universal function by a sum of polynomials, verifying that this expression is the one we are looking for by means of the Weierstrass M-test and Weierstrass Theorem. For Maclane's theorem, we will express our universal function as a sum of functions a polynomials obtained by iterated integration of a dense sequence of polynomials in order to verify the necessary conditions of the theorem. We close the chapter by seeing that by means of the composition of functions it is not possible to find an entire function that approximates holomorphic functions. To do so, we work by 'reductio ad absurdum' using a property of entire and injective functions. Throughout this chapter we have repeatedly used results and definitions from Complex Variable and Analysis, such as the Casorati-Weierstrass Theorem, uniform convergence on compacts and useful results on power series.

Finally, we close the work with a chapter devoted to proving Maclane's Theorem in a more topologi-

cal way. To do this we look at a series of topological results on complete metric spaces such as Baire's Theorem and define a distance between holomorphic functions with the aim of defining a complete metric space where the convergence of a sequence of functions is equivalent to uniform convergence over compacts.
These results on complete metric spaces will allow us to prove the Gethrer-Shapiro Criterion, a result on continuous linear applications in vector complete metric spaces that asserts the existence of a vector in the space, to which after repeatedly applying the composition of a linear application, we can approximate any element of the vector space and moreover, the set of vectors that satisfy this property is dense in the complete metric space. To finish we prove Maclane's Theorem again, but this time defining two continuous linear maps on the space of holomorphic functions that allow us to apply the Gethrer-Shapiro Criterion using the distance between holomorphic functions defined in the chapter. After this, unlike the proof in chapter two, we show that not only there is more than one function that allows us to approximate holomorphic functions by means of derivatives, but also that this set of functions is dense in the space of holomorphic functions with the topology of uniform convergence on compacts, although we do not obtain an explicit expression of this function as was the case in the previous proof.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

A continuación, definiremos una serie de conceptos necesarios para la comprensión del siguiente trabajo.

1.1. Definiciones

Definición 1. *Sea (X,d) un espacio métrico, sea un numero real $r > 0$ y $a \in X$. Definimos bola abierta de radio r y centro a como el conjunto:*

$$B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$$

Definición 2. *Dado un espacio topológico X y un subconjunto $A \subseteq X$, definimos como frontera de A:*

$$\partial A = \overline{A} \cup \overline{X \setminus \Omega}$$

Definición 3. *Un recubrimiento abierto de un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico es una familia de conjuntos abiertos $\{O_i\}_{i\in I}$ de X tales que:*

$$\cup_{i\in I} O_i \supseteq A$$

Definición 4. *Dado un espacio topológico X, un subconjunto $A \subseteq X$ se dice compacto si para todo recubrimiento abierto de A, existe un subrecubrimiento finito del mismo.*

Dado que en realidad sólo trabajaremos con compactos en $\mathbb{C}$ durante el trabajo, usaremos la siguiente caracterización.

Definición 5. *Un subconjunto de $\mathbb{C}$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

Definición 6. *Sea (X,d) un espacio métrico y una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Diremos que es una sucesión de Cauchy si:*

$$\textit{Dado } \varepsilon > 0 \textit{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que si } n,m \geq n_0, \textit{ entonces } d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Definición 7. *Un espacio métrico (X,d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.*

Como ejemplo de espacio completo tenemos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Dado que la métrica euclídea de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{C}$ son la misma, $\mathbb{C}$ es completo.

Teorema de Heine-Cantor. *Si $f : M \to N$ es una función continua entre dos espacios métricos M y N, y M es compacto, entonces f es uniformemente continua, es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $z,w \in M$ y $d(z,w) < \delta$, entonces $d(f(z),f(w)) < \varepsilon$.*

Definición 8. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, a lo largo de los capítulos usaremos la siguiente notación: $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| < r\}$, $\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| \leq r\}$, $\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| = r\}$.*
Dado $A \subseteq \mathbb{C}$, denotaremos $dist(z_0, A) = \inf\{|z_0 - z| : z \in A\}$.

Desigualdad de Cauchy. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{D(z_0, R)} \subseteq \Omega$. Sea $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \overline{D(z_0, R)}$. Entonces:*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \cdot M}{R^n}, \text{ para todo } z \in \overline{D(z_0, R)}.$$

A continuación repasaremos las nociones básicas relativas a las funciones holomorfas, que son las protagonistas del trabajo. Además veremos una serie de resultados y definiciones sobre funciones holomorfas que utilizaremos durante el trabajo.
Estos resultados se demuestran y profundizan en la asignatura de "Variable Compleja".

Definición 9. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, sea $z_0 \in \Omega$. Decimos que f es holomorfa en z_0 si existe $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$ y lo denotamos como $f'(z_0)$.*
Denotamos como $H(\Omega)$ el conjunto de todas funciones holomorfas en Ω y aquellas que son holomorfas en $\mathbb{C}$ las denominaremos funciones enteras.

Recordaremos la noción de Índice de un camino respecto a un punto, que intuitivamente representa el número de vueltas que da el camino entorno al punto.
A continuación introduciremos la noción de componente conexa, que son los subconjuntos conexos maximales.

Definición 10. *Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino cerrado y sea $z_0 \notin supp(\gamma)$, donde $supp(\gamma) = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$. El Índice de z_0 respecto a γ es:*

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z_0}.$$

Además tiene las siguientes propiedades:

1. *La función $Ind_\gamma : \mathbb{C} \backslash supp(\gamma) \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \backslash supp(\gamma)$.*
2. *$Ind_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$.*
3. *$Ind_\gamma(z_0)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \backslash supp(\gamma)$.*
4. *$Ind_\gamma(z_0) = 0$, para todo z_0 en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \backslash supp(\gamma)$.*

Definición 11. *Un ciclo Γ es una colección finita de caminos cerrados, que denotamos $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, donde $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son caminos cerrados.*
El soporte del ciclo se define como $supp(\Gamma) = supp(\gamma_1) \cup \ldots \cup supp(\gamma_n)$.

Definición 12. *Dado un ciclo $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ y una función $f : supp(\Gamma) \to \mathbb{C}$ continua en $supp(\Gamma)$, la integral de f sobre el ciclo Γ se define como:*

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

Definición 13. *Dado $z_0 \notin supp(\Gamma)$ con $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ un ciclo, el índice de z_0 respecto a Γ se define como:*

$$Ind_\Gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \frac{1}{z - z_0} dz = \sum_{i=1}^{n} Ind_{\gamma_i}(z_0).$$

Un resultado fundamental de las funciones holomorfas es el Teorema holomorfo de Cauchy, que establece propiedades importantes de las integrales de funciones holomorfas a lo largo de ciclos en conjuntos abiertos del plano complejo.

Teorema holomorfo de Cauchy . *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y Γ un ciclo con $supp(\Gamma) \subseteq \Omega$ tal que $Ind_\Gamma(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.*
Entonces para todo $f \in H(\Omega)$:

1. $f(z)Ind_\Gamma(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \quad \forall z \in \Omega\backslash supp(\Gamma),$ *(Fórmula de Cauchy).*

2. $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0.$

Teorema de la aplicación abierta. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f \in H(\Omega)$ no constante. Entonces f es abierta, es decir, $f(U)$ es abierto para todo $U \subseteq \Omega$.*

Teorema de Liouville. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera y acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces f es constante.*

Definición 14. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$. Decimos que a es una singularidad aislada de f si existe $\delta > 0$ de manera que $f \in H(D(a,\delta)\backslash\{a\})$. Clasificamos las singularidades en tres tipos:*

- *Evitable: si existe $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$.*
- *Polo: si $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.*
- *Esencial: si no existe $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.*

Como ejemplo de lo anterior, presentamos las siguientes funciones:

- $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \dfrac{sen(z)}{z}$, donde 0 es una singularidad aislada ya que $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, y $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$, por lo que es una singularidad evitable de f.
- $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \dfrac{1}{z}$, donde 0 es una singularidad aislada ya que $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, y $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty$, por lo que es un polo de f.
- $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{1/z}$, donde 0 es una singularidad aislada ya que $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, y $\nexists \lim\limits_{z\to 0} f(z)$, por lo que es una singularidad esencial de f.

Definición 15. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ conjunto abierto, $a \in \Omega$ y $f : \Omega\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ y un numero natural n tal que:*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n} \quad \text{para todo } z \in \Omega\backslash\{a\}.$$

Entonces z es un polo de orden n de f. Si $n = 1$, diremos que z es un polo simple.

