

TESIS DE LA UNIVERSIDAD  
DE ZARAGOZA

2024

127

Jorge Bernabé Panós

# Desarrollo modular y optimización de modelos vehiculares complejos en Bond Graph

Director/es  
Vera Álvarez, Carlos

<http://zaguan.unizar.es/collection/Tesis>

ISSN 2254-7606



Prensas de la Universidad  
Universidad Zaragoza



Universidad de Zaragoza  
Servicio de Publicaciones

ISSN 2254-7606



**Universidad**  
Zaragoza

Tesis Doctoral

**DESARROLLO MODULAR Y OPTIMIZACIÓN  
DE MODELOS VEHICULARES COMPLEJOS  
EN BOND GRAPH**

Autor

Jorge Bernabé Panós

Director/es

Vera Álvarez, Carlos

**UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA**  
Escuela de Doctorado

1993



## Tesis Doctoral

Desarrollo modular y optimización de modelos  
vehiculares complejos en Bond Graph

Autor

Jorge Bernabé Panós

Director

Vera Álvarez, Carlos

Centro Politécnico Superior de Ingenieros  
1993

**UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA**  
**CENTRO POLITECNICO SUPERIOR DE INGENIEROS**

**DESARROLLO MODULAR Y OPTIMIZACION  
DE MODELOS VEHICULARES COMPLEJOS EN  
BOND GRAPH**

**Memoria presentada para la obtención del grado de  
Doctor Ingeniero Industrial**

**por**

**Jorge Bernabé Panós**

**Zaragoza, Septiembre de 1993**



Quiero expresar mi agradecimiento:

Al Profesor D. Carlos Vera Alvarez, Director de esta Tesis, por haber hecho posible la realización de la misma gracias a sus valiosas enseñanzas, su interés y su estímulo.

A Jesús Félez, por su colaboración cuando me inicié en la técnica de bond graph.

A Ignacio San José, por su inestimable ayuda en la preparación y manejo de los programas de ordenador.

Al resto de mis compañeros del Instituto Tecnológico de Aragón, en particular Francisco Buil y José Luis Pelegay, por su interés y apoyo.

Al Instituto Tecnológico de Aragón, por los medios e instalaciones que ha puesto a mi disposición.

A M<sup>a</sup> Victoria Burbano, por el admirable esmero con que ha realizado las figuras de esta memoria.

Y finalmente, a todas las personas que, tan pacientemente, me han escuchado, y apoyado, al hablarles, tantas veces como lo he hecho, de este trabajo.





*A mis padres y hermanos  
y a Pilar.*



## INDICE

### I - INTRODUCCION

I.1 - IMPORTANCIA Y PROBLEMATICA DE LA MODELIZACION EN DINAMICA VEHICULAR .....	I-1
I.2 - POSIBILIDADES DE LA TECNICA DE BOND GRAPH .....	I-2
I.3 - OBJETIVOS DE LA TESIS .....	I-3
I.4 - RESUMEN DE LA TESIS .....	I-4

### II - DESCRIPCION Y ANALISIS DE ASPECTOS BASICOS PARA LA MODELIZACION EN MECANICA

II.0 - INTRODUCCION .....	II-1
II.1 - SOLIDO RIGIDO EN DOS Y TRES DIMENSIONES .....	II-1
II.1.1 - Modelo de sólido tridimensional .....	II-2
II.1.2 - Modelo de barra bidimensional .....	II-6
II.2 - ORIENTACION DE SOLIDOS EN EL ESPACIO .....	II-8
II.2.1 - Orientación absoluta de un sólido .....	II-9
II.2.2 - Orientación relativa de un sólido respecto a otro .....	II-13
II.3 - ENSAMBLAJE DE SOLIDOS .....	II-15
II.3.1 - Fundamentos de modelización .....	II-15
II.3.1.1 - Movimientos relativos de traslación .....	II-15
II.3.1.2 - Movimientos relativos de rotación .....	II-16
II.3.2 - Modelización de un par cinemático .....	II-17

II.4 - ANALISIS DEL FLUJO DE ENERGIA EN PUERTAS RESISTENCIA PLURIDIMENSIONALES .....	II-21
II.5 - MODULACION DE COMPLIANCES .....	II-23
II.5.1 - Caracterización de las Compliances .....	II-24
II.5.2 - Rigidez de una Compliance .....	II-25
II.5.3 - Condiciones para la modulación de Compliances .....	II-26
 <b><u>III - NUEVAS MODELIZACIONES PARA SISTEMAS MECANICOS COMPLEJOS</u></b>	
III.0 - INTRODUCCION .....	III-1
III.1 - MODELIZACION DE SOLIDOS DE MASA DESPRECIA- BLE Y APLICACION DE LA TECNICA DE BOND GRAPH EN CINEMATICA .....	III-1
III.1.1 - Modelización de sólidos de masa despre- ciable .....	III-2
III.1.1.1 - Modelización de una barra de masa despreciable .....	III-2
III.1.1.2 - Discusión sobre la inclusión o no de puertas Inercia y elementos Muelle Rígido en las restricciones .....	III-8
III.1.1.3 - Discusión sobre la asimetría del modelo .....	III-15
III.1.1.4 - Modelización de sólidos de masa despreciable y con más de dos puntos de enlace .....	III-16
III.1.1.5 - Modelización con bonds simples de sólidos de masa despreciable .....	III-22
III.1.1.6 - Modelización de sólidos de masa despreciable sin emplear elementos Inercia Nula .....	III-25

III.1.2 - Aplicación de la técnica de bond graph en Cinemática .....	III-29
III.1.2.1 - Discusión sobre la aplicación de la técnica de bond graph en análisis cinemáticos .....	III-29
III.1.2.2 - Simplificaciones adicionales para la realización de análisis puramente cinemáticos .....	III-31
III.1.3 - Ejemplos de aplicación .....	III-33
III.1.3.1 - Ejemplo de modelización de un sistema dinámico con sólidos de masa despre- ciable .....	III-34
III.1.3.2 - Ejemplo de aplicación al análisis cinemático de un mecanismo .....	III-42
III.1.4 - Conclusiones sobre la modelización de sólidos de masa despreciable .....	III-45
III.2 - DISCONTINUIDADES EN LOS ENLACES ENTRE SOLIDOS .....	III-47
III.2.1 - Definición del problema .....	III-47
III.2.2 - Planteamiento de la modelización .....	III-48
III.2.3 - Caso Unidimensional .....	III-50
III.2.3.1 - Ejemplo de aplicación .....	III-51
III.2.4 - Caso Pluridimensional .....	III-53
III.2.4.1 - Problemas en la modelización de casos pluridimensionales .....	III-56
III.2.4.1.1 - El problema de la tensión residual ...	III-56
III.2.4.1.2 - El problema de la no coincidencia en el espacio de los puntos de pérdida y recuperación del contacto .....	III-57

III.2.4.2 - Condición general para la variación de los parámetros de las Compliances de enlace .....	III-60
III.2.4.3 - Modelización en el Caso Pluridimensional .....	III-60
III.2.4.4 - Ejemplo de aplicación .....	III-69
III.2.5 - Desaparición de restricciones. Holguras ..	III-73
III.2.5.1 - Fundamentos de modelización de la desaparición de restricciones .....	III-73
III.2.5.2 - Modelización de holguras .....	III-74
III.2.5.2.1 - Modelización de holguras unidimensionales .....	III-75
III.2.5.2.2 - Modelización de holguras pluridimensionales .....	III-80
III.2.5.3 - Ejemplos de aplicación .....	III-85
III.2.5.3.1 - Ejemplo de modelización de una holgura unidimensional .....	III-85
III.2.5.3.2 - Ejemplo de modelización de una holgura bidimensional .....	III-86
III.2.6 - Conclusiones sobre la modelización de las discontinuidades en los enlaces entre sólidos .....	III-90

#### IV - MODELIZACION DE RUEDAS

IV.0 - INTRODUCCION .....	IV-1
IV.1 - MODELO TRIDIMENSIONAL DE RUEDA .....	IV-3
IV.1.1 - Planteamiento del modelo .....	IV-3
IV.1.1.1 - Discusión sobre la hipótesis de rigidez ...	IV-4

IV.1.2 - Desarrollo de las bases del modelo .....	IV-9
IV.1.2.1 - Definición de ejes de referencia y ángulos de Cardan .....	IV-9
IV.1.2.2 - Desarrollo del bond graph inicial del modelo .....	IV-11
IV.1.2.3 - Modelización de desequilibrios .....	IV-17
IV.1.2.3.1 - Modelización del desequilibrio estático .....	IV-17
IV.1.2.3.2 - Modelización del desequilibrio dinámico .....	IV-19
IV.1.2.4 - Modelización de la deformación del neumático .....	IV-20
IV.1.3 - Modelización de la interfase Rueda-Calzada .	IV-23
IV.1.3.1 - Modelización de la deriva .....	IV-23
IV.1.3.2 - Modelización del deslizamiento longitudinal .....	IV-30
IV.1.3.3 - Comportamiento de la interfase Rueda-Calzada considerando la posible superación del límite de adherencia .....	IV-33
IV.1.3.3.1 - Modelización .....	IV-36
IV.1.3.4 - Expresión explícita de las fuerzas en la interfase rueda-calzada obtenidas con el nuevo modelo .....	IV-41
IV.1.3.4.1 - Comparación con el modelo de Dugoff ....	IV-44
IV.1.3.5 - Modelización del par de autoalineación ...	IV-47
IV.1.3.6 - Modelización de la resistencia a la rodadura .....	IV-48
IV.1.3.7 - Modelización de la pérdida de contacto entre rueda y calzada .....	IV-49



IV.1.4 - Modelización de la interfase Rueda-Vehículo.	IV-53
IV.1.5 - Bond graph completo del modelo tridimensional de rueda .....	IV-55
IV.2 - MODELOS BIDIMENSIONALES DE RUEDA .....	IV-56
IV.2.1 - Modelo bidimensional XZ .....	IV-56
IV.2.2 - Modelo bidimensional XY .....	IV-59
IV.2.3 - Modelo bidimensional YZ .....	IV-63
IV.3 - EJEMPLOS DE SIMULACION .....	IV-65
IV.3.1 - Comportamiento de la rueda sujeta a esfuerzo lateral. Influencia de la deriva. .	IV-65
IV.3.2 - Comportamiento de la rueda sometida a movimientos de dirección. Comparación del modelo tridimensional con el modelo bidimensional XY. Efectos giroscópicos. ....	IV-70
IV.3.3 - Comportamiento de la rueda en movimiento rectilíneo sometida a carga vertical variable. Influencia de la deformación radial del neumático. ....	IV-75
IV.3.4 - Comportamiento de la rueda en movimiento rectilíneo sometida a carga vertical variable. Despegue de la calzada. Efectos del desequilibrio estático. ....	IV-80
IV.3.5 - Comportamiento en el límite de adherencia. Interrelación entre los esfuerzos laterales y longitudinales. ....	IV-83
IV.4 - CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES SOBRE LA MODELIZACION DE RUEDAS .....	IV-86
<b><u>V - MODELIZACION DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSION Y DIRECCION</u></b>	
V.0 - INTRODUCCION .....	V-1

<b>V.1 - MODELIZACION TRIDIMENSIONAL DE UN SISTEMA DE SUSPENSION MAC PHERSON</b> .....	V-2
V.1.1 - Planteamiento de la modelización .....	V-3
V.1.2 - Desarrollo del modelo .....	V-4
V.1.2.1 - Características de las uniones internas .....	V-5
V.1.2.2 - Características de las uniones externas .....	V-6
V.1.2.3 - Definición de puntos de enlace y ejes de referencia .....	V-9
V.1.3 - Bond graph del modelo tridimensional de suspensión Mac Pherson .....	V-14
<b>V.2 - MODELIZACION TRIDIMENSIONAL DE UN SISTEMA DE DIRECCION DE CREMALLERA</b> .....	V-16
V.2.1 - Planteamiento de la modelización .....	V-17
V.2.2 - Desarrollo del modelo .....	V-18
V.2.2.1 - Características de las uniones .....	V-18
V.2.2.2 - Definición de puntos de enlace y ejes de referencia .....	V-19
V.2.3 - Bond graph del modelo tridimensional de la dirección de cremallera .....	V-20
<b>V.3 - MODELO TRIDIMENSIONAL COMPLETO DE UN SISTEMA DE SUSPENSION MAC PHERSON Y DIRECCION DE CREMALLERA</b> .....	V-22
<b>V.4 - MODELIZACION TRIDIMENSIONAL CON GEOMETRIA SIMPLIFICADA DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSION Y DIRECCION</b> .....	V-25
V.4.1 - Desarrollo del modelo .....	V-25
<b>V.5 - MODELOS BIDIMENSIONALES</b> .....	V-30
V.5.1 - Consideraciones generales sobre los modelos bidimensionales de suspensión y dirección .....	V-30

V.5.1.1 - Modelos bidimensionales XY .....	V-30
V.5.1.2 - Modelos bidimensionales XZ .....	V-31
V.5.1.3 - Modelos bidimensionales YZ .....	V-32
V.5.2 - Modelo bidimensional YZ de la suspensión Mac Pherson .....	V-34
V.5.3 - Modelo bidimensional XY de la dirección de cremallera .....	V-36
V.6 - OBTENCION DE LAS CONDICIONES INICIALES EN LA SIMULACION DE SISTEMAS DE SUSPENSION .....	V-38
V.7 - EJEMPLO DE SIMULACION .....	V-41
V.8 - CONCLUSIONES SOBRE LA MODELIZACION DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSION Y DIRECCION .....	V-49
 <u>VI - MODELIZACION DEL VEHICULO</u>	
VI.0 - INTRODUCCION .....	VI-1
VI.1 - DESARROLLO DE LA MODELIZACION .....	VI-1
VI.1.1 - Modelización del chasis .....	VI-3
VI.1.2 - Modelización del resto de los elementos .....	VI-4
VI.1.3 - Bond graph del modelo de vehículo completo ..	VI-5
VI.2 - EJEMPLOS DE SIMULACION .....	VI-13
VI.2.1 - Simulación de una maniobra de frenada .....	VI-19
VI.2.2 - Simulación de la aplicación de una carga vertical .....	VI-22
VI.2.3 - Simulación de una maniobra de dirección ....	VI-25
VI.3 - CONCLUSIONES SOBRE LA MODELIZACION DEL VEHICULO .....	VI-27

**VII - CONCLUSIONES**

**VII.1 - PRINCIPALES APORTACIONES Y CONCLUSIONES ..... VII-2**

**VII.2 - FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACION ..... VII-7**

**BIBLIOGRAFIA**

**ANEXO: ECUACIONES DEL MODELO DE VEHICULO COMPLETO.**



# Capítulo I

## INTRODUCCION

### I.1 - IMPORTANCIA Y PROBLEMÁTICA DE LA MODELIZACIÓN EN DINÁMICA VEHICULAR

La mejora del diseño de los sistemas vehiculares es de gran importancia, tanto por la indudable trascendencia económica de todo lo relacionado con el transporte como, sobre todo, por la seguridad de las personas que viajan en los vehículos.

La simulación por ordenador del comportamiento de sistemas dinámicos en general, y de sistemas vehiculares en particular, es una herramienta de gran utilidad en el análisis y diseño de los mismos, dado lo costosos que son siempre los ensayos experimentales.

La modelización de los sistemas vehiculares suele ser compleja por varios motivos: hay mecanismos tridimensionales no siempre sencillos, existen sistemas no lineales realmente complejos, como los neumáticos, intervienen varios campos de la Física (mecánica, hidráulica,...), etc.

Por otra parte, los sistemas vehiculares interactúan entre sí y además de forma variable.

Por ejemplo, los efectos giroscópicos de la rueda apenas influyen en la reversibilidad de la dirección cuando la velocidad es baja, pero la geometría de la suspensión sí que es importante en esa situación. Si se necesita tener un modelo completo de vehículo que sea válido para un amplio margen de velocidades, hay que disponer de los modelos ensamblados y completos de rueda, dirección y suspensión.

Aunque se han desarrollado modelos sofisticados de los principales elementos o sistemas vehiculares, apenas se encuentran modelos completos de vehículo que los engloben, siendo los modelos de vehículo completo desarrollados hasta

la fecha bastante simplificados.

Ello se debe a que con los métodos tradicionales de formulación de las ecuaciones de la dinámica, los desarrollos matemáticos son muy laboriosos y, aunque ya existen algunos programas para facilitar la modelización, el trabajo no resulta todo lo sencillo como sería de desear.

## I.2 - POSIBILIDADES DE LA TECNICA DE BOND GRAPH

Una alternativa a los métodos tradicionales de modelización de sistemas dinámicos es la técnica de los grafos de unión o técnica de bond graph.

Con esta técnica cualquier sistema físico discreto se modeliza mediante un conjunto de elementos ideales que presentan las propiedades de generación, almacenamiento, disipación o transformación de energía. Dichos elementos se interconectan mediante grafos (bonds) y uniones (junctions). La estructura resultante se esquematiza mediante un diagrama (bond graph) que representa el sistema completo sin dejar de visualizarse de alguna manera la estructura física del mismo.

Este diagrama también muestra, tras un simple análisis de causalidad efectuado sobre el mismo, la estructura del flujo de información, tal como lo hace un diagrama de bloques.

De este modo pueden derivarse directamente del bond graph las ecuaciones diferenciales, cuya resolución permitirá conocer el comportamiento del sistema.

Otra ventaja del método de bond graph es que, al basarse en el concepto de energía, resulta muy apropiado para la modelización de sistemas en los que intervienen varios dominios de la Física, como es el caso de los vehículos.

Pero a diferencia de lo que ocurre con otros métodos energéticos, como el de Lagrange, con el método de Bond Graph son en todo momento accesibles todas las variables de flujo y esfuerzo del sistema.

Por último, una de las ventajas fundamentales del

método radica en la facilidad con la que se plantea el tratamiento de un sistema global como un conjunto de subsistemas. Los modelos de estos subsistemas se ensamblan entre sí de forma sistemática y sencilla constituyendo el modelo global.

En la actualidad hay disponibles varios programas para hacer simulaciones de sistemas dinámicos basados en la técnica de bond graph. Entre otros, pueden citarse: TUTSIM, BONDYN, CAMP y ACSL, etc. Esto facilita sin duda el empleo de esta técnica.

### I.3 - OBJETIVOS DE LA TESIS

En este momento, disponiendo de la técnica de bond graph y de los programas citados, se abre la posibilidad de realizar modelos complejos de los elementos y sistemas vehiculares, con la seguridad de que el ensamblaje de dichos modelos no va a plantear dificultades adicionales de importancia.

El objetivo de la presente tesis es, por consiguiente, el desarrollo, mediante la técnica de bond graph, de modelos complejos de los elementos y sistemas que intervienen en la dinámica del vehículo, con el fin de poder utilizar dichos modelos aisladamente o ensamblados con otros.

Puede considerarse, por tanto, como un desarrollo modular de los modelos, de forma que dichos modelos pueden ser empleados independientemente o ensamblados entre sí.

Los modelos aislados sirven para el estudio del comportamiento del elemento o sistema en situaciones bien definidas, evitando interferencias con otros elementos o sistemas.

Los modelos ensamblados pueden tener, a su vez, diferentes grados de complejidad, pudiendo ensamblarse pequeños grupos de modelos para estudiar las interrelaciones entre sistemas, o bien hacer ensamblajes más completos para modelizar el vehículo en su conjunto.

Con el modelo de vehículo completo puede analizarse tanto su comportamiento global como las sollicitaciones



reales a que están sometidos los elementos que lo componen.

En la presente tesis, también se discutirá la optimización de algunos modelos, con el fin de adecuarlos al estudio de los diferentes problemas o fenómenos que puedan presentarse.

Los desarrollos de esta tesis se centran en la parte mecánica no entrándose en el estudio de sistemas en los que intervengan otros campos energéticos, como la hidráulica, electricidad, etc.

En cuanto a los mecanismos, se supone que están formados por sólidos rígidos, aunque también intervienen elementos deformables, como los neumáticos, para los que se desarrolla una modelización específica.

Por último, todo está planteado en el dominio del tiempo.

#### I.4 - RESUMEN DE LA TESIS

Tras la presente Introducción (Capítulo I), en el Capítulo II se hace un repaso de determinados aspectos básicos para la modelización de sistemas mecánicos con la técnica de bond graph, siendo los resultados expuestos empleados posteriormente en las modelizaciones de esta tesis.

No se explican los fundamentos de la técnica de bond graph ya que se suponen conocidos. No obstante, pueden consultarse dichos fundamentos en varias publicaciones que los describen ampliamente, pudiendo citarse, entre otros, los trabajos de Karnopp y Rosenberg [1,51].

Así pues, en el mencionado Capítulo II se exponen y analizan los modelos en bond graph de sólidos rígidos en dos y tres dimensiones, la forma de trabajar con su orientación en el espacio y la forma de modelizar los enlaces entre sólidos.

También se describe en dicho Capítulo la forma de analizar el flujo de energía en las puertas Resistencia que representan campos disipativos, y se discuten las bases para efectuar correctamente la modulación de Compliances,

ya que en algunos modelos dichos elementos son modulables.

En el Capítulo III se acomete el desarrollo de dos nuevas modelizaciones, necesarias para poder tratar determinados sistemas vehiculares.

Hay que destacar que, aunque se han desarrollado para sistemas vehiculares, son válidas para cualquier sistema mecánico.

En primer lugar, se desarrolla una nueva modelización simplificada de los sólidos cuya masa es despreciable frente a la masa de otros sólidos del sistema, condición ésta que frecuentemente se da en los mecanismos de suspensión y dirección de los automóviles.

Como podrá verse, la nueva modelización simplifica notablemente los modelos realizados y hace más eficiente la simulación. Así mismo, a partir del desarrollo efectuado se derivan también algunas conclusiones adicionales, como la posible aplicación de la técnica de bond graph en Cinemática.

En segundo lugar, se estudian y modelizan las discontinuidades transitorias en los enlaces entre sólidos, analizándose, a continuación, la desaparición de restricciones en los pares cinemáticos, lo cual tiene aplicación en la modelización de holguras en mecanismos.

Los capítulos siguientes se centran en la modelización de las partes del vehículo.

Un vehículo automóvil, a efectos del estudio de su dinámica, se compone fundamentalmente de una masa suspendida y de varias masas no suspendidas.

Las masas no suspendidas, responsables del contacto con la calzada, son las ruedas. A ellas se dedica el Capítulo IV.

Dichas ruedas se enlazan a la masa suspendida, el chasis, a través de los sistemas de suspensión y dirección, a los cuales se dedica el Capítulo V.

Por último, en el Capítulo VI, se ensamblan los modelos anteriores sobre un modelo de chasis para cons-

tituir un modelo de vehículo completo.

Las ruedas del vehículo, que se modelizan en el Capítulo IV, se suponen de tipo neumático.

Existen muchos modelos del comportamiento de los neumáticos, que analizan en detalle la interfase rueda-calzada. Pero es necesario un sistema de modelización en bond graph que incluya también, y de forma completa, la dinámica global de la rueda y su enlace con el resto del vehículo.

En este Capítulo IV, se propone un sistema de modelización de ruedas que permite fácilmente considerar simultáneamente tanto su propia dinámica, como la interacción de la rueda con el suelo así como su ensamblaje con el elemento correspondiente del sistema de suspensión.

En la interacción con el suelo se consideran la deriva, el deslizamiento, el par de autoalineación, la resistencia a la rodadura, la variabilidad del radio del neumático, el límite de adherencia y la posibilidad de perder el contacto con la calzada.

En cuanto a la propia dinámica de la rueda como un cuerpo que se mueve en el espacio tridimensional, se consideran su dinámica de traslación y rotación, incluyendo los efectos giroscópicos y los efectos de los posibles desequilibrios de la rueda.

El interés de considerar conjuntamente en un único modelo todos los aspectos citados es evidente si se han de considerar cuestiones como, por ejemplo, la influencia en la dirección del par de autoalineación y de los efectos giroscópicos o los efectos de una maniobra brusca de dirección o frenada.

En el Capítulo V se desarrolla la modelización de los sistemas de suspensión y dirección.

La principal aportación de este Capítulo es considerar en detalle el diseño geométrico tridimensional de los mecanismos correspondientes.

Para ello se han elegido las configuraciones más habituales actualmente en vehículos de turismo: el sistema

Mac Pherson de suspensión y la dirección de cremallera.

Ambos sistemas se acoplan entre sí, configurando, junto con las ruedas y la unión al chasis un tren delantero completo.

Para hacer manejable la modelización de estos sistemas, se aplica el modelo de sólido rígido de masa despreciable desarrollado en el Capítulo III.

Se presentan también un modelo de geometría simplificada de suspensión y dirección y algunos modelos bidimensionales.

Por último, en el Capítulo VI, los modelos desarrollados de ruedas, suspensión y dirección se ensamblan sobre un modelo de chasis, constituyéndose así un modelo completo de vehículo tridimensional.

Se pone así de manifiesto la ventaja de la técnica de bond graph de permitir construir modelos complejos ensamblando submodelos preparados previamente de forma independiente.

Una vez desarrollado el modelo completo de vehículo, las simulaciones efectuadas con él sirven para, además de comprobar su validez, ver sus posibilidades en el estudio de la interrelación entre los diferentes subsistemas y el comportamiento del vehículo completo.



## Capítulo II

### DESCRIPCION Y ANALISIS DE ASPECTOS BASICOS PARA LA MODELIZACION EN MECANICA

#### II.0 - INTRODUCCION

En este Capítulo, se pasa revista a las principales modelizaciones básicas, introducidas por otros autores, y que van a ser necesarias para el desarrollo de esta tesis. También se analizan determinadas cuestiones concretas relativas a la modelización en mecánica.

Dado que gran parte de los planteamientos de esta tesis se centran en mecanismos formados por sólidos rígidos, se exponen y analizan a continuación los modelos en bond graph de sólidos rígidos en tres y dos dimensiones, la forma de trabajar con su orientación en el espacio, y la forma de modelizar los enlaces entre los sólidos, dependiendo de cuáles son las restricciones existentes entre ellos.

Así mismo, en varias aplicaciones, se presentan campos pluridimensionales disipativos, por lo que es necesario conocer la forma de analizar el flujo de energía en las puertas Resistencia que los representan, para asegurarse de que el sentido de dicho flujo es siempre el correcto.

Por último, y dado que en varios modelos se trabaja con modulación de Compliances, se analizan varias cuestiones relativas a tal modulación, estableciéndose las bases para efectuarla correctamente.

#### II.1 - SOLIDO RIGIDO EN DOS Y TRES DIMENSIONES

Los sistemas mecánicos están compuestos, en gran parte, por sólidos rígidos.

En este apartado se expondrán los modelos de sólidos

rígidos que se emplean en varios desarrollos y aplicaciones de esta tesis.

En primer lugar, se expone el modelo de un sólido tridimensional, haciendo uso de multibonds, y, a continuación, un modelo, con bonds simples, de una barra que puede moverse en un plano bidimensional.

### II.1.1 - Modelo de sólido tridimensional

Sea un sólido rígido con el centro de gravedad en el punto G y dos puntos de enlace situados en los puntos A y B (Figura II-1).

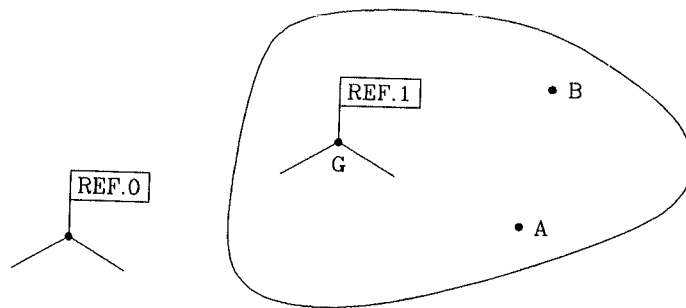


Fig. II-1: Sólido tridimensional.

Se considera una referencia solidaria al sólido, tomándose como origen de dicha referencia el centro de gravedad G del sólido.

Las variables definidas respecto al sistema de referencia anterior llevan el subíndice 1, y las referidas al sistema fijo o inercial, llevan el subíndice 0.

Los puntos de enlace A y B no tienen por qué estar fijos al sólido, sino que pueden moverse dentro de él.

El bond graph es el representado en la Fig. II-2.

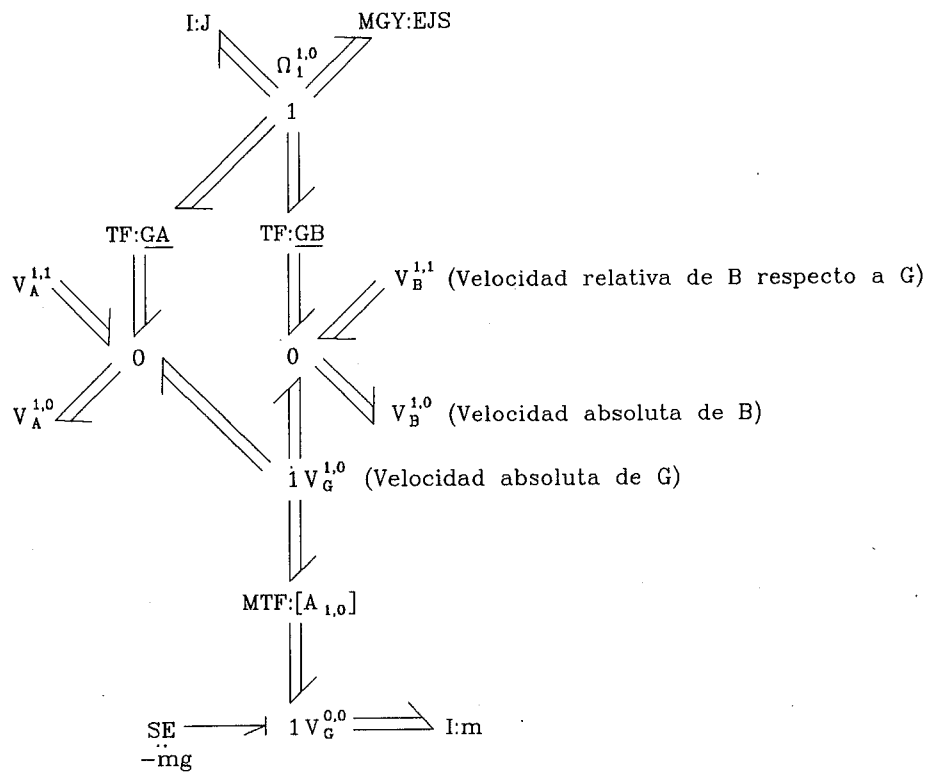


Fig. II-2: Bond graph del sólido tridimensional.

La unión 1 superior del bond graph representa la velocidad angular absoluta, referida a la base 0, del sólido, expresada en la base 1 solidaria al mismo:

$$\underline{\Omega}_1^{1,0} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

La puerta Inercia I:J, correspondiente a la rotación del sólido, tiene como parámetro el tensor de inercia J del sólido, referido a su centro de gravedad y a la base 1:

$$\underline{J}_1^1 = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

El Gyrator MGY:EJS representa la Estructura de Unión



Euleriana (Eulerian Junction Structure) ([2],[6],[49]).

Equivale al término adicional que aparece al derivar en bases móviles el término  $\underline{J}\underline{\Omega}$  en la ecuación de la dinámica de rotación:

$$\Sigma \text{ Pares aplicados} = d(\underline{J}\underline{\Omega})/dt = \underline{J}\dot{\underline{\Omega}} + (\underline{\Omega} \times \underline{J}\underline{\Omega})$$

Para introducir un producto vectorial  $\underline{A} \times \underline{B}$  en bond graph, se aplica la igualdad

$$\underline{A} \times \underline{B} = X(\underline{B}) \cdot \underline{A}$$

donde  $X(\underline{B})$  es una matriz antisimétrica:

$$X(\underline{B}) = X\left(\begin{array}{c} B_x \\ B_y \\ B_z \end{array}\right) = \begin{vmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando este resultado al producto vectorial  $\underline{\Omega} \times \underline{J}\underline{\Omega}$  se obtiene la matriz EJS:

$$\underline{\Omega} \times \underline{J}\underline{\Omega} = X(\underline{J}\underline{\Omega}) \cdot \underline{\Omega} = \underline{EJS} \cdot \underline{\Omega}$$

donde,

$$\underline{EJS} = X(\underline{J}\underline{\Omega}) = X\left(\begin{array}{c} I_{xx}\Omega_x + I_{xy}\Omega_y + I_{xz}\Omega_z \\ I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y + I_{yz}\Omega_z \\ I_{zx}\Omega_x + I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z \end{array}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & (I_{zx}\Omega_x + I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z) & -(I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y + I_{yz}\Omega_z) \\ -(I_{zx}\Omega_x + I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z) & 0 & (I_{xx}\Omega_x + I_{xy}\Omega_y + I_{xz}\Omega_z) \\ (I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y + I_{yz}\Omega_z) & -(I_{xx}\Omega_x + I_{xy}\Omega_y + I_{xz}\Omega_z) & 0 \end{vmatrix}$$

Multiplicando esta matriz EJS por la velocidad angular  $\underline{\Omega}$  de la unión 1, se obtienen directamente los esfuerzos del término adicional. Por la analogía que tiene este término con las puertas Resistencia (Resistor), en el sentido de obtener esfuerzos a partir de velocidades [51], algunos

autores, como Allen, lo denominan Gyristor [50].

Los módulos de los Transformer TF:GA y TF:GB son los vectores  $\underline{GA}$  y  $\underline{GB}$  que unen el centro de gravedad G con los puntos A y B del sólido, expresados en la base solidaria al mismo.

Como puede verse, se cumple que la velocidad absoluta de A ( $V_{A^1,0}$ ) es igual a la velocidad absoluta de G ( $V_{G^1,0}$ ), más el producto  $\underline{\Omega} \times \underline{GA}$ , más la velocidad relativa de A respecto a G ( $V_{A^1,1}$ ):

$$V_{A^1,0} = V_{G^1,0} + \underline{\Omega} \times \underline{GA} + V_{A^1,1}$$

Lo mismo puede decirse para el punto B.

El Transformer TF:[A<sub>1,0</sub>] representa un cambio de coordenadas que pasa de la base 1, solidaria al sólido, a la base 0 de la referencia fija. [A<sub>1,0</sub>] es la matriz de cambio de base. Si se ha orientado el sólido mediante ángulos de Cardan, esta matriz será el producto de las tres matrices correspondientes a dichos ángulos.

La unión 1 inferior representa la velocidad absoluta del centro de gravedad del sólido expresada en la referencia fija  $V_{G^0,0}$ .

La puerta Inercia I: $\underline{m}$  corresponde a la traslación del sólido, donde

$$\underline{m} = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix}$$

siendo m la masa del sólido.

Una variante en el planteamiento del bond graph, empleada en determinados casos, es la correspondiente a la igualdad:

$$V_{G^1,0} = V_{A^1,0} + \underline{\Omega} \times \underline{AG} - V_{A^1,1}$$

El bond graph correspondiente a esta igualdad se diferencia del anterior únicamente en el sentido de todos los grafos que concurren a la unión 0, salvo el grafo correspondiente al término  $\underline{\Omega} \times \underline{GA}$ , que no cambia de sentido, ya que la razón del Transformer pasa a ser  $TF: \underline{AG}$  en lugar de  $TF: \underline{GA}$ .

Otra variante consiste en definir la Inercia de traslación en la misma referencia del sólido. En tal caso desaparece el Transformer  $MTF: [A_1, 0]$ , pero hay que incluir junto a la unión 1 de velocidad  $V_{G^1,0}$  una puerta MGY definida como:

$$MGY: \begin{vmatrix} 0 & m \cdot \Omega_z & -m \cdot \Omega_y \\ -m \cdot \Omega_z & 0 & m \cdot \Omega_x \\ m \cdot \Omega_y & -m \cdot \Omega_x & 0 \end{vmatrix}$$

### II.1.2 - Modelo de barra bidimensional

Sea un barra rígida con el centro de gravedad en el punto G y en la que A y B son puntos de enlace con el exterior (Figura II-3).

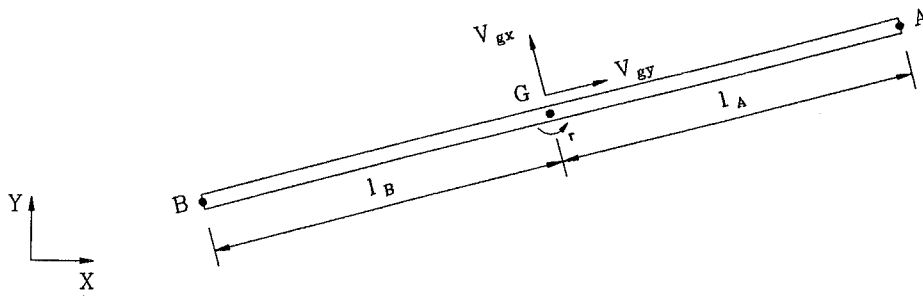


Fig. II-3: Barra rígida en el plano XY.

Se considera un sistema de referencia móvil xyz solidario a la barra, siendo el eje x coincidente con la dirección de la barra. Los movimientos están restringidos al plano XY.

En la Figura II-4 se representa el bond graph de este sólido con bonds simples.

Hay que señalar que puede haber variaciones en el bond graph expuesto (empleando multibonds, otros sistemas de referencia, etc.). Se indica esta versión porque se empleará en varios casos a lo largo de la tesis.

En el modelo expuesto, y desde el punto de vista de la cinemática, las ecuaciones que relacionan las velocidades principales son:

$$\underline{V_A} = \underline{V_G} + \underline{\Omega} \times \underline{GA}$$

$$\underline{V_B} = \underline{V_G} + \underline{\Omega} \times \underline{GB}$$

donde

$$\underline{\Omega} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{vmatrix} \quad \underline{GA} = \begin{vmatrix} 1_A \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \underline{GB} = \begin{vmatrix} -1_B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \underline{V_G} = \begin{vmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} \\ 0 \end{vmatrix}$$

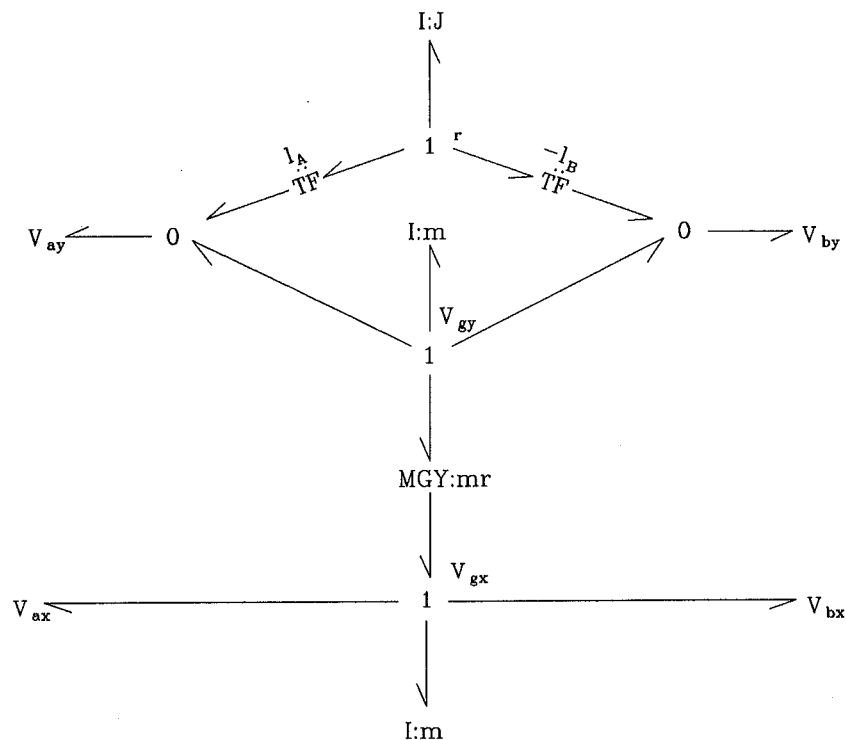


Fig. II-4: Bond graph de la barra rígida en el plano XY.

Desarrollando las anteriores ecuaciones, puede comprobarse la adecuada relación entre sus términos y los elementos del bond graph:

$$\underline{V_A} = \begin{vmatrix} V_{ax} \\ V_{ay} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} + r \cdot \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \underline{V_B} = \begin{vmatrix} V_{bx} \\ V_{by} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} - r \cdot \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Desde el punto de vista de la dinámica, este modelo presenta algunas diferencias respecto al modelo tridimensional expuesto anteriormente. Ahora, se aplica derivación en bases móviles, ya que se ha empleado una referencia solidaria a la barra en lugar de la referencia inercial usada en el modelo tridimensional.

El correspondiente término adicional que aparece al derivar en bases móviles es recogido por el Girator GY:mr.

Puede verse, en efecto, como todos los términos de las ecuaciones siguientes, correspondientes a la dinámica del sólido, guardan la relación debida con los elementos del bond graph expuesto.

$$\begin{aligned} \Sigma \text{ Fuerzas} &= d(m \cdot \underline{V_G})/dt = m \cdot (\dot{\underline{V_G}} + \underline{\Omega} \times \underline{V_G}) = \\ &= m \cdot \begin{vmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} \\ 0 \end{vmatrix} + m \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m \cdot V_{gx} - m \cdot r \cdot V_{gy} \\ m \cdot V_{gy} + m \cdot r \cdot V_{gx} \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En la parte de rotación no hay elemento Gyrotor ya que  $\underline{\Omega}$  y  $\underline{J\Omega}$  son siempre paralelos y, por tanto,  $\underline{\Omega} \times \underline{J\Omega} = \underline{0}$ .

## II.2 - ORIENTACION DE SOLIDOS EN EL ESPACIO

En este apartado se desarrolla la metodología para definir la orientación de los sólidos en el espacio.

En primer lugar, se desarrolla el caso de la orientación absoluta de un sólido en el espacio, generalizándose posteriormente a la orientación relativa de un sólido respecto a otro.

En ambos casos, para definir la orientación de los sólidos en el espacio, se emplearán, en esta tesis, Angulos de Cardan.

### II.2.1 - Orientación absoluta de un sólido

A la orientación absoluta de un sólido, o a la del triedro fijo a él, se llega a través de tres rotaciones sucesivas que constituyen los tres ángulos de Cardan.

Para que estas tres rotaciones definan unívocamente un cambio de orientación en el espacio, es preciso que se tomen del siguiente modo:

- la primera rotación sobre un eje fijo
- la segunda sobre un eje afectado por la primera rotación
- la tercera sobre un eje afectado por las dos anteriores

En la Fig. II-5 se representa una posible definición de los ángulos de Cardan. En ella aparecen: la base de referencia fija XYZ, la base solidaria al sólido  $x''y''z''$ , las bases intermedias  $x'y'z'$  y  $x''y''z''$  y los ángulos de Cardan  $\tau$ ,  $\phi$  y  $\theta$ .

Un vector V definido sobre una de las bases anteriores, podrá definirse sobre otra con el auxilio de una matriz de cambio de base.

Si se trata de velocidades o de esfuerzos, pueden emplearse diagramas de grafos para realizar estos cambios de base.

En el caso del giro  $\tau$  anterior se cumple que:

$$\begin{aligned}V_x &= V_x' \cos \tau - V_y' \sin \tau \\V_y &= V_y' \cos \tau + V_x' \sin \tau \\V_z &= V_z'\end{aligned}$$

El diagrama de grafos correspondiente a este giro  $\tau$  es el de la Fig. II-6.

Los diagramas correspondientes a los giros  $\phi$  y  $\theta$  se obtendrían de forma análoga a la empleada para el giro  $\tau$ .

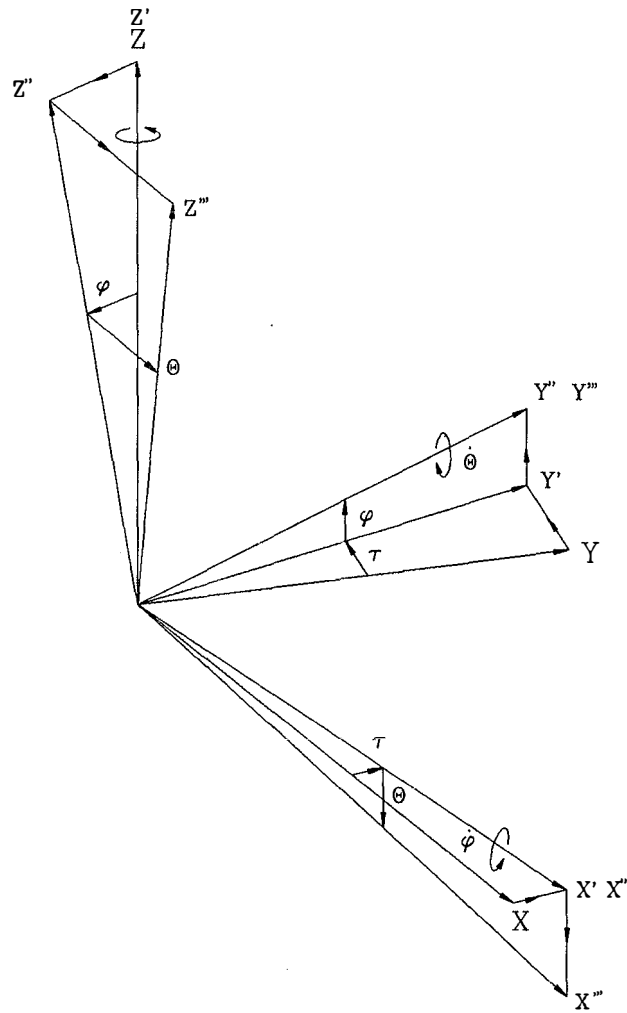


Fig. II-5: Definición de ángulos de Cardan

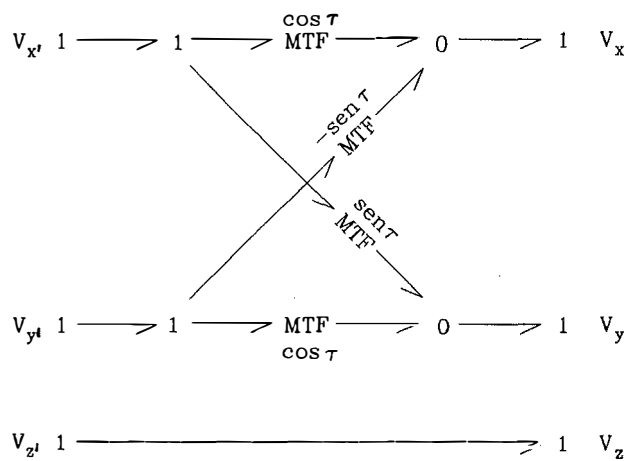


Fig. II-6: Diagrama de grafos correspondiente a un giro  $\tau$ .

Puede probarse que la velocidad angular  $\Omega$  del sólido, cuyas componentes en la base solidaria al mismo son  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  y  $\Omega_z$ , es también la suma de las velocidades angulares correspondientes a los ángulos de Cardan:

$$\underline{\Omega} = \dot{\tau} \cdot \underline{e}_z + \dot{\phi} \cdot \underline{e}_x + \dot{\theta} \cdot \underline{e}_y$$

siendo  $\underline{e}_k$  el vector unitario en la dirección k.

A partir de la velocidad angular, nula, de la referencia fija se llegará a la velocidad  $\Omega$  del sólido mediante la introducción sucesiva de las tres velocidades de Cardan, cada una definida en la base correspondiente:

$\dot{\tau}$  en la base X Y Z

$\dot{\theta}$  en la base x' y' z'

$\dot{\phi}$  en la base x'' y'' z''

En la Fig. II-7 se representa el diagrama de grafos correspondiente.

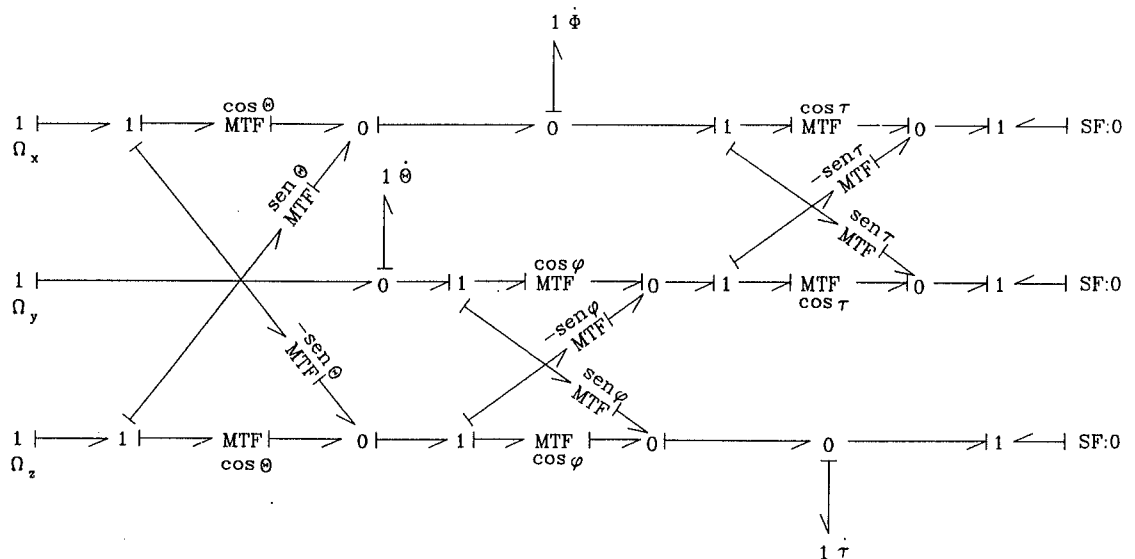


Fig. II-7: Diagrama de grafos correspondiente a la orientación de un sólido.



En dicho diagrama cada giro representa una diferencia de velocidades en un eje, representada por una unión 0, a la vez que un cambio de orientación de los otros dos ejes, representado por el conjunto de Transformers correspondiente. Este cambio de orientación es el debido al giro en el primer eje, estando los Transformers modulados por dicho giro.

Por ejemplo, la velocidad angular de Cardan  $\dot{\tau}$  se produce sobre el eje Z de la referencia fija (unión 0 sobre dicho eje) pasándose simultáneamente de la base XYZ a la base  $x'y'z'$ , en la que  $\tau$  es el ángulo de dicho cambio de base, ángulo que se obtiene por integración en el tiempo de  $\dot{\tau}$ .

De este modo se obtendrán los ángulos de Cardan a partir de la velocidad angular  $\Omega$  del sólido.

Dado que la velocidad angular de la referencia fija es nula (SF:0), puede simplificarse el diagrama anterior quedando tal y como se representa en la Fig. II-8.

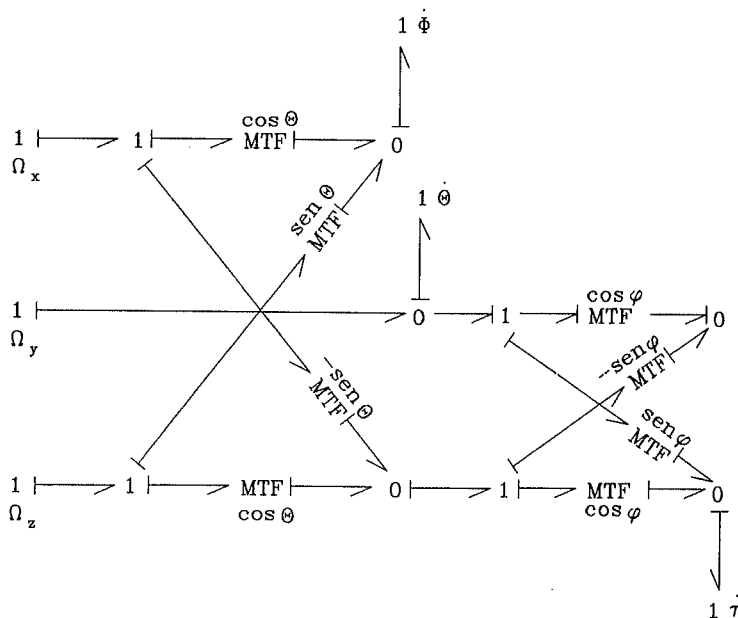


Fig. II-8: Diagrama de grafos simplificado correspondiente a la orientación de un sólido.

A partir del diagrama anterior se deducen directamente las expresiones de las velocidades de Cardan:

$$\dot{\phi} = \Omega_x \cdot \cos\theta + \Omega_z \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\dot{\theta} = \Omega_y - (\Omega_z \cdot \cos\theta - \Omega_x \cdot \operatorname{sen}\theta) \cdot \operatorname{tg}\phi$$

$$\dot{\tau} = (\Omega_z \cdot \cos\theta - \Omega_x \cdot \operatorname{sen}\theta) / \cos\phi$$

Los diagramas anteriores, y las fórmulas derivadas de ellos, serían diferentes en el caso de emplear otro conjunto de ángulos de Cardan, cuya definición puede ser cualquiera con tal de que cumpla los requisitos mencionados al principio de este apartado.

Como siempre ocurre con los ángulos de Cardan, existe una situación singular. En este caso se presenta cuando el ángulo  $\phi$  es igual a  $\pi/2$ . Esto no supone problemas cuando el sólido en cuestión es el chasis, ya que, en situaciones normales, este ángulo no se acercará a tal valor. Igual ocurre cuando el sólido es la rueda, siendo, entonces, el ángulo afectado el de caída.

### II.2.2 - Orientación relativa de un sólido respecto a otro

Para la definición de los ángulos de orientación relativa entre dos sólidos, el procedimiento es similar al de la obtención de los ángulos de orientación absoluta de un sólido.

Al igual que la orientación absoluta de un sólido se puede definir mediante tres ángulos de Cardan, constituidos por una sucesión de giros, definido cada uno de ellos sobre un eje afectado por los anteriores, la diferencia de orientación de dos sólidos se define también por una sucesión de giros relativos, definido cada uno de ellos sobre un eje afectado por los anteriores.

Normalmente, los dos sólidos estarán enlazados por un mecanismo, cuya constitución puede imponer la secuencia natural de giros. Por ello, la definición de los ángulos de Cardan puede ser distinta de la expuesta anteriormente.

No obstante, se desarrolla a continuación la formulación para el caso de emplear la misma definición de ángulos de Cardan antes expuesta.

En el caso de la orientación absoluta de un sólido, se partía de la velocidad angular de dicho sólido relativa a la velocidad angular, nula, de la referencia fija.

Ahora se parte de la velocidad angular de uno de los sólidos (A) relativa a la velocidad angular del otro sólido (B).

El bond graph de la unión entre las velocidades angulares de los sólidos A y B, es el de la Fig. II-9. Puede verse como, en este caso, la velocidad angular es no nula en ambos lados.

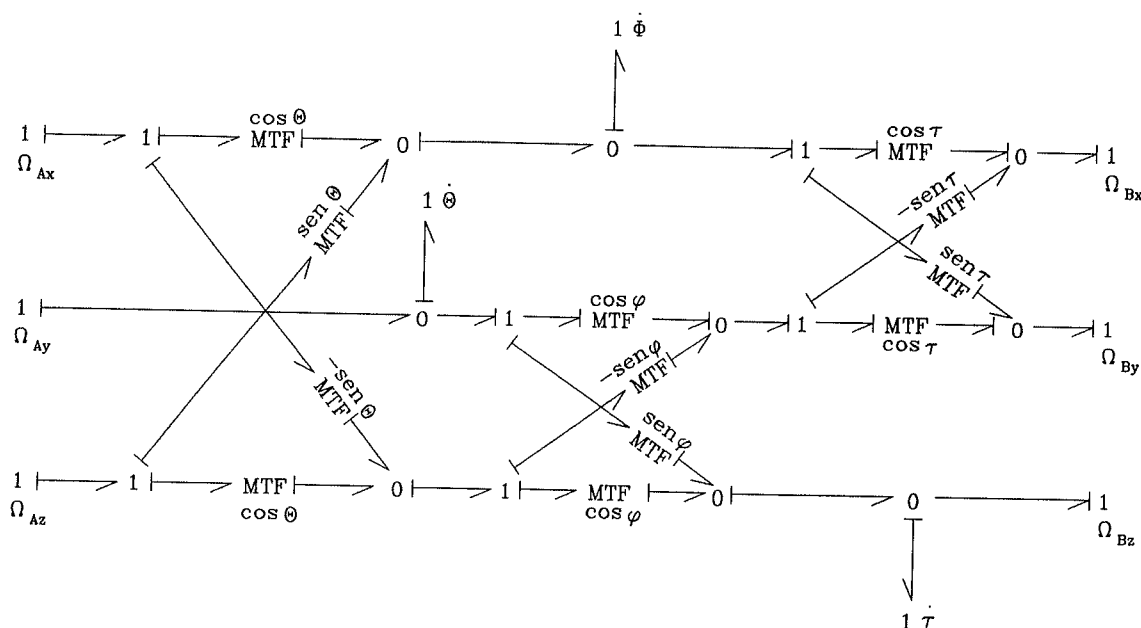


Fig. II-9: Diagrama de grafos de la orientación relativa entre dos sólidos.

De este bond graph se deducen las expresiones que relacionan las velocidades angulares:

$$\dot{\tau} = -\Omega_{Bz} + \cos \phi \cdot (\Omega_{Az} \cdot \cos \theta - \Omega_{Ax} \cdot \sin \theta) + \sin \phi \cdot (\Omega_{Ay} - \dot{\theta})$$

$$\dot{\theta} = \Omega_{Ay} - (1/\cos \phi) \cdot (\sin \phi \cdot (\Omega_{Az} \cdot \cos \theta - \Omega_{Ax} \cdot \sin \theta) + (1/\cos \tau) \cdot (\Omega_{By} - \sin \tau \cdot (-\dot{\phi} + \Omega_{Ax} \cdot \cos \theta + \Omega_{Az} \cdot \sin \theta)))$$

$$\dot{\phi} = \Omega_{Ax} \cdot \cos\theta + \Omega_{Az} \cdot \text{sen}\theta - (1/\cos\tau) \cdot (\Omega_{Bx} + \text{sen}\tau \cdot (\cos\phi \cdot (\Omega_{Ay} - \dot{\theta}) - \text{sen}\phi \cdot (\Omega_{Az} \cdot \cos\theta - \Omega_{Ax} \cdot \text{sen}\theta)))$$

A partir de las expresiones anteriores pueden despejarse las velocidades angulares de Cardan:

$$\dot{\tau} = -\Omega_{Bz} + (1/\cos\phi) \cdot (\Omega_{Az} \cdot \cos\theta - \Omega_{Ax} \cdot \text{sen}\theta) + \text{tg}\phi \cdot (\Omega_{By} \cdot \cos\tau - \Omega_{Bx} \cdot \text{sen}\tau)$$

$$\dot{\theta} = \Omega_{Ay} + \text{tg}\phi \cdot (\Omega_{Ax} \cdot \text{sen}\theta - \Omega_{Az} \cdot \cos\theta) + (1/\cos\phi) \cdot (\Omega_{Bx} \cdot \text{sen}\tau - \Omega_{By} \cdot \cos\tau)$$

$$\dot{\phi} = \Omega_{Ax} \cdot \cos\theta + \Omega_{Az} \cdot \text{sen}\theta - \Omega_{Bx} \cdot \cos\tau - \Omega_{By} \cdot \text{sen}\tau$$

El caso de la orientación absoluta expuesto en el anterior apartado, es un caso particular de éste, lo cual puede comprobarse fácilmente haciendo nulos los términos de la velocidad  $\Omega_B$  en las últimas expresiones.

### II.3 - ENSAMBLAJE DE SOLIDOS

En este apartado, se establecen las pautas para la construcción del bond graph del conjunto de dos sólidos, cuyos movimientos relativos están sujetos a la acción de algún tipo de elemento (muelles, amortiguadores, accionamientos, etc.) y restringidos por algún tipo de mecanismo (ejes, rótulas, etc.).

#### II.3.1 - Fundamentos de modelización

La estructura de ensamblaje se compondrá de dos partes: una referida a los movimientos relativos de traslación y otra referida a los movimientos relativos de rotación.

##### II.3.1.1 - Movimientos relativos de traslación

Los movimientos relativos de traslación, se modelizan

mediante uniones 0 situadas entre las uniones 1 que representan las velocidades de traslación de los puntos de enlace de los dos sólidos.

De dichas uniones 0 parten puertas  $Se$ ,  $Sf$ ,  $C$  ó  $R$  que representan los dispositivos o elementos que intervienen, de forma activa ( $Se$  y  $Sf$ ) o pasiva ( $C$  y  $R$ ), en los movimientos relativos correspondientes

La velocidad del punto de enlace de cada sólido se obtiene como la suma de la velocidad de su c.d.g., más el producto vectorial de su velocidad angular por el vector que une el c.d.g. con el punto de unión. Dicho vector podrá variar a causa del desplazamiento relativo entre los sólidos. No hay que olvidar que también son necesarios unos cambios de coordenadas, realizados mediante TF, para efectuar coherentemente, en una base común, la resta de velocidades que representan las uniones 0 anteriores.

En el caso de existir restricciones a los movimientos relativos en una determinada dirección, pueden colocarse Compliances de alta rigidez o bien los elementos Muelle Rígido definidos por J. Félez [34,35].

Hay que indicar aquí que los elementos Muelle Rígido (MR), junto con los elementos Inercia Nula (IN), constituyen la solución propuesta por J. Félez para la eliminación del problema de las coordenadas dependientes.

Se trata de elementos ideales que, desde el punto de vista de la causalidad, tienen el mismo comportamiento que las puertas Compliance e Inercia convencionales a las que, respectivamente, pueden sustituir, cumpliendo que el flujo en los MR y el momento en las IN son siempre estrictamente nulos. El empleo de estos elementos lleva consigo la introducción de multiplicadores de Lagrange en las ecuaciones de estado del sistema y la aparición de ecuaciones algebraicas de restricción.

### II.3.1.2 - Movimientos relativos de rotación

Se modelizan con un procedimiento similar al empleado para definir la orientación relativa de los sólidos mediante los ángulos de Cardan.

Cada giro supone una diferencia de velocidades, representada en el bond graph por una unión 0 en un eje a la vez que un cambio de orientación de los otros dos ejes, representado por un TF. Este cambio de orientación es el debido al giro habido en el primer eje, estando el TF modulado por dicho giro.

Las puertas (Sf, Se, C ó R) que parten de las uniones 0 anteriores, y que absorben las diferencias de velocidades, se colocan, dentro del bond graph, en la dirección en que realmente ocurren a la vista del mecanismo.

Los ángulos que definen los TF se obtienen por integración de las velocidades correspondientes. Es decir, los TF se hallan a partir del movimiento relativo que realmente se ha producido entre los sólidos.

### II.3.2 - Modelización de un par cinemático

Las pautas generales de modelización anteriormente expuestas, van a aplicarse al caso particular de la unión de dos sólidos mediante un eje de revolución, caso también denominado par de revolución.

En esta aplicación está restringida toda traslación relativa pero hay un grado de libertad de rotación. Es el caso de los dos cuerpos de un cojinete (Fig. II-10).

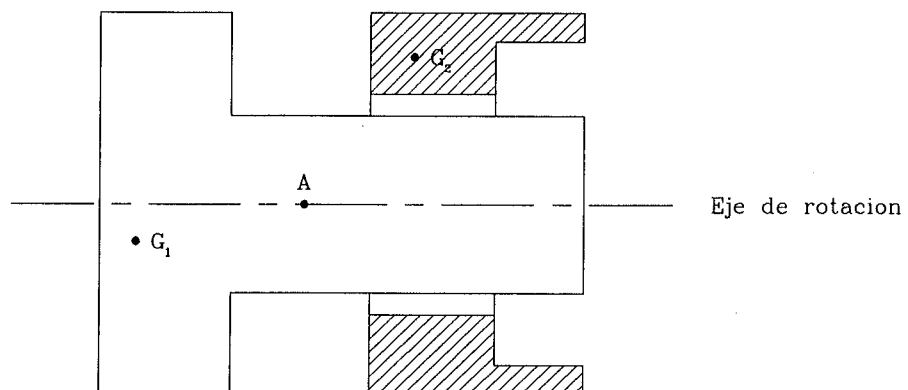


Fig. II-10: Par de revolución.

Para hallar el bond graph del conjunto de ambos sólidos se partirá de lo establecido anteriormente, haciéndose también un estudio de velocidades.

El punto A es un punto del eje de rotación y por tanto pertenece a los dos sólidos y se empleará para el análisis de las velocidades. Dicho punto A, como se verá a continuación, puede ser cualquiera con tal de que pertenezca al eje.

Llamando  $\underline{V_{G1}}$  y  $\underline{V_{G2}}$  a las velocidades de los c.d.g. de los sólidos,  $\underline{V_A}$  a la velocidad del punto A y  $\underline{\Omega_1}$  y  $\underline{\Omega_2}$  a sus velocidades angulares, se cumple que:

$$\underline{V_{G1}} = \underline{V_A} + \underline{\Omega_1} \times \underline{AG_1}$$

$$\underline{V_{G2}} = \underline{V_A} + \underline{\Omega_2} \times \underline{AG_2}$$

de donde

$$\underline{V_{G2}} = \underline{V_{G1}} - \underline{\Omega_1} \times \underline{AG_1} + \underline{\Omega_2} \times \underline{AG_2}$$

expresión en la que ya no aparece  $\underline{V_A}$  explícitamente.

El bond graph que representa las relaciones de velocidades anteriores es el de la Fig. II-11.

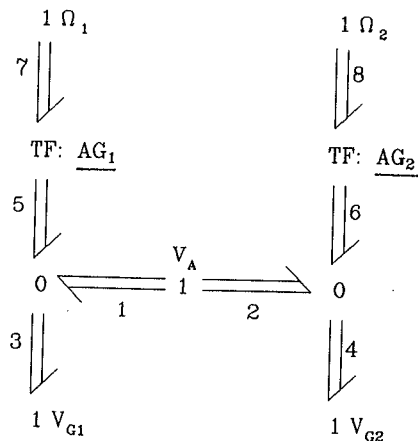


Fig. II-11: Relación entre las velocidades.

La unión 1 del centro representa la velocidad  $V_A$  cuyo valor explícito no es necesario conocer. Esta unión 1 permite que los dos grafos que concurren en ella puedan estar dirigidos hacia las uniones 0, cumpliéndose así las expresiones anteriores.

Evidentemente, el punto A puede ser cualquiera, ya que todos los puntos del eje son equivalentes.

Esto es cierto solamente a efectos de la cinemática interna del mecanismo. Normalmente, en la realidad habrá dos rodamientos sobre el eje y su posición sobre el mismo, o la distancia entre ambos, son cuestiones que no afectan para nada a la cinemática aunque sí influirán en los esfuerzos internos. Es por ello que, desde el punto de vista cinemático, los dos supuestos rodamientos podrían estar juntos y en cualquier punto del eje, punto que sería el ya citado A.

En cuanto a los esfuerzos es evidente que los esfuerzos de las uniones 0 son los de reacción en el punto A:

$$e_1 = e_3 = e_5 = e_7 / AG$$

$$e_2 = e_4 = e_6 = e_8 / AG$$

Por otra parte, la unión 1 central obliga a que  $e_1 = -e_2$  como era de esperar por ser esfuerzos de acción y reacción.

Dado que están impedidos los desplazamientos lineales relativos, para evitar causalidades diferenciales deben colocarse Compliances o elementos Muelle Rígido (Fig. II-12).

En lo referente a los movimientos de rotación, se cumple que las velocidades angulares de ambos sólidos son iguales, salvo en la componente correspondiente al eje del mecanismo.

Por ello, y para evitar causalidades diferenciales, se colocan elementos Muelle Rígido en los grafos de unión correspondientes a los dos giros impedidos.



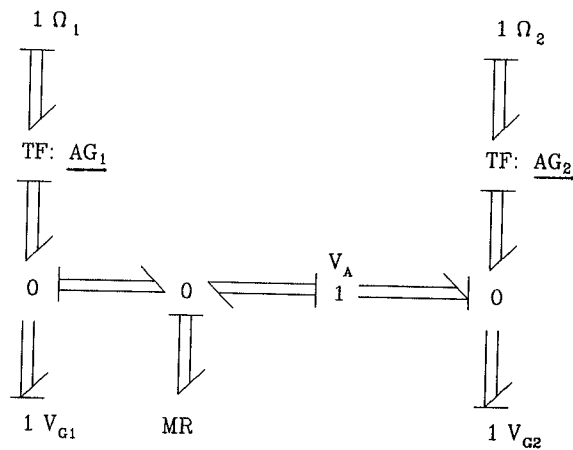


Fig. II-12: Incorporación de un elemento Muelle Rígido.

El bond graph de unión de la parte de rotación, descompuesto en bonds simples y con la causalidad representada, es el de la Fig. II-13.

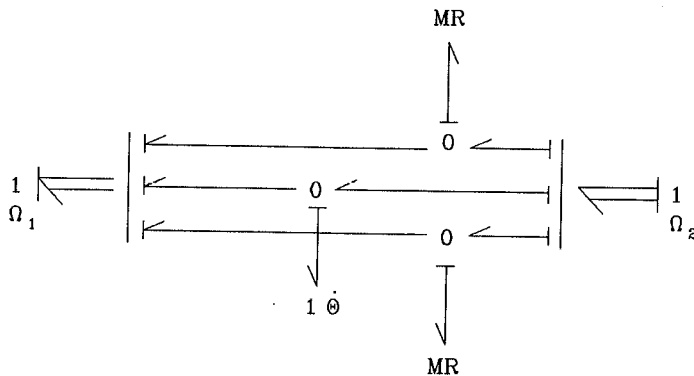


Fig. II-13: Relación entre las velocidades angulares.

El diagrama entero consta de las partes de rotación y traslación y se completa con los cambios de coordenadas correspondientes al giro existente en el mecanismo (Fig. II-14).

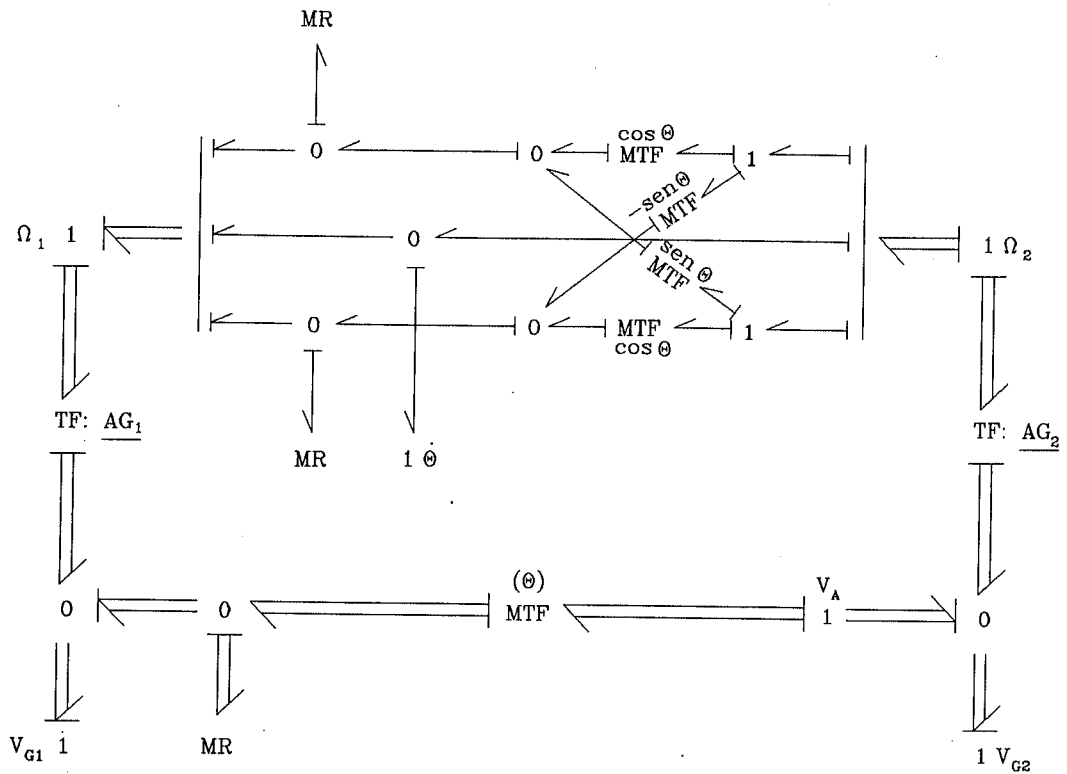


Fig. II-14: Modelización del par de revolución.

La modelización de otros pares cinemáticos se realiza de manera similar, estando la diferencia en las restricciones. Así, por ejemplo, el par esférico se caracteriza por no tener ninguna restricción en rotación, siendo la parte de traslación igual a la del par cilíndrico expuesta. Análogamente, un par prismático tendría tres restricciones en la parte de rotación y dos en la de traslación, quedando libre el movimiento de deslizamiento en la dirección del prisma.

En otros trabajos [34], se indican las restricciones correspondientes a diferentes pares cinemáticos.

#### II.4 - ANALISIS DEL FLUJO DE ENERGIA EN PUERTAS RESISTENCIA PLURIDIMENSIONALES

Quando se introducen puertas Resistencia pluridimensionales (Resistor Fields), es conveniente comprobar que no se introduce energía al sistema, sino que en cualquier circunstancia se disipa energía. El criterio a emplear está

expuesto por Rosenberg & Karnopp [1].

Para realizar esta comprobación, hay que analizar la matriz R que representa la puerta a estudiar, basándose el análisis en el desarrollo de la expresión de la potencia disipada.

La potencia disipada en esta puerta, es el producto del flujo por el esfuerzo:

$$P_d = f^T \cdot e = f^T \cdot R \cdot f$$

A continuación se va a desarrollar la expresión anterior para el caso bidimensional, siendo generalizable a cualquier dimensión.

$$\begin{aligned} P_d &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} R_{11} \cdot f_1 + R_{12} \cdot f_2 \\ R_{21} \cdot f_1 + R_{22} \cdot f_2 \end{vmatrix} \\ &= R_{11} \cdot f_1^2 + R_{12} \cdot f_1 \cdot f_2 + R_{21} \cdot f_2 \cdot f_1 + R_{22} \cdot f_2^2 = \\ &= R_{11} \cdot f_1^2 + (R_{12} + R_{21}) \cdot f_1 \cdot f_2 + R_{22} \cdot f_2^2 \end{aligned}$$

Esta expresión de la potencia disipada ha de ser, en el caso de la puerta Resistencia, siempre positiva.

Cuando la matriz es antisimétrica la potencia disipada es nula en cualquier circunstancia, ya que los elementos de estas matrices cumplen que:

$$R_{ii} = 0 \quad \text{para todo } i$$

$$R_{ij} = -R_{ji} \quad \text{para todo } i \neq j$$

Elementos tales como los MGY, que no intercambian energía con el exterior del sistema, se caracterizan por su matriz antisimétrica.

Los elementos Resistencia, que han de disipar energía, no pueden tener la matriz antisimétrica.

Para que tampoco introduzcan energía al sistema hay que comprobar que la matriz R es definida positiva.

Para ello se descompone la matriz R en una matriz antisimétrica  $R_A$  y otra simétrica  $R_s$

$$R = R_A + R_s$$

donde

$$R_A = \frac{1}{2} \cdot (R - R^T)$$

$$R_s = \frac{1}{2} \cdot (R + R^T)$$

Se analiza entonces únicamente la parte simétrica  $R_s$ , ya que la parte antisimétrica no contribuye a la transferencia de potencia.

Para comprobar que R es definida positiva, puede aplicarse el criterio de Sylvester.

Dicho criterio se aplica a la matriz simétrica  $R_s$ , y consiste en comprobar que todos los discriminantes principales  $D_1, \dots, D_n$  son positivos, siendo n la dimensión de la matriz.

Cada discriminante principal  $D_i$  es el determinante de la submatriz

$$D_i = \begin{vmatrix} R_{11} & \dots & R_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{i1} & \dots & R_{ii} \end{vmatrix}$$

## II.5 - MODULACION DE COMPLIANCES

En determinados casos de modelización, surge la necesidad de modular Compliances.

Sin embargo, varios autores (Breedveld, [8]; Beaman & Rosenberg, [45]) señalan que la modulación de las puertas Compliance e Inercia puede violar el principio de conservación de la energía.

Por todo ello, es necesario analizar algunos conceptos relacionados con las Compliances y su modulación, para establecer en qué condiciones es posible realizar dicha modulación.

### II.5.1 - Caracterización de las Compliances

Una Compliance es un elemento capaz de almacenar energía y está caracterizado por una función  $e=e(q)$  que relaciona esfuerzos ( $e$ ) y desplazamientos ( $q$ ) (Fig. II-15).

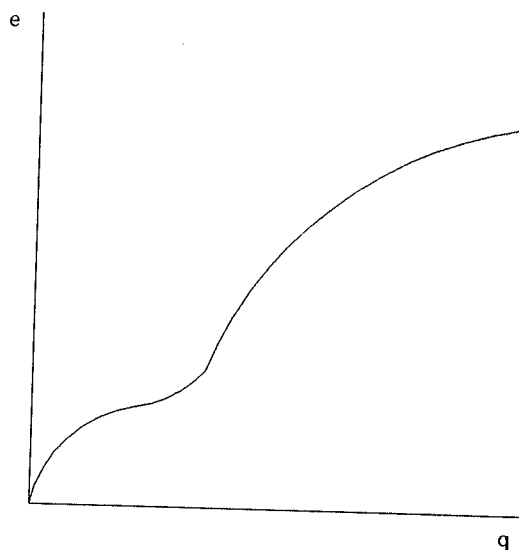


Fig. II-15: Gráfica esfuerzos-desplazamientos de una Compliance.

Un caso particular es aquel en que dicha relación es lineal, es decir, cuando existe proporcionalidad entre esfuerzos y desplazamientos.

A menudo se definen las Compliances, lineales o no, mediante un parámetro  $C$  que no es más que el cociente entre el esfuerzo y el desplazamiento:  $C=e/q$ .

En el caso lineal, el parámetro  $C$  es constante ( $C=k$ ).

Obviamente, en los casos no lineales, este parámetro es variable, definiéndose entonces mediante una función  $C=C(q)$ .

En programas de simulación como Bondyn o Tutsim, se definen las Compliances mediante el citado parámetro,

calculándose el esfuerzo de la Compliance como el producto del desplazamiento por el repetido parámetro.

En Tutsim, este parámetro C es siempre fijo por lo que sólo pueden modelizarse Compliances lineales. Para modelizar otro tipo de Compliances, habría que emplear fuentes de esfuerzo o flujo que las sustituyeran.

En Bondyn, el parámetro C puede ser variable, aunque siempre el esfuerzo de la Compliance es de la forma  $e=C \cdot q$ .

El hecho de definir la función  $e=e(q)$  de una Compliance como  $e=C \cdot q$ , obliga a que la curva  $e=e(q)$  pase por el origen, ya que para  $q=0$  es siempre  $e=0$ .

Esto se ha de tener en cuenta a la hora de definir las referencias de desplazamientos en la modelización de un sistema, ya que han de ser nulos los desplazamientos de las Compliances cuando su esfuerzo es nulo.

### II.5.2 - Rigidez de una Compliance

Puede definirse como "rigidez" de una Compliance la derivada del esfuerzo  $e=e(q)$  respecto del desplazamiento  $q$ :

$$\text{Rigidez} = de/dq = e'(q)$$

Gráficamente, es la pendiente de la curva de esfuerzos frente a desplazamientos.

En el caso lineal, dicha pendiente coincide con el factor  $k$  de proporcionalidad entre esfuerzos y desplazamientos característico de las Compliances lineales:

$$\text{Rigidez} = k = e/q$$

En este caso también se cumple que el parámetro  $C=e/q$  es constante y coincide con la rigidez.

El hecho de que el parámetro  $C=e/q$  coincida con la rigidez  $de/dq$ , es decir,

$$de/dq = e/q$$

implica que la Compliance ha de ser lineal.

Para demostrarlo, se deriva respecto a q:

$$d(de/dq)/dq = d(e/q)/dq$$

$$d^2e/dq^2 = (q \cdot (de/dq) - e \cdot (dq/dq))/q^2 =$$

$$= (q \cdot e/q - e)/q^2 = (e - e)/q^2 = 0$$

Como puede verse, la derivada segunda de e respecto a q es nula, lo cual implica que la primera derivada es una constante y, por tanto, la función  $e=e(q)$  que caracteriza a la Compliance es lineal.

### II.5.3 - Condiciones para la modulación de Compliances

Al hablar de "modulación de Compliances", se hace referencia a la variación del parámetro  $C=e/q$  empleado en determinados casos (programas de simulación, etc.) para definir las Compliances.

Obviamente, no puede asociarse el concepto de modulación de Compliances con las variaciones que, cuando la Compliance no es lineal, puede sufrir el parámetro  $C=e/q$  a lo largo de la curva  $e=e(q)$  ni tampoco con las variaciones de rigidez, que no son más que las variaciones de la pendiente de esa misma curva (ver Fig. II-15).

La modulación de Compliances es la variación de la función  $C=C(q)$ .

El objetivo de este apartado es establecer las condiciones en que puede efectuarse dicha modulación.

El problema en la modulación de Compliances, radica en que puede producirse una violación del principio de conservación de la energía.

En efecto, la energía puesta en juego durante un determinado recorrido a lo largo de la curva  $e=e(q)$ , entre los puntos  $q_1$  y  $q_2$ , equivale al área situada debajo de dicha curva (Fig. II-16).

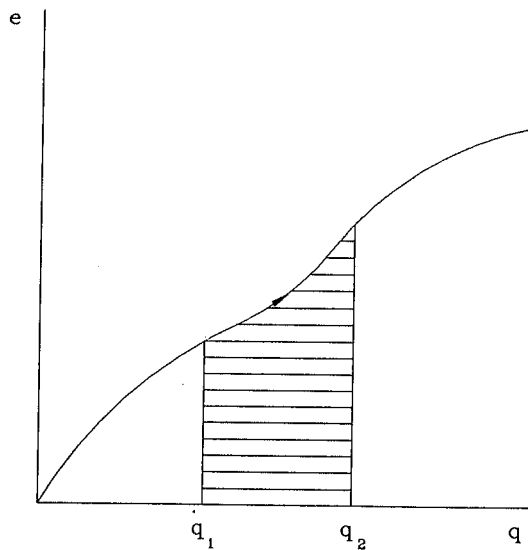


Fig. II-16: Energía puesta en juego en un desplazamiento.

Si el anterior recorrido se deshace, pasando de  $q_2$  a  $q_1$ , siguiendo otra trayectoria distinta, el balance de energía no estará equilibrado, habiéndose violado el principio de conservación (Fig. II-17).

Por consiguiente, para asegurar que la Compliance no crea energía ni la hace desaparecer, es preciso que la trayectoria sea siempre la misma, lo que equivale a decir que la función  $e=e(q)$  ha de ser unívoca.

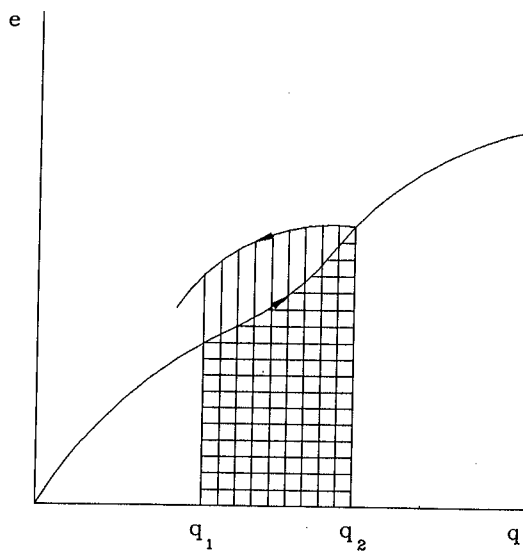


Fig. II-17: Balance de energía no equilibrado.



Es decir, una vez definida la función  $e=e(q)$ , ésta no puede variarse si esa variación puede suponer que durante el flujo en un sentido (expansión o compresión), los esfuerzos tienen un valor diferente al que tienen durante el flujo opuesto.

La condición de que la función ha de ser estrictamente unívoca, independientemente del sentido del flujo, resume lo anterior.

Cuando la función  $e=e(q)$  se define como  $e=C \cdot q$ , para que el esfuerzo sea función unívoca del desplazamiento, ha de cumplirse que la función  $C=C(q)$  también ha de serlo.

De acuerdo con todo lo anterior, para efectuar la modulación de una Compliance, queda sólo la posibilidad de hacerlo cuando la Compliance se encuentra en la situación en que son nulos el desplazamiento, el esfuerzo y la energía almacenada (Fig. II-18).

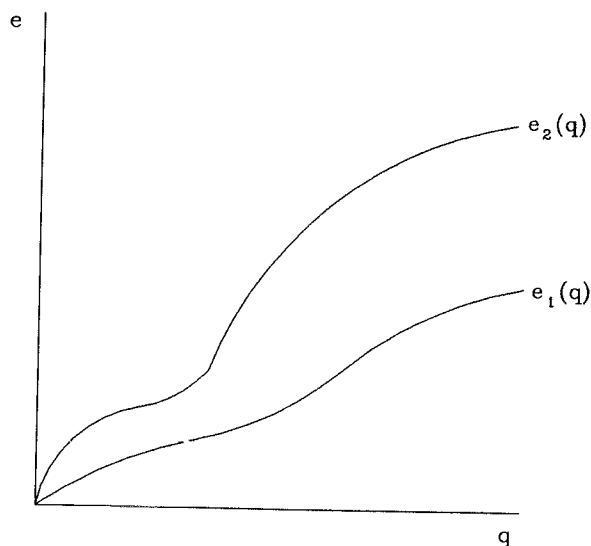


Fig. II-18: Variación de la función  $e=e(q)$  en la modulación de Compliances.

Es obvio que, en tal situación, puede definirse libremente la función esfuerzo  $e=e(q)$  mediante cualquier función unívoca, función que, de acuerdo con lo anteriormente expuesto, ya no podrá cambiarse hasta regresar de nuevo a la situación de partida.

## Capítulo III

### NUEVAS MODELIZACIONES PARA SISTEMAS MECANICOS COMPLEJOS

#### III.0 - INTRODUCCION

En este Capítulo, se desarrollan y optimizan nuevas modelizaciones de determinados sistemas mecánicos complejos.

Se trata de sistemas mecánicos compuestos por sólidos rígidos y que presentan determinadas singularidades, tanto en los mismos sólidos como en los enlaces entre ellos.

En primer lugar, se estudia y desarrolla una nueva modelización de sólidos con masa despreciable, sólidos que a menudo aparecen en los sistemas vehiculares. El resultado es una modelización notablemente simplificada en relación con la modelización convencional. Del desarrollo efectuado, surgen también algunas conclusiones adicionales, como la posible aplicación de la técnica de bond graph en Cinemática.

En segundo lugar, se estudian y modelizan las situaciones de discontinuidad en los enlaces entre sólidos, producidas por las interrupciones del contacto entre ellos.

Por último, y como continuación de lo anterior, se analiza la desaparición de restricciones en los pares cinemáticos que enlazan los sólidos de un mecanismo, lo cual tiene aplicación en la modelización de holguras.

#### III.1 - MODELIZACION DE SOLIDOS DE MASA DESPRECIABLE Y APLICACION DE LA TECNICA DE BOND GRAPH EN CINEMATICA

En los sistemas de suspensión y dirección del vehículo, intervienen mecanismos formados por barras y/o sólidos, con dos o más puntos de articulación, cuya masa y movimientos son pequeños frente a los del resto de sólidos

que participan en la dinámica del vehículo.

En muchos casos, no es necesario considerar las propiedades dinámicas intrínsecas de estos elementos de poco peso, sino sólo las restricciones cinemáticas que imponen a los cuerpos a los que se enlazan.

Lo anteriormente expuesto queda justificado cuando la masa del elemento en cuestión (brazo de dirección, tirante de suspensión, etc.) es pequeña en comparación con la masa de los elementos a los que se enlaza (chasis, eje rígido, conjunto rueda-mangueta, etc.).

Dada la complejidad de mecanismos como los de suspensión y dirección, u otros similares, es evidente la conveniencia de desarrollar técnicas que permitan simplificar su modelización.

En los siguientes apartados se desarrollan nuevos modelos simplificados de sólidos de masa despreciable.

También se discuten cuestiones como la asimetría del modelo propuesto y la eliminación adicional de ciertos elementos.

Por último, y partiendo de los modelos desarrollados, se analiza la posible aplicación de la técnica de bond graph en análisis puramente cinemáticos.

### III.1.1 - Modelización de sólidos de masa despreciable

Se inicia el desarrollo con los sólidos de dos puntos de enlace (barras) y se generaliza a continuación al caso de sólidos con tres o más puntos de enlace.

#### III.1.1.1 - Modelización de una barra de masa despreciable

Las barras que aparecen en los sistemas de suspensión y dirección no son más que sólidos rígidos que se pueden mover en el espacio tridimensional con seis grados de libertad, y que tienen dos puntos de enlace (Fig. III-1).

Su modelización puede hacerse en la forma convencional es decir, considerándolas como sólidos rígidos con masa, o

bien de forma simplificada.

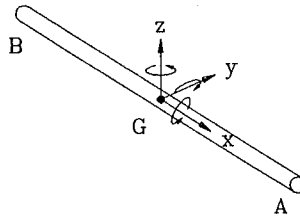


Fig. III-1: Barra en el espacio tridimensional.

Se expone a continuación la modelización convencional con multibonds, ya que ésta constituirá el punto de partida de la modelización simplificada que se desarrollará en los siguientes apartados.

**A - Modelización convencional**

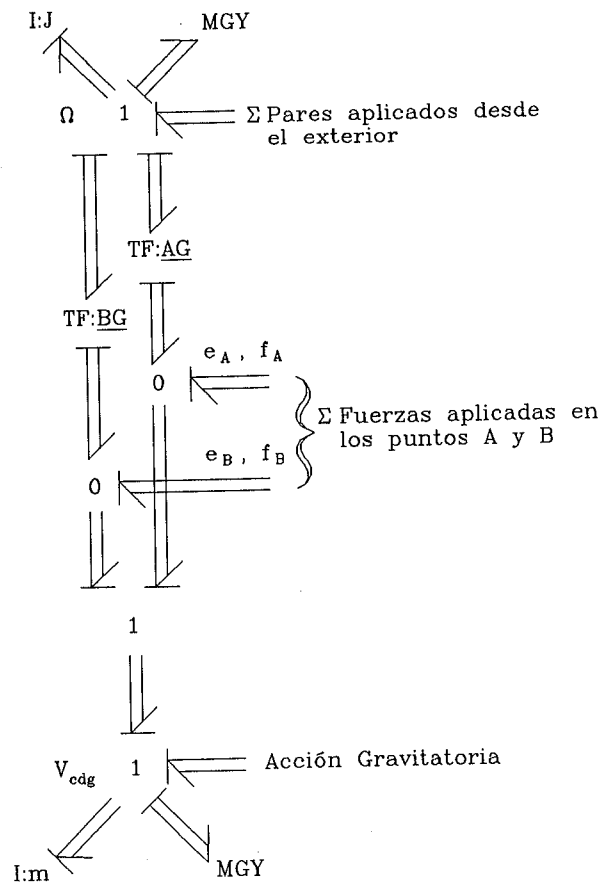


Fig. III-2: Bond graph del modelo convencional de la barra.

La modelización convencional, representada en la Figura III-2, contempla todas las propiedades dinámicas de la barra como sólido rígido aunque su masa sea pequeña. Esta modelización es, simplemente, la de un sólido rígido con dos puntos de enlace, uno en cada extremo de la barra

El elemento MGY de la parte de traslación puede suprimirse si se define la velocidad del c.d.g. en la referencia inercial, empleando para ello un cambio de coordenadas MTF:[ $\tau$ ][ $\phi$ ][ $\theta$ ] antes de la unión 1 que representa dicha velocidad. Esta última solución es la empleada en otros capítulos para la modelización de sólidos.

Si las articulaciones de los extremos de la barra son esféricas y sin rozamientos, es nulo el par aplicado desde el exterior en la unión 1 de velocidad angular de la barra.

### B - Nueva modelización simplificada

La obtención del nuevo modelo simplificado de barra de masa despreciable se hará en varias etapas, partiendo del modelo anterior.

La primera etapa consiste en la sustitución de las puertas Inercia por puertas Inercia Nula, definidas por J.Félez [34,35] (ver apartado II.3.1.1).

En determinados casos, que se discuten posteriormente, dichas puertas podrán incluso suprimirse.

La segunda etapa, consiste en suprimir los elementos Gyrator, lo cual es posible ya que se hacen nulos todos sus términos.

En efecto, todos los elementos de la puerta MGY:EJS correspondientes a la rotación, tienen como factor los momentos de inercia del sólido, que en el presente caso son nulos:

$$MGY:EJS = \begin{vmatrix} 0 & (I_{zx}\Omega_x + I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z) & -(I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y + I_{yz}\Omega_z) \\ -(I_{zx}\Omega_x + I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z) & 0 & (I_{xx}\Omega_x + I_{xy}\Omega_y + I_{xz}\Omega_z) \\ (I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y + I_{yz}\Omega_z) & -(I_{xx}\Omega_x + I_{xy}\Omega_y + I_{xz}\Omega_z) & 0 \end{vmatrix}$$

Del mismo modo, todos los elementos de la puerta MGY:EJS correspondientes a la traslación, tienen como factor la masa del sólido, que también es nula:

$$MGY:EJS = \begin{vmatrix} 0 & m\Omega_z & -m\Omega_y \\ -m\Omega_z & 0 & m\Omega_x \\ m\Omega_y & -m\Omega_x & 0 \end{vmatrix}$$

La fuente de esfuerzo representativa de la acción gravitatoria, como es lógico, también se elimina.

El bond graph que resulta es el de la Fig. III-3

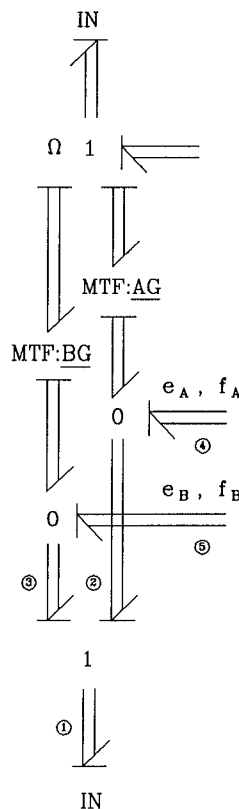


Fig. III-3: Bond graph de la barra, parcialmente simplificado.

En este bond graph, todavía se hace uso del concepto de centro de gravedad, ya que la unión 1 inferior representa la velocidad del mismo y los TF tienen como módulos los vectores AG y BG. Sin embargo, carece de sentido referirse a un punto como el c.d.g. de la barra, ya que se supone que su masa es nula.

La tercera etapa en la simplificación del modelo se basa en lo anterior, y consiste en sustituir el punto G por otro cualquiera de la barra, como, por ejemplo, el extremo B.

Con ello desaparece el TF:BG y el grafo 5 puede ir directamente a la unión 1 inferior, que ahora representa la velocidad de B, desapareciendo también, por tanto, el grafo 3 y la unión 0 correspondiente. El Transformer TF:AG se convierte en TF:AB.

El bond graph que queda es el de la Fig. III-4.

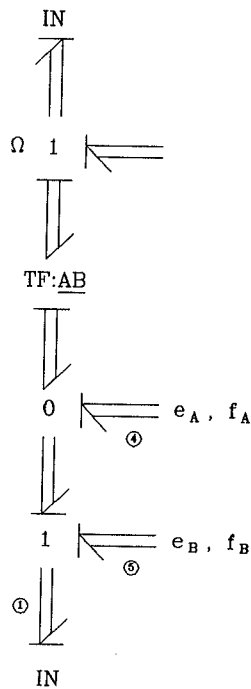


Fig. III-4: Modelo simplificado de la barra de masa despreciable.

El bond graph representado en esta figura es el modelo simplificado del sólido sin masa con dos puntos de enlace.

La validez de este modelo se demostrará comprobando como los flujos y esfuerzos en los extremos A y B de la barra (grafos 4 y 5) cumplen las relaciones básicas de velocidades y de equilibrio de fuerzas, teniendo en cuenta que se trata de un sólido rígido y sin masa:

$$\underline{f}_B = \underline{f}_A + \underline{\Omega} \times \underline{AB}$$

$$\underline{e}_A + \underline{e}_B = \underline{0}$$

La primera ecuación se cumple, dada la igualdad entre flujos entrantes y salientes en la unión 0.

La segunda ecuación también se cumple, dada la igualdad entre esfuerzos entrantes y salientes en la unión 1, y dado que el esfuerzo en la puerta IN es nulo.

Con el fin de verificar el bond graph anterior y analizar si sus elementos Inercia Nula son siempre necesarios, se construirá el bond graph de una barra sin masa a partir de un análisis puramente cinemático, en lugar de hacerlo a partir del modelo dinámico de sólido rígido.

Supuesta una barra de extremos A y B, las velocidades de éstos cumplen que:

$$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\Omega} \times \underline{AB}$$

donde  $\Omega$  es la velocidad angular de la barra.

El bond graph equivalente a la igualdad anterior se construye asignando una unión 1 para  $\underline{V}_A$  y otra para  $\underline{V}_B$ , situando, entre ambas, una unión 0 para efectuar la suma del término  $\underline{\Omega} \times \underline{AB}$ .

A su vez, la parte del bond graph que representa el término  $\underline{\Omega} \times \underline{AB}$  ha de contener una unión 1 para la velocidad  $\underline{\Omega}$  y un Transformer para multiplicar vectorialmente dicha velocidad por el vector  $\underline{AB}$ .

El bond graph resultante es el de la Fig. III-5a.

Si los puntos A y B se unen a otros sólidos, hay que dibujar también los grafos correspondientes a los enlaces con esos sólidos, quedando el bond graph de la Fig. III-5b.



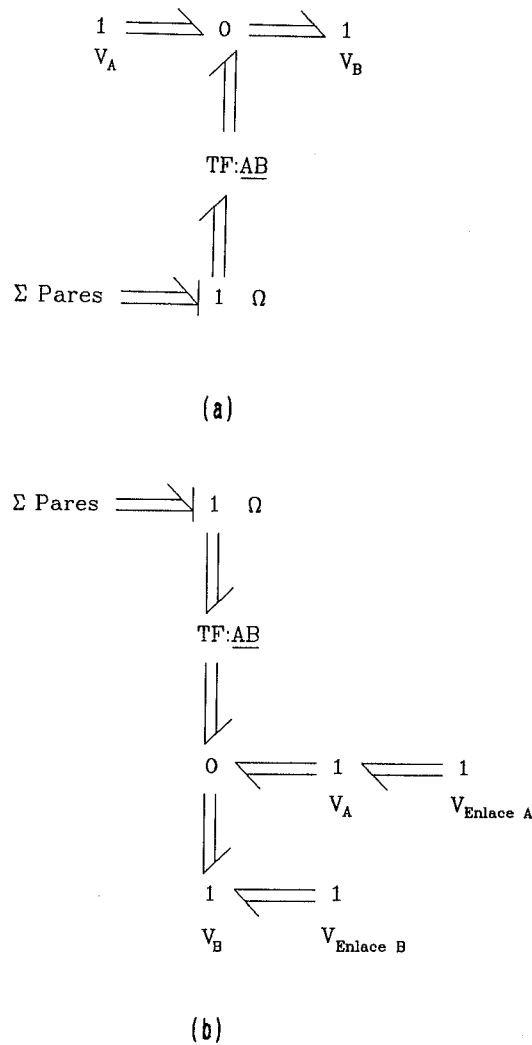


Fig. III-5: Comprobación del bond graph simplificado de una barra de masa despreciable.

Este bond graph tiene una estructura equivalente a la del inicialmente obtenido (Fig. III-4), diferenciándose de aquel únicamente en la inexistencia de las puertas Inercia Nula.

Sin embargo, la inclusión de las puertas Inercia Nula es necesaria, en determinados casos, cuestión que se discute en el siguiente apartado.

III.1.1.2 - Discusión sobre la inclusión o no de puertas Inercia y elementos Muelle Rígido en las restricciones.

En determinados casos será necesario incluir puertas

Inercia, de naturaleza convencional o elementos Inercia Nula, para evitar causalidades diferenciales y para evitar bucles algebraicos.

Asimismo, las puertas Inercia permiten disponer más fácilmente de los datos de orientación y posición de la barra en el espacio, cuando se emplean determinados programas de simulación.

Para comprobar la necesidad que, en determinados casos, hay de emplear puertas Inercia, se considerará el caso, bastante común, en que la barra AB se une a dos sólidos mediante rótulas esféricas, pudiendo existir resistencias frente a los movimientos relativos de rotación así como Compliances, o elementos Muelle Rígido MR, frente a los desplazamientos relativos en las uniones (Fig. III-6). Si se emplean Compliances, éstas pueden representar la existencia de silentblocks.

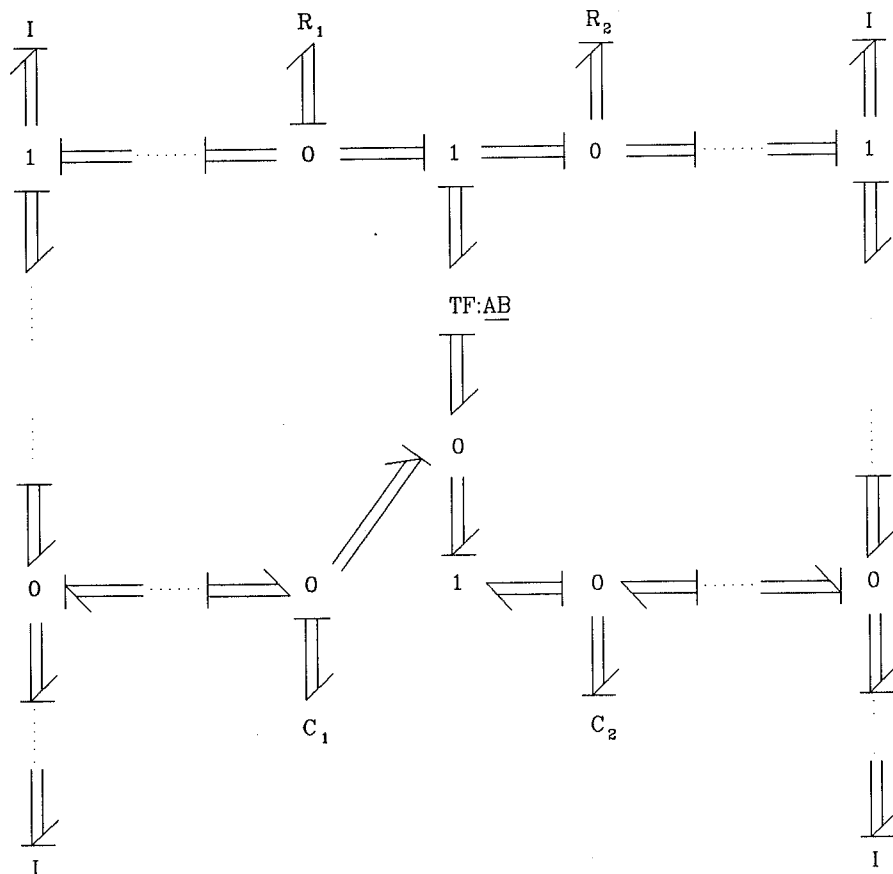


Fig. III-6: Enlace de la barra con otros sólidos: no se incorpora ninguna Inercia.

Puede comprobarse, a la vista de la Fig. III-6, como, asignando causa esfuerzo a la Compliance  $C_1$ , se obtiene causalidad diferencial en la Compliance  $C_2$ .

También puede verse como la causalidad de las Resistencias  $R_1$  y  $R_2$  puede ser intercambiada, lo que significa que aparecerá un bucle algebraico ([10],[1]).

Incluyendo una puerta Inercia Nula en la unión 1 superior, representativa de la velocidad angular de la barra, (Fig. III-7a) desaparece la posibilidad de elegir la causalidad en las puertas Resistencia, y con ella la aparición de bucles algebraicos, pero continúa existiendo causalidad diferencial en una de las Compliances.

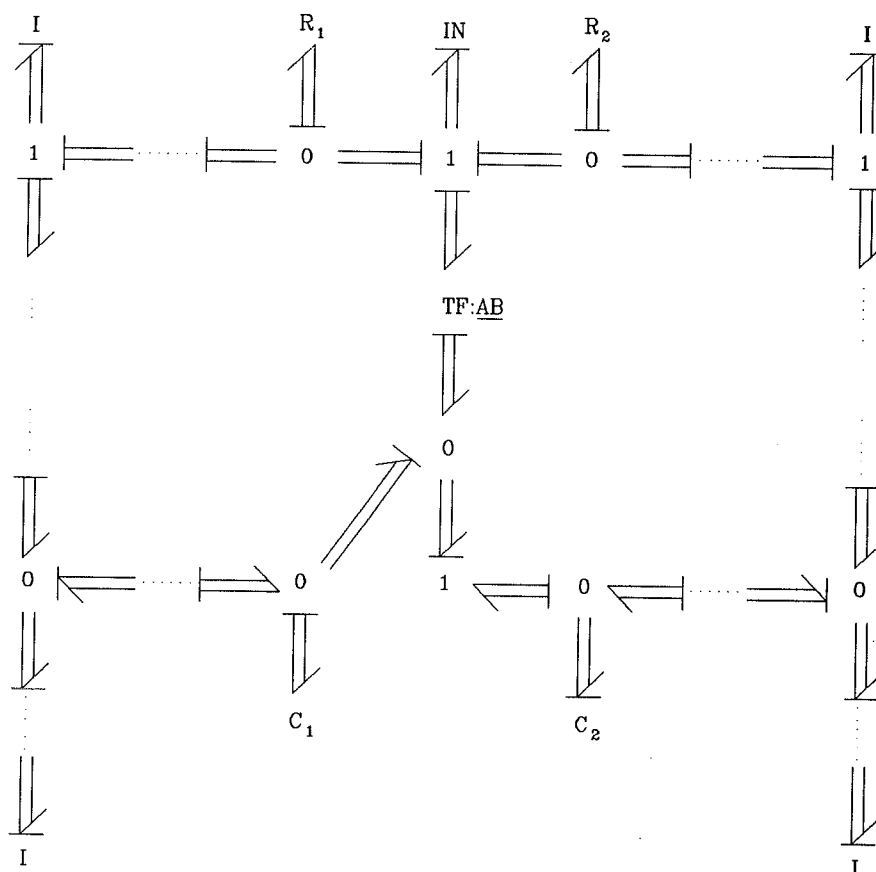


Fig. III-7a: Enlace de la barra con otros sólidos: incorporación de una Inercia.

Si, por el contrario, se coloca una puerta Inercia Nula en la unión 1 inferior (Fig. III-7b), las causalidades de las Compliances son integrales, pero hay indeterminación

en la asignación de la causalidad de las puertas Resistencia.

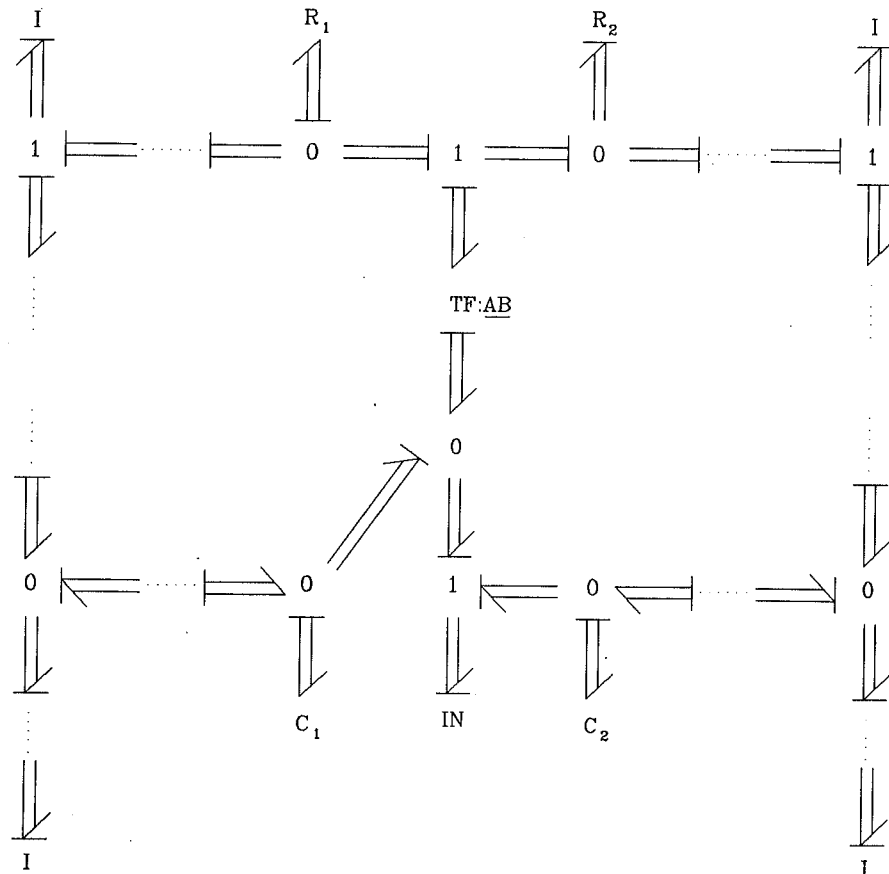


Fig. III-7b: Enlace de la barra con otros sólidos: incorporación de una Inercia.

Por último, incluyendo las dos puertas Inercia Nula, no aparecen ni causalidades diferenciales, ni causalidades con asignación indeterminada en puertas Resistencia (ver Fig. III-8).

Queda así demostrada la necesidad, en determinados casos, de emplear puertas Inercia para evitar causalidades diferenciales y/o bucles algebraicos.

Además de lo anterior, las puertas Inercia Nula aportan la ventaja adicional, como ya se adelantó, de que permiten manejar más cómodamente variables como velocidad angular, orientación, posición, etc. de la barra. Esto se debe a que, en algunos programas de simulación, se manejan explícitamente las variables de flujo y desplazamiento de las puertas Inercia, sean o no nulas.

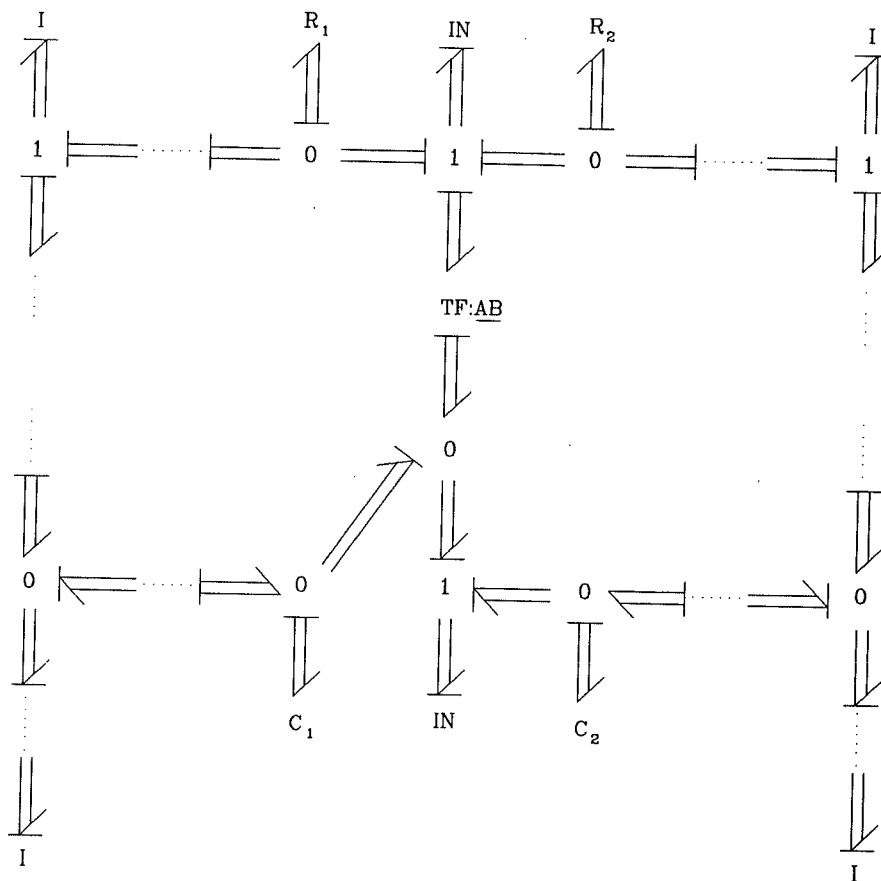


Fig. III-8: Enlace de la barra con otros sólidos: se incorporan dos Inercias.

En determinados casos, la puerta Inercia Nula de la parte inferior del bond graph, puede eliminarse.

A continuación se analizan esos casos.

La incorporación de la puerta Inercia Nula mencionada, procedía, fundamentalmente, del interés en eliminar causalidades diferenciales en las Compliances de la unión de desplazamientos entre los sólidos.

Sin embargo, puede darse el caso de que alguna de las Compliances,  $C_1$  o  $C_2$ , de la parte de unión en desplazamientos, no exista. Esto puede corresponder, por ejemplo, a la situación real de no haber silentblock en un extremo de la barra.

En la Fig. III-9 se representa el caso de que se elimine la Compliance  $C_2$ .

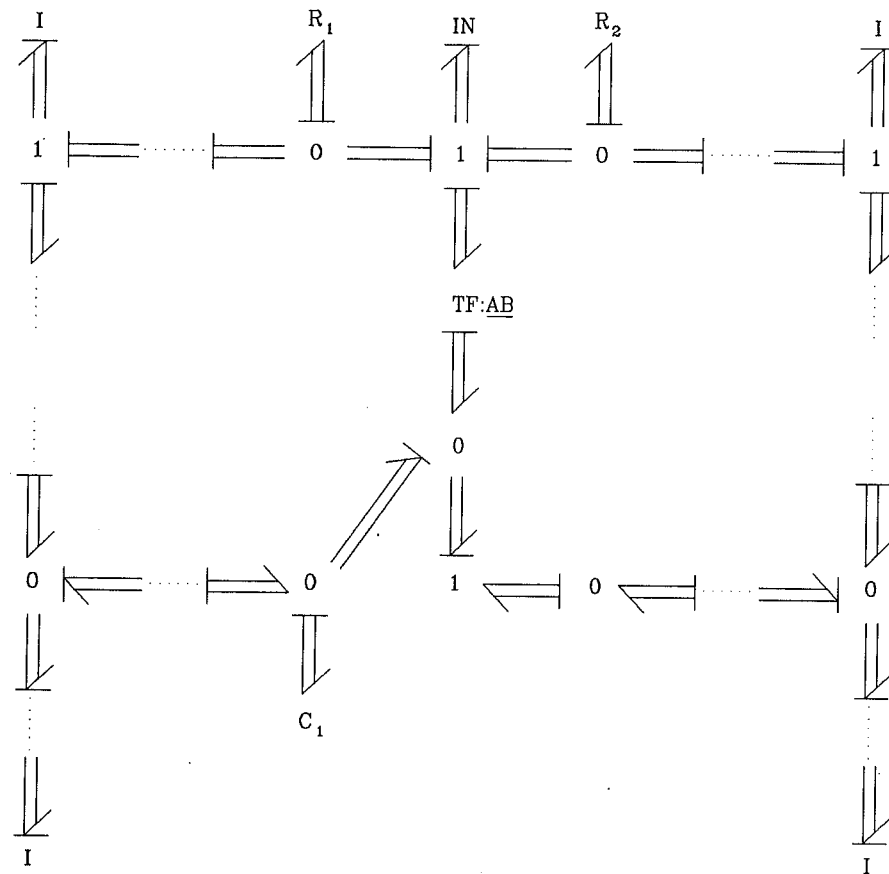


Fig. III-9: Enlace de la barra con otros sólidos: eliminación de una Compliance y una Inercia.

Como puede verse, ha sido posible eliminar también la puerta Inercia Nula inferior sin que haya ninguna causalidad diferencial.

En el caso de que se eliminaran las dos Compliances, se tendría que una de las Inercias de traslación de los cuerpos adyacentes tendría causalidad diferencial, apareciendo, por tanto, coordenadas dependientes (ver Fig. III-10).

Los resultados anteriores ponen de manifiesto una importante ventaja adicional del modelo desarrollado de barra sin masa sobre el modelo de sólido rígido.

En efecto, el nuevo modelo, además de su mayor simplicidad, permite prescindir de determinados elementos Muelle Rígido en la modelización de las restricciones.

Si, por ejemplo, no hay silentblock en un extremo de la barra, existiendo por tanto una restricción pura en

dicho punto, la modelización convencional exigiría la incorporación de un elemento Muelle Rígido para modelizar la restricción y evitar causalidades diferenciales.

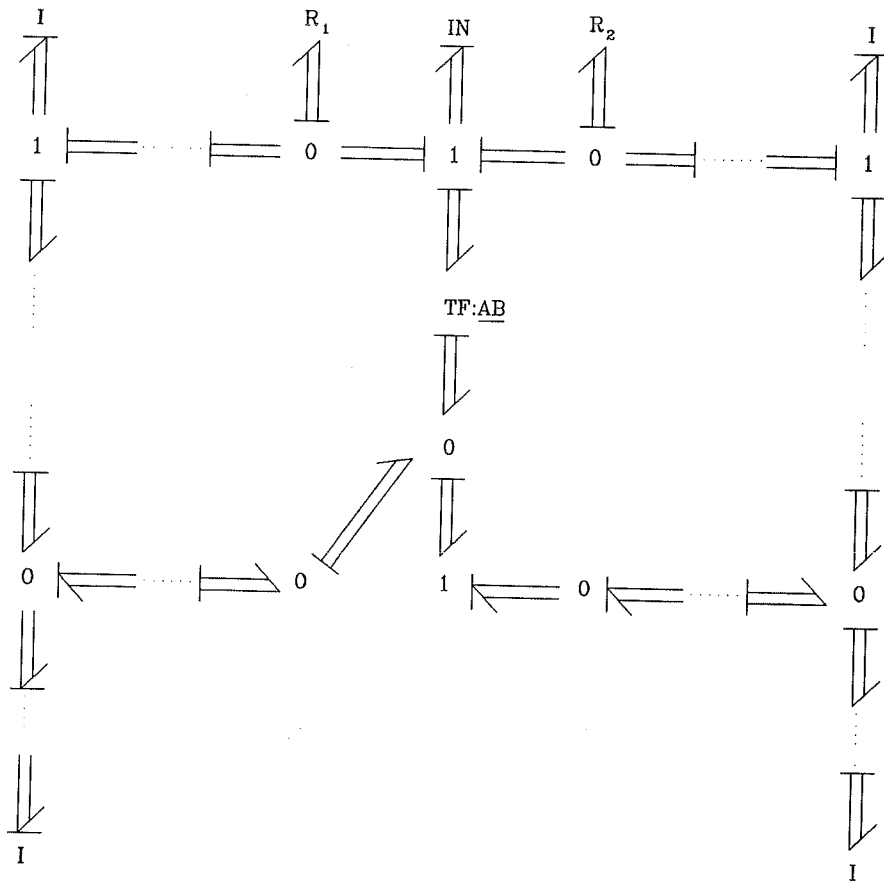


Fig. III-10: Enlace de la barra con otros sólidos: Causalidad diferencial por eliminar dos C y una I.

Sin embargo, en la misma situación, el modelo de barra sin masa puede prescindir de dicho elemento, ya que también puede eliminarse la puerta Inercia de traslación del centro de gravedad de la barra.

Se suprimen de este modo dos ecuaciones: una correspondiente al elemento Muelle Rígido y otra correspondientes a la puerta Inercia.

En el caso de no haber silentblocks en ninguno de los dos extremos de la barra, también se obtienen simplificaciones.

En efecto, el modelo convencional exigiría la presencia de dos elementos Muelle Rígido, uno en cada extremo de la barra, además de la puerta Inercia de traslación,

mientras que, en el modelo propuesto, puede eliminarse dicha puerta Inercia y uno de los dos elementos Muelle Rígido (ver Fig. III-9).

### III.1.1.3 - Discusión sobre la asimetría del modelo

Una cuestión que hay que analizar sobre estas modelizaciones simplificadas, se refiere a que, en el modelo propuesto de barra sin masa, la unión con los sólidos adyacentes es asimétrica, ya que un extremo, el A, corresponde a la unión 0 y el otro, el B, a la unión 1.

Se demostró anteriormente que, tanto dinámica como cinemáticamente, el modelo es correcto, siendo necesario comprobar ahora que, en el caso de que haya Compliance, o elemento Muelle Rígido, en uno sólo de los dos extremos, el modelo no se ve afectado, desde el punto de vista de la causalidad, por la elección del lado en el que se sitúa.

En la Figura III-11 se representa la parte inferior del mismo bond graph de anteriores figuras, tanto en el caso de que la Compliance o Muelle Rígido esté en un lado (Fig. III-11a) como en el caso de que esté en el otro (Fig. III-11b).

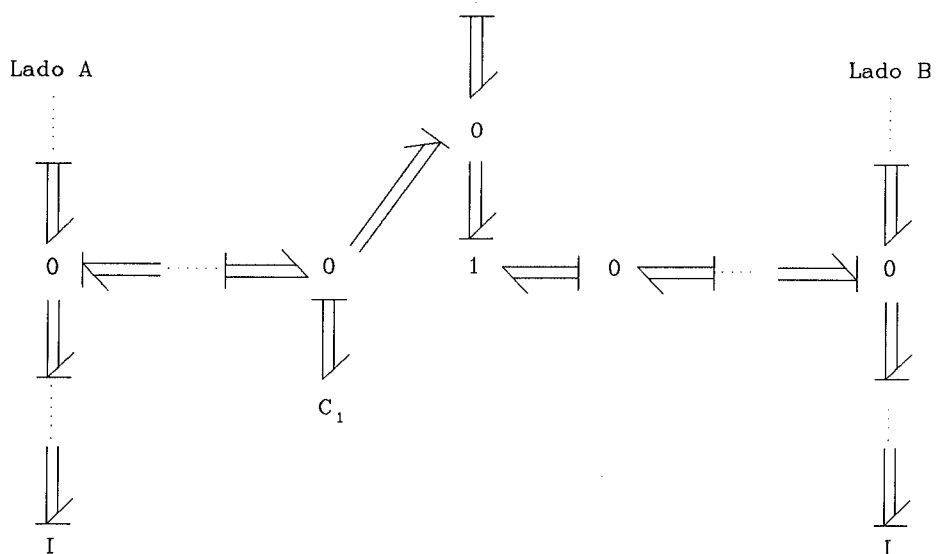


Fig. III-11a: Asimetría del modelo: Compliance en lado A.



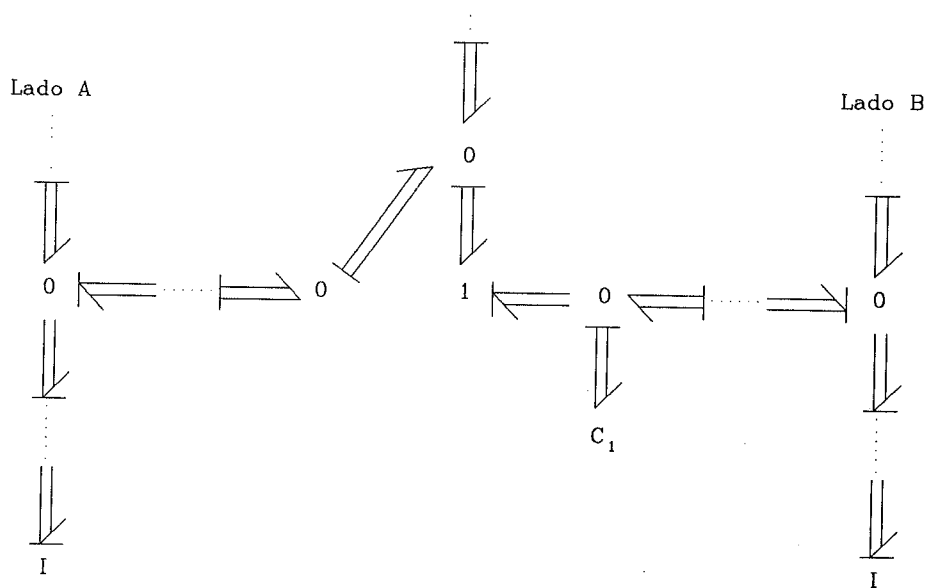


Fig. III-11b: Asimetría del modelo: Compliance en lado B.

Es evidente, a la vista de estas figuras, que la causalidad del bond graph del resto del sistema no se ve afectada por la elección del lado en el que se sitúa la Compliance o el elemento Muelle Rígido.

Obviamente, tanto la discusión de este apartado como las de los apartados anteriores, centradas en la causalidad, son válidas también para el caso de que en lugar de Compliances o elementos Muelle Rígido, haya otros elementos con la misma causalidad, como pueden ser Fuentes de Esfuerzo, Compliances en paralelo con Resistencias, etc.

#### III.1.1.4 - Modelización de sólidos de masa despreciable y con más de dos puntos de enlace

Algunos elementos de los sistemas de suspensión o dirección no son barras, sino cuerpos tridimensionales con varios puntos de enlace con otros cuerpos adyacentes. Por ejemplo, pueden considerarse como triángulos los brazos superior e inferior de una suspensión delantera de cuadrilátero articulado, los brazos semiarrastrados empleados en algunos tipos de suspensión trasera, etc.

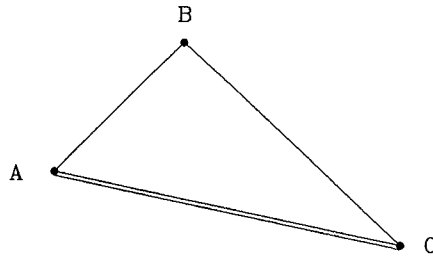


Fig. III-12: Sólido de masa despreciable con tres puntos de enlace.

Si se considera que su masa es pequeña en relación con la de los demás sólidos, puede efectuarse una simplificación en la modelización análoga a la efectuada con la barra de masa despreciable.

Se desarrollará en primer lugar el caso de que haya tres puntos de enlace, generalizándose posteriormente al caso general de  $n$  puntos de enlace.

Partiendo del modelo completo, como sólido con masa, tras las etapas de sustituir elementos I por IN y de eliminar las puertas MGY:EJS y la fuente de esfuerzo de gravedad, se llega al bond graph de la Fig. III-13.

Tomando como punto de referencia un punto cualquiera del sólido, por ejemplo el A, en lugar del centro de gravedad del mismo, tal como se hizo en el caso de la barra, se llega al bond graph de la Fig. III-14.

Puede comprobarse cómo se cumple también en este caso que:

$$\underline{e_A} + \underline{e_B} + \underline{e_C} = 0$$

$$\underline{f_A} = \underline{f_B} + \underline{\Omega} \times \underline{BA}$$

$$\underline{f_A} = \underline{f_C} + \underline{\Omega} \times \underline{CA}$$

deduciéndose de las dos últimas igualdades que también:

$$\underline{f_C} = \underline{f_B} + \underline{\Omega} \times \underline{BC}$$

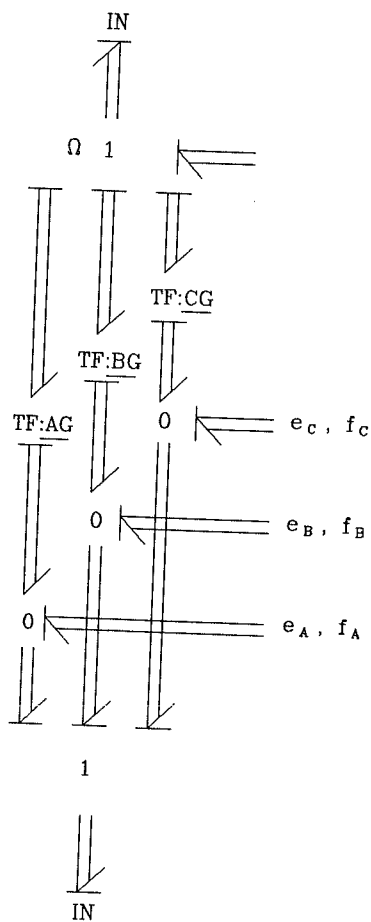


Fig. III-13: Bond graph, parcialmente simplificado, del sólido de masa despreciable con tres puntos de enlace.

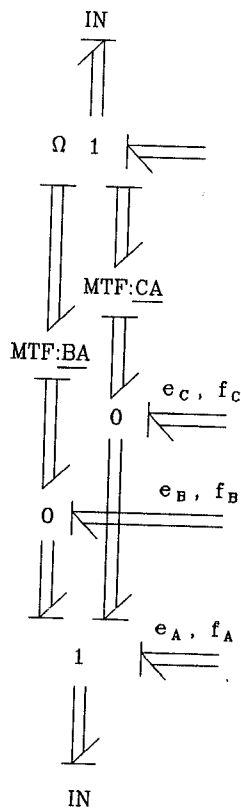


Fig. III-14: Modelo simplificado de sólido de masa despreciable con tres puntos de enlace.

Los resultados anteriores pueden generalizarse sin dificultad al caso de que el sólido tenga un número  $n$  cualquiera de puntos de enlace.

Procediendo del mismo modo que en los casos anteriores, de sólidos con dos o tres puntos de enlace, se concluye que el bond graph de un sólido sin masa con  $n$  puntos de enlace es el de la Figura III-15.

Como punto característico  $P_n$  conviene elegir aquel que más fácilmente sirva como punto de referencia, para definir la situación del resto de los puntos  $P_i$  ( $i=1,2,\dots,n-1$ ) del cuerpo. Ello es debido a que los Transformer del modelo son los vectores  $P_i P_n$ , es decir los vectores que definen la posición relativa entre el punto de referencia  $P_n$  y el resto de los puntos  $P_i$  del sólido.

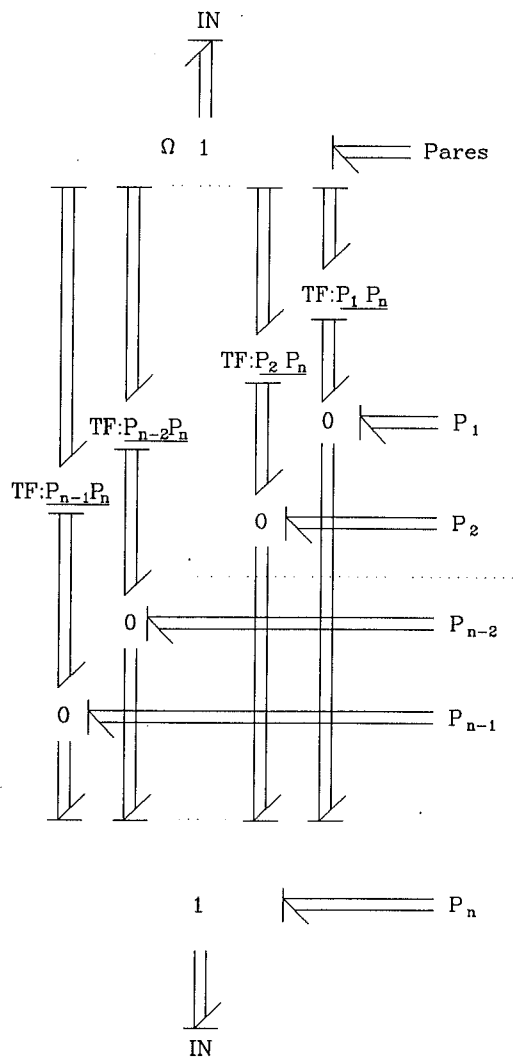


Fig. III-15: Modelo simplificado de sólido de masa despreciable con n puntos de enlace.

Las discusiones efectuadas sobre el caso de la barra sin masa con dos puntos de enlace, relativas a la simplificación del modelo por eliminación de Inercias Nulas y elementos Muelle Rígido en la modelización de restricciones, pueden extenderse al caso general de un cuerpo sin masa con n puntos de enlace.

De este modo, puede establecerse como conclusión general, que, en un sólido de masa despreciable con n puntos de enlace, manteniendo la puerta Inercia Nula correspondiente a la rotación, puede tener, en la parte correspondiente a los desplazamientos, un enlace con causa flujo, teniendo los n-1 enlaces restantes causa esfuerzo (Fig. III-16).

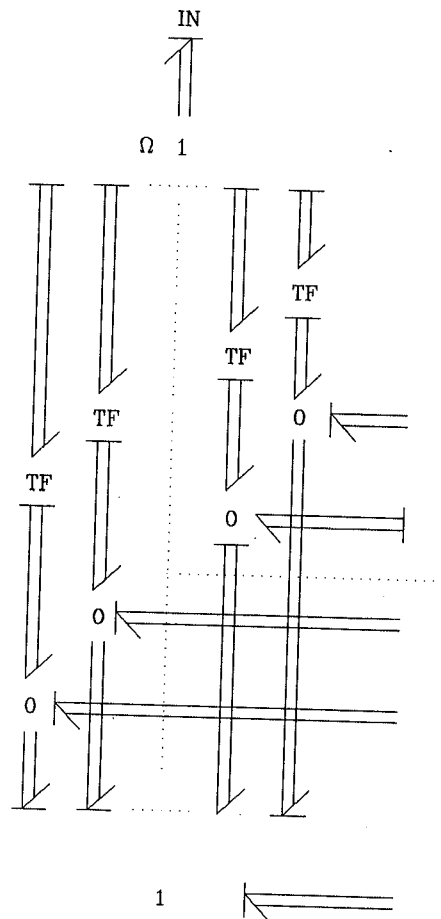
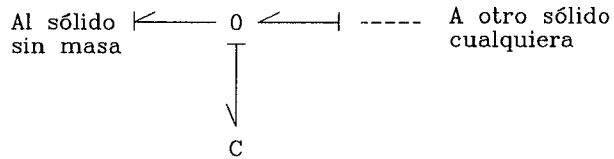


Fig. III-16: Posibilidades de enlaces con distinta causalidad.

En el caso de no existir la puerta Inercia de la parte de rotación, el número de enlaces con causa flujo sería de dos, y el de enlaces con causa esfuerzo sería de  $n-2$ .

Los enlaces con causa esfuerzo, pueden corresponder a cualquiera de los siguientes casos:

- 1) Enlaces con otros sólidos cualesquiera, incluyéndose en dichos enlaces, uniones 0 de las que partan Compliances con causalidad integral, fuentes de esfuerzo u otros bonds con la misma causalidad, de tal modo que los bonds que llegan al sólido sin masa en cuestión tengan causa esfuerzo (Fig. III-17a).
- 2) Enlaces con otros sólidos sin masa, no incluyéndose uniones 0 en dichos enlaces. Estos enlaces sólo pueden realizarse a la única puerta con causa flujo de cada uno de los demás sólidos sin masa (Fig. III-17b).



(a)



(b)

Fig. III-17: Posibles uniones con causa esfuerzo.

Las uniones con causa flujo de un sólido sin masa corresponderán, normalmente, a los enlaces, con restricciones y sin Muelles Rígidos, con otros sólidos cualesquiera, aunque también pueden corresponder a uniones con fuentes de flujo, etc.

De las conclusiones anteriores pueden derivarse algunos corolarios:

Por ejemplo, puede suceder que un sólido sin masa se una a otros sólidos sin Compliances en ninguno de los  $n$  enlaces, lo cual ocurriría, en el caso de existir Inercia en la parte de rotación, del siguiente modo:

- una unión sin Compliance ni Muelle Rígido a otro sólido cualquiera (causa flujo)
- $n-1$  uniones al grafo de causalidad singular de  $n-1$  sólidos sin masa (causa esfuerzo)

También puede comprobarse como en una cadena de sólidos sin masa, tal que cada uno de ellos tenga dos puntos de enlace, uno con cada sólido contiguo, es posible prescindir de todas las Compliances salvo una (Fig. III-18).

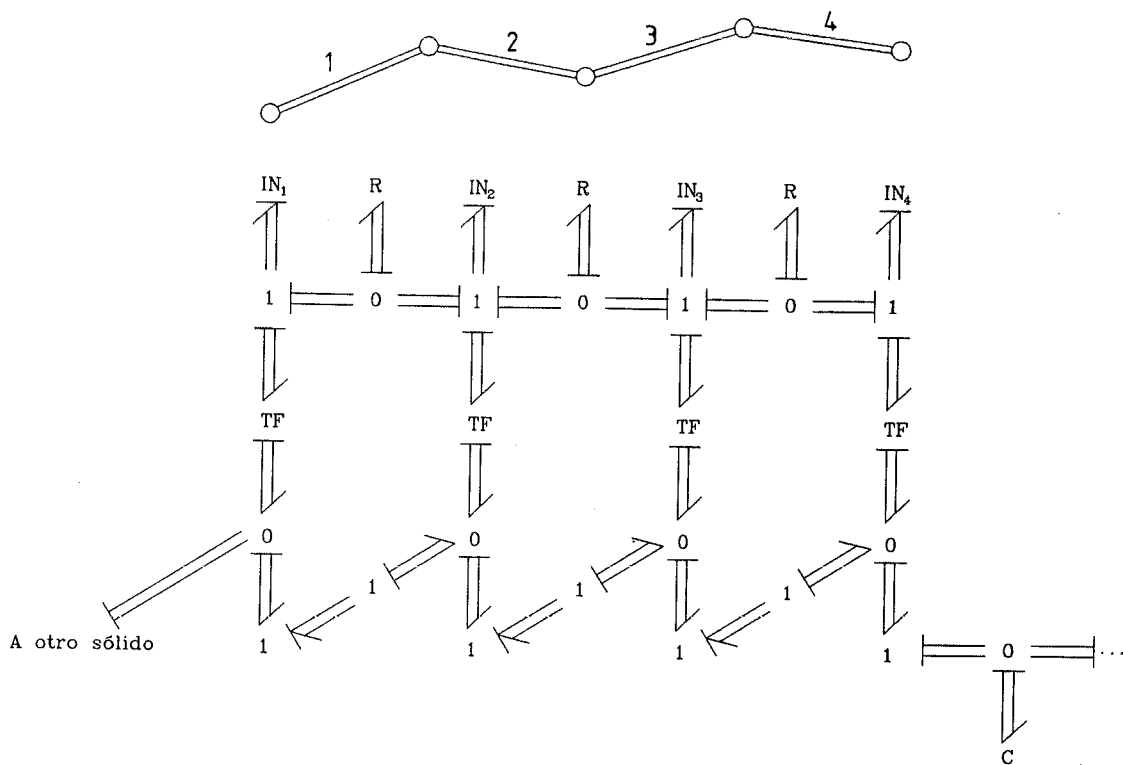


Fig. III-18: Cadena de sólidos sin masa.

Una última ventaja, que hay que resaltar, del modelo de sólido sin masa, consiste en que no es necesario conocer sus ángulos de orientación absolutos.

Ello se debe a la condición de que la masa es nula, y por tanto no hay acción gravitatoria ni se tiene que analizar la dinámica del sólido. Por consiguiente, no se necesita trabajar en referencias inerciales absolutas.

Únicamente son necesarios los ángulos de orientación relativos a los sólidos adyacentes.

**III.1.1.5 - Modelización con bonds simples de sólidos de masa despreciable**

Aunque los multibond-graph son más compactos, y por tanto más manejables, conviene desarrollar el bond graph de un sólido de masa despreciable con bonds simples, ya que algunos programas de simulación no pueden trabajar con

multibonds.

Se desarrolla a continuación el bond graph simple de una barra rígida sin masa de extremos A y B.

Las velocidades de sus extremos cumplen siempre que

$$\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\Omega} \times \underline{AB}$$

donde  $\Omega$  es la velocidad angular de la barra.

Para trabajar con bond simples, la anterior ecuación vectorial se desarrolla en sus componentes:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} V_{Bx} \\ V_{By} \\ V_{Bz} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} V_{Ax} \\ V_{Ay} \\ V_{Az} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} AB_x \\ AB_y \\ AB_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} V_{Ax} + \Omega_y \cdot AB_z - \Omega_z \cdot AB_y \\ V_{Ay} + \Omega_z \cdot AB_x - \Omega_x \cdot AB_z \\ V_{Az} + \Omega_x \cdot AB_y - \Omega_y \cdot AB_x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

El bond graph correspondiente a las igualdades anteriores es el representado en la Figura III-19.

En él puede comprobarse como, además de cumplirse las relaciones cinemáticas anteriores, se cumplen también las relaciones de esfuerzos características de una barra sin masa:

$$e_{Ax} + e_{Bx} = 0$$

$$e_{Ay} + e_{By} = 0$$

$$e_{Az} + e_{Bz} = 0$$

Si se hace que el eje x de la referencia solidaria a la barra coincida con la dirección de la propia barra, se anulan los Transformer TF:AB<sub>y</sub> y TF:AB<sub>z</sub>, con lo que el bond graph se reduce al de la Figura III-20.



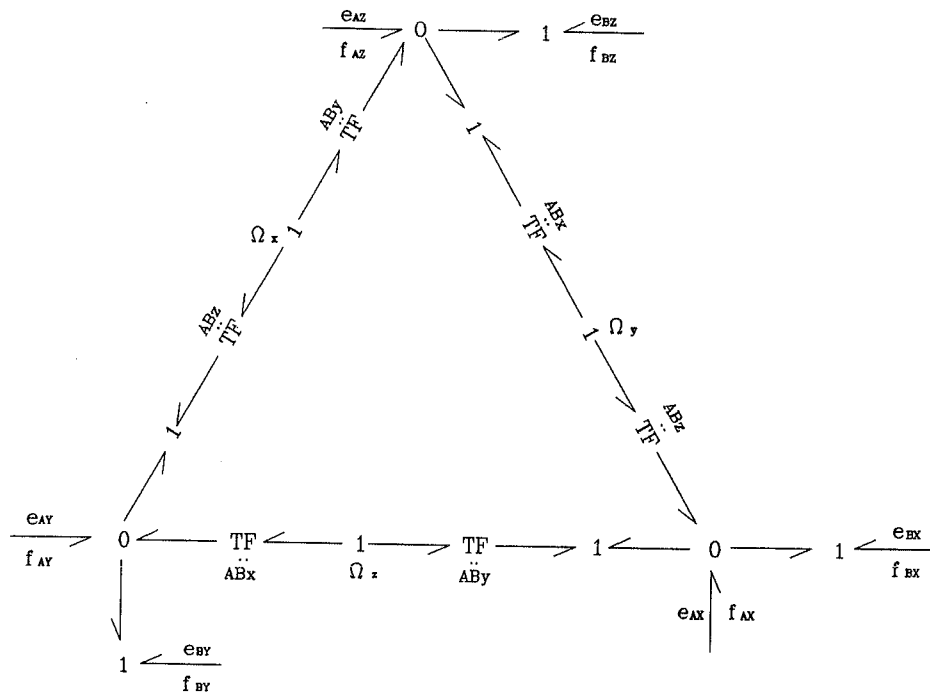


Fig. III-19: Modelo con bonds simples de una barra de masa despreciable.

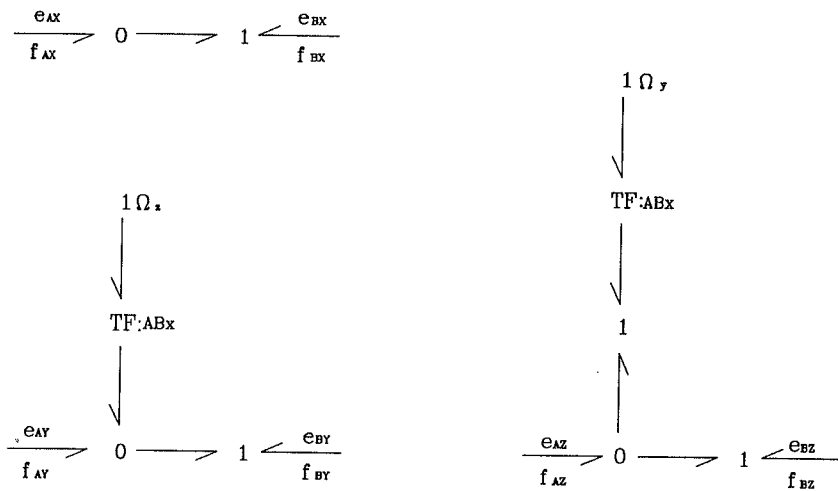


Fig. III-20: Modelo con bonds simples de una barra de masa despreciable tomando el eje X en la dirección de la barra.

### III.1.1.6 - Modelización de sólidos de masa despreciable sin emplear elementos Inercia Nula

En la mayoría de los programas de generación de ecuaciones para simulación basados en bond graph, no se dispone del elemento Inercia Nula.

Para poder emplear los modelos de sólidos de masa despreciable en tales casos, así como para completar y hacer más generales los presentes desarrollos, se estudia a continuación la modelización empleando puertas Inercia convencionales.

En la modelización desarrollada en los anteriores apartados, se partía del bond graph de un sólido rígido normal con masa no despreciable, realizándose a continuación tres modificaciones sobre el mismo: sustituir las puertas Inercia por elementos Inercia Nula, eliminar los elementos Gyrator y considerar como punto de referencia uno de los puntos de enlace en lugar del centro de gravedad.

En cuanto a la primera modificación, en lugar de sustituir las puertas Inercia por elementos Inercia Nula, lo que se hará ahora, como es lógico, es reducir el parámetro de la puerta Inercia convencional tanto como se quiera, o como permita el posterior proceso de integración.

Evidentemente, en los casos, como los discutidos en el apartado III.1.1.2, en que no es necesaria la puerta Inercia Nula, tampoco es necesaria la puerta Inercia convencional.

En cuanto a la segunda modificación, ahora ya no pueden eliminarse directamente los dos elementos Gyrator del bond graph del sólido, ya que el valor de la masa, en la parte de traslación, y el valor de los momentos y pares de inercia, en la parte de rotación, no son estrictamente nulos.

Sin embargo, en determinados casos sí que pueden suprimirse dichos elementos. En concreto, el Gyrator de la parte de rotación siempre puede suprimirse.

En efecto, ya que se trata de un sólido ideal, en el que interesa la transmisión de esfuerzos que realiza pero no interesa su propia dinámica, nada impide que además de

haber definido su inercia como pequeña, se defina su tensor de inercia [J] de una forma determinada.

En concreto, se definirá como rotor esférico en el punto de referencia tomado. Esto significa que sus pares de inercia serán nulos y los momentos de inercia serán iguales:

$$J_{i,j} = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

$$J_{i,i} = I_0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

En este caso, la velocidad angular  $\underline{\Omega}$  y el momento angular  $\underline{J}\underline{\Omega}$  son paralelos, con lo que el término  $\underline{\Omega} \times \underline{J}\underline{\Omega}$ , representado por el Gyrator, se hace nulo. En efecto,

$$\begin{vmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_0 \cdot \Omega_x \\ I_0 \cdot \Omega_y \\ I_0 \cdot \Omega_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Sin embargo, a diferencia del elemento Gyrator de la parte de rotación, el de la parte de traslación no puede suprimirse de la misma forma, ya que el vector velocidad angular  $\underline{\Omega}$  no tiene por qué ser paralelo al vector momento lineal  $\underline{m}\underline{v}$  con lo que el término  $\underline{\Omega} \times \underline{m}\underline{v}$  no será nulo.

No obstante, siempre desaparecerá cuando no exista puerta Inercia, como en los casos expuestos en el apartado III.1.1.2.

En el caso de existir la puerta Inercia de traslación, si se desprecia el Gyrator, lo que ocurre es que se desprecian las fuerzas asociadas al cambio de orientación de la velocidad de la masa. Estas fuerzas, de las que un ejemplo conocido es la fuerza centrífuga, dependen únicamente de la propia masa, la cual se supone despreciable.

Por ello, y como se ha supuesto que los esfuerzos exteriores que actúan sobre el sólido superan ampliamente a los esfuerzos asociados a la dinámica propia de éste, el error relativo no sería muy importante.

No obstante, en sentido estricto, no debe suprimirse el Gyrator de la parte de traslación cuando existe la puerta Inercia correspondiente.

En cuanto a la tercera modificación, sigue siendo válido considerar como punto de referencia uno de los puntos de enlace en lugar del centro de gravedad del sólido de partida.

En este caso, la pequeña masa, aunque ya no sea estrictamente nula, puede considerarse como una masa puntual concentrada en uno de los puntos de enlace. Desde este punto, partirán una serie de brazos ideales hasta los demás puntos de enlace, siendo estos brazos de masa estrictamente nula, rígidos y capaces de transmitir todos los esfuerzos. Considerando un sólido con dos puntos de enlace, A y B, y suponiendo que la pequeña masa está en el punto B, el esquema del sólido sería el de la Figura III-21.



Fig. III-21: Barra ideal con masa concentrada en un extremo.

Partiendo del bond graph de la Figura III-2 y suprimiendo la acción gravitatoria y el Gyrator de la parte de rotación, se llega al bond graph de la Figura III-22.

Como el vector  $\underline{BG}$  es nulo, el flujo  $f_6$  y el esfuerzo  $e_7$  son nulos, y como los grafos 6 y 7 concurren en una unión 0 y en una unión 1 respectivamente, pueden suprimirse dichos grafos, aplicándose el grafo 5 directamente en la unión 1 inferior. También por ser nulo el vector  $\underline{BG}$ , resulta que  $\underline{AG} = \underline{AB} - \underline{BG} = \underline{AB}$ , con lo que el bond graph resultante es el de la Figura III-23.

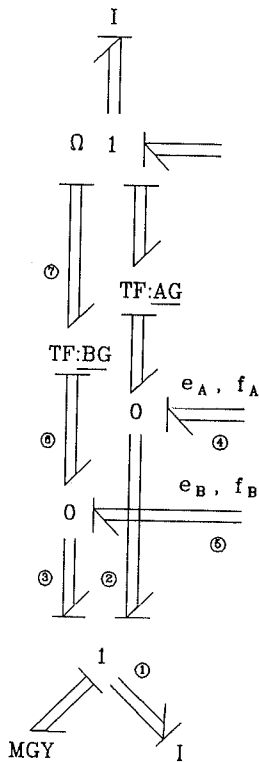


Fig. III-22: Modelo, parcialmente simplificado, con puertas I, de barra de masa despreciable.

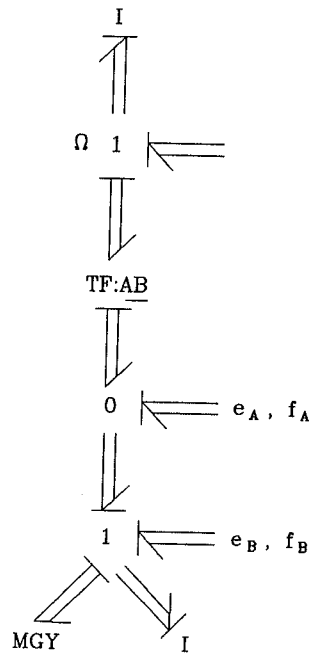


Fig. III-23: Modelo simplificado, con puertas I, de barra de masa despreciable.

Generalizando a  $n$  puntos de enlace, el bond graph de un sólido de masa despreciable, construido con elementos Inercia convencionales es el de la Figura III-24, donde el parámetro de las puertas Inercia es de la forma  $J_{i,j} = 0$ , para  $i \neq j$ , y  $J_{i,i} = I_0$ , con  $i = 1, 2, 3$  e  $I_0$  de pequeño valor.

Como puede verse, lo que se ha hecho, en definitiva, es sustituir el sólido real de inercia despreciable, por un sólido ideal que facilite la modelización, debiendo cumplir para ello una serie de condiciones: que su masa esté concentrada en un punto de enlace, que esta masa cumpla que, en cuanto a rotación, sea un sólido rotor esférico en ese punto y que desde este punto y hasta los demás puntos de enlace partan una serie de brazos ideales sin masa, rígidos y capaces de transmitir todos los esfuerzos.

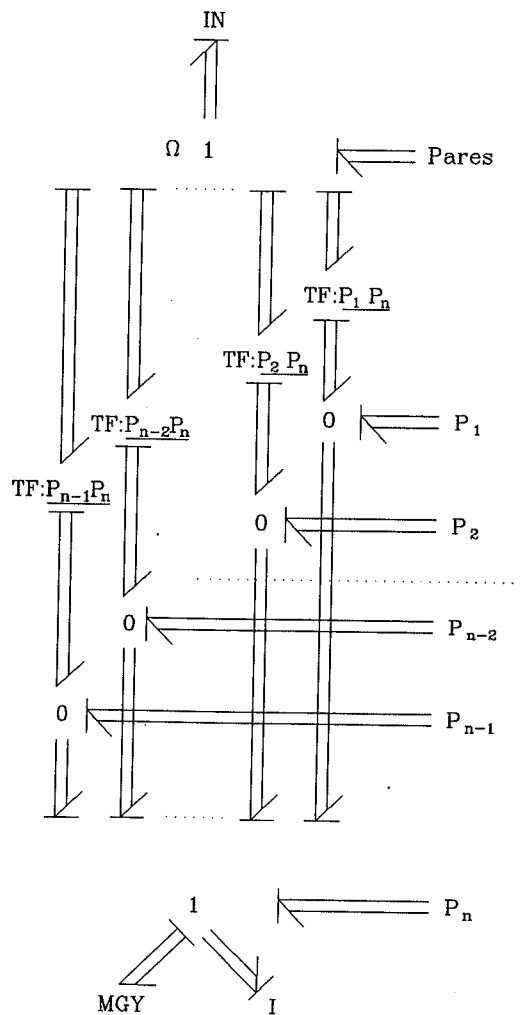


Fig. III-24: Modelo simplificado, con puertas I, de sólido de masa despreciable con n puntos de enlace.

### III.1.2 - Aplicación de la técnica de bond graph en Cinemática

Tras los desarrollos anteriormente efectuados del modelo de sólido sin masa, conviene hacer algunas consideraciones acerca de las posibilidades de la técnica de bond graph en la realización de análisis cinemáticos de sistemas mecánicos.

#### III.1.2.1 - Discusión sobre la aplicación de la técnica de bond graph en análisis cinemáticos.

Tal como se ha visto en apartados anteriores, el

modelo de sólido sin masa permite hacer caso omiso de la dinámica propia de los elementos de un mecanismo, considerándose únicamente las características geométricas de dichos elementos y las restricciones cinemáticas de los enlaces entre los mismos. Es decir, en el modelo de sólido sin masa se considera únicamente aquello que afecta a la cinemática.

Hay que analizar, por consiguiente, si la técnica de bond graph, con el auxilio del nuevo modelo de sólido sin masa, constituye o no un método válido para efectuar análisis cinemáticos de sistemas mecánicos.

La propia naturaleza de la técnica de bond graph será la que permita establecer cuáles son las limitaciones del bond graph en el terreno de la cinemática.

La característica fundamental del bond graph que afecta en este sentido es la de trabajar, siempre, con flujos y esfuerzos.

El hecho de trabajar con flujos, que en mecánica son velocidades, significa que no se conocen directamente los desplazamientos, siendo necesario un proceso de integración en el tiempo para conocerlos.

El hecho de trabajar con esfuerzos supone, sin embargo, una diferencia fundamental con la cinemática pura. En un estudio meramente cinemático, no hay razón para que aparezcan esfuerzos y, por consiguiente, tampoco aparece ninguna transmisión, almacenamiento ni disipación de energía como ocurre en bond graph.

Conocidas, pues, las dos diferencias que separan el bond graph de la cinemática, se analizan a continuación los medios para salvarlas.

El problema de trabajar con flujos en lugar de desplazamientos es fácilmente salvable ya que sólo se requiere una integración. Programas como Tutsim disponen de bloques INT de integración, y programas como Bondyn incorporan directamente los desplazamientos en su salida de resultados.

Los resultados de velocidades son, en cualquier caso, siempre directamente accesibles.

En cuanto a la cuestión de tener que manejar esfuerzos, el modelo de sólido sin masa contribuye, sin duda, a solucionar el problema.

Este modelo permite reducir al mínimo el manejo de esfuerzos, y consiguientemente de energía, permitiendo una simplificación considerable del modelo en todo aquello que no afecta a la cinemática.

Esto es así ya que los sólidos sin masa no introducen, almacenan ni disipan energía, sino que sólo la transmiten. Esta afirmación concuerda con el hecho de que los sólidos sin masa se componen únicamente de elementos TF, 0, 1 y, eventualmente, IN.

Por consiguiente, se reduce también al mínimo el número de ecuaciones representativas del comportamiento del sistema mecánico.

En efecto, los sólidos sin masa, al no tener puertaa Inercia, no dan lugar a las ecuaciones diferenciales correspondientes a las mismas. Sólo originan las ecuaciones algebraicas correspondientes a las relaciones cinemáticas existentes.

En conclusión, el modelo de sólido sin masa permite simplificar los modelos dinámicos de los sistemas mecánicos lo suficiente como para servir de herramienta en el análisis cinemático de los mismos.

### III.1.2.2 - Simplificaciones adicionales para la realización de análisis puramente cinemáticos

Para la realización de análisis puramente cinemáticos, es posible realizar algunos cambios más en los modelos con el fin de conseguir una simplificación aún mayor de los mismos.

Se partirá del hecho de que cualquier sistema que se estudie con este tipo de procedimientos ha de tener algún input de excitación. Dicho input puede ser una fuente de esfuerzo o una fuente de flujo.

Como es natural, en cinemática no interesan las



fuentes de esfuerzo sino las de flujo. Sin embargo, el empleo de fuentes de flujo presenta el problema de que hace que las Inercias tengan causalidad diferencial, a menos que se incluyan Compliances o elementos Muelle Rígido en el sistema.

Por consiguiente, parece poco adecuada la presencia de puertas Inercia en estos modelos. Ello conduce a la discusión sobre la necesidad de que haya o no puertas Inercia en el modelo.

Para discutir esta cuestión se empleará el hecho de que en bond graph, hay una correspondencia biunívoca entre los grados de libertad y las Inercias con causa esfuerzo.

La explicación de esta correspondencia se encuentra en que los grados de libertad pueden ser considerados como las posibilidades de movimiento de un cuerpo.

En efecto, un cuerpo se modeliza mediante un conjunto de Inercias, una para cada movimiento. Si un movimiento del cuerpo viene impuesto por el resto del sistema, ese movimiento ya no es un grado de libertad. En el bond graph, la Inercia correspondiente a ese movimiento tendrá causa flujo, ya que su movimiento viene impuesto por el resto del sistema (Fig. III-25a). Tal Inercia es, por tanto, una Inercia sin grado de libertad.

Por el contrario, las Inercias libres reciben esfuerzos, y sus movimientos no vienen impuestos por el resto del sistema (Fig. III-25b). Estas Inercias responden con sus propios movimientos a los esfuerzos que reciben. Son Inercias que llevan asociado un grado de libertad.

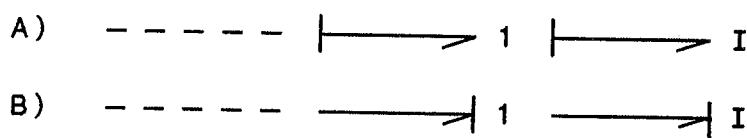


Fig. III-25: Puertas Inercia, sin grado de libertad (A) y con grado de libertad (B).

Admitiendo el concepto de grado de libertad expuesto, puede afirmarse que en un modelo sin Inercias no hay ningún grado de libertad. Esto no significa, sin embargo, que no haya movimientos, sino que éstos están impuestos por las

fuentes de flujo del sistema.

Por consiguiente, y en definitiva, es posible eliminar las Inercias del sistema y, por tanto, emplear fuentes de flujo, que son las fuentes más indicadas en modelos destinados a análisis cinemáticos.

Como en bond graph siempre aparecen esfuerzos, y ha de haber potencia en juego, hay que emplear algún elemento que reciba la potencia que introduce la fuente de flujo, potencia que se transmite a través del bond graph.

Los elementos que se emplearán para recibir esa potencia serán Resistencias.