Otra propiedad interesante de los polos de una función es que podemos expresarla como una serie de potencias con términos de grado negativo, es decir, si $a \in \mathbb{C}$ es un polo de orden k de $f \in H(D(a,\delta)\backslash\{a\})$ para algún $\delta > 0$ entonces $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-a)^n$ para todo $z \in D(a,\delta)\backslash\{a\}$.

Teorema de Casorati-Weierstrass. *Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ abierto y $a \in \Omega$ y $f \in H(\Omega\backslash\{a\})$. Entonces son equivalentes:*

- *a es una singularidad esencial de f.*
- *Para todo $U \subseteq \Omega$ entorno abierto de a, $\overline{f(U\backslash\{a\})} = \mathbb{C}$.*

Definición 16. *Una serie de potencias es una serie de funciones de la forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

dónde $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ *es una suscesión de numeros complejos y* $z_0 \in \mathbb{C}$. *La serie define una función* $f(z)$ *donde la serie converge.*

La convergencia uniforme sobre compactos de una sucesión de funciones es una propiedad de gran importancia a lo largo del trabajo ya que nos permite aproximarnos a una función independientemente del compacto escogido en el dominio de las funciones.

Definición 17. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *abierto. Decimos que una sucesión de funciones,* $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$, *converge uniformemente sobre compactos a una función* $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ *si:*

$$\text{Para todo } K \subseteq \Omega \text{ compacto,} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

Convergencia uniforme de la serie de potencias . *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R \in (0,\infty)$. *Entonces:*

La serie converge uniformemente en todo conjunto $H \subseteq \mathbb{C}$ *tal que* $\overline{H} \subseteq D(0,R)$, *donde* $D(0,R) \subseteq \Omega$.

Criterio de M-Weierstrass. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *abierto y* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq H(\Omega)$, $K \subseteq \Omega$, *compacto. Si existe* $M_n > 0$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ *y* $|f_n(z)| \leq M_n$ *para todo* $z \in K$ *y para todo* $n \geq 1$. *Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente sobre* K.

Teorema de Weierstrass. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *abierto y* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq H(\Omega)$ *tal que* f_n *converge uniformemente a* f *sobre compactos. Entonces* $f \in H(\Omega)$.
Además en tal caso, $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ *convergerá uniformemente sobre compactos a* f'.

1.2. Resultados previos

Nuestro objetivo es ver qué condiciones se deben dar para poder aproximar funciones holomorfas mediante funciones racionales en todos los puntos de un compacto. El Teorema de Runge nos aporta un resultado global importante sobre esta característica, basándonos en la información de [4].
Sin embargo, nos centraremos en un caso particular de este, ya que sí haremos uso de él en los capítulos posteriores, para ello previamente debemos demostras una serie de resultados.
En la siguiente demostración, buscaremos construir f mediante una integral y aproximarla mediante una suma de Riemann. Dado que la demostración dada en [4] presenta afirmaciones un tanto ambiguas, presentamos un argumento distinto basado en la continuidad uniforme y mayor claridad en el uso de las propiedades de Índice.

Proposición 1.1. *Sea* $K \subseteq \mathbb{C}$ *compacto y sea* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un conjunto abierto tal que* $K \subseteq \Omega$. *Si* $f \in H(\Omega)$ *y* ε*>0, entonces existe una función racional* $r(z)$ *con todos sus polos en* $\mathbb{C}\backslash K$, *con solo polos simples y limite 0 en* ∞, *tal que*

$$\sup_{z\in K} |f(z) - r(z)| < \varepsilon$$

Demostración. Dado que K es acotado, podemos suponer que Ω es acotado. Sea

$$\sigma = \inf\{|z-w| : z \in K, w \in \mathbb{C}\backslash\Omega\}.$$

Notemos que $\sigma > 0$ gracias a que K es compacto. Sea N un entero positivo tal que $2^{-N+1} < \sigma$ y consideramos la cuadrícula en $\mathbb{C}$ formada por las cajas cerradas con vértices:

$$(\frac{j}{2^N},\frac{k}{2^N}),(\frac{j+1}{2^N},\frac{k}{2^N}),(\frac{j}{2^N},\frac{k+1}{2^N}),(\frac{j+1}{2^N},\frac{k+1}{2^N}) \text{ con } j,k\in\mathbb{N}.$$

Sea ζ el conjunto de todas las cajas que intersectan con K. Para todo $Q \in \zeta$ y para todo $z \notin \partial Q$, dado que $Q \subseteq \Omega$, tenemos que ∂Q es un camino cerrado en Ω que recorremos en sentido antihorario, por la fórmula de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q}\frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)Ind_{\partial Q}(z) = f(z) \quad si \quad z\in Q,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q}\frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)Ind_{\partial Q}(z) = 0 \quad si \quad z\notin Q,$$

donde hemos usado las propiedades del Índice de la Definición 10, ya que $\mathbb{C}\setminus Q$ es la componente no acotada de $\mathbb{C}\backslash\partial Q$ entonces $Ind_{\partial Q}(z)=0$ si $z\notin Q$ y $Ind_{\partial Q}(z)=1$ si $z\in Q$.
Fijamos $z\in K$ tal que z no está en la frontera de ningún $Q_j\in\zeta$ y sea j_0 tal que $z\in Q_{j_0}$. Notamos que:

$$\sum_{j:Q_j\in\zeta}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_j}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{j:Q_j\in\zeta} f(z)Ind_{\partial Q_j}(z) = f(z).$$

Ya que debido a la distinta orientación de los bordes compartidos por dos Q_j's tenemos que sus integrales se anulan, denotando $\tilde{\gamma}$ la imagen del camino parametrizado $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ que recorre los segmentos exteriores de $\bigcup_{i:Q_i\in\zeta}Q_i$. Luego $\tilde{\gamma}=\gamma([0,1])$ por lo que $\tilde{\gamma}=supp(\gamma)\subseteq\Omega\backslash K$ y por tanto:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw = f(z) \text{ para todo } z\in K\setminus\bigcup_{Q\in\zeta}\partial Q. \tag{1.1}$$

Dado que la integral de la izquierda de la ecuación (1.1) es una función continua en z, entonces lo será para todo $z\in K$ y no solo para aquellos en $K\setminus\bigcup_{Q\in\zeta}\partial Q$, ya que $\tilde{\gamma}\cap K=\emptyset$.
Como $\tilde{\gamma}$ está formada por segmentos lineales verticales y horizontales, $\gamma=\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_n$ (donde $\gamma_j:[0,1]\to\mathbb{C}$, $j=1,\ldots,n$ es la parametrización de estos segmentos).

Entonces podemos expresar la ecuación (1.1) como:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_0^1\frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t)-z}\gamma_j'(t)dt \;\forall z\in K. \tag{1.2}$$

Para cada j como $\gamma_j:[0,1]\to\mathbb{C}$ es un camino horizontal o vertical entonces $\gamma_j^{'}(t)=v_j\in\mathbb{C} \quad \forall t\in[0,1]$ es una constante. Además observamos que:

- Consideramos $[0,1]\times K$ con la distancia:

$$d((t,z),(t',z'))=|t-t'|+|z-z'| \quad \forall (t,z),(t',z')\in[0,1]\times K.$$

- Como [0,1] y K son compactos, $[0,1]\times K$ también es compacto con la topología generada por la métrica anterior, que coincide con la topología producto.

Para cada $j=1,\ldots,n$ consideramos la función:

$$\begin{aligned} F_j : [0,1]\times K &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (t,z) &\longmapsto \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t)-z}v_j \end{aligned}$$

Notemos que F_j está bien definida porque $\gamma_j(t)\notin K$ por lo que el denominador no se anula, además F_j es continua en $[0,1]\times K$ ya que f es continua en K y γ_j en [0,1]. Aplicando el Teorema de Heine-Cantor a la