El input del mecanismo será una fuente de flujo, y el output un conjunto de Resistencias. Entre ambos, se encontrará el resto del modelo del mecanismo, constituido por elementos Transformer y uniones 0 y 1.

Las Resistencias tienen la ventaja de que disipan directamente la energía en lugar de almacenarla, como hacen las Inercias y Compliances, por lo que no varía la situación energética del sistema a lo largo del proceso.

Las Resistencias no conllevan procesos de integración para relacionar esfuerzos y flujos, sino que éstos son proporcionales. Pueden ser incluso iguales si se hace el parámetro de la Resistencia igual a la unidad.

Para obtener el output del mecanismo, es decir la velocidad del elemento de salida, se empleará el output de la puerta Resistencia, el cual será normalmente un esfuerzo.

Si se emplea una Resistencia de parámetro unidad, dicho esfuerzo es numéricamente igual al flujo, con lo que éste se conoce directamente.

### III.1.3 - Ejemplos de aplicación

Se exponen a continuación dos ejemplos.

En el primer ejemplo se considera un sistema dinámico que incluye sólidos con masa que puede considerarse

despreciable y también sólidos con masa no despreciable.

Este sistema se modeliza primero en la forma convencional, es decir, considerando tanto las inercias grandes como las pequeñas, y después en la forma simplificada propuesta en los anteriores apartados.

Efectuando simulaciones con ambos modelos, se comprueba la validez de la modelización simplificada.

En el segundo ejemplo se presenta la forma de realizar, con la técnica de bond graph, un estudio puramente cinemático.

En ambos ejemplos se modeliza un mecanismo plano del tipo biela-manivela, como el representado en la Figura III-26.

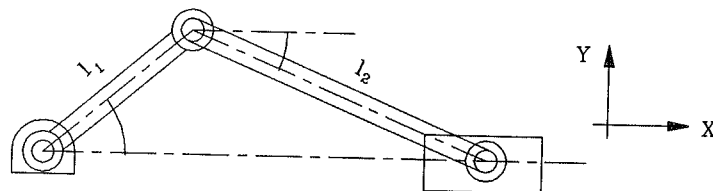


Fig. III-26: Sistema biela-manivela.

Los elementos cuya masa será considerada despreciable, en el primer ejemplo, son la manivela y la biela (sólidos 1 y 2), manteniéndose un valor no despreciable de masa en la corredera (sólido 3) y en el volante de inercia solidario a la manivela.

El sistema se acciona mediante un par de valor constante aplicado sobre el eje de la manivela.

### III.1.3.1 - Ejemplo de modelización de un sistema dinámico con sólidos de masa despreciable

#### A - Modelización convencional

En primer lugar se desarrolla la modelización conven-

cional. En la Figura III-27 se representa el bond graph del sistema, modelizado en dicha forma.

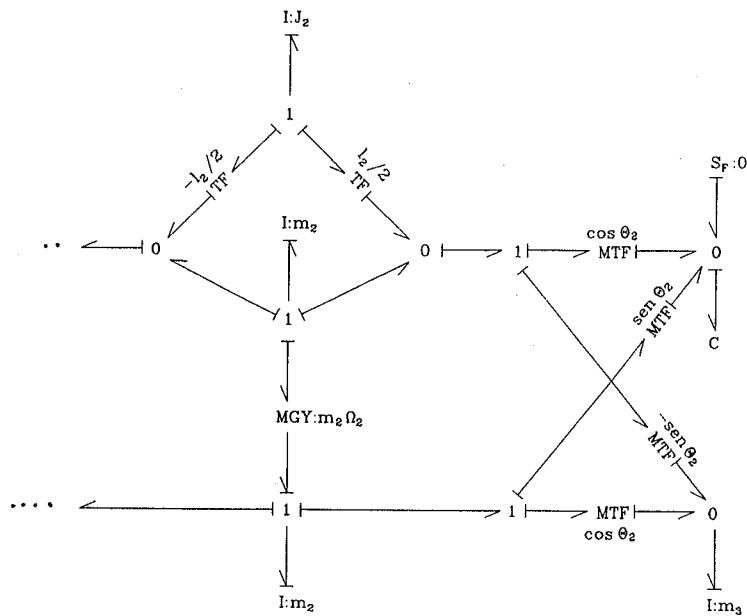
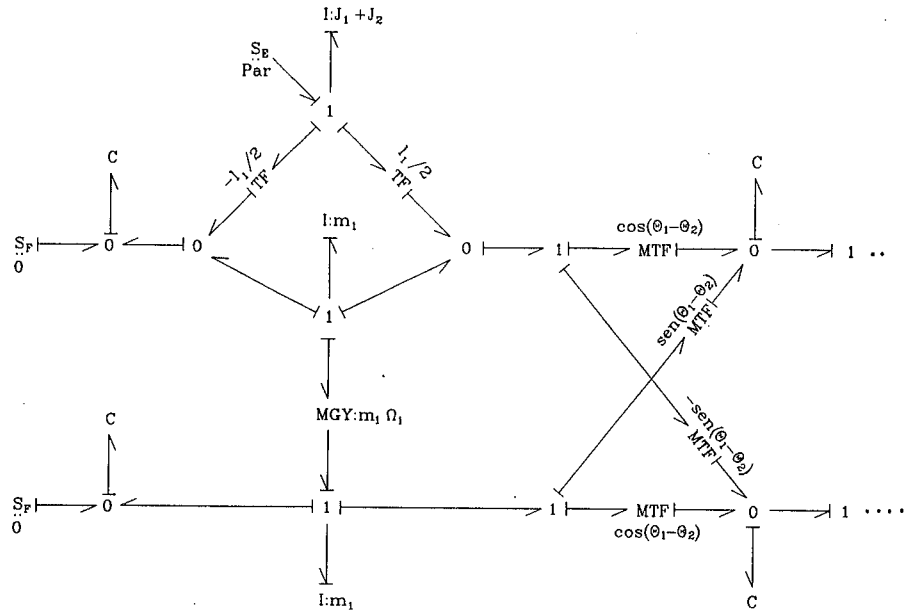


Fig. III-27: Modelo convencional del sistema biela-manivela.

Como puede verse, la manivela y la biela se modelizan como sendos sólidos con dos puntos de enlace cada uno de ellos.

La corredera, que se desplaza en dirección X, se modeliza mediante una simple puerta Inercia.

En la puerta Inercia de la unión 1 correspondiente a la velocidad angular  $\Omega_1$ , se incluyen los momentos de inercia de la manivela y del volante de inercia, ya que ambos cuerpos giran solidariamente.

Entre la manivela y la biela y entre ésta y la referencia fija, se efectúan los correspondientes cambios de coordenadas: TF:[ $\theta_1 - \theta_2$ ] y TF:[ $\theta_2$ ].

Se incluyen también varias puertas Compliance de alta rigidez para evitar causalidades diferenciales.

Con este modelo se efectuarán dos simulaciones. En la primera los valores de masa y momento de inercia de la biela y la manivela son muy bajos, mientras que en la segunda no.

Los parámetros del sistema en la primera simulación son los siguientes:

-masa de la manivela:	$m_1 = 0.2$ kg
-masa de la biela:	$m_2 = 1$ kg
-masa de la corredera:	$m_3 = 10$ kg
-longitud de la manivela:	$l_1 = 0.2$ m
-longitud de la biela:	$l_2 = 1$ m
-momento de inercia del conjunto manivela-volante:	$J_1 = 1$ kg·m <sup>2</sup>
-momento de inercia de la biela:	$J_2 = 0.1$ kg·m <sup>2</sup>
-rigidez de las Compliances:	$K = 10^5$ N/m
-par exterior aplicado:	$P = 2$ N·m

En la segunda simulación se consideran mayores valores de las masas y momentos de inercia de la biela y de la manivela:

- masa de la manivela:  $m_1 = 5 \text{ kg}$
- masa de la biela:  $m_2 = 5 \text{ kg}$
- momento de inercia del conjunto manivela-volante:  $J_1 = 1.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- momento de inercia de la biela:  $J_2 = 0.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

El resto de parámetros (masa de la corredera, longitudes, rigidez de las Compliances y par exterior) permanecen invariables.

En ambos casos, el sistema parte de una situación de reposo y comienza a moverse por la aplicación del par exterior P.

En las dos gráficas de la Figura III-28 se representan los resultados, correspondientes a la primera y a la segunda simulación respectivamente, de desplazamiento de la corredera, ángulo girado por la biela y velocidad angular de la manivela.

En la tabla siguiente se indica el significado de las curvas de resultados de la Fig. III-28.

Curva	Significado	Mínimo	Máximo
1	Desplazamiento de la corredera	-1 m	+1 m
2	Angulo girado por la biela	-5 rad	+5 rad
3	Velocidad angular de la manivela	-20 rad/s	+20 rad/s
Eje horizontal: Tiempo		0 seg.	5 seg.

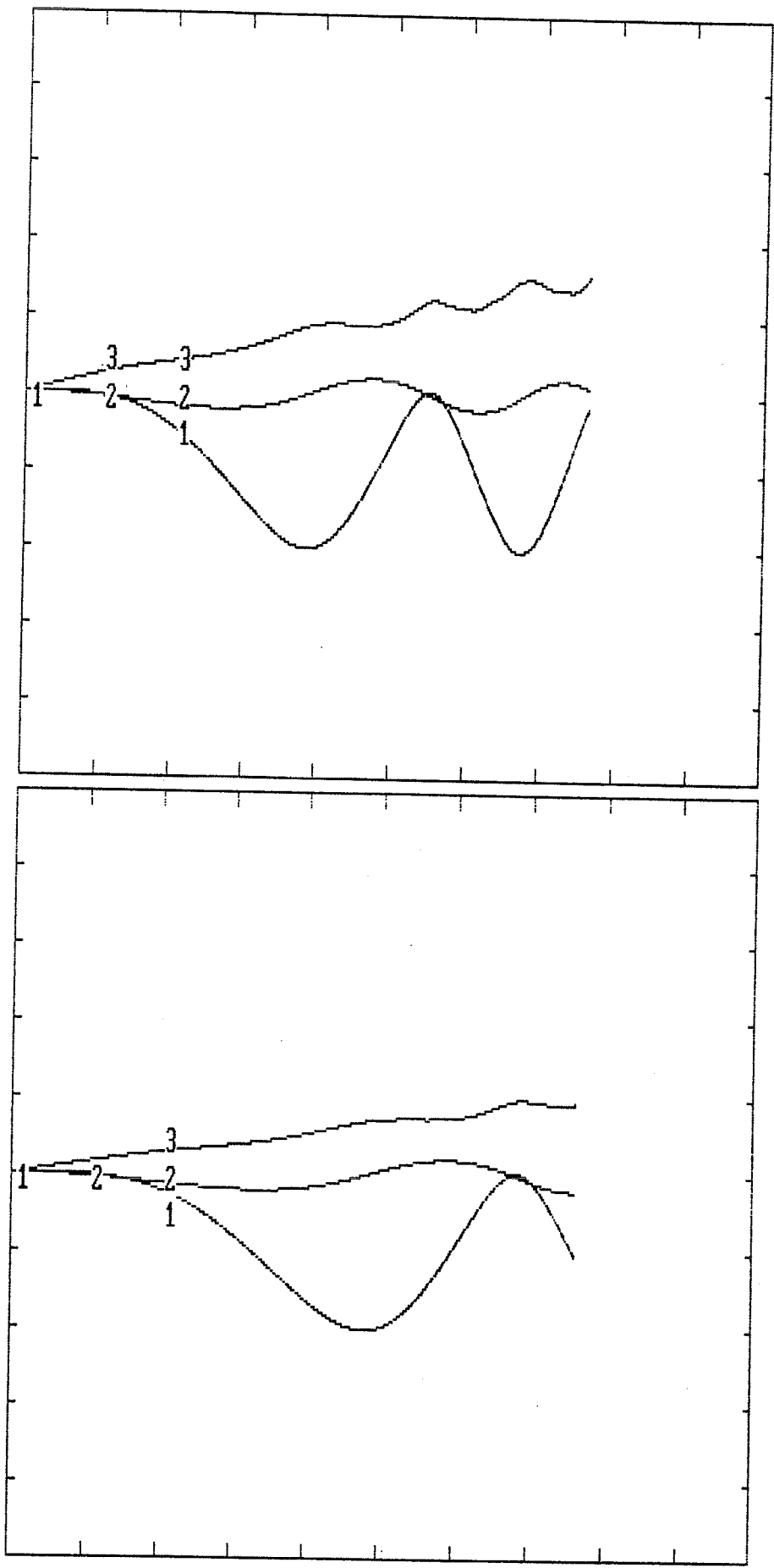


Fig. III-28: Resultados obtenidos con el modelo convencional del sistema biela-manivela.  
 (ver tabla en página anterior)

## B - Modelización simplificada

A continuación se desarrolla la modelización simplificada.

En la Figura III-29 se representa el bond graph del sistema, modelizado en dicha forma.

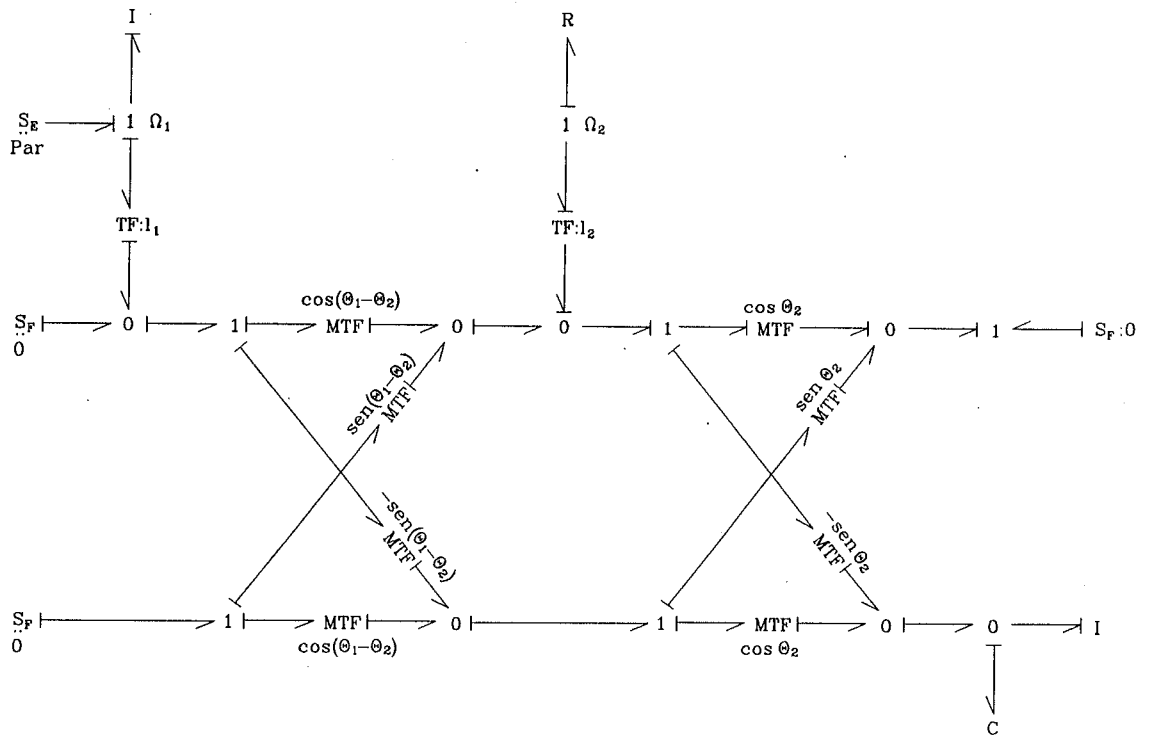


Fig. III-29: Modelo simplificado del sistema biela-manivela.

La modelización de la biela y de la manivela se efectúa empleando el modelo bidimensional de barra sin masa con bonds simples desarrollado anteriormente.

La puerta Inercia correspondiente a la velocidad  $\Omega_1$  representa aquí únicamente la inercia del volante.

Los cambios de coordenadas  $TF:[\theta_1 - \theta_2]$  y  $TF:[\theta_2]$  son los mismos que en la modelización convencional.

Como puede verse, se reduce notablemente el número de puertas Compliance necesarias para evitar causalidades diferenciales.



Se añade una puerta Resistencia de pequeño valor en la unión 1 de velocidad angular de la biela ( $\Omega_2$ ) con el fin de conocer el ángulo ( $\theta_2$ ) girado por ésta, lo que es necesario para efectuar los cambios de coordenadas.

La variable  $\theta_2$  se obtiene por integración de la velocidad angular  $\Omega_2$ , la cual se obtiene a partir del esfuerzo de la Resistencia:  $\Omega_2 = e_2/R_2$ .

También podría obtenerse  $\Omega_2$  incorporando una puerta Inercia, como en el modelo convencional, pero en tal caso habría sido necesaria una puerta Compliance para evitar la causalidad diferencial de dicha Inercia con lo que se pierde simplicidad.

Así mismo, podría calcularse  $\theta_2$  a partir de  $\theta_1$  mediante cálculos geométricos auxiliares.

Sin embargo, se ha preferido la solución de la Resistencia, para facilitar la labor de modelización.

Esta solución, que es aplicable en cualquier caso, puede ser particularmente útil cuando crece la complejidad geométrica del sistema que se ha de modelizar. La influencia que puede ejercer la Resistencia en la dinámica del sistema será tanto más pequeña cuanto menor sea el valor de su parámetro.

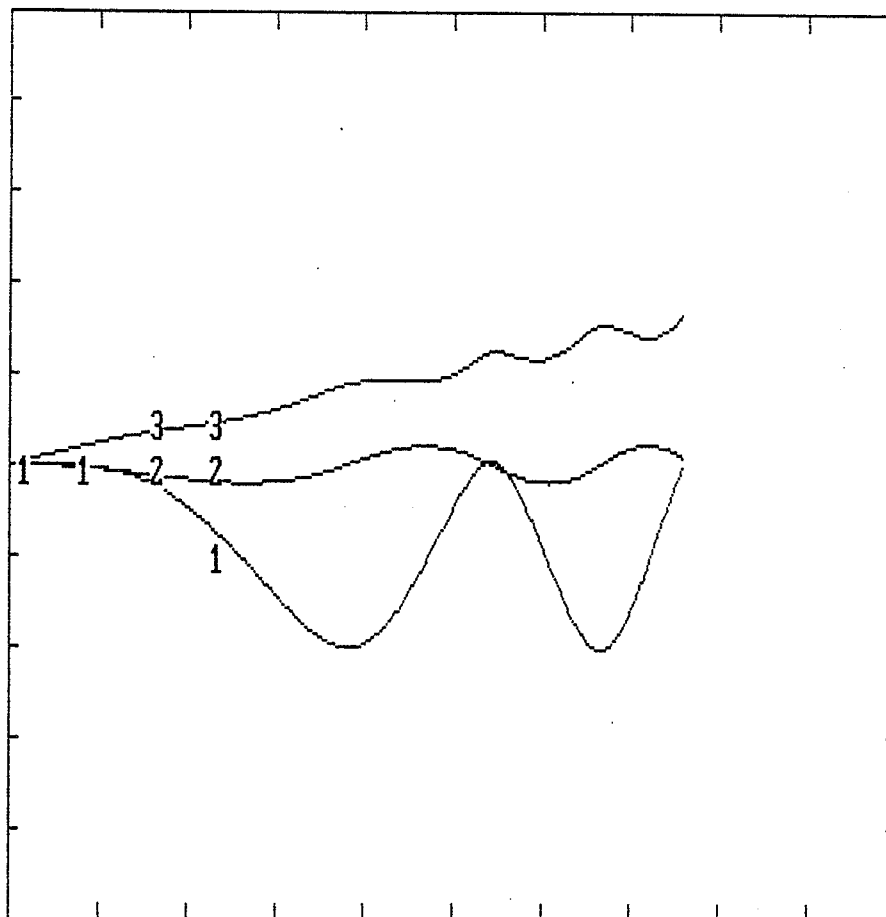
Los parámetros del nuevo modelo son los siguientes:

-masa de la corredera:	$m_3 = 10$	kg
-longitud de la manivela:	$l_1 = 0.2$	m
-longitud de la biela:	$l_2 = 1$	m
-momento de inercia del volante:	$J_1 = 1$	kg·m <sup>2</sup>
-rigidez de la Compliance:	$K = 10^5$	N/m
-par exterior aplicado:	$P = 2$	N·m

A la Resistencia correspondiente a  $\Omega_2$  se le asignado un valor de  $1 \times 10^{-6}$  N·m·s/rad.

Como en las simulaciones anteriores, el sistema parte de una situación de reposo y comienza a moverse por la aplicación del par exterior P.

También como en las simulaciones previas, en la Figura III-30 se representan los resultados de desplazamiento de la corredera, ángulo girado por la biela y velocidad angular de la manivela.



Curva	Significado	Mínimo	Máximo
1	Desplazamiento de la corredera	-1 m	+1 m
2	Angulo girado por la biela	-5 rad	+5 rad
3	Velocidad angular de la manivela	-20 rad/s	+20 rad/s
Eje horizontal: Tiempo		0 seg.	5 seg.

Fig. III-30: Resultados obtenidos con el modelo simplificado del sistema biela-manivela.

Como puede verse, los resultados son muy similares a los obtenidos en la primera simulación realizada con el modelo convencional, es decir, en el caso en que las inercias de la biela y de la manivela eran relativamente pequeñas. Cuando dichas inercias tomaban un valor mayor, los resultados, lógicamente se diferencian.

Este ejemplo pone de manifiesto como en los casos en que hay inercias de pequeño valor, puede hacerse la modelización simplificada sin perjudicar la validez de los resultados obtenidos, consiguiéndose, por el contrario, las ventajas de una apreciable simplificación en la modelización y de una considerable reducción en el tiempo de simulación.

Esta reducción en el tiempo de simulación se debe tanto a la reducción en el número de elementos del bond graph como a la eliminación de elementos Inercia de bajo valor y de elementos Compliance de alta rigidez, los cuales son incluidos en muchos casos precisamente para evitar causalidades diferenciales en las Inercias de bajo valor que permanecen en los modelos convencionales. Tanto las inercias de bajo valor como las Compliances de alta rigidez son responsables del comportamiento stiff de este tipo de problemas y del consiguiente incremento del tiempo de simulación cuando se emplean modelizaciones convencionales.

Evidentemente, el ejemplo sirve también para confirmar como los sólidos sin masa del nuevo modelo transmiten correctamente los esfuerzos y movimientos entre la fuente de esfuerzo aplicada sobre la velocidad  $\Omega_1$  y la corredera de masa no nula.

### III.1.3.2 - Ejemplo de aplicación al análisis cinemático de un mecanismo

Se trata, en este ejemplo, de realizar un análisis puramente cinemático de un mecanismo, con el fin de demostrar la validez del método anteriormente expuesto en este tipo de estudios.

Se modelizará el mismo mecanismo plano del tipo biela-manivela, pero empleando solamente fuentes de flujo y Resistencias como elementos de entrada y salida de energía

al sistema respectivamente, sin existir ninguna Inercia ni ninguna Compliance.

El input del mecanismo es la velocidad angular de la manivela (puerta  $S_F:\Omega$ ), siendo el output la velocidad de la corredera, donde se sitúa una puerta Resistencia.

En la Figura III-31 se representa el bond graph de este sistema.

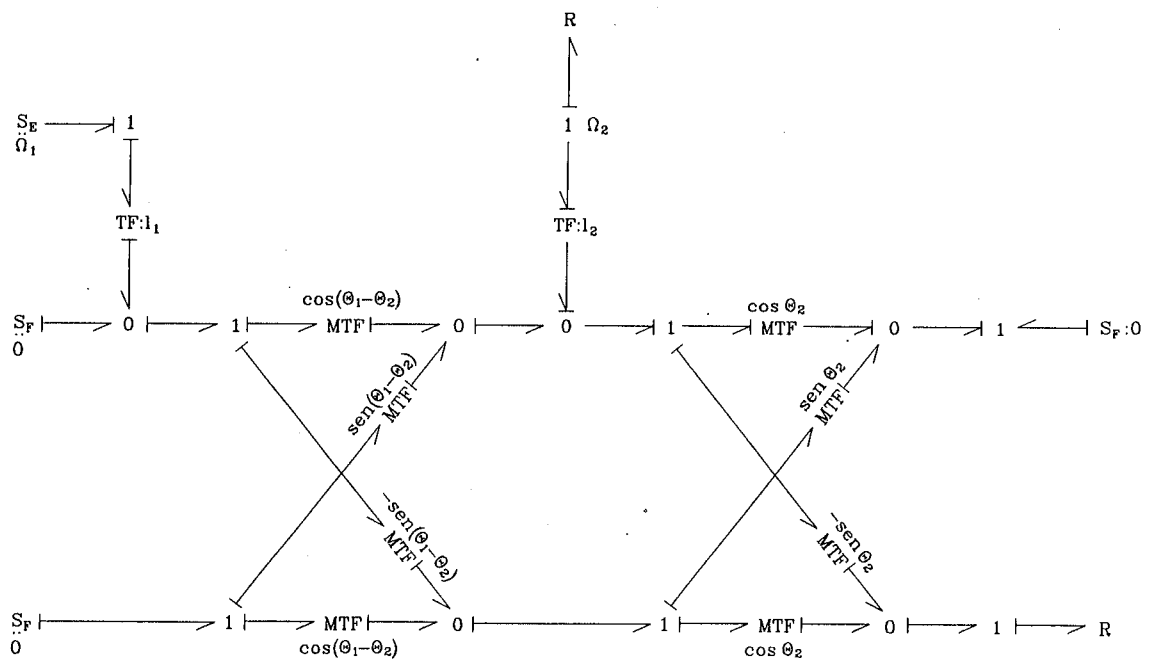
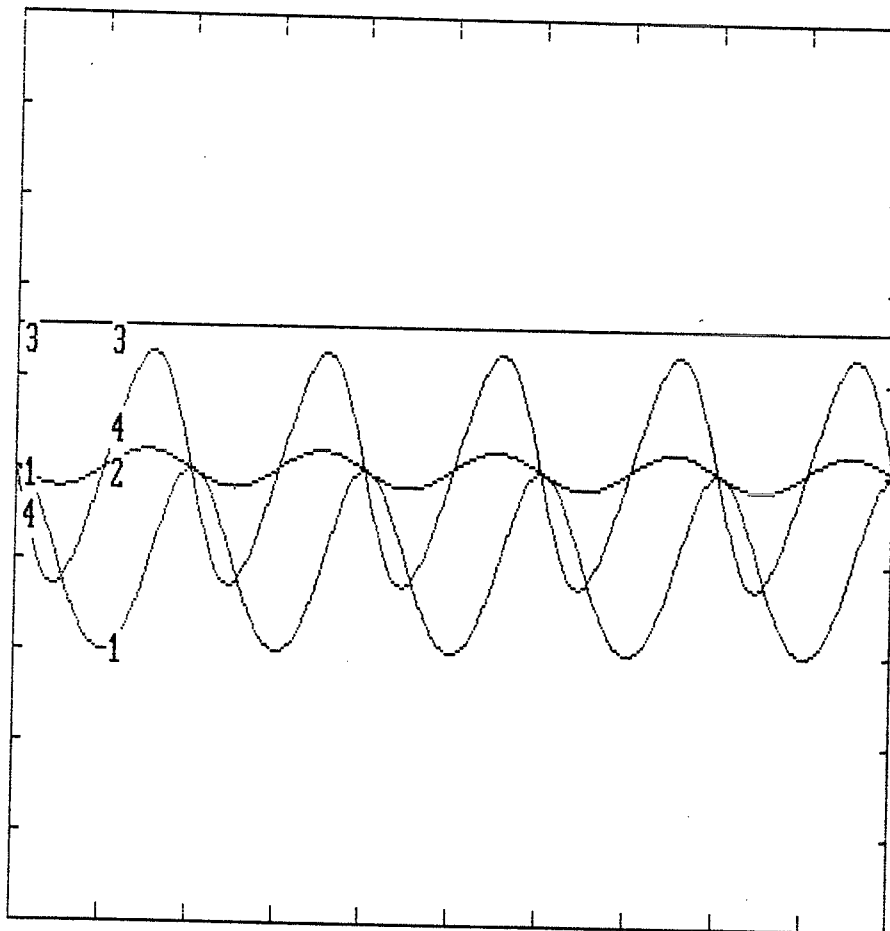


Fig. III-31: Modelo para análisis cinemáticos del sistema biela-manivela.

Sobre la dirección  $X$  de la referencia fija, se encuentra la Resistencia correspondiente al desplazamiento de la corredera. Esta Resistencia es la correspondiente al output del sistema.

Con este modelo, se efectúa una simulación, tomando las mismas longitudes características de la manivela ( $l_1 = 0.2$  m) y de la biela ( $l_2 = 1$  m) que en los ejemplos anteriores, siendo la velocidad angular que se impone a la manivela  $\Omega_1 = 2 \cdot \pi$  rad/s.

En la Figura III-32 se recogen las curvas de resultados en función del tiempo.



Curva	Significado	Mínimo	Máximo
1	Desplazamiento de la corredera	-1 m	+1 m
2	Angulo girado por la biela	-5 rad	+5 rad
3	Velocidad angular de la manivela	-20 rad/s	+20 rad/s
4	Velocidad de desplazamiento de la corred.	-5 m/s	+5 m/s
Eje horizontal: Tiempo		0 seg.	5 seg.

Fig. III-32: Resultados obtenidos con el modelo para análisis cinemáticos del sistema biela-manivela.

La validez de estos resultados se pone de manifiesto comprobando, por ejemplo, que el valor máximo del desplaza-

miento de la corredera es de 0.4 metros, como corresponde al hecho de que el radio de la manivela es de 0.2 metros, que el ángulo máximo girado por la biela coincide con el teórico, que es igual a  $\arcsin(0.2/1) = 0.2$  radianes, etc.

Evidentemente, estas igualdades también se cumplen en los modelos dinámicos del Ejemplo 1, pero se han indicado aquí para destacar como pueden obtenerse resultados de tipo geométrico y cinemático mediante sencillos modelos de bond-graph.

#### III.1.4 - Conclusiones sobre la modelización de sólidos de masa despreciable

La técnica de modelización propuesta, permite una mayor sencillez en la modelización de aquellos sistemas que incorporan sólidos cuya masa pueda despreciarse frente a la masa del resto de los sólidos del sistema.

Pueden modelizarse sólidos de masa despreciable de dos o tres dimensiones y con cualquier número de puntos de enlace.

La no consideración de las propiedades dinámicas intrínsecas del sólido sin masa, sino sólo su mera función de transmisor de esfuerzos y de mantenedor de las condiciones de restricción de velocidades, permite simplificar notablemente el bond graph.

Ello es debido a que se eliminan los MGY relacionados con la dinámica de rotación y traslación (sólo los de rotación si no se dispone del elemento IN), la SE de acción gravitatoria, una serie de bonds y TF por el hecho de no considerar la existencia del centro de gravedad, sino sólo los puntos de enlace del sólido, y los cambios de coordenadas necesarios para trabajar en referencias inerciales absolutas, manteniéndose sólo los cambios relacionados con la orientación relativa a los sólidos adyacentes.

La reducción que se consigue en el número de bonds del modelo es evidente a la vista de los desarrollos y ejemplos expuestos anteriormente.

El nuevo modelo también evita algunas de las Inercias

dependientes que aparecen cuando hay restricciones entre los sólidos, siempre, claro está, que intervengan sólidos sin masa en el sistema.

De no disponer de este modelo, al modelizar las restricciones entre los sólidos, aparecen causalidades diferenciales en determinadas Inercias a menos que se añadan elementos Compliance o elementos Muelle Rígido. En tal caso, se incrementa el número de ecuaciones y la complejidad del modelo, además de reducirse la velocidad en la simulación a causa de la característica stiff que adquiere el problema cuando los elementos añadidos son Compliances de alta rigidez.

Por otra parte, es importante destacar que cuando hay sólidos de masa pequeña el problema es todavía más stiff, lo que aporta una razón más para no emplear la modelización convencional.

Puede resumirse lo anterior diciendo que, si no se emplea el nuevo modelo, además de tener que manejar un mayor número de bonds, permanecen en el problema un cierto número de Compliances de alta rigidez para evitar la causalidad diferencial en una serie de Inercias de pequeño valor.

La simplicidad de esta nueva modelización abre, también, la vía para emplear la técnica de bond graph en la realización de determinados análisis geométricos y cinemáticos.

Se dispone, por tanto, de una modelización unificada tanto para la dinámica como para la cinemática, permitiendo optimizar los modelos de modo que resulten lo más simplificados posible para cada tipo de estudio.

No hay que olvidar tampoco que, en todos los casos, se sigue haciendo uso directo de la técnica de bond graph, con todas las ventajas que ésto conlleva, siendo también directamente utilizables los programas de ordenador existentes basados en dicha técnica, tanto si disponen del elemento Inercia Nula como si no disponen de él.

### III.2 - DISCONTINUIDADES EN LOS ENLACES ENTRE SOLIDOS

En muchos sistemas vehiculares, pueden presentarse situaciones de separación de pares de cuerpos que inicialmente estaban en contacto o de toma de contacto de cuerpos que antes estaban separados.

Son casos típicos:

- La pérdida de contacto de una rueda con el suelo a consecuencia de una irregularidad del terreno
- La separación de las dos partes de una rótula de dirección cuando hay holguras causadas por el desgaste
- La actuación de topes elásticos en la suspensión
- etc.

Estas situaciones, que pueden ocurrir ocasionalmente o con cierta periodicidad, suponen una pérdida de continuidad en el sistema físico.

Se plantea aquí el problema de modelizar, de forma genérica y haciendo uso de la técnica de bond graph, estas situaciones en los casos uni y pluridimensional. Se estudiará, a continuación algún tipo determinado de holgura.

#### III.2.1 - Definición del problema

El problema se centrará en la modelización, durante la simulación, de la pérdida y recuperación del contacto entre dos sólidos.

Se supone que los dos sólidos están unidos, mientras hay contacto, mediante elementos de enlace deformables.

Dichos elementos de enlace serán Compliances y Resistencias, unidimensionales o pluridimensionales, interpuestos entre los dos sólidos y colocados en serie, en paralelo o en cualquier otra disposición.

Un ejemplo podría ser el de la Fig. III-33



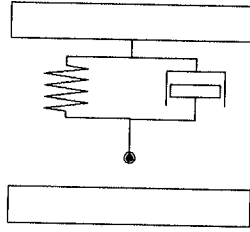


Fig. III-33: Interrupción del enlace entre dos sólidos.

En el caso de la rueda con cubierta neumática que se separa del suelo, los elementos de enlace representarían la cubierta neumática, siendo uno de los sólidos la llanta y el otro el propio suelo.

En el caso de dos sólidos rígidos unidos directamente mediante algún par cinemático concreto, la situación es similar, con la diferencia de que los elementos de enlace del modelo serían de alta rigidez.

En cada caso concreto, la modelización será diferente pues dependerá de la naturaleza del modelo (rueda, par cinemático, etc.), aunque siempre podrán aplicarse los desarrollos y resultados que se exponen en este apartado.

### III.2.2 - Planteamiento de la modelización

Los elementos de enlace, situados entre los dos sólidos, ejercen fuerzas que dependen de la situación relativa de los puntos de enlace, en el caso de las Compliances, o de la velocidad relativa entre dichos puntos, en el caso de las Resistencias.

Cuando los cuerpos se separan, desaparecen por completo tales fuerzas.

Para modelizar esta desaparición de las fuerzas, pueden plantearse tres soluciones.

La primera solución consistiría en eliminar los elementos Compliance y Resistencia en el instante de la separación.

La segunda solución sería emplear fuentes de esfuerzo durante toda la simulación en lugar de las puertas Compliance y Resistencia, haciendo nulo el valor de las fuerzas suministradas por dichas fuentes en el mencionado instante de la separación.

La tercera solución consiste en hacer nulo el valor de los parámetros característicos de las puertas Compliance y Resistencia en el mismo instante de la separación de modo que el esfuerzo que apliquen se haga nulo.

La primera solución (eliminar elementos) presenta el problema de que requiere el cambio de la estructura del bond graph durante la simulación.

Con esta solución, sería necesario:

- 1) Interrumpir la simulación en el instante de la separación y almacenar las variables de estado en dicho instante.
- 2) Cambiar el bond graph.
- 3) Emplear los valores almacenados de las variables como condiciones de partida en el nuevo bond graph y continuar la simulación.

Este procedimiento resulta poco práctico con los programas de simulación por ordenador disponibles actualmente ya que supone la interrupción de la simulación. Hay que tener presente que los procesos de pérdida y recuperación del contacto pueden producirse en cualquier momento y repetirse varias veces durante la simulación.

La segunda solución (emplear fuentes de esfuerzo) presenta otros inconvenientes.

En primer lugar, resulta también algo engorrosa, ya que hay que definir explícitamente el valor de la fuerza que introducen las fuentes de esfuerzo en función de la situación relativa de los puntos de enlace o de la velocidad relativa entre dichos puntos, de modo que su comportamiento antes de la separación simule el de las Compliances y Resistencias a las que sustituye.

Por supuesto, habría que verificar también que las fuentes no introducen inadecuadamente energía al sistema.

Se presenta, asimismo, el problema de que cuando las Compliances o Resistencias presentan causa flujo, en lugar de fuentes de esfuerzo habría que emplear fuentes de flujo para sustituirlas.

Cuando la causalidad de las Compliances y Resistencias permite sustituirlas por fuentes de esfuerzo, no se presentan problemas, puesto que se sabe de antemano que el esfuerzo en la unión va a ser siempre nulo tras la separación.

Pero cuando la causalidad requiere el empleo de fuentes de flujo, se presenta el inconveniente de que el flujo entre los puntos de enlace es, en principio, desconocido tras la separación.

Por consiguiente, la tercera solución (variación de parámetros) aparece, en principio, como la más apropiada.

Sin embargo, la aplicación de esta solución, no puede hacerse sin más, variando directamente el parámetro en el momento en que se produce la discontinuidad, sino que es necesario tener en cuenta las limitaciones existentes para la modulación de elementos en bond graph. En concreto, las Compliances no siempre pueden ser moduladas, tal como se expone en el apartado II.5.

Ello obligará a desarrollar técnicas de modelización específicas, sencillas en el caso unidimensional y más complejas en el pluridimensional, para el empleo de la solución basada en la variación de parámetros.

En cuanto a las Resistencias, elementos que también aparecen en la unión entre sólidos, su parámetro puede variarse sin problemas ya que las Resistencias no almacenan energía.

### III.2.3 - Caso Unidimensional

Tal como se ha visto en el Capítulo II.5, la modulación de una Compliance puede violar la conservación de la energía, pero hay la posibilidad de hacerlo cuando su desplazamiento es nulo.

Por consiguiente, se variará el valor del parámetro  $C$  de las Compliances aprovechando el instante en que su desplazamiento  $q$  sea nulo.

Dicha variación del parámetro  $C$  puede consistir tanto en su anulación (pérdida del contacto) como en la recuperación de su valor inicial (recuperación del contacto). En cada caso, la simulación en los instantes posteriores puede continuarse normalmente.

### III.2.3.1 - Ejemplo de aplicación

Como ejemplo, se aplicará el método propuesto en la modelización de un sistema masa-muelle unidimensional que rebotará sobre el suelo, del mismo modo que lo puede hacer un balón o una rueda de automóvil (Fig. III-34).

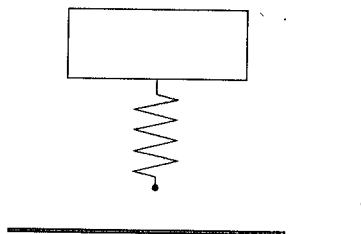


Fig. III-34: Ejemplo de sistema unidimensional.

El sistema masa-muelle se deja caer, bajo la acción gravitatoria, desde una cierta altura sobre el suelo.

En la posición de partida, y durante la caída libre, el elemento muelle no está en contacto con el suelo, por lo que se considerará nula su rigidez.

Tras recorrer en caída libre una cierta distancia, el elemento muelle entra en contacto con la superficie del suelo. En ese momento, se da a la rigidez del muelle un valor fijo determinado.

A partir de ese instante, comienza también la compresión del muelle.

Cuando ésta alcanza un determinado valor, comienza el

retroceso: empieza a aumentar de nuevo la longitud del muelle y a ascender el elemento masa hasta que se llega al momento de despegue, momento en el que la constante de rigidez del muelle vuelve a hacerse nula.

En la Figura III-35 se representa el bond graph del sistema.

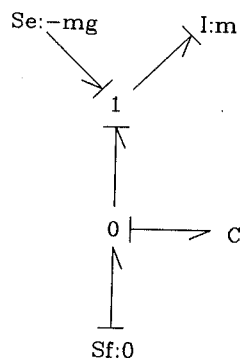


Fig. III-35: Bond graph del sistema de la Fig. III-34.

Se considera que no hay ninguna disipación de energía, por ser nula la resistencia aerodinámica e igual a la unidad el coeficiente de restitución en el rebote. De acuerdo con ésto, no aparece ninguna puerta Resistencia en el bond graph.

Se tendrán que producir, por consiguiente una serie indefinida de rebotes del conjunto masa-muelle, teniendo todos ellos igual magnitud.

Los valores dados a los elementos del sistema son:

Masa:  $m = 250 \text{ Kg}$

Aceleración de la gravedad considerada:  
 $g = 10 \text{ m/s}^2$

Rigidez del muelle (cuando hay contacto):  
 $k = 100000 \text{ N/m}$  (se supone constante:  $C=k$ )

Para establecer la condición de despegue, suponiendo que el suelo no cambia de nivel, puede considerarse la altura de la masa sobre el suelo, integrando la velocidad, o, también, el propio desplazamiento  $q$  del muelle.

Empleando la segunda solución, se considera que el despegue se produce en el momento en que el desplazamiento del muelle toma un valor negativo, lo cual corresponde, de acuerdo con el bond graph del sistema, al alargamiento del muelle más allá de su posición de tensión nula.

Como condiciones de partida, se toma +1 metro como altura inicial de la masa, que se considera puntual, y -1 metro como desplazamiento inicial  $q$  del muelle.

En la Figura III-36 se representan las gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración de la masa. En ellas puede comprobarse como los resultados, tanto cualitativa como cuantitativamente, son los esperados.

En efecto, las curvas serían senoidales si el parámetro de rigidez del muelle fuera constante. En los resultados obtenidos, puede verse como, efectivamente, las curvas tienen forma senoidal cuando hay contacto con el suelo pero tienen la forma de un movimiento uniformemente acelerado, con aceleración  $g=10$ , cuando no hay contacto con el suelo.

Como comprobación de que no hay problemas en cuanto a la conservación de la energía, puede verse como todos los rebotes alcanzan la misma altura, resultado que es acorde con el hecho de que no hay ningún elemento de disipación de energía en el sistema.

#### III.2.4 - Caso Pluridimensional

En un caso  $n$ -dimensional, la modelización es algo más compleja, aunque los fundamentos son similares.

El parámetro característico de una Compliance unidimensional podía variarse cuando su desplazamiento  $q$  era nulo, circunstancia en que la energía almacenada era también nula.

La energía almacenada en una Compliance  $n$ -dimensional [1] es:

$$E = \int \sum_i e_i \cdot f_i \cdot dt = \int \sum_i e_i \cdot dq_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

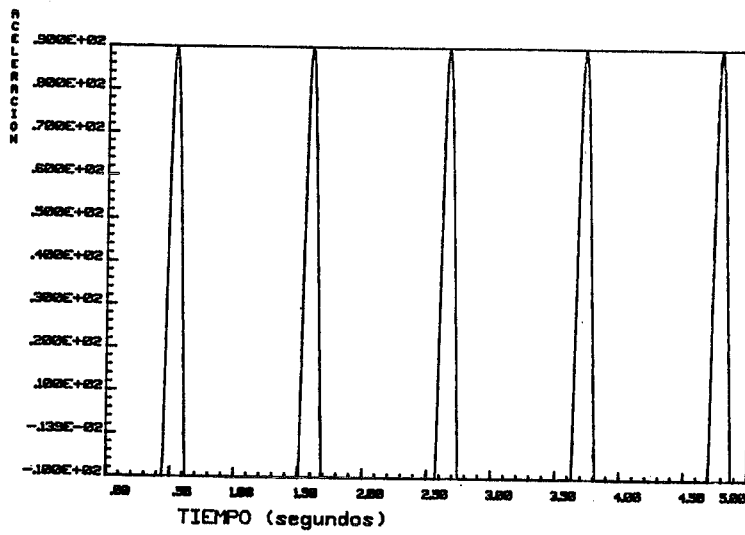
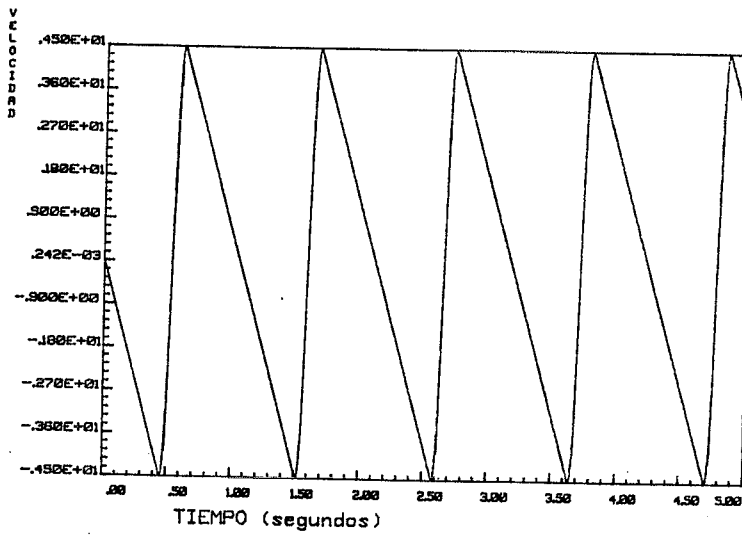
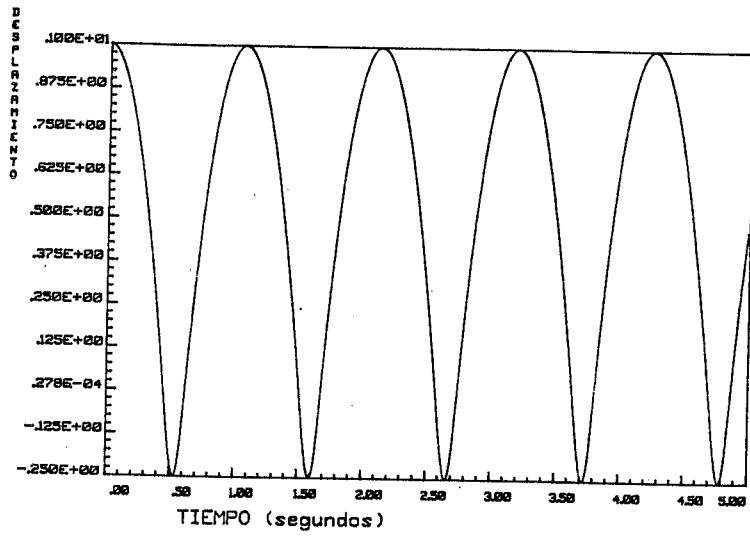


Fig. III-36: Desplazamiento, velocidad y aceleración de la masa.

En el caso lineal se cumple que:

$$e_i = k_{i1} \cdot q_1 + k_{i2} \cdot q_2 + \dots + k_{in} \cdot q_n = \sum_j k_{ij} \cdot q_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

por lo que:

$$E = \int \sum_i e_i \cdot dq_i = \int \sum_i \left( \sum_j k_{ij} \cdot q_j \right) \cdot dq_i$$

Desarrollando la expresión anterior para el caso tridimensional, resulta

$$E = \frac{1}{2} \cdot k_{xx} \cdot q_x^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{yy} \cdot q_y^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{zz} \cdot q_z^2 + (k_{xy} + k_{yx}) \cdot q_x \cdot q_y + (k_{xz} + k_{zx}) \cdot q_x \cdot q_z + (k_{yz} + k_{zy}) \cdot q_y \cdot q_z$$

En el caso de que la matriz de rigidez sea diagonal ( $k_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ ), la anterior expresión de la energía almacenada se reduce a:

$$E = \frac{1}{2} \cdot k_x \cdot q_x^2 + \frac{1}{2} \cdot k_y \cdot q_y^2 + \frac{1}{2} \cdot k_z \cdot q_z^2$$

De acuerdo con esta expresión, para que la energía E sea nula habrá de ser necesariamente:

$$q_x = q_y = q_z = 0$$

ya que no pueden compensarse los valores positivos y negativos de los desplazamientos q por estar éstos elevados al cuadrado.

En el caso de que se cumpla la condición anterior, puede modelizarse la pérdida y recuperación del contacto mediante la simple variación del parámetro de las Compliances y Resistencias de enlace, tal como se hacía en el caso unidimensional.



### III.2.4.1 - Problemas en la modelización de casos pluridimensionales

En la modelización del caso pluridimensional, se presentan nuevos problemas que se exponen en el apartado siguiente. Algunos proceden de la condición expuesta en el Capítulo II.5 sobre Modulación de Compliances y otros se deben a otras causas.

Estos problemas requieren una técnica de modelización especial que se desarrolla en apartados posteriores.

En cualquier caso, se considera siempre que la matriz de rigidez es diagonal.

#### III.2.4.1.1 - El problema de la tensión residual

El hecho de que ha de ser  $q_x=q_y=q_z=0$  para que la energía almacenada en una Compliance sea nula, impide modelizar directamente la pérdida de contacto en el caso pluridimensional, salvo que los elementos elásticos de enlace estén totalmente relajados, es decir, con tensión nula en todas las direcciones.

En la mayoría de los casos, lo más probable es que no sea así. Es muy fácil que ocurra, por ejemplo, que en el instante del despegue, existan en el elemento elástico de enlace tensiones no nulas sobre el plano de la superficie de contacto (Figura III-37).

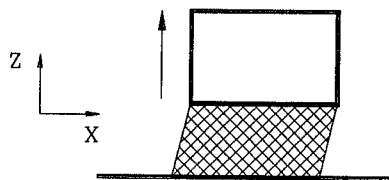


Fig. III-37: El problema de la tensión residual en el despegue.

La existencia de estas tensiones impide, por los motivos anteriormente expuestos, hacer nulos los valores de

las rigideces correspondientes.

Es evidente, sin embargo, que si no se anulan las mencionadas rigideces, la modelización no sería correcta, ya que seguiría habiendo fuerzas en el plano de la superficie de contacto mientras, teóricamente, el elemento elástico está ya separado de dicha superficie.

#### III.2.4.1.2 - El problema de la no coincidencia en el espacio de los puntos de pérdida y recuperación del contacto.

Además de los argumentos expuestos en anteriores capítulos, basados en la conservación de la energía, el análisis de lo que ocurre en el caso general de que la recuperación del contacto se produzca en un punto distinto al de la separación hace descubrir nuevos problemas.

Este análisis llevará al establecimiento de las condiciones generales que deben cumplirse para modelizar correctamente la pérdida y recuperación del contacto entre dos sólidos.

Dado que el problema estriba en la localización de los puntos de separación y de recuperación del contacto, se empleará, como base para las discusiones y desarrollos siguientes, un sistema de dos sólidos suficientemente simplificado de modo que sea fácil localizar dichos puntos.

El primer sólido de este sistema simplificado es sólo una masa puntual mientras que el segundo tiene una superficie plana y horizontal sobre la que se produce el contacto.

El sistema de referencia que se empleará tendrá los ejes X e Y en el plano de la superficie del segundo sólido. El eje Z completa un triedro trirectángulo con dichos ejes.

Entre los dos sólidos seguirá existiendo un conjunto de elementos de enlace con determinadas características de elasticidad y amortiguamiento (Fig. III-38).

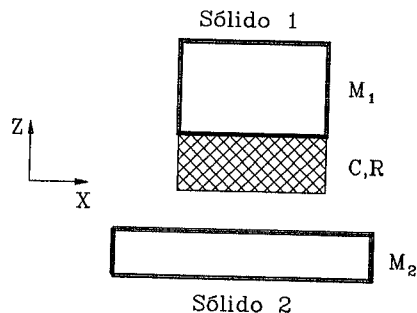


Fig. III-38: Sistema pluridimensional de dos sólidos con discontinuidad en su enlace.

Las discusiones y desarrollos que se efectúen con la configuración simplificada que se acaba de definir, son, en cualquier caso, generalizables al caso general de dos sólidos con superficies de cualquier forma.

Se discute a continuación, con la anterior configuración simplificada, lo que ocurre si se aplica el procedimiento de modelización mediante anulación de parámetros en un caso general pluridimensional.

De acuerdo con el citado procedimiento, en el momento de perderse el contacto, por haber llegado la cota  $Z$  de situación del primer sólido a un determinado valor, se anulan los parámetros de los elementos de enlace (Compliances y Resistencias) existentes entre los dos sólidos.

Por supuesto, se supone que la tensión en los elementos elásticos de enlace es nula en todas las direcciones para poder anular los mencionados parámetros.

Producida la separación, el sólido 1 puede desplazarse por el espacio siguiendo una trayectoria cualquiera. En la Figura III-39 se representa una posible trayectoria vista en la dirección del eje  $Y$ .

Al volver a establecerse el contacto, vuelve a darse a los parámetros de los elementos de enlace el valor no nulo que tenían antes de la separación.

Evidentemente, durante el recorrido del sólido 1,

habrán ido variando los desplazamientos  $q$  en los elementos de enlace, aunque sin producirse ningún esfuerzo ya que sus parámetros se habían anulado.

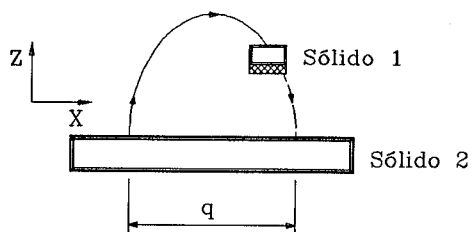


Fig. III-39: El problema de la no coincidencia de los puntos de pérdida y recuperación del contacto.

Si el punto de recuperación del contacto coincide con el punto en que se produjo la separación, los desplazamientos globales ( $q_x, q_y, q_z$ ), habidos durante el intervalo de falta de contacto y coincidentes con el recorrido del sólido 1, serán nulos.

Pero si el punto de recuperación del contacto es diferente al de la pérdida, los desplazamientos ( $q_x, q_y, q_z$ ) tendrán un valor no nulo y tan grande como haya sido el recorrido.

Es evidente que se presenta un problema con las Compliances de enlace: al existir un desplazamiento ( $q_x, q_y, q_z$ ) no nulo, acumulado durante la trayectoria, y recuperar las Compliances su rigidez no nula, éstas ejercerán fuerzas que tenderán a hacer que la situación relativa de los dos sólidos sea la que tenían antes de la separación.

Obviamente, una modelización así efectuada no es correcta.

Se deduce de lo anterior que la condición de que la Compliance tridimensional esté relajada totalmente en el momento de la pérdida de contacto, es suficiente para modelizar dicha pérdida pero no lo es para modelizar la recuperación del contacto.

Incluso en el caso de que los elementos de enlace sean unidimensionales, si la toma de contacto se produce a dis-

tinta cota, por no ser plana la superficie del sólido 2 o por otro motivo cualquiera, aparecerán fuerzas inadecuadas.

#### III.2.4.2 - Condición general para la variación de los parámetros de las Compliances de enlace

La problemática expuesta conduce al establecimiento de la siguiente condición, que ha de cumplirse con carácter general:

Sólo puede variarse la rigidez de las Compliances de enlace entre dos sólidos que se separan, cuando su desplazamiento es exactamente nulo, tanto en la pérdida del contacto, como en la recuperación del mismo.

Esta condición es aplicable tanto a casos unidimensionales como a casos pluridimensionales, debiendo cumplirse en estos últimos para cada una de las componentes.

La condición expuesta es, como puede verse, de validez general, pues debe aplicarse tanto para la pérdida del contacto como para su recuperación y tanto para casos unidimensionales como pluridimensionales.

Sin embargo, aunque en este punto de la discusión ya se sepa que no puede variarse la rigidez de las Compliances de enlace más que bajo unas condiciones definidas, está todavía por resolver el problema de modelizar la pérdida y recuperación del contacto en el caso general de que esta última se produzca en lugar diferente al del despegue o cuando hay tensiones residuales en alguna dirección.

La forma de realizar la modelización en tales casos se desarrolla en el apartado siguiente.

#### III.2.4.3 - Modelización en el Caso Pluridimensional

En primer lugar se tratará el problema de la modelización en el caso general de que la pérdida y recuperación del contacto se produzcan en lugares diferentes.

Una primera solución, sencilla y aplicable en cualquier caso, consiste en introducir, en serie con el elemento de enlace, una Resistencia auxiliar de muy alto valor (Figura III-40).

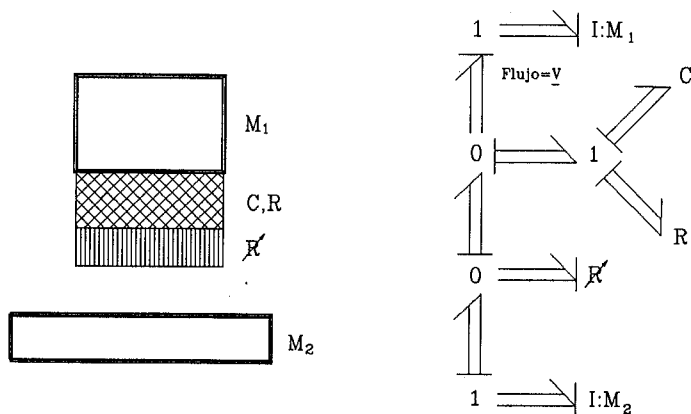


Fig. III-40: Solución con una Resistencia auxiliar.

Dado que el parámetro de cualquier Resistencia puede variarse sin problemas, para modelizar la falta de contacto no hay más que anular el parámetro de la Resistencia auxiliar mencionada con lo que automáticamente se anulan los esfuerzos del enlace.

Esta solución, aunque sencilla, presenta el inconveniente de que todos los esfuerzos en el punto de contacto, cuando hay contacto, producirán desplazamientos, inevitablemente, en la Resistencia auxiliar.

Estos desplazamientos podrán hacerse tan pequeños como se quiera, haciendo suficientemente grande el parámetro de la Resistencia auxiliar, pero siempre serán inevitables. Además, normalmente crecerán a medida que transcurra el tiempo de la simulación, a menos que la fuerza en el contacto varíe alternativamente de modo que se anulen los sucesivos desplazamientos.

Una segunda solución, algo más complicada, pero sin las limitaciones de la anterior, consiste en emplear una fuente de flujo en serie con los elementos de enlace, dejando invariable las características de dichos elementos de enlace (Figura III-41).

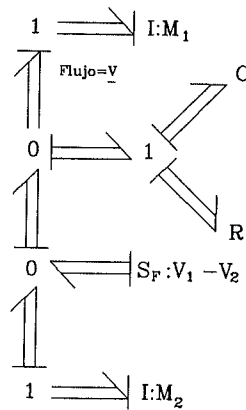


Fig. III-41: Incorporación de una fuente de flujo auxiliar.

El valor de dicha fuente de flujo será:

- 1) Cuando hay contacto: Nulo.
- 2) Cuando no hay contacto: Igual al flujo ( $v$ ) del punto de contacto de la masa que se mueve el espacio.

Utilizando esta fuente de flujo, se evitan los falsos desplazamientos en los elementos de enlace que puedan producirse durante el periodo de falta de contacto, con lo que se elimina el problema que se presentaba.

No obstante, esta modelización, presenta un problema en el caso de que exista tensión residual en el plano de la superficie XY.

Los problemas planteados por la presencia de tensión residual en el plano de la superficie XY ya aparecían con la modelización convencional basada en la anulación de parámetros. El problema consistía entonces en que o se incumplía el principio de conservación de la energía o no podía modelizarse la pérdida de contacto.

Con la nueva modelización, basada en el empleo de fuentes de flujo, el problema es otro: si en el momento de la separación existe una cierta tensión residual en el plano de la superficie XY, ocurrirá que, tras la recuperación del contacto, volverá a aparecer la misma tensión residual que había cuando se produjo la separación (Fig. III-42).

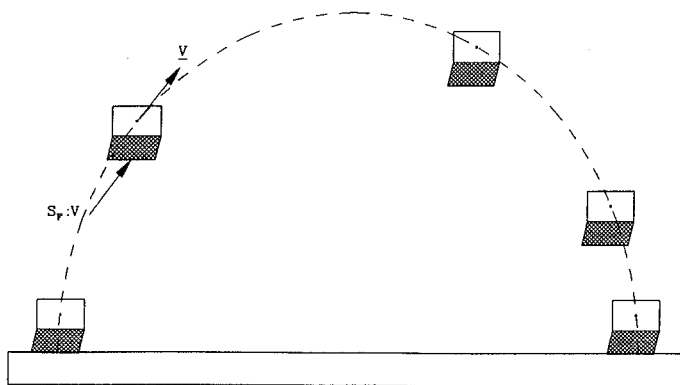


Fig. III-42: Mantenimiento de la tensión residual.

Evidentemente, no puede aplicarse sin más el procedimiento de la fuente de flujo, ya que, al recuperarse el contacto, volvería a aparecer la fuerza correspondiente a la deflexión que tenía el elemento elástico de enlace, el cual no habría podido relajarse durante el intervalo de tiempo de falta de contacto.

Una posible solución a este problema sería incluir, mediante la fuente de flujo, un desplazamiento adicional que anulara el desplazamiento residual de la Compliance, es decir, que la relajara.

Sin embargo, esta solución no es recomendable ya que, presenta dos inconvenientes.

El primero estriba en que hay que definir, de forma arbitraria, el flujo adicional que tendría que aplicar la fuente de flujo para anular el desplazamiento residual.

El segundo inconveniente es que la fuente de flujo puede también introducir energía en el sistema, ya que, como puede verse en el bond graph de la Figura III-41, el esfuerzo en la fuente de flujo es el mismo que en el elemento de enlace. Si en éste hay tensión residual, habrá esfuerzo en el punto en que se aplica la fuente de flujo, con lo que ésta puede introducir energía.

La solución que se propone, en la que no aparecen estos problemas, consiste en introducir una Compliance de muy alto valor situada en serie entre los elementos de enlace y la fuente de flujo (Fig. III-43).



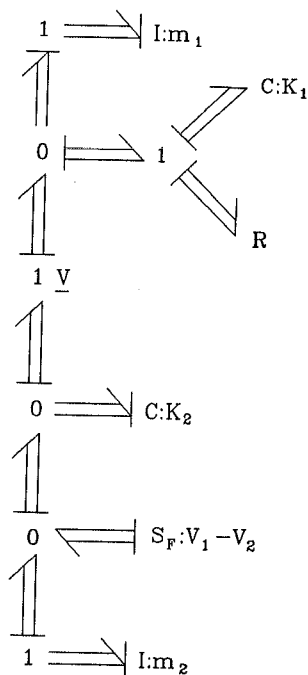


Fig. III-43: Incorporación de una Compliance auxiliar.

A partir de este momento, los elementos elásticos de enlace se representarán mediante la Compliance  $C:k_1$  siendo  $C:k_2$  la Compliance adicional.

El procedimiento a seguir consiste, entonces, en:

- 1) Hacer nula la rigidez  $k_2$  de la Compliance adicional en el momento de la separación.
- 2) Definir como valor de la fuente de flujo el del desplazamiento del punto P de unión de la Compliance adicional con el resto de los elementos de enlace.

Para conocer el desplazamiento del punto P, que define el flujo que ha de introducir la fuente auxiliar, es conveniente introducir una Inercia adicional ( $I_a$ ) de pequeño valor, o un elemento Inercia Nula, entre las dos Compliances, es decir en el punto P, y hacer el valor de la fuente de flujo igual al flujo de dicha Inercia adicional (Fig. III-44).

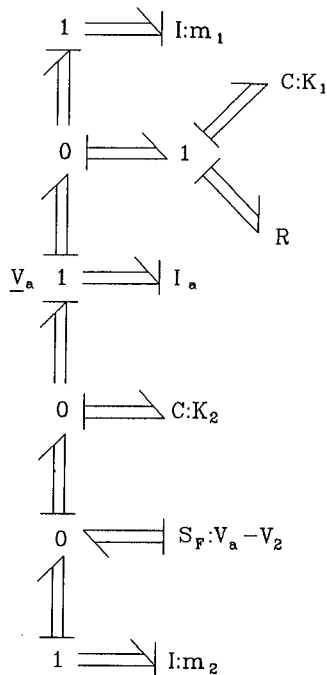


Fig. III-44: Incorporación de una Inercia auxiliar.

Al introducir la Inercia adicional se consigue también que la causalidad sea integral en todas las Compliances, lo que es necesario para el empleo de determinados programas de simulación.

Con la configuración propuesta, se resuelven los problemas que se planteaban en la modelización.

El problema de la permanencia de la tensión residual en el elemento elástico de enlace (Compliance  $k_1$ ) queda resuelto, ya que éste puede relajarse libremente al ser nulo el esfuerzo existente sobre él por haberse anulado la rigidez de la Compliance adicional  $k_2$  y ser nula, o de muy bajo valor, la Inercia adicional intercalada (ver el bond graph de la Fig. III-44).

El problema que inicialmente se planteaba en el caso pluridimensional consistente en la acumulación de falsos desplazamientos en la Compliance de enlace durante el periodo de falta de contacto, también está resuelto, ya que, ahora, el desplazamiento de la Compliance de enlace  $k_1$  durante dicho periodo, viene dado por el desplazamiento relativo entre las dos inercias, las cuales se mueven

libremente en el espacio enlazadas por la Compliance citada.

Evidentemente, tampoco hay ningún problema de arbitrariedad en la definición de la fuente de flujo, puesto que éste se hace igual al flujo de la inercia adicional.

El problema de la posible introducción de energía por parte de la fuente de flujo tampoco existe. En efecto, durante la falta de contacto, el esfuerzo es nulo en el punto donde se aplica la fuente de flujo, ya que también es nula la rigidez de la Compliance adicional. Por otra parte, cuando hay contacto, el esfuerzo no es nulo pero sí lo es el flujo de la fuente. Por consiguiente, en ningún momento la fuente de flujo auxiliar introduce energía en el sistema.

Quedan únicamente dos cuestiones por resolver.

La primera es que permanece, durante el periodo de falta de contacto, el desplazamiento residual que pueda haber en el momento del despegue en la Compliance adicional  $k_2$  ya que el flujo en la misma es nulo (ver los flujos en el bond graph de la Figura III-44). Sin embargo, este desplazamiento residual siempre será pequeño dada la alta rigidez que se ha dado a dicha Compliance.

La segunda cuestión por resolver es que, con el procedimiento propuesto, no puede evitarse del todo el incumplimiento del principio de conservación de la energía ya que se anula la rigidez de la Compliance adicional  $k_2$  habiendo tensión en la misma.

Sin embargo, la alta rigidez de dicha Compliance adicional, permite reducir al mínimo el incumplimiento del mencionado principio.

Para demostrarlo se verá como aumentando la rigidez de la Compliance adicional  $k_2$ , dándole el valor  $k_{2M} > k_2$ , se reduce la energía almacenada por dicha Compliance.

La demostración se hará en primer lugar para el caso en que la Compliance adicional sea unidimensional, extendiéndose a continuación al caso general pluridimensional, aunque siempre con comportamiento lineal.

El esfuerzo soportado por la Compliance adicional es el mismo tanto si tiene la rigidez  $k_2$  como si tiene la rigidez  $k_{2M}$ :

$$e_2 = e_{2M}$$

Esta igualdad equivale a que:

$$k_2 \cdot q_2 = k_{2M} \cdot q_{2M}$$

Las energías acumuladas por la Compliance en cada caso son respectivamente:

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot q_2^2$$

$$E_{2M} = \frac{1}{2} \cdot k_{2M} \cdot q_{2M}^2$$

Dividiendo las dos ecuaciones anteriores,

$$\frac{E_2}{E_{2M}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot q_2^2}{\frac{1}{2} \cdot k_{2M} \cdot q_{2M}^2} = \frac{k_2 \cdot q_2^2}{k_{2M} \cdot q_{2M}^2}$$

y aplicando la condición de igualdad de esfuerzos, se tiene:

$$\frac{E_2}{E_{2M}} = \frac{k_2 \cdot q_2^2}{k_{2M} \cdot (q_2 \cdot k_2 / k_{2M})^2} = \frac{k_{2M}}{k_2}$$

Como puede verse, haciendo suficientemente grande la rigidez  $k_{2M}$  frente a la rigidez  $k_2$ , es posible hacer que la energía  $E_{2M}$ , acumulada en la Compliance con rigidez aumentada, sea muy pequeña en comparación con la energía  $E_2$  acumulada en la Compliance original.

Por consiguiente, en el instante de la separación, puede hacerse nula la rigidez de la Compliance adicional sin que el error correspondiente a la energía perdida sea

grande. La energía perdida será tan pequeña como se quiera sin más que dar a la rigidez  $k_2$  un valor suficientemente grande.

La exposición anterior se ha hecho para el caso unidimensional. De ella se deriva directamente el desarrollo para el caso tridimensional que se expone a continuación. Se considerará que la matriz rigidez de la Compliance es diagonal.

La matriz rigidez de la Compliance rigidizada se hará proporcional a la matriz rigidez de la Compliance original, es decir:

$$[K_{2M}] = N \cdot [K_2]$$

donde  $N$  es un escalar al que se dará un valor arbitrariamente grande ( $N \gg 1$ ).

Hay que recordar aquí que hay libertad en la definición de esta Compliance adicional, pues, en definitiva, no es más que un artificio que se introduce para la modelización.

Los esfuerzos en las Compliances son:

$$\underline{e}_2 = [K_2] \cdot \underline{q}_2$$

$$\underline{e}_{2M} = [K_{2M}] \cdot \underline{q}_{2M} = N \cdot [K_2] \cdot \underline{q}_{2M}$$

Su igualdad ( $\underline{e}_2 = \underline{e}_{2M}$ ) implica que:

$$[K_2] \cdot \underline{q}_2 = N \cdot [K_2] \cdot \underline{q}_{2M}$$

de donde

$$\underline{q}_{2M} = (1/N) \cdot \underline{q}_2$$

El cociente de las energías acumuladas es:

$$\frac{E_2}{E_{2M}} = \frac{\sum \frac{1}{2} \cdot k_{i2} \cdot q_{i2}^2}{\sum \frac{1}{2} \cdot k_{i2M} \cdot q_{i2M}^2}$$

donde  $i=x,y,z$ .

Dado que  $k_{i2M} = N \cdot k_{i2}$  y que  $q_{i2M} = q_{i2}/N$  se tiene que

$$\frac{E_2}{E_{2M}} = \frac{\sum \frac{1}{2} \cdot k_{i2} \cdot q_{i2}^2}{\sum \frac{1}{2} \cdot N \cdot k_{i2} \cdot (q_{i2}/N)^2} = \frac{\sum \frac{1}{2} \cdot k_{i2} \cdot q_{i2}^2}{(1/N) \cdot \sum \frac{1}{2} \cdot k_{i2} \cdot q_{i2}^2} = N$$

Al igual que en el caso unidimensional, si el valor del escalar  $N$  es suficientemente grande, la energía acumulada en la Compliance rigidizada puede hacerse tan pequeña como se quiera en comparación con la energía acumulada en la Compliance original.

Por tanto, en el instante de la separación, puede hacerse nula la rigidez de la Compliance adicional, haciéndose el error correspondiente a la energía perdida tan pequeño como se desee.

#### III.2.4.4 - Ejemplo de aplicación

A modo de ejemplo, se aplicará el método propuesto en la modelización de un sistema masa-muelle bidimensional.

La masa  $m_1$ , que se considera puntual, parte con una velocidad inicial no nula, dirigida según el eje horizontal  $X$ , y está sometida a una fuerza vertical constante, según el eje  $Z$ , equivalente a la acción gravitatoria.

La masa  $m_2$ , que puede considerarse como el suelo, se considera inmóvil.

La masa  $m_1$  sigue una trayectoria parabólica hasta entrar en contacto con la superficie horizontal del suelo a través del elemento elástico bidimensional  $C_1$  unido a la ella (Fig. III-45).

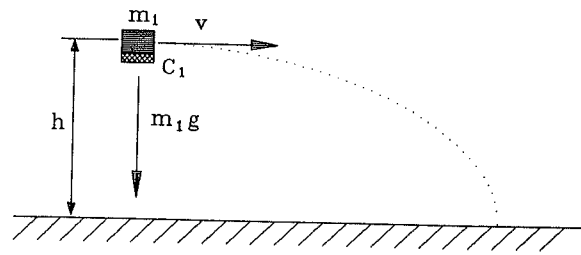


Fig. III-45: Ejemplo de sistema bidimensional.

En la Figura III-46 se representa el bond graph del sistema.

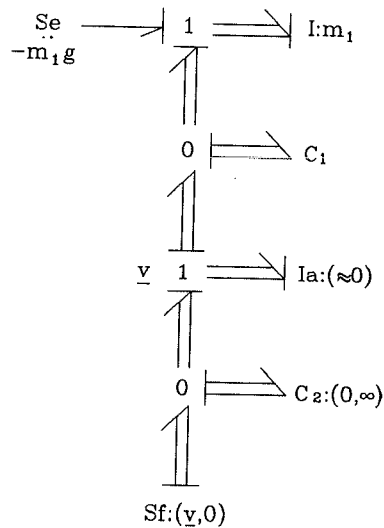


Fig. III-46: Bond graph del sistema de la Fig. III-45.

De acuerdo con el procedimiento propuesto, la rigidez de la Compliance adicional  $C_2$  es nula al principio, tomando un valor suficientemente alto en el momento en que se establece el contacto. La fuente de flujo tiene el valor  $S_f = 0$  cuando hay contacto y  $S_f = \underline{v}$  cuando no lo hay, donde  $\underline{v}$  es la velocidad de la masa adicional  $m_2$ . La Compliance  $C_1$  no varía de valor en ningún momento.

Los valores dados a los elementos del sistema son:

Masa principal:	$m_1 = 250 \text{ Kg}$
Aceleración de la gravedad:	$g = 10 \text{ m/s}^2$
Rigidez X de $C_1$ :	$k_{1x} = 100000 \text{ N/m}$
Rigidez Z de $C_1$ :	$k_{1z} = 100000 \text{ N/m}$
Velocidad inicial:	$v = 3 \text{ m/s (eje X)}$

Altura inicial de la masa:  $h = 1 \text{ m}$

Para establecer la condición de despegue, no puede considerarse el desplazamiento  $q$  de ninguna Compliance, como se hacía en el caso unidimensional, ya que los desplazamientos, tanto del muelle principal como del muelle adicional, están limitados por la fuente de flujo que se ha introducido.

En efecto, sólo hay flujo en los citados muelles cuando hay contacto con la superficie del suelo, impidiendo la fuente de flujo que se produzcan desplazamientos en las Compliances cuando no hay contacto.

Por consiguiente, para establecer la condición de despegue, hay que considerar la altura de una de las masas sobre el suelo, integrando la velocidad correspondiente.

En este sentido, puede considerarse la masa principal o la masa adicional. Tras la realización de simulaciones empleando una y otra solución, se comprueba que resulta preferible considerar la masa principal, ya que, dada su mayor inercia, sus movimientos son más estables que los de la masa adicional. La otra alternativa se ajusta mejor a la definición de la existencia o no de contacto, pero requiere mayor precisión en los cálculos.

En la Figura III-47 se representa la trayectoria, obtenida mediante la simulación, sobre el plano XZ de la masa principal. Es una trayectoria parabólica, que comienza en el vértice superior. Aproximadamente sobre la misma trayectoria, se produce el retroceso de la masa puntual tras el contacto con la superficie horizontal del suelo. Dicho retroceso es lógico dada la deformación que se produce en el elemento elástico al establecerse el contacto y la acción que produce el elemento elástico sobre la masa  $m_1$  que es puntual.

La pequeña diferencia entre la trayectoria inicial y la de retroceso se debe a que el valor dado a la rigidez de la Compliance adicional no es infinito sino finito.

En la Figura III-48 se representan los desplazamientos verticales de la masa adicional  $m_2$ . Como puede comprobarse, los resultados, tanto cualitativa como cuantitativamente, son los esperados.



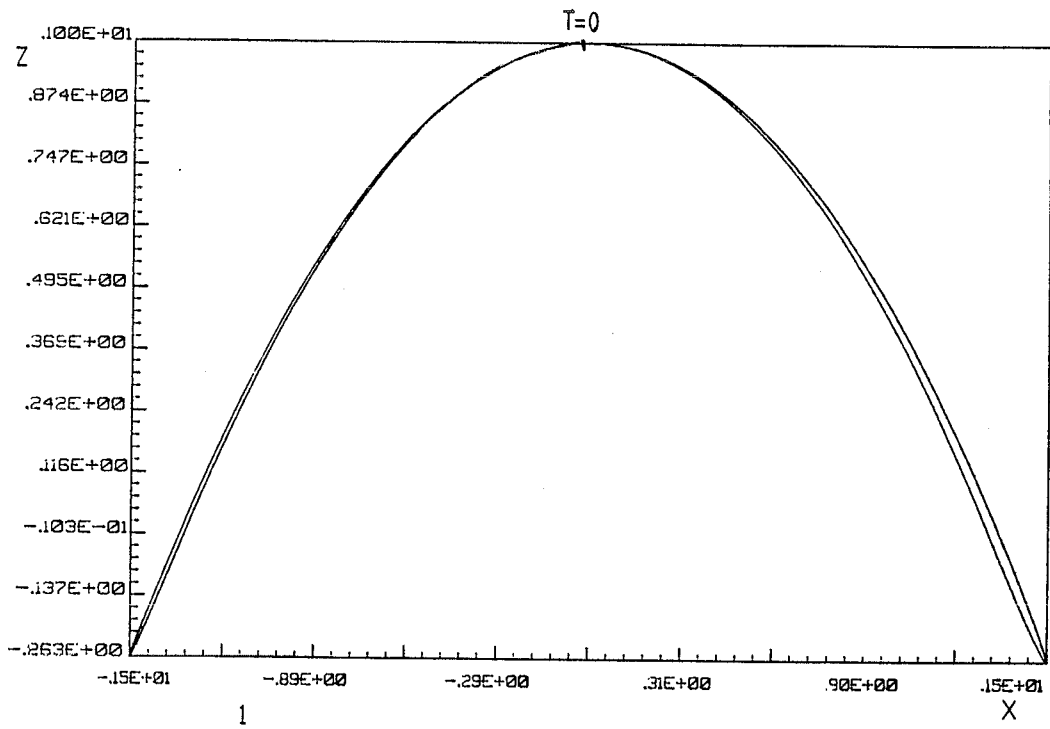


Fig. III-47: Trayectoria en el plano XZ de la masa principal.

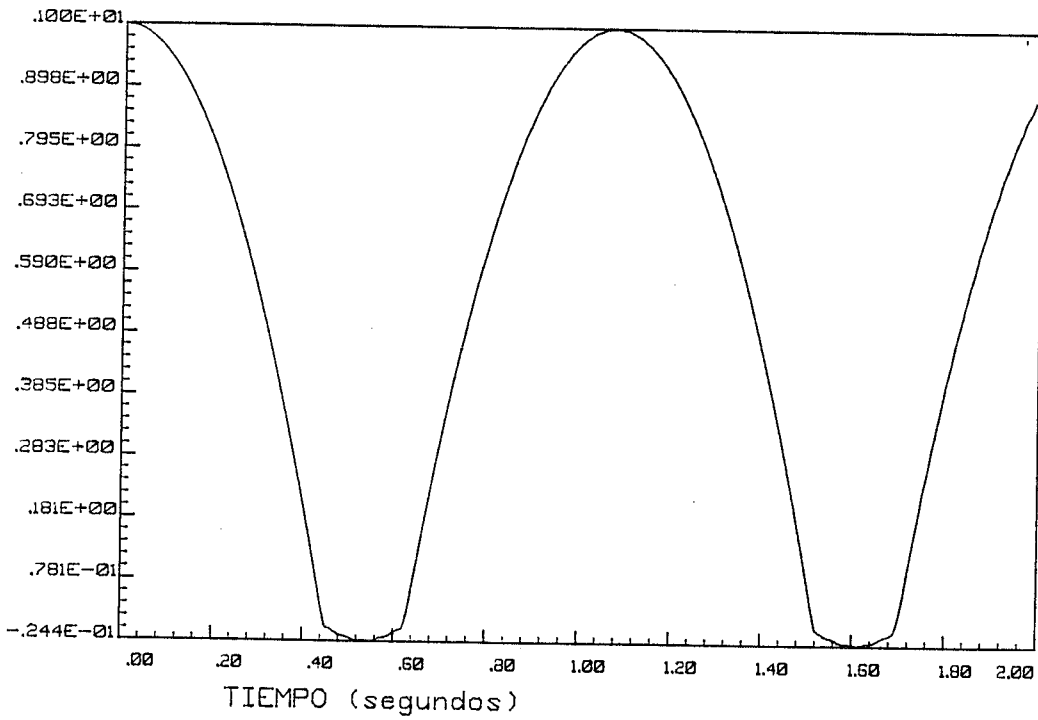


Fig. III-48: Desplazamientos verticales de la masa auxiliar.

### III.2.5 - Desaparición de restricciones. Holguras.

El contacto entre dos sólidos puede consistir en un simple contacto puntual entre sus superficies o también en un enlace más complejo mediante un par cinemático.

En cualquier caso, la condición de contacto entre dos sólidos rígidos supone la existencia de una o varias restricciones al movimiento relativo entre ambos.

Los denominados pares cinemáticos son conjuntos definidos de restricciones cinemáticas. Así, por ejemplo, una rótula está constituida por tres restricciones de desplazamiento, un bulón está constituido por tres restricciones de desplazamiento y dos de giro, etc.

En ocasiones puede producirse la desaparición transitoria de alguna de estas restricciones cinemáticas existentes entre sólidos rígidos. Esto ocurre, por ejemplo, en mecanismos que tienen piezas que entran en contacto y se separan, o cuando aparecen holguras en articulaciones o en otro tipo de enlaces, etc.

Se trata, en general, de mecanismos constituidos por sólidos rígidos que, por una u otra causa, presentan discontinuidades en su funcionamiento.

Dado el interés de poder simular el comportamiento de sistemas con este tipo de discontinuidades, se plantea a continuación el problema de modelizarlos en bond graph.

#### III.2.5.1 - Fundamentos de modelización de la desaparición de restricciones

En la modelización mediante bond graph de restricciones cinemáticas, normalmente se emplean elementos Muelle Rígido o Compliances de alta rigidez.

En realidad, no es estrictamente necesario el empleo de estos elementos, pero su uso conlleva la ventaja de que se evitan las coordenadas dependientes y la consiguiente causalidad diferencial en el bond graph.

Una posibilidad para la modelización de la interrupción de restricciones, objeto de este apartado, es la

basada en los principios y procedimientos expuestos en apartados anteriores dedicados a la modelización de la separación de sólidos unidos mediante elementos elásticos unidimensionales o pluridimensionales.

Tal tipo de modelización requiere el empleo de Com-  
pliances de alta rigidez en la modelización de las restricciones.

La validez de esta solución de modelización puede argumentarse teniendo en cuenta que un conjunto de dos sólidos rígidos unidos directamente puede considerarse equivalente a un conjunto de dos sólidos unidos mediante elementos elásticos donde dichos elementos son de alta rigidez.

#### III.2.5.2 - Modelización de holguras

Las holguras constituyen casos típicos de discontinuidad que pueden presentarse en los mecanismos que intervienen en la dinámica del automóvil: holguras en un eje de rueda, holguras en el mecanismo de dirección, etc.

Una característica de las holguras consiste en que, una vez producida la separación, a diferencia de lo que ocurre en la separación en general de sólidos unidos mediante elementos elásticos cuya modelización se desarrolló anteriormente, el recorrido relativo entre los dos sólidos no es ilimitado, sino que a partir de un cierto desplazamiento, vuelve a restablecerse el contacto, pudiendo producirse dicho restablecimiento del contacto tanto en el mismo punto en que se produjo la separación como en otro punto diferente.

En la Figura III-49 se representa esquemáticamente una holgura unidimensional entre los sólidos  $m_1$  y  $m_2$ . En este caso, sólo hay dos posibles puntos de contacto entre los dos sólidos: los puntos A y B.

En la Figura III-50 se representa esquemáticamente una holgura bidimensional entre los sólidos  $m_1$  y  $m_2$ , del tipo de la que puede presentarse en una articulación de tipo bulón. En tal caso, el número de posibles puntos de contacto entre los dos sólidos es infinito.

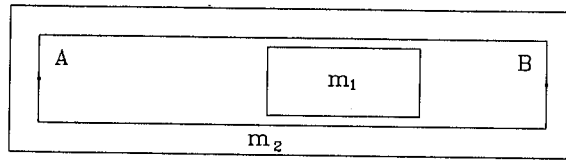


Fig. III-49: Holgura unidimensional.

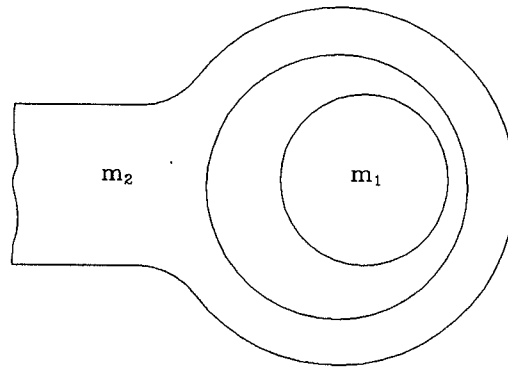


Fig. III-50: Holgura bidimensional.

Lo anterior pone de manifiesto que la definición del conjunto de posibles puntos de contacto entre los dos sólidos ha de ser tenida en cuenta en la modelización de cada tipo de holgura.

### III.2.5.2.1 - Modelización de holguras unidimensionales

A la vista de la Figura III-49 puede deducirse que una solución, coherente con el sistema físico real, válida para modelizar holguras unidimensionales, consiste en introducir una Compliance para cada posible punto de contacto (Fig. III-51).

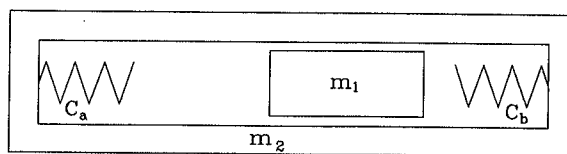


Fig. III-51: Compliances de los puntos de contacto.

Evidentemente, esta solución sólo es válida para holguras en las que el número de posibles puntos de contacto es finito.

Con esta modelización puede aplicarse a cada Compliance el método, ya expuesto, de anular el valor de su rigidez en el momento de la separación, devolviéndole, posteriormente, su rigidez original en el momento de la recuperación del contacto.

Al igual que en el caso general de separación de cuerpos, estas variaciones en el parámetro de las Compliances no incumplen el principio de conservación de la energía, ya que sólo se efectúan cuando el desplazamiento de la Compliance correspondiente es nulo.

Una cuestión fundamental a considerar en el sistema con holgura de la figura anterior, se refiere al signo de los desplazamientos y esfuerzos.

Es evidente que cada Compliance sólo puede trabajar en compresión, no ejerciendo nunca fuerzas de tracción.

Del mismo modo, los esfuerzos reales ejercidos sobre cada sólido por una u otra Compliance siempre son de sentido opuesto.

Por otra parte, una misma velocidad relativa ( $v_1 - v_2$ ) entre los dos sólidos, produce desplazamientos de distinto signo en una y otra Compliance.

De acuerdo con todo lo anterior, y acordando considerar positivo el desplazamiento  $q$  de las Compliances que estén en compresión, el bond graph del sistema de dos masas de la Figura III-51 es el representado en la Figura III-52.

Para comprobar que el sentido de los esfuerzos es el correcto, se considerará, como ejemplo, el caso de haber contacto en el lado b.

A la vista de la Figura III-51, es evidente que si la velocidad  $v_1$ , según el eje X de la referencia, del sólido  $m_1$  es mayor que la velocidad  $v_2$  del sólido  $m_2$ , la Compliance  $C_b$  se comprime, acelerando a  $m_2$  y frenando a  $m_1$ .

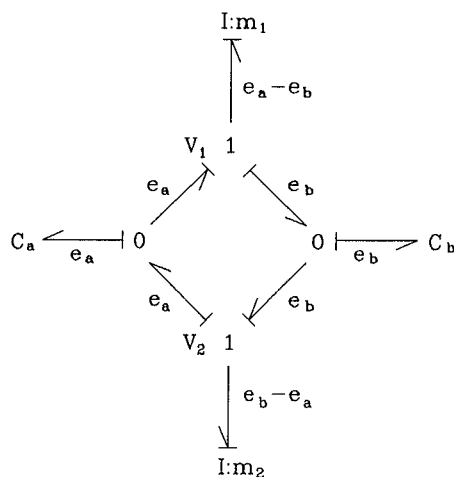


Fig. III-52: Bond graph del sistema con holgura unidimensional.

En el bond graph (Fig. III-52), si  $v_1 > v_2$ , el flujo en la Compliance  $C_b$  es positivo por lo que también lo serán el desplazamiento  $q_b$  y el esfuerzo  $e = k_b \cdot q_b$ . Evidentemente, dicho esfuerzo, por ser positivo, acelerará a la masa  $m_2$ .

Como puede verse en el bond graph propuesto, el desplazamiento de cada Compliance es positivo cuando está en compresión.

En la misma situación anterior, el desplazamiento  $q_a$  de la Compliance  $a$  es negativo, lo que corresponde con el hecho de no haber contacto en ese lado, asignándose, por tanto, un valor nulo a la correspondiente rigidez  $k_a$ .

Fácilmente puede comprobarse como también son correctos los signos en el caso de que  $v_2$  sea mayor que  $v_1$ .

En el caso de que las masas estén en contacto por el lado opuesto, puede también comprobarse como los sentidos de los esfuerzos son los correctos.

En general, la masa  $m_1$  del bond graph anterior corresponderá al sólido interior, y la masa  $m_2$  al sólido exterior. Sin embargo, esto sólo es válido si se considera el convenio antes citado y los ejes de referencia son los que se indican.

A efectos de modelización, puede definirse como

"longitud característica de la holgura", representada por  $l_h$ , el desplazamiento relativo entre los dos sólidos desde que se pierde el contacto en un lado hasta que se recupera en el otro (Fig. III-53).

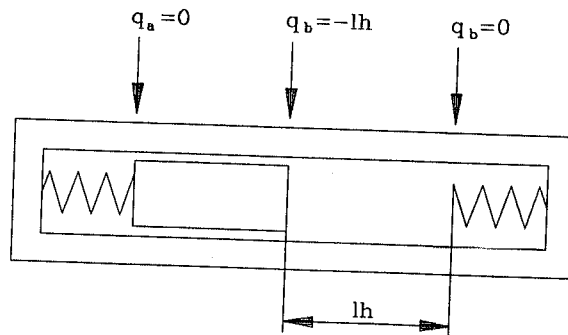


Fig. III-53: Definición geométrica del sistema con holgura unidimensional.

Físicamente, esta magnitud equivale al huelgo existente en el mecanismo.

En la anterior definición de  $l_h$ , se entiende como punto de pérdida o de recuperación del contacto aquel en que el desplazamiento de la Compliance correspondiente es nulo. En el sistema físico real, sería aquel punto en que el sólido interior está en el punto límite de contacto con un muelle lateral sin haber ninguna compresión en el mismo. En ese instante, el otro muelle tiene un desplazamiento negativo, es decir, un alargamiento, igual a la longitud característica  $l_h$  de la holgura.

De acuerdo con las definiciones anteriores, los desplazamientos  $q$  de las dos Compliances del sistema con holgura unidimensional cumplen que:

$$q_a + q_b = -l_h$$

La igualdad anterior equivale a que al menos una de las dos Compliances tiene desplazamiento negativo, es decir, está en tracción.

Puede ocurrir que sólo una de las Compliances esté en

tracción, estando la otra en compresión. En tal caso el sólido interior estaría en el lado correspondiente a la Compliance comprimida.

Esta Compliance comprimida sería la que ejercería fuerzas entre los dos sólidos, ya que la Compliance en tracción nunca ejerce ninguna fuerza, por haber dado a su rigidez un valor nulo.

Puede ocurrir también que las dos Compliances estén en tracción, es decir, con desplazamiento negativo. En tal caso, ninguna de las dos Compliances ejerce fuerza alguna. El sólido interior estaría en un punto intermedio entre los extremos.

En el caso de no haber holgura, la longitud característica  $l_h$  es nula, siendo también nula, por consiguiente, la suma de desplazamientos  $q_a + q_b$ .

En este caso, la rigidez al desplazamiento relativo entre los dos sólidos es igual a la rigidez de uno de los dos muelles ya que, en todo momento, sólo trabaja uno de los dos.

En efecto, si inicialmente los dos desplazamientos  $q_a$  y  $q_b$  son nulos, al variar uno de ellos en cualquier sentido, variará el otro en sentido opuesto de modo que seguirá cumpliéndose que  $q_a + q_b = 0$ . Por consiguiente, al menos uno de los dos muelles pasará a tener un desplazamiento negativo, es decir, pasará a trabajar en tracción, o, lo que es lo mismo, a no trabajar.

Si en lugar de holgura hay precompresión de los muelles laterales,  $l_h$  es negativa.

En tal caso, la rigidez al desplazamiento relativo es igual al doble de la rigidez de uno de los dos muelles ya que equivale a un sistema de dos muelles en paralelo, a menos que el desplazamiento relativo supere el valor de la precompresión de uno de los muelles.

En cualquier caso, el mismo modelo es válido para los tres posibles casos que pueden darse en un mecanismo susceptible de tener holguras:



- a) Hay holgura:  $l_h > 0$
- b) No hay holgura:  $l_h = 0$
- c) Hay precompresión:  $l_h < 0$

Para efectuar simulaciones, hay que asignar a cada una de las Compliances un desplazamiento inicial como condición inicial de partida (Fig. III-54).

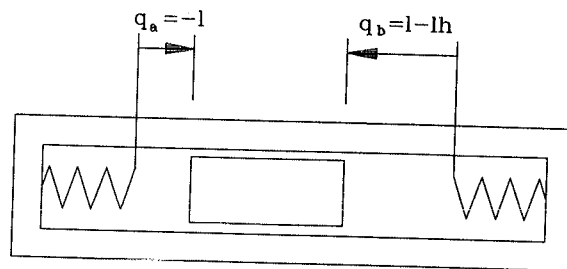


Fig. III-54: Definición de la situación inicial del sistema.

Llamando  $l$  a la distancia desde el extremo a, la condición de partida en cada Compliance es

$$q_a = -l$$

$$q_b = l - l_h$$

Puede también darse el caso de ser  $l < 0$ , lo que equivale a haber compresión del muelle del lado a.

#### III.2.5.2.2 - Modelización de holguras pluridimensionales

En sistemas mecánicos bidimensionales, aparecen frecuentemente pares cinemáticos cilíndricos de tipo bulón, ya que, en definitiva, constituyen las articulaciones de este tipo de mecanismos (Fig. III-55).

Sobre este tipo de pares cinemáticos se plantea una posible forma de realizar la modelización de holguras pluridimensionales.

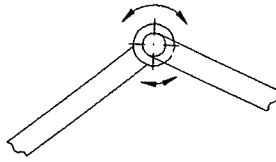


Fig. III-55: Unión de tipo bulón.

Otros tipos de holguras, como las que se pueden dar en pares prismáticos, de deslizamiento, etc., así como en los casos tridimensionales, pueden presentar una mayor complejidad geométrica, pero los principios de modelización podrían ser similares a los del caso bidimensional que se presenta.

En la Figura III-56 se representa una articulación bidimensional con el tipo de holgura con el que se va a efectuar el desarrollo de la modelización.

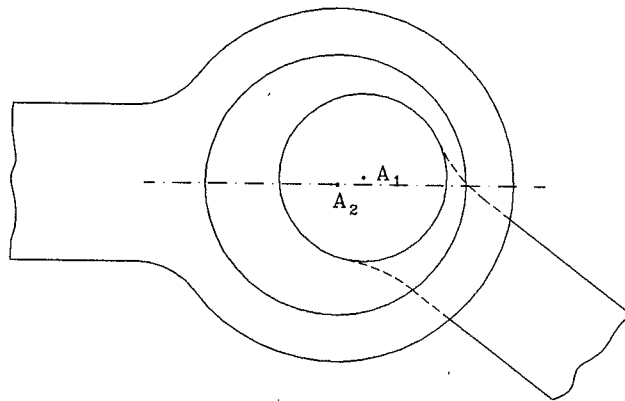


Fig. III-56: Holgura en una unión de tipo bulón.

Se considera que los movimientos relativos entre los dos sólidos, debidos a la holgura considerada, se encuentran en el plano perpendicular al eje del bulón.

Se considera también que, a pesar de la holgura, no hay más rotaciones relativas entre los dos sólidos que las propias del movimiento del bulón y que, las superficies de contacto, cada una perteneciente a un sólido, siguen siendo cilíndricas. Los puntos de intersección de los ejes de

dichos cilindros con el plano del movimiento son los puntos  $A_1$  y  $A_2$ .

La longitud característica de la holgura viene dada, en este caso, por la diferencia entre los diámetros de las superficies cilíndricas de contacto (Fig. III-57).

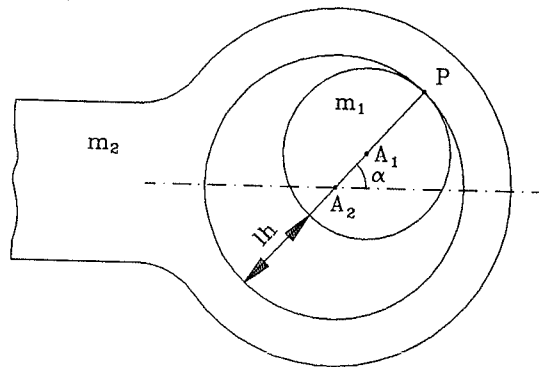


Fig. III-57: Definición geométrica del sistema con holgura bidimensional.

Se supone que las fuerzas de contacto entre los dos sólidos, actuantes en el punto  $P$ , son exclusivamente normales, no existiendo nunca fuerzas tangenciales en dicho punto.

Definido el problema, se desarrolla a continuación la modelización.

Evidentemente, no puede aplicarse el método de las dos Compliances expuesto en los párrafos anteriores dedicados a la modelización de holguras unidimensionales, ya que en este caso, los posibles puntos de contacto no son dos, sino que son infinitos.

La solución para modelizar este caso se basa en el empleo de una sola Compliance y un Transformer de modo que los esfuerzos de la Compliance se apliquen correctamente, es decir, en el punto de contacto  $P$  y dirigidos en sentido radial.

Llamando  $VA_1$  y  $VA_2$  a las velocidades de los centros de las dos superficies cilíndricas, el bond graph que se propone es el de la Figura III-58.

Hay que señalar que, en la Figura III-58, sólo se representa la parte del bond graph de la unión de los dos sólidos correspondiente a los desplazamientos contenidos en el plano perpendicular al eje del bulón.

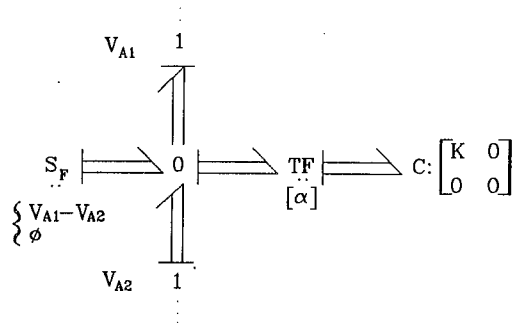


Fig. III-58: Bond graph de la holgura bidimensional.

El cambio de coordenadas TF:[ $\alpha$ ] pasa de la base en que están definidas las velocidades de los puntos  $A_1$  y  $A_2$  a la base formada por el vector  $\underline{A_2A_1}$  y la perpendicular al mismo:

$$[\alpha] = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Dado que la Compliance sólo actúa en sentido radial, es decir, sobre la dirección del vector  $\underline{A_2A_1}$ , la matriz que la define es:

$$C = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Puede verse en el bond graph propuesto, que las fuerzas se aplican en los puntos  $A_1$  y  $A_2$ , cuando, en realidad, el punto donde se aplican las fuerzas de contacto entre los dos sólidos es el punto P.

Esto, sin embargo, no supone ningún problema, ya que los puntos  $A_1$ ,  $A_2$  y P están alineados en la dirección en que se producen las fuerzas, que, tal como se ha

establecido, es exclusivamente la dirección radial

La variable que controla la condición de existencia de contacto es el módulo del vector  $A_2A_1$ .

Cuando hay contacto, por haber alcanzado el módulo del vector  $A_2A_1$  un valor igual a la mitad de la longitud característica de la holgura (ver Fig. III-57), se da a la rigidez  $k$  de la Compliance su valor característico no nulo.

Cuando desaparece el contacto, la rigidez  $k$  se hace nula.

Como puede verse, es el vector  $A_2A_1$  el que establece el comportamiento del sistema. En efecto, su módulo establece la existencia o no de contacto y su dirección y sentido establecen la dirección del esfuerzo a través del Transformer TF:[ $\alpha$ ].

La fuente de flujo se incluye para evitar el problema descrito en el apartado III.2.4.1. Se trata de evitar que los desplazamientos que se producen cuando no hay contacto se acumulen y puedan producir esfuerzos no correspondientes con la realidad al recuperar la Compliance una rigidez no nula en el momento de restablecerse el contacto.

La definición de esta fuente de flujo es la descrita en el apartado III.2.4.3, es decir, su valor es nulo cuando hay contacto e igual a la velocidad relativa cuando no lo hay.

Hay que indicar por último, que el planteamiento empleado en este caso bidimensional, basado en el empleo de un Transformer y una sola Compliance, puede también aplicarse al caso unidimensional modelizado anteriormente con una pareja de Compliances.

En tal caso, el ángulo  $\alpha$  sólo tomaría los valores 0 y 180° y el Transformer, que sería unidimensional, tomaría los valores escalares +1 y -1 según el lado en que se produjera el contacto.

Puede comprobarse fácilmente que tanto los esfuerzos como los flujos que afectan a las dos Inercias son los mismos con ambas modelizaciones.

### III.2.5.3 - Ejemplos de aplicación

Se exponen a continuación dos ejemplos de modelización de holguras: una unidimensional y otra bidimensional.

#### III.2.5.3.1 - Ejemplo de modelización de una holgura unidimensional

El sistema que se modeliza es el mismo que se representa en la Figura III-49.

En este ejemplo, se considera que la masa exterior  $m_2$  está fija y que la masa interior  $m_1$  es la que se desplaza.

Esta masa parte en el instante inicial de la posición central, alejada por igual de los dos extremos, y con una velocidad  $v = 0.1$  m/s.

El bond graph empleado para modelizar el sistema es el de la Figura III-52, con la única diferencia de que se añade una fuente de flujo nula  $Sf:0$  actuante sobre la unión 1 de la parte inferior dado que se considera que la masa exterior  $m_2$  está fija.

Evidentemente, en la práctica es innecesario añadir esta fuente de flujo nula, anulándose también la puerta inercia  $I:m_2$  y los dos grafos que concurren a ella.

En la Figura III-59 aparece el resultado, obtenido tras la simulación, de la velocidad de la masa interior.

A la vista del resultado, se comprueba que, como era de esperar, la velocidad parte del valor  $v = 0.1$  m/s, cambia de sentido al llegar a un extremo y permanece con velocidad constante mientras no alcanza el extremo opuesto,

Este proceso se repite indefinidamente ya que no se ha considerado la existencia de pérdidas ni ninguna acción exterior.

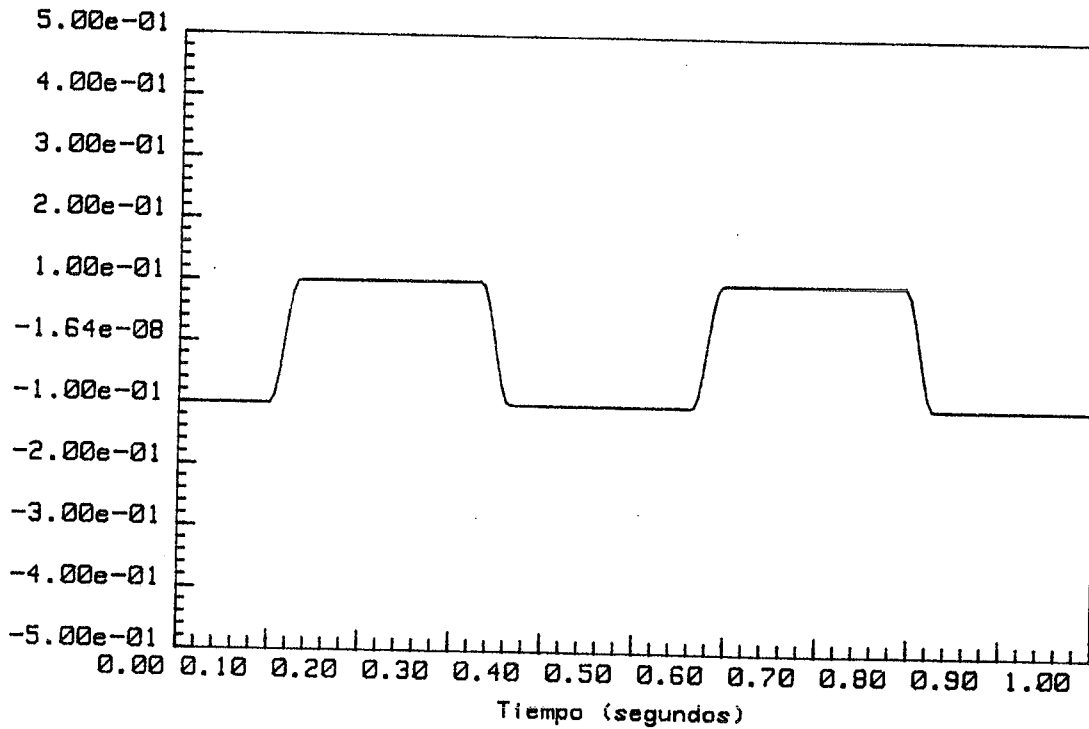


Fig. III-59: Velocidad de la masa interior en la holgura unidimensional.

### III.2.5.3.2 - Ejemplo de modelización de una holgura bidimensional

En este ejemplo se modeliza y simula el comportamiento de un par cinemático cilíndrico, de tipo bulón, con las simplificaciones descritas en el párrafo III.2.5.2.2 (movimientos en el plano, superficies cilíndricas y fuerzas normales).

Se considera, en este ejemplo, que la masa exterior permanece fija, mientras que la masa interior puede moverse libremente dentro de los límites que permite la propia holgura. Asimismo, se considera que la masa interior es sólo el cilindro que se representa (ver Fig. III-60), sin formar parte de ningún otro sólido mayor.

Se establece un sistema de ejes coordenados fijos XY, con el eje X en dirección horizontal, el eje Y en dirección vertical y el origen de coordenadas en el eje de la superficie cilíndrica exterior.

En dirección vertical y sentido descendente (eje -Y) se considera que actúa la fuerza de la gravedad sobre la

masa cilíndrica interior.

En la Figura III-60 se representa el sistema que se modeliza y la Figura III-61 el bond graph del mismo.

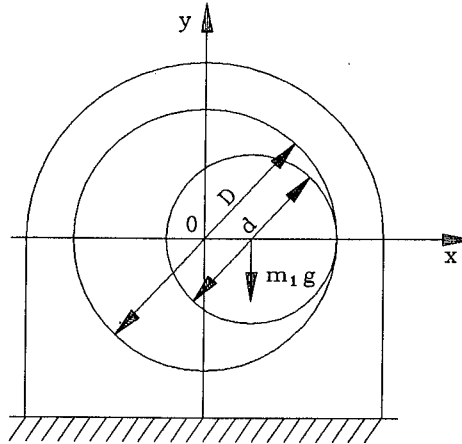


Fig. III-60: Ejemplo de holgura bidimensional.

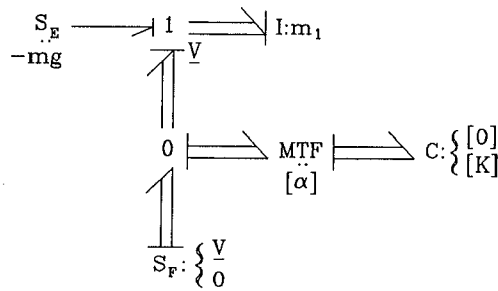


Fig. III-61: Bond graph del sistema de la Fig. III-60.

Partiendo de diferentes situaciones de partida de la masa cilíndrica interior, se comprobará cual es la trayectoria que sigue el centro de dicha masa en el plano XY.

En primer lugar se efectúa una simulación partiendo de una situación en que la cota Y del centro de la masa interior es nula y la cota X de dicho punto es  $\frac{1}{2}(D - d)$ , de modo que la masa interior está en contacto con la masa exterior. Esta situación es la representada en la misma Figura III-60.

La velocidad inicial es nula, siendo la fuerza de la



gravedad, en dirección  $-Y$ , la que origina el movimiento.

En la Figura III-62 se representa la trayectoria seguida por el centro geométrico de la masa interior sobre el plano  $XY$ .

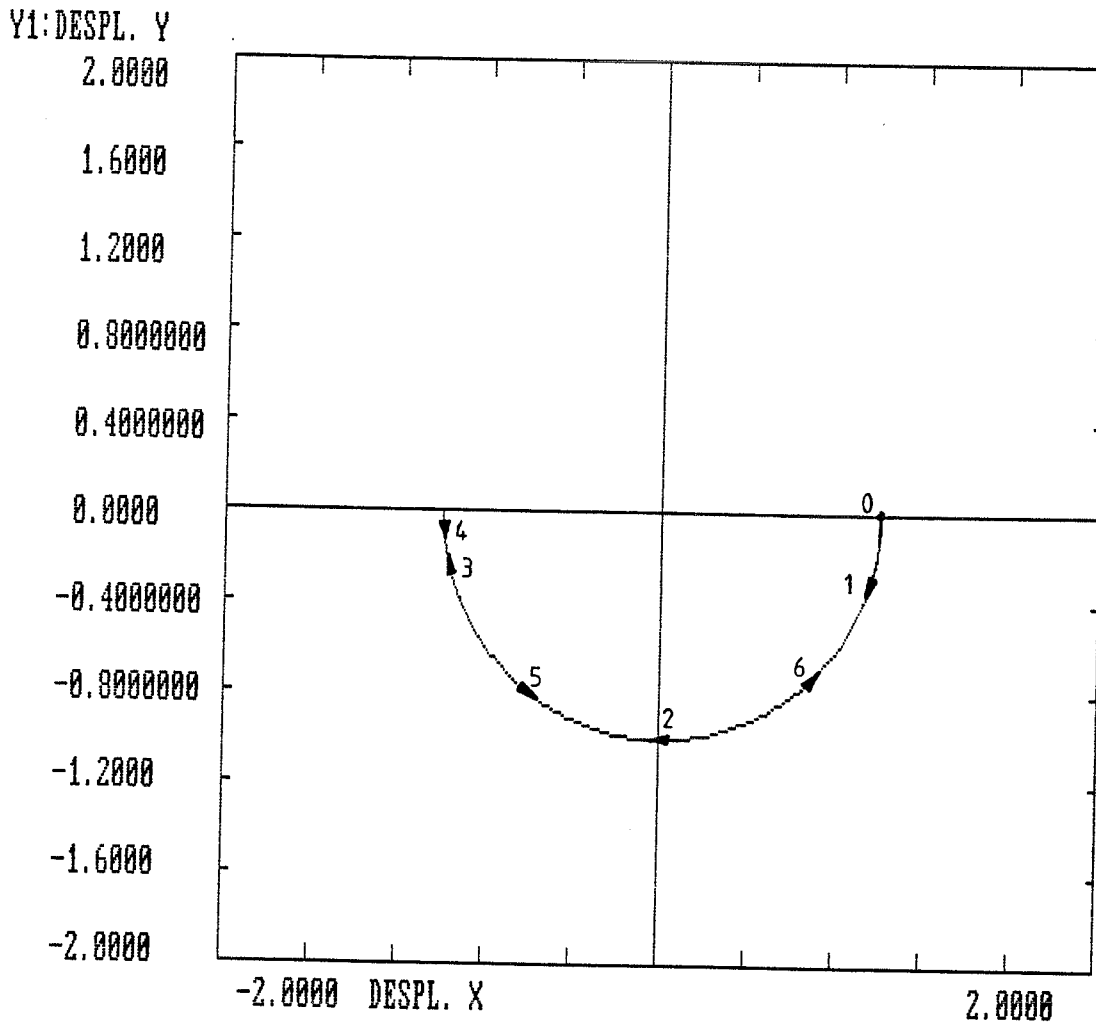


Fig. III-62: Trayectoria en el plano XY con contacto permanente.

Se indican sobre la curva sucesivamente unos cuantos puntos de paso, con indicación del sentido de la velocidad.

Como puede verse, y tal como era de esperar, el centro de la masa interior sigue una trayectoria semicircular de radio igual a la cota  $X$  inicial, trayectoria que se repite alternativamente de manera similar a como lo haría un péndulo.

En segundo lugar, se parte de una situación en que no hay contacto inicial entre las dos superficies.

En la Figura III-63 se representa la trayectoria que sigue el centro de la masa interior sobre el plano XY en esta segunda simulación.

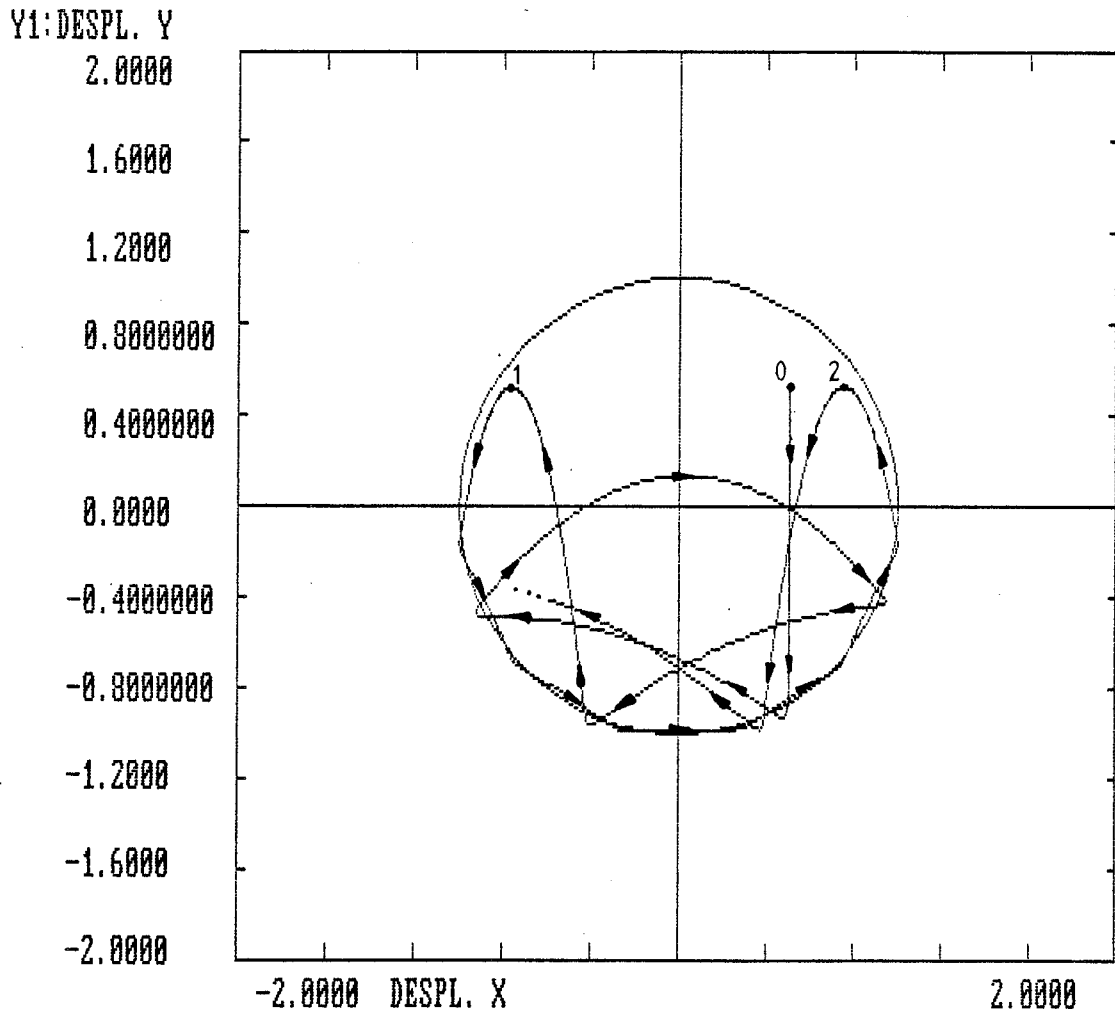


Fig. III-63: Trayectoria en el plano XY sin contacto permanente.

La circunferencia exterior se ha dibujado para representar el límite teórico de dicha trayectoria, por lo que el radio de esta circunferencia es igual a  $\frac{1}{2}(D - d)$ .

El punto 0 es el origen de la trayectoria del centro de la masa interior. Como puede verse, en ese instante inicial no hay contacto entre las dos superficies ya que el punto 0 no está sobre la circunferencia límite.

A la vista de esta figura, puede comprobarse como la trayectoria que se ha obtenido al efectuar la simulación es la que era de esperar considerando las características del

sistema modelizado.

El movimiento se inicia en el punto O con una trayectoria rectilínea descendente, fruto de la acción gravitatoria.

Posteriormente se van produciendo sucesivos rebotes en la pared cilíndrica exterior, los cuales cumplen la condición de igualdad de los ángulos de entrada y salida.

Los tramos en que no hay contacto son fragmentos de parábola, lo que es coherente con la existencia de la fuerza gravitatoria.

Puede verse también como, en los instantes del rebote, la trayectoria sobrepasa los límites teóricos, debido a que se ha considerado una elasticidad en el contacto entre las dos masas relativamente alta (1000 N/m).

Desde el punto de vista energético, puede comprobarse como la altura máxima alcanzada tras cada rebote no sobrepasa nunca la altura inicial.

Hay aproximación a dicha altura en los puntos 1 y 2, puntos en los cuales la energía cinética se hace mínima ya que en ellos es nula la velocidad vertical y mínima la velocidad horizontal. Dado que no hay pérdida de energía, por no haber ningún elemento de disipación, en dichos instantes de mínima energía cinética la altura alcanzada se aproxima a la altura del punto de partida.

### III.2.6 - Conclusiones sobre la modelización de las discontinuidades en los enlaces entre sólidos

En el apartado de discontinuidades entre sólidos y holguras, se han analizado las situaciones de pérdida y recuperación del contacto entre dos cuerpos rígidos

El estudio del problema pluridimensional ha llevado a descubrir determinados problemas (tensión residual y no coincidencia en el espacio de los puntos de pérdida y recuperación del contacto) y a establecer una condición general para la variación de los parámetros de las Com-  
pliances de enlace.

De este modo han podido efectuarse las modelizaciones de los casos uni y pluridimensional y se ha planteado y resuelto la modelización de determinadas holguras en enlaces tanto uni como bidimensionales.

Estos modelos tienen, evidentemente, algunas limitaciones, como su inevitable carácter stiff o las hipótesis supuestas en las holguras bidimensionales. Sin embargo, son modelos válidos para los casos presentados y ejemplo de aplicación de las soluciones propuestas.



## Capítulo IV

### MODELIZACION DE RUEDAS

#### IV.0 - INTRODUCCION

En este Capítulo, se desarrolla la modelización en bond graph de las ruedas del vehículo.

En la actualidad todos los vehículos que circulan por carretera, y la mayor parte de los vehículos extraviarios, van equipados con ruedas de tipo neumático.

Una rueda neumática se compone de dos partes: la rueda propiamente dicha (llanta, buje, etc.) y el neumático o cubierta. Podría decirse que son, respectivamente, las partes de metal y de goma de la rueda.

Se han realizado muchos estudios sobre el comportamiento de la parte correspondiente al neumático (ref. [20],[22],[25],[26],[27],[38],[39],[40],[42],[43],[44]), la mayoría de los cuales analizan en detalle la interfase rueda-calzada.

Sin embargo, no suele incluirse en dichos estudios la dinámica global de la rueda, o, cuando se hace, es de manera bastante simplificada.

Con la técnica de bond graph, Pacejka ([30],[31]) realiza modelos que ya contemplan la dinámica de traslación y de rotación en el plano de la rueda y señala la posibilidad de realizar modelizaciones tridimensionales, realizando alguna de ellas en las que el modelo de rueda es sencillo [32].

Con la misma técnica, Bos ([33],[6]) y Félez [34] realizan modelos dinámicos tridimensionales de rueda, los cuales, sin embargo, no contemplan muchos aspectos del comportamiento del conjunto de la rueda que son realmente importantes.

Entre los aspectos no considerados en estos modelos destacan:

- la deriva
- el deslizamiento
- la posibilidad de superar el límite de adherencia
- la posibilidad de perder el contacto con la calzada
- los posibles desequilibrios de la rueda
- la variabilidad del radio del neumático
- el par de autoalineación
- la resistencia a la rodadura
- el ensamblaje, en detalle, con el resto del vehículo

En este Capítulo se propone un sistema de modelización de ruedas que permite fácilmente considerar simultáneamente todos estos aspectos, sin olvidar, como un aspecto fundamental, la propia dinámica de la rueda como un cuerpo que se mueve en el espacio tridimensional.

El interés de considerar junto al comportamiento del neumático la dinámica global de la rueda, es evidente sin más que considerar los efectos de:

- la influencia del par de autoalineación y los efectos giroscópicos en la dirección
- las maniobras bruscas de dirección, frenada, etc.
- las irregularidades de la calzada
- oscilaciones en el par de frenada producidas por sistemas antibloqueo
- los desequilibrios de la rueda
- etc.

Una vez desarrollado el modelo tridimensional de rueda que contemple todas estas cuestiones, se desarrollarán, a partir de él, los tres posibles modelos bidimensionales de rueda (XY, XZ e YZ), los cuales, aunque más limitados, son útiles en determinados estudios y tienen la ventaja de la sencillez.

También se indica la manera de incorporar, en el modelo tridimensional, modelizaciones más sofisticadas del comportamiento del neumático.

## IV.1 - MODELO TRIDIMENSIONAL DE RUEDA

### IV.1.1 - Planteamiento del modelo

El modelo se plantea considerando a la rueda como un sólido que:

- 1- Interacciona con el suelo a través del neumático.
- 2- Interacciona con el resto del vehículo a través de varios mecanismos.
- 3- Tiene su propia dinámica en el espacio tridimensional.

Por lo que se refiere a la interacción de la rueda con el suelo, en el modelo se consideran fenómenos complejos del comportamiento interno del neumático (deriva, deslizamiento, par de autoalineación, etc.) y del comportamiento de la interfase rueda-calzada (adherencia, pérdida de contacto con la calzada, etc.).

Para considerar éstos fenómenos, no se analiza su génesis microscópica sino sólo los resultados macroscópicos suficientemente contrastados.

Estos efectos macroscópicos se incluyen en los modelos mediante determinadas puertas (fuentes de esfuerzo, compliances, resistencias, etc.), que se detallan posteriormente.

Dichas puertas se modularán en muchos casos, con el fin de contemplar la posible variación, durante la simulación, de determinadas características del neumático.

En el modelo también se considera la deformabilidad (elasticidad y amortiguamiento) del neumático según las tres direcciones del espacio.

Por lo que se refiere a la interacción de la rueda con el resto del vehículo, se consideran dos tipos de enlaces.

Por una parte, la rueda se une, a través de un par cilíndrico de rotación, a la mangueta, la cual, a su vez, forma parte integrante de los mecanismos tridimensionales de suspensión y dirección, tal como se detalla en capítulos posteriores.



Por otra parte, los pares de tracción y frenada actúan directamente sobre la rueda haciendo reacción sobre el chasis o sobre la mangueta según los casos.

En lo referente a la dinámica de la rueda, se considera a ésta como un cuerpo rígido que se mueve, con movimientos de traslación y rotación, en el espacio tridimensional.

Para ello se aplicará el modelo de sólido rígido ya presentado. De este modo, se contempla toda la dinámica de traslación y rotación así como los efectos giroscópicos de la rueda.

Se incluyen también otros efectos dinámicos, como los posibles desequilibrios tanto estáticos como dinámicos de la rueda, actuando para ello en la situación del centro de gravedad de la rueda y en su tensor de inercia.

Se considerará también la acción gravitatoria.

#### IV.1.1.1 - Discusión sobre la hipótesis de rigidez

Contra la hipótesis de considerar a la rueda en su conjunto como un sólido rígido, podría argumentarse que el neumático es deformable y únicamente la parte metálica puede considerarse rígida. Sin embargo la deformación del neumático sólo se produce en una zona próxima al área de contacto con el suelo (Fig. IV-1)

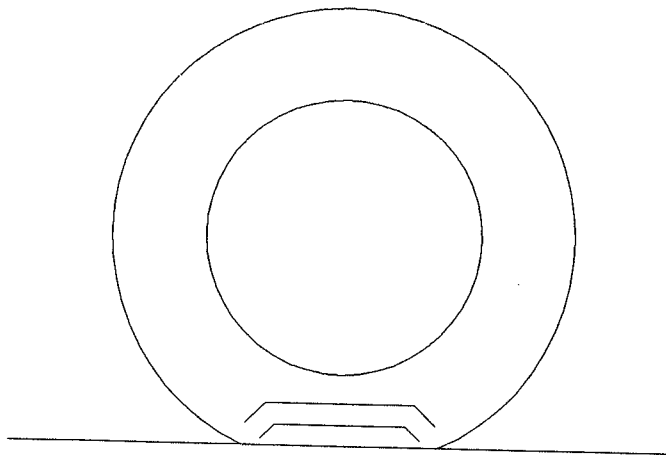


Fig. IV-1: Zona de deformación de la rueda

El resto del neumático sigue los movimientos de la llanta y puede considerarse solidario a ella.

Para estimar aproximadamente la importancia de la variación de los parámetros de la rueda a consecuencia de la deformación del neumático, se tomará como ejemplo una rueda típica de vehículo de turismo.

El peso de esta rueda tipo sería de 14 Kg, desglosados aproximadamente del siguiente modo:

-Peso del neumático: 7 Kg, de los que 5 Kg corresponden a la banda de rodadura y 2 Kg a los flancos.

-Peso del conjunto de llanta, tambor de freno, etc.: 7 Kg.

Las dimensiones características y la distribución de masas serían las representadas en la Fig. IV-2.

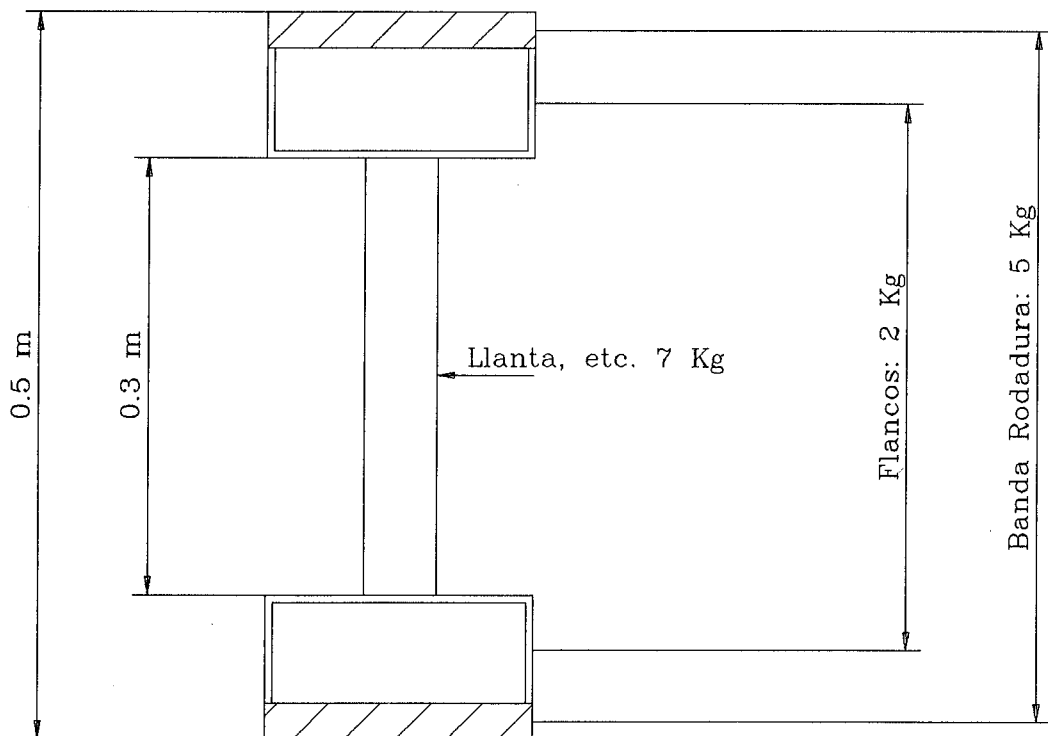


Fig. IV-2: Dimensiones características de la rueda

Se puede considerar a la rueda como un sólido rígido en su conjunto salvo la parte que sufre las mayores deformaciones, ésto es, la zona de contacto con el suelo.

Se supondrá que la porción de banda de rodadura que está en contacto con el suelo y la zona contigua de los flancos forman la parte de rueda que no pertenece al sólido rígido constituido por el resto de la rueda.

Para calcular el tamaño de esa parte se hará una estimación del arco de circunferencia que abarca la longitud de la huella de contacto.

Suponiendo que la carga sobre rueda es de 250 Kg y que la rigidez vertical del neumático es de 200000 N/m, la deflexión vertical será de  $250 \cdot 9.8 / 200000 = 0.012 \text{ m} \approx 0.01 \text{ m}$ .

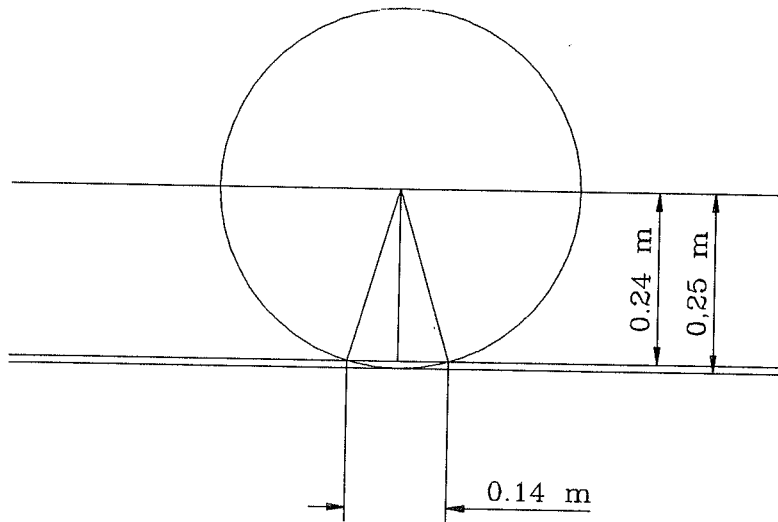


Fig. IV-3: Magnitud de la deformación

El arco correspondiente a la longitud de la huella será aquel cuya flecha sea de 0.01 m. El ángulo será:

$$2 \cdot \arccos(0.24/0.25) = 0.568 \text{ rad } (32.5^\circ)$$

La longitud de la huella de contacto es, por tanto, de

$$0.568 \cdot 0.25 = 0.142 \text{ m} \approx 0.14 \text{ m}$$

El porcentaje de banda de rodadura en contacto con el suelo es:

$$0.568 / (2 \cdot \pi) \cdot 100 = 9.04 \% \approx 9 \%$$

permaneciendo el 91% restante solidario a la rueda.

En cuanto a los flancos se considerará que, dentro del arco de 0.568 rad supuesto, se reparten al 50% entre la banda de rodadura y la llanta. Es decir, que a la parte de banda de rodadura en contacto con el suelo hay que añadir un  $9/2 = 4.5\%$  del total de la masa de los flancos, permaneciendo el 95.5% restante solidario a la llanta.

La masa que puede considerarse por tanto como sólido rígido es:

$$5 \cdot 0.91 + 2 \cdot 0.955 + 7 = 13.460 \text{ Kg}$$

dentro de los 14 Kg de masa total de la rueda. Esto significa que solamente un 3.86% no sigue exactamente los movimientos del sólido rueda.

Los valores de los momentos de inercia de la rueda no deformada, obtenidos a partir de las masas y dimensiones recogidas en la Fig. IV-2, son:

Momento de inercia axial  $I_y$ :

$$\text{Llanta: } \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 0.15^2 = 0.079$$

$$\text{Flancos: } \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0.15^2 + 0.25^2) = 0.085$$

$$\text{Banda rodadura: } 5 \cdot 0.25^2 = 0.312$$

$$\text{Total: } I_y = 0.476 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Momentos de inercia diametrales  $I_x$  e  $I_z$ :

$$\text{Llanta: } \frac{1}{4} \cdot 7 \cdot 0.15^2 = 0.039$$

$$\text{Flancos: } \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (0.15^2 + 0.25^2) = 0.042$$

$$\text{Banda rodadura: } \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0.25^2 = 0.156$$

$$\text{Total: } I_x = I_z = 0.237 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Los momentos de inercia de la parte de rueda que no se deforma, se obtendrán restando del total los momentos

correspondientes a las masas de banda de rodadura y flancos que forman la parte de masa no solidaria a la rueda.

Momento de inercia axial  $I_{ys}$ :

$$\text{Llanta: } \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 0.15^2 = 0.079$$

$$\text{Flancos: } \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0.15^2 + 0.25^2) - 0.045 \cdot 2 \cdot 0.25^2 = 0.079$$

$$\text{Banda rodadura: } 0.91 \cdot 5 \cdot 0.25^2 = 0.284$$

$$\text{Total: } I_{ys} = 0.442 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Momento de inercia diametral horizontal  $I_{xs}$ :

$$\text{Llanta: } \frac{1}{4} \cdot 7 \cdot 0.15^2 = 0.039$$

$$\text{Flancos: } \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (0.15^2 + 0.25^2) - 0.045 \cdot 2 \cdot 0.25^2 = 0.036$$

$$\text{Banda rodadura: } \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0.25^2 - 0.09 \cdot 5 \cdot 0.25^2 = 0.128$$

$$\text{Total: } I_{xs} = 0.203 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Momento de inercia diametral vertical  $I_{zs}$ :

$$\text{Llanta: } \frac{1}{4} \cdot 7 \cdot 0.15^2 = 0.039$$

$$\text{Flancos: } \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (0.15^2 + 0.25^2) - (1/12) \cdot 0.045 \cdot 2 \cdot 0.14^2 = 0.042$$

$$\text{Banda rodadura: } \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0.25^2 - (1/12) \cdot 0.09 \cdot 5 \cdot 0.14^2 = 0.155$$

$$\text{Total: } I_{zs} = 0.236 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Los porcentajes de variación de los momentos de inercia son, de acuerdo con los anteriores resultados, los siguientes:

$$\frac{[(I_y - I_{ys}) / I_y] \cdot 100}{7.14 \%}$$

$$\frac{[(I_x - I_{xs}) / I_x] \cdot 100}{14.34 \%}$$

$$\frac{[(I_z - I_{zs}) / I_z] \cdot 100}{0.42 \%}$$

La variación más significativa se presenta en el momento de inercia según el eje diametral horizontal (14.34%) seguida de la variación según el eje axial (7.14%), siendo mucho menor la variación según el eje diametral vertical (0.42 %).

Hay que tener en cuenta, no obstante, que se ha supuesto que la parte de rueda en contacto con el suelo se

separa totalmente del resto de la rueda, lo que, evidentemente, en la realidad no ocurre.

Por todo ello, se admitirá la hipótesis de rigidez de la rueda en su conjunto a efectos de su dinámica como sólido rígido. Naturalmente, se seguirá considerando la deformación del neumático como una componente más del movimiento relativo entre la rueda y el suelo, considerándose asimismo la variación del radio de rodadura como efecto de la deformación radial del neumático.

#### IV.1.2 - Desarrollo de las bases del modelo

Antes de iniciar el desarrollo del modelo conviene definir los ejes y ángulos de Cardan que se emplearán.

##### IV.1.2.1 - Definición de ejes de referencia y ángulos de Cardan

Los ejes X e Y de la base fija están contenidos en el plano de la calzada teniendo el eje Z de dicha base dirección vertical y sentido hacia arriba.

Se define también una base solidaria a la rueda cuyo eje  $y_r$  coincide con el de rotación de la rueda en torno al eje de la mangueta, estando los ejes  $x_r$  y  $z_r$  contenidos en el plano de la rueda y formando el conjunto un triedro trirectángulo dextrógiro. El origen de este sistema de referencia coincide con el centro de gravedad de la rueda.

Se emplearán también otras dos bases auxiliares  $x'y'z'$  y  $x''y''z''$  cuya definición se deduce de la del sistema de ángulos de Cardan.

El sistema de ángulos de Cardan que se utilizará es el siguiente:

$\tau$  = rotación sobre el eje Z de la referencia fija (eje vertical).

$\phi$  = rotación sobre el eje  $x'$  ya afectado por  $\tau$ .  
Corresponde al ángulo de caída de la rueda.

$\theta$  = rotación sobre el eje  $y''$  ya afectado por  $\tau$  y  $\phi$ .  
 Corresponde al ángulo girado por la rueda sobre su propio eje.

Como ya es sabido, en los ángulos de Cardan, existe una situación singular, que se presenta cuando el segundo ángulo es igual a  $\pi/2$ . Con el sistema de ángulos de Cardan elegido para la rueda, ésto no supone ningún problema, ya que el segundo ángulo es el de caída, el cual, normalmente, nunca llegará al valor de  $\pi/2$ .

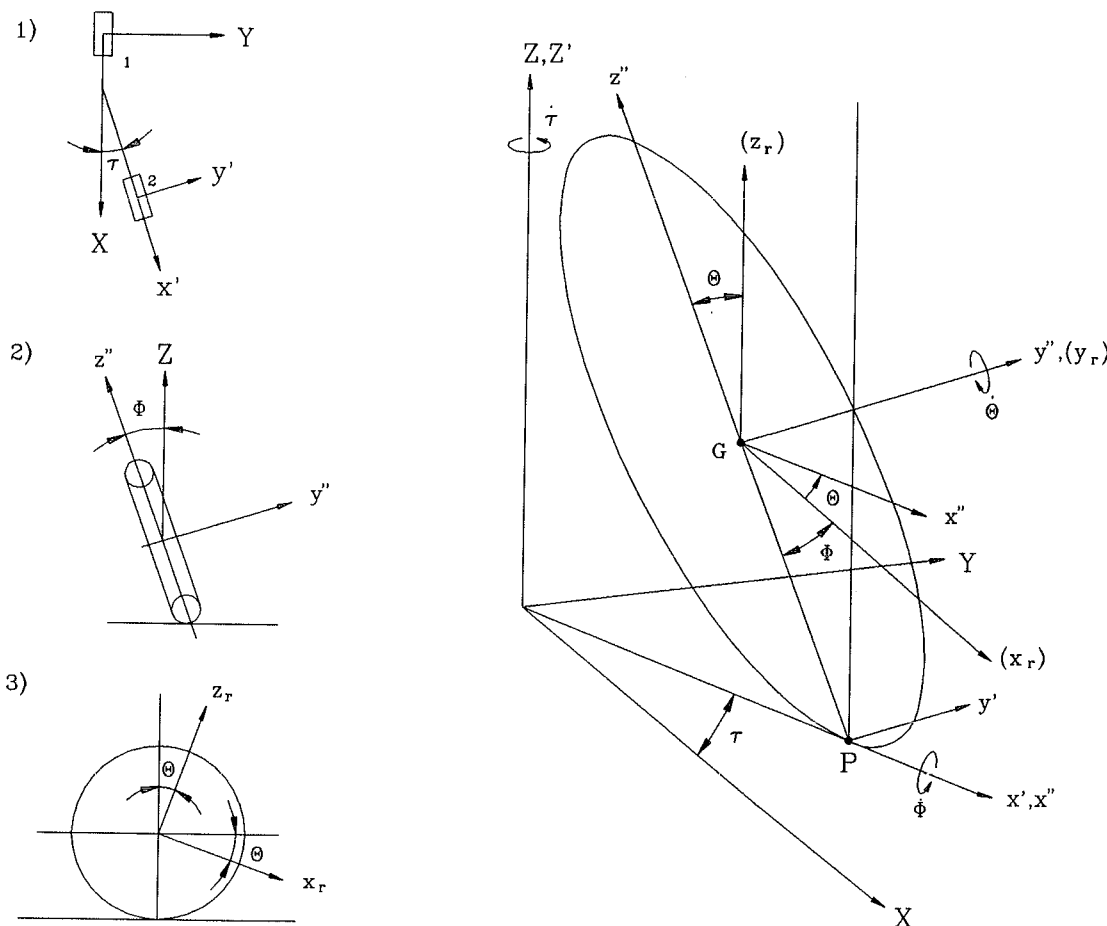


Fig. IV-4: Ejes de referencia y ángulos de Cardan de la rueda

Una vez definidos los ejes de referencia y los ángulos de Cardan, se inicia el desarrollo propiamente dicho del modelo.

#### IV.1.2.2 - Desarrollo del bond graph inicial del modelo

De acuerdo con el planteamiento expuesto en el apartado anterior, la rueda será tratada como un sólido que interacciona con el chasis y con la calzada.

Se realizará en primer lugar la modelización de una rueda aislada del chasis.

De acuerdo con las hipótesis de partida, su bond graph será el de un sólido con un punto P de contacto con el exterior, la calzada.

Esta unión con la calzada tiene la particularidad de ser de posición variable respecto al sistema de referencia solidario a la rueda.

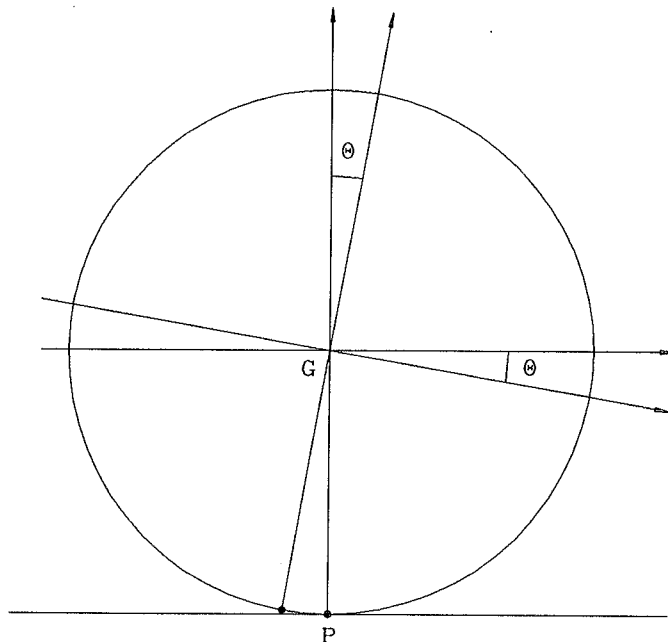


Fig. IV-5: Posición del punto de contacto con la calzada

En efecto, a medida que la rueda gira, varía el ángulo  $\theta$  y, por tanto, también varían las coordenadas del punto P de contacto con el suelo en la referencia solidaria a la rueda.



La deformación radial del neumático también afectará a la posición de P en la rueda, variando su distancia al centro de la misma.

Por otra parte, el punto P también podrá deslizarse sobre la superficie de la calzada.

No obstante, con el fin de que la simplicidad en los desarrollos iniciales sea mayor, la deriva y el deslizamiento longitudinal sobre la superficie de la calzada se introducirán posteriormente.

De acuerdo con lo anterior, la velocidad absoluta del punto P de contacto con la calzada puede considerarse nula.

Se cumple entonces que

$$\underline{V_P} = \underline{V_G} + \underline{\Omega} \times \underline{GP} + \underline{V_{P,G}} = \underline{0}$$

donde

$\underline{V_P}$  = velocidad absoluta del punto P de contacto con la calzada

$\underline{V_G}$  = velocidad absoluta del c.d.g. (punto G) de la rueda

$\underline{\Omega}$  = velocidad angular absoluta de la rueda

$\underline{GP}$  = vector que va al punto P desde el punto G

$\underline{V_{P,G}}$  = velocidad relativa de P respecto a G.

De la anterior expresión se deduce que

$$\underline{V_G} = - \underline{\Omega} \times \underline{GP} - \underline{V_{P,G}} = \underline{\Omega} \times \underline{PG} - \underline{V_{P,G}}$$

De acuerdo con esto, y partiendo del bond graph de un sólido rígido, el bond graph inicial de la rueda, será el representado en la Fig. IV-6.

Puede verse en dicha figura como la velocidad del

centro de gravedad (unión 1 inferior) es igual a la velocidad angular  $\Omega$  (unión 1 superior) multiplicada por el vector  $\underline{PG}$  (Transformer:PG), menos (unión 0) el flujo de deformación del neumático (puertas C y R). Este flujo de deformación equivale a la velocidad relativa del punto P respecto a G.

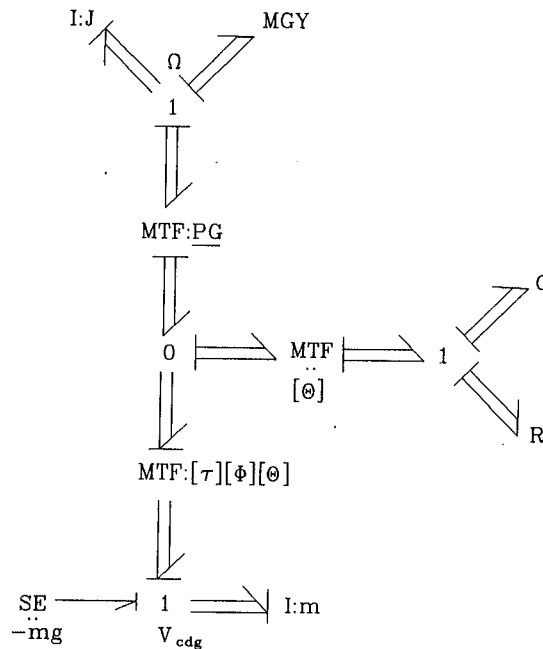


Fig. IV-6: Bond graph inicial de la rueda

La unión de la rueda con el suelo se efectúa a través del neumático, el cual tiene unas determinadas características de elasticidad y amortiguamiento. Dichas características están reflejadas en las puertas C y R tridimensionales que parten de la unión 0.

El esfuerzo existente en esta unión 0 es el de la interfase rueda-calzada.

Las características de elasticidad y amortiguamiento del neumático, representadas por las puertas C y R, están recogidas en los parámetros de dichas puertas, que serán matrices 3x3:

$$C: \begin{vmatrix} K_L & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_R \end{vmatrix} \quad R: \begin{vmatrix} C_L & 0 & 0 \\ 0 & C_T & 0 \\ 0 & 0 & C_R \end{vmatrix}$$

Se ha supuesto, como primera aproximación, que las matrices son diagonales.

La deformación del neumático hay que proyectarla sobre las direcciones en que están definidas las características de elasticidad y amortiguamiento del neumático, es decir, las direcciones longitudinal, transversal y radial, correspondientes a la base  $x''y''z''$ .

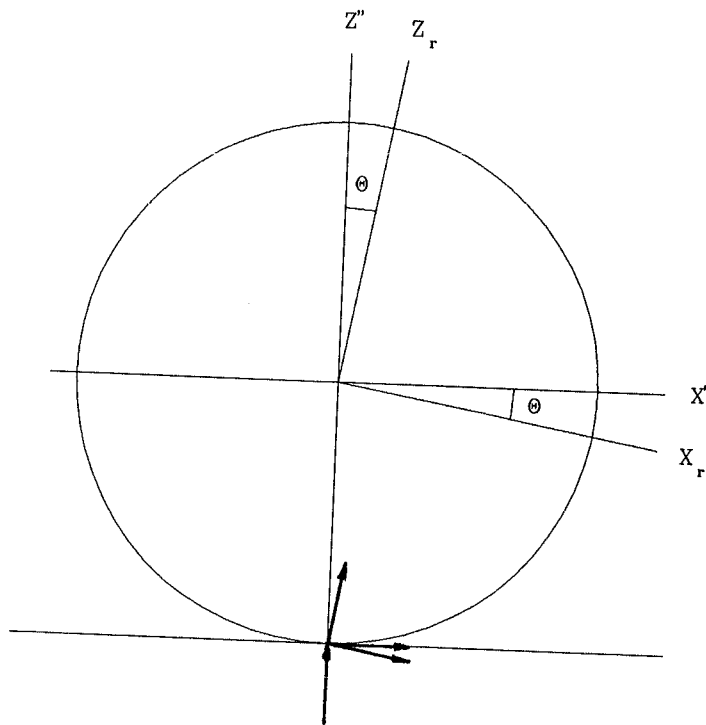


Fig. IV-7: Orientación de esfuerzos y deformaciones

Por ello, es necesario introducir, antes de las puertas C y R, el cambio de base correspondiente al ángulo de Cardan  $\theta$  (transformer MTF:[ $\theta$ ]).

En cuanto al vector PG, para definirlo se supondrá nulo el ancho de la rueda, es decir, se considerará como un disco.

Como radio de este disco se tomará el radio bajo carga (R) de la rueda.

En el bond graph anterior, el vector  $\underline{PG}$  se expresa en la base solidaria a la rueda. En dicha base, la expresión de  $\underline{PG}$  es la siguiente:

$$\underline{PG} = \begin{vmatrix} -R \cdot \text{sen}\theta \\ 0 \\ R \cdot \text{cos}\theta \end{vmatrix}$$

Es posible obtener una notable simplificación en el bond graph introduciendo el cambio de coordenadas  $[\theta]$  inmediatamente después de la unión 1 representativa de  $\Omega$ , es decir, trabajando a partir de ese punto en la base  $x''y''z''$ .

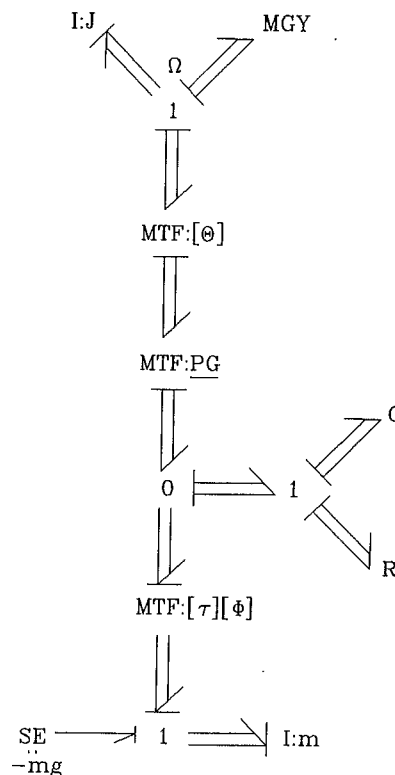


Fig. IV-8: Bond graph del modelo de rueda (aún incompleto)

Con esta variación, la expresión de  $\underline{PG}$  se reduce a:

$$\underline{PG} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{vmatrix}$$

También se hace innecesario, evidentemente, el cambio de coordenadas  $\theta$  que se había introducido antes de las puertas C y R.

Por último, la matriz de cambio de base que pasa de la referencia solidaria a la rueda a la referencia fija (MTF contiguo a la unión 1 de velocidad del c.d.g.) queda reducida al producto de las dos matrices  $[\tau]$  y  $[\phi]$ , correspondientes a los ángulos de Cardan  $\tau$  y  $\phi$ , en lugar de ser el producto de las tres matrices  $[\tau]$ ,  $[\phi]$  y  $[\theta]$ .

Las matrices de cambio de base son las mismas en cualquier caso, ya que sólo dependen del sistema de ángulos de Cardan empleado.

Sus expresiones son:

$$[\theta] = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$[\phi] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{vmatrix}$$

$$[\tau] = \begin{vmatrix} \cos\tau & -\text{sen}\tau & 0 \\ \text{sen}\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Los valores de los ángulos de Cardan  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\tau$  se obtendrán, mediante integración, a partir de la velocidad angular  $\Omega$  del sólido, representada en el bond graph por la unión 1 superior, aplicando las expresiones indicadas en el Capítulo II.

Por último, la fuente de esfuerzo  $S_E: -mg$  aplicada en la unión 1 de velocidad del c.d.g. en la referencia fija, representa la acción de la fuerza gravitatoria.

### IV.1.2.3 - Modelización de desequilibrios

Hay que distinguir dos casos: desequilibrio estático y desequilibrio dinámico.

#### IV.1.2.3.1 - Modelización del desequilibrio estático

Se produce cuando, por ejemplo, hay un incremento de masa sin equilibrar,  $m_E$ , situado a una distancia  $l$  del centro geométrico de la rueda pero contenido en el plano central de la misma (Fig. IV-9).

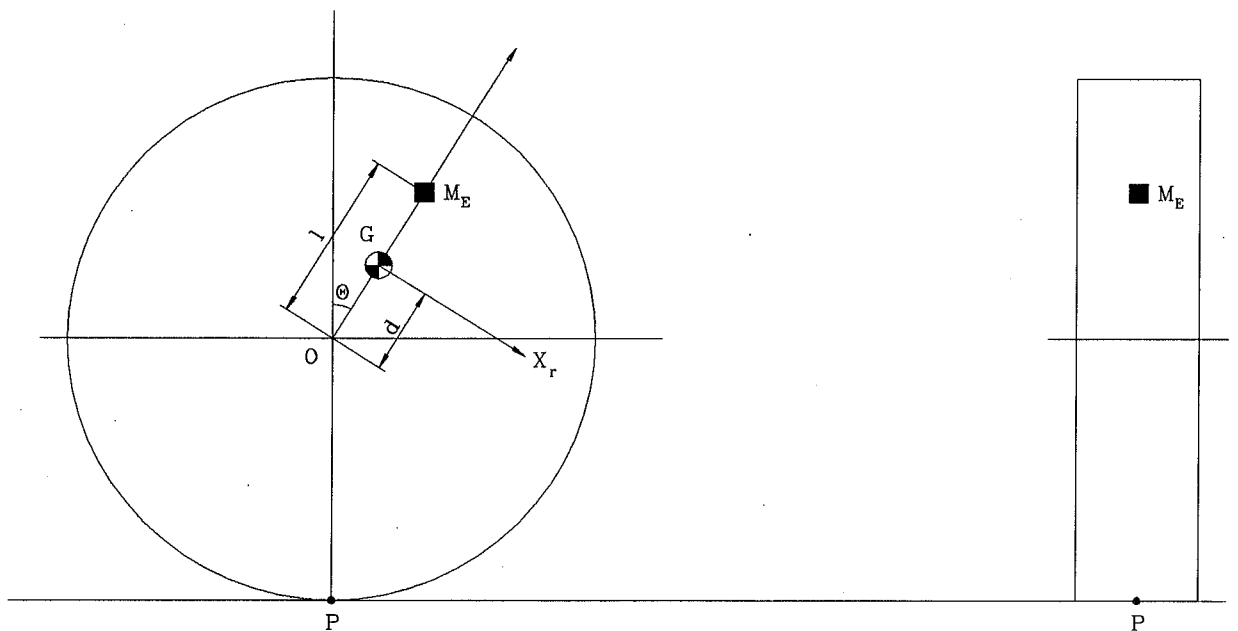


Fig. IV-9: Rueda con desequilibrio estático

El centro de gravedad  $G$  se desplazará respecto al centro geométrico  $O$  una distancia  $d = m_E \cdot l / (m + m_E)$  en sentido radial.

El sistema de referencia solidario a la rueda tendrá ahora su origen en esta nueva posición. Se define el eje  $z_r$  del sistema en la dirección  $\underline{OG}$ .

El vector  $\underline{PG}$  variará respecto al de la rueda equilibrada. Se obtendrá como la suma de los vectores  $\underline{PO}$  y  $\underline{OG}$ . El vector  $\underline{PO}$  coincide con el vector  $\underline{PG}$ , ya conocido, de

la rueda equilibrada:

$$\underline{PO} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{vmatrix}$$

El vector  $\underline{OG}$ , nulo en la rueda equilibrada, es ahora, expresado también en la base  $x''y''z''$ , el siguiente:

$$\underline{OG} = \begin{vmatrix} d \cdot \text{sen}\theta \\ 0 \\ d \cdot \text{cos}\theta \end{vmatrix}$$

Por tanto, la expresión de  $\underline{PG}$  será:

$$\underline{PG} = \underline{PO} + \underline{OG} = \begin{vmatrix} d \cdot \text{sen}\theta \\ 0 \\ R + d \cdot \text{cos}\theta \end{vmatrix}$$

El tensor de inercia  $J$  sufrirá también variaciones en los valores de sus momentos de inercia.

No aparecerán, sin embargo productos de inercia ya que se trata de un sólido con dos planos de simetría ortogonales entre sí: el plano de la propia rueda y el plano perpendicular a la rueda que pasa por  $O$  y  $G$ .

Se cumple en estos casos que para todos los puntos de la intersección de esos planos y, por consiguiente, también para  $G$ , son direcciones principales de inercia la línea de intersección de ambos planos (eje  $z_r$ ) y las perpendiculares a esos mismos planos (ejes  $x_r$  y  $y_r$ ).

El tensor de inercia de la rueda con desequilibrio estático es:

$$J_E = \begin{vmatrix} I_x + m l^2 \cdot m_E / (m + m_E) & 0 & 0 \\ 0 & I_y + m l^2 \cdot m_E / (m + m_E) & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}$$

donde  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  son los momentos de inercia de la rueda equilibrada, antes de aparecer la masa  $m_E$ .

### IV.1.2.3.2 - Modelización del desequilibrio dinámico

Aparece cuando hay incrementos de masa  $m_D$  situados como en la Figura IV-10.

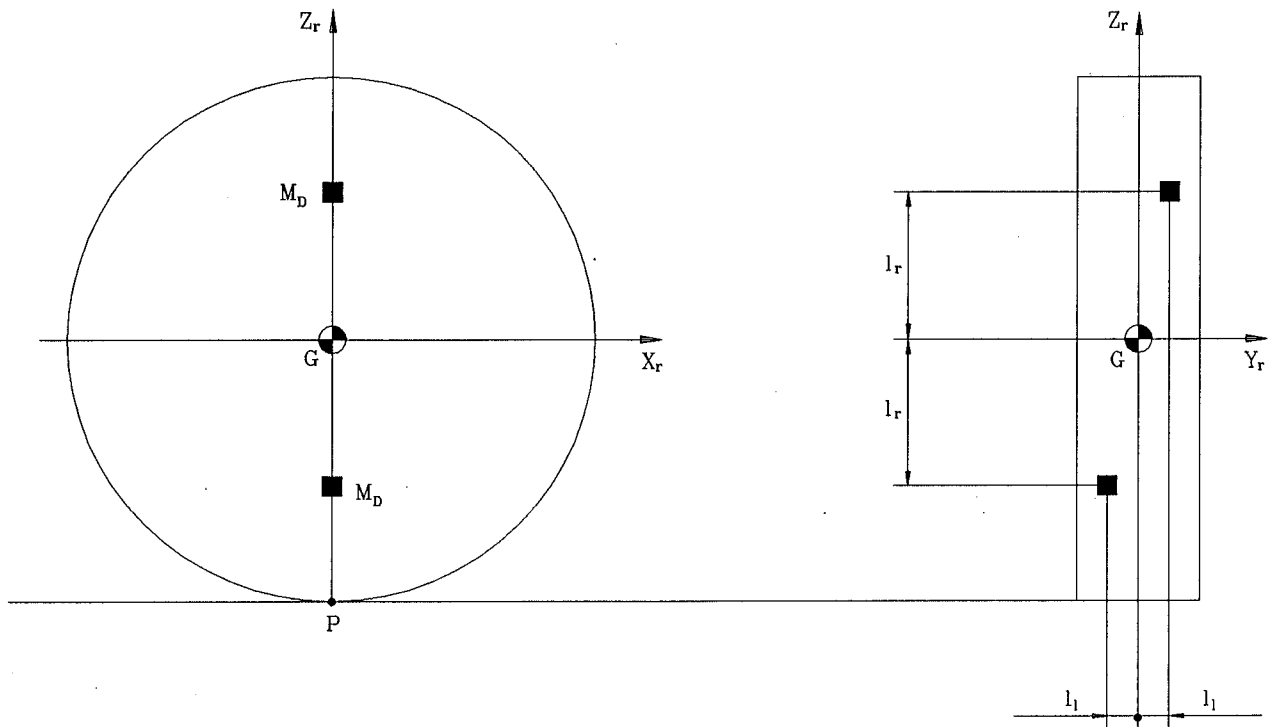


Fig. IV-10: Rueda con desequilibrio dinámico

El centro de gravedad permanece en el centro geométrico  $O$  por lo que el vector  $\underline{PG}$  no varía respecto al de la rueda equilibrada:

$$\underline{PG} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{vmatrix}$$

Sin embargo, al desaparecer la simetría respecto al plano de la rueda, los ejes del sistema de referencia solidario a la misma empleados hasta ahora dejan de ser ejes principales de inercia, con lo cual aparecen productos de inercia no nulos en el tensor.