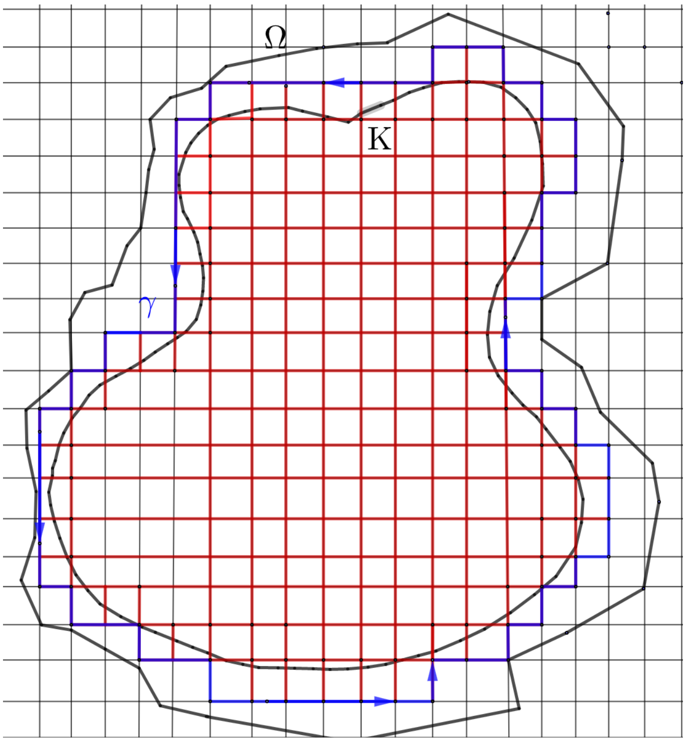

Figura 1.1: Conjuntos

función F_j, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta_j > 0$ tal que si $d((t,z),(t',z)) = |t-t'| < \delta_j$ entonces $|F_j(t,z) - F_j(t',z)| < \dfrac{\varepsilon}{n}$. Tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, ..., \delta_n\}$ y $0 = t_0 < t_1 < ... < t_M = 1$ con $|t_{i+1} - t_i| < \delta \quad \forall i \in \{0, 1, ..., M-1\}$, por lo que tenemos:

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} \frac{f(\gamma_j(t_i))}{\gamma_j(t_i) - z} v_j (t_i - t_{i-1}) \right| = \left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{f(\gamma_j(t_i))}{\gamma_j(t_i) - z} v_j dt \right|$$

$$(1.2) = \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t) - z} \gamma_j^{'}(t) dt - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} \int_{t_{i-1}}^{t_i} F_j(t_i, z) dt \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (F_j(t,z) - F_j(t_i,z)) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |F_j(t,z) - F_j(t_i,z)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\varepsilon}{n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{\varepsilon}{n} dt = \frac{\varepsilon}{2\pi} < \varepsilon \quad \forall z \in K.$$

Por lo tanto $r(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} \frac{f(\gamma_j(t_i))}{\gamma_j(t_i) - z} \cdot v_j \cdot (t_i - t_{i-1})$ es una función racional de z tal que $\lim_{z \to \infty} r(z) = 0$ con polos simples $\gamma_j(t_i) \in \mathbb{C} \backslash K$ y que cumple $\sup_{z \in K} |f(z) - r(z)| < \varepsilon$. □

Las siguiente condición y sus propiedades sobre funciones holomorfas nos serán útil para más adelante.

Lema 1.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto con $K \subseteq \Omega$. Consideramos la condición:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \text{ polinomio con } \sup_{z \in K} |f(z) - p(z)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

1. *Si $f, g \in H(\Omega)$ cumplen* (1.3), *entonces $f + g$ cumple* (1.3).
2. *Si $f, g \in H(\Omega)$ cumplen* (1.3), *entonces $f \cdot g$ cumple* (1.3).

Demostración. Tomamos $0 < \varepsilon < 1$.

1. Por hipótesis existen p y q polinomios con $\sup_{z\in K}|f(z)-p(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\sup_{z\in K}|g(z)-q(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Entonces, dado $z \in K$:
$$\begin{aligned}|(f(z)+g(z))-(p(z)+q(z))| &= |(f(z)-p(z))+(g(z)-q(z))| \\ &\le |f(z)-p(z)|+|g(z)-q(z)| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

2. Consideramos $M = \sup_{z\in K}|f(z)|$ y $N = \sup_{z\in K}|g(z)|$.
   Por hipótesis existen p y q polinomios con $\sup_{z\in K}|f(z)-p(z)| < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$ y $\sup_{z\in K}|g(z)-q(z)| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$.
   Entonces, dado $z \in K$:
$$\begin{aligned}|f(z)g(z)-p(z)q(z)| &= |f(z)g(z)-f(z)q(z)+f(z)q(z)-p(z)q(z)| \\ &\le |f(z)|\cdot|g(z)-q(z)|+|f(z)-p(z)|\cdot|q(z)| \\ &\le |f(z)|\cdot|g(z)-q(z)|+|f(z)-p(z)|\cdot(|q(z)-g(z)|+|g(z)|) \\ &\le M\cdot|g(z)-q(z)|+|f(z)-p(z)|\cdot(|q(z)-g(z)|+N).\end{aligned}$$
   Por tanto,
$$\begin{aligned}\sup_{z\in K}|f(z)g(z)-p(z)q(z)| &< M\cdot\frac{\varepsilon}{2(M+1)}+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2(M+1)}+N\right) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}\left(\frac{\varepsilon}{2}+N\right) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(N+1)}\left(\frac{1}{2}+N\right) \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$ □

Aplicando reiteradamente el Lema (1.1), se tiene que si $f_1,\dots,f_n$ cumplen (1.3) entonces $f_1+\dots+f_n$ y $f_1\cdot\dots\cdot f_n$ cumplen (1.3).
Dado que nuestro objetivo es aproximar cualquier función holomorfa mediante polinomios, vamos a empezar demostrando un resultado por el cual podemos aproximarnos a funciones del tipo $\frac{1}{z-z_0}$ con $z, z_0 \in \mathbb{C}$ mediante un polinomio.

Lema 1.2. *Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto con $\mathbb{C}\backslash K$ conexo y $z_0 \notin K$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio p tal que:*
$$\sup_{z\in K}\left|\frac{1}{z-z_0}-p(z)\right| < \varepsilon$$

Demostración. Consideramos:
$$G = \{w \in \mathbb{C}\backslash K : \forall\varepsilon > 0 \text{ existe } p \text{ polinomio con } \sup_{z\in K}|\frac{1}{z-w}-p(z)| < \varepsilon\}.$$

Vamos a probar que $G = \mathbb{C}\setminus K$. Tenemos que:

1. $G \neq \emptyset$.
   Tomamos $R > 0$ tal que $K \subseteq \overline{D(0,R/2)}$. Entonces
$$\frac{1}{z-R} = \frac{-1}{R}\cdot\frac{1}{1-z/R} = \frac{-1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(z/R)^n \quad \forall z : |z| < R.$$

Además, la convergencia de la serie es uniforme en compactos contenidos en $D(0,R)$ y $K \subseteq \overline{D(0,R/2)} \subseteq D(0,R)$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z\in K}\left|\frac{1}{z-R} - (\frac{-1}{R})\cdot\sum_{n=0}^{N}(\frac{z}{R})^n\right| < \varepsilon.$$

Tomando $p(z) = (\frac{-1}{R})\cdot\sum_{n=0}^{N}(\frac{z}{R})^n$, tenemos que $R \in G$.

2. G es abierto.
Sea $\alpha \in G$. Denotamos como r=dist(α,K), (que es mayor que 0 porque $\alpha \notin K$ y K es compacto). Veamos que $D(\alpha, r/2) \subseteq G$.
Sea $\beta \in D(\alpha, r/2)$, tenemos:

$$\frac{1}{z-\beta} = \frac{1}{(z-\alpha)\left(1-\dfrac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right)} = \frac{1}{z-\alpha}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right)^n \quad \text{para todo } z \text{ tal que } \left|\frac{\alpha-\beta}{z-\beta}\right| < 1,$$

es decir, $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D(\beta, |\alpha-\beta|)}$. Además, esa serie converge uniformemente sobre compactos contenidos en $\mathbb{C}\backslash\overline{D(\beta, |\alpha-\beta|)}$. Como $|\alpha-\beta| < r/2$, se tiene que $K \subseteq \mathbb{C}\backslash\overline{D(\beta, |\alpha-\beta|)}$
Así que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que :

$$\sup_{z\in K}\left|\frac{1}{z-\beta} - \frac{1}{z-\alpha}\cdot\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right)^n\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideramos $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}\cdot\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right)^n$.
Como $\alpha \in G$, la función $\frac{1}{z-\alpha}$ cumple la condición (1.3). Aplicando repetidas veces el Lema 1.1, obtenemos que f también cumple (1.3). Por tanto, existe un polinomio p con $\sup_{z\in K}|f(z)-p(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y entonces, por la desigualdad triangular tenemos que:

$$\sup_{z\in K}\left|\frac{1}{z-\beta} - p(z)\right| \le \sup_{z\in K}\left(\left|\frac{1}{z-\beta} - f(z)\right| + |f(z)-p(z)|\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es decir, $\beta \in G$, por lo tanto, $D(\alpha, r/2) \subseteq G$, esto prueba que G es abierto.