Para evitarlo, podría realizarse un cambio de base, pasando a emplear la base formada por los ejes principales de inercia.

Pero esa solución tendría el inconveniente de complicar la geometría del problema (definición del vector PG, orientación de los esfuerzos, etc.) ya que, en general, no coincidiría el eje de rotación de la rueda con el eje  $y_r$  de la base ni los ejes  $x_r$  y  $z_r$  pertenecerían al plano de la rueda.

Por ello, se seguirá empleando la base habitual, definida a partir de la geometría de la rueda.

En este caso no habrá problemas geométricos, pero habrá que tener en cuenta que el tensor ya no es diagonal.

Supuesto que el desequilibrio dinámico está originado por dos masas  $m_0$  situadas a una distancia  $l_r$  del eje de la rueda y a una distancia  $l_1$  del plano central de la misma el tensor de inercia será:

$$J_D = \begin{vmatrix} I_x + 2m_0 \cdot (l_r^2 + l_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & I_y + 2m_0 \cdot l_r^2 & -2m_0 \cdot l_r \cdot l_1 \\ 0 & -2m_0 \cdot l_r \cdot l_1 & I_z + 2m_0 \cdot l_1^2 \end{vmatrix}$$

#### IV.1.2.4 - Modelización de la deformación del neumático

Los esfuerzos entre rueda y calzada provocan la deformación del neumático. A la vista del bond graph resulta evidente que dicha deformación constituye una de las componentes de la velocidad del centro de gravedad de la rueda.

Pero esta deformación también afecta a la posición, dentro del sistema de referencia solidario a la rueda, del punto P definido como punto de contacto de la rueda con el suelo (Fig. IV-11).

El modelo considerará, en este sentido, la deformación radial del neumático, variando la distancia entre P y el centro de la rueda y, por consiguiente, el radio de rodadura.

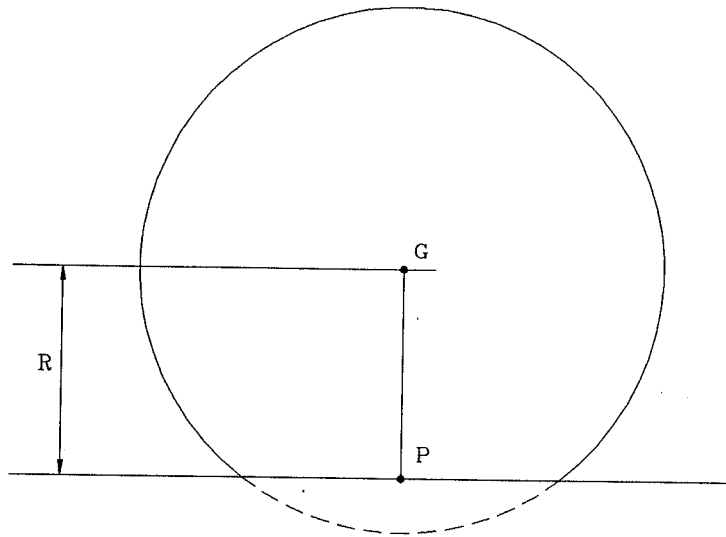


Fig. IV-11: Variación de la posición del punto P

La magnitud del desplazamiento de P vendrá dada por el desplazamiento en las puertas C y R que representan las características del neumático.

Las deformaciones lateral y longitudinal no llevarán aparejada, en el presente modelo, variación en la definición de la posición de P en la rueda. Ello es debido a que el punto P, no sólo es punto de aplicación de fuerzas, sino que también juega el papel de punto de pivotamiento de la rueda sobre el suelo.

En efecto, la componente de la velocidad de G debida a la rodadura es perpendicular a la velocidad angular  $\Omega$  y al vector  $\underline{PG}$  ya que viene dada por el producto vectorial de ambos vectores.

En el caso elemental de rodadura en línea recta ( $\tau=0$ ), sin ángulo de caída ( $\phi=0$ ) y en régimen estacionario, se ve la situación claramente.

Efectivamente, en tal caso la velocidad de desplazamiento de G debida a la rodadura tiene la dirección X, paralela al terreno, y la velocidad angular  $\Omega$  tiene dirección Y, también paralela al terreno. Por tanto,  $\underline{PG}$  ha de estar en la vertical de G, perpendicular al terreno.

Por consiguiente, aunque existan esfuerzos longitudinales, no puede desplazarse P longitudinalmente en la referencia de la rueda ya que dejaría de estar en la vertical de G.

Análogas consideraciones pueden aplicarse en lo referente a la dirección transversal.

Sin embargo, la deformación en dirección radial está asociada a un cambio en la cota de G sobre el nivel del suelo, suponiendo, simplemente, una cierta variación en la magnitud del radio de rodadura. No hay, por tanto, problemas por el hecho de ser P un punto de pivotamiento.

La modelización del desplazamiento de P en sentido radial se realiza a través de la definición del valor del radio de rodadura R en la expresión del vector PG.

Para ello se resta al valor del radio  $R_0$  de la rueda sin carga, el valor de la componente radial  $q_{cr}$  del desplazamiento de la puerta Compliance:

$$R = R_0 - q_{cr}$$

La expresión del vector PG es entonces, en la base  $x''y''z''$ :

$$\underline{PG} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ R_0 - q_{cr} \end{vmatrix}$$

La forma propuesta de considerar la variación del radio, es decir, restar a la magnitud  $R_0$  la deflexión de la Compliance correspondiente, no es la única, ya que también existe la posibilidad de integrar la velocidad del centro de gravedad de la rueda.

Sin embargo, esta última alternativa resultaría algo más complicada en determinados casos. Por ejemplo, cuando hay desequilibrio estático, ya que en tal caso, el centro de gravedad sigue una trayectoria aproximadamente cicloidal, compuesta por su desplazamiento longitudinal y su rotación en torno al centro geométrico de la rueda.

### IV.1.3 - Modelización de la interfase Rueda-Calzada

En este apartado se desarrolla una modelización del comportamiento de la interfase Rueda-Calzada, que será integrada en el bond graph del modelo de rueda desarrollado en el apartado anterior.

La modelización se desarrollará en base a consideraciones de tipo macroscópico.

Las fuerzas y momentos que aparecen en la interfase neumático-calzada tienen su origen en la deformación del neumático y en los fenómenos de fricción y deslizamiento de los elementos de su superficie sobre la calzada.

Cuando las fuerzas son pequeñas, el comportamiento está gobernado principalmente por las propiedades elásticas del neumático, pero a medida que las fuerzas son mayores, crece la influencia relativa de los fenómenos de fricción y deslizamiento (Pacejka, [22]).

De acuerdo con esto, al modelizar las fuerzas y movimientos contenidos en el plano de la calzada, es decir, las relativas a la deriva y el deslizamiento longitudinal, se distinguirán las dos situaciones.

Así, en primer lugar se desarrollará la modelización de la deriva y el deslizamiento longitudinal, para el caso de que los esfuerzos sean pequeños.

A continuación se generalizará al caso de que los esfuerzos puedan llegar a ser grandes y se alcance el límite de adherencia.

Posteriormente, se modelizarán el par de autoalineación y el par de resistencia a la rodadura y se finalizará con la modelización de la pérdida de contacto entre rueda y calzada.

#### IV.1.3.1 - Modelización de la deriva

Cuando aparece un esfuerzo lateral  $F_y$  sobre la rueda, la trayectoria que sigue ésta forma un ángulo  $\alpha$  con la dirección marcada por el plano de la rueda, definiéndose este ángulo como ángulo de deriva.

Mientras no se sobrepasen ciertos límites, se cumple que:

$$F_y = C_D \cdot \alpha$$

En esta expresión,  $C_D$  es el coeficiente de deriva, coeficiente que no tiene por qué ser constante, ya que su valor está afectado por factores como la carga sobre rueda.

El ángulo  $\alpha$  es el formado por la velocidad "u" según el plano de la rueda y la velocidad lateral  $v_y$ , que es la velocidad de deriva.

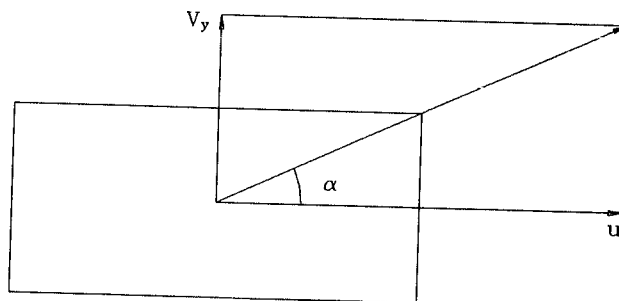


Fig. IV-12: Deriva

Por tanto,

$$F_y = C_D \cdot \alpha = C_D \cdot \arctg(v_y/u)$$

Si el ángulo  $\alpha$  es suficientemente pequeño, puede aceptarse que  $\arctg(v_y/u) = (v_y/u)$ .

En tal caso,

$$F_y = C_D \cdot v_y/u = (C_D/u) \cdot v_y$$

Es conveniente comprobar si es válida la anterior aproximación  $\alpha = \text{tg}(\alpha)$ .

Para verlo, hay que tener en cuenta que la expresión  $F_y = C_D \cdot \alpha$  se aplicará sólo cuando las fuerzas en la interfase no alcancen el límite de adherencia, que puede considerarse igual a  $\mu \cdot P$  donde  $\mu$  es el coeficiente de adherencia y  $P$  es la carga vertical sobre la rueda.

Considerando que no hay más fuerza que la transversal  $F_y$ , con lo que  $F_y = \mu \cdot P$ , y tomando los valores  $\mu = 0.8$ ,  $P = 250$  Kp y  $C_D = 60000$  N/rad, el ángulo  $\alpha$  correspondiente es:

$$\alpha = F_y / C_D = \mu \cdot P / C_D = 0.8 \cdot 250 \cdot 9.8 / (60000) = 0.032 \text{ rad} \approx 1.9^\circ$$

Por tanto, decir que la fórmula  $F_y = C_D \cdot (v_y / u)$  se aplicará sólo cuando  $F_y < \mu \cdot P$  equivale a decir que se aplicará sólo cuando  $\alpha < 1.9^\circ \approx 2^\circ$ .

El error de considerar  $\alpha = \text{tg}(\alpha)$  para  $\alpha = 2^\circ$  es igual al 0.04 %, porcentaje que se considera suficientemente pequeño.

Las definiciones de  $v_y$  y  $u$  son las siguientes:

$v_y$  = componente de la velocidad del punto de contacto con la calzada (P) en la dirección  $y'$ .

$u$  = módulo de la componente de la velocidad del centro de gravedad de la rueda (G) en la dirección  $x'$ .

Para modelizar en bond graph la deriva se tendrá en cuenta la proporcionalidad existente entre el esfuerzo  $F_y$  y la velocidad  $v_y$ , puesta de manifiesto en la expresión  $F_y = (C_D / u) \cdot v_y$ .

Por ello, la deriva aparece en el bond graph como una puerta Resistencia.

Esta Resistencia se aplica sobre la unión 0 en la que se representan los esfuerzos entre neumático y calzada.

El parámetro de la puerta R de deriva es  $C_D / u$ , como se deduce de la expresión anterior de  $F_y$ .

El valor de  $C_D$  es característico de cada neumático y, tal como se ha dicho, puede considerarse fijo o modulado por la carga que gravita sobre la rueda.

El valor de "u" se obtendrá a partir de la velocidad del c.d.g. de la rueda aplicando el cambio de coordenadas  $[\tau]$  para obtener la componente  $x'$  sobre la que está definida.

La velocidad de deriva  $v_y$  se añade así a la velocidad de deformación del neumático, significando una velocidad de deslizamiento lateral del punto P de contacto con la calzada.

Dado que el esfuerzo  $F_y$  y la velocidad de deriva  $v_y$  están contenidos en el plano de la calzada (plano  $x'y'$ ) y los grafos que concurren en la unión 0 están definidos en la base  $x''y''z''$  es necesario introducir antes de la puerta R de deriva el cambio de base  $[\Phi]$  mediante un Transformer MTF:  $[\Phi]$ .

En la Fig. IV-13 se representa la parte central del bond graph del modelo de rueda donde ya aparece la modelización de la deriva.

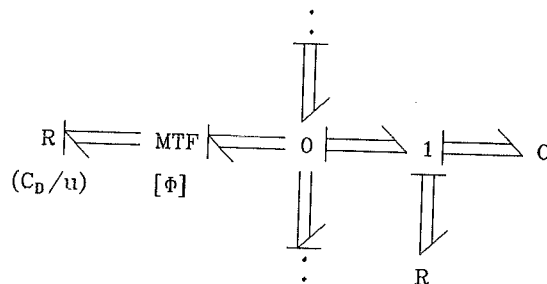


Fig. IV-13: Modelización de la deriva

Sin embargo, con este bond graph aparece un problema.

En efecto, la causalidad de la puerta Resistencia de deriva puede ser, en principio, cualquiera, ya que siempre se puede cambiar la causalidad en la otra puerta Resistencia-

cia sin cambiar la del resto del bond graph.

Esto lleva consigo la aparición de bucles algebraicos, que dificultan la resolución de las ecuaciones del problema, cuando se emplean determinados programas.

En general, cuando la causalidad en dos puertos Resistencia puede ser intercambiada, aparecen bucles algebraicos ([10],[1]).

La dificultad se hace evidente cuando se intenta despejar algunos términos para la resolución de las ecuaciones diferenciales en una estructura como la del presente modelo, formada por una Resistencia en serie con un conjunto de Resistencia y Compliance en paralelo.

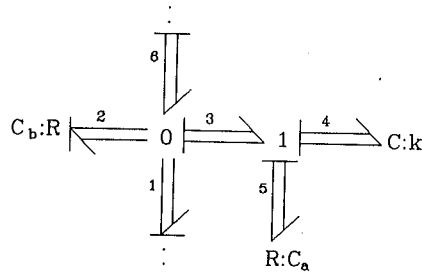


Fig. IV-14: Deriva y bucles algebraicos

En el caso de la Fig. IV-14, la ecuación del flujo en la Compliance, que es una de las que aparecerán para la resolución del problema, tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} dq_4/dt = f_4 = f_3 = f_6 - f_1 - f_2 &= f_6 - f_1 - e_2/C_b = \\ &= f_6 - f_1 - (q_4 \cdot k + dq_4/dt \cdot C_a)/C_b \end{aligned}$$

Como puede verse, el término  $dq_4/dt$  aparece en ambos lados de la ecuación.

Lo anterior no ocurre cuando no existe la resistencia  $R:C_b$  (grafo 2), no apareciendo entonces el término  $dq_4/dt$



en el lado derecho de la ecuación:

$$dq_4/dt = f_4 = f_3 = f_6 - f_1$$

Tampoco hay que despejar el término  $dq_4/dt$  cuando no existe la resistencia  $R:C_a$  (grafo 5):

$$\begin{aligned} dq_4/dt = f_4 = f_3 = f_6 - f_1 - f_2 &= f_6 - f_1 - e_2/C_b = \\ &= f_6 - f_1 - q_4 \cdot k/C_b \end{aligned}$$

Una solución para deshacer los bucles algebraicos, consiste en introducir desfases en la integración, tal como hace el comando Algebraic Delay (ADL) en el programa Tutsim.

No obstante, en adelante se aplicará otra solución que tiene, entre otras ventajas, la de ser más general.

Consiste en la introducción de una puerta Inercia de pequeño valor, o un elemento Inercia Nula, antes de la puerta  $R$  (Fig. IV-15).

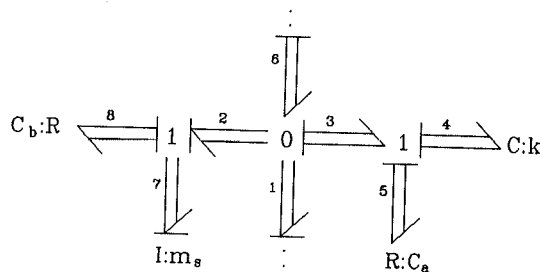


Fig. IV-15: Solución a los bucles algebraicos

Con la introducción de esta puerta, el flujo en el grafo 2 ya no se obtiene dividiendo el esfuerzo en la unión 0 por el valor de la resistencia  $R:C_b$ , sino que se obtiene a partir del momento lineal ( $p_7$ ) de la inercia que se acaba

de añadir (grafo 7):

$$f_2 = f_7 = p_7/m_8$$

El momento lineal  $p_7$  se obtendrá a partir de la ecuación diferencial correspondiente a la nueva inercia:

$$dp_7/dt = e_7 = e_2 - e_8$$

El parámetro de este elemento inercia debe ser pequeño para no alterar significativamente los resultados, aunque la mejor solución es emplear un elemento Inercia Nula (IN).

Utilizando esta última solución, el bond graph de la rueda con deriva queda como en la Fig. IV-16.

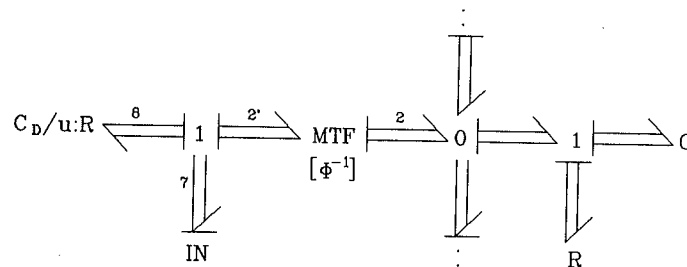


Fig. IV-16: Modelización de la deriva

En él se asigna causa flujo a la puerta R de deriva para tener causalidad integral en la puerta Inercia Nula recién introducida.

Los grafos 2 y 2' se dirigirán hacia la unión 0 con el fin de que las velocidades  $V_p$  y  $V_a$  estén definidas en la misma dirección. El cambio de coordenadas correspondiente al ángulo  $\phi$  ha de ser por tanto  $MTF: [\Phi]^{-1}$ .

No obstante, el sentido de estos grafos es irrelevante, al ser nulo el esfuerzo en la puerta Inercia Nula.

Para comprobarlo, se hallará el flujo que introduce el grafo 2 en la unión 0 supuesto que el esfuerzo en dicha unión es "e".

En el caso de que los grafos 2 y 2' se dirijan hacia la unión 0 se cumple que:

$$f_{2'} = f_8 = e_8 / (C_D / u) = (-e_{2'} - e_7) / (C_D / u) =$$

$$= (-e \cdot [\Phi]^{-1} - e_7) / (C_D / u)$$

El flujo en el grafo 2 será:

$$f_2 = [\Phi]^{-1} \cdot f_{2'} = [\Phi]^{-1} \cdot (-e \cdot [\Phi]^{-1} - e_7) / (C_D / u)$$

siendo este flujo  $f_2$  entrante en la unión 0.

En el caso de que los grafos 2 y 2' se dirijan hacia la unión 1 se cumplirá que:

$$f_{2'} = f_8 = e_8 / (C_D / u) = (e_{2'} - e_7) / (C_D / u) =$$

$$= (e \cdot [\Phi]^{-1} - e_7) / (C_D / u)$$

En este caso, el flujo en el grafo 2 será:

$$f_2 = ([\Phi])^{-1} \cdot f_{2'} = [\Phi]^{-1} \cdot (e \cdot [\Phi]^{-1} - e_7) / (C_D / u)$$

siendo este flujo  $f_2$  saliente de la unión 0.

El flujo entrante en este caso en la unión 0 es entonces:

$$[\Phi]^{-1} \cdot (-e \cdot [\Phi]^{-1} + e_7) / (C_D / u)$$

que coincide con el flujo entrante en el caso anterior sólo si el esfuerzo  $e_7$  es nulo, lo cual es cierto si en el grafo 7 se encuentra una Inercia Nula.

#### IV.1.3.2 - Modelización del deslizamiento longitudinal

Los esfuerzos longitudinales en la superficie de contacto con la calzada producen una deformación del neumático que hace que la velocidad real de desplazamiento de la

rueda no coincida con la que teóricamente debería tener, esto es, la velocidad de rotación multiplicada por el radio bajo carga de la rueda.

Esa diferencia de velocidades constituye el deslizamiento. Normalmente se define en tanto por uno, de la siguiente manera:

$$S = \frac{\text{vel. real} - \text{vel. teórica}}{\text{vel. real}} = \frac{u - \Omega \cdot R}{u} = \frac{v_x}{u}$$

El numerador es la velocidad de deslizamiento  $v_x$ . Como velocidad real se tomará la velocidad  $u$  definida ya en el anterior apartado referente a la deriva.

Siempre que no se sobrepasen ciertos límites, se cumple que:

$$F_x = C_s \cdot S = C_s \cdot (v_x/u)$$

donde  $F_x$  es el esfuerzo longitudinal entre rueda y calzada y  $C_s$  el coeficiente de deslizamiento, el cual puede variar en función de factores como la carga que gravita sobre la rueda.

Al igual que la deriva, el deslizamiento aparecerá en el bond graph como una puerta Resistencia sobre la unión 0 de esfuerzos entre neumático y suelo.

El parámetro de la Resistencia es  $C_s/u$ , ya que al multiplicar el flujo  $v_x$  por dicho parámetro se obtiene la fuerza longitudinal  $F_x$ :

$$F_x = C_s \cdot S = (C_s/u) \cdot v_x$$

La dirección del deslizamiento es la del eje  $x'$ . Como los ejes  $x'$  y  $x''$  coinciden, ya que el giro  $\phi$  que separa las bases  $x'y'z'$  y  $x''y''z''$  se realiza alrededor del eje  $x'$ , la velocidad de deslizamiento podría definirse según cualquiera de ellas, pero por guardar similitud con la

deriva se definirá en la misma base que ésta, es decir la base  $x'y'z'$ .

De este modo el deslizamiento se incluirá junto con la deriva en una misma puerta Resistencia múltiple de dimensión  $2 \times 2$  y definida en el plano  $x'y'$  como:

$$R: \begin{vmatrix} C_s/u & 0 \\ 0 & C_D/u \end{vmatrix}$$

Todo lo señalado en el apartado de la deriva en relación con la existencia de bucles algebraicos y la solución a dichos bucles es aplicable también aquí, ya que esta estructura de bond graph es una extensión de aquella.

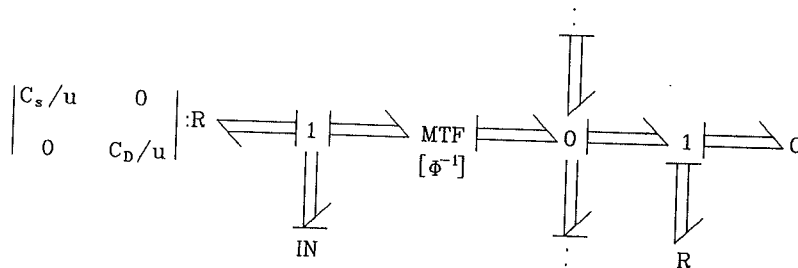


Fig. IV-17: Modelización de la deriva y el deslizamiento

Por último, hay que comprobar que esta puerta resistencia múltiple representativa de la deriva y del deslizamiento, cumple la condición de no introducir energía al sistema. Esto puede comprobarse aplicando el procedimiento explicado en el apartado "Análisis del flujo de energía en puertas resistencia pluridimensionales".

En efecto, los discriminantes principales de la matriz simétrica  $R_s$ , la que coincide con la propia matriz  $R$  ya que ésta es diagonal, son

$$D_1 = C_s/u$$

$$D_2 = (C_s/u) \cdot (C_D/u)$$

siendo su valor no negativo si "u" no lo es. Hay que recordar aquí que como valor de "u" se tomaba el módulo de una componente determinada de velocidad.

#### IV.1.3.3 - Comportamiento de la interfase Rueda-Calzada considerando la posible superación del límite de adherencia

En los apartados anteriores se ha considerado la modelización de la deriva y del deslizamiento longitudinal cuando los esfuerzos en la interfase rueda-calzada eran relativamente pequeños.

Un caso que requiere un tratamiento diferente es el que se presenta cuando los esfuerzos en la mencionada interfase se hacen grandes, llegando a alcanzarse el esfuerzo máximo que puede soportar la unión entre la superficie del neumático y la superficie de la calzada.

Para estudiar este caso, se partirá de unas hipótesis determinadas con el fin de simplificar los desarrollos.

Se aceptará que el esfuerzo máximo entre rueda y calzada será igual a  $\mu \cdot P$ , es decir, igual al producto del coeficiente de adherencia  $\mu$  del neumático sobre la calzada y la fuerza normal  $P$  existente entre ambos.

Se considerará que el límite de adherencia se alcanza cuando la composición vectorial de los esfuerzos longitudinales y transversales entre neumático y calzada alcanza el valor  $\mu \cdot P$ :

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \geq \mu \cdot P \quad (1)$$

donde  $F_x$  es el esfuerzo longitudinal en la interfase neumático-calzada y  $F_y$  el esfuerzo transversal. Esto supone aceptar que la elipse de fricción se reduce a un círculo de radio  $\mu \cdot P$ .

Cuando se supera el límite de adherencia, los esfuer-

zos en la interfase neumático-calzada toman un valor que puede considerarse aproximadamente constante e igual al valor límite  $\mu \cdot P$ , no dependiendo, en principio, este valor de la velocidad de deslizamiento existente en la interfase neumático-calzada.

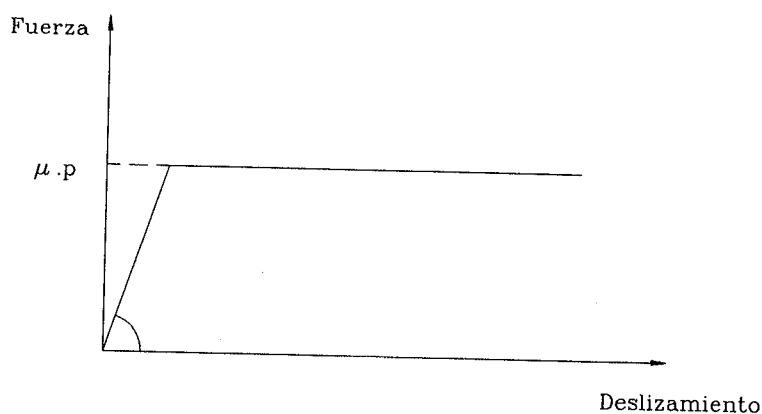


Fig. IV-18: Gráfica de Esfuerzo-Deslizamiento

La forma de la gráfica anterior es válida, en líneas generales, tanto para el eje longitudinal X como para el eje transversal Y.

El tramo inicial, con pendiente constante, de la gráfica puede corresponder tanto a la deriva como al deslizamiento longitudinal modelizados en anteriores apartados. El valor de la pendiente es  $C_D$  en el caso de la deriva, que puede considerarse como un deslizamiento transversal, y  $C_S$  en el caso del deslizamiento longitudinal.

El tramo final de la gráfica, representado con valor constante igual a  $\mu \cdot P$ , corresponde a la situación existente cuando se alcanza el límite de adherencia.

Hay que señalar, no obstante, que, en realidad, el valor de la fuerza en este tramo no es perfectamente constante, sino que es decreciente. Ello corresponde con el hecho de que el coeficiente de adherencia  $\mu$  decrece al aumentar la velocidad efectiva de deslizamiento (Dugoff, [20], [40]), circunstancia que será tenida en cuenta en el posterior desarrollo del modelo.

Es interesante destacar la coherencia de la forma de

esta gráfica con el hecho de que cuando los esfuerzos alcanzan valores altos, toma protagonismo la fricción superficial entre el neumático y el pavimento sobre la elasticidad del neumático. La naturaleza de esta fricción superficial es la causa de que la fuerza en la interfase valga aproximadamente  $\mu \cdot P$ .

En estas circunstancias de trabajo a fricción de la interfase neumático-calzada, empieza a carecer de sentido la distinción que se hacía entre la deriva transversal y el deslizamiento longitudinal, ya que ahora el deslizamiento se producirá en cualquier dirección contenida en el plano de la calzada.

La situación es la producida cuando hay derrapaje o resbalamiento de la superficie del neumático sobre la calzada, aunque a efectos de nomenclatura se hablará de deslizamiento global o, simplemente, se seguirá hablando en general de deslizamiento sea cual sea la dirección en que se produzca.

Es importante señalar que, en tales circunstancias, la rueda puede estar bloqueada sobre su eje o no estarlo.

En efecto, tanto puede tratarse del deslizamiento producido por una frenada con la rueda bloqueada, como del deslizamiento longitudinal en una arrancada enérgica o el deslizamiento lateral en una curva a gran velocidad con la rueda girando sobre su eje.

A efectos de modelización, hay que considerar, simplemente, una fuerza definida, de valor  $\mu \cdot P$ , que actúa sobre la rueda en la zona de contacto sobre la calzada, pudiendo la rueda seguir girando o no sobre su propio eje.

El aceptar que el módulo de la fuerza en la interfase es  $\mu \cdot P$ , constituye la primera hipótesis básica que se empleará en el desarrollo del modelo.

Se aceptará también otra hipótesis básica, consistente en que, en la situación de límite de adherencia superado, la dirección de la fuerza en la interfase neumático-calzada ha de ser aproximadamente la misma que la de la velocidad del deslizamiento global ( $V_s$ ) existente en dicha interfase. Esta velocidad puede tener cualquier dirección y sentido dentro del plano de la calzada.



En resumen, las hipótesis básicas que se admitirán sobre las características de la fuerza entre rueda y calzada cuando se ha superado el límite de adherencia son las siguientes:

- 1- El módulo tiene un valor igual a  $\mu \cdot P$ .
- 2- La dirección coincide con la dirección de la velocidad de deslizamiento global ( $V_s$ ) existente en la interfase rueda-calzada.

En base a estas dos hipótesis se efectuará la modelización.

#### IV.1.3.3.1 - Modelización

Cuando los esfuerzos entre neumático y calzada eran pequeños, es decir, estaban lejos del límite de adherencia, los movimientos de deriva y deslizamiento longitudinal existentes entre neumático y calzada podían modelizarse mediante una puerta Resistencia pluridimensional de parámetros fijos (ver los apartados IV.1.3.1 y IV.1.3.2 de modelización de la deriva y el deslizamiento longitudinal).

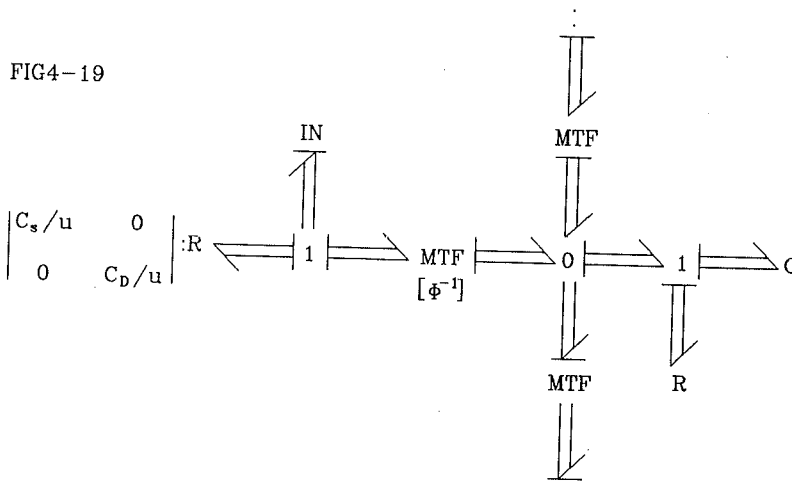


Fig. IV-19: Modelización de deriva y deslizamiento para pequeños esfuerzos

El empleo de esta puerta Resistencia estaba justificado porque las fuerzas transversales y longitudinales

eran proporcionales a las respectivas velocidades de deriva, en dirección transversal ( $v_x$ ), y de deslizamiento, en dirección longitudinal ( $v_y$ ):

$$\underline{e} = (1/u) \cdot \begin{vmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix} = (1/u) \cdot \begin{vmatrix} C_s \cdot v_x \\ C_d \cdot v_y \end{vmatrix} \quad (2)$$

Aunque los parámetros de la puerta variaran, ya que estaban afectados por el módulo de la velocidad  $u$  del c.d.g. de la rueda, velocidad que podía variar, se conservaba en cada instante la proporcionalidad entre esfuerzos y flujos.

Sin embargo, para la modelización de la nueva situación de deslizamiento, cuando se ha superado el límite de adherencia, no pueden emplearse las mismas puertas Resistencia empleadas en el caso normal de pequeños esfuerzos, puesto que los esfuerzos ya no son proporcionales a los flujos, sino que han de cumplir las nuevas condiciones aceptadas como hipótesis: fuerza de valor igual a  $\mu \cdot P$  y dirigida en la dirección del deslizamiento global.

Una solución es sustituir la puerta Resistencia por una fuente de esfuerzo que introduzca dicha fuerza (Fig. IV-20).

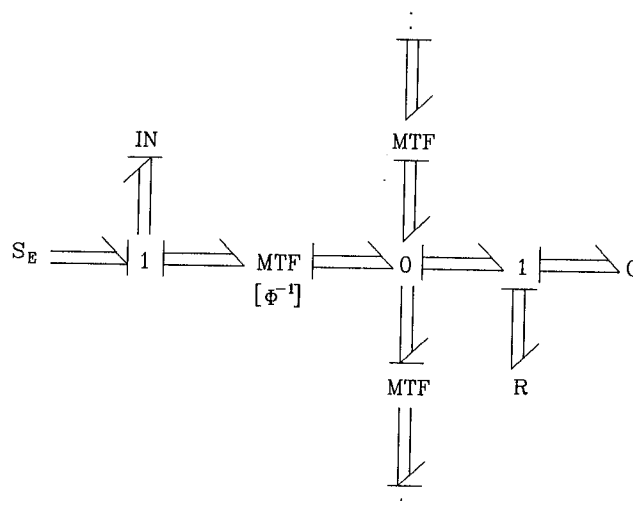


Fig. IV-20: Modelización de deriva y deslizamiento mediante una fuente de esfuerzos

Como no es posible cambiar el bond graph durante la simulación, convirtiendo una puerta Resistencia en una fuente de esfuerzo al superarse el límite de adherencia, habría que emplear fuentes de esfuerzo en lugar de Resistencias también para la modelización de la deriva y el deslizamiento existentes cuando los esfuerzos son pequeños.

La fuente de esfuerzo tendría que estar modulada por el flujo, el cual se hallaría a partir del de otros grafos.

Otra solución, alternativa a la anterior, y que se empleará en lo sucesivo, consiste simplemente en variar los parámetros de la matriz de la puerta Resistencia empleada en el caso normal de pequeños esfuerzos (Fig. IV-19).

Hay que recordar aquí que las puertas Resistencia, a diferencia de las puertas Compliance o Inercia, son siempre modulables.

Para modelizar la situación de límite de adherencia superado,  $(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{1}{2}} \geq \mu \cdot P$ , la matriz de la puerta Resistencia se hallará considerando las dos características, anteriormente expuestas, de la fuerza existente entre rueda y calzada.

De acuerdo con ellas, la expresión vectorial de dicha fuerza, para el caso de límite de adherencia superado, es:

$$\underline{e} = \mu \cdot P \cdot \frac{\underline{V}_s}{|\underline{V}_s|} \quad (3)$$

donde  $\underline{V}_s$  es la velocidad global de deslizamiento y  $|\underline{V}_s|$  es su módulo:

$$\underline{V}_s = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$|\underline{V}_s| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (5)$$

Es inmediato deducir que la matriz R que da lugar al esfuerzo  $\underline{e}$  anterior es la siguiente:

$$R = \frac{\mu \cdot P}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

En efecto, multiplicando esta matriz R por el vector velocidad de deslizamiento, se obtiene la fuerza entre rueda y suelo que se buscaba:

$$\underline{e} = \frac{\mu \cdot P}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix} = \frac{\mu \cdot P}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \cdot \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix} \quad (7)$$

Por consiguiente, la Resistencia expresada en (6) es la que se empleará para modelizar la situación de límite de adherencia superado.

En la Figura IV-21 se representa su inclusión en el bond graph de la rueda.

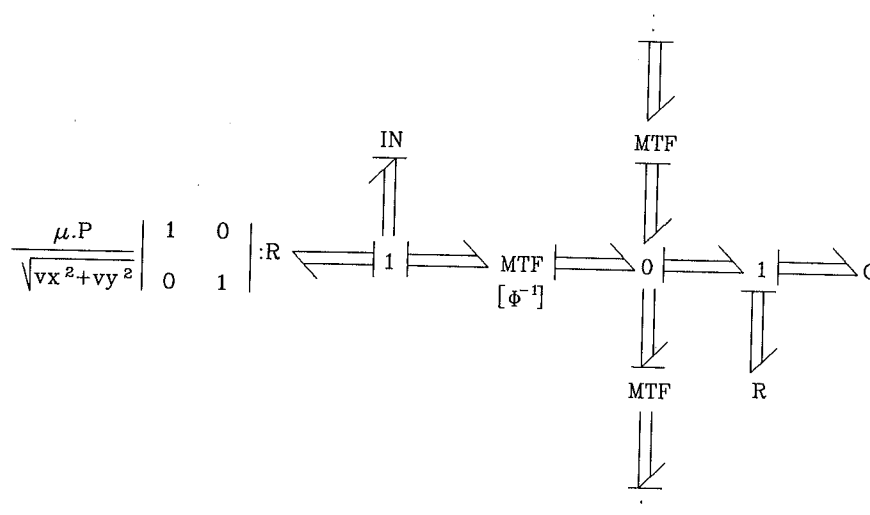


Fig. IV-21: Modelización para grandes esfuerzos

La obtención de los datos que figuran en la expresión de esta Resistencia ( $\mu, P, v_x$  y  $v_y$ ) es inmediata.

En efecto, las velocidades  $v_x$  y  $v_y$  son el flujo de la puerta Inercia Nula que se incluyó para resolver el problema de los bucles algebraicos producidos al modelizar la deriva. Dichos flujos son conocidos durante la simulación dada la causalidad de la mencionada puerta.

Del mismo modo, la carga  $P$ , puede ser obtenida de la componente vertical de los esfuerzos de las puertas Compliance y Resistencia representativas de la deformabilidad del neumático. La causalidad de estas puertas también favorece el cálculo.

Análogamente, la componente horizontal de los esfuerzos de estas puertas permite conocer la condición de límite de adherencia superado.

En cuanto al coeficiente de adherencia  $\mu$ , puede considerarse constante o, para afinar más el modelo, puede considerarse variable.

En tal caso, se considera, tal como hace Dugoff (ref. [20]), que el coeficiente de adherencia  $\mu$  decrece al aumentar la velocidad global de deslizamiento según la siguiente expresión:

$$\mu = \mu_0 \cdot (1 - A_s \cdot V_s) \quad (8)$$

donde  $\mu_0$  es el coeficiente nominal de adherencia,  $A_s$  es el factor de reducción por fricción y  $V_s$  es el módulo de la velocidad global de deslizamiento:

$$V_s = |\underline{V}_s| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (9)$$

Como puede verse, aun considerando  $\mu$  variable, no aparece en las anteriores expresiones ningún factor que no esté disponible en el modelo durante la simulación.

Por último, es conveniente comprobar que esta nueva puerta Resistencia cumpla la condición de no introducir energía al sistema.

Aplicando el método expuesto en el apartado "Análisis del flujo de energía en puertas resistencia pluridimensionales" se comprueba como, en efecto, se cumple la condición de no introducir energía al sistema, ya que los discriminantes principales de la matriz simétrica  $R_s$ , son:

$$D_1 = \mu \cdot P / (v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$D_2 = (\mu \cdot P / (v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}})^2$$

cuyo valor es, evidentemente, no negativo.

#### IV.1.3.4 - Expresión explícita de las fuerzas en la interfase rueda-calzada obtenidas con el nuevo modelo

Aunque, a efectos de modelización con bond graph, es suficiente con aplicar las matrices Resistencia obtenidas anteriormente, aplicando la variante de la Figura IV-19 o la de la Figura IV-21 según que se haya alcanzado o no el límite de adherencia, es interesante obtener la expresión explícita de las fuerzas en la interfase rueda-calzada que se derivan de este nuevo modelo.

De este modo puede analizarse mejor el modelo y se facilita la comparación con otros modelos ya existentes.

Con el fin de facilitar estos análisis y comparaciones, conviene expresar las componentes de la fuerza en la interfase en función del deslizamiento longitudinal  $S$  y del ángulo de deriva  $\alpha$ .

En el nuevo modelo, las fuerzas de la interfase vienen dadas en función de las componentes  $v_x$  y  $v_y$  de la velocidad  $V_s$  en dicha interfase. Serán estas componentes de la velocidad en la interfase las que se expresarán en función de  $S$  y  $\alpha$  (ver Fig. IV-22).

Llamando  $u$  a la velocidad longitudinal del centro de la rueda, y teniendo en cuenta que  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes de la velocidad de deslizamiento de la superficie de contacto del neumático sobre la calzada, se tiene:

$$v_x = u \cdot S \quad (10)$$

$$v_y = u \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (11)$$

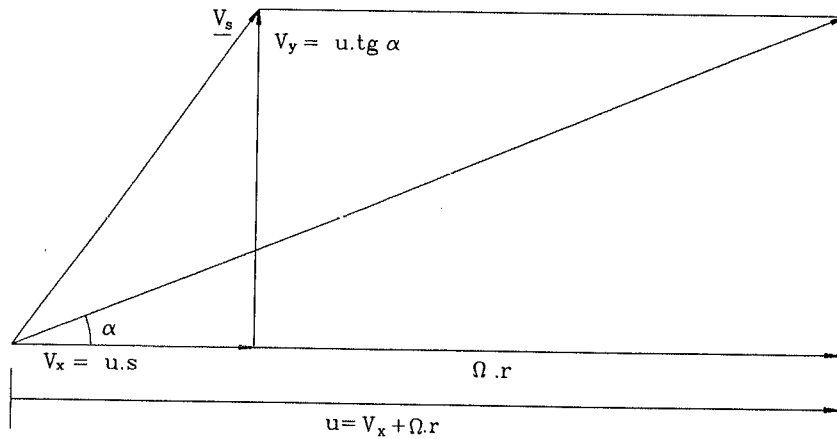


Fig. IV-22: Componentes de la velocidad de deslizamiento

En el nuevo modelo hay que distinguir dos situaciones: la de antes de alcanzar el límite de adherencia y la de después.

La fuerza en la interfase antes de alcanzar el límite de adherencia es:

$$\underline{e} = (1/u) \cdot \begin{vmatrix} C_s \cdot v_x \\ C_D \cdot v_y \end{vmatrix} \quad (12)$$

Después de alcanzar dicho límite, la fuerza es:

$$\underline{e} = \frac{\mu \cdot P}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \cdot \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \end{vmatrix} \quad (13)$$

Sustituyendo, en las anteriores igualdades,  $v_x$  y  $v_y$  por sus expresiones en función de  $S$  y  $\alpha$  se obtiene:

1) Para el caso de no haber alcanzado el límite de adherencia:

$$\underline{e} = (1/u) \cdot \left| \frac{C_s \cdot u \cdot S}{C_b \cdot u \cdot tga} \right| = \left| \frac{C_s \cdot S}{C_b \cdot tga} \right| \quad (14)$$

2) Para el caso de haberse sobrepasado dicho límite:

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \frac{\mu \cdot P}{\sqrt{(u \cdot S)^2 + (u \cdot tga)^2}} \cdot \left| \frac{u \cdot S}{u \cdot tga} \right| = \\ &= \frac{\mu \cdot P}{\sqrt{S^2 + (tga)^2}} \cdot \left| \frac{S}{tga} \right| \end{aligned} \quad (15)$$

La expresión explícita de las fuerzas  $F_x$  y  $F_y$  según el nuevo modelo es, por consiguiente:

1) Para el caso de no haberse alcanzado el límite de adherencia, es decir, cuando  $(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{1}{2}} < \mu \cdot P$ :

$$F_x = C_s \cdot S \quad (16)$$

$$F_y = C_b \cdot tga \quad (17)$$

2) Para el caso de haberse sobrepasado el límite de adherencia, lo que ocurre cuando  $(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{1}{2}} \geq \mu \cdot P$ :

$$F_x = \frac{\mu \cdot P \cdot S}{\sqrt{S^2 + (tga)^2}} \quad (18)$$

$$F_y = \frac{\mu \cdot P \cdot tga}{\sqrt{S^2 + (tga)^2}} \quad (19)$$



#### IV.1.3.4.1 - Comparación con el modelo de Dugoff

El modelo de Dugoff, uno de los más comúnmente aceptados, predice los valores de los esfuerzos en la interfase rueda-calzada contenidos en el plano de la misma, tanto para valores bajos como altos de los esfuerzos en la interfase.

Es interesante comprobar el ajuste de los valores de dichos esfuerzos en comparación con los obtenidos mediante el modelo anteriormente desarrollado.

Según Dugoff ([20]), los valores de los esfuerzos longitudinal ( $F_x$ ) y transversal ( $F_y$ ) dependen del valor de un parámetro  $L$ , cuya expresión es:

$$L = \frac{\mu \cdot P \cdot (1-S)}{2 \sqrt{(C_s \cdot S)^2 + (C_D \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2}} \quad (20)$$

donde  $\mu, P, S, C_s, C_D$  y  $\alpha$  son variables y parámetros que ya han sido definidos anteriormente. El coeficiente de adherencia  $\mu$  se calcula mediante la expresión (8).

Cuando  $L > 1$ , lo que ocurre cuando  $(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot P$ , los esfuerzos son:

$$F_x = \frac{C_s \cdot S}{1-S} \quad (21)$$

$$F_y = \frac{C_D \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1-S} \quad (22)$$

Cuando  $L < 1$ , lo que ocurre cuando  $(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot P$ , los esfuerzos son:

$$F_x = \frac{C_s \cdot S}{1-S} \cdot L \cdot (2-L) \quad (23)$$

$$F_y = \frac{C_D \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1-S} \cdot L \cdot (2-L) \quad (24)$$

Estas expresiones de  $F_x$  y  $F_y$  pueden ser comparadas con las correspondientes del nuevo modelo.

Para hacer la comparación, se han representado, en función de  $S$  y  $\alpha$ , los valores de las fuerzas  $F_x$  y  $F_y$  obtenidas a partir de las fórmulas del modelo de Dugoff (ecs. 21,22,23 y 24) y a partir de las del nuevo modelo (ecs. 16,17,18 y 19).

En la Figura IV-23 se representan con curvas de puntos los resultados obtenidos con el modelo de Dugoff y con curvas continuas los obtenidos con el nuevo modelo.

Los valores asignados a los parámetros son, en ambos casos:

$$C_s = 50000 \text{ N/u.s.}$$

$$C_D = 60000 \text{ N/rad}$$

$$u = 20 \text{ m/s}$$

$$P = 2500 \text{ N}$$

$$\mu_0 = 0.8$$

$$A_s = 0.011$$

A la vista de los resultados, hay que destacar la similitud en la forma de las curvas y la aproximación de los valores obtenidos en todo el rango considerado, el cual es muy amplio, pues  $S$  varía entre  $-1$  y  $+1$  y  $\alpha$  varía entre  $-1$  y  $+1$  radián.

Resulta particularmente interesante dicha similitud si se tiene en cuenta que el proceso mediante el que se llega a las fórmulas del nuevo modelo se basa en consideraciones totalmente macroscópicas.

Esta simplicidad en su deducción, el claro significado físico y la facilidad de aplicarlo mediante la técnica de bond graph (ver las Figuras IV-19 y IV-21) son las principales ventajas de este modelo.

No obstante, si se desea, es también posible usar las fórmulas del modelo de Dugoff, u otro similar, en la modelización con bond graph de la rueda, empleando para ello una fuente de esfuerzo, como la representada en la Figura IV-20, debiendo suministrar dicha fuente las fuerzas indicadas por el modelo elegido.

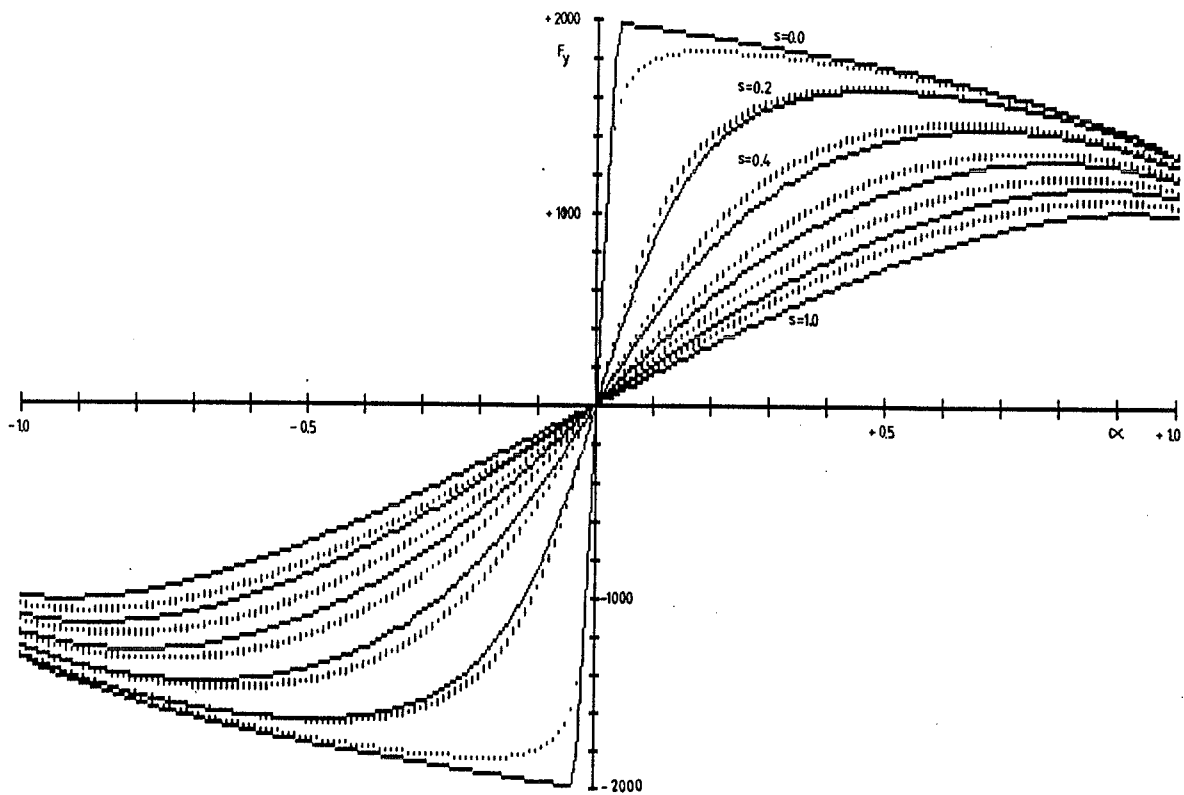
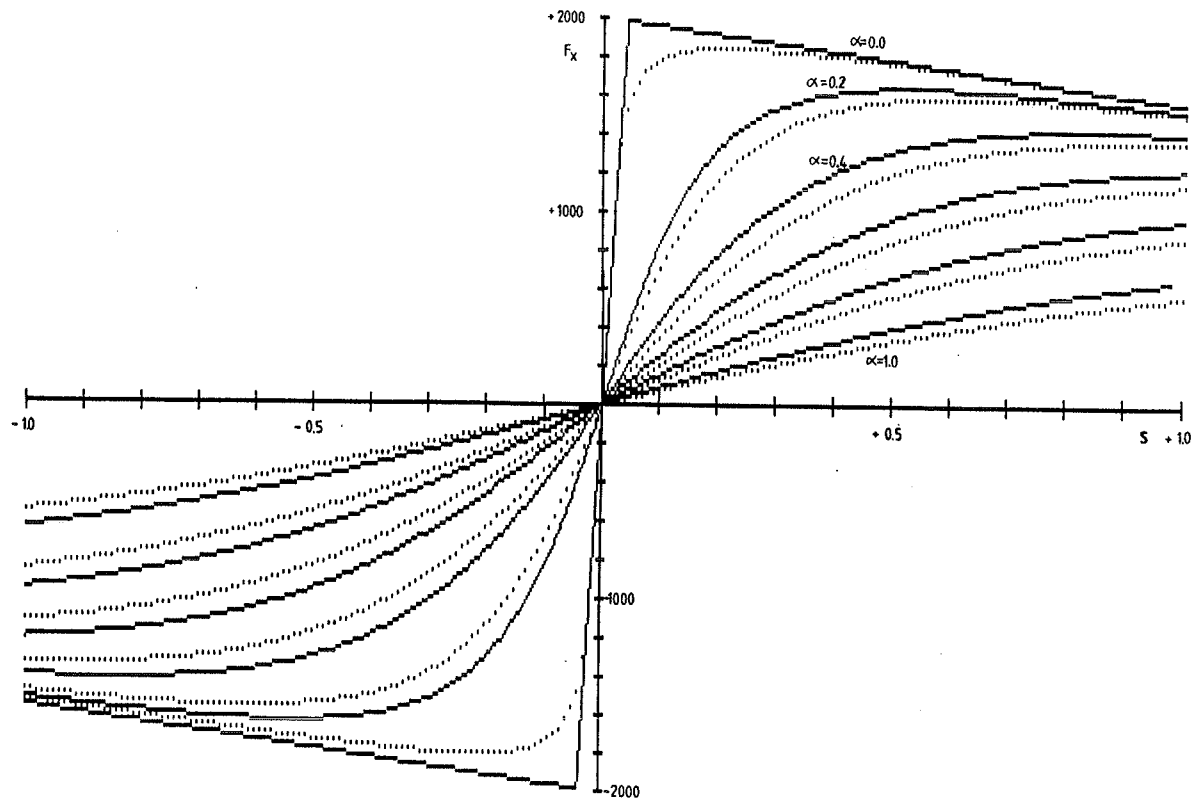


Fig. IV-23: Comparación de resultados con el modelo de Dugoff

Hay que indicar, por último, que la modelización mediante bond graph resulta muy adecuada en casos como el presente, donde se discute la modelización de lo que ocurre exclusivamente en una parte del sistema, en este caso, la interfase rueda-calzada.

En el desarrollo del nuevo modelo se ha trabajado sólo con los movimientos y esfuerzos en la interfase, sin tener en cuenta lo que ocurre con el resto de la rueda.

Hecha la modelización, la integración en el modelo global de rueda, es inmediata.

#### IV.1.3.5 - Modelización del par de autoalineación

El par de autoalineación aparece cuando hay esfuerzos laterales no nulos.

Su existencia está relacionada con el hecho de que la resultante de estos esfuerzos laterales se localiza a una cierta distancia del centro del área de contacto del neumático con el suelo.

En la modelización del par de autoalineación, no puede emplearse una puerta Resistencia, como en el caso de la deriva y el deslizamiento, ya que no hay relación entre el par de autoalineación y la velocidad angular existente en la dirección en que aparece ( $z''$ ).

Por lo tanto, el par de autoalineación se modelizará introduciendo en el bond graph de la rueda una fuente de esfuerzo que aplique el valor de dicho par sobre una unión 1 que representa la velocidad angular  $\Omega$  de la rueda expresada en la base  $x''y''z''$  (Fig. IV-24).

La dirección de esta fuente de esfuerzo será la del eje  $z''$ .

Para definir el valor del par que introduce la mencionada fuente de esfuerzo, pueden emplearse las expresiones de los diferentes modelos matemáticos que predicen el valor del par de autoalineación en función de diversos parámetros y variables ([20],[44]).

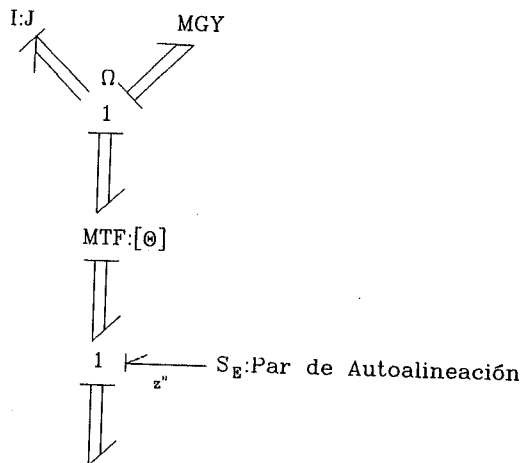


Fig. IV-24: Modelización del par de autoalineación

#### IV.1.3.6 - Modelización de la resistencia a la rodadura

La resistencia a la rodadura aparece como un par que se opone a la rotación de la rueda, tanto en rodadura libre como en tracción o frenada.

Este par tiene un valor aproximadamente igual a  $\Gamma \cdot P \cdot R$ , donde  $P$  es la carga sobre la rueda,  $R$  su radio bajo carga y  $\Gamma$  un coeficiente de resistencia a la rodadura.

En el bond graph aparecerá como una puerta Resistencia aplicada sobre la unión 1 representativa de la velocidad  $\Omega$  de la rueda, sobre la dirección  $y'''$  (Fig. IV-25).

El valor del coeficiente de esta puerta resistencia será:

$$R: \frac{\Gamma \cdot P \cdot R}{|\Omega_{y'''}|}$$

donde  $|\Omega_{y'''}|$  es el módulo de la velocidad  $\Omega_{y'''}$  de rotación de la rueda sobre el eje  $y'''$ .

Es evidente que al multiplicar el coeficiente anterior por la velocidad angular  $\Omega y'''$ , se obtiene el esfuerzo  $\Gamma \cdot P \cdot R$  que es el par de resistencia a la rodadura.

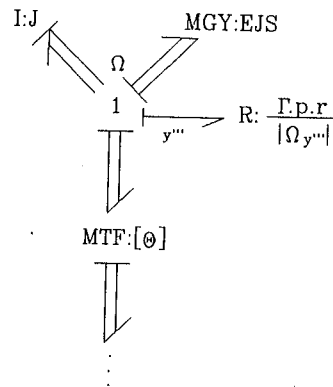


Fig. IV-25: Modelización de la resistencia a la rodadura

El valor de la carga  $P$  puede obtenerse a partir de la componente correspondiente del esfuerzo de la unión  $O$  de esfuerzos entre neumático y calzada.

En cuanto al valor de  $\Gamma$ , como primera aproximación puede considerarse constante (valor típico en ruedas neumáticas  $\Gamma = 0.015$ ), o bien, para afinar más, puede considerarse la influencia de otros factores como la velocidad.

#### IV.1.3.7 - Modelización de la pérdida de contacto entre rueda y calzada

La rueda puede separarse de la calzada arrastrada por la propia dinámica del vehículo o por alguna irregularidad del terreno.

Esta situación corresponde a lo descrito en el apartado de "Discontinuidades en los enlaces entre sólidos" y, más en concreto, al caso pluridimensional.

Uno de los casos que se discutían en ese apartado, se

refería a la posibilidad de que el despegue se produjera habiendo aún esfuerzos residuales en el plano perpendicular a la dirección del despegue.

En el caso de los neumáticos que se separan de la calzada, es muy probable que se produzcan situaciones de este tipo, ya que resulta muy improbable que, en el instante del despegue, sean precisamente nulas las deformaciones longitudinal y lateral del neumático.

En cualquier caso, la condición de despegue consiste en que la componente normal al suelo del vector desplazamiento  $q$  de la puerta Compliance del neumático tome un valor nulo:

$$q_z = 0$$

Para modelizar el despegue, puede hacerse nula, en ese instante, la componente correspondiente (Z) de la rigidez de la Compliance. Esto es posible hacerlo, ya que el desplazamiento  $q_z$  es nulo por la propia condición de despegue. Por el contrario, las componentes X e Y, correspondientes al plano de la calzada, no pueden hacerse nulas a menos que, como se ha dicho, la deformación del neumático en dicho plano fuera también nula.

Sin embargo, para la modelización de la pérdida de contacto entre rueda y calzada, no es necesario aplicar los procedimientos propuestos en el apartado mencionado al principio, ya que, en serie con la Compliance del neumático, hay ya un elemento cuyo parámetro puede hacerse nulo sin problema alguno.

En efecto, la deriva y deslizamiento del neumático se modelizan mediante una puerta Resistencia bidimensional situada en serie con la Compliance del neumático.

Esta puerta Resistencia está contenida, precisamente, en el plano XY de la calzada, en el que puede permanecer todavía algún esfuerzo en el instante del despegue.

Como las puertas Resistencia pueden variar de parámetro en cualquier circunstancia, no hay más que hacer nulos los parámetros de la puerta Resistencia de deriva y deslizamiento en el instante del despegue.

La energía de la Compliance del neumático que corresponda a la deformación que haya en plano XY, se disipará, sin violarse el principio de conservación de la energía, en la Resistencia que está situada en paralelo con dicha Compliance y que representa la histéresis del neumático.

De acuerdo con lo expuesto, las componentes X e Y del parámetro de esta Resistencia, no se hacen nulas tras el despegue, aunque pudieran hacerse nulas sin problemas de conservación de la energía por ser una Resistencia. Únicamente se anula la componente vertical Z.

En definitiva, para modelizar el despegue de la rueda, hay que anular, en el instante del despegue, que es aquel en que se anula la componente vertical de la deformación del neumático, las siguientes magnitudes:

- 1) La componente Z de los parámetros de las puertas Compliance y Resistencia correspondientes a la deformabilidad del neumático.
- 2) Las dos componentes, X e Y, de la Resistencia bidimensional de deriva y deslizamiento.

Como consecuencia de lo anterior, hay que señalar que, en aquellos modelos en que se vaya a modelizar la pérdida de contacto, la deformación del neumático, expresada mediante puertas C y R, deberá expresarse en la base  $x'y'z'$ , obtenida a partir de la base solidaria al sólido rueda mediante los giros  $\theta$  y  $\phi$ . En dicha base, el tercer eje coincide con el eje vertical Z de la referencia fija.

Evidentemente, en el improbable caso de que no hubiera deformación lateral del neumático, podrían hacerse nulas directamente todas las componentes de la Compliance del neumático para modelizar el despegue.

Sin embargo, es preferible seguir el procedimiento general, ya que, además de que es poco probable que se dé la circunstancia mencionada, habría que hacer la comprobación adicional de que en el instante del despegue ( $q_z = 0$ ) son nulas las deformaciones en el plano XY.



Incluso desde el punto de vista de la interpretación física, es más natural suponer que el movimiento libre en el espacio de la rueda separada de la calzada corresponde al flujo en la puerta de deriva y deslizamiento que a deformación del neumático, aunque los resultados sean los mismos.

Por último, hay que señalar dos requisitos que deben cumplirse para aplicar correctamente el procedimiento particular de modelización que se acaba de exponer.

El primer requisito es que el terreno ha de ser llano, ya que, de no ser así, podría presentarse el problema de la no coincidencia entre los puntos de pérdida de contacto y recuperación del mismo que se describe en el apartado de "Discontinuidades en los enlaces entre sólidos".

Sólo si el terreno es llano puede asegurarse que la componente vertical  $q_{cz}$  del desplazamiento de la Compliance tendrá, en el momento de la recuperación del contacto, el valor nulo que se requiere para una correcta modelización.

En el caso de que el terreno no fuera llano, se aplicarían los procedimientos generales expuestos en el apartado citado.

El segundo requisito es que la rueda ha de estar rodando, ya que sólo en tal caso puede haber la deriva y/o el deslizamiento que se modelizan con la puerta Resistencia bidimensional.

En una rueda estacionada sobre el suelo, no hay deriva ni deslizamiento, y, en tal caso, la puerta Resistencia bidimensional no puede actuar.

En ese caso, deberían aplicarse de nuevo los procedimientos generales de modelización descritos en el apartado ya mencionado.

#### IV.1.4 - Modelización de la interfase Rueda-Vehículo

La rueda interactúa con el vehículo a través de los sistemas de suspensión, dirección, tracción y frenada.

A continuación se modeliza la unión de la rueda con los mencionados sistemas del vehículo.

Los mecanismos de suspensión y dirección, interactúan con la rueda a través de la mangueta, formando parte este sólido de ambos mecanismos y unido a la rueda mediante un par de rotación cilíndrico (Fig. IV-26).

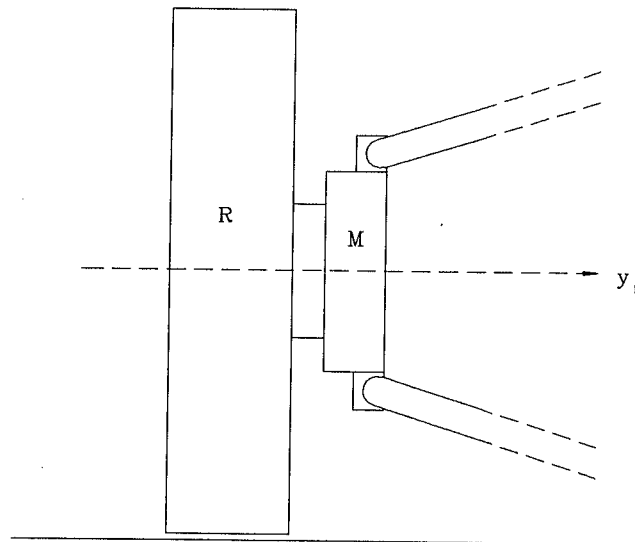


Fig. IV-26: Conjunto Rueda-Mangueta

En la Fig. IV-27 se representa el bond graph completo del modelo tridimensional de rueda, donde ya se incluye lo relativo a la unión con el vehículo, objeto de este apartado.

La modelización de la unión de la rueda con la mangueta se efectúa aplicando los resultados indicados en el Capítulo II para el caso de unión de dos sólidos a través de un eje.

Dentro de la estructura de unión de las velocidades angulares, de la unión 0 correspondiente al giro relativo parte una fuente de esfuerzo que representa la acción del

freno. Del resto de uniones 0 parten muelles rígidos.

El único cambio de coordenadas necesario es pues el del ángulo  $\theta'$ .

El par de tracción actúa, mediante el palier, directamente sobre la rueda aplicándose la reacción no sobre la mangueta sino sobre el chasis. En el bond graph aparece como una fuente de esfuerzo aplicada directamente sobre la unión 1 de velocidad angular de la rueda, existiendo una unión 0 que lleva el esfuerzo de reacción al chasis.

La rueda tiene dos puntos de interacción: el del suelo, (punto P, ya conocido) y el de la mangueta (punto O). Este último, como ya se vió, puede ser cualquiera dentro del eje rueda-mangueta.

Al bond graph de la rueda hay que añadir pues este nuevo punto de interacción. Se define mediante el vector OG. El Transformer correspondiente (TF:OG), a diferencia del que corresponde a la interacción con el suelo (TF:PG), es de razón fija ya que el vector OG es fijo en el sólido.

Evidentemente, si la rueda está equilibrada, puede tomarse como punto O el mismo centro de gravedad G de la rueda, con lo que no sería necesario el TF:OG ni los grafos asociados. No obstante, para que el modelo sea de aplicación general se considera que no tienen por qué coincidir los puntos O y G.

Dentro del diagrama de la rueda, en el lado de unión a la mangueta, a diferencia del lado de unión al suelo, no se realiza el cambio de coordenadas TF:[ $\theta$ ] junto a la unión 1 de velocidad angular ya que la estructura de unión trabaja entre las bases solidarias a los dos sólidos, siendo el cambio de coordenadas que incorpora el correspondiente al ángulo  $\theta'$  de giro relativo entre ambos sólidos, ángulo que no tiene por qué coincidir con el ángulo de Cardan  $\theta$  de la rueda.

Por ello es necesario colocar el cambio de coordenadas TF:[ $\theta$ ] a continuación de la unión 0, una vez hecha la suma de velocidades, para concurrir a la unión 1 de velocidad del c.d.g. de la rueda en la misma base que el resto de los grafos.

En el caso de que la rueda esté desequilibrada no hay más que cambiar el tensor de inercia  $J_r$  y definir los vectores  $\underline{OG}$  y  $\underline{PG}$  sin olvidar la nueva posición del centro de gravedad  $G$ .

**IV.1.5 - Bond graph completo del modelo tridimensional de rueda**

La Figura IV-27 muestra el bond graph completo de la rueda construido en los apartados anteriores.

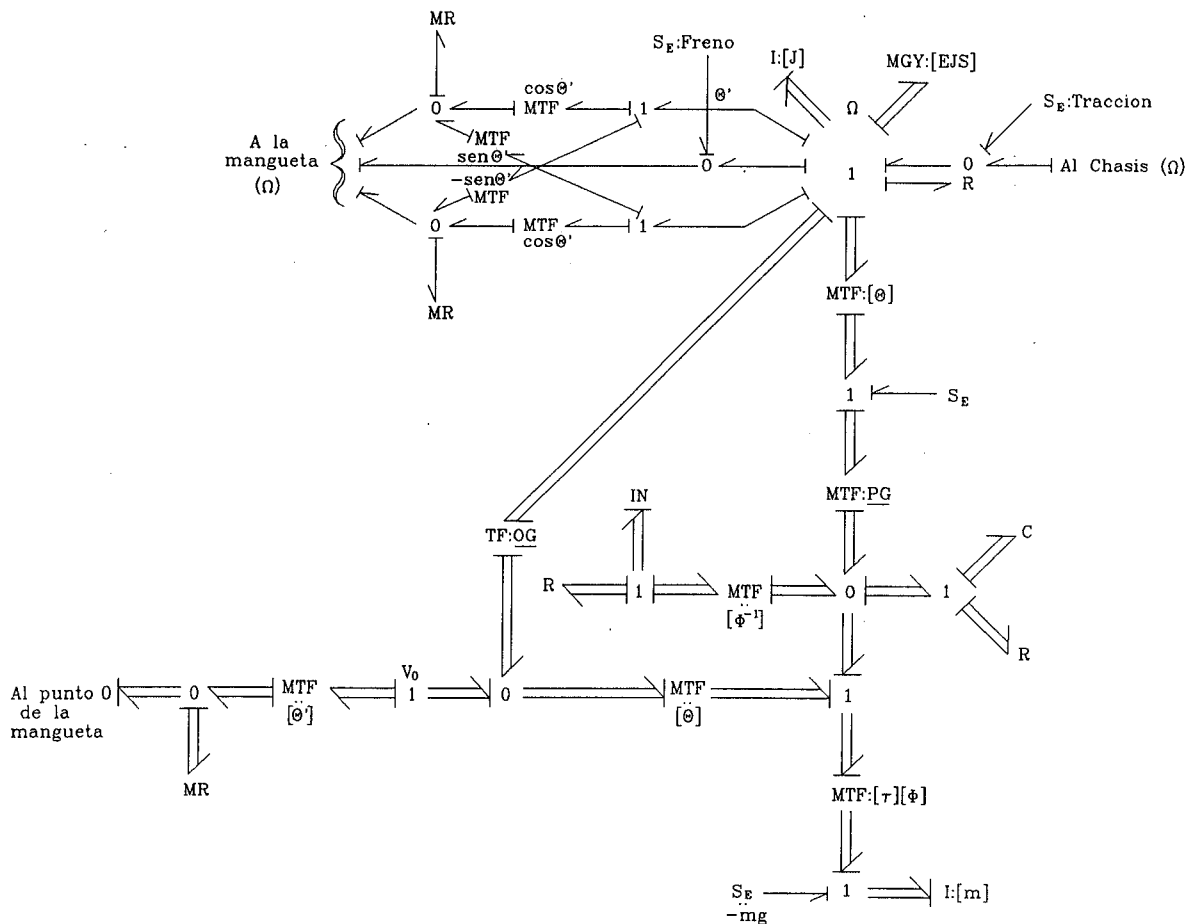


Fig. IV-27: Bond graph completo del modelo tridimensional de rueda

## IV.2 - MODELOS BIDIMENSIONALES DE RUEDA

En determinados casos, es útil efectuar simulaciones con modelos reducidos a un plano, ya que, aunque son modelos más limitados, son también más sencillos de manejar que los tridimensionales.

En este apartado se analizan y desarrollan los tres posibles modelos bidimensionales de rueda.

Estos modelos derivan del modelo tridimensional presentado en los apartados anteriores, empleando, por consiguiente las mismas hipótesis, la misma definición de ángulos de Cardan, etc.

### IV.2.1 - Modelo bidimensional XZ

En este modelo, los movimientos de la rueda están contenidos en el plano vertical XZ, que es el plano de la rueda (Fig. IV-28).

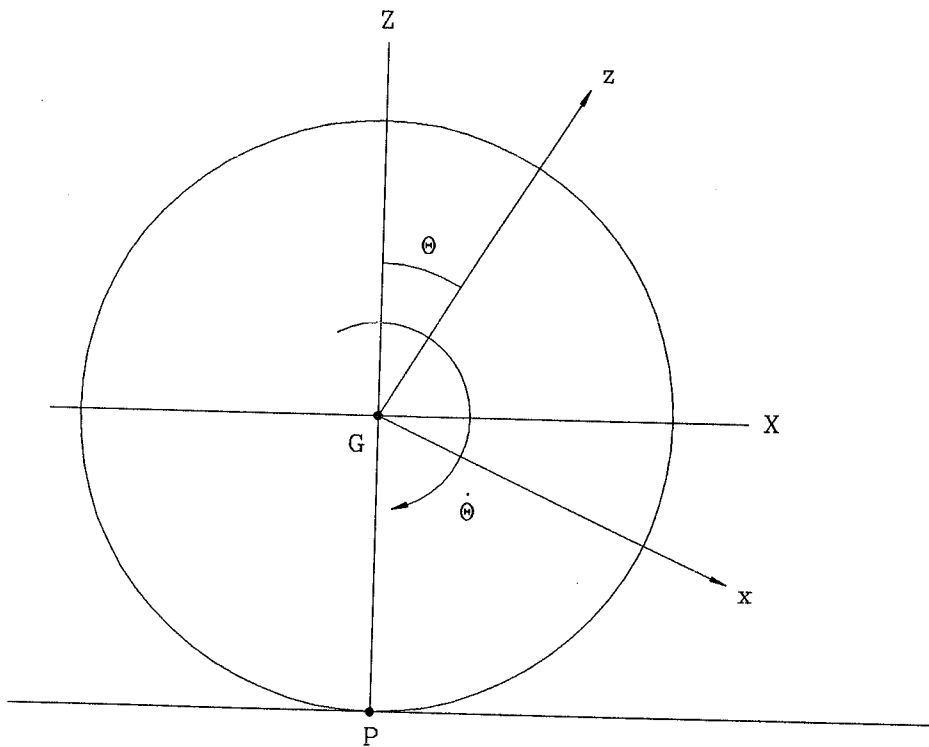


Fig. IV-28: Modelo de rueda reducido al plano XZ

De acuerdo con los grados de libertad que tiene este modelo, asociados a las coordenadas  $X$ ,  $Z$  y  $\theta$ , pueden estudiarse, en principio, fenómenos del comportamiento de la rueda relativos a:

- deslizamiento longitudinal
- adherencia en sentido longitudinal
- elasticidad y amortiguamiento en el plano XZ
- desequilibrio estático
- par de resistencia a la rodadura
- variación del radio de la rueda
- pérdida de contacto con la calzada
- acción gravitatoria
- inercia traslación en el plano XZ
- inercia rotación eje Y

Queda claramente fuera del alcance de este modelo lo relativo a:

- deriva
- par de autoalineación
- desequilibrio dinámico
- efectos giroscópicos
- desplazamientos y fuerzas fuera del plano XZ

La estructura del bond graph del modelo bidimensional XZ es, en esencia, la misma que en el caso tridimensional.

En este caso, sin embargo, no es necesario ninguno de los cambios de coordenadas empleados en el modelo tridimensional.

En efecto, los cambios de coordenadas correspondientes a los ángulos de Cardan  $\tau$  y  $\phi$ , evidentemente, no existen en este modelo.

Pero, además, tampoco es necesario en el bond graph el cambio correspondiente al ángulo  $\theta$  que en el caso tridimensional se situaba junto a la unión 1 de velocidad angular  $\Omega$  de la rueda (ver Fig. IV-27).

Dicho cambio de coordenadas MTF:[ $\theta$ ] no resulta necesario dado que actúa sobre grafos cuyos flujos y es-

fuerzas están definidos en la misma dirección de la velocidad angular correspondiente al ángulo  $\theta$ .

No aparece tampoco el término MGY:EJS sobre la unión 1 de velocidad angular, ya que son paralelos la velocidad angular  $\Omega$  y el momento  $J\Omega$ , por lo que es nulo el producto vectorial  $\Omega \times J\Omega$ , correspondiendo a dicho producto vectorial el grafo MGY:EJS.

El bond graph es, por tanto, el de la Figura IV-29.

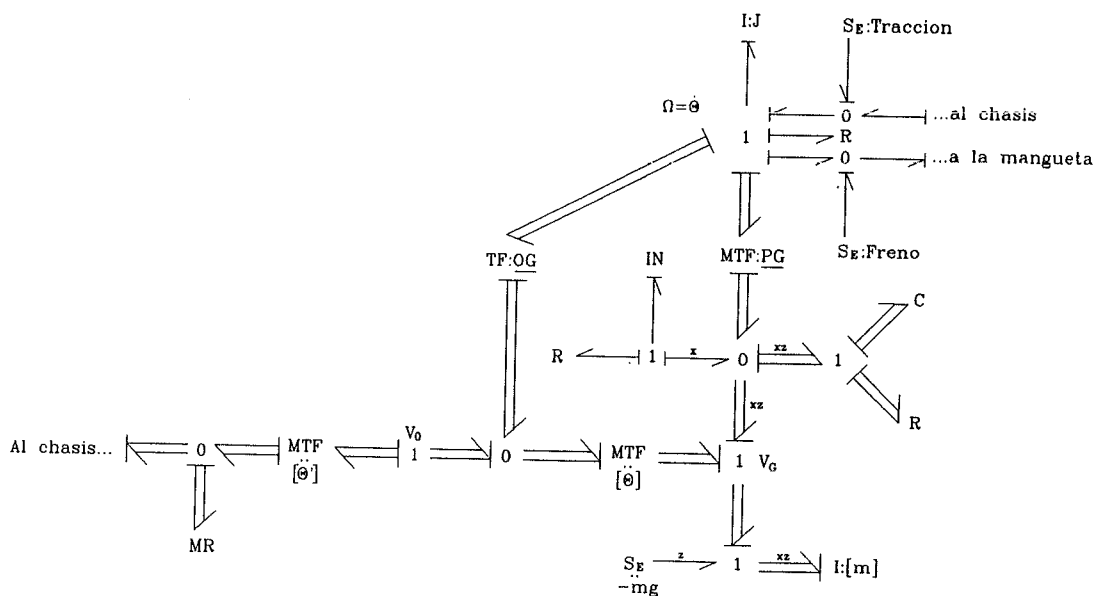


Fig. IV-29: Bond graph del modelo de rueda reducido al plano XZ

La puerta R de la izquierda modeliza, como siempre, la interfase Rueda-Calzada, tanto el deslizamiento longitudinal normal como la situación de límite de adherencia superado, estando definida sobre el eje X.

En el primer caso su parámetro es  $C_s/u$  y en el segundo caso es  $\mu \cdot P/v_x$ , siendo  $u$  la velocidad de desplazamiento del centro de la rueda y  $v_x$  la velocidad de desplazamiento del punto de contacto de la rueda con la calzada, que es la velocidad de la Inercia Nula.

La definición del resto de las puertas es la misma que en el caso tridimensional, aunque reducidas, lógicamente, a los ejes X y Z.

#### IV.2.2 - Modelo bidimensional XY

Se analiza a continuación el caso de que el movimiento esté limitado al plano horizontal XY, que es el plano de la calzada (Fig. IV-30).

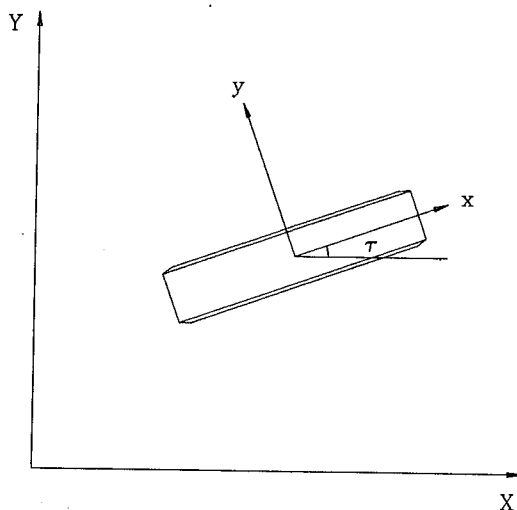


Fig. IV-30: Modelo de rueda reducido al plano XY

El número de grados de libertad se reduce también a tres: X, Y y  $\tau$ .

El hecho de que este modelo bidimensional no contemple la rotación de la rueda en torno a su eje ( $y_r$ ), impide definir el deslizamiento longitudinal "s", ya que éste viene definido por la diferencia entre la velocidad real de la rueda y la velocidad correspondiente a su rotación.

Por el mismo motivo, la fuerza longitudinal  $F_x$  realmente existente en la interfase rueda-calzada tampoco puede conocerse.

Ni siquiera la fuerza lateral  $F_y$  de la interfase rueda-calzada puede modelizarse correctamente en todo su



rango, ya que, cuando los esfuerzos son grandes, dicha fuerza lateral  $F_y$  no sólo depende del ángulo de deriva " $\alpha$ " sino que también depende del deslizamiento " $s$ ".

Únicamente cuando los esfuerzos son pequeños, puede modelizarse la mencionada fuerza lateral ya que, en tal caso, puede admitirse que sólo es función del ángulo de deriva " $\alpha$ ". Para ello se emplea la puerta R siendo su parámetro  $C_b/u$ . Una solución de este tipo es la empleada en determinados modelos [30].

Por los mismos motivos expuestos, únicamente puede modelizarse la deformabilidad del neumático en sentido transversal.

También por la misma razón, la tracción y la frenada no pueden modelizarse más que con una fuente de esfuerzo actuante sobre el chasis, y que aplique la fuerza que idealmente haría la rueda sobre el mismo.

De acuerdo con todo lo expuesto, este modelo permite estudiar el comportamiento de la rueda en lo referente a:

- deriva (para pequeños ángulos  $\alpha$ )
- par de autoalineación (para pequeños ángulos  $\alpha$ )
- elasticidad y amortiguamiento según el eje Y
- inercia traslación en el plano XY
- inercia rotación eje Z (sin efectos giroscópicos)

Queda fuera del alcance de este modelo lo relativo a:

- deslizamiento longitudinal
- adherencia
- elasticidad y amortiguamiento según los ejes Y y Z
- par de resistencia a la rodadura
- desequilibrios estático y dinámico
- efectos giroscópicos
- acción gravitatoria
- variación radio rueda
- pérdida de contacto con la calzada

La estructura del bond graph del modelo bidimensional XY se obtiene también a partir de la del modelo tridimensional, pero aparecen varias diferencias.

Admitiendo que el punto P de contacto entre neumático y calzada está en la vertical del centro de gravedad G de la rueda, el vector  $\underline{PG}$  se hace nulo.

Debido a ello, la parte de rotación se desacopla de la de traslación, ya que ambas partes del bond graph se relacionan a través del Transformer MTF:PG.

El bond graph tiene, por consiguiente, dos partes: rotación según el eje Z y traslación en el plano XY (Fig. IV-31).

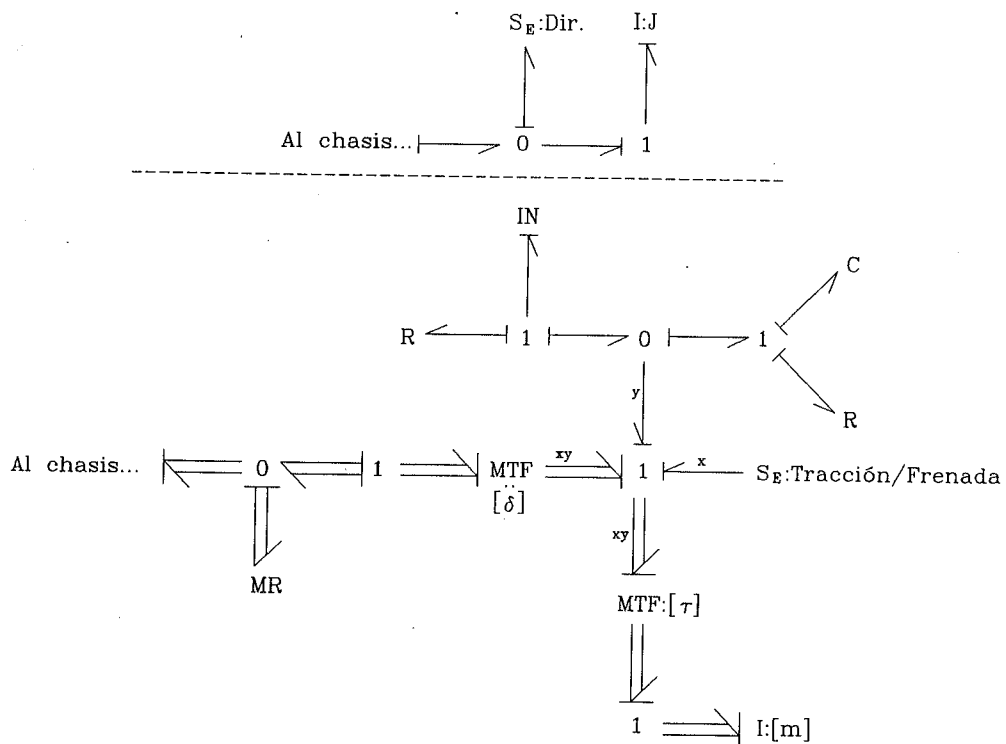


Fig. IV-31: Bond graph del modelo de rueda reducido al plano XY

En este bond graph, no se incluye el término MGY:EJS sobre la unión 1 de velocidad angular, por ser paralelos la velocidad angular  $\Omega$  y el momento  $J\Omega$ . En este caso, la velocidad angular  $\Omega$  coincide con la velocidad del ángulo  $\tau$ .

Por el contrario, en la parte de traslación sí que sería necesario el Gyrator MGY:EJS, ya que la dirección de los ejes x e y, solidarios a la rueda, está afectada por la velocidad angular  $\Omega$ .

Se evita dicho Gyrotor definiendo la velocidad de desplazamiento del centro de gravedad de la rueda en la referencia inercial, tal como se hacía en el modelo tridimensional. Para ello se intercala el Transformer MTF:[ $\tau$ ] antes de la unión 1 de velocidad de desplazamiento del centro de gravedad de la rueda.

Hay que indicar, por último, que el modelo bidimensional XY puede simplificarse más en varios sentidos.

Por una parte, la masa de traslación de la rueda puede incluirse en la del chasis ya que, en este modelo, el centro de la rueda puede considerarse permanentemente fijado a un punto del chasis. De este modo se obtiene una importante simplificación, ya que, además de anular la inercia de la rueda, se evita el elemento Muelle Rígido de enlace entre las inercias de rueda y chasis.

De la misma manera, en el caso de ensamblar este modelo de rueda con otro modelo, también bidimensional, de dirección, la inercia de rotación de la rueda en torno al eje Z podría englobarse con la de la mangueta.

Además, es obvio que no tiene mucho sentido considerar la inercia de rotación de la rueda en torno al eje vertical Z, ya que tampoco se consideran los efectos giroscópicos asociados al movimiento de rotación, de mucha mayor velocidad, en torno al eje  $y_r$  de la rueda.

El modelo resultante de estas simplificaciones es el de la Figura IV-32.

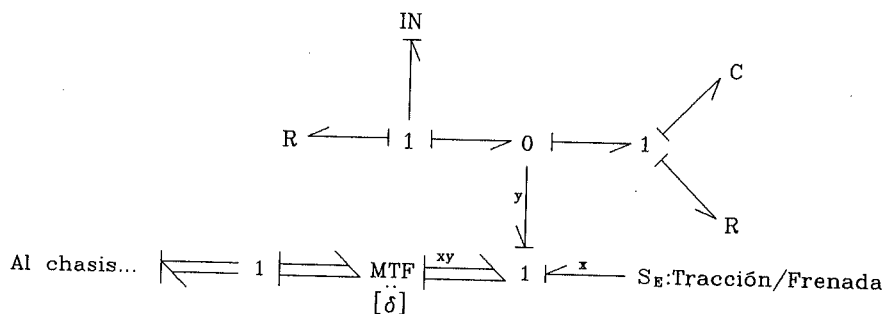


Fig. IV-32: Bond graph del modelo simplificado de rueda reducido al plano XY

Si en este último modelo, se eliminan las puertas R y C que representan la deformabilidad del neumático, puede suprimirse también la puerta IN, con lo que queda modelizada la rueda mediante la puerta R de deriva únicamente (Fig. IV-33).

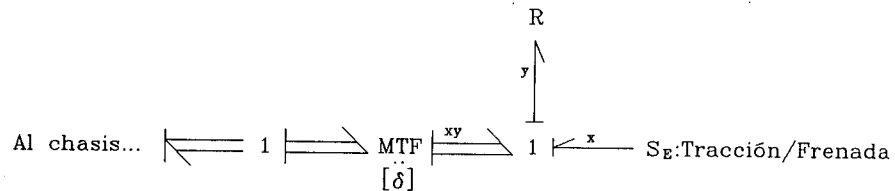


Fig. IV-33: Bond graph del modelo más simplificado de rueda reducido al plano XY

### IV.2.3 - Modelo bidimensional YZ

Como ya se ha dicho, el modelo plano YZ tiene menor interés que los otros dos modelos bidimensionales, ya que no contempla el giro de dirección ni de rotación de las ruedas ni su avance sobre la calzada.

No obstante, es de utilidad su empleo en modelos YZ de vehículo que, como se ve más adelante, son de interés en el estudio de determinados sistemas de suspensión.

Con este modelo pueden estudiarse fenómenos del comportamiento de la rueda relativos a:

- elasticidad y amortiguamiento en el plano YZ
- inercia traslación en el plano YZ
- inercia rotación eje X (sin efectos giroscópicos)
- acción gravitatoria
- pérdida de contacto

Quedan fuera del alcance de este modelo el resto de fenómenos.

La deriva, aunque está asociada al eje transversal "y" no se contempla en este modelo ya que para que haya deriva ha de haber movimiento de avance de la rueda, lo que no

ocurre en este modelo.

Por ello, los esfuerzos laterales en este modelo sólo pueden estar asociados a la deformación lateral del neumático.

En cuanto a la pérdida de contacto, para modelizarla hay que emplear el procedimiento general descrito en el apartado III.2.4.3, ya que, al no existir la puerta R de deriva, no puede aplicarse el procedimiento particular aplicable a las ruedas descrito en el apartado IV.1.3.7.

El bond graph del modelo bidimensional YZ es el de la Fig. IV-34, derivándose también su estructura de la del modelo tridimensional. En la unión Cero, se aplica el conjunto de grafos necesario si se desea modelizar la pérdida de contacto entre rueda y calzada.

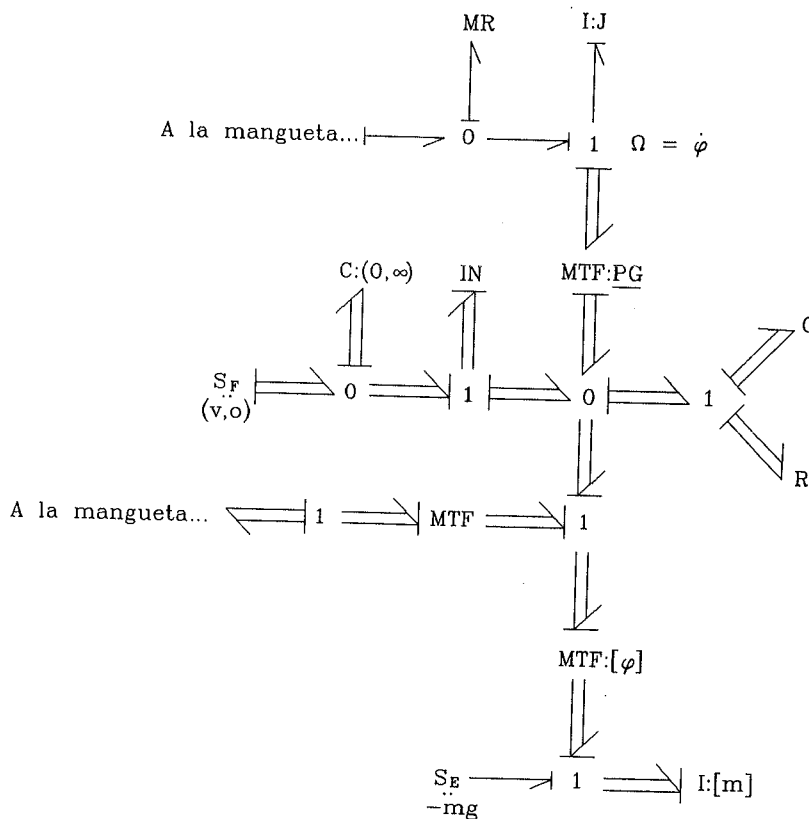


Fig. IV-34: Bond graph del modelo de rueda reducido al plano YZ

### IV.3 - EJEMPLOS DE SIMULACION

Se exponen a continuación varios ejemplos de simulación, efectuados con los anteriores modelos de rueda, con el fin de comprobar que los resultados obtenidos son correctos, analizar el comportamiento de la rueda y obtener criterios para efectuar en cada caso la modelización óptima.

#### IV.3.1 - Comportamiento de la rueda sujeta a esfuerzo lateral. Influencia de la deriva.

La situación que se simula consiste en obligar a la rueda a avanzar con velocidad constante sobre una línea recta, el eje X de la referencia fija, sobre la que se mantiene mediante una restricción, aplicándose, a partir de un determinado instante, un giro de dirección determinado (Fig. IV-35).

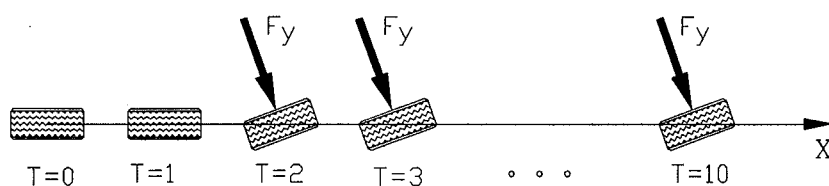


Fig. IV-35: Rueda sujeta a esfuerzo lateral

El ángulo de dirección se aplica progresivamente, mediante una fuente de flujo, a partir del instante  $T=1$  seg., con una velocidad angular constante de valor

$$\dot{\delta} = \pi/60 \text{ rad/s}$$

Se incluye un elemento Muelle Rígido en serie con la citada fuente de flujo para tener la causalidad correcta.

En el instante  $T=2$  seg. finaliza la variación del ángulo de dirección, con lo que el ángulo final es de

$$\delta = \pi/60 \text{ rad} = 3^\circ$$

valor que se mantiene invariable hasta el final de la simulación ( $T=10$  seg.).

El movimiento de la rueda según el eje Y está restringido para que ésta no se desvíe de la trayectoria recta (eje X) a pesar de efectuarse el giro de dirección.

Así mismo, también está restringido el movimiento según el ángulo  $\phi'$  (ángulo de caída) de la rueda.

El par motriz  $\Gamma$ , que actúa sobre la rueda desde el instante  $T=0$ , procede de otra fuente de flujo en serie con un elemento Muelle Rígido, de modo que la velocidad se mantiene prácticamente invariable en todo momento. El valor de la velocidad angular de la rueda es  $\Omega = 10$  rad/seg, lo que equivale a una velocidad de desplazamiento de 9 km/h.

Los parámetros considerados de la rueda son:

Radio de la rueda:	$R = 0.25 \text{ m}$
Masa:	$M_r = 10 \text{ Kg}$
Momento de inercia axial:	$I_{yr} = 0.33 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$
Momento de inercia diametral:	$I_{xr} = I_{zr} = 0.03 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$
Rigidez longitudinal del neumático:	$C_{nx} = 50000 \text{ N/m}$
Rigidez transversal del neumático:	$C_{ny} = 50000 \text{ N/m}$
Rigidez radial del neumático:	$C_{nz} = 150000 \text{ N/m}$
Amortig. longitudinal del neumático:	$R_{nx} = 1000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$
Amortig. transversal del neumático:	$R_{ny} = 1000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$
Amortig. radial del neumático:	$R_{nz} = 1000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$
Coefficiente de deriva:	$C_d = 60000 \text{ N/rad}$
Coefficiente de deslizamiento:	$C_s = 100000 \text{ N}$

El modelo elaborado para efectuar esta simulación se basa en el Modelo Tridimensional de Rueda (Fig. IV-27), sin unión al chasis y con las restricciones indicadas. Su bond graph se representa en la Fig. IV-36.

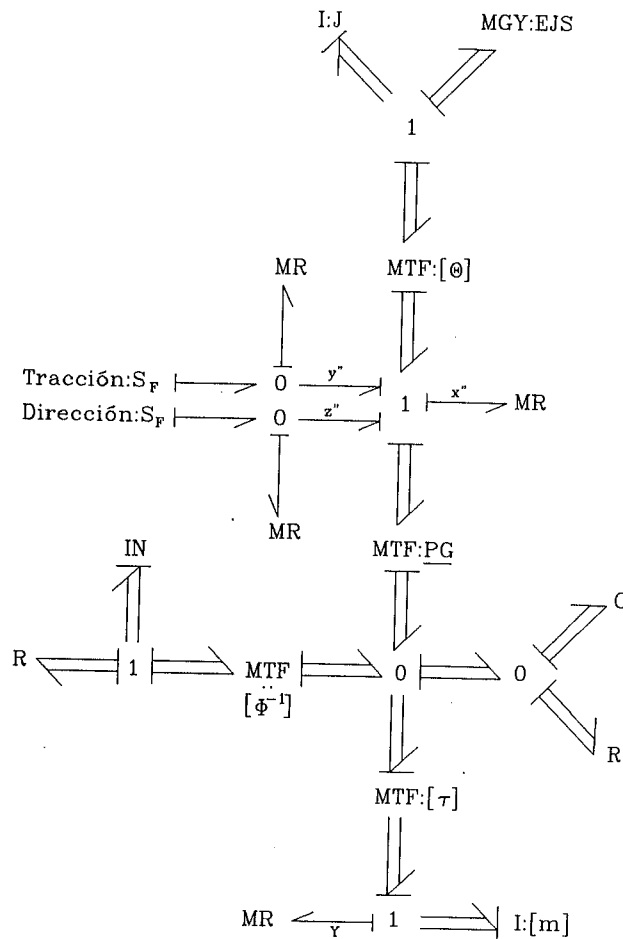


Fig. IV-36: Bond graph de la rueda sujeta a esfuerzo lateral

Se efectuarán dos simulaciones con este modelo de rueda.

En la primera simulación, la rueda tiene un coeficiente normal de deriva ( $C_D = 60000 \text{ N/rad}$ ) mientras que en la segunda la deriva es prácticamente nula.

Con el fin de no tener que cambiar el modelo, en lugar de hacer absolutamente nula la deriva, se le da un valor muy pequeño, de modo que puede considerarse inexistente. El coeficiente de deriva tomado es  $C_D = 10^9 \text{ N/rad}$ .

En la Figura IV-37 se representa, para los dos casos simulados, el ángulo  $\tau$ , girado por la rueda en torno al eje vertical de la referencia fija. Las gráficas coinciden ya que los ángulos de dirección  $\delta$  aplicados son los mismos.



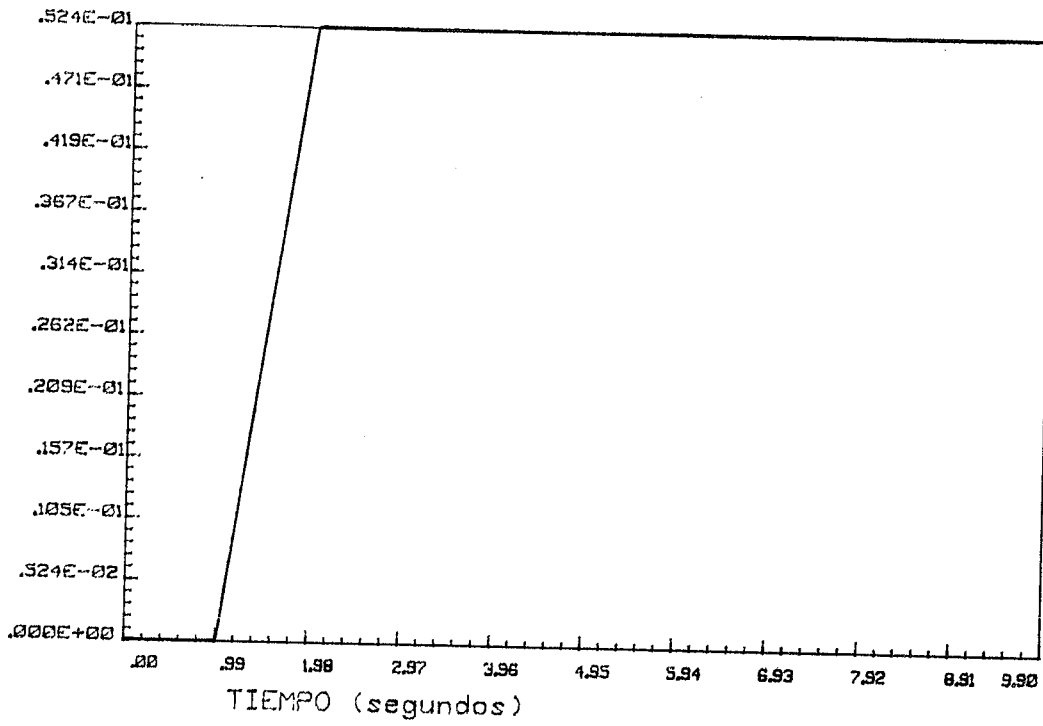


Fig. IV-37: Angulo girado (rad) por la rueda en torno al eje vertical

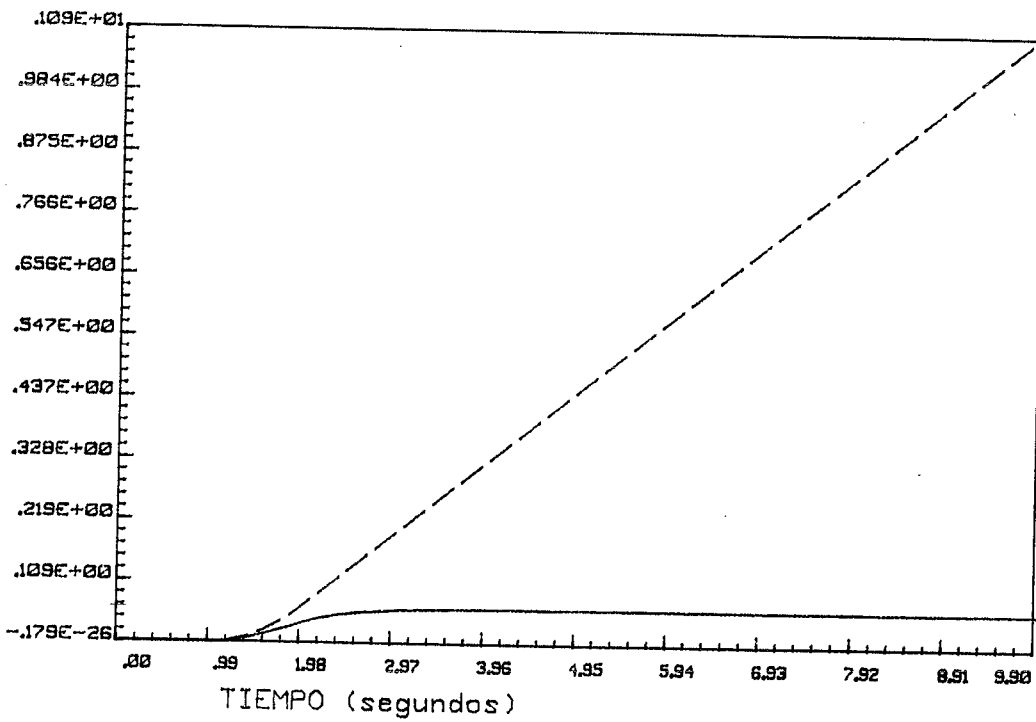


Fig. IV-38: Deformación lateral (m) del neumático

En la Figura IV-38 se representan las deformaciones laterales sufridas por el neumático.

La deformación teóricamente previsible del neumático, en el caso de que la deriva sea normal, se calcula a continuación.

El esfuerzo lateral del neumático es:

$$F_y = C_D \cdot \alpha = 60000 \cdot (\pi/60) = 3141.6 \text{ N}$$

La deformación lateral correspondiente es:

$$q_y = F_y / C_{ny} = 3141.6 / 50000 = 0.0628 \text{ m.}$$

El valor obtenido en la simulación (curva de trazo continuo) es de 0.0629 m.

A este valor se llega, lógicamente, cuando el ángulo de dirección ha alcanzado su valor final ( $T=2$  seg.) y el sistema ya se ha estabilizado ( $T \approx 3$  seg.).

En el caso de que no haya deriva (curva de trazo discontinuo) la deformación lateral crece indefinidamente, como era de esperar, llegando a valores inadmisibles.

Con esto se comprueba, además del correcto funcionamiento del modelo, la necesidad de considerar siempre la deriva en los modelos de vehículos de cuatro ruedas.

En efecto, es sabido que, en los vehículos de cuatro ruedas, los ángulos de dirección de las dos ruedas delanteras no pueden ser iguales entre sí, ya que los ejes de las ruedas han de cortarse en un único punto, situado sobre la línea del eje trasero, que será el centro instantáneo de rotación del vehículo sobre el plano XY de la calzada.

Los mecanismos de dirección (Cuadrilátero de Ackermann, etc.) tratan de conseguir que los ángulos girados por las ruedas se aproximen a los teóricamente ideales, pero, en la realidad, éstos nunca se alcanzan exactamente.

Las diferencias que permanecen entre los ángulos realmente girados y los teóricos son absorbidas por la

deformación del neumático y la deriva.

Dado que un neumático no puede deformarse indefinidamente, en maniobras largas, como la considerada en el ejemplo, es la deriva quien ha de absorber la diferencia.

Por consiguiente, los modelos de vehículos de cuatro ruedas, en los que los ángulos de dirección no sean los ideales, han de considerar necesariamente la deriva.

El modelo de rueda de Bos [6] no considera la deriva ni el deslizamiento, por lo que no es aplicable a vehículos de cuatro ruedas. De hecho, sólo lo aplica a motocicletas, en las cuales los problemas mencionados no existen.

Lo mismo cabría decir de la necesidad de considerar el deslizamiento longitudinal y su relación con el mecanismo diferencial de la transmisión.

Evidentemente, las anteriores no son las únicas causas que hacen necesario considerar la deriva y el deslizamiento longitudinal. El objetivo principal al considerarlos es conocer su influencia en el comportamiento del vehículo.

#### IV.3.2 - Comportamiento de la rueda sometida a movimientos de dirección. Comparación del modelo tridimensional con el modelo bidimensional XY. Efectos giroscópicos.

Se realizan en este ejemplo unas simulaciones con los modelos tridimensional y bidimensional XY, con el fin de comparar los resultados obtenidos mediante ambos modelos en diferentes circunstancias.

Las simulaciones realizadas son similares a las efectuadas en el ejemplo anterior, es decir, consisten en obligar a una rueda a avanzar con velocidad constante sobre el eje X de la referencia fija, aplicándose, a partir de un determinado instante, un determinado giro de dirección.

Los datos de las simulaciones son los mismos que en el anterior ejemplo, con la única diferencia de que en una de las simulaciones la velocidad de desplazamiento de la rueda es mayor con el fin de ver la influencia de dicha velocidad según el modelo empleado.

El bond graph del modelo bidimensional se representa en la Figura IV-39. El del modelo tridimensional es el mismo del ejemplo anterior.

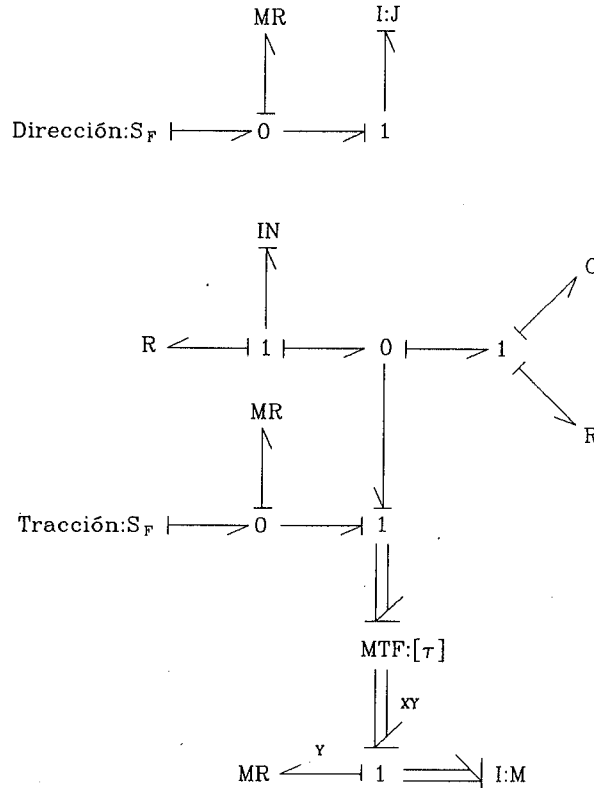


Fig. IV-39: Bond graph modelo bidimensional XY

Todos los datos de masas, momentos de inercia, rigideces, etc. de los dos modelos son iguales, aunque, obviamente, en el caso del modelo bidimensional, sólo se incluyen los parámetros referidos al plano XY.

En el caso bidimensional, la fuente de flujo responsable del desplazamiento de la rueda sobre el terreno tiene un valor tal que la velocidad de desplazamiento de la rueda sea la misma que en el caso tridimensional, considerando que el radio de la rueda en este último caso es de 0.25 m.

En las figuras que recogen los resultados de las simulaciones (Figura IV-40 y siguientes), las curvas de trazo continuo corresponden al caso en que la velocidad de

desplazamiento es de 2.5 m/s y las de trazo discontinuo al caso en que dicha velocidad es de 25 m/s.

En la Figura IV-40 aparecen las deformaciones laterales sufridas por el neumático obtenidas con el modelo bidimensional.

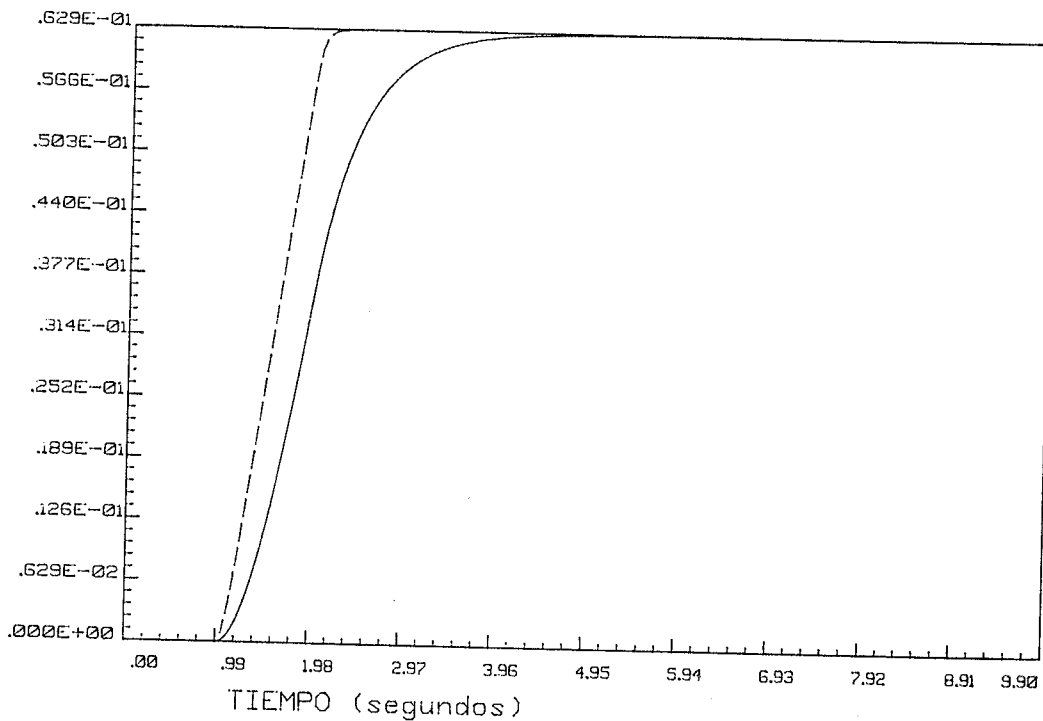


Fig. IV-40: Deformación lateral (m) del neumático obtenida con el modelo bidimensional.

Como puede verse, en el caso de ser mayor la velocidad, se llega antes al valor final, lo cual es lógico, ya que la deformación lateral del neumático es más rápida.

No obstante, dicho valor final (0.0629 m) es el esperado (ver párrafos anteriores) y, como puede verse, no depende de la velocidad de desplazamiento, como corresponde a la expresión básica empleada para la modelización de la deriva ( $F_y = C_D \cdot a$ ).

Los resultados obtenidos con el modelo tridimensional, tanto en el valor final como en la forma de las curvas, son

exactamente iguales.

En la Figura IV-41 aparecen los resultados, obtenidos mediante el modelo bidimensional, de las deflexiones sufridas por la Compliance colocada en serie con la fuente de flujo de la dirección. Estas deflexiones guardan relación con el esfuerzo que hay que aplicar en el mecanismo de dirección para obtener el ángulo de dirección deseado.

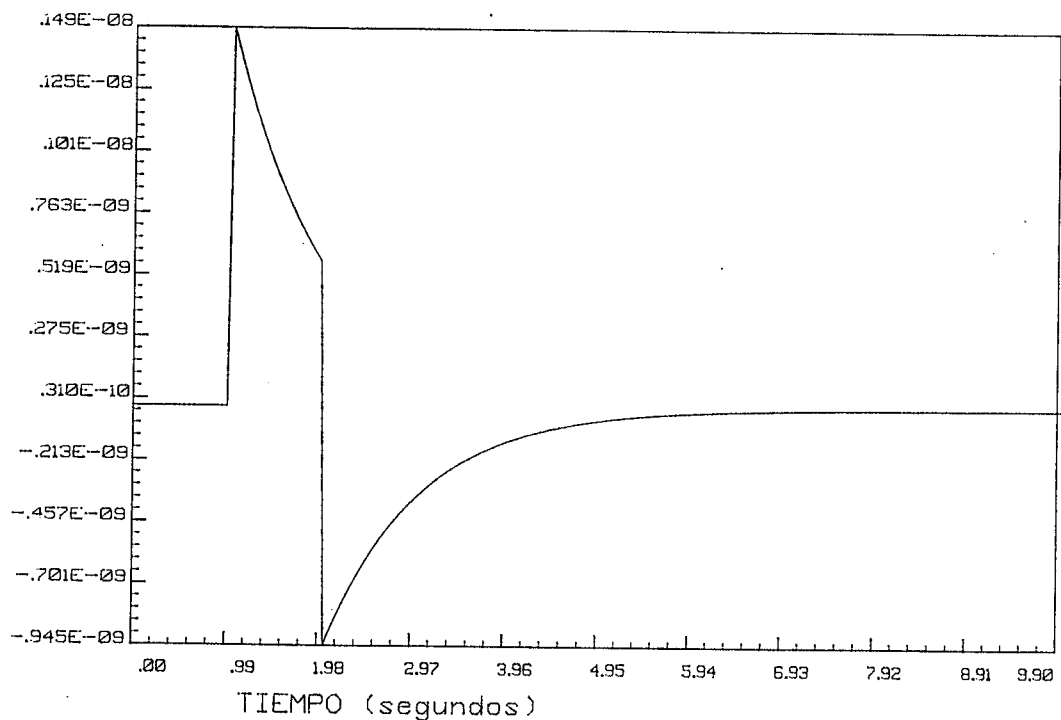


Fig. IV-41: Deflexión (rad) de la Compliance de la dirección, obtenida con el modelo bidimensional.

Las curvas correspondientes a las dos simulaciones de diferente velocidad, están superpuestas, lo que equivale a decir que el modelo bidimensional, en este aspecto, es insensible a la velocidad.

En la Figura IV-42 se recogen los resultados obtenidos con el modelo tridimensional, que, como puede verse, sí que dependen de la velocidad.

La dependencia de la velocidad es debida a los efectos

giroscópicos, los cuales hacen que el esfuerzo necesario para girar la dirección, sobre el eje Z, sea tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad de rotación de la rueda sobre su propio eje  $y''$ .

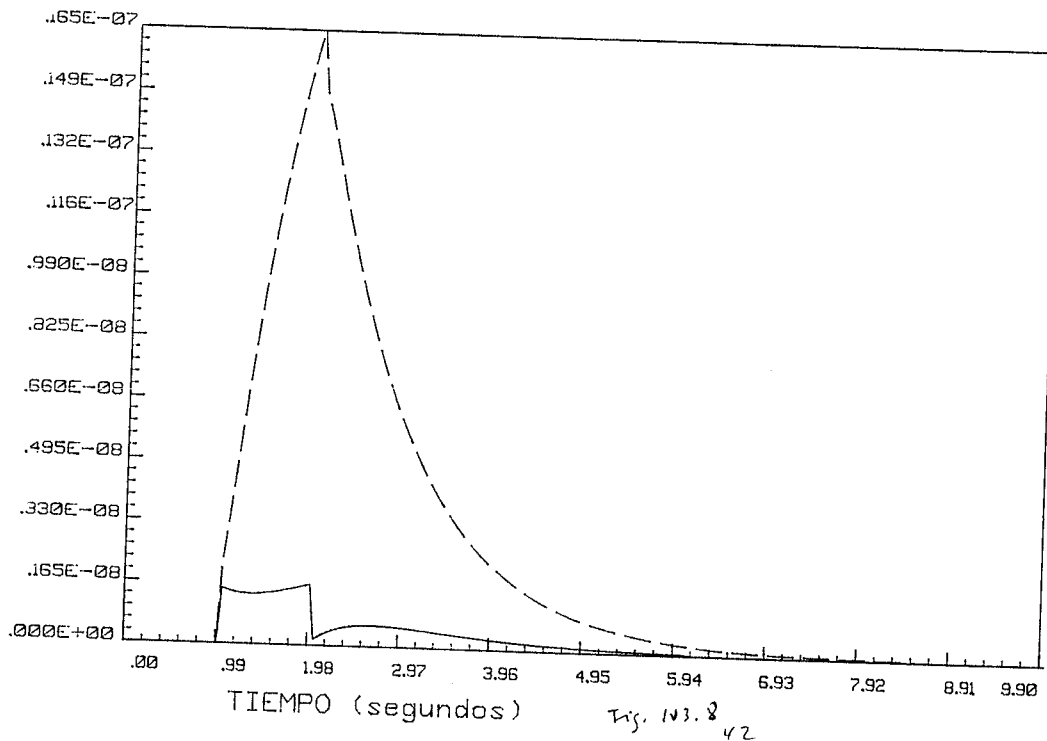


Fig. IV-42: Deflexión (rad) de la Compliance de la dirección, obtenida con el modelo tridimensional

Las diferencias en los resultados obtenidos con ambos modelos, se encuentran, por lo tanto, en los efectos giroscópicos, los cuales no son contemplados por el modelo bidimensional.

Puede concluirse que, para la consideración del comportamiento en el plano XY de la interfase rueda-suelo (deriva, deformación lateral del neumático, etc.) es suficiente con el modelo bidimensional, pero cuando se desea incluir en el estudio la influencia de la dinámica de la rueda en su conjunto (por ejemplo, para estudiar los esfuerzos en la dirección) se hace necesario el modelo tridimensional.

**IV.3.3 - Comportamiento de la rueda en movimiento rectilíneo sometida a carga vertical variable. Influencia de la deformación radial del neumático.**

En este caso se considera que todos los movimientos del conjunto están contenido en el plano XZ, por lo que se empleará el modelo bidimensional XZ.

Se considera un sistema compuesto por una rueda y una masa de 250 Kg, la cual viene a representar la parte de la masa suspendida del chasis que es soportada por la rueda.

Entre la rueda y la masa suspendida se sitúa una suspensión, modelizada de forma simplificada, compuesta por un conjunto muelle-amortiguador en dirección vertical (Z) y una restricción a los desplazamientos en dirección longitudinal (X) (Fig. IV-43).

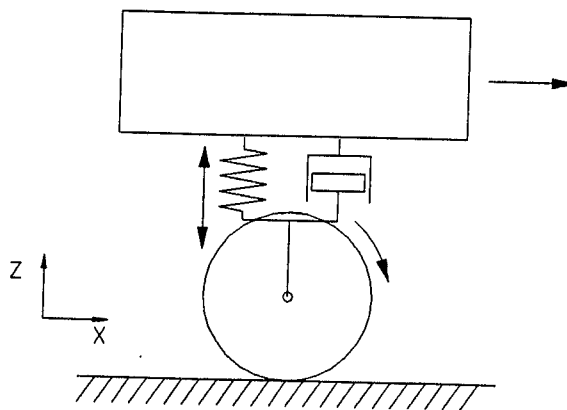


Fig. IV-43: Conjunto de rueda, suspensión y masa suspendida

Las características de masa, rigidez, etc. de la rueda son las mismas del ejemplo IV.3.1. En cuanto a la suspensión, la rigidez del muelle es de 10000 N/m y la constante del amortiguador es de 950 N·s/m.

En el modelo se consideran todas las posibilidades que se han expuesto en el desarrollo teórico. Además de las fundamentales, se incluyen también el deslizamiento, el desequilibrio estático y la posibilidad de separación de la



calzada.

El bond graph empleado para modelizar el sistema anterior se muestra en la Figura IV-44.

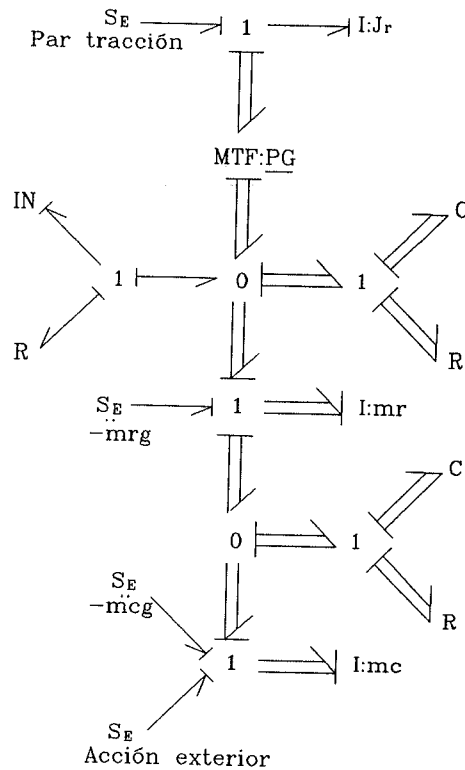


Fig. IV-44: Bond graph del modelo de la Figura IV-43.

En el presente ejemplo, se estudiará la influencia de la variación del radio de la rueda.

Una de las características fundamentales de las ruedas neumáticas es su deformabilidad, la que es causa de fenómenos complejos tales como la deriva.

Otras efectos producidos por la deformación del neumático tienen una relación causa-efecto menos compleja, pero no por ello menos importante.

En concreto, la deformación radial del neumático,

además de constituir una de las componentes del movimiento del sólido rueda, influye en el comportamiento dinámico de la rueda y, consecuentemente, en el resto del vehículo.

Por ejemplo, a la hora de considerar maniobras de aceleración o frenada, la variación del radio de la rueda, producida por la propia transferencia de carga inherente a la maniobra, produce variaciones en las fuerzas longitudinales entre rueda y calzada, ya que ante un mismo par de tracción o frenada, la fuerza longitudinal correspondiente es inversamente proporcional al radio efectivo de la rueda.

Otros efectos son menos evidentes y se ponen de manifiesto al realizar simulaciones.

Por ejemplo, la aplicación de una carga vertical sobre el chasis, produce esfuerzos longitudinales, siempre que el vehículo esté en marcha y exista variación en el radio de la rueda.

Para comprobarlo, se empleará el modelo reducido al plano XZ, que incluye rueda y masa suspendida, descrito al principio de este apartado.

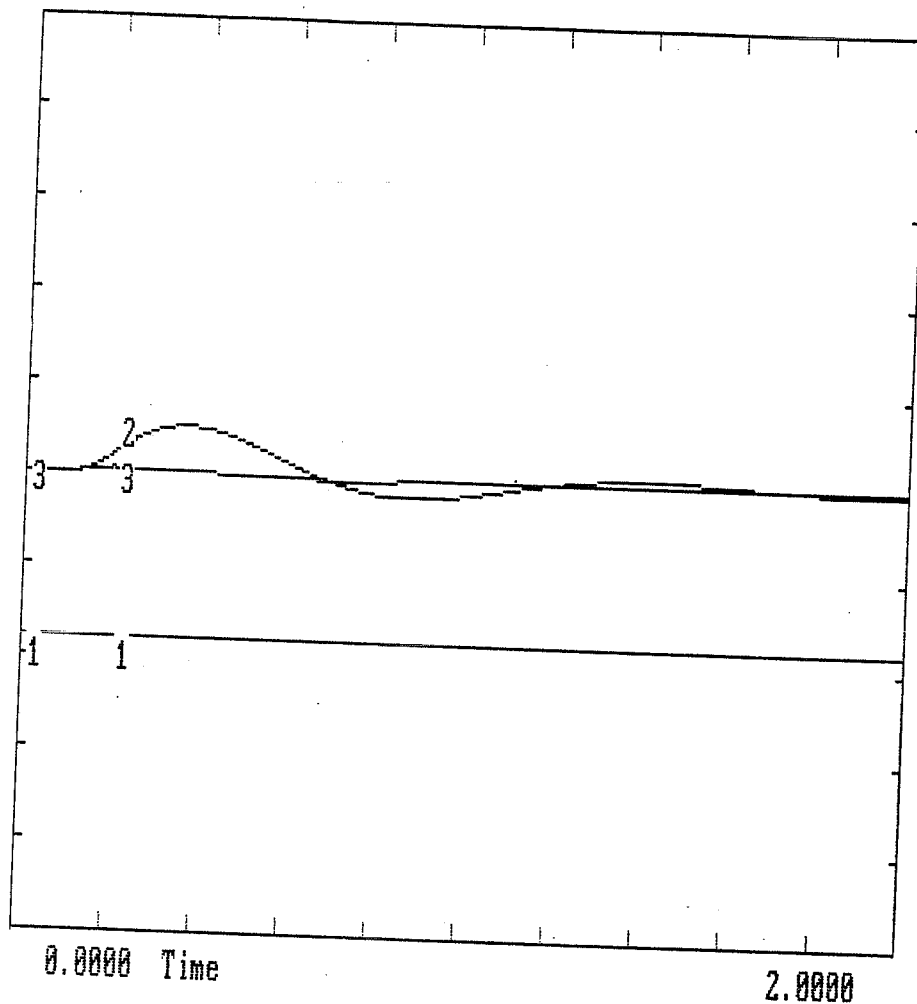
El conjunto de rueda y masa suspendida avanza, en régimen estacionario, a una velocidad de 5 m/s.

En el instante  $T=0.1$  seg. se aplica sobre el chasis una fuerza vertical de 500 N, la cual desaparece en el instante  $T=0.2$  seg.

Esta acción produce, además de la consiguiente elevación del chasis, un incremento del radio de la rueda.

Si no hay variación del radio de la rueda, o simplemente no se considera dicha variación en el modelo, no se produce ningún esfuerzo longitudinal entre rueda y chasis.

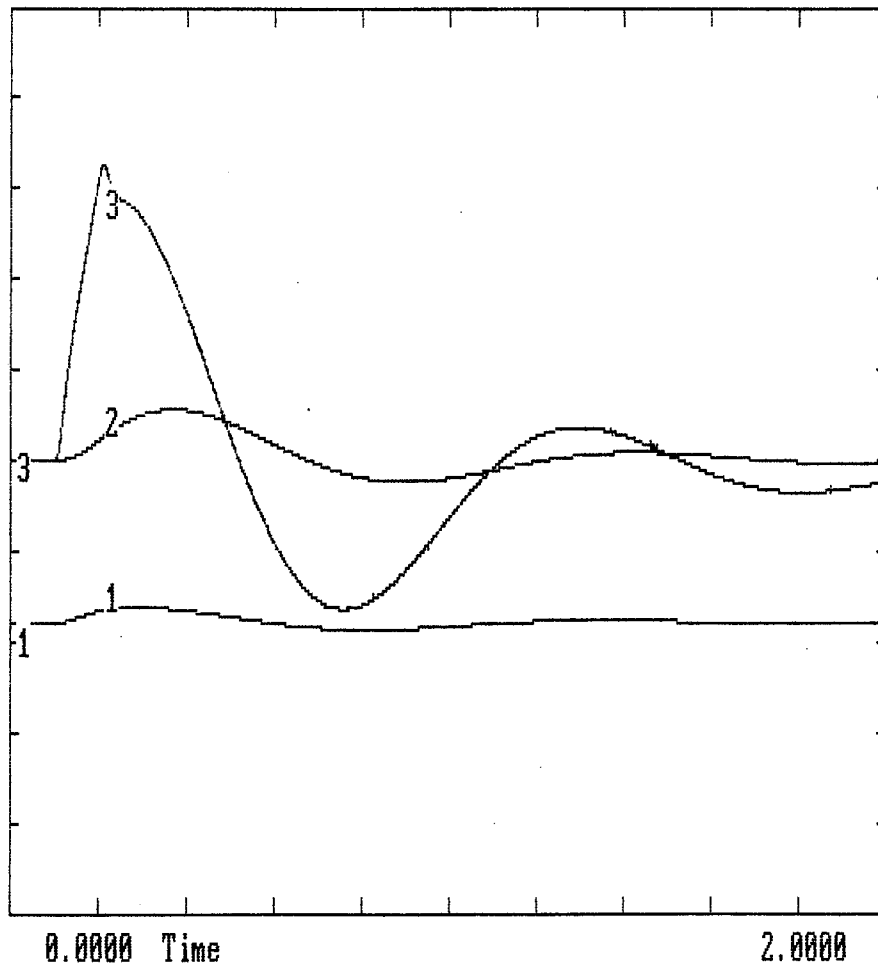
Esto queda de manifiesto en la Figura IV-45, donde se representan: el radio, constante, de la rueda (curva 1), la elevación del chasis (curva 2) y el esfuerzo longitudinal mencionado (curva 3). Este último, como puede verse, es nulo en todo instante.



Curva	Significado	Mínimo	Máximo
1	Radio de la rueda	+0.2 m	+0.3 m
2	Desplazamiento vertical del chasis	-0.2 m	+0.2 m
3	Esfuerzo longitudinal entre rueda y chasis	-10 N	+10 N

Fig. IV-45: Efectos de la elevación de la masa suspendida considerando radio fijo

Sin embargo, cuando hay variación en el radio de la rueda, es decir, cuando éste deja de ser constante, la aplicación de la fuerza vertical produce esfuerzos longitudinales entre rueda y chasis como puede verse en la Figura IV-46.



Curva	Significado	Mínimo	Máximo
1	Radio de la rueda	+0.2 m	+0.3 m
2	Desplazamiento vertical del chasis	-0.2 m	+0.2 m
3	Esfuerzo longitudinal entre rueda y chasis	-10 N	+10 N

Fig. IV-46: Efectos de la elevación de la masa suspendida considerando radio variable

El origen de este esfuerzo longitudinal se encuentra en que la variación del radio producida por la acción vertical, produce una variación en la velocidad angular de la rueda, la cual viene acompañada de un esfuerzo longitudinal en la interfase rueda calzada.

#### IV.3.4 - Comportamiento de la rueda en movimiento rectilíneo sometida a carga vertical variable. Despegue de la calzada. Efectos del desequilibrio estático.

Con el mismo modelo bidimensional XZ empleado en el anterior ejemplo, pueden estudiarse algunos efectos que se producen en el caso de que la rueda se separe de la calzada.

Para simular dicha separación, se considera que, sobre la masa suspendida del modelo empleado en este apartado, actúa una fuerza que tiende a levantarla.

El consiguiente movimiento ascendente de la masa suspendida puede considerarse equivalente a la elevación de la parte de la carrocería correspondiente al lado interior de una curva que describa el vehículo.

Partiendo de unas condiciones iniciales de velocidad de rotación de la rueda de 80 rad/s, equivalente a una velocidad de desplazamiento de 18.57 m/s, y aplicando una fuerza vertical ascendente sobre el chasis de 2500 N, los resultados obtenidos se representan en las gráficas de la Figura IV-47.

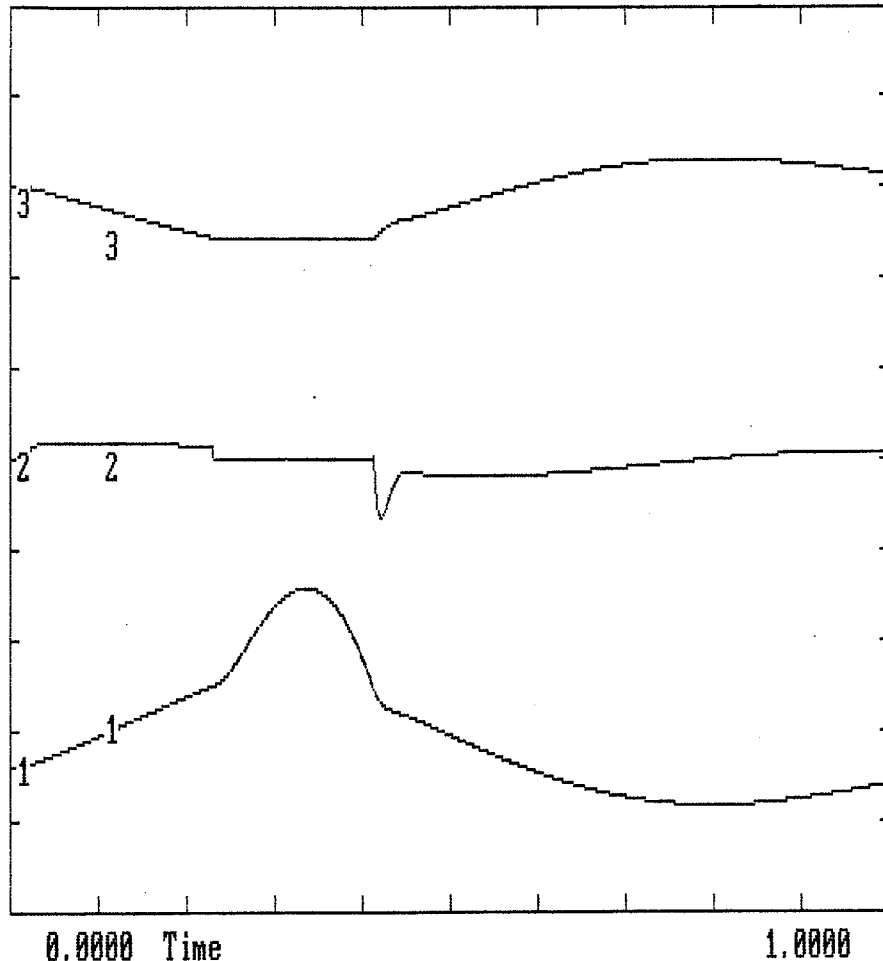
En dichas gráficas, puede verse como, a medida que aumenta la cota vertical del centro de la rueda, disminuye su velocidad angular, lo que era de esperar ya que la velocidad longitudinal del conjunto permanece invariable.

La velocidad angular de la rueda se estabiliza en un valor fijo cuando se produce la pérdida de contacto, ya que el par de tracción aplicado sobre la rueda se ha considerado nulo.

Análogas consideraciones cabe hacer en relación con el esfuerzo longitudinal en la suspensión.

No obstante, se observa en éste un pico de esfuerzo en el instante de la recuperación del contacto.

Una vez recuperado el contacto, se inicia una suave oscilación, de 1 Hz aproximadamente, en las variables del sistema. La frecuencia de la oscilación es la correspondiente a la oscilación de la suspensión.



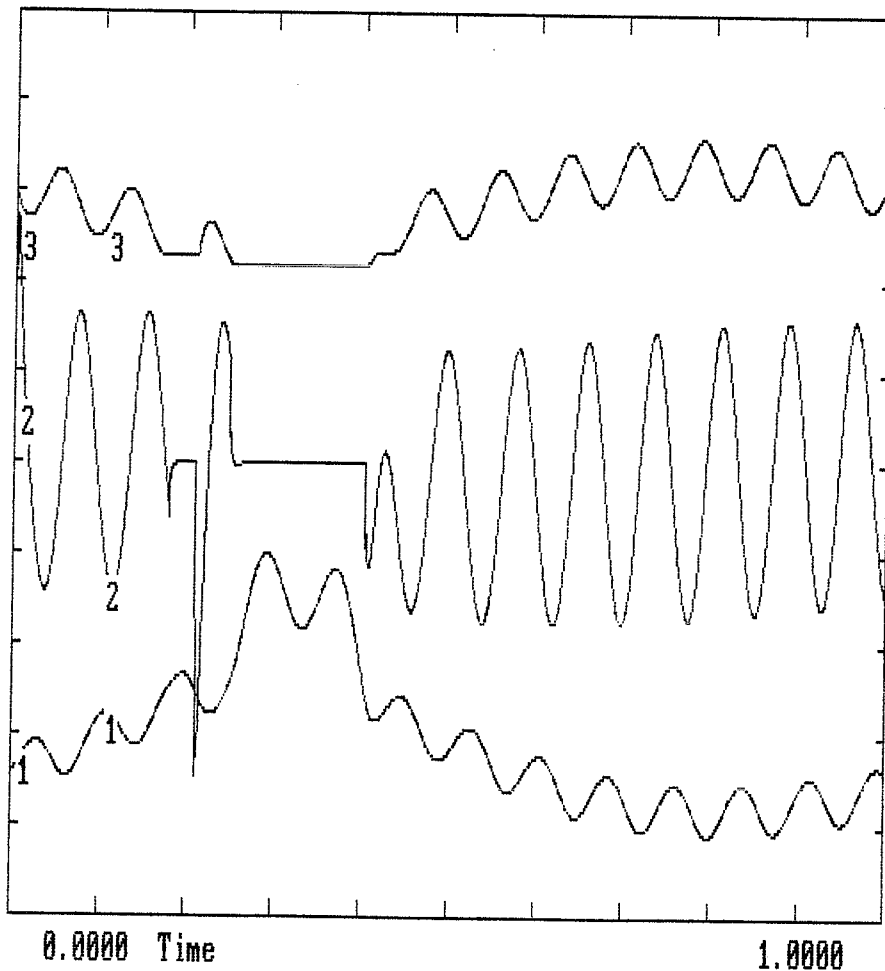
Curva	Significado	Mínimo	Máximo
1	Radio de la rueda	0.2 m	0.4 m
2	Esfuerzo longitudinal en suspensión	-1000 N	+1000 N
3	Velocidad angular de la rueda	0 rad/s	100 rad/s

Fig. IV-47: Efectos de la pérdida de contacto entre rueda y calzada

Con el mismo modelo bidimensional XZ también pueden analizarse los efectos que produce el desequilibrio estático de la rueda: desplazamientos en la suspensión, deformación del neumático, esfuerzos entre chasis y rueda, etc.

Resulta especialmente interesante, estudiar el efecto producido por el desequilibrio cuando se produce separación entre la rueda y la calzada.

Suponiendo que haya un desequilibrio tal que el centro de gravedad de la rueda se encuentre desplazado 0.01 m del centro geométrico de la misma, los resultados que experimenta el sistema con la misma excitación exterior, son los recogidos en las gráficas de la Figura IV-48.



Curva	Significado	Mínimo	Máximo
1	Radio de la rueda	0.2 m	0.4 m
2	Esfuerzo longitudinal en suspensión	-1000 N	+1000 N
3	Velocidad angular de la rueda	0 rad/s	100 rad/s

Fig. IV-48: Efectos del desequilibrio en la pérdida de contacto

En estas gráficas pueden verse los efectos producidos por el desequilibrio durante el intervalo de tiempo en que hay contacto.

Puede verse como, cuando se produce el despegue en esta rueda desequilibrada, éste no se produce limpiamente, sino que se aparecen sucesivas tomas y pérdidas de contacto entre la rueda y la calzada.

Asimismo, se originan notables picos en los esfuerzos producidos por dichas discontinuidades en el contacto entre rueda y calzada.

#### IV.3.5 - Comportamiento en el límite de adherencia. Interrelación entre los esfuerzos laterales y longitudinales.

En este ejemplo se aplica la modelización desarrollada en el apartado IV.1.3.3 para estudiar el caso de alcanzar el límite de adherencia entre neumático y calzada.

Para ello, se simula un caso similar al del ejemplo IV.3.1, en el que la rueda está obligada a desplazarse con velocidad constante sobre el eje X de la referencia fija a la vez que es sometida a un giro de dirección determinado.

En este caso, se aplica además un par de frenada progresivo, con el fin de comprobar el comportamiento cuando se alcanza el límite de adherencia.

Se supone que la carga vertical total sobre la calzada es de  $265 \times 9.8 = 2597$  N y que el coeficiente de adherencia es  $\mu = 1$ , con lo que el máximo esfuerzo horizontal soportable es de 2597 N.

En el ejemplo, se aplica, desde el instante  $T=0.1$  seg. hasta el instante  $T=0.5$  seg., un movimiento uniforme de giro de dirección de 0.1 rad/seg. De este modo, a partir del instante  $T=0.5$  seg. la rueda tiene un ángulo de dirección constante de 0.04 radianes.

Teniendo en cuenta que el coeficiente de deriva considerado es de 60000 N/rad, el esfuerzo lateral correspondiente es de  $60000 \times 0.04 = 2400$  N.



A partir del instante  $T=1$  seg. y hasta el instante  $T=1.5$  seg. se aplica un par de frenada de  $100 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

Dado que el radio considerado de la rueda bajo carga es de  $0.283 \text{ m}$ , el esfuerzo longitudinal correspondiente es de  $100/0.283 = 353 \text{ N}$ .

El esfuerzo total en la interfase neumático-calzada será entonces de  $(2400^2 + 353^2)^{\frac{1}{2}} = 2426 \text{ N}$ , valor que no supera el límite de adherencia que era de  $2597 \text{ N}$ .

A partir del instante  $T=1.5$  y hasta el instante  $T=2$  seg. el par de frenada aplicado es de  $500 \text{ N}\cdot\text{m}$ , con lo que el esfuerzo longitudinal correspondiente es de  $500/0.28 = 1786 \text{ N}$ .

En esta nueva situación, el esfuerzo teórico total en la interfase sería de  $(2400^2 + 1786^2)^{\frac{1}{2}} = 2992 \text{ N}$ , valor que en realidad no puede alcanzarse ya que es mayor que el límite de adherencia de  $2597 \text{ N}$ .

Para ver la respuesta del sistema a esta situación, se efectúa la simulación con el modelo citado, representándose en la Figura IV-49 las deflexiones longitudinal y transversal del neumático obtenidas.

Estas deflexiones vienen a representar el esfuerzo que soporta el neumático, siendo la constante de proporcionalidad la rigidez elástica del mismo, que se ha supuesto, para los dos ejes, de  $50000 \text{ N/m}$ .

La curva de la parte superior de la gráfica representa la deflexión lateral, mientras que la curva de la parte inferior representa la deflexión longitudinal.

En esta última se ve claramente el proceso de aplicación por etapas del par de frenada mientras que en la curva de deflexión lateral, puede verse como ésta ha crecido inicialmente en función del ángulo de dirección.

Puede comprobarse que la deformación lateral no es afectada por la aplicación del par de frenada cuando éste es sólo de  $100 \text{ N}\cdot\text{m}$ , lo que concuerda con el hecho de que el esfuerzo total no alcanza el límite de adherencia.

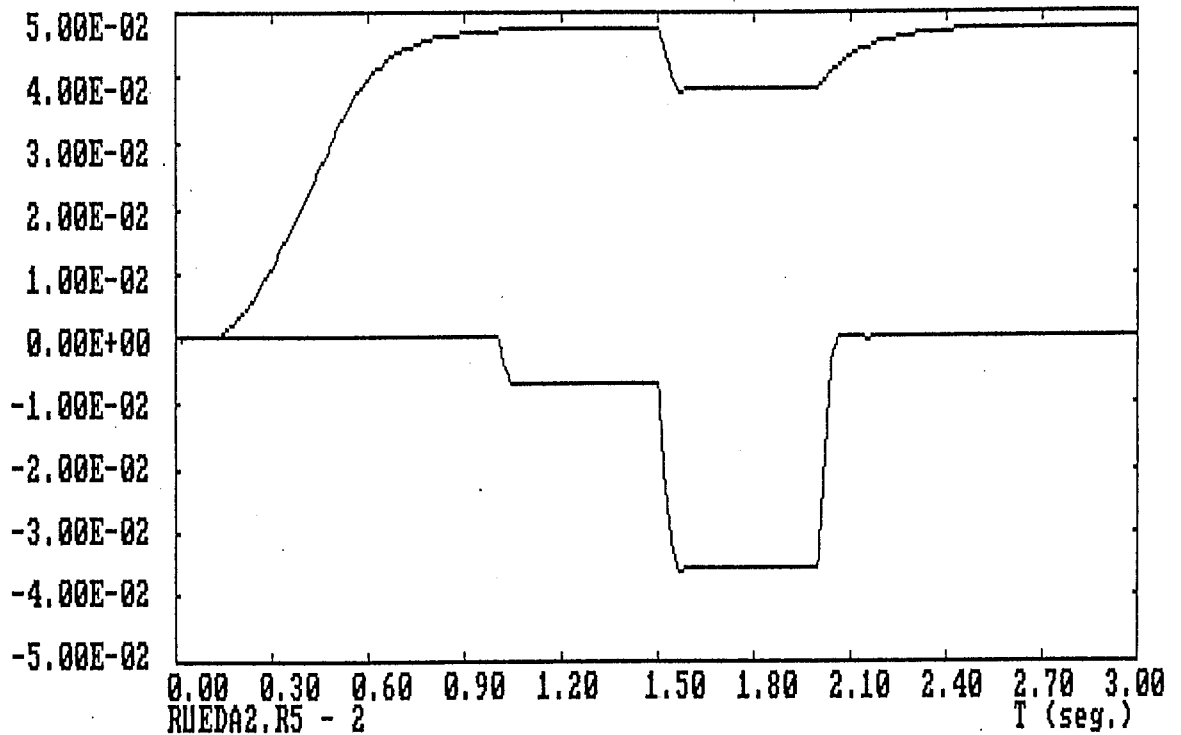


Fig. IV-49: Deflexión longitudinal y transversal del neumático en un caso de esfuerzo lateral y frenada simultáneos.

En efecto, puede observarse como la deformación lateral es de 0.048 m lo que supone un esfuerzo lateral de  $0.048 \times 50000 = 2400$  N, valor que coincide con el previsto anteriormente en función del ángulo de deriva. Igualmente, el esfuerzo longitudinal obtenido es de  $0.007 \times 50000 = 350$  N, valor que también coincide con el previsto en función del par de frenada aplicado.

Sin embargo, cuando el par de frenada sube a 500 N·m y se alcanza el límite de adherencia, puede verse como disminuye el esfuerzo lateral que es capaz de soportar el neumático.

En este caso, la deformación transversal se reduce a 0.0382 m, lo que supone un esfuerzo de  $0.0382 \times 5000 = 1910$  N, mientras que la deformación longitudinal se queda en 0.0353 lo que supone un esfuerzo de  $0.0353 \times 50000 = 1765$  N.

Ambos valores son menores que los que se obtendrían de un cálculo independiente de ambos esfuerzos: en efecto, en el eje transversal, 1910 N es menor que 2400 N y, en el eje

longitudinal, 1765 N es menor que 1786 N.

Por otra parte, la suma vectorial de ambos esfuerzos equivale al esfuerzo máximo impuesto por límite de adherencia:  $(1910^2 + 1765^2)^{\frac{1}{2}} = 2600$  N, valor que es prácticamente igual al límite de adherencia de 2597 N.

#### IV.4 - CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES SOBRE LA MODELIZACION DE RUEDAS

En este Capítulo se ha desarrollado la modelización de ruedas neumáticas, construyendo un modelo tridimensional que contempla la dinámica de traslación y rotación de la rueda, con los correspondientes efectos giroscópicos, los posibles desequilibrios, la deformación radial del neumático y la modelización de las interfases Rueda-Calzada y Rueda-Vehículo.

En la modelización de la interfase Rueda-Calzada, se contempla la modelización de la deriva y el deslizamiento longitudinal, y el comportamiento en el límite de adherencia. Ello ha llevado a la formulación de un modelo de fácil aplicación, cuyos resultados se comparan con los del modelo de Dugoff. También se expone cómo se considera el par de autoalineación y la resistencia a la rodadura.

En todos los casos se han empleado formulaciones simplificadas, pero que pueden sustituirse sin problemas por formulaciones más complejas, tal como se explica más adelante.

Se ha considerado también la modelización de la pérdida de contacto entre rueda y calzada, y, partiendo del modelo tridimensional, se han desarrollado los tres posibles modelos bidimensionales.

Por último se han realizado una serie de ejemplos de simulación para comprobar el correcto funcionamiento de los modelos y ver sus posibilidades.

Como consecuencia tanto de los razonamientos efectuados en la construcción de los anteriores modelos como de los resultados de las simulaciones realizadas, se obtienen varias conclusiones y se hace necesario hacer algunas observaciones en relación con la modelización de ruedas.

## A - Sobre los modelos bidimensionales

Los modelos bidimensionales son útiles para determinados casos y tienen la ventaja de su simplicidad, pero adolecen de ciertas limitaciones que hay que tener en cuenta para aplicarlos correctamente.

Las limitaciones del modelo plano XY tienen su origen en que no se considera la rotación de la rueda sobre su propio eje. Ello impide conocer el deslizamiento longitudinal "s" y, consecuentemente, la fuerza longitudinal  $F_x$  de la interfase rueda-calzada.

La fuerza lateral  $F_y$  tampoco puede modelizarse correctamente en todo el rango posible de ángulos de deriva, ya que, sobre todo cuando los esfuerzos son grandes, dicha fuerza lateral  $F_y$  está limitada por la fuerza longitudinal  $F_x$  la cual, como se ha visto, es desconocida.

Por último, y dado que tampoco se conoce la carga vertical  $F_z$  sobre rueda, cuya influencia en el comportamiento del neumático es bien conocida, no pueden aplicarse modelos sofisticados del comportamiento del neumático que consideran dicha influencia.

Sin embargo, a pesar de sus limitaciones, es útil este modelo de rueda ya que los modelos bidimensionales de vehículos son muy prácticos para el estudio del comportamiento del vehículo en curvas, su carácter sobrevirador o subvirador, el estudio de vehículos trailer, análisis de trayectorias, estabilidad frente a acciones como el viento lateral, etc.

El modelo YZ tampoco considera la rotación de la rueda sobre su propio eje ni su movimiento de avance según el eje  $x'$ , con lo que su aplicación se limita a casos muy específicos, como el estudio, con modelos de vehículos reducidos al plano YZ, de la geometría de las suspensiones, localización de centros de balanceo, etc.

El modelo XZ es el único modelo bidimensional que considera la rotación de la rueda sobre su propio eje. Por ello, puede sustituir correctamente al modelo tridimensional siempre que los movimientos y esfuerzos del sistema estén contenidos en el plano XZ y no haya ninguna asimetría

(desequilibrio dinámico, etc.). Tiene aplicación en los modelos para el estudio del comportamiento del vehículo en aceleración y frenada, desplazamientos de la suspensión, cargas sobre enganches de remolques, diferencias entre tracción delantera o trasera, motricidad, etc.

En conclusión, los modelos bidimensionales, son de gran aplicación, y tienen la ventaja de su simplicidad, pero tienen las limitaciones citadas, que sólo los modelos tridimensionales como el desarrollado superan.

#### B - Sobre la inclusión de determinadas cuestiones en los modelos de rueda

Se ha puesto de manifiesto la utilidad de considerar en la simulación determinadas cuestiones. A continuación se exponen algunas.

Los efectos giróscopicos tienen una notable influencia en la dirección. Para considerarlos hay que trabajar con modelos tridimensionales de rueda.

La deriva, es necesaria no sólo para considerar el comportamiento de la rueda frente a los esfuerzos laterales, sino incluso para que funcionen correctamente los modelos de vehículos de cuatro ruedas.

La modelización del despegue de la calzada es tan importante como la modelización de la superación del límite de adherencia, porque supone la desaparición total de la interacción rueda-calzada.

Los desequilibrios, además de producir esfuerzos y movimientos en los sistemas de suspensión y dirección, afectan a otras cosas, como, por ejemplo, la forma en que se produce el despegue de la calzada.

La deformación radial de la rueda, además de constituir un elemento más de suspensión, produce otros efectos, como los esfuerzos longitudinales que aparecen al variar el radio de la rueda cuando ésta está girando.

Las anteriores cuestiones, evidentemente, no son las únicas que hay que considerar, ya que para cada caso serán de utilidad una serie de cuestiones determinadas, que

pueden incluir las citadas u otras, que también considera el modelo de rueda que se ha propuesto.

### C - Sobre la modelización del comportamiento de la interfase rueda-calzada

En cuanto a la modelización del comportamiento de la interfase rueda-calzada hay que hacer varias observaciones.

La modelización básica, desarrollada en el apartado IV.1.3, es suficientemente precisa para la realización de estudios preliminares a lo largo de todo el rango de los valores posibles de deslizamiento "s" y de deriva "a".

No obstante, si se desea mayor precisión en los resultados, habría que emplear modelos más sofisticados, como los modelos de Dugoff [40], los de base empírica desarrollados por Bakker, Nyborg y Pacejka [44], etc.

De este modo puede considerarse la influencia que ejercen factores como la carga sobre la rueda, el ángulo de caída, etc. sobre el comportamiento del neumático en su interfase con la calzada.

Una solución para su uso sería obtener las variables de entrada de dichos modelos (ángulo de deriva, deslizamiento, carga sobre la rueda, ángulo de caída, etc.) a partir de los flujos y esfuerzos del bond graph del modelo de rueda y con ellas calcular los esfuerzos  $F_x$ ,  $F_y$  y el par de autoalineación  $M_z$  mediante los modelos citados.

Dichos esfuerzos  $F_x$  y  $F_y$  se introducirían mediante una fuente de esfuerzo, tal como se indica en la Figura IV-20. El par de autoalineación ya se incluye mediante una fuente de esfuerzo.

En cualquier caso, estos modelos más sofisticados tienen su principal aplicación en el modelo tridimensional, ya que sólo en él pueden conocerse variables como el deslizamiento, el ángulo de caída, etc. o, si el sistema lo permite, en el modelo bidimensional XZ, por los motivos antes expuestos.

El modelo básico tiene la ventaja de que es más sencillo e intuitivo que otros modelos y hace más improbables

los errores ya que emplea elementos pasivos (puertas Resistencia) en lugar de elementos activos (fuentes de esfuerzo).

D - En general, sobre el modelo de rueda desarrollado

Hay que resaltar que el nuevo modelo de rueda desarrollado, en cualquiera de sus versiones, tiene su principal ventaja en que se trata de un modelo global de rueda, no de neumático, que considera a ésta en su conjunto y que puede integrarse fácilmente, gracias a estar desarrollado con la técnica de bond graph, como un submodelo independiente, en un modelo completo de vehículo.

## Capítulo V

### MODELIZACION DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSION Y DIRECCION

#### V.0 - INTRODUCCION

En este Capítulo, se desarrolla la modelización en bond graph de los sistemas de suspensión y dirección del vehículo.

Los sistemas elegidos para desarrollar la modelización son el sistema Mac Pherson de suspensión y la dirección de cremallera.

La suspensión Mac Pherson y la dirección de cremallera son los sistemas que más se emplean actualmente en los vehículos de turismo, tanto por su simplicidad constructiva como por su buen comportamiento.

Dado que la suspensión Mac Pherson se usa principalmente en el tren delantero del vehículo, es apropiado centrarse en su modelización teniendo presente que va a modelizarse también el sistema de dirección.

En relación con el tren trasero del vehículo, no se modelizan otros mecanismos de suspensión, dado que la sistemática de modelización sería muy similar.

Por ello, al modelizar un vehículo completo en esta tesis, se adoptará para el tren trasero un modelo de geometría simplificada, modelo que también se desarrollará en este mismo capítulo.

Tanto la suspensión como la dirección se modelizarán como conjuntos mecánicos independientes, pero preparados para unirse entre sí y con los modelos de rueda y chasis.

La modelización de la suspensión y la dirección se centrará en el mecanismo y en su geometría, aplicando para ello los modelos de sólido rígido, de masa despreciable o



no despreciable, desarrollados en los Capítulos II y III.

Los elementos energéticos de la suspensión, es decir, el elemento elástico (normalmente un muelle helicoidal) y el elemento de amortiguación (normalmente un amortiguador hidráulico telescópico), se modelizarán simplemente como elementos Compliance y elementos Resistencia respectivamente, sin entrar en mayores detalles.

Tampoco se consideran los sistemas complementarios de la dirección, tales como los posibles sistemas de servoasistencia, etc.

La modelización considerará inicialmente los mecanismos en tres dimensiones, pasando después a considerarse también modelizaciones bidimensionales, las cuales se derivan directamente de las tridimensionales.

#### V.1 - MODELIZACION TRIDIMENSIONAL DE UN SISTEMA DE SUSPENSION MAC PHERSON

Entre las suspensiones de tipo independiente, la suspensión Mac Pherson es actualmente una de las más empleadas en vehículos de turismo, tanto por su simplicidad constructiva como por su buen comportamiento. Se usa principalmente en las suspensiones delanteras.

La forma de esta suspensión es la de un triángulo articulado ABC, uno de cuyos lados es de longitud variable (Fig. V-1).

El lado AB forma parte del chasis del vehículo.

El lado BC del triángulo corresponde al brazo inferior de la suspensión.

El lado AC, que es el de longitud variable, contiene los elementos de suspensión, es decir, el conjunto de muelle y amortiguador telescópico.

La parte inferior de este tercer lado es solidaria al soporte de la mangueta, de la cual forma parte el eje de giro de la rueda.