3. $(\mathbb{C}\backslash K)\backslash G$ es abierto, es decir, G es cerrado relativo en $\mathbb{C}\backslash K$.
Sea $\beta \in (\mathbb{C}\backslash K)\backslash G$ y $r = dist(\beta, K)$, veamos que $D(\beta, r/3) \subseteq (\mathbb{C}\backslash K)\backslash G$. Tenemos que $D(\beta, r/3) \subseteq \mathbb{C}\backslash K$, tomamos $\alpha \in D(\beta, r/3) \cap G$.
Dado $z \in K$, se tiene:

$$|\alpha - z| \ge |\beta - z| - |\beta - \alpha| \ge dist(\beta, K) - |\beta - \alpha| > r - \frac{r}{3} = \frac{2r}{3}.$$

Por lo tanto, dist(α,K)>$\frac{2r}{3}$. Como $\alpha \in G$, por lo visto en (2) tenemos que $\beta \in D(\alpha, \frac{r}{3}) = D(\alpha, \frac{2r/3}{2}) \subseteq G$.
Como $\mathbb{C}\backslash K$ es conexo, obtenemos de (1), (2), (3) que $\mathbb{C}\backslash K = G$. □

1.3. El Teorema de Runge

Basándonos en [4], una vez vistos los resultados necesarios procedemos a la enunciación del Teorema de Runge y un importante resultado de él.

Teorema de Runge. *Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto y f una función holomorfa en un entorno de K. Supongamos que P es un subconjunto de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \backslash K$ que contiene un punto de cada componente conexa de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \backslash K$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una función racional $r(z)$ con polos en P tal que:*

$$\sup_{z \in K} |f(z) - r(z)| < \varepsilon$$

Dado a que no vamos a hacer uso del Teorema de Runge en su total generalidad, probaremos un caso particular de este, del que sí necesitaremos su aplicación más adelante.

Teorema 1. *Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto con $\mathbb{C} \backslash K$ conexo, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $K \subseteq \Omega$ y f una función holomorfa en Ω. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe q polinomio con:*

$$\sup_{z \in K} |f(z) - q(z)| < \varepsilon$$

Demostración. Sea $f \in H(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Por la Proposición (1.1) existe una función racional $r(z)$ con polos (simples) en $\mathbb{C} \backslash K$ y limite cero en el infinito, tal que:

$$\sup_{z \in K} |f(z) - r(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podemos escribir $r(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{z - \beta_j}$ para todo $z \in K$ con $\beta_j \in \mathbb{C} \backslash K$, $\alpha_j \neq 0$ y $N \in \mathbb{N}$. Por el Lema (1.2), existen p_j polinomios que satisfacen:

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{1}{z - \beta_j} - p_j(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2N|\alpha_j|}.$$

Consideramos $q(z) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j p_j(z)$, que es un polinomio que verfica para todo $z \in K$:

$$\begin{aligned}
|f(z) - q(z)| &\leq |f(z) - r(z)| + |r(z) - q(z)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\alpha_j}{z - \beta_j} - \alpha_j p_j(z) \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j| \left| \frac{1}{z - \beta_j} - p_j(z) \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j| \frac{\varepsilon}{2N|\alpha_j|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sup_{z \in K} |f(z) - q(z)| \leq \varepsilon$ como buscábamos. □

Capítulo 2

Existencia de funciones holomorfas universales

En este capítulo nos centraremos en una serie de resultados que verifican la existencia de funciones holomorfas universales mediante las cuales podremos aproximarnos a cualquier función entera a través de la reiteración de distintas operaciones como la derivación y traslación. Veremos que no siempre es posible encontrar una función que nos lo permita mediante la composición sucesiva de sí misma.

2.1. El Teorema de Birkhoff

Nuestro objetivo ahora es probar que a través de la existencia de una función entera mediante la cual, realizando reiteraciones de una traslación, es posible aproximarnos a cualquier otra función entera, para ello seguiremos la demostración que se da en [1].
Para ello primero demostraremos la existencia de una sucesión de polinomios que se aproximan localmente en compactos a nuestra función entera.

Lema 2.1. *Existe una sucesión $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ de polinomios tales que para toda $f \in H(\mathbb{C})$, para todo $R > 0$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\sup_{z \in \overline{D(0,R)}} |f(z) - p_n(z)| < \varepsilon$$

Demostración. Consideramos el conjunto P de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, es decir:

$$P = \{\sum_{j=0}^{n} c_j z^j : n \in \mathbb{N}, c_j = a_j + ib_j \text{ con } a_j, b_j \in \mathbb{Q}\}.$$

Para cada grado $n \in \mathbb{N}$, existe una biyección entre los polinomios en P de grado menor o igual que n y $\mathbb{Q}^{2(n+1)}$, que es numerable para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que P es unión de polinomios que se encuentran en P de grado menor o igual que n, que son numerables, se tiene que P es numerable y por lo tanto podemos escribirlo como $P = \{p_1, p_2, ...\}$.
Dado $f \in H(\mathbb{C})$, $R > 0$ y $\varepsilon > 0$ y como $\overline{D(0,R)} \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, por el Teorema 1 existe un polinomio $p = \sum_{j=0}^{n} (a_j + ib_j) z^j$ tal que $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ que satisface:

$$\sup_{z \in \overline{D(0,R)}} |f(z) - p(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Tomando $\widetilde{a}_j, \widetilde{b}_j \in \mathbb{Q}$ con $|a_j - \widetilde{a}_j| < \dfrac{\varepsilon}{4R^j n}$ y $|b_j - \widetilde{b}_j| < \dfrac{\varepsilon}{4R^j n}$ y $\widetilde{p}_n \in P$ dado por $\widetilde{p}_n(z) = \sum_{j=0}^{n} (\widetilde{a}_j + i\widetilde{b}_j) z^j$, luego para todo $z \in \overline{D(0,R)}$ observamos que:

$$\begin{aligned}|p(z)-\widetilde{p}_n(z)| &\le \sum_{j=0}^{n} |(a_j+ib_j)z^j-(\widetilde{a}_j+i\widetilde{b}_j)z^j| \\ &\le \sum_{j=0}^{n}(|a_j-\widetilde{a}_j|+|b_j-\widetilde{b}_j|)R^j \\ &\le \sum_{j=0}^{n}\frac{\varepsilon}{2n}=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$|p(z)-\widetilde{p}_n(z)| \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } z \in \overline{D(0,R)}. \tag{2.2}$$

Por lo que de (2.1) y de (2.2) obtenemos que:

$$|f(z)-\widetilde{p}_n(z)| \le |f(z)-p(z)|+|p(z)-\widetilde{p}_n(z)| < \varepsilon \text{ para todo } z \in \overline{D(0,R)}.$$

□

Ya nos vemos en condiciones de probar la existencia de estas funciones holomorfas universales mediante el siguiente resultado probado por David Birkhoff en 1929 enunciado en [7], sin embargo seguiremos la demostración de [1].

Figura 2.1: George D. Birkhoff

Teorema 2.1 (Birkhoff, 1929)**.** *Existe una función $f \in H(\mathbb{C})$ tal que para todo $g \in H(\mathbb{C})$ y para todo $R,\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$|f(z+n)-g(z)| < \varepsilon \textit{ para todo } z \in D(0,R).$$

Demostración. Sea $(P_j)_j$ una sucesión densa de polinomios en $H(\mathbb{C})$ tal que P_j aparece infinitamente en esta sucesión, para ello consideramos (p_n) una sucesión densa de polinomios cuya existencia está garantizada por el Lema 2.1. Sea $(q_n) \in \mathbb{N}$ la sucesión de números primos y $P_{q_n^k} = p_n$ para todo $k,n \in \mathbb{N}$, de manera que $P_n = p_1$ si n no es potencia de un número primo.
Consideramos la sucesión $(D_j)_j$ de discos cerrados disjuntos de radio $j \in \mathbb{N}$, cuyos centros c_j constituyen una sucesión creciente de numeros naturales. Sea E_j una sucesión de discos cerrados, cada uno centrado en el origen, tales que $D_j = \overline{D(c_j, j)} \subseteq E_j$ y $D_{j+1} \cap E_j = \emptyset$, por lo tanto $D_i \subset E_j$ para $0 \le i \le j$ y $D_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \ge j+1$. Esta elección de los discos la podemos ver representada en la Figura 2.1.

Sea $Q_1 = P_1$, consideramos $K_2 = E_1 \cup D_2$ y $\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $K_2 \subseteq \Omega_2$. Tomamos $f_1 \in H(\Omega_2)$ de manera que $f_1(z) = 0$ para todo $z \in E_1$ y $f_1(z) = P_2(z-c_2) - Q_1(z)$ para todo $z \in D_2$. Dado que K_2 es compacto con $\mathbb{C}\backslash K_2$ conexo tal que $K_2 \subseteq \Omega_2$ y $f_1 \in H(\Omega_2)$. Aplicando el Teorema 1, existe un polinomio Q_2 tal que:

$$\sup_{z\in K_2} |Q_2(z)-f_1(z)| < \frac{1}{2},$$

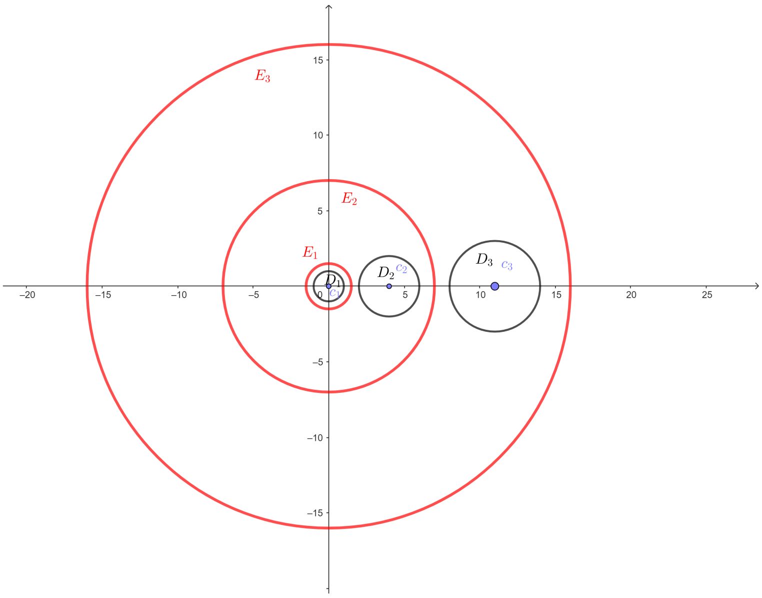

Figura 2.2: Discos de la demostración del Teorema 2.1

que por definición de f_1, tenemos que:

$$\sup_{z\in E_1}|Q_2(z)|<\frac{1}{2}\text{ y }\sup_{z\in D_2}|Q_2(z)-(P_2(z-c_2)-Q_1(z))|<\frac{1}{2}.$$

Continuando inductivamente, para todo $n\in\mathbb{N}$ consideramos $K_n=E_{n-1}\cup D_n$ y $\Omega_n\subseteq\mathbb{C}$ abierto tal que $K_n\subseteq\Omega_n$ y $f_n\in H(\Omega_n)$ de forma que $f_n(z)=0$ para todo $z\in E_{n-1}$ y $f_n(z)=P_n(z-c_n)-\sum_{i=1}^{n-1}Q_i(z)$ para todo $z\in D_n$. De nuevo, aplicando el Teorema 1, existe un polinomio Q_n tal que:

$$\sup_{z\in K_n}|Q_n(z)-f_n(z)|<\frac{1}{2^{n-1}},$$

es decir,

$$\sup_{z\in E_{n-1}}|Q_n(z)|<\frac{1}{2^{n-1}}\text{ y }\sup_{z\in D_n}|Q_n(z)-(P_n(z-c_n)-\sum_{i=1}^{n-1}Q_i(z))|<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Tomamos $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$. Observamos que esta función está bien definida y es entera ya que, dado $R>0$, si $n_0\in\mathbb{N}$ es tal que $D(0,R)\subseteq E_{n_0}$, entonces $|Q_n(z)|<\frac{1}{2^{n-1}}$ para todo $n\geq n_0$ y para todo $z\in D(0,R)$. Además como $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}<\infty$ por el Criterio de M-Weierstrass tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(z)$ converge uniformemente sobre $D(0,R)$ y en particular sobre compactos contenidos en $D(0,R)$. Como además $Q_n\in H(\Omega)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, considerando $f_n(z)=\sum_{i=1}^{n}Q_i(z)$ tenemos por el Teorema de Weierstrass que f es holomorfa.
Veamos ahora que para todo $g\in H(\mathbb{C})$, y para todo $R,\varepsilon>0$ existe $j\in\mathbb{N}$ tal que:

$$|f(z+c_j)-g(z)|<\varepsilon\text{ para todo }z\in D(0,R).$$

Dados $g\in H(\mathbb{C}),R>0,\varepsilon>0$, por el Lema 2.1 existe P_k tal que:

$$\sup_{z\in D(0,R)}|g(z)-P_k(z)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Como los P_k se repiten infinitas veces, podemos suponer que k es suficientemente grande para que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\varepsilon}{4}$ y para que $D(0,R) \subseteq E_k$. Entonces:

$$\sup_{z\in D_k} |\sum_{i=1}^{k} Q_i(z) - P_k(z-c_k)| < \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\varepsilon}{4} \text{ para todo } z \in D_k.$$

Además:

$$\left| f(z) - \sum_{i=1}^{k} Q_i(z) \right| = \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} Q_i(z) \right| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} |Q_i(z)| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ para todo } z \in E_k.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |f(z+c_k) - g(z)| &\leq |f(z+c_k) - P_k(z)| + |P_k(z) - g(z)| \\ &\leq \left| f(z+c_k) - \sum_{i=1}^{k} Q_i(z+c_k) \right| + \left| \sum_{i=1}^{k} Q_i(z+c_k) - P_k(z) \right| \\ &+ |P_k(z) - g(z)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ para todo } z \in D(0,R). \end{aligned}$$

□

2.2. El Teorema de Maclane

Un resultado importante de Maclane enunciado en [8] nos muestra que existe una función entera cuya colección de derivadas es densa en $H(\mathbb{C})$, cuya demostración que a continuación mostramos se encuentra en [1].

Figura 2.3: Gerald R. Maclane

Teorema de Maclane. *Existe una función $f \in H(\mathbb{C})$ tal que para todo $g \in H(\mathbb{C})$ y para todo $R, \varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$|f^{(n)}(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ para todo } z \in D(0,R).$$

Demostración. Sea $I : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ definida por:

$$I(h)(z) = \int_0^z h(w)dw.$$

Por lo que si $g(z) = z^n$, entonces $I(g)(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ y, en general:

$$|I^k g(z)| = \frac{|z|^{n+k}}{(n+k)\cdots(n+1)} \leq R^n \frac{R^k}{k!}, \text{ para todo } z \in D(0,R).$$

Donde I^k denota $\overbrace{I\circ\ldots\circ I}^{k}$. Por lo tanto, $\lim_{k\to\infty}\sup_{|z|\le R}|I^k g(z)| = 0$ y en particular para cualquier polinomio P y cualquier $\delta, R > 0$ existe $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{|z|\le R}|I^k P(z)| < \delta$ para todo $k \ge \widetilde{k}$. Además, dado $\varepsilon > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tomamos $\delta < \min\{\frac{(R/2)^j}{j!}\varepsilon : j = 0,\ldots,M\}$. Por lo tanto si $h \in H(\mathbb{C})$ con $|h(z)| \le \delta$, para todo $z \in D(0,R)$ tenemos por la desigualdad de Cauchy:

$$|h^{(j)}(w)| \le \frac{j!\sup_{|z|\le R}|h(z)|}{(R/2)^j} \le \frac{j!\delta}{(R/2)^j} < \varepsilon, \forall w \in D(0,R/2) \text{ y } \forall j = 0,\ldots,M.$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0, R > 0, M \in \mathbb{N}$ y todo polinomio P existe $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \ge \widetilde{k}$ $|(I^k p)^{(j)}(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in D(0,R/2)$ y para todo $j = 0,\ldots,M$.
Sea $\{P_j : j \in \mathbb{N}\}$ una sucesión densa de polinomios en $H(\mathbb{C})$, construida como en la prueba de Birkhoff y sea $k_1 = 0$, $Q_1 = P_1$ y escogemos $k_2 > k_1 + degP_1$. Sea $Q_2 = I^{k_2}(P_2)$, donde k_2 satisface además $|Q_2(z)| < \frac{1}{2^2}$ para $|z| \le 2$. Luego tomamos $k_3 > k_2 + degP_2$ y definimos $Q_3 = I^{k_3}(P_3)$ dónde la elección de k_3 verifica:

$$|Q_3(z)| \le \frac{1}{2^3}, |Q_3'(z)| \le \frac{1}{2^3},\ldots, |Q_3^{(k_2)}(z)| \le \frac{1}{2^3} \text{ para todo } z \text{ tal que } |z| \le 3.$$

Procediendo de manera inductiva, llegamos a que escogiendo $k_n > k_{n-1} + degP_{n-1}$, con k_n verificando que si $Q_n = I^{k_n}(P_n)$, entonces:

$$|Q_n(z)| \le \frac{1}{2^n}, |Q_n'(z)| \le \frac{1}{2^n},\ldots, |Q_n^{(k_{n-1})}(z)| \le \frac{1}{2^n} \text{ para todo } z \text{ tal que } |z| \le n.$$

Consideramos $f = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$. Dado que $\sup_{|z|\le n}|Q_n(z)| \le \frac{1}{2^n}$ por el criterio de M-Weierstrass tenemos que f converge uniformemente en todo compacto contenido en $\mathbb{C}$.
Consideramos $g \in H(\mathbb{C}), R > 0, \varepsilon > 0$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > R$ y $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$. Escogemos $n \ge n_0$ tal que $\sup_{|z|\le n_0}|g(z) - P_n(z)| < \varepsilon$. Luego para todo $z \in D(0,n)$ tenemos que:

$$|g(z) - f^{(k_n)}(z)| \le |g(z) - P_n(z)| + \sum_{j>n}^{\infty}|Q_j^{(k_n)}(z)| < 2\varepsilon.$$

□

Como podemos observar hemos llegado a encontrar constructivamente una expresión de la función entera f, algo que no será posible cuando veamos más adelante otra forma de demostrar este resultado de una manera topológica.