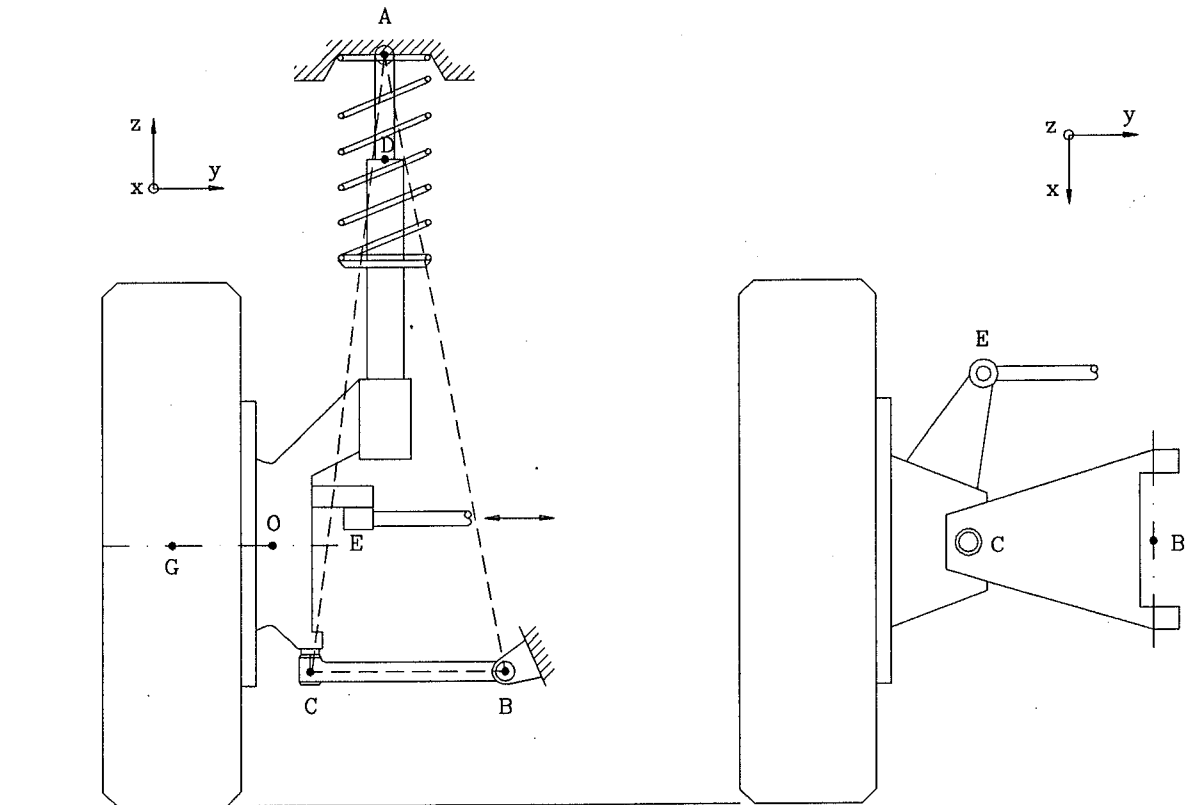


Fig. V-1: Suspensión Mac Pherson

### V.1.1 - Planteamiento de la modelización

Se modelizará la suspensión Mac Pherson como un conjunto mecánico independiente. El modelo obtenido se unirá posteriormente a los modelos de dirección, rueda y chasis.

Para la modelización se considerará la suspensión Mac Pherson formada por tres cuerpos (Fig. V-2):

- 1) El vástago del amortiguador
- 2) El brazo inferior
- 3) El cuerpo del amortiguador, solidario a la mangueta

La descomposición anterior se efectúa únicamente a efectos de modelización. En la realidad, el cuerpo del

amortiguador junto con el vástago, constituyen el amortiguador de la suspensión.

Algunas veces, este conjunto de cuerpo y vástago del amortiguador es denominado "columna Mac Pherson" ya que, además de la función de amortiguamiento, ejerce el papel de soporte mecánico de los esfuerzos existentes entre rueda y chasis. Ambas funciones deben ser contempladas por el modelo.

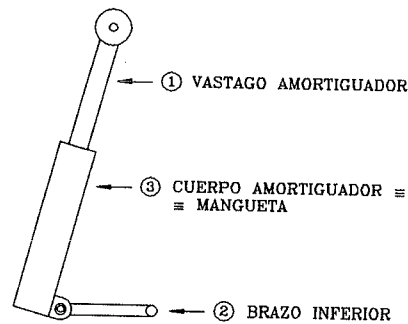


Fig. V-2: Elementos que componen la suspensión Mac Pherson

### V.1.2 - Desarrollo del modelo

De acuerdo con lo expuesto, el modelo de la suspensión Mac Pherson consistirá en el modelo de un conjunto de tres sólidos.

Para lograr una mayor simplicidad, el modelo se desarrollará aplicando los criterios de modelización de sólidos de masa despreciable, introducidos en el Capítulo III.

No obstante, también puede considerarse la masa de los sólidos de la suspensión cuando el estudio a realizar lo requiera. Para ello, habría que sustituir los modelos de los sólidos por el modelo convencional de sólido con masa.

Las uniones internas entre los tres sólidos de la suspensión, así como las uniones externas, con chasis, rueda y dirección, tienen unas características determinadas

que se detallan a continuación.

Para abreviar, al sólido 3, formado por el cuerpo del amortiguador y la mangueta, se le denominará simplemente mangueta.

#### V.1.2.1 - Características de las uniones internas

Se analizan a continuación las siguientes uniones internas entre los sólidos que constituyen el mecanismo de la suspensión:

- 1) Unión del Vástago del Amortiguador (Sólido 1) con la Mangueta (Sólido 3).
- 2) Unión de la Mangueta (Sólido 3) con el Brazo Inferior (Sólido 2).

#### 1 - Unión del Vástago del Amortiguador (Sólido 1) con la Mangueta (Sólido 3): Punto D

Se considera como un par prismático que no permite ninguna rotación relativa, aunque sí el movimiento relativo de traslación en una sola dirección.

En los amortiguadores reales, cuando se actúa sobre la dirección, puede haber rotación relativa entre el vástago y el cuerpo del amortiguador, pero en este modelo se considerará que no existe esta rotación y que los giros de la dirección los permite la rótula existente en el punto A de enlace del vástago del amortiguador con el chasis (ver Fig. V-1).

De este modo resulta más sencilla la modelización, ya que en el punto A se sitúa una simple rótula y no se considera la posible rotación libre del vástago alrededor de su propio eje. Hay que considerar también que la inercia del vástago alrededor de dicho eje es mínima.

El movimiento relativo de traslación corresponde al desplazamiento de los elementos muelle y amortiguador de la suspensión. En el bond graph del modelo habrá, por tanto, una unión 0 de la que partirán las puertas Compliance y

Resistencia representativas de dichos elementos de la suspensión.

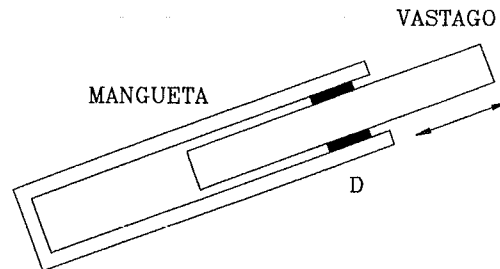


Fig. V-3: Enlace entre los sólidos vástago y mangueta

El enlace entre los sólidos 1 y 3, con las restricciones mencionadas, se materializa en un único punto D cuya posición se considerará fija en el sólido 3 y variable en el sólido 1 (Fig. V-3).

## 2 - Unión de la Mangueta (Sólido 3) con el Brazo Inferior (Sólido 2): Punto C

Hay que distinguir aquí si se trata de una rueda con dirección o sin ella.

En el caso de haber dirección, la unión de la mangueta con el brazo inferior es de tipo rótula (par esférico), permitiendo todos los movimientos relativos de rotación pero con restricción en todos los desplazamientos.

En el caso de no haber dirección, como ocurre en las suspensiones Mac Pherson montadas en el eje trasero de ciertos vehículos, la unión de la mangueta con el brazo inferior es del tipo eje de rotación, permitiendo únicamente el giro relativo según un eje. La dirección de dicho eje es, aproximadamente, la del eje longitudinal del vehículo.

### V.1.2.2 - Características de las uniones externas

Se analizan a continuación las siguientes uniones ex-

ternas entre los sólidos de la suspensión y la rueda, el chasis y la dirección:

- 1) Unión de la Mangueta (Sólido 3) con la Rueda.
- 2) Unión del Brazo Inferior (Sólido 2) con el Chasis.
- 3) Unión del Vástago del Amortiguador (Sólido 1) con el Chasis.
- 4) Unión de la Mangueta (Sólido 3) con el brazo de accionamiento de la dirección.

#### 1 - Unión de la Mangueta (Sólido 3) con la Rueda: Punto O

Se trata de un par de rotación según un eje (par de revolución).

El movimiento relativo llevará asociado una unión 0, de la que partirá una fuente de esfuerzo representativa del par de frenada. La unión 0 supone igualdad de esfuerzos en los grafos que concurren a ella, significando, en este caso, que la reacción del par de frenada se aplica sobre la mangueta.

#### 2 - Unión del Brazo Inferior (Sólido 2) con el Chasis: Punto B

En la mayoría de los sistemas de suspensión Mac Pherson, el brazo inferior consiste en un triángulo, uno de cuyos lados constituye el eje de rotación sobre el chasis, mientras que el vértice opuesto a dicho lado se articula mediante una rótula a la mangueta (Fig. V-4).

En algunos casos el brazo inferior consiste en una simple barra, articulada con rótulas o sistemas similares en cada uno de sus dos extremos. En estos casos se aprovecha la barra estabilizadora, para que, además de su función propia contra el balanceo, se ocupe de soportar los esfuerzos longitudinales.

El sistema que se modelizará es el primero, repre-

sentado en la Figura V-4, por lo que, en el modelo, el brazo inferior tendrá que soportar los esfuerzos longitudinales.

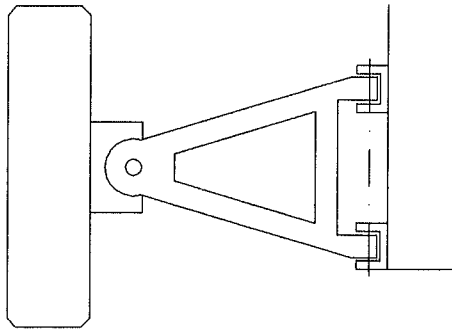


Fig. V-4: Enlaces del brazo inferior

Por simplicidad, dicho brazo inferior se considerará como una barra con unión de tipo eje (par de revolución) en el extremo correspondiente al chasis.

En el extremo correspondiente a la mangueta se considerará una unión de tipo rótula.

### 3 - Unión del Vástago del Amortiguador (Sólido 1) con el Chasis: Punto A

Se trata de una unión de tipo rótula, que ha de permitir tanto los movimientos propios de la suspensión, como el giro de dirección.

### 4 - Unión de la Mangueta (Sólido 3) con el brazo de dirección: Punto E

Se trata de una unión de tipo rótula.

Como resumen de lo expuesto, en la Figura V-5 se representa esquemáticamente la estructura del bond graph (word bond graph) del sistema de suspensión Mac Pherson.

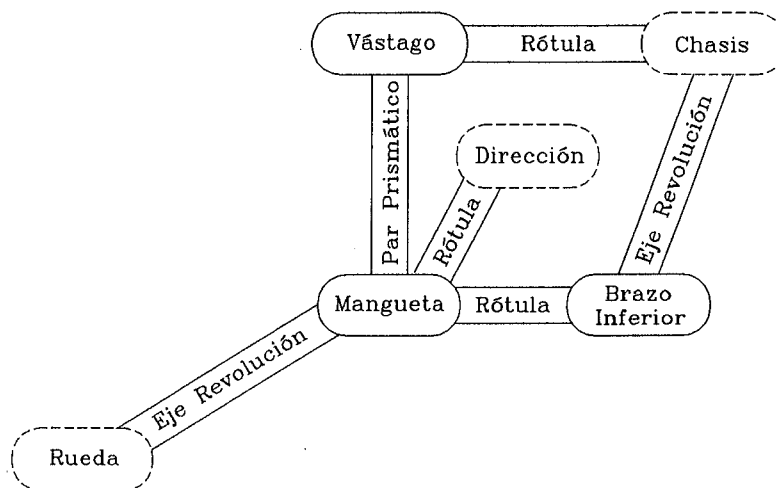


Fig. V-5: Word Bond Graph de la suspensión Mac Pherson

### V.1.2.3 - Definición de puntos de enlace y ejes de referencia

Para la definición de la orientación de los sólidos que constituyen el sistema de suspensión, tanto la orientación absoluta como la relativa a los demás sólidos, hay que elegir un sistema de ejes de referencia en cada sólido, tanto si tiene masa como si no la tiene.

Haciendo uso de dichos ejes se definirá la situación de los puntos de enlace en relación con el origen del sistema de referencia del sólido.

Como origen del sistema de referencia del sólido se toma lo que se ha denominado "punto de referencia del sólido".

Dicho punto de referencia es el centro de gravedad en los sólidos con masa y el punto que más cómodo resulte, elegido entre los puntos de enlace, en los sólidos sin masa.

Se estudian a continuación estos aspectos en los sólidos siguientes:

- 1) mangueta
- 2) vástago del amortiguador
- 3) brazo inferior



## 1 - Mangueta

Hay dos soluciones que aparecen como las más razonables a la hora de elegir los ejes de la referencia solidaria a la mangueta.

La primera consiste en tomar como eje Y el eje de rotación rueda-mangueta.

La segunda consiste en tomar el eje Z sobre la dirección del vástago del amortiguador, dirección sobre la que se producen los movimientos de la suspensión.

Se prefiere la solución primera, aunque presente el inconveniente de que sea más complicada la unión con el vástago ya que se hace necesario un cambio de coordenadas, el cual se materializará en un Transformer de razón fija TF:[a].

La solución elegida tiene la ventaja de que es más sencilla la unión con la rueda a la vez que permite disponer de modelos conjuntos de rueda y mangueta, que puedan emplearse tanto en suspensiones Mac Pherson como en suspensiones de cuadrilátero articulado, etc. sin realizar ningún cambio sobre los mismos. No sería conveniente incluir en dichos modelos conjuntos una cuestión particular de la suspensión Mac Pherson como es la orientación del vástago.

Además, con la solución elegida, si se cambia la orientación del eje del vástago respecto a la mangueta, no varía la orientación del sistema de referencia, con lo que tampoco varían las coordenadas de los puntos de unión con el brazo inferior y con el brazo de dirección.

Definido, por tanto, el eje Y, se define a continuación el eje X de modo que sea paralelo al plano horizontal de la calzada. El eje Z será perpendicular a los ejes X e Y ya definidos formando un triedro trirrectángulo dextrógiro.

Este sistema de referencia propuesto coincide con el sistema de ejes de la base intermedia  $x''y''z''$  de la rueda.

En la Fig. V-6 se representa esquemáticamente la mangueta con el sistema de ejes de referencia elegido y los puntos de enlace.

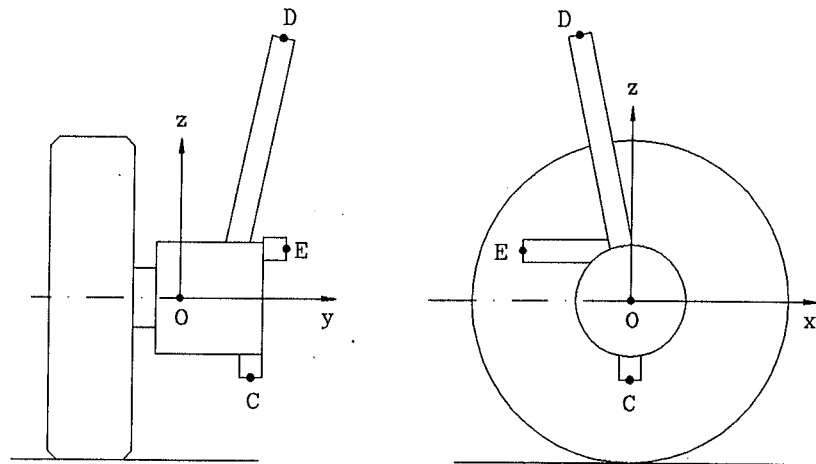


Fig. V-6: Puntos de enlace y ejes de referencia de la mangueta

Como punto de referencia de la mangueta se elige el punto O, correspondiente a la unión con la rueda. Este punto puede estar localizado en cualquier punto del eje de rotación de la rueda.

Por simplicidad, puede situarse dicho punto sobre el centro de gravedad de la rueda. De este modo se simplifica la unión entre rueda y mangueta. Evidentemente, ésto sólo es posible si el centro de gravedad de la rueda se encuentra sobre el eje de rotación, lo cual requiere que la rueda no presente desequilibrio estático.

## 2 - Vástago del amortiguador

El triedro asociado al vástago queda definido a través de una sucesión de dos giros partiendo del triedro asociado a la mangueta. Al final de dicha sucesión de giros, el eje Z queda en la dirección del propio vástago.

La sucesión de giros elegida consiste en tomar, en primer lugar, un giro en torno al eje X de la base de la mangueta y, en segundo lugar, un giro en torno al eje Y de la base obtenida tras el primer giro (Fig. V-7).

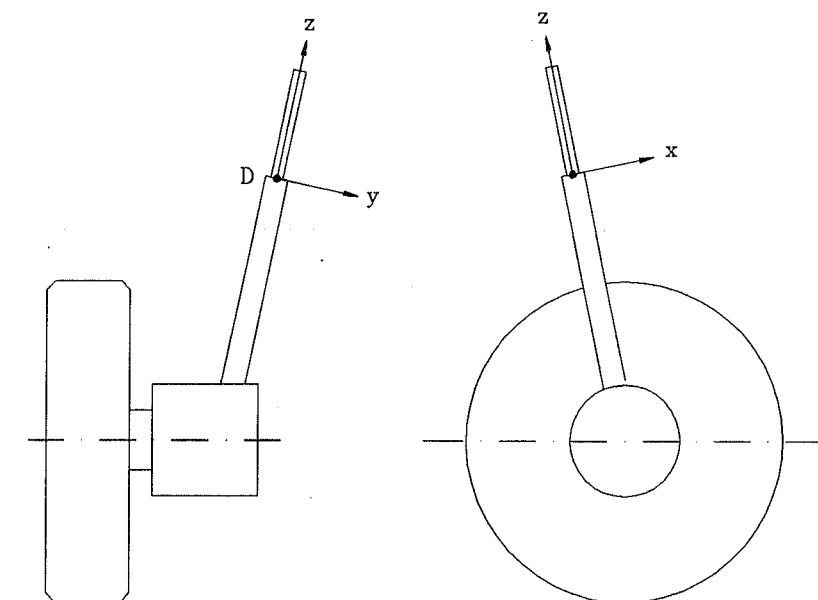


Fig. V-7: Puntos de enlace y ejes de referencia del vástago

Estos giros dan lugar al cambio de coordenadas entre la mangueta y el vástago, y equivalen al sistema de ángulos de Cardan empleado en anteriores capítulos, pero con el primer giro, en torno al eje Z, nulo.

Este cambio de coordenadas es invariable, ya que los triedros del vástago y de la mangueta son solidarios, por lo que el Transformer correspondiente a dicho cambio será de razón fija (TF:[ $\alpha$ ]).

Se define, de modo similar, el cambio de coordenadas para la unión entre el vástago y el chasis.

Este último cambio de coordenadas será variable, ya que la dirección del vástago en relación al chasis no es fija sino que varía con los movimientos de la suspensión y de la dirección.

El Transformer correspondiente a este cambio será, por consiguiente, variable (MTF:[ $A(t)$ ]).

Como punto de referencia, se ha tomado el punto D de unión con la mangueta.

### 3 - Brazo inferior

Se toma el eje X coincidente con el eje de rotación de la unión con el chasis. El eje Y se toma de modo que el plano XY contenga al punto C donde está situada la rótula de unión con la mangueta. El eje Z se toma de modo que se complete un triedro trirrectángulo dextrógiro (Fig. V-8).

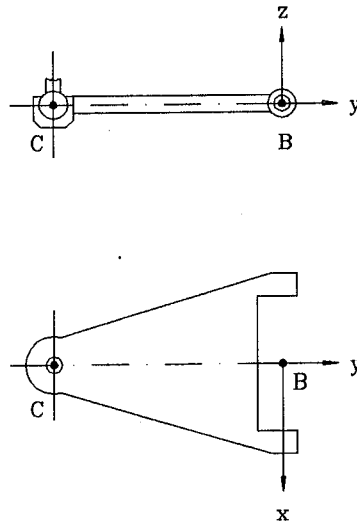


Fig. V-8: Puntos de enlace y ejes de referencia del brazo inferior

En la unión con la mangueta, al haber una rótula, hay tres giros posibles, debiendo definirse el cambio de coordenadas mediante una sucesión de tres ángulos de Cardan. La elección de esta sucesión de ángulos es arbitraria ya que en una rótula no hay giros predeterminados como en otros mecanismos. Con el fin de aprovechar desarrollos anteriores, se elegirá el mismo sistema de ángulos de Cardan ya empleado.

En la unión con el chasis, la situación es más sencilla ya que hay un único giro perfectamente definido. El cambio de coordenadas se referirá únicamente a dicho giro.

Si el eje de rotación de la unión con el chasis no coincidiera con el eje longitudinal (X) del mismo, sería necesario un cambio de coordenadas adicional, de razón fija, en la unión con el chasis.

Como punto de referencia se ha tomado el punto C de unión con la mangueta.

### V.1.3 - Bond Graph del modelo tridimensional de suspensión Mac Pherson

Basándose en todo lo anterior y en los modelos de sólido rígido sin masa, se obtiene el bond graph de la suspensión tridimensional Mac Pherson (Fig. V-9).

Como puede verse, la mangueta se une, con los enlaces anteriormente expuestos, al brazo inferior (punto C), al brazo de dirección (punto E), al vástago del amortiguador (punto D) y a la rueda (punto O).

Al tratarse de un modelo de sólido sin masa puede admitirse una causa flujo en la unión 1 inferior, con lo que se elimina el elemento Inercia Nula de la parte de traslación del modelo de mangueta.

La unión elegida para tomar la causalidad diferente ha sido la unión con la rueda. Ello se debe a los motivos que se exponen a continuación.

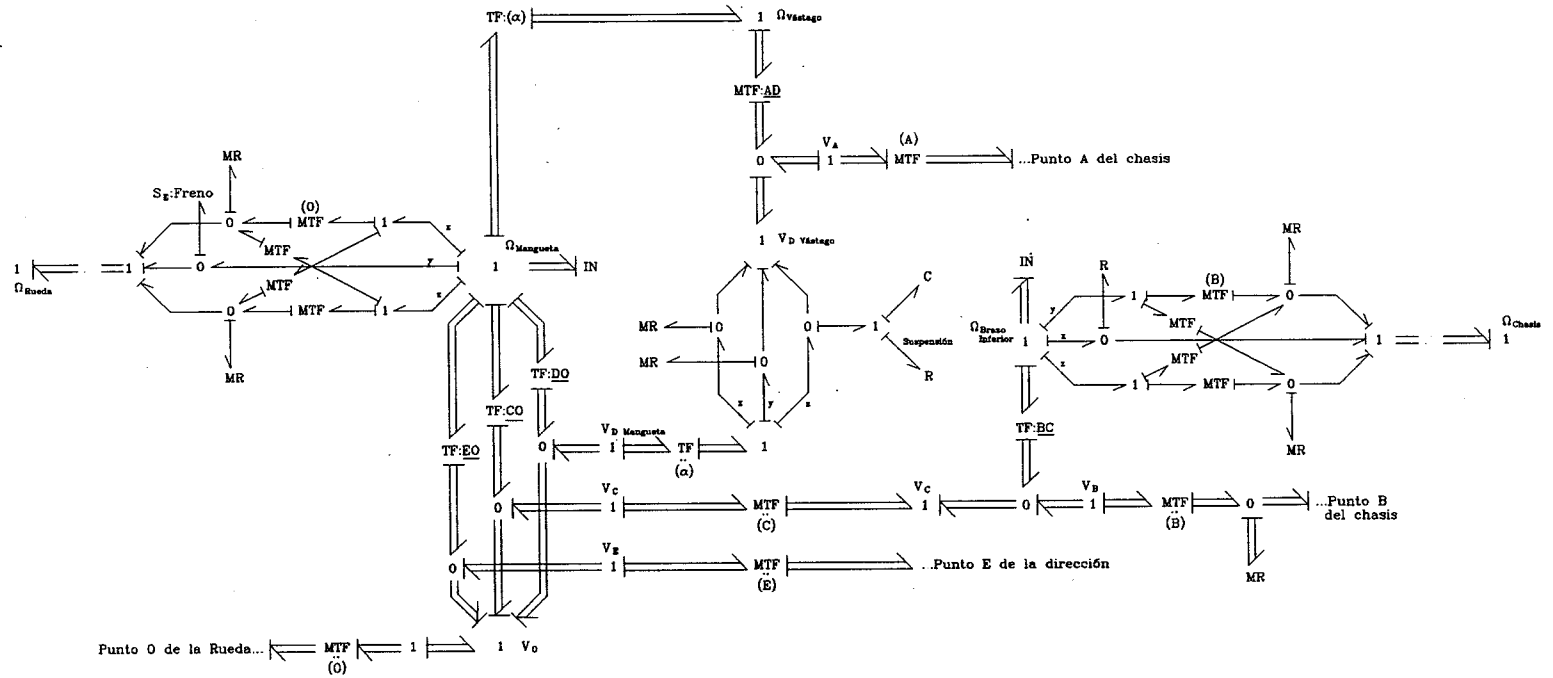
En la unión entre el vástago y la mangueta, ya existe la compliance de la suspensión, empleándose elementos Muelle Rígido en las direcciones perpendiculares a la dirección de la suspensión con el fin de tener el multibond de enlace con la misma causalidad en todas sus componentes. Dicho multibond llega, por tanto, con causa esfuerzo al bond graph de la mangueta.

En la unión con el brazo inferior no hay silentblocks, existiendo elementos Muelle Rígido en la unión de dicho brazo con el chasis.

La unión de rotación de este brazo inferior con el chasis, puede simplificarse empleando una única puerta Compliance tridimensional, en la que las componentes Y y Z serían de alta rigidez, para impedir los movimientos correspondientes, y la componente X sería de baja rigidez, permitiendo los movimientos de la suspensión.

Dado que el brazo de suspensión es un sólido de masa despreciable, se elimina la Inercia Nula de la parte de traslación de su bond graph y lleva causa esfuerzo al bond graph de la mangueta.

Fig. V-9: Bond Graph de la suspension Mac Pherson



El brazo de dirección, también llevará al bond graph de la mangueta grafos con causa esfuerzo, como se verá al modelizar la dirección.

El considerar causa flujo en la unión con la rueda, suponiendo ésta con masa, va asociado a que no haya compliances entre mangueta y rueda, lo cual no contradice la realidad, ya que en dicha unión no hay silentblocks.

El modelo de sólido sin masa empleado hace innecesario introducir ningún elemento Muelle Rígido en este punto.

Para mayor simplicidad, se ha considerado que no hay compliance entre el vástago del amortiguador y la carrocería. No obstante, modelizar una compliance en este punto no presenta mayores dificultades, aunque, entonces, no puede eliminarse la Inercia Nula de la parte de traslación del bond graph del vástago.

Todos los Transformer de posición (TF:BC, TF:EO, etc.) son de razón fija, salvo el correspondiente al punto de enlace D del vástago con la mangueta, que es de razón variable (MTF:AD). Debe ser así, ya que se trata de un punto de posición variable en el vástago.

## V.2 - MODELIZACION TRIDIMENSIONAL DE UN SISTEMA DE DIRECCION DE CREMALLERA

Para realizar la modelización de un sistema de dirección, se ha elegido el de cremallera, ya que es uno de los más empleados en los actuales vehículos de turismo.

En esencia, consta de una barra dentada, la cremallera, sobre la que actúa una rueda dentada, el piñón, accionada directamente por el volante de dirección.

La cremallera se desplaza exactamente según el eje transversal  $y_{ch}$  del chasis, teniendo restringidos todos los demás movimientos.

Cada extremo de la cremallera se enlaza, mediante una rótula, a una barra. A su vez, cada una de estas barras se enlaza, mediante otra rótula, a la correspondiente mangueta, sobre la cual va montada la rueda. Normalmente,

estas barras son denominadas brazos de acoplamiento de la dirección.

En la Figura V-10 se representa esquemáticamente la vista en planta de una dirección de cremallera.

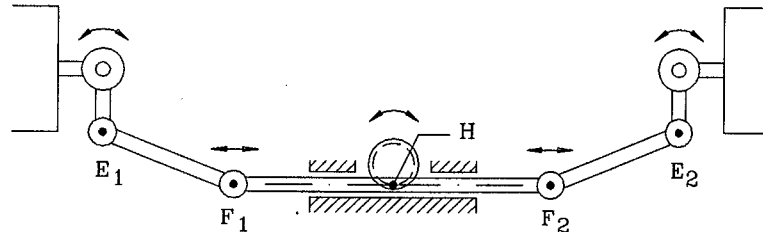


Fig. V-10: Dirección de cremallera: vista en planta

### V.2.1 - Planteamiento de la modelización

Una forma sencilla de modelizar la dirección consiste en introducir, en el modelo de vehículo con el que se esté trabajando, unas fuentes de flujo o de esfuerzo, que actúen directamente sobre las manguetas de modo que se hagan variar a voluntad los ángulos de giro de la dirección.

Sin embargo, se desarrollará una modelización en la que se considere todo el mecanismo de dirección, de modo que puedan estudiarse tanto los efectos de su diseño geométrico como la interrelación de esfuerzos y movimientos entre las ruedas a través del mecanismo de dirección, esfuerzos de la cremallera sobre el chasis, esfuerzo sobre el volante, etc.

Para ello, se emplearán los modelos de sólido tridimensional presentados en los primeros capítulos de esta tesis, desarrollándose una modelización de la dirección similar a la desarrollada para el sistema de suspensión.



### V.2.2 - Desarrollo del modelo

A efectos de modelización, se considerará el sistema de dirección formado por tres sólidos (ver la Fig. V-10):

- 1) La cremallera (sólido  $F_1F_2$ )
- 2) El brazo de acoplamiento izquierdo (sólido  $F_1E_1$ )
- 3) El brazo de acoplamiento derecho (sólido  $F_2E_2$ )

El piñón que actúa sobre la cremallera no se considera en el modelo. El control del movimiento de la cremallera, que correspondería a dicho piñón, se modelizará mediante una fuente de flujo actuante directamente sobre el movimiento lineal, en el eje  $y_{ch}$ , de la cremallera.

Los tres sólidos, indicados al principio, se modelizarán como sólidos de masa despreciable con el fin de que el modelo sea más sencillo.

A continuación se describe la forma en que están enlazados cada uno de estos tres sólidos, entre sí y con el resto del vehículo y, posteriormente, se discute la elección de los ejes de referencia y los puntos de enlace más convenientes.

Por último, se presenta el bond graph del modelo tridimensional de la dirección de cremallera.

#### V.2.2.1 - Características de las uniones

Las dos uniones internas entre los tres sólidos de la dirección, así como las uniones externas con las dos manguetas, son de tipo rótula esférica.

Únicamente la unión de la cremallera con el chasis corresponde a un par prismático con el movimiento permitido sobre el eje transversal  $y_{ch}$  del chasis.

En la Figura V-11 se representa esquemáticamente la estructura del bond graph (word bond graph) del sistema de dirección de cremallera con indicación de las uniones.

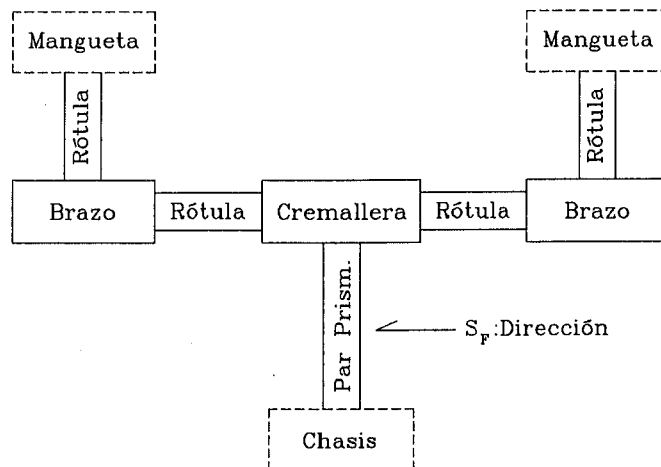


Fig. V-11: Word Bond Graph de la dirección de cremallera

### V.2.2.2 - Definición de puntos de enlace y ejes de referencia

Al igual que en la modelización de la suspensión, hay que elegir un sistema de ejes de referencia en cada sólido para poder definir su orientación.

Empleando estos ejes hay que definir también los puntos de enlace de cada sólido.

Se estudian a continuación estos aspectos en la cremallera y en los dos brazos de acoplamiento.

#### 1 - Cremallera

Dado que su orientación respecto al chasis es fija, ya que se enlaza al mismo mediante un par prismático, su triedro asociado se definirá exactamente igual que el del chasis con los ejes X, Y y Z dirigidos según los ejes longitudinal, transversal y vertical del vehículo.

Como punto de referencia se toma el punto H de enlace con el chasis.

Este punto se considera fijo sobre la cremallera y movable sobre el chasis.

Así se facilita la modelización, ya que se hace fija la localización de los dos extremos de la cremallera, aunque se requiere que, en la modelización del chasis, el punto H se localice mediante un Transformer de razón variable.

## 2 - Brazos de acoplamiento

Dada su orientación cercana al eje transversal  $y_{ch}$  de la cremallera y del vehículo, el eje Y del triedro asociado al brazo se orienta en la propia dirección del mismo.

El sentido de dicho eje Y se dirige hacia la izquierda del vehículo, independientemente de que se trate del brazo derecho o del izquierdo.

A la orientación del triedro de cada brazo se llegará, desde la cremallera, mediante un giro en torno al eje vertical del chasis ( $z_{ch}$ ) seguido de un giro en torno al eje longitudinal (x) afectado por el primer giro.

### V.2.3 - Bond graph del modelo tridimensional de la dirección de cremallera

El bond graph del modelo de dirección de cremallera, obtenido de acuerdo con lo anterior se muestra en la Figura V-12.

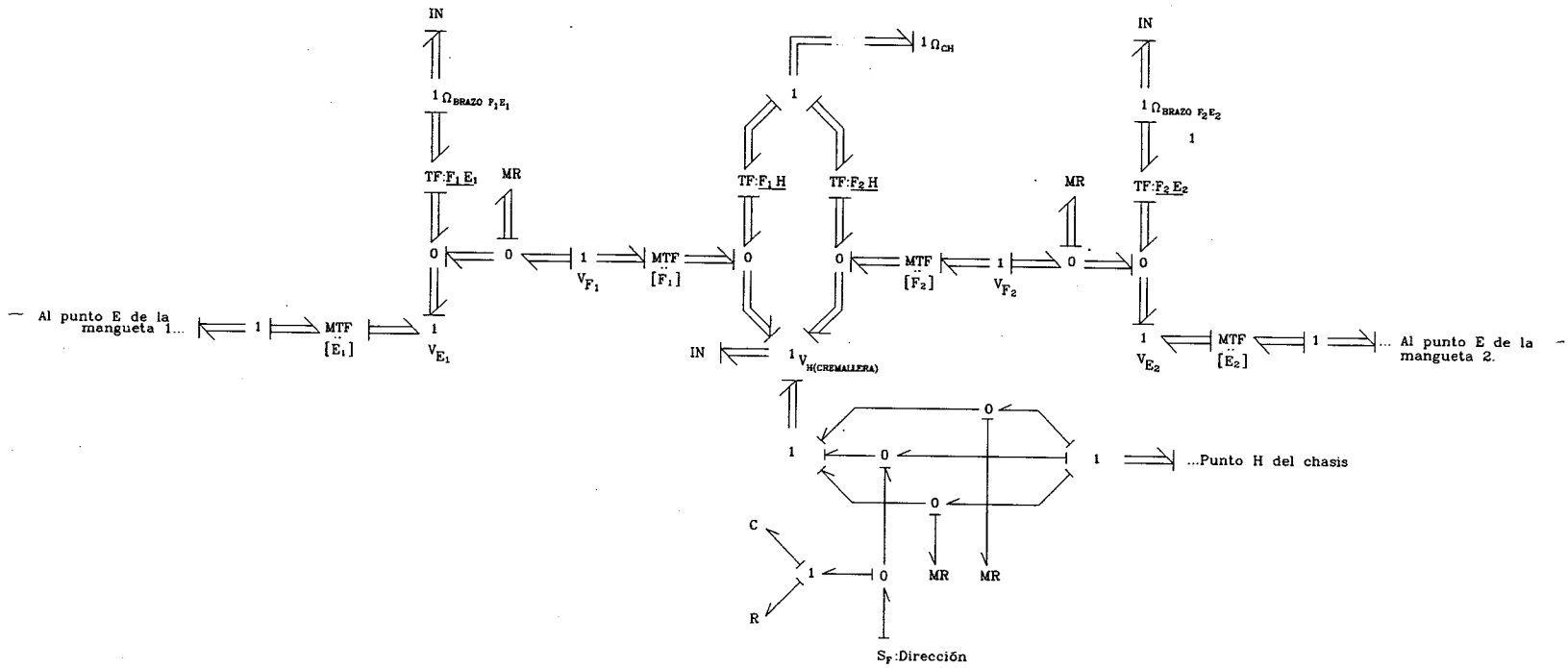
La cremallera se une a los dos brazos en los puntos  $F_1$  y  $F_2$ . Los Transformer MTF:( $F_1$ ) y MTF:( $F_2$ ) son los cambios de coordenadas correspondientes a la diferencia de orientación de los sólidos unidos.

Por el punto H, la cremallera se une al chasis con una unión prismática que impide, mediante elementos Muelle Rígido, los desplazamientos en los ejes  $x_{ch}$  y  $z_{ch}$ .

Sobre el eje  $y_{ch}$  interviene una fuente de flujo que representa el control de la dirección.

Se interpone un conjunto de Compliance y Resistencia para actuar con causa esfuerzo y evitar posibles picos de esfuerzo.

Fig. V-12: Bond Graph de la dirección de cremallera



La Compliance es de alta rigidez para que no se pierda en exceso el control del movimiento impuesto por la fuente de flujo, mientras que a la Resistencia hay que darle un valor adecuado para que cumpla la misión de evitar las oscilaciones que puede ocasionar la presencia de la Compliance.

Por su parte, los brazos se unen a las manguetas en los puntos  $E_1$  y  $E_2$ , siendo en este caso los Transformer MTF:( $E_1$ ) y MTF:( $E_2$ ) los encargados de realizar los necesarios cambios de coordenadas.

A la vista del modelo de suspensión representado en la Figura V-9, de la unión con las manguetas viene causa flujo. Del mismo modo, de la unión, en la parte de rotación, de la cremallera con el chasis, también viene causa flujo.

Sin embargo, gracias al empleo del modelo de sólido sin masa, no son necesarios los correspondientes elementos Muelle Rígido, habiéndose suprimido, simultáneamente, las correspondientes puertas Inercia de desplazamiento de los brazos y de rotación de la cremallera.

Lo anterior permite unir directamente las uniones 1 de velocidad angular de cremallera y chasis, tal como se representa en la figura, siendo en realidad innecesario el grafo que las enlaza, el cual se ha representado únicamente por motivos de claridad.

### V.3 - MODELO TRIDIMENSIONAL COMPLETO DE UN SISTEMA DE SUSPENSION MAC PHERSON Y DIRECCION DE CREMALLERA

Una vez desarrollados los modelos de suspensión y dirección, se expone a continuación su ensamblaje en un único modelo conjunto, apto para ser integrado directamente en un modelo de vehículo.

En la Figura V-13 se representa el esquema (word bond graph) del modelo conjunto, incluyendo los dos lados del vehículo, y, en la Figura V-14, el bond graph del modelo completo de suspensión y dirección para uno solo de los lados.

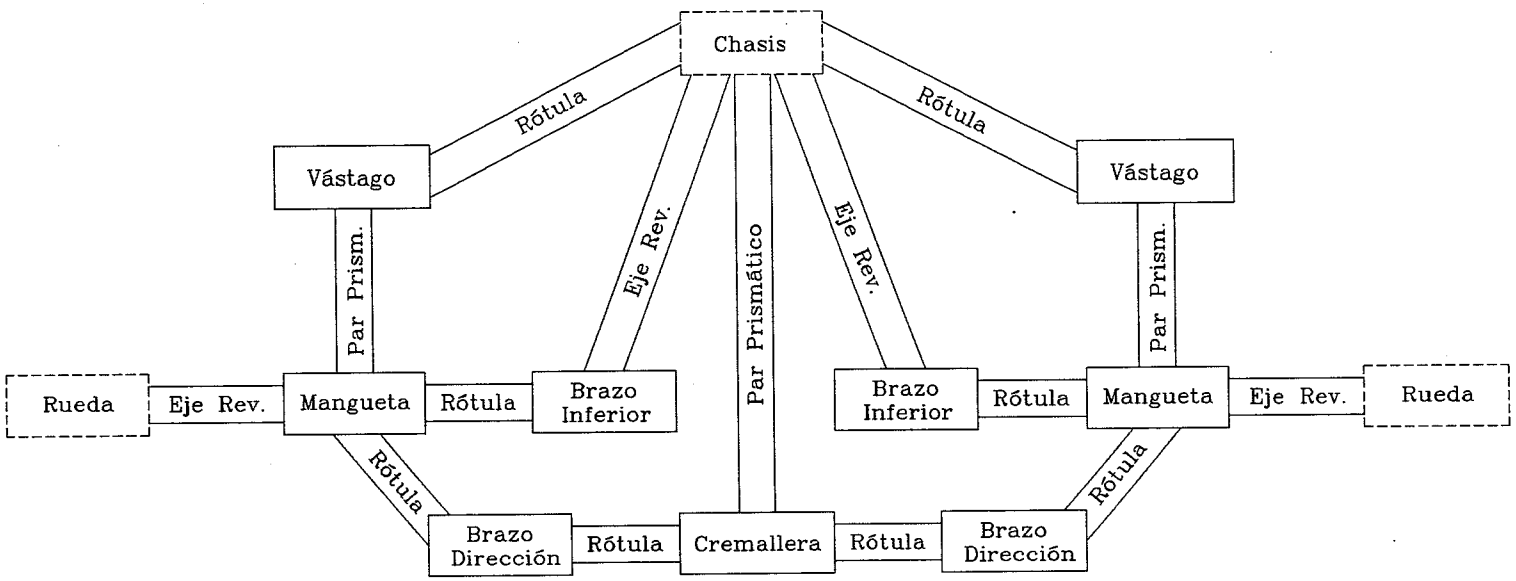


Fig. V-13: Word Bond Graph del sistema de suspensión Mac Pherson y dirección de cremallera (dos lados).

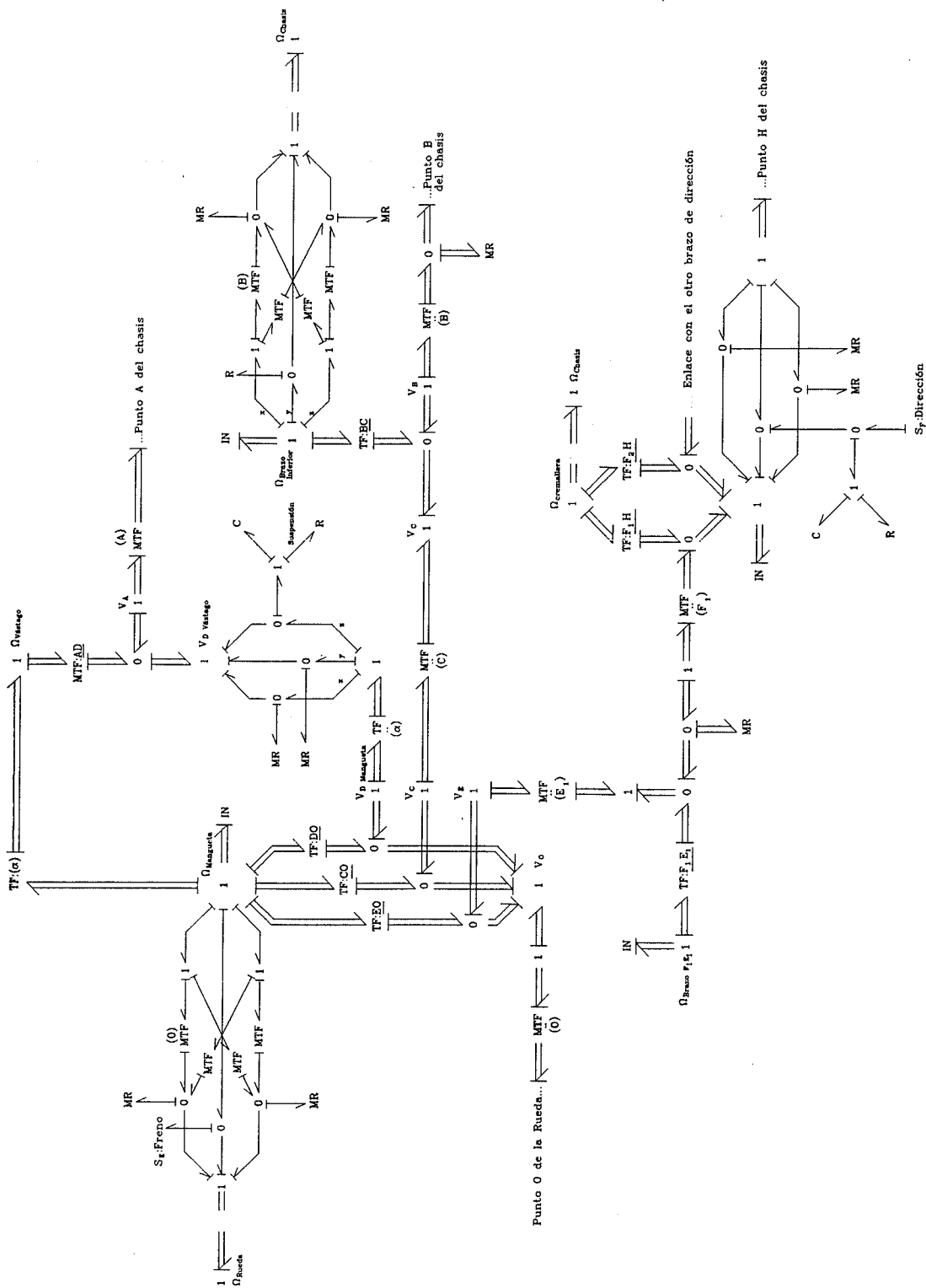


Fig. V-14: Bond Graph del sistema de suspensión Mac Pherson y dirección de cremallera (un lado).

Los dos modelos se enlazan mediante rótulas entre los brazos de dirección y las manguetas en el punto E, con lo que sólo se requiere la restricción correspondiente a desplazamientos. En esta restricción no es necesario incluir ningún elemento Muelle Rígido dada la causalidad del modelo de suspensión empleado.

Las manguetas y los brazos de dirección continúan enlazadas al resto de sus respectivos sistemas sin ninguna otra variación.

#### V.4 - MODELIZACION TRIDIMENSIONAL CON GEOMETRIA SIMPLIFICADA DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSION Y DIRECCION

En algún caso conviene disponer de un modelo tridimensional de vehículo, en el que se consideren el chasis, las ruedas y la existencia de suspensión y dirección, pero sin que sea necesario contemplar en detalle la geometría de los mecanismos de la suspensión y de la dirección.

También puede ser interesante emplear un modelo simplificado de suspensión y dirección sólo en una parte del vehículo con el fin de centrar los esfuerzos de una modelización más compleja en otra parte. Por ejemplo, puede emplearse la modelización simplificada en la parte trasera del vehículo, reservando una modelización más compleja para el tren delantero, ya que en él intervienen más sistemas.

Se expone a continuación una posible modelización con geometría simplificada de los mencionados sistemas de suspensión y dirección.

##### V.4.1 - Desarrollo del modelo

La modelización simplificada de los sistemas de suspensión y dirección que se propone, se basa en los movimientos relativos fundamentales entre rueda y chasis.

Estos movimientos relativos entre rueda y chasis se definen de la siguiente forma:

- 1) Movimiento de dirección: rotación de la rueda definida en torno al eje  $z_{ch}$  del chasis.



2) Movimiento de suspensión: desplazamiento de la rueda definido sobre el eje  $z_{ch}$  del chasis.

3) Movimiento asociado a la propulsión y la frenada: rotación de la rueda definida en torno a su eje  $y_r$ .

En la Figura V-15 se representa un posible mecanismo equivalente sobre el que pueden definirse los movimientos anteriores.

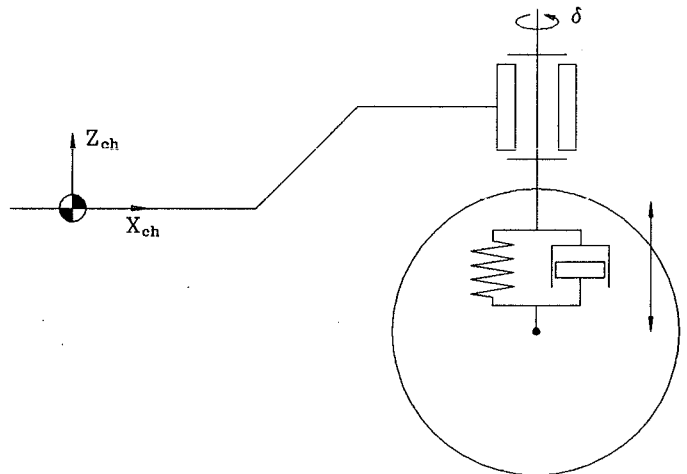


Fig. V-15: Sistema simplificado de suspensión y dirección

Como puede verse, se trata de un mecanismo sin articulaciones, en el que la suspensión consiste en un simple par prismático vertical y la dirección en una acción directa sobre la rueda.

Esta acción de la dirección se realiza mediante una fuente de flujo, a través de una Compliance suficientemente rígida, actuante sobre cada rueda que tenga dirección.

Aunque podría aplicarse a cada rueda con dirección una acción diferente, tratando de simular el mecanismo real en el que las dos ruedas giran un ángulo distinto, la complejidad de los cálculos auxiliares necesarios para saber qué flujo hay que introducir en cada instante para que el ángulo girado sea el correcto, aconseja aplicar,

simplemente, la misma acción a las dos ruedas.

De acuerdo con el planteamiento de este modelo, entre las velocidades angulares de la rueda y del chasis se cumple la siguiente relación:

$$\Omega_{rueda} = \Omega_{chasis} + \dot{\delta} + \dot{\theta}'$$

El ángulo  $\delta$  es el girado por la mangueta respecto al chasis (movimiento 1) y  $\theta'$  el girado por la rueda respecto a la mangueta, es decir, lo que gira el rodamiento de rueda (movimiento 3). Estos dos ángulos permiten definir perfectamente la orientación relativa entre los dos sólidos.

El modelo simplificado que se pretende obtener estará constituido por el bond graph de unión entre los bond graph de la rueda y del chasis.

En la Figura V-16 se representa el bond graph del modelo simplificado de suspensión y dirección.

En esta Figura, están incluidos, a la derecha, el bond graph de un modelo de rueda y, a la izquierda, parte del bond graph de un chasis.

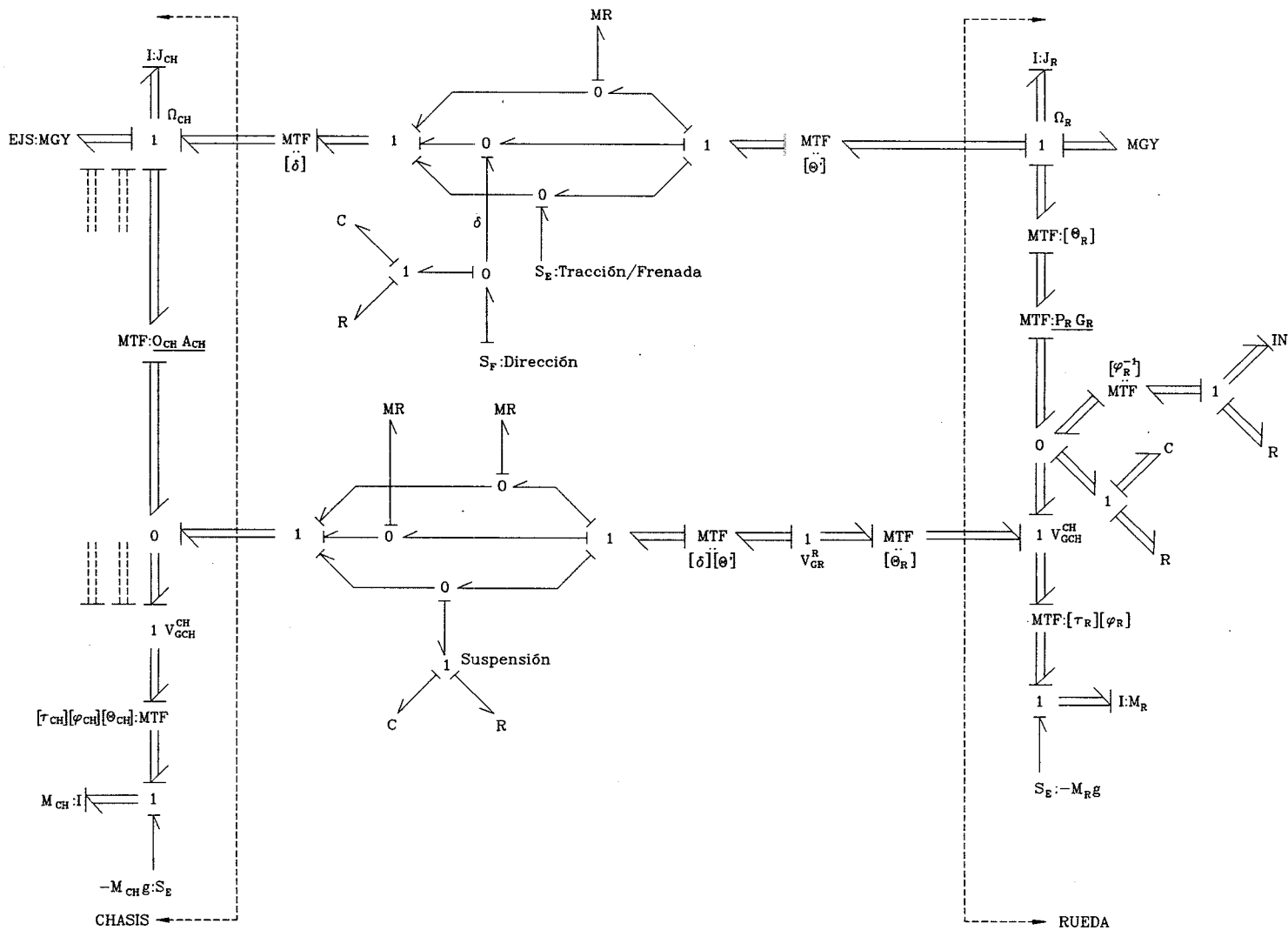
De acuerdo con lo expuesto en el apartado "Ensamblaje de sólidos" del Capítulo II, la unión entre los bond graph de rueda y chasis tiene dos partes: la parte asociada a los movimientos de traslación y la parte asociada a los movimientos de rotación.

La parte asociada a los movimientos de traslación, contiene las uniones 0 que representan los movimientos de traslación, que no son otros que los de la suspensión, constituyendo por tanto la modelización simplificada del mecanismo de suspensión.

Para modelizar los movimientos de traslación hay que definir puntos de enlace tanto para la rueda como para el chasis. Los movimientos de traslación son los movimientos relativos entre dichos puntos de enlace.

Estos puntos no serán fijos respecto al chasis sino que se moverán siguiendo los movimientos de la suspensión.

Fig. V-16: Modelo tridimensional simplificado de suspensión y dirección



Por tanto, los Transformer correspondientes, dentro del bond graph del chasis, estarán modulados (MTF) en su tercera componente por dichos movimientos.

En lo referente a la rueda, el punto de enlace puede estar en cualquier lugar de su eje geométrico de giro. En la Figura V-16 se ha supuesto que coincide con el centro de gravedad de la rueda (punto Gr).

Los movimientos de traslación se representan por uniones 0 situadas entre las uniones 1 que representan, en una base común, las velocidades de los puntos de enlace.

Dado que los movimientos de suspensión se producen sobre el eje  $z_{ch}$  de la base solidaria al chasis, hay que trabajar en dicha base.

Para ello se introduce un cambio de coordenadas MTF:( $\delta$ )( $\theta'$ ) que pasa de la base solidaria a la rueda ( $x''''y''''z''''$ ) a la base del chasis ( $x_{ch}y_{ch}z_{ch}$ ).

Previamente es necesario otro cambio de coordenadas MTF:( $\theta$ ) que pase de la base  $x''y''z''$ , sobre la que está definida la unión 1 representativa de la velocidad del punto Gr de la rueda, a la base  $x''''y''''z''''$  solidaria a la rueda. Como puede verse, este cambio de coordenadas MTF:( $\theta$ ) está dirigido en dirección a la rueda, para realizar el cambio de coordenadas en el sentido correcto.

Sobre la unión 0 correspondiente a la componente  $z_{ch}$  se colocan las puertas C y R, que representan respectivamente el muelle y el amortiguador de la suspensión.

En las otras dos direcciones,  $x_{ch}$  e  $y_{ch}$ , en las que no existen desplazamientos, se colocan elementos Muelle Rígido.

En lo referente a la parte asociada a los movimientos de rotación, también se aplica el procedimiento descrito en el citado apartado de Ensamblaje de Sólidos.

El esquema de unión se sitúa entre las uniones 1 de rueda y chasis, que representan las velocidades angulares  $\Omega_r$  y  $\Omega_{ch}$  respectivamente.

De las uniones 0 del esquema de unión parten las puertas que simbolizan los movimientos relativos y que vienen a modelizar los sistemas de tracción/frenada y dirección.

Sobre la unión 0 de tracción/frenada actúa una fuente de esfuerzo, mientras que sobre la unión 0 correspondiente a la dirección se ha introducido una fuente de flujo que actúa sobre la rueda a través de un conjunto de Compliance y Resistencia para tener una causalidad y un comportamiento adecuados.

## V.5 - MODELOS BIDIMENSIONALES

Al igual que con otros elementos del vehículo, se estudian en este apartado los posibles modelos bidimensionales de suspensión y de dirección, desarrollándose posteriormente las modelizaciones que se consideran más interesantes.

### V.5.1 - Consideraciones generales sobre los modelos bidimensionales de suspensión y dirección

A continuación, se discute el interés de cada uno de los tres posibles modelos bidimensionales, XY, XZ e YZ, para la modelización de los mecanismos de suspensión y de dirección.

#### V.5.1.1 - Modelos bidimensionales XY

El modelo plano XY, tiene su principal aplicación en el estudio del sistema de dirección.

Ello se debe a dos motivos:

Por una parte, al hecho de que el propio sistema de dirección (cremallera, brazos de dirección, etc.) puede considerarse, con gran aproximación, como un mecanismo contenido en el plano XY.

Por otra parte, en una modelización bidimensional como la que se analiza, el plano XY del modelo coincide con el plano de la calzada, siendo el sistema de dirección el que impone la trayectoria del vehículo sobre dicho plano de la

calzada.

De acuerdo con todo lo anterior, en relación con el sistema de dirección, pueden estudiarse en el plano XY cuestiones de tipo geométrico y cuestiones de tipo dinámico.

Entre las de tipo geométrico, pueden citarse la influencia de la geometría del mecanismo de dirección sobre el ángulo girado por cada rueda, el radio de giro del vehículo, etc.

Entre las de tipo dinámico, cabe citar la influencia del mecanismo de dirección sobre el comportamiento dinámico global del vehículo sobre la calzada: carácter sobre o subvirador, estabilidad direccional, interrelaciones entre las dos ruedas, etc.

Para los sistemas de suspensión, sin embargo, el modelo plano XY no es muy aplicable, ya que los movimientos principales de la suspensión se producen en otro plano.

En el plano XY, lo único que podría considerarse relacionado con la suspensión, sería la variación de los ángulos de convergencia producidos por la deformación en los silentblocks de la suspensión a causa de los esfuerzos longitudinales y transversales.

Sin embargo, aun en el caso de poder hacer una modelización reducida al plano XY de los brazos de suspensión, no podría contemplarse la variación del ángulo de convergencia producida con los movimientos propios de la suspensión, variación que podría llegar a ser considerable.

#### V.5.1.2 - Modelos bidimensionales XZ

El modelo plano XZ, que estudia los movimientos y acciones contenidos en el plano longitudinal/vertical, no tiene ninguna aplicación sobre la dirección, ya que no incluye el eje Y sobre el que aquella influye.

En lo referente a la suspensión, es útil para estudiar movimientos de cabeceo o encabritamiento en maniobras de aceleración y frenada, cargas sobre los ejes, etc.

Sin embargo, salvo excepciones, como la suspensión de brazos arrastrados, la mayoría de los sistemas de suspensión incorporan brazos u otros elementos que no están contenidos en el plano XZ.

Por ello, el modelo XZ es de aplicación limitada, pudiendo emplearse cuando la suspensión sea de brazos contenidos en el plano XZ, o bien en la realización de análisis del comportamiento del vehículo en los que, aunque se considere la existencia de suspensión, no se considere, en detalle, la geometría de la misma.

#### V.5.1.3 - Modelos bidimensionales YZ

Los modelos planos YZ, que estudian los movimientos y acciones contenidos en el plano transversal del vehículo, tienen poco interés para la simulación en dinámica vehicular, ya que no permiten contemplar el desplazamiento del vehículo, el cual se produce, por definición, sobre el eje X.

Por ello, estos modelos tampoco tienen mucha aplicación en estudios relacionados con la dirección, ya que ésta sólo afecta al comportamiento del vehículo cuando éste avanza sobre su eje X.

Sin embargo, el modelo plano YZ es de especial utilidad en el estudio de la geometría de sistemas de suspensión.

En sistemas de suspensión independiente tan importantes como el sistema Mac Pherson o el de cuadrilátero articulado, los movimientos del mecanismo se reducen prácticamente al plano YZ.

Ello es debido a que las articulaciones con el chasis se dirigen aproximadamente según el eje longitudinal X y los movimientos de desplazamiento en las columnas Mac Pherson están prácticamente contenidos en el plano YZ, ya que los ángulos de avance suelen ser pequeños.

Varios de los criterios que intervienen en el diseño de los sistemas de suspensión independiente mencionados pueden contemplarse con el modelo YZ.

Entre los principales se encuentran los siguientes:

1 - Localización del centro efectivo de balanceo: Si el centro de balanceo, es decir, el centro instantáneo de rotación de la carrocería alrededor del eje longitudinal, se encuentra muy alejado del centro de gravedad, el par de balanceo y, consecuentemente, la inclinación de la carrocería en curvas serán grandes.

2 - Deformación lateral del neumático: Los desplazamientos de la suspensión, ocasionadas por las irregularidades del terreno, maniobras de aceleración o frenada, etc., pueden originar desplazamientos laterales en la zona de contacto del neumático con la calzada. Si tales desplazamientos son importantes, el desgaste de los neumáticos será mayor.

3 - Variación de la caída de la rueda: El ángulo de caída puede variar tanto por la carga transportada por el vehículo, como por las fuerzas transversales. Su magnitud depende también de la geometría de la suspensión. El control del ángulo de caída es importante también ya que influye en el comportamiento del neumático.

4 - Elevación del centro de gravedad ocasionada por esfuerzos laterales: Determinadas geometrías de suspensión, pueden producir elevación o descenso del centro de gravedad cuando aparecen fuerzas laterales. Dichos movimientos del centro de gravedad afectan al par de vuelco.

Todas las cuestiones anteriores están relacionadas con el diseño geométrico-cinemático de la suspensión.

Aunque la técnica de bond graph está dirigida especialmente a análisis dinámicos, es también aplicable, tal como se demuestra en el apartado III.1.2.1, a estudios de tipo geométrico-cinemático como los mencionados.

Como conclusión derivada de las anteriores discusiones, se considera que, en lo referente a los sistemas de suspensión y dirección, los modelos bidimensionales de mayor interés son el XY para la modelización de la dirección y el YZ para la modelización de la suspensión.

De acuerdo con ello, se desarrollan a continuación dichos modelos bidimensionales, aplicados a la suspensión Mac Pherson y a la dirección de cremallera.



## V.5.2 - Modelo bidimensional YZ de la suspensión Mac Pherson

La modelización en el plano YZ se basa en el modelo tridimensional, ya desarrollado, de la suspensión Mac Pherson.

El modelo que se desarrollará incluirá las suspensiones del lado derecho y del izquierdo, con el fin de poder estudiar su comportamiento conjunto (Fig. V-17).

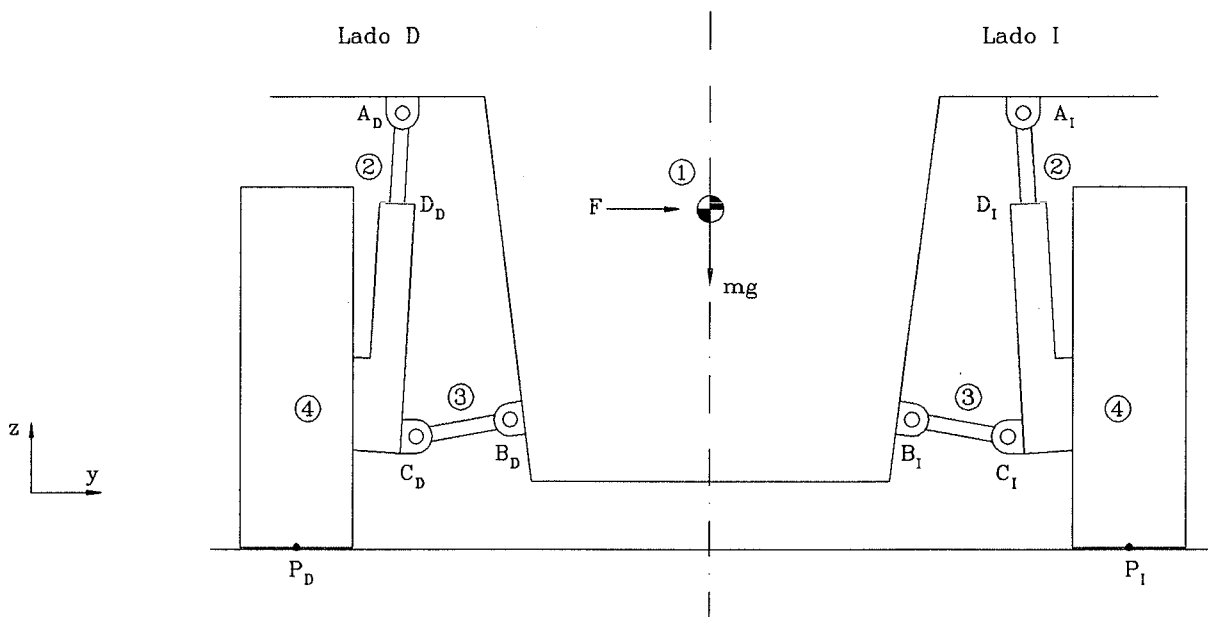


Fig. V-17: Sistema de suspensión reducido al plano YZ

En este modelo, la mangueta es solidaria a la rueda.

Dicho sólido mangueta-rueda se enlaza a tres elementos:

- Vástago del amortiguador, con unión de tipo prismático que incluye el muelle y amortiguador de la suspensión.
- Brazo Inferior, con unión de tipo bulón (par cilíndrico)
- Suelo, a través de un conjunto compliance-resistencia bidimensional, representativo de la deformabilidad del neumático.



Las uniones de la mangueta con la rueda y con el brazo de dirección desaparecen en este modelo, incorporándose, en contrapartida, la unión con el suelo.

Los sólidos brazo inferior y vástago del amortiguador se unen al chasis mediante uniones de tipo bulón.

El bond graph del presente modelo bidimensional YZ de suspensión Mac Pherson se representa en la Figura V-18.

Dado que este modelo tiene su principal aplicación, como ya se ha adelantado, en estudios de tipo geométrico-cinemático, y con el fin de simplificar la modelización, se emplean modelos de sólidos sin masa para todos los elementos salvo para el chasis.

El sólido chasis, que se incluye como imprescindible elemento de unión de las dos suspensiones, se considera con inercia, ya que ésta es muy grande en comparación con la del resto de los elementos.

### V.5.3 - Modelo bidimensional XY de la dirección de cremallera

Este modelo también se basa directamente en el modelo tridimensional desarrollado anteriormente. En la Figura V-19 se representa en esquema el sistema bidimensional a modelizar.

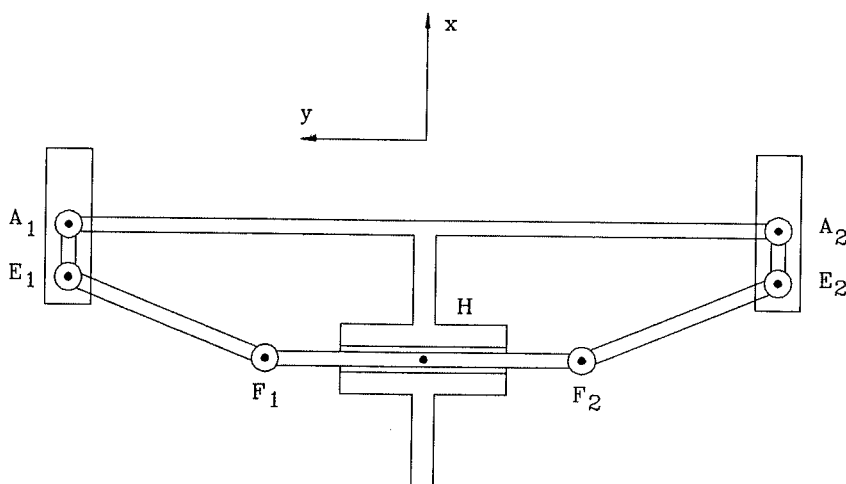
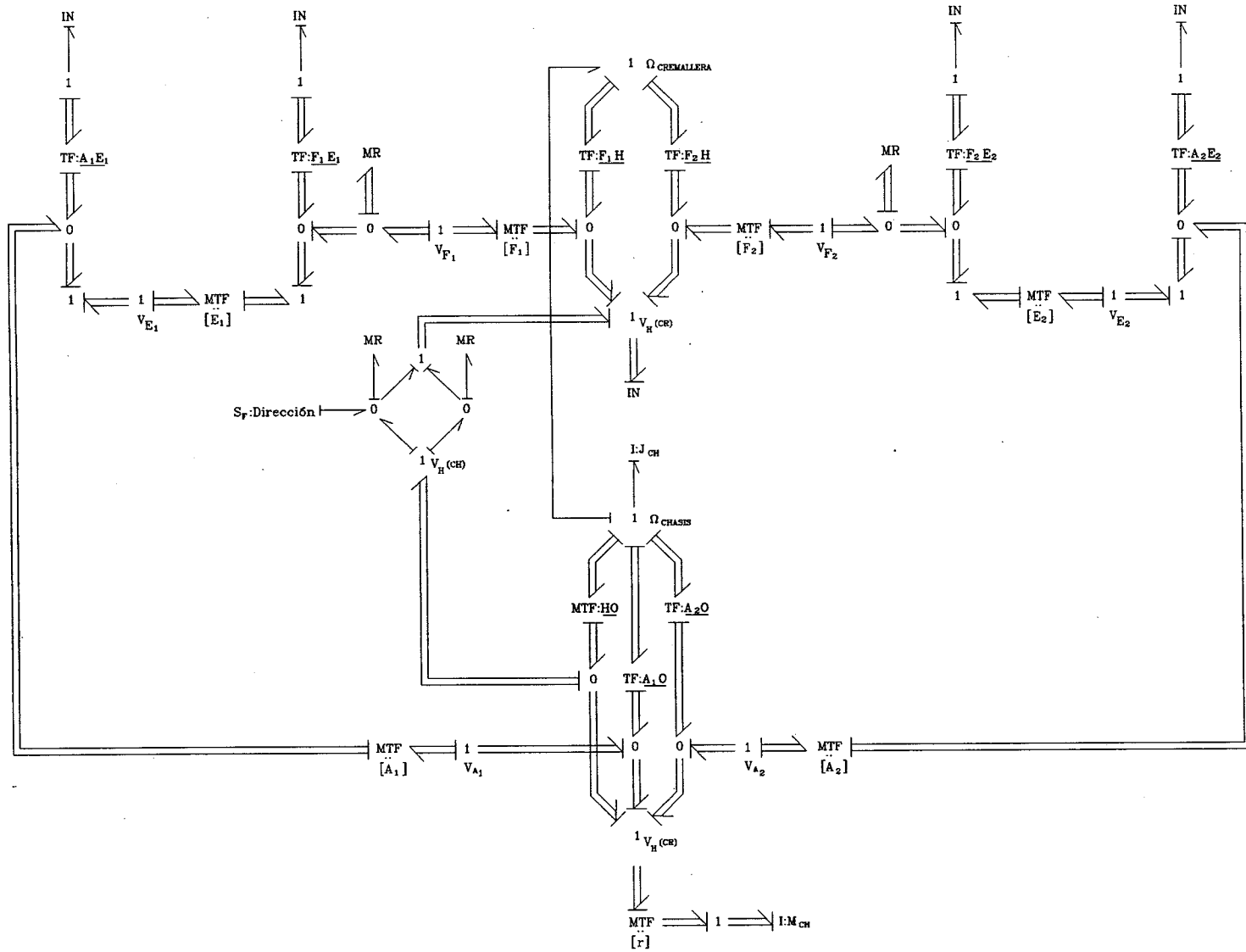


Fig. V-19: Sistema de dirección reducido al plano XY

Fig. V-20: Bond graph del modelo bidimensional XY de dirección de cremallera



Las únicas diferencias con el modelo tridimensional, además de reducir el sistema al plano XY, están en la incorporación de algún sólido para completar el mecanismo, ya que en este modelo bidimensional no existe ningún elemento de la suspensión.

Así, se incluyen los dos sólidos mangueta ( $A_1E_1$  y  $A_2E_2$ ), que antes no se habían incluido en el modelo de dirección sino que formaban parte del modelo de suspensión.

Estos sólidos, que están articulados con el chasis en los puntos  $A_1$  y  $A_2$ , en el presente modelo bidimensional representan también a las ruedas correspondientes, por lo que constituyen el conjunto rueda-mangueta.

En este modelo también hay que incluir el chasis, al menos en la parte correspondiente a los puntos  $A_1$ ,  $A_2$  y H.

Con el fin de simplificar el modelo, se consideran todos los elementos sin masa a excepción del chasis.

En la Figura V-20 se representa el bond graph del presente modelo bidimensional de dirección.

#### V.6 - OBTENCION DE LAS CONDICIONES INICIALES EN LA SIMULACION DE SISTEMAS DE SUSPENSION

Para la simulación dinámica de cualquier sistema vehicular, hay que definir las condiciones iniciales de las variables de estado: desplazamiento de las Compliances, velocidad de las Inercias y ángulos de orientación de los sólidos.

En particular, para la simulación de sistemas de suspensión, las condiciones iniciales que se tendrán que definir serán, normalmente, el desplazamiento de las Compliances y el valor de los ángulos de orientación de los componentes del mecanismo.

Cuando el modelo de suspensión es sencillo y se consideran pequeñas deflexiones, resulta relativamente fácil establecer las condiciones iniciales ya que entonces se trata de un problema lineal.

Un ejemplo sería el modelo desarrollado en el apartado V.4, basado en un par prismático entre rueda y chasis, orientado según el eje Z del chasis.

En tal caso la deflexión inicial de los muelles de suspensión depende directamente de la carga que gravita sobre las ruedas, la cual es función del peso del chasis y de la posición relativa, sobre el plano horizontal, de la rueda respecto al c.d.g. del chasis.

Por otra parte, tampoco hay que definir la orientación de ningún sólido.

Sin embargo, cuando se desarrollan modelos complejos de suspensión contemplando la geometría del mecanismo, tales como el modelo de suspensión Mac Pherson presentado en apartados anteriores, la definición de las condiciones iniciales no es inmediata, debido a que la geometría del propio mecanismo es no lineal.

Una posible solución puede consistir en aplicar el algoritmo presentado por Breedveld para la determinación del estado de equilibrio de un sistema [13].

Este algoritmo permite determinar el estado de equilibrio de sistemas con inputs constantes partiendo de su bond graph.

Se parte del hecho de que la existencia de equilibrio en un sistema, implica que ha de haber flujo nulo en las puertas Compliance y esfuerzo nulo en las puertas Inercia del mismo.

De acuerdo con esto, el primer paso del algoritmo consiste en reemplazar las puertas Compliance por fuentes de flujo nulas y las puertas Inercia por fuentes de esfuerzo nulas.

La sustitución anterior puede, lógicamente, suponer cambios en la causalidad. El segundo paso consiste, por consiguiente, en reasignar la causalidad. Si aparecen conflictos de causalidad, puede significar que el sistema tiene infinitos estados de equilibrio o bien que, por el contrario, no tiene ninguno.

Una vez reasignada la causalidad, lo que supone que el

sistema tiene un único estado de equilibrio, hay que encontrar los inputs de las fuentes auxiliares que se han introducido; es decir, hay que hallar los esfuerzos que introducen las fuentes de flujo nulas que sustituirían a las Compliances y los flujos que introducen las fuentes de esfuerzo nulas que sustituirían a las Inercias.

El conocimiento de estos inputs equivale ya a conocer la situación de equilibrio del sistema.

No obstante, la resolución del problema correspondiente no es inmediata ya que en el bond graph aparecen elementos no lineales, como los Transformer de cambio de coordenadas, etc. Para resolver este problema, pueden emplearse métodos como el de Newton-Raphson, etc.. En cualquier caso la resolución requiere dos pasos: obtener el bond graph auxiliar descrito y resolver las ecuaciones que se obtienen de él.

Una solución alternativa para la resolución del problema objeto de este apartado, consiste en seguir un proceso iterativo como el siguiente.

En primer lugar, tras definir la situación nominal desde el punto de vista estrictamente geométrico (ángulo de caída, posición nominal de los mecanismos, etc.), se estima, mediante cálculos aproximados, la deflexión inicial de las Compliances (muelles de la suspensión, silent-blocks, etc.).

A continuación se inicia un proceso iterativo en el que se realizan sucesivas "simulaciones previas" aprovechando el mismo modelo que se va a emplear en la simulación definitiva.

En estas simulaciones previas, el sistema parte del reposo, actuando, como acción exterior, únicamente la gravedad.

En la primera de estas simulaciones, las condiciones iniciales del modelo son las correspondientes a las dos mencionadas anteriormente, es decir, la situación geométrica nominal y la situación estimada de tensión en las Compliances.

Al realizar esta simulación, puede ocurrir que el sis-

tema experimente movimientos, o lo que es lo mismo, que se aparte de la situación geométrica nominal, o bien, que el sistema no experimente movimientos apreciables.

Si el sistema experimenta movimientos, se varía la fuerza ejercida por las Compliances, modificando, para ello, su deflexión inicial. A continuación, se vuelve a efectuar otra "simulación previa" con las condiciones geométricas nominales y las nuevas condiciones iniciales de deflexión de las Compliances.

Así, se repite el proceso, hasta que el sistema no experimente movimientos apreciables, momento en el cual las condiciones iniciales empleadas son las adecuadas.

El procedimiento descrito tiene la ventaja de que se emplea el propio modelo de simulación para hallar las condiciones iniciales, sin necesidad de realizar cálculos auxiliares.

Para finalizar este apartado, hay que hacer una observación para el caso de que, en la simulación, se empleen las deflexiones de las Compliances para definir parámetros geométricos.

Por ejemplo, en la modelización del vástago del amortiguador Mac Pherson, se define la situación del punto D de contacto con el cuerpo del amortiguador mediante el MTF:AD cuya razón está modulada por la deflexión del resorte de suspensión.

En tales casos, hay que tener presente la influencia que puedan tener las modificaciones en la deflexión inicial de las Compliances sobre los citados parámetros geométricos.

#### V.7 - EJEMPLO DE SIMULACION

En este apartado, se expone un ejemplo de simulación efectuado con un modelo bidimensional, con el fin de comprobar su validez y ver el interés de su aplicación.