2.3. Un contraejemplo

A continuación veremos que no siempre podemos encontrar funciones holomorfas universales, por ejemplo, mediante la composición sucesiva de ella misma, basándonos en la información del artículo [7].
Primero veremos una propiedad de las funciones enteras y inyectivas definidas en $\mathbb{C}$ que será de especial importancia para probar seguidamente la inexistencia de funciones enteras con la característica mencionada anteriormente.

Proposición 2.1. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función inyectiva y entera, entonces f es afín.*

Demostración. Sea f una función entera y inyectiva, por lo tanto no constante. Consideramos $g(z) := f(1/z)$ para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, luego $z = 0$ puede ser una singularidad esencial de g, una singularidad evitable o un polo.
Supongamos que $z = 0$ es una singularidad evitable de g. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que:

$$g(z) = \begin{cases} f(1/z) & \text{si } z \neq 0 \\ \alpha & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es continua y por lo tanto $f(\mathbb{C}\backslash\overline{D(0,1)}) \subseteq g(\overline{D(0,1)})$ es acotado. Entonces $f(\mathbb{C}) = f(\mathbb{C}\backslash\overline{D(0,1)}) \cup f(\overline{D(0,1)})$ es acotado. Como f es entera y acotada, por el Teorema de Liouville tenemos que f es constante, contradiciendo que f es no constante.
Si $z = 0$ es una singularidad esencial, considero $D(0,1) \subseteq \mathbb{C}$, como $0 \in D(0,1)$ y $g \in H(D(0,1)\backslash\{0\})$, por el Teorema de Casorati-Weierstrass tenemos que $\overline{g(D(0,1)\backslash\{0\})} = \mathbb{C}$.
Consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $\Omega \cap (D(0,1)\backslash\{0\}) = \emptyset$, por el Teorema de la aplicación abierta $g(\Omega)$ es abierto. Entonces tomamos $z \in g(\Omega)$, luego $z \in \mathbb{C} = \overline{g((D(0,1)\backslash\{0\})}$. Como $g(\Omega)$ es un entorno abierto de z entonces $g(\Omega) \cap g((D(0,1)\backslash\{0\}) \neq \emptyset$ que contradice que f sea inyectiva.
Entonces $z = 0$ es un polo de grado $n \in \mathbb{N}$ de g, es decir, $\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} f(1/z) = \infty$. Entonces el desarrollo en serie de potencias de g en $z = 0$ es:

$$g(z) = a_{-n}z^{-n} + ... + a_{-1}z^{-1} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k.$$

Por lo que el desarrollo en serie de potencias de f en $z = 0$ es:

$$f(z) = a_{-n}z^{n} + ... + a_{-1}z + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}.$$

Como $f \in H(\mathbb{C})$, su desarrollo solo contiene términos no negativos, es decir:

$$f(z) = a_{-n}z^{n} + ... + a_{-1}z + a_0.$$

Por tanto, f es un polinomio.
Si f tiene dos raíces distintas, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 \neq z_2$ entonces $f(z_1) = f(z_2)$ que no es posible ya que f es inyectiva, por lo tanto existirán $z_0, c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = c(z - z_0)^n$ para todo $n \geq 1$.
Pero si $n \geq 2$ entonces existirán dos números distintos tales que $z_1 = 1 + z_0$ y $z_2 = z_0 + e^{2\pi i/n}$ de manera que $f(z_1) = f(z_2)$ lo que sería una contradicción.
Entonces tenemos que $n = 1$ y por lo tanto f es afín. □

Ahora ya somos capaces de probar su inexistencia mediante reducción a lo absurdo.

Proposición 2.2. *No existe una función holomorfa $f \in H(\mathbb{C})$ verificando que:*

$$\forall g \in H(\mathbb{C}),\ \forall R > 0,\ \forall \varepsilon > 0 \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sup_{z \in D(0,R)} |\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n} - g(z)| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Demostración. Supongamos que existe una función holomorfa $f \in H(\mathbb{C})$ que verifica (2.3). Supongamos que f no es afín, entonces por la Proposición 2.1 f no es inyectiva, es decir, existen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq z_2$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$.
Tomamos $g(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por hipótesis, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}(z_1) - g(z_1)| < \frac{|z_1 - z_2|}{4},$$

$$|\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}(z_2) - g(z_2)| < \frac{|z_1 - z_2|}{4}.$$

Entonces:

$$|z_1 - z_2| = |g(z_1) - g(z_2)| < \frac{|z_1 - z_2|}{2}.$$

Lo cual no es posible ya que $z_1 \neq z_2$.
Si f es afín, tomamos $g(z) = z^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por hipótesis tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup_{z \in \overline{D(0,1)}} |\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}(z) - g(z)| < \frac{1}{4}.$$

Puesto que f es afín, $\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}(z)$ también lo es, por lo tanto existen $a, b \in \mathbb{C}$ tal que $\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}(z) = az + b$. Luego:

$$\sup_{z \in \overline{D(0,1)}} |az + b - z^2| < \frac{1}{4}.$$

En particular para $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = -1$ tenemos:

$$|b| < \frac{1}{4}, \ |a + b - 1| < \frac{1}{4}, \ |-a + b - 1| < \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto:

$$|a - 1| = |a + b - 1 - b| \leq |a + b - 1| + |b| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$|a + 1| = |-a + b - 1 - b| \leq |-a + b - 1| + |b| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Luego $a \in D(1, 1/2) \cap D(-1, 1/2) = \emptyset$, que es la contradicción que buscábamos.

$\square$

Capítulo 3

Densidad de funciones holomorfas universales

Nuestro objetivo en el siguiente capítulo será estudiar la aproximación de funciones enteras mediantes las sucesivas derivadas de funciones holomorfas universales desde una perspectiva topológica basándonos en los enunciados y demostraciones dados en [2], dándonos un resultado adicional, la densidad del conjunto de estas funciones en el espacio $H(\Omega)$, con la topología de convergencia uniforme sobre compactos.

3.1. Espacios métricos completos

Antes de abarcar el Teorema de Maclane de nuevo, debemos ver una serie de resultados topológicos en espacios métricos completos que nos servirán para más tarde.

Lema 3.1. *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \ldots$ una sucesión decreciente de cerrados no vacíos en X con $\lim\limits_{n\to\infty} diam(C_n) = 0$. Entonces, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Tomamos $x_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $diam(C_{n_0}) < \varepsilon$. Escogemos $p,q \geq n_0$ de manera que tenemos que $x_p \in C_p \subseteq C_{n_0}$ y $x_q \in C_q \subseteq C_{n_0}$, por lo tanto $d(x_p,x_q) \leq diam(C_{n_0}) < \varepsilon$. Luego $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y como X es completo, existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
Dado $n \in \mathbb{N}$, como $x_m \in C_n$ para todo $m \geq n$ y además C_n es cerrado, tenemos $x \in C_n$. Por lo tanto, $x \in \cap_{n=1}^{\infty} C_n$. □

A continuación abordaremos un importante teorema sobre espacios métricos que podemos encontrar en [5] y que usaremos más adelante.

Teorema de Baire. *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $U_1, U_2, \ldots \subseteq X$ abiertos densos en X. Entonces $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ es densa en X.*

Demostración. Veamos que $\overline{\cap_{n=1}^{\infty} U_n} = X$. Para ello, tomamos $U \subseteq X$ abierto no vacío, veamos que $(\cap_{n=1}^{\infty} U_n) \cap U \neq \emptyset$. Como $\overline{U_1} = X$, tenemos que $U_1 \cap U \neq \emptyset$. Dado que $U_1 \cap U$ es abierto, existe $x_1 \in X$ y $0 < r_1 < 1$ con $B(x_1,r_1) \subseteq U_1 \cap U$. Tomando el radio un poco más pequeño, podemos suponer que $\overline{B(x_1,r_1)} \subseteq U_1 \cap U$. Ahora, como $\overline{U_2} = X$, tenemos $U_2 \cap (U_1 \cap U) \neq \emptyset$ entonces existe $x_2 \in X$ y $0 < r_2 < 1/2$ con $\overline{B(x_2,r_2)} \subseteq U_2 \cap U_1 \cap U$. Continuando este razonamiento inductivamente, tenemos que:

$$\text{Existe } x_n \in X \text{ y } 0 < r_n < \frac{1}{n} \text{ con } \overline{B(x_n,r_n)} \subseteq U_n \cap \ldots \cap U_1 \cap U.$$

Aplicando el Lema 3.1 a la sucesión de cerrados $C_n = \overline{B(x_n, r_n)}$ que sastisface que $diam(C_n) \leq 2r_n \leq \frac{2}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, tenemos que:

$$\text{Existe } x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} ((U_n \cap \ldots \cap U_1) \cap U) = (\cap_{n=1}^{\infty} U_n) \cap U.$$

□

Para poder demostrar el Teorema de Maclane, debemos definir una distancia para que el espacio $(H(\mathbb{C}), d)$ sea completo y además esta distancia verifique un resultado útil.

Teorema 3.1. *Consideramos la distancia, $d : \mathscr{C}(\mathbb{C}) \times \mathscr{C}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, donde $\mathscr{C}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continuas$\}$ tal que:*

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}, \text{ donde } d_n(f,g) = \sup_{z \in \overline{D(0,n)}} |f(z) - g(z)|.$$

Entonces $(H(\mathbb{C}), d)$ es un espacio métrico completo y $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$ si y solo si f_n converge a f uniformemente sobre compactos.

Demostración. Veamos primero que la aplicación $d : \mathscr{C}(\mathbb{C}) \times \mathscr{C}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ es una distancia. Es claro que $d(f,g) \geq 0$ y que d es simétrica. Además $d(f,g) = 0$ si y solo si $d_n(f,g) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si y solo si $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \overline{D(0,n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $d(f,g) = 0$ si y solo si $f = g$. Para probar la desigualdad triangular, usamos la siguiente desigualdad, sean $s, t \in [0, \infty)$:

$$\frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \leq \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s}. \tag{3.1}$$

Sean $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, aplicando la desigualdad (3.1) y como la función $t \to \frac{t}{1+t}$ es creciente para todo $t \geq 0$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)} \leq \frac{d_n(f,h) + d_n(h,g)}{1 + d_n(f,h) + d_n(h,g)} \leq \frac{d_n(f,h)}{1+d_n(f,h)} + \frac{d_n(h,g)}{1+d_n(h,g)}.$$

Luego $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$.
Veamos ahora que $\lim_{j\to\infty} d(f_j, f) = 0$ si y solo si $(f_j)_{j=1}^{\infty}$converge a f uniformemente sobre compactos. Sea $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones tales que $\lim_{j\to\infty} d(f_j, f) = 0$, luego:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que } d(f_j, f) \leq \varepsilon, \forall j \geq N.$$

Tomamos $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto y $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \overline{D(0,m)}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{j\to\infty} d(f_j, f) = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall j \geq N, \quad d(f_j, f) < \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}, 1\}.$$

Entonces:

$$\frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(f_j, f)}{1 + d_m(f_j, f)} \leq d(f_j, f) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}.$$

Además:

$$\frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(f_j, f)}{1 + d_m(f_j, f)} \geq \frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(f_j, f)}{1 + d(f_j, f)} \geq \frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(f_j, f)}{1+1} = \frac{1}{2^{m+1}} d_m(f_j, f).$$

Por lo tanto $d_m(f_j, f) < \varepsilon$ y entonces:

$$\sup_{z \in K} |f_j(z) - f(z)| \leq \sup_{z \in \overline{D(0,m)}} |f_j(z) - f(z)| = d_m(f_j, j) < \varepsilon, \forall j \geq N.$$

Luego la sucesión $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ converge a f.
Recíprocamente, si la sucesión $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre compactos contenidos en $\mathbb{C}$ entonces por el Teorema de Weierstrass $f \in H(\mathbb{C})$. Además para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty}(\frac{1}{2})^n \leq \varepsilon$ y existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq M$, $d_N(f_j, f) \leq \varepsilon$. Como la sucesión $(\overline{D(0,n)})_{n=1}^{\infty}$ es creciente, entonces $d_n(f_j, f) \leq d_N(f_j, f) \leq \varepsilon$ para todo $j \geq M$ y para todo $n \leq N$. Para todo $j \geq M$:

$$d(f_j, f) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f_j, f)}{1 + d_n(f_j, f)} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f_j, f)}{1 + d_n(f_j, f)} \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 2\varepsilon.$$

Entonces $d(f_j, f) \leq 2\varepsilon$ para todo $j \geq M$ como buscábamos.
Veamos que el espacio métrico $(H(\mathbb{C}), d)$ es completo. Sea $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(H(\mathbb{C}), d)$. Vemos primero que $(f_j(z))_{j=1}^{\infty}$ es de Cauchy para todo $z \in \mathbb{C}$. Dado $z \in \mathbb{C}$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $z \in \overline{D(0,m)}$. Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p, q \geq j$, $d(f_p, f_q) < \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Por lo tanto,

$$\frac{d_m(f_p, f_q)}{1 + d_m(f_p, f_q)} \leq 2^m \cdot d(f_p, f_q) < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \forall p, q \geq j.$$

Esto implica, debido al crecimiento de la función $t \to \frac{t}{1+t}$ que:

$$|f_p(z) - f_q(z)| \leq d_m(f_p, f_q) < \varepsilon, \forall p, q \geq j.$$

Esto prueba que $(f_j(z))_{j=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$. Dado que $\mathbb{C}$ es completo, existe $\lim_{j\to\infty} f_j(z) = f(z)$. Veamos ahora que $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ uniformemente sobre compactos. Ya sabemos que para ello basta ver que $\lim_{j\to\infty} d_m(f_j, f) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Como $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(H(\mathbb{C}), d)$, el mismo $j \in \mathbb{N}$ anterior nos dice que:

$$|f_p(z) - f_q(z)| < \varepsilon, \forall p, q \geq j, \forall z \in \overline{D(0,m)}.$$

Tomando límite cuando $q \to \infty$, tenemos:

$$|f_p(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall p \geq j, \forall z \in \overline{D(0,m)}.$$

Por lo tanto:

$$d_m(f_p, f) \leq \varepsilon, \forall p \geq j.$$

Esto prueba que $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ uniformemente sobre compactos.
Equivalentemente, $\lim_{j\to\infty} d(f_j, f) = 0$, como queríamos. $\square$

Ahora veremos un resultado sobre aplicaciones lineales continuas en espacios métricos completos que verifican unas condiciones. Un resultado también necesario para demostrar el Teorema de Maclane.

Teorema 3.2 (Criterio de Gethrer-Shapiro, 1987)**.** *Sea X un espacio vectorial con una distancia d invariante por traslaciones, es decir, $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ para todo $x, y, z \in X$, de modo que (X, d) es un espacio métrico completo. Sean $T, S : X \to X$ aplicaciones lineales continuas con $T \circ S = I$. Supongamos que existe un subconjunto $D \subseteq X$ denso y numerable de modo que, denotando $T^n = \overbrace{T \circ \ldots \circ T}^{n}$:*

$$d(T^n(x), 0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ y } d(S^n(x), 0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ para todo } x \in D.$$

Entonces, existe un vector $x \in X$ cumpliendo que:

Para todo $y \in X$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^n(x), y) < \varepsilon$.

De hecho, el conjunto de los vectores de x cumpliendo dicha condición es denso en (X, d).

Demostración. Escribimos $D = \{y_j : j \in \mathbb{N}\}$. Dado $j,k \in \mathbb{N}$, llamamos:

$$U_{j,k} = \{x \in X \text{ tal que existe } n \in \mathbb{N} : d(T^n(x), y_j) < \frac{1}{k}\}.$$

Entonces tenemos:

1. $U_{j,k}$ es abierto ya que es unión de abiertos:

$$U_{j,k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (T^n)^{-1}(B(y_j, \frac{1}{k})).$$

2. $U_{j,k}$ es denso en X. Sea $z \in X$ y $\varepsilon > 0$. Veamos que $B(z,\varepsilon) \cap U_{j,k} \neq \emptyset$. Como D es denso, existen $y', z' \in D$ con:

$$d(y_j, y') < \frac{1}{2k} \text{ y } d(z,z') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $y', z' \in D$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} S^n(y') = 0$ y $\lim_{n\to\infty} T^n(z') = 0$. Así, existe $n \in \mathbb{N}$ con:

$$d(S^n(y'), 0) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } d(T^n(z'), 0) < \frac{1}{2k}.$$

Denotamos $x := S^n(y') + z'$. Tenemos, ya que d es invariante por traslaciones:

$$d(x,z) \leq d(x,z') + d(z',z) = d(S^n(y'), 0) + d(z',z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto, $x \in B(z,\varepsilon)$. Además, $T^n \circ S^n = T \circ \ldots \circ \overbrace{T \circ S}^{I} \circ \ldots \circ S = I$, así que:

$$\begin{aligned} d(T^n(x), y_j) &= d(T^n(S^n(y') + z'), y_j) = d(y' + T^n(z'), y_j) = d(y' - y_j, -T^n(z')) \\ &\leq d(y' - y_j, 0) + d(0, -T^n(z')) = d(y', y_j) + d(T^n(z'), 0) \\ &< \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Por tanto $x \in U_{j,k}$. Es decir, $x \in U_{j,k} \cap B(x,\varepsilon)$, como queríamos.

Por (1) y (2), el Teorema de Baire nos dice que:

$$A := \cap_{j,k=1}^{\infty} U_{j,k} \text{ es denso en } X.$$

Veamos que todos los vectores de A cumplen lo que buscamos. Sea $x \in A$. Dado $y \in X$ y $\varepsilon > 0$, encontramos $j,k \in \mathbb{N}$ de modo que $d(y,y_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in A \subseteq U_{j,k}$, existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $d(T^n(x), y_j) < \frac{1}{k}$. Por tanto:

$$d(T^n(x), y) \leq d(T^n(x), y_j) + d(y_j, y) < \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como buscábamos. □

3.2. Extensión del Teorema de Maclane

A continuación, siguiendo la información dada en [3] daremos una demostración alternativa del Teorema de Maclane pero ahora desde un punto de vista topológico, donde haremos uso de los resultados vistos en la sección anterior.
A diferencia de la demostración vista de este mismo teorema en el capítulo 2, en este caso no obtendremos una expresión explícita de la función f, sin embargo gracias al Teorema 3.2 veremos que existe más de una función con esta propiedad.

Teorema 3.3 (Maclane, versión 2)**.** *Existe una función $f \in H(\mathbb{C})$ tal que para todo $g \in H(\mathbb{C})$ y para todo $R, \varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$|f^{(n)}(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ para todo } z \in D(0,R)$$

Es más, el conjunto de tales funciones es denso en $(H(\mathbb{C}), d)$.

Demostración. Veamos que se cumplen las condiciones del criterio de Gether-Shapiro. Ya sabemos que $H(\mathbb{C})$ es un espacio vectorial y que $(H(\mathbb{C}), d)$ es un espacio métrico completo. Además es claro que d es invariante por traslaciones. Definimos:

$$T : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}) \text{ dada por } T(f) = f'.$$

$$S : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}) \text{ dada por } S(f)(z) = \int_{[0,z]} f(w)dw.$$

Es claro que T, S son lineales y $T \circ S = I$. Si $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ uniformemente sobre compactos entonces como consecuencia del Teorema de Weierstrass, $\lim\limits_{k\to\infty} T(f_k) = T(f)$ uniformemente sobre compactos, lo mismo ocurre para nuestra función S:

$$|S(f_k)(z) - S(f)(z)| = \left|\int_{[0,z]} (f_k(w) - f(w))dw\right| \leq \int_{[0,z]} |f_k(w) - f(w)|dw \leq |z| \cdot \sup_{w\in[0,z]} |f_k(w) - f(w)|.$$

Por lo tanto:

$$\sup_{z\in\overline{D(0,R)}} |S(f_k)(z) - S(f)(z)| \leq R \cdot \sup_{z\in\overline{D(0,R)}} |f_k(z) - f(z)| \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Así que $\lim\limits_{k\to\infty} S(f_k) = S(f)$ uniformemente sobre compactos. Por tanto, T y S son continuas. Ahora, sea D el conjunto de polinomios de $\mathbb{C}$ con coeficientes en $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, que por el Lema 2.1 sabemos que es numerable y denso. Veamos que

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n(p), 0) = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} d(S^n(p), 0) = 0 \text{ para todo } p \in D.$$

Sea $p \in D$ y llamemos $n_0 = deg(p)$. Es claro entonces que $T^n(p) = p^{(n)} = 0$ para todo $n \geq n_0 + 1$. Así que la primera condición se cumple. Para la segunda, escribimos:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n_0} z^{n_0}, \quad (a_0, \ldots, a_{n_0} \in \mathbb{C}).$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
S(p)(z) &= a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \ldots + a_{n_0} \frac{z^{n_0+1}}{n_0+1}, \\
S^2(p)(z) &= a_0 \frac{z^2}{1\cdot 2} + a_1 \frac{z^3}{2\cdot 3} + \ldots + a_{n_0} \frac{z^{n_0+2}}{(n_0+1)(n_0+2)}, \\
&\ldots \\
S^n(p)(z) &= a_0 \frac{z^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + a_1 \frac{z^{(n+1)}}{2\cdots(n+1)} + \ldots + a_{n_0} \frac{z^{n_0+n}}{(n_0+1)\cdots(n_0+n)}.
\end{aligned}$$

Por tanto, dado $R > 0$:

$$\sup_{z\in \overline{D(0,R)}} |S^n(p)(z)| \leq |a_0| \cdot \frac{R^n}{n!} + |a_1| \cdot \frac{1!R^{n+1}}{(n+1)!} + ... + \frac{n_0!R^{n_0+n}}{(n_0+n)!} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S^n(p) = 0$ uniformemente sobre compactos. Es decir, $\lim_{n\to\infty} d(S^n(p), 0) = 0$. Así, se cumplen todas las hipótesis del criterio de Gether-Shapiro, que nos dice que existe $f \in H(\mathbb{C})$ tal que:

$$\text{Para todo } g \in H(\mathbb{C}) \text{ para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(T^n(f), g) < \varepsilon.$$

Veamos que es lo que buscamos. Dado $R, \varepsilon > 0$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq R$. Sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{(n)}, g) < \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Al igual que antes, esto implica que $d_m(f^{(n)}, g) < \varepsilon$, por tanto:

$$\sup_{z\in \overline{D(0,R)}} |f^{(n)}(z) - g(z)| \leq \sup_{z\in \overline{D(0,m)}} |f^{(n)}(z) - g(z)| = d_m(f^{(n)}, g) < \varepsilon.$$

Como queríamos. Es más, el criterio nos dice que el conjunto de funciones con esa propiedad es denso en $(H(\mathbb{C}), d)$.

$\square$

El criterio de Gethrer-Shapiro también nos permite demostrar el Teorema de Birkhoff, sin embargo la elección del conjunto D es más complicada.

Bibliografía

[1] RICHARD M. ARON, DINESH MARKOSE, *On Universal Functions*, J.Korean Math. Soc. 41(2004), No. 1, pp. 65-76.

[2] JOHN B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable* , Graduate Texts in Mathematics 11.

[3] ROBERT M. GETHNER, JOEL H. SHAPIRO,*Universal Vectors For Operators On Spaces Of Holomorphic Functions*, Proocedins Of The American Mathematical Society, Volume 100, Number 2, June 1987.

[4] ROBERT E. GREENE, STEVEN G. KRANTZ,*Function Theory of One Complex Variable (third ed.)*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 40, American Mathematical Society, Providence, RI (2006).

[5] JAMES R. MUNKRES, *Topología (segunda edición)*, Pearson Educación, S.A, 2002.

[6] CHARLES BLAIR, LEE RUBEL, *A Triply Universal Entire Function*, L'Enseignement Mathématique, t. 30 (1984), p. 269-274.

[7] DAVID BIRKHOFF, *Démonstration d'un Theoreme Elementaire Sur Les Fonctions Entieres*, C.R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473-475.

[8] GERALD R. MACLANE, *Sequences Of Derivatives And Normal Families*, J. Anal Math. 2, 72-87(1952).