Los ejemplos de aplicación de los modelos tridimensionales de los sistemas de suspensión y dirección, se efectúan en el Capítulo VI, con un modelo de vehículo com-



pleto en el que se incorporan dichos sistemas.

El modelo que se va a emplear en el presente ejemplo, es el modelo bidimensional YZ de suspensión Mac Pherson.

Este modelo permite aplicar los criterios, ya expuestos, de diseño de la geometría en el plano YZ de suspensiones independientes.

Para comprobarlo, se aplicará a un caso de suspensión delantera cuyas características geométricas, representadas en la Figura V-21, son las siguientes:

$$\begin{aligned}l_{bcy} &= 0.14 \text{ m} \\l_{bcz} &= 0.48 \text{ m} \\l_{pcy} &= 0.03 \text{ m} \\l_{pcz} &= 0.16 \text{ m} \\l_b &= 0.35 \text{ m} \\l_v &= 0.20 + q_c \text{ m} \\h_B &= 0.40 \text{ m} \\d_B &= 0.32 \text{ m} \\h_A &= 0.24 \text{ m} \\d_A &= 0.50 \text{ m} \\\tau &= 0.1138 \text{ rad} \approx 6.5^\circ \\d &= 0.1297 \text{ rad} \approx 7.4^\circ\end{aligned}$$

A las anteriores características geométricas hay que añadir los siguientes datos: Masa del chasis que gravita sobre el tren delantero: 500 Kg.; Momento de inercia: 127 Kg·m<sup>2</sup> (50% del momento de inercia de balanceo del vehículo entero); Rigidez transversal de los neumáticos: 50000 N/m; Rigidez radial de los neumáticos: 150000 N/m; Amortiguamiento transversal de los neumáticos: 1000 N·s/m; Amortiguamiento vertical de los neumáticos: 1000 N·s/m; Rigidez de los muelles de suspensión: 10000 N/m; Característica de los amortiguadores de suspensión: 750 N·s/m (supuesta constante).

Para estudiar el balanceo, se efectuará una simulación empleando como excitación una fuerza lateral actuante sobre el centro de gravedad del chasis (Fig. V-17). El valor dado a dicha fuerza es de 1000 N y su dirección es la del eje Y de la referencia fija.

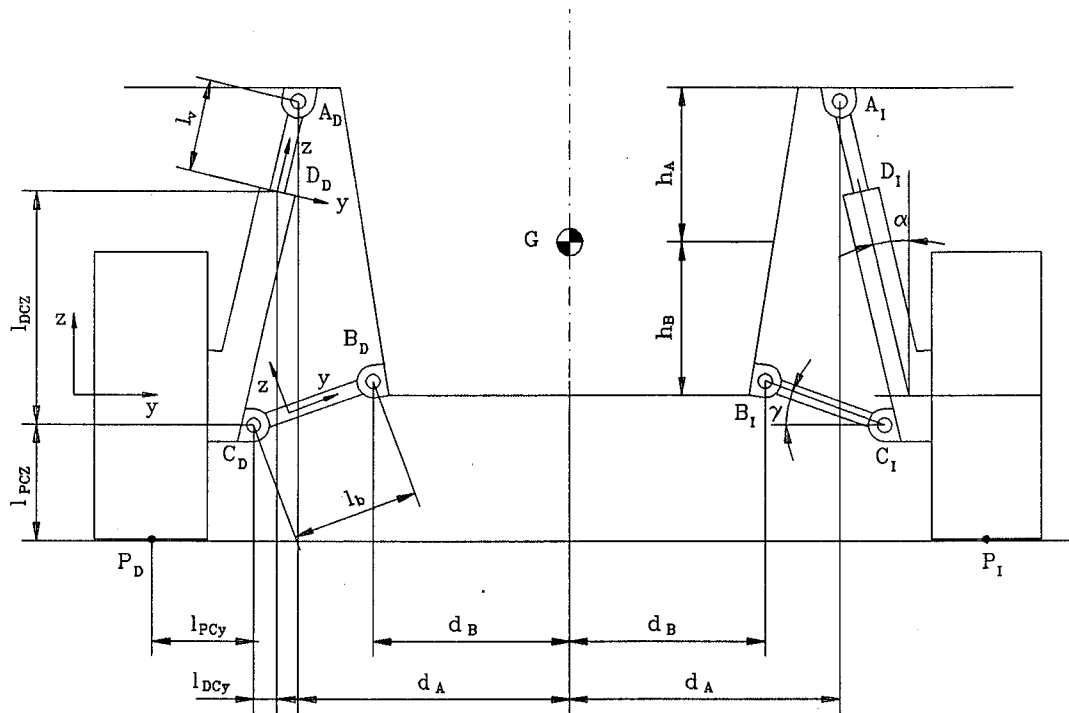


Fig. V-21: Definición geométrica del ejemplo de modelización bidimensional YZ de suspensión

Disponiendo de este modelo, la localización del centro teórico de balanceo realmente no es necesaria, ya que se halla directamente el balanceo producido por las fuerzas laterales.

No obstante, y con el fin de comprobar la validez del modelo, se calculará la situación del centro de balanceo a partir de las velocidades efectivas de rotación y traslación del chasis comparándose el resultado obtenido con el encontrado mediante la construcción geométrica convencional.

Dividiendo la velocidad efectiva del centro de gravedad del chasis por la velocidad angular del mismo, puede obtenerse la distancia entre el centro de gravedad y el centro de balanceo:

$$d = (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} / \Omega$$

En la Fig. V-22 se representa la velocidad de balanceo  $\Omega$ , en la Fig. V-23 la velocidad de traslación según el eje transversal  $V_y$ , y en la Fig. V-24 la velocidad de

traslación según el eje vertical  $V_z$ .

En dichas figuras, las curvas en trazo continuo corresponden a las simulaciones efectuadas con los datos nominales del vehículo.

El valor de la distancia  $d$ , calculado mediante la expresión anterior, en función del tiempo es:

T (s)	d (m)
0.10	1.11
0.25	0.58
0.50	0.69

El valor de la misma distancia  $d$  obtenido mediante la construcción geométrica convencional, aplicada a la situación nominal de partida, es de 0.48 m.

La diferencia se debe a que al aplicar la fuerza lateral, no sólo se produce un movimiento de balanceo, sino que también se deforman lateralmente los neumáticos incrementándose, por tanto, la velocidad  $V_y$  y con ella el valor de  $d$ .

Para demostrarlo, se efectúa una segunda simulación dando a los neumáticos una rigidez diez veces mayor tanto en sentido radial como transversal.

Los resultados obtenidos son los de las curvas de trazo discontinuo de las mismas Figuras V-22, V-23 y V-24.

Los valores correspondientes de la distancia  $d$  son entonces:

T (s)	d (m)
0.10	0.54
0.25	0.53
0.50	1.11

Como puede verse, el valor de la distancia  $d$  en los primeros momentos se acerca ahora mucho más al valor

teórico de 0.48 m. Cuando el tiempo transcurrido es mayor, la situación geométrica ha cambiado y los resultados se alejan del nominal.

Volviendo a los valores normales de rigidez de los neumáticos, se efectúa otra simulación en la que la excitación consiste en aplicar una carga vertical de 100 Kg sobre el chasis.

Se puede así conocer el desplazamiento lateral en la zona de contacto del neumático con el suelo como consecuencia de los desplazamientos de la suspensión. En la Fig. V-25 se representan los citados desplazamientos de las dos ruedas.

También puede conocerse la variación del ángulo de caída de las ruedas (Fig. V-26).

Tal como era de esperar, en ambos casos los resultados son simétricos.

Para comprobar la influencia del diseño de la geometría de la suspensión, se efectúan otras simulaciones variando las características geométricas del modelo inicial (configuración 1).

La primera variación consiste en incrementar en 0.1 metros la longitud del brazo inferior, permaneciendo invariable el resto del sistema (configuración 2).

La segunda variación consiste en disminuir  $5^\circ$  la inclinación de los brazos inferiores, pasando el ángulo formado con la horizontal de  $6.5^\circ$  a  $1.5^\circ$  (configuración 3).

Como acción exterior, se aplica en los tres casos una excitación lateral de 1000 N.

En la Fig. V-27 se recogen los ángulos de balanceo de las tres configuraciones.

Según la construcción geométrica convencional, la primera variación (configuración 2) no afectaría a la situación del centro de balanceo. Sin embargo, puede comprobarse que, aunque menos que el cambio de la configuración 3, algo sí que afecta.

Fig. V-23: Velocidad de traslación (m/s) según eje Y ante acción lateral

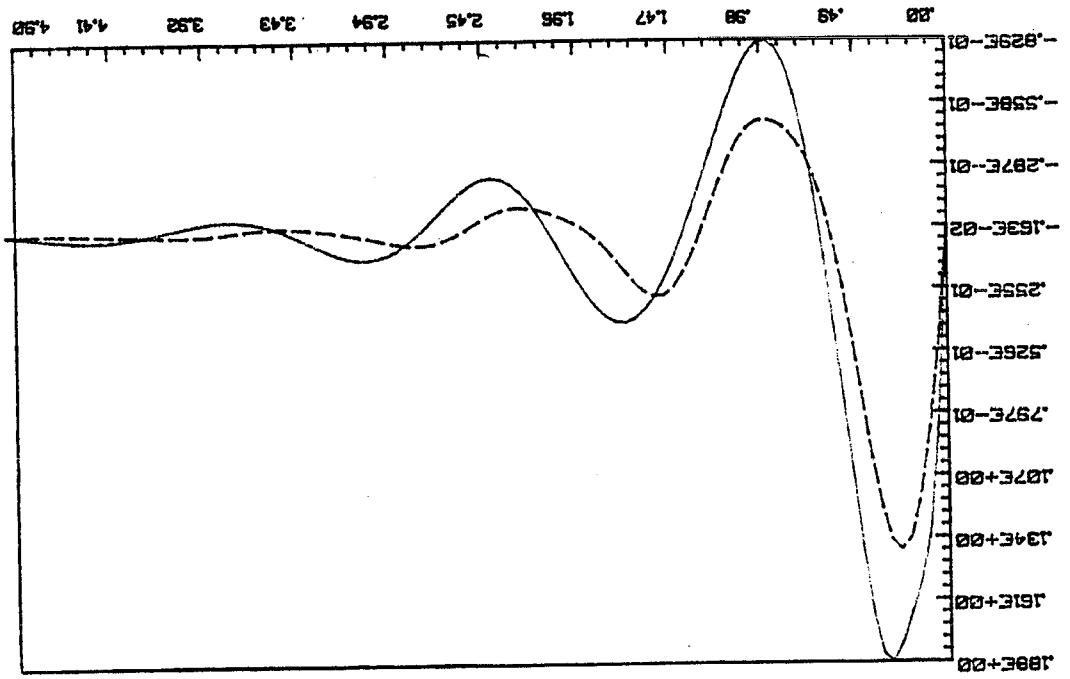
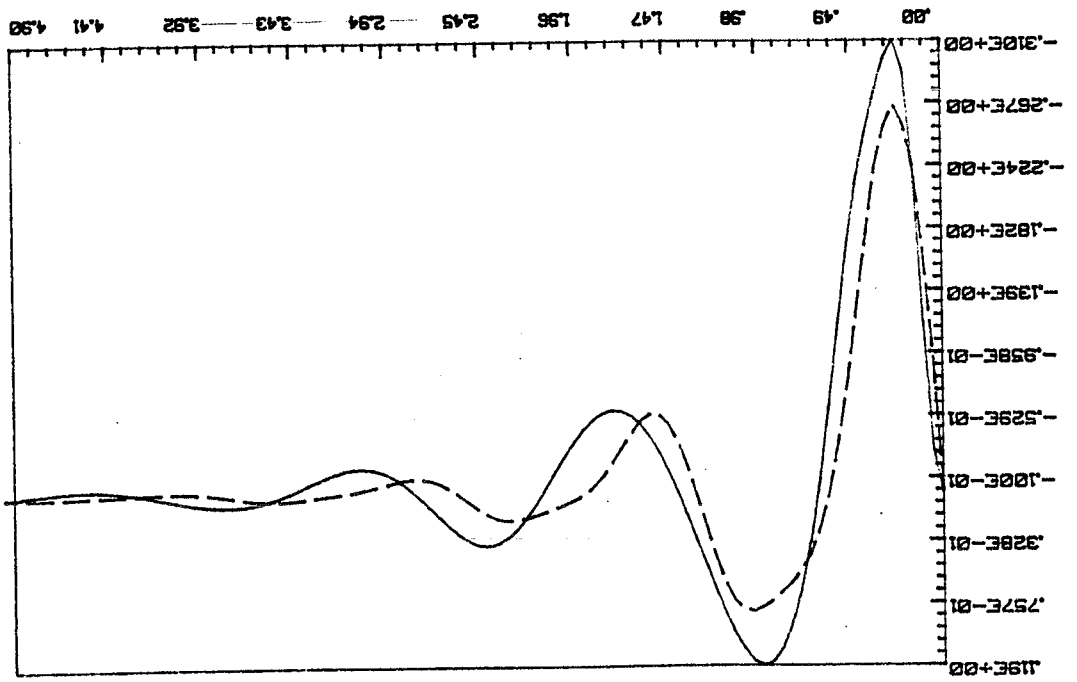


Fig. V-22: Velocidad de balanceo (rad/seg) ante acción lateral



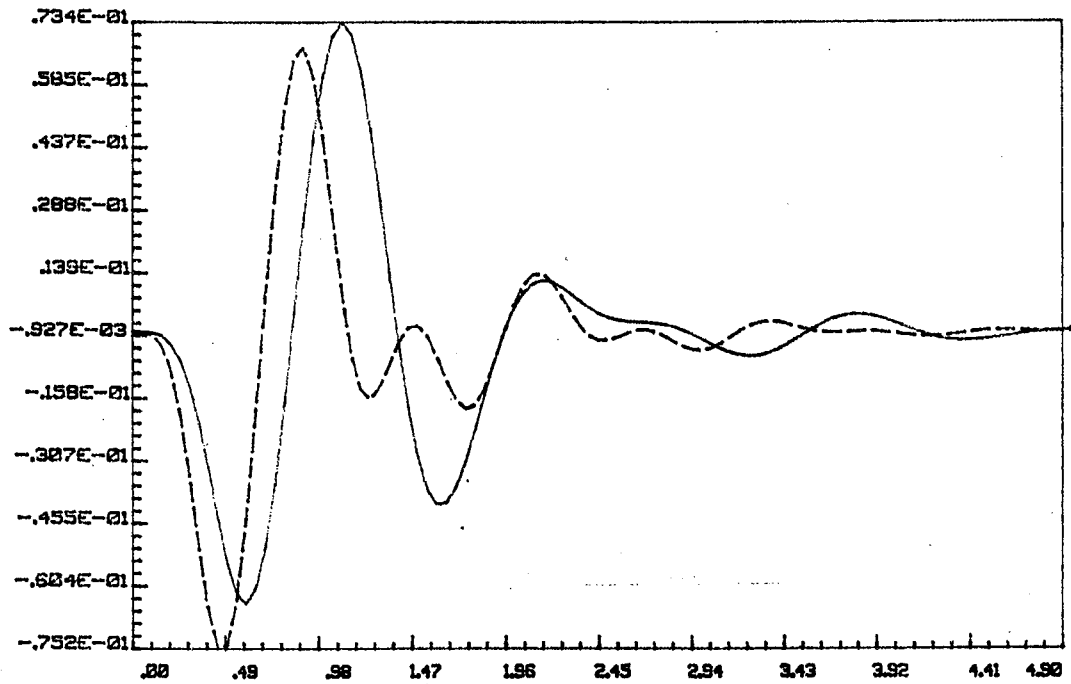


Fig. V-24: Velocidad de traslación (m/s) según eje Z ante acción lateral

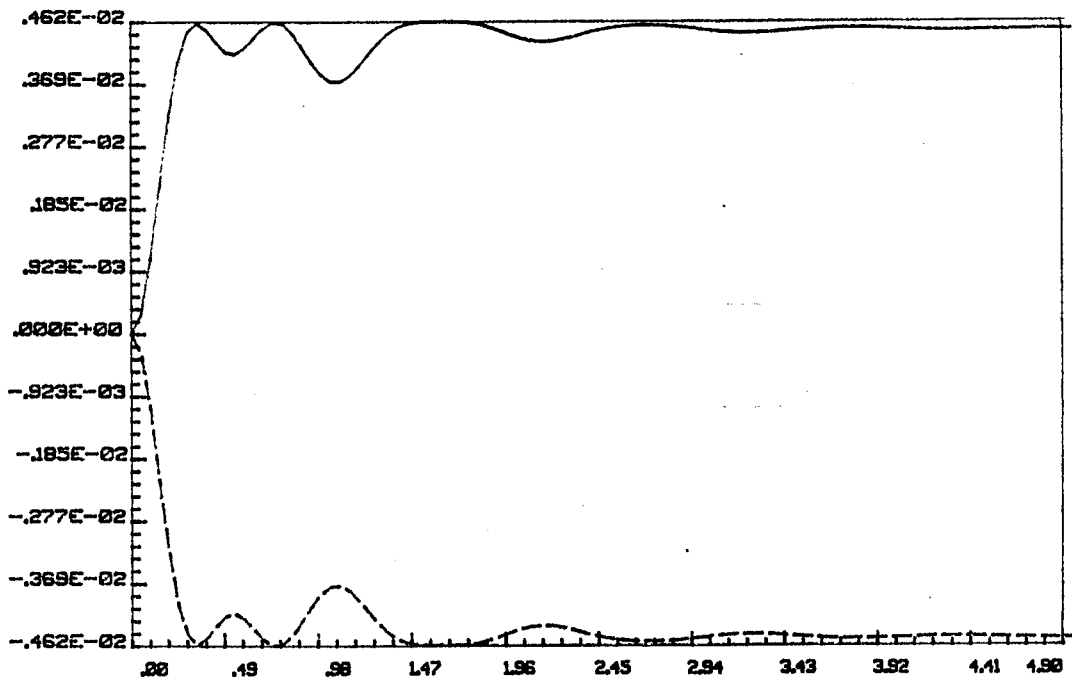


Fig. V-25: Desplazamiento lateral (m) neumáticos ante carga vertical

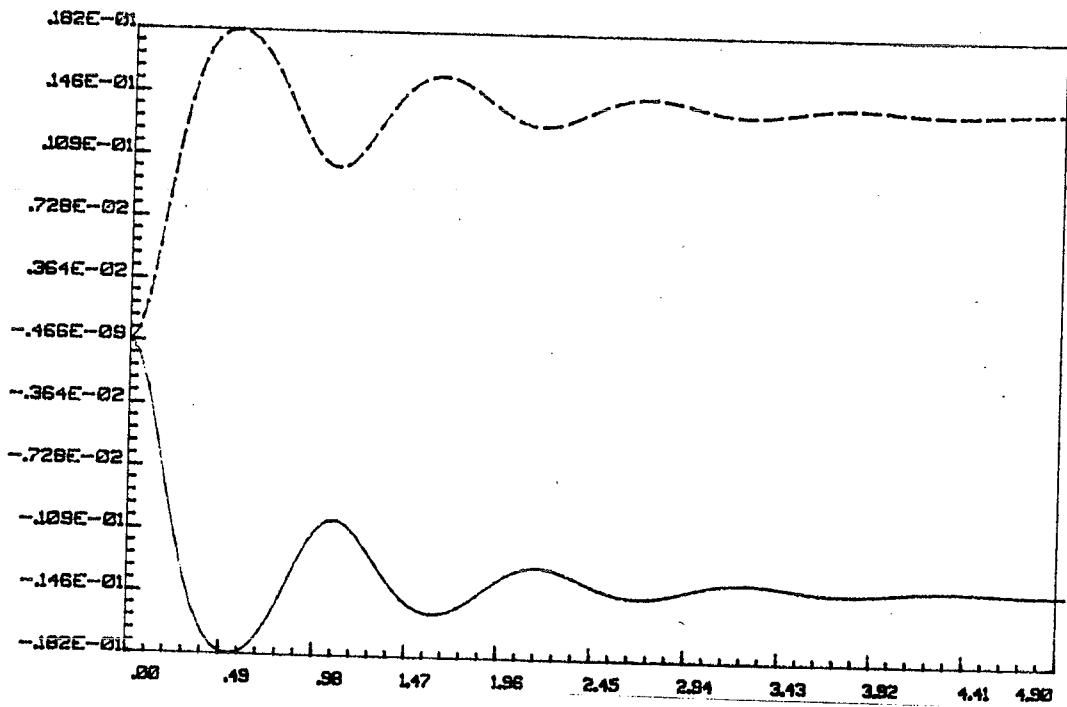


Fig. V-26: Angulo caida (rad) ruedas ante carga vertical

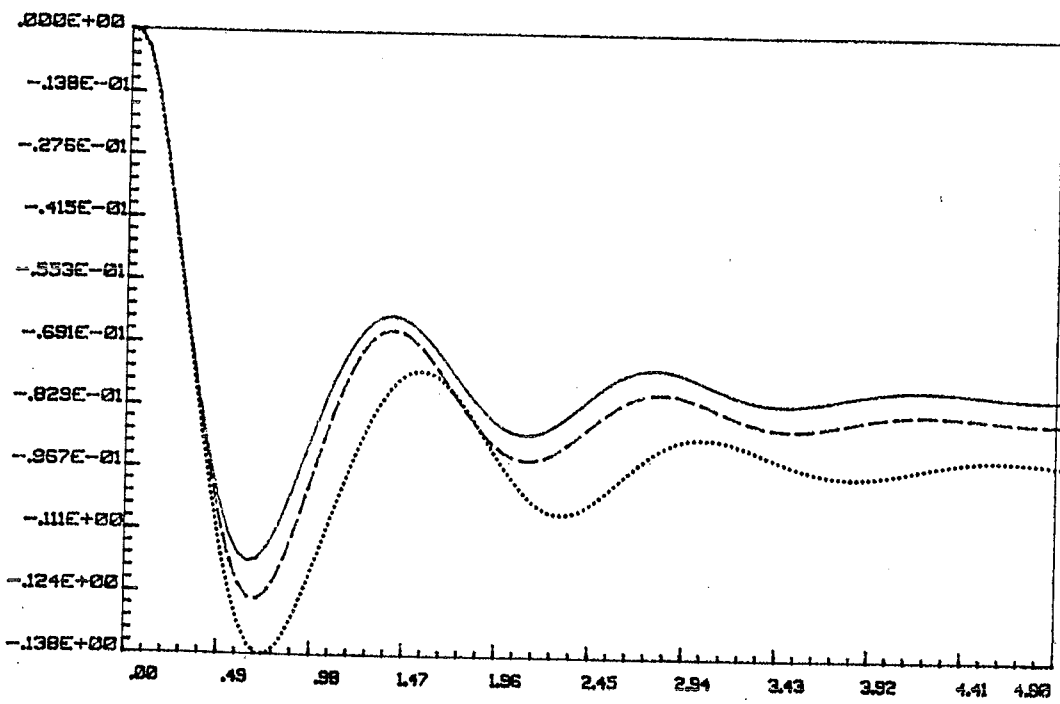


Fig. V-27: Angulo de balanceo (rad) ante acción lateral

En la configuración 3, puede comprobarse como, efectivamente, el balanceo es mayor, como corresponde al hecho de que el centro de balanceo está a menor altura por estar el brazo inferior en una posición menos inclinada.

#### V.8 - CONCLUSIONES SOBRE LA MODELIZACION DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSION Y DIRECCION

En este Capítulo, se han desarrollado los modelos en bond graph de los sistemas de dirección y suspensión delantera más habituales de los vehículos modernos.

La elaboración de los modelos se ha simplificado mucho gracias al empleo de los modelos de sólidos sin masa desarrollados en el Capítulo III.

Al considerarse en detalle la constitución de los mecanismos, tanto en los que se refiere a los enlaces entre los sólidos como a la geometría tridimensional del sistema, se abren nuevas posibilidades en el análisis del comportamiento de los sistemas, análisis que puede ser de gran ayuda en el diseño.

La modelización simplificada del sistema de suspensión y dirección así como los modelos bidimensionales, son modelizaciones útiles en determinados análisis, como lo demuestra el ejemplo expuesto de la suspensión bidimensional YZ.

Sin embargo, los modelos completos tridimensionales de suspensión y dirección son los que mejor permiten estudiar dichos sistemas y su influencia en el comportamiento del vehículo.

Las simulaciones con los modelos completos tridimensionales de suspensión y dirección se hacen en el Capítulo VI, donde se modeliza un vehículo entero en el que intervienen los citados modelos. Con dichas simulaciones se comprueba el comportamiento de los modelos y se ven sus posibilidades reales.





## **Capítulo VI**

### **MODELIZACION DEL VEHICULO**

#### **VI.0 - INTRODUCCION**

En este Capítulo, se efectúa la modelización de un vehículo completo.

Para ello, se parte de los modelos de ruedas, suspensión y dirección, ya desarrollados en anteriores capítulos, y se desarrolla la modelización del chasis.

A la modelización del chasis no se dedicó un capítulo específico, como en el caso de los demás elementos mencionados, ya que, como se verá a continuación, se trata de una modelización relativamente sencilla, por considerarse simplemente como un sólido rígido tridimensional.

El modelo de vehículo completo se construye enlazando los submodelos indicados, poniéndose así de manifiesto la ventaja de la técnica de bond graph de permitir construir modelos complejos ensamblando submodelos preparados previamente de forma independiente.

Una vez desarrollado el modelo completo de vehículo, se efectúan varias simulaciones para comprobar su validez y sus posibilidades.

#### **VI.1 - DESARROLLO DE LA MODELIZACION**

En la Fig. VI-1 se representa esquemáticamente el vehículo que se va a modelizar.

Este modelo se compone de un chasis al que se acoplan los demás elementos de suspensión, dirección y ruedas.

En los siguientes apartados se expone la modelización empleada para cada uno de dichos elementos.

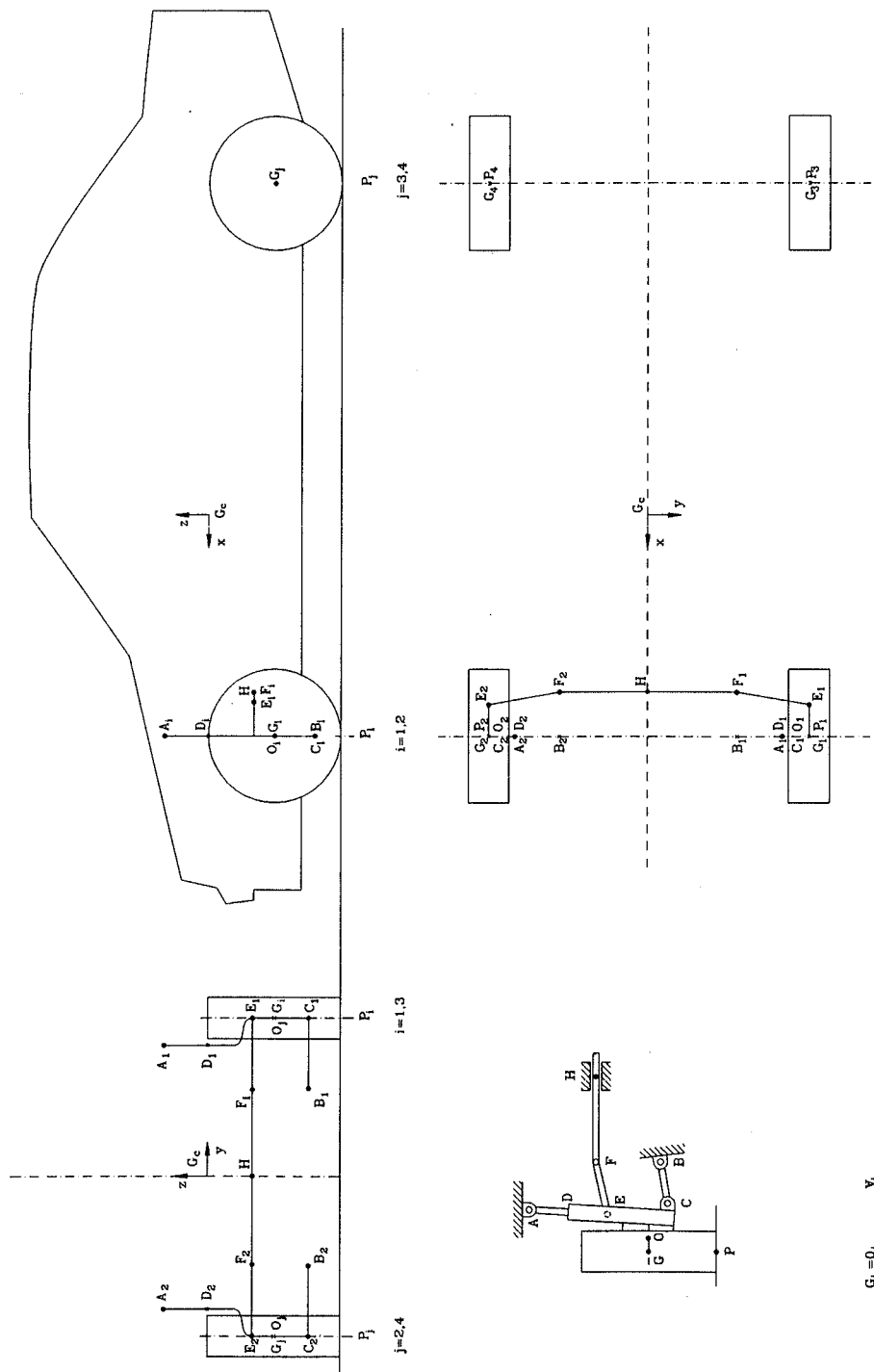


Fig. VI-1: Vehículo completo

### VI.1.1 - Modelización del chasis

El chasis, o bastidor, es el elemento base del vehículo al que se acoplan todos los demás.

Como chasis se entiende aquí el conjunto formado por el chasis propiamente dicho, bastidor o estructura monocasco, y los elementos solidarios a él, como los elementos de la carrocería, motor, accesorios, carga, etc., es decir, todo lo que constituye la masa suspendida del vehículo, aunque, por simplicidad, se hablará de chasis en lugar de masa suspendida.

Para la modelización del chasis se considerará a éste como un sólido rígido con posibilidad de moverse según las tres direcciones del espacio.

Se empleará una base solidaria al mismo definida del siguiente modo:

Eje  $x_{ch}'''$ : eje longitudinal del vehículo, con sentido positivo en la dirección de la marcha.

Eje  $y_{ch}'''$ : eje transversal del vehículo, con sentido positivo hacia el lado izquierdo.

Eje  $z_{ch}'''$ : eje perpendicular a los anteriores, formando un triedro dextrógiro, éste es, con sentido positivo hacia la parte superior.

Se emplean asimismo las bases auxiliares  $x_{ch}'y_{ch}'z_{ch}'$  y  $x_{ch}''y_{ch}''z_{ch}''$  cuya definición está asociada a la de los ángulos de Cardan.

El sistema de ángulos de Cardan que se empleará es el mismo ya utilizado en otros modelos, con lo que se aplica directamente toda la formulación obtenida. Está formado por:

$\tau$  = ángulo de rotación sobre el eje Z de la base XYZ de la referencia fija. Pasa de dicha base a la base  $x_{ch}'y_{ch}'z_{ch}'$ . Puede considerarse como el ángulo de guiñada (yaw).

$\phi$  = ángulo de rotación sobre el eje  $x_{ch}'$  de la base  $x_{ch}'y_{ch}'z_{ch}'$ . Pasa de dicha base a la base  $x_{ch}''y_{ch}''z_{ch}''$ . Puede considerarse como el ángulo de balanceo (roll).

$\theta$  = ángulo de rotación sobre el eje  $y_{ch}''$  de la base  $x_{ch}''y_{ch}''z_{ch}''$ . Pasa de dicha base a la base  $x_{ch}'''y_{ch}'''z_{ch}'''$ . Puede considerarse como el ángulo de cabeceo (pitch).

El bond graph del chasis será el de un sólido con varios puntos de enlace, puntos que corresponden a los de unión con los elementos de los diferentes sistemas de suspensión, dirección, etc.

#### VI.1.2 - Modelización del resto de los elementos

Se trata de los sistemas de suspensión, dirección y ruedas.

Para la suspensión delantera, se emplea un sistema de suspensión Mac Pherson para cada uno de los dos lados.

El modelo empleado es el descrito en el apartado V.1, considerándose que la masa de sus elementos es despreciable.

Cada modelo de suspensión se acopla a la rueda correspondiente en el punto  $O_i$ , a la dirección en el punto  $E_i$  y al chasis en los puntos  $A_i$  y  $B_i$ , donde  $i=1$  para el lado izquierdo e  $i=2$  para el lado derecho.

Para cada uno de los lados del tren trasero ( $i=3,4$ ), se emplea el modelo simplificado de suspensión desarrollado en el apartado V.4, que supone que los movimientos de suspensión están restringidos al eje  $z_{ch}'''$  del chasis.

Para el sistema de dirección, se emplea el modelo de dirección de cremallera desarrollado en el apartado V.2, considerándose también que la masa de sus elementos es despreciable.

Este modelo de dirección se acopla a las suspensiones

izquierda y derecha a través de los puntos  $E_i$  ( $i=1,2$ ) y al chasis a través del punto  $H$ , punto que es de posición variable en el mismo, desplazándose sobre su eje  $y_{ch}'''$ .

Para las ruedas se emplea el modelo desarrollado en el apartado IV.1.

Las ruedas delanteras se acoplan al punto  $O_i$  ( $i=1,2$ ) de la suspensión correspondiente. Se ha supuesto que el punto  $O$ , de enlace de la rueda con la mangueta, coincide con el centro de gravedad  $G$  de la rueda, con lo que el Transformer  $TF:OG$  desaparece.

En cuanto a las ruedas traseras, éstas se unen directamente a los puntos  $G_3$  y  $G_4$  del chasis, puntos que son de posición variable en el chasis en función de los desplazamientos sobre el eje  $z_{ch}'''$  de las suspensiones correspondientes.

En todas las ruedas se incluye una modelización simplificada de los frenos, mediante una fuente de esfuerzo que actúa sobre el eje  $y'''$  de la rueda y hace reacción sobre la mangueta correspondiente, en el caso de las ruedas delanteras, y sobre el chasis, en el caso de las ruedas traseras.

### VI.1.3 - Bond graph del modelo de vehículo completo

En la Figura VI-2 se representa el word bond graph del modelo conjunto, que se compone de ocho partes: cuatro ruedas, suspensión delantera izquierda, suspensión delantera derecha, dirección y chasis.

En la parte del chasis se incluye la suspensión simplificada trasera que se mencionó antes, así como la modelización, también simplificada, de lo que sería un sistema de tracción delantera. Para ello se emplea una fuente de esfuerzo que actúa sobre el eje  $y'''$  de la rueda y hace reacción sobre el chasis.

En la Figura VI-3 se representan las ocho partes que componen el bond graph completo del modelo.

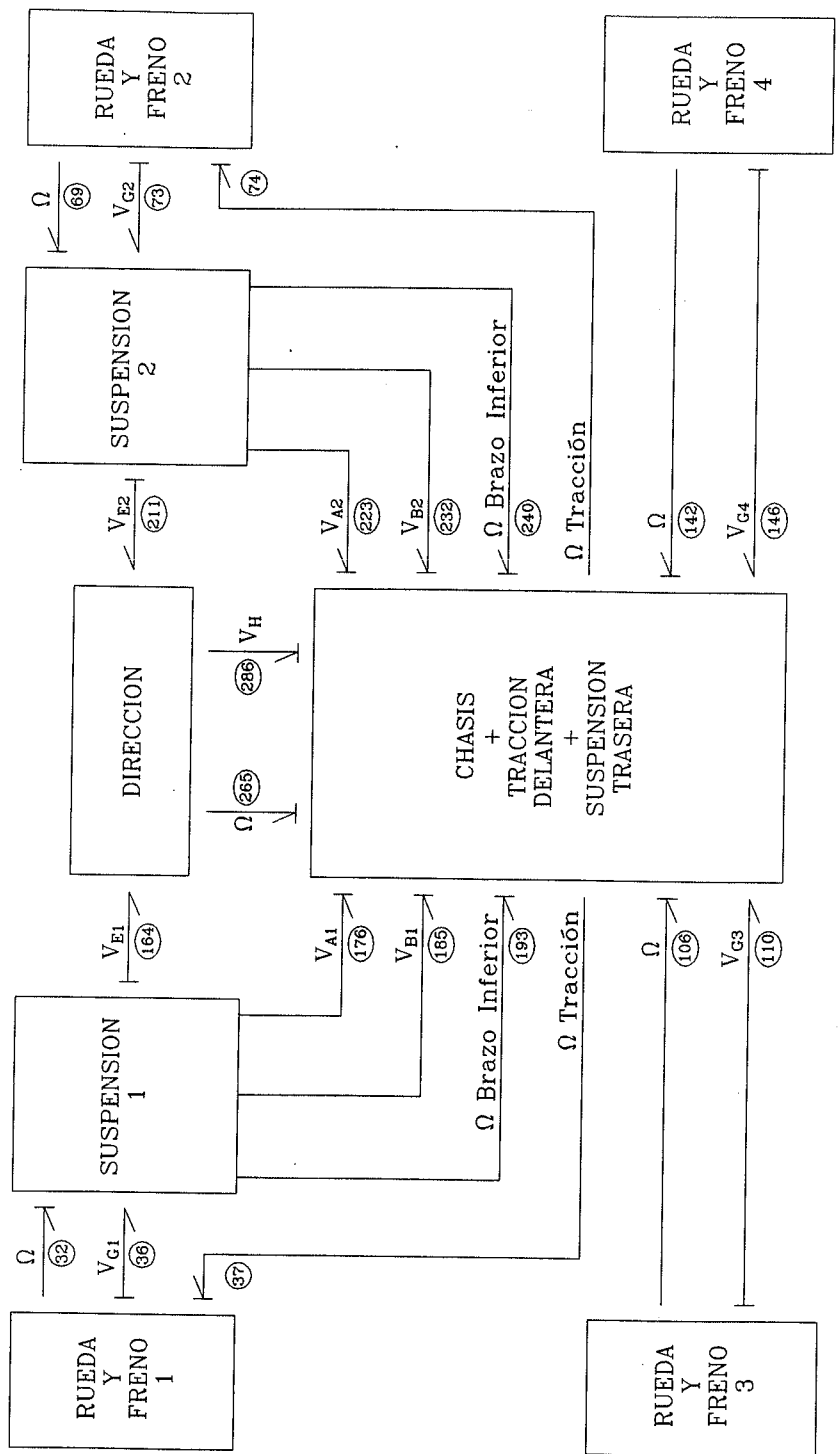
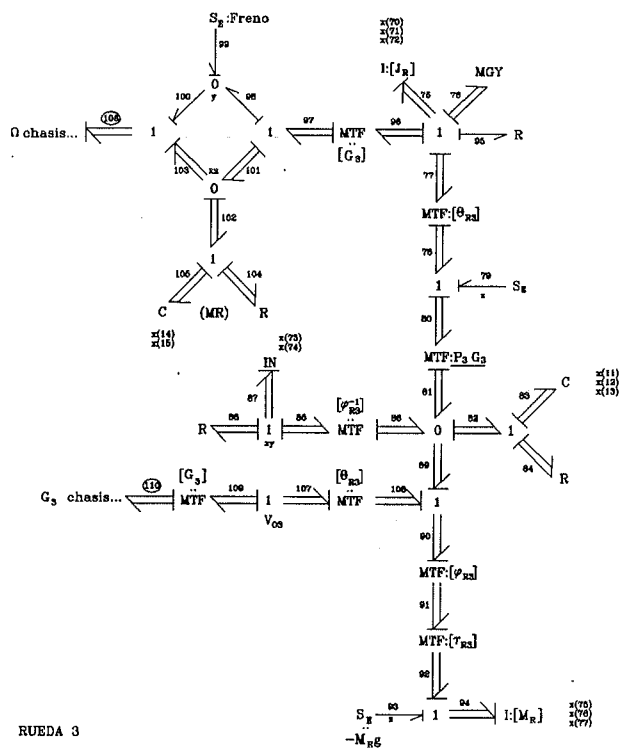


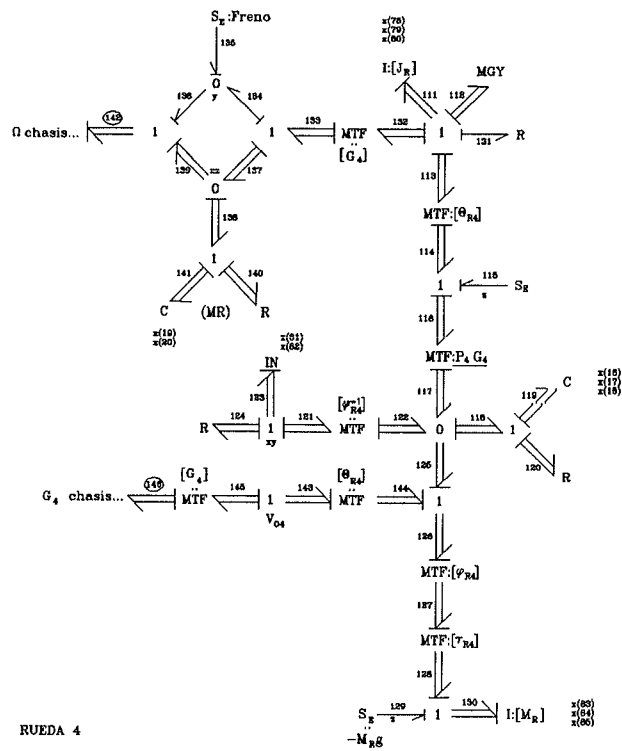
Fig. VI-2: Word bond graph del modelo de vehículo completo







RUEDA 3



RUEDA 4

Fig. VI-3.2: Partes 3 y 4 del bond graph del modelo de vehículo completo: ruedas traseras.

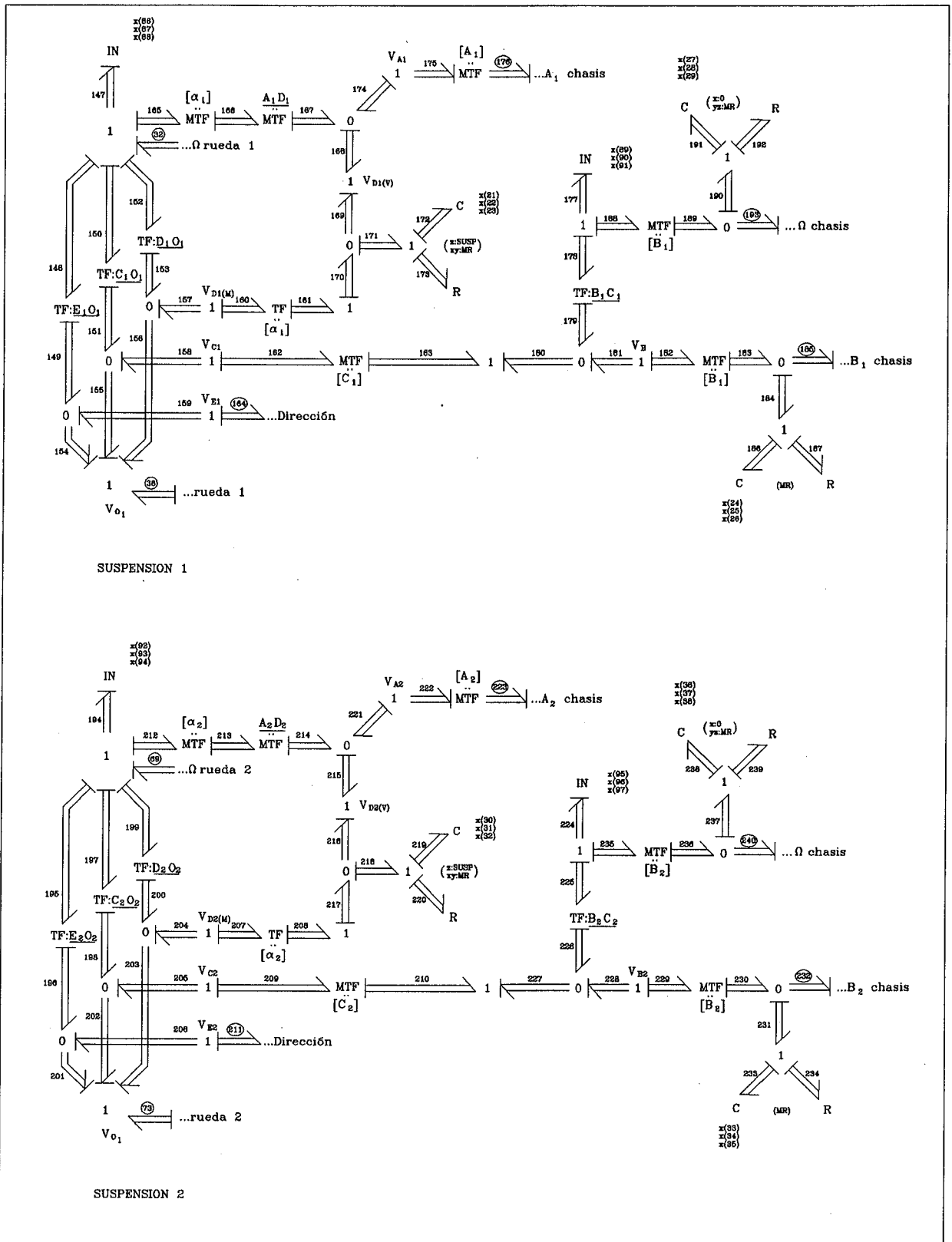


Fig. VI-3.3: Partes 5 y 6 del bond graph del modelo de vehículo completo: suspensiones delanteras.

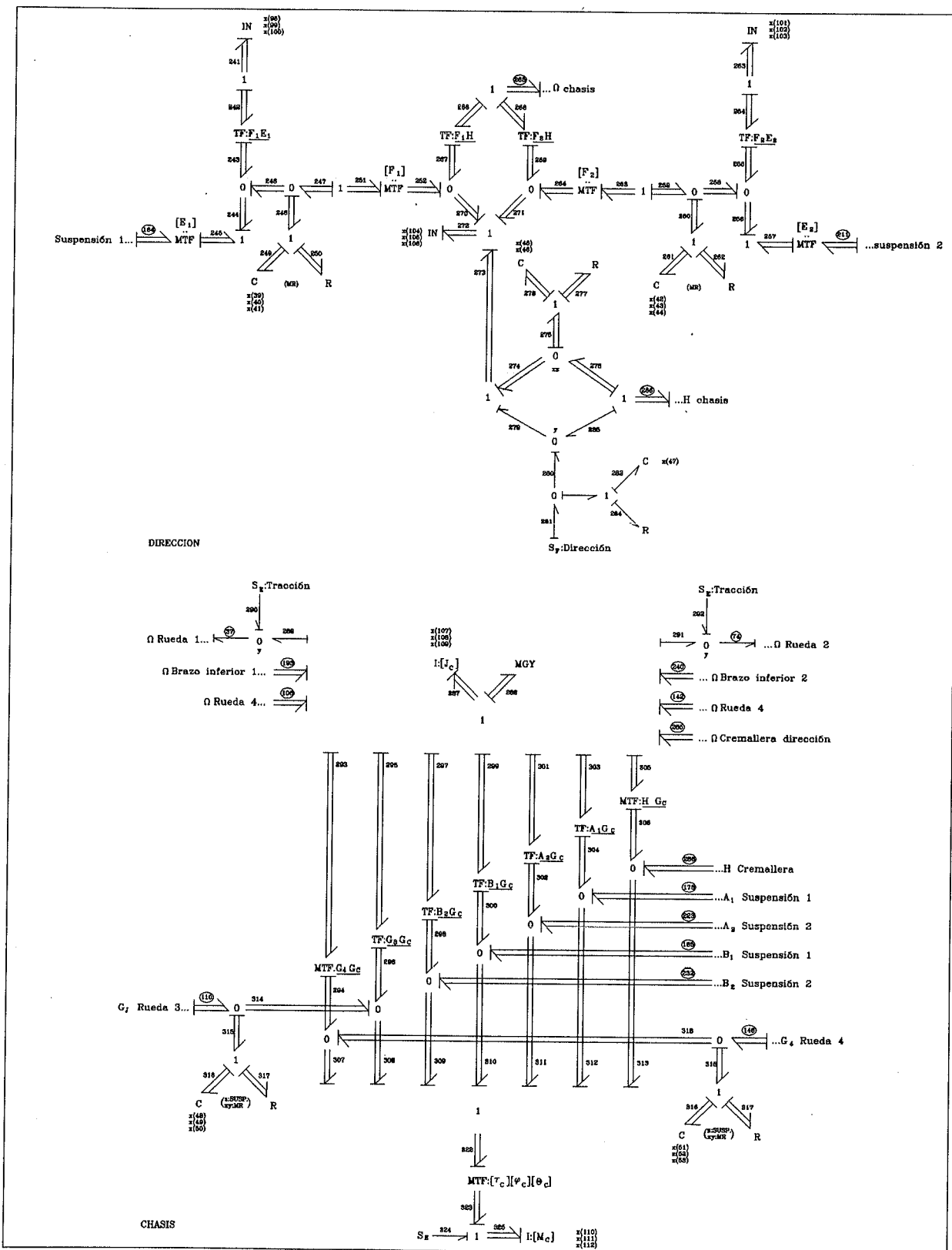


Fig. VI-3.4: Partes 7 y 8 del bond graph del modelo de vehículo completo: dirección y chasis.

Este bond graph consta de:

- 325 Grafos
- 48 Uniones cero
- 87 Uniones uno
- 20 Compliances
- 21 Inercias
- 28 Resistencias
- 70 Transformer
- 5 Gyrator
- 15 Fuentes de esfuerzo
- 1 Fuente de flujo

El sistema modelizado contiene catorce sólidos:

- rueda 1
- rueda 2
- rueda 3
- rueda 4
- chasis
- cremallera de dirección
- brazo de dirección izquierdo
- brazo de dirección derecho
- mangueta izquierda
- brazo inferior de suspensión izquierdo
- vástago del amortiguador izquierdo
- mangueta derecha
- brazo inferior de suspensión derecho
- vástago del amortiguador derecho

Los cinco primeros se consideran como sólidos normales con masa, y los nueve restantes se considera que son sólidos sin masa.

A efectos de obtención de ecuaciones, el modelo tiene las siguientes componentes:

- 21 elementos Inercia, con un total de 59 componentes.
- 20 elementos Compliance, con un total de 53 componentes.

- 15 ángulos de Cardan, de orientación absoluta de los cinco sólidos con masa.

- 42 ángulos de Cardan de orientación relativa entre sólidos, correspondientes a las catorce uniones siguientes:

- A1: mangueta 1 - chasis
- A2: mangueta 2 - chasis
- B1: brazo inferior de suspensión 1 - chasis
- B2: brazo inferior de suspensión 2 - chasis
- C1: mangueta 1 - brazo inf. de suspensión 1
- C2: mangueta 2 - brazo inf. de suspensión 2
- E1: mangueta 1 - brazo de dirección 1
- E2: mangueta 2 - brazo de dirección 2
- F1: brazo de direc. 1 - chasis (cremallera)
- F2: brazo de direc. 2 - chasis (cremallera)
- G1: rueda 1 - mangueta 1
- G2: rueda 2 - mangueta 2
- G3: rueda 3 - chasis
- G4: rueda 4 - chasis

La orientación relativa entre cremallera y chasis no es necesaria, ya que ambos sólidos se unen a través de un par prismático de deslizamiento.

Hay que indicar que en este modelo no se han empleado más que elementos convencionales, no haciendo uso de elementos Inercia Nula ni elementos Muelle Rígido para la modelización de sólidos de masa despreciable, restricciones, etc. En su lugar, se han empleado Inercias y Compliances convencionales de pequeño valor. En la Figura VI-3, dichas Inercias de pequeño valor se han señalado con el símbolo IN, mientras que para las Compliances se ha empleado el símbolo normal (C), acompañado de la indicación MR para indicar en qué componentes hay restricción.

El total de ecuaciones diferenciales es por consiguiente de:

$$59 + 53 + 15 + 42 = 169 \text{ ecuaciones diferenciales}$$

Este número es el mínimo, con el que se obtienen los ángulos de Cardan, a partir de las velocidades angulares de los sólidos, los desplazamientos de las Compliances, a par-

tir de sus flujos, y las velocidades de las Inercias, a partir de sus esfuerzos.

En el Anexo se recogen las ecuaciones del modelo y la definición de las variables de estado.

Si hay que obtener los desplazamientos de las inercias u otras variables, la cantidad de ecuaciones se incrementa según el número de nuevas variables que se desee obtener.

Hay que indicar, por último, que para trabajar con las orientaciones relativas entre sólidos, en cada una de las uniones A1, A2, B1, B2, C1, C2, E1, E2, F1, F2, G1, G2, G3 y G4 se ha empleado un único Transformer de razón la matriz producto de las correspondientes tres matrices normales de cambio de base:  $[\tau] \cdot [\phi] \cdot [\theta]$ .

## VI.2 - EJEMPLOS DE SIMULACION

Se desarrolla en este apartado la aplicación del modelo descrito a un caso concreto, con el fin de realizar algunas simulaciones con el mismo.

Los parámetros geométricos del modelo corresponden al vehículo de la Fig. VI-1 y se definen de la siguiente forma:

1-Posición del centro H de la cremallera respecto al c.d.g. del chasis:

$$HGX = -.8$$

$$HGY = X(170) - X(47)$$

$$HGZ = .2$$

En la componente transversal (eje y), el sumando X(170) es el desplazamiento impuesto por la fuente de flujo que representa el input de dirección, y se obtiene integrando dicho flujo. La variable X(47) es el desplazamiento de la compliance interpuesta entre dicha fuente de flujo y la cremallera.

2-Posición de las ruedas traseras respecto al c.d.g. del chasis:

$$\begin{aligned} G3GX &= 1.5 \\ G3GY &= -.72 \\ G3GZ &= .518 - X(50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G4GX &= 1.5 \\ G4GY &= .72 \\ G4GZ &= .518 - X(53) \end{aligned}$$

El valor nominal de la tercera componente es, en reposo, de 0.3 metros. Pero este valor varía en función de los desplazamientos de las Compliances de suspensión, correspondientes a las variables X(50) y X(53). La deflexión inicial de estas Compliances es de  $1115 \times (1/2.5) \times 0.5 \times 9.8 / 10000 = 0.218$  m, de donde se obtiene el valor del término fijo de esta tercera componente.

3-Posición, respecto al c.d.g. del chasis, de la articulación con el chasis del extremo superior del vástago del amortiguador:

$$\begin{aligned} A1GX &= -1 \\ A1GY &= -.6 \\ A1GZ &= -.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A2GX &= -1 \\ A2GY &= .6 \\ A2GZ &= -.2 \end{aligned}$$

4-Posición, respecto al c.d.g. del chasis, de la articulación con el chasis del brazo inferior de suspensión:

$$\begin{aligned} B1GX &= -1 \\ B1GY &= -.4 \\ B1GZ &= .46 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B2GX &= -1 \\ B2GY &= .4 \\ B2GZ &= .46 \end{aligned}$$

5-Posición de los extremos F1 y F2 de la cremallera respecto al centro H de la misma:

F1HX = 0  
F1HY = -.4  
F1HZ = 0

F2HX = 0  
F2HY = .4  
F2HZ = 0

6-Posición relativa de los extremos F y E de los brazos de dirección:

FE1X = 0  
FE1Y = .325  
FE1Z = 0

FE2X = 0  
FE2Y = -.325  
FE2Z = 0

7-Vector que va desde el punto de contacto de la rueda con el suelo al centro de la rueda:

PG1X = 0  
PG1Y = 0  
PG1Z = .3 - X(3)

PG2X = 0  
PG2Y = 0  
PG2Z = .3 - X(8)

PG3X = 0  
PG3Y = 0  
PG3Z = .3 - X(13)

PG4X = 0  
PG4Y = 0  
PG4Z = .3 - X(18)

El radio de la rueda está corregido por la componente vertical del desplazamiento de la Compliance de deformación del neumático correspondiente (variables X(3), X(8), X(13) y X(18)).



8-Posición de los puntos C, D y E de la mangueta respecto al punto O (centro de la mangueta, que se ha supuesto coincidente con el centro G de la rueda).

$$\begin{aligned}CG1X &= 0 \\CG1Y &= 0 \\CG1Z &= .16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CG2X &= 0 \\CG2Y &= 0 \\CG2Z &= .16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DG1X &= 0 \\DG1Y &= .12 \\DG1Z &= -.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DG2X &= 0 \\DG2Y &= -.12 \\DG2Z &= -.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}EG1X &= .14 \\EG1Y &= 0 \\EG1Z &= -.1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}EG2X &= .14 \\EG2Y &= 0 \\EG2Z &= -.1\end{aligned}$$

9-Posición relativa de los puntos A y D del vástago del amortiguador:

$$\begin{aligned}AD1X &= 0 \\AD1Y &= 0 \\AD1Z &= -.528 + X(23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AD2X &= 0 \\AD2Y &= 0 \\AD2Z &= -.528 + X(32)\end{aligned}$$

El valor nominal de la tercera componente en reposo es de 0.2 metros.

Este valor varía en función de los desplazamientos de las Compliances de suspensión, correspondientes a las

variables X(23) y X(32). La deflexión inicial de estas Compliances es de  $1115 \times (1.5/2.5) \times 0.5 \times 9.8 / 10000 = 0.328$  m, de donde se obtiene el valor del término fijo de esta tercera componente.

10-Posición relativa de los extremos de los brazos inferiores de suspensión:

BC1X = 0  
BC1Y = .32  
BC1Z = 0

BC2X = 0  
BC2Y = -.32  
BC2Z = 0

De acuerdo con los datos anteriores, la batalla es de 2.5 metros, la vía de 1.44 metros, el reparto de pesos es de 60% delante y 40% detrás.

Se ha considerado que el eje de la articulación del brazo inferior con chasis está orientado en la dirección longitudinal del chasis ( $x_{ch}''$ ).

También se ha considerado que el ángulo  $\alpha$  de orientación relativa entre el vástago del amortiguador y la mangueta es nulo.

Otros datos del vehículo con el que se van a realizar las simulaciones son los siguientes:

11-Rigidez neumáticos (N/m):

CNX = 50000  
CNY = 50000  
CNZ = 150000

12-Amortiguamiento neumáticos (N·s/m):

RNX = 1000  
RNY = 1000  
RNZ = 1000

13-Rigidez suspensiones delanteras y traseras (N/m):

$$CSD = 10000$$

$$CST = 10000$$

14-Amortiguamiento de las suspensiones delanteras (N·s/m):

$$RSD = 950$$

15-Amortiguamiento de las suspensiones traseras (N·s/m):

$$RST = 950$$

16-Masa ruedas (Kg):

$$MR = 15$$

17-Momentos de inercia ruedas (Kg·m<sup>2</sup>):

$$IRX = .24$$

$$IRY = .5$$

$$IRZ = .24$$

18-Masa chasis (Kg):

$$MC = 1115$$

19-Momentos de inercia chasis (Kg·m<sup>2</sup>):

$$ICX = 250$$

$$ICY = 1400$$

$$ICZ = 1500$$

20-Coeficientes deriva y deslizamiento:

$$Cd = 60000 \text{ (N/rad)}$$

$$Cs = 50000 \text{ (N/u.s.)}$$

Como en anteriores capítulos, y por simplicidad, se han considerado de valor constante varios parámetros que en realidad son variables, como la característica de los amortiguadores o los coeficientes de deriva y deslizamiento de los neumáticos.

Para las simulaciones que se describen a continuación, se parte de una situación estacionaria de velocidad constante de 3.95 m/s.

Esta situación se ha alcanzado aplicando una fuente de esfuerzo para acelerar el vehículo durante un tiempo determinado. Se comprueba que el sistema se comporta correctamente en todos los sentidos: la velocidad que adquieren todos los elementos es la adecuada, el único movimiento del chasis es de cabeceo, etc.

En los apartados siguientes se exponen algunas de las simulaciones realizadas con el modelo, consistentes en maniobras que afectan a los tres ejes del espacio: una maniobra de frenada, que afecta principalmente al eje longitudinal, una aplicación de carga sobre el vehículo, que afecta al eje vertical, y una maniobra de dirección para esquivar un obstáculo, que afecta al eje transversal.

#### VI.2.1 - Simulación de una maniobra de frenada

Se parte de la situación de velocidad constante antes citada y se aplica, a partir del instante  $T=0.1$  seg., un par de frenada de valor 50 N·m en cada una de las cuatro ruedas.

La velocidad del vehículo decrece desde los 3.95 m/s iniciales hasta 3.57 m/s durante los 0.6 segundos en que actúa el par de frenada, lo que supone una deceleración de  $(3.95-3.57)/0.6 = 0.63$  m/s<sup>2</sup>.

El esfuerzo longitudinal total aproximado, considerando un radio efectivo promedio de las ruedas de 0.275 m, es de:

$$\frac{50 \text{ (N}\cdot\text{m)} \times 4}{0.275 \text{ (m)}} = 727 \text{ N}$$

La deceleración obtenida es prácticamente igual a la teórica que sería  $727 \text{ N} / 1115 \text{ kg} = 0.65 \text{ m/s}^2$ . La pequeña diferencia existente se debe a que intervienen otros muchos factores como el deslizamiento longitudinal del neumático, la inercia de las propias ruedas, etc.

Entre otras cosas, el modelo permite, por ejemplo, conocer la distribución de esfuerzos en los mecanismos de suspensión y dirección.

En efecto, considerando el instante  $T=0.7$  seg., sobre los puntos A (unión del punto superior de la suspensión al chasis) y B (unión del brazo inferior al chasis) actúan los siguientes esfuerzos, expresados en Newtons, según los ejes de la referencia solidaria al chasis:

	$X_{ch}'''$	$Z_{ch}'''$
Punto A	25	3380
Punto B	-239	21.6

En la Figura VI-4 se representa, como ejemplo, la evolución a lo largo del tiempo de uno de estos esfuerzos: el longitudinal en el punto A, alcanzando al final el valor de 25 N que se indica.

Puede comprobarse como el esfuerzo horizontal responsable de la frenada se aplica principalmente en el punto B (239 N) y está dirigido hacia atrás, tal como era de esperar. Sin embargo, en el punto A el esfuerzo longitudinal se dirige hacia adelante, lo que se debe a que la reacción al par de frenada se aplica sobre la mangueta.

En la componente vertical del esfuerzo en el punto A, se incluye la carga sobre cada rueda delantera, que en reposo es de  $(1.5/2.5) \times 1115 \times 0.5 \times 9.8 = 3278 \text{ N}$ .

Teniendo en cuenta que el cabeceo del vehículo en el instante  $T=0.7$  seg. es de 0.012 radianes (ver Figura VI-5), el esfuerzo total en cada una de las ruedas delanteras es de:

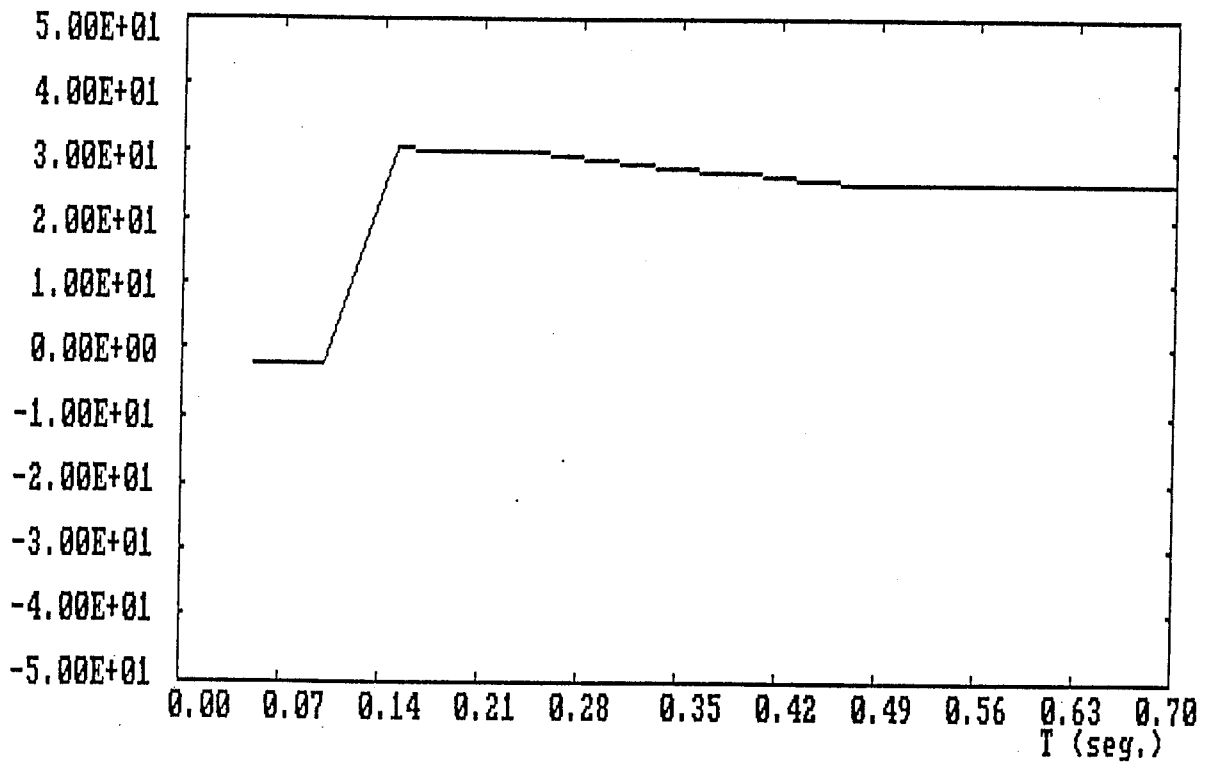


Fig. VI-4: Maniobra de frenada: esfuerzo longitudinal en el punto A.

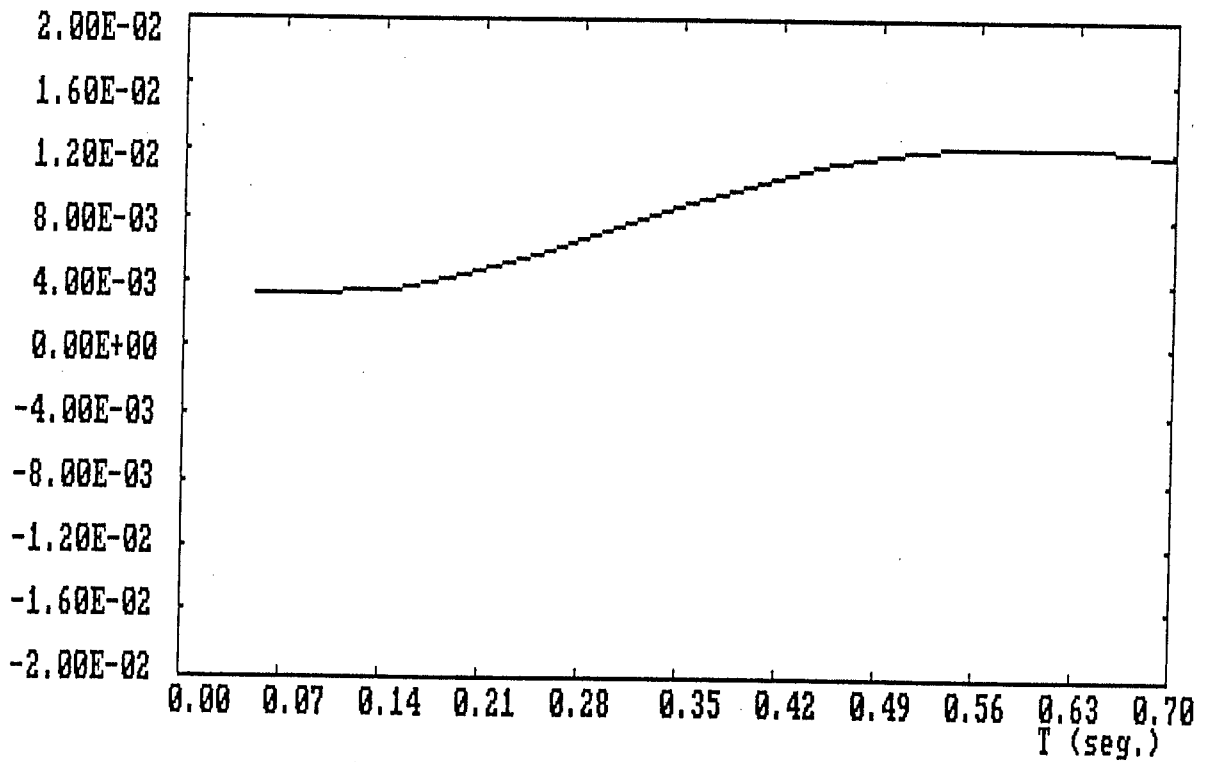


Fig. VI-5: Maniobra de frenada: ángulo de cabeceo.

$$(25 - 239) \cdot \cos(0.012) + (3380 + 21.6) \cdot \sin(0.012) = -173 \text{ N}$$

Considerando que el esfuerzo obtenido en la unión de las ruedas traseras al chasis es de 188 N, se comprueba como la suma total de esfuerzos concuerda con la previsión aproximada que se había hecho:

$$2 \times 173 + 2 \times 188 = 722 \text{ N}$$

### VI.2.2 - Simulación de la aplicación de una carga vertical

En este caso, se simula la aplicación de una carga vertical y hacia abajo de 2000 N sobre el centro de gravedad del chasis.

En la Figura VI-6 se recoge la deflexión de los muelles de suspensión delanteros (línea continua) y traseros (línea discontinua).

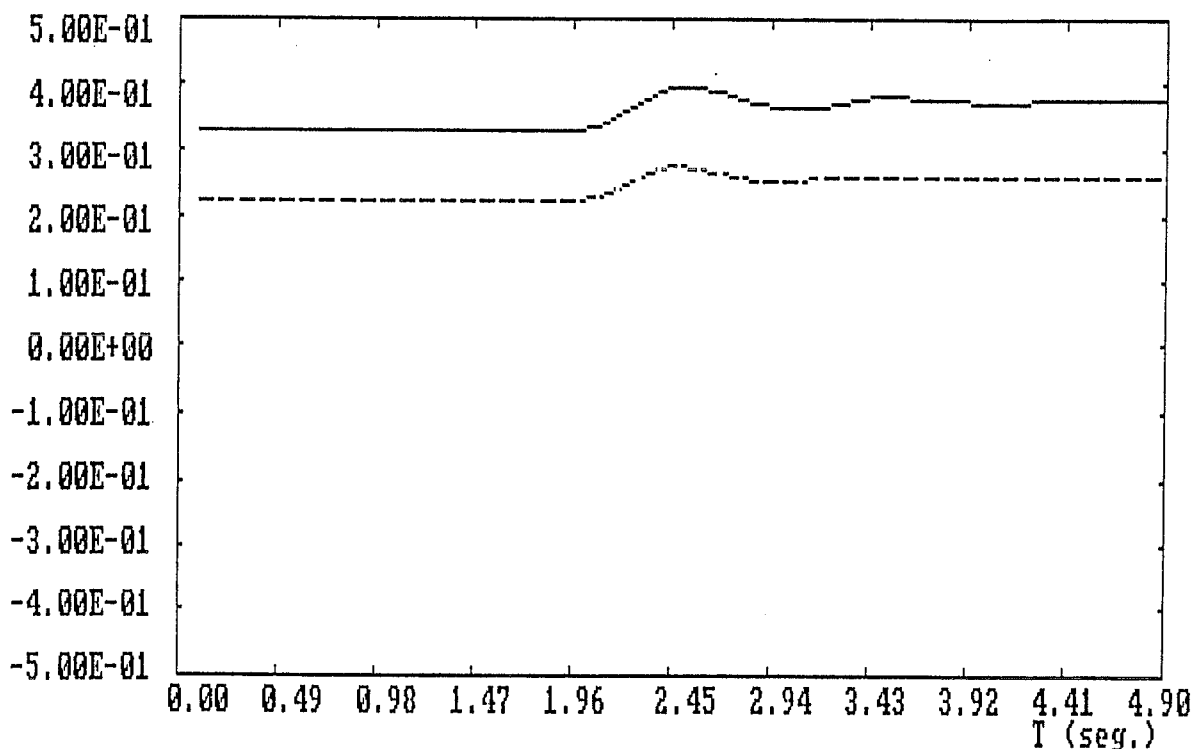


Fig. VI-6: Maniobra de carga: Deflexión de los muelles de suspensión.

La deflexión es siempre superior en el eje delantero ya que éste está más cerca del centro de gravedad del

vehículo y se ha supuesto que todos los muelles de suspensión tienen la misma rigidez (10000 N/m). El incremento observado en la deflexión del eje delantero resulta ser de 0.05 m.

En la Figura VI-7 se representa el desplazamiento transversal de los centros de las cuatro ruedas.

En la línea discontinua realmente se superponen dos líneas, que corresponden a los desplazamientos de las dos ruedas traseras. Las líneas continuas corresponden a los desplazamientos de las ruedas delanteras.

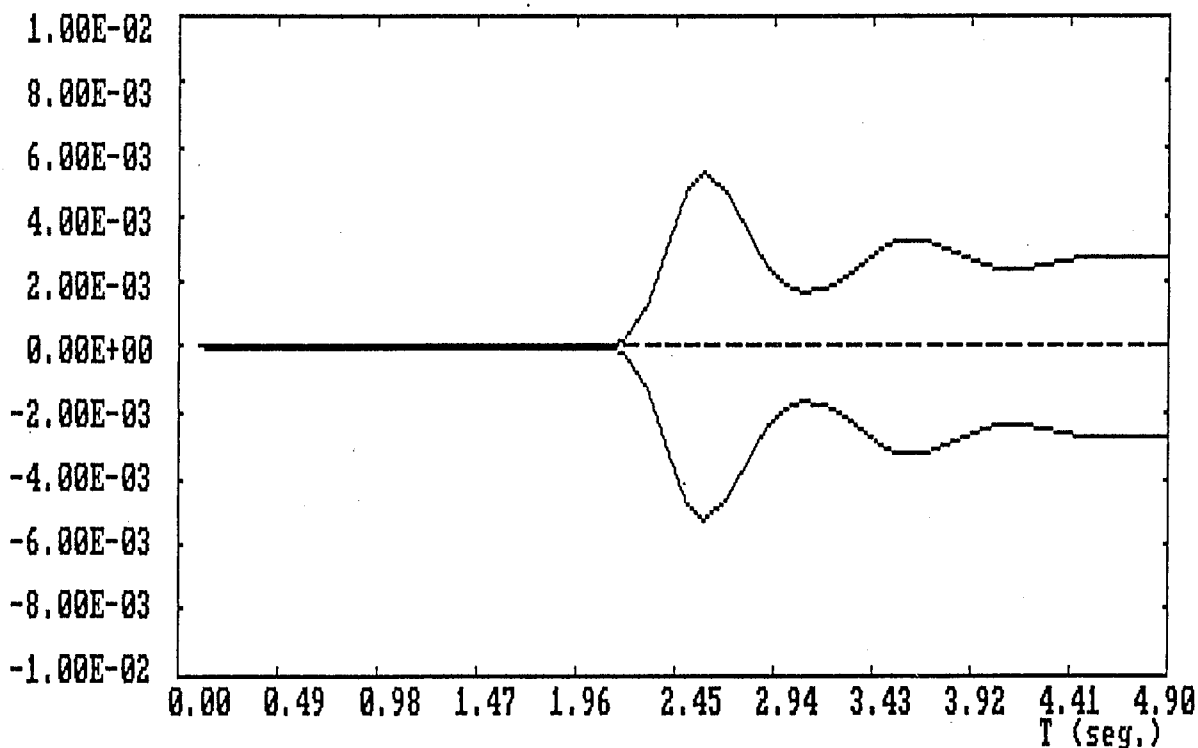


Fig. VI-7: Maniobra de carga: Desplazamiento transversal de los centros de las ruedas.

Como puede verse, las ruedas traseras no sufren ningún desplazamiento lateral, como corresponde al hecho de que en la modelización de la suspensión trasera se ha empleado un modelo simplificado que no considera la existencia de ningún mecanismo.

Sin embargo, las dos ruedas delanteras sufren un desplazamiento lateral función de la deflexión de la suspensión. Puede verse como ambas ruedas se desplazan lo mismo en valor absoluto pero en sentido opuesto, tal y como



era de esperar.

Puede calcularse aproximadamente el valor que tendrá dicho desplazamiento. En efecto, considerando que la deflexión vertical de la suspensión delantera es de 0.05 m y el brazo inferior tiene una longitud de 0.32 m, dicho brazo inferior sufrirá un giro aproximado de  $\text{Arctan}(0.05/0.32) = 0.15$  rad.

El desplazamiento según el eje transversal (y), del extremo de dicho brazo será de  $0.32 \times (1 - \text{COS}(0.15)) = 0.0035$  m, valor que, como puede comprobarse, concuerda aproximadamente con el obtenido a través de la simulación.

En la Figura VI-8, hay dos familias de curvas. Las de mayor valor absoluto representan los ángulos girados por los brazos inferiores de suspensión alrededor del eje longitudinal ( $x_{ch}'''$ ) del vehículo.

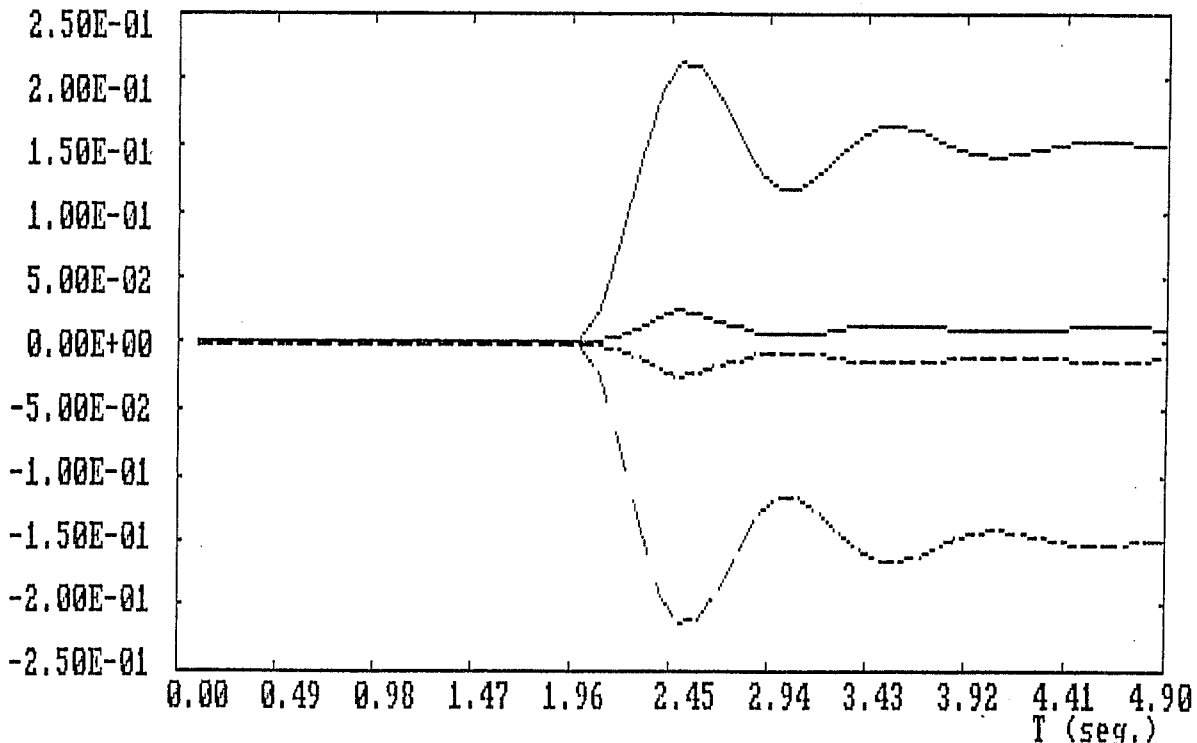


Fig. VI-8: Maniobra de carga: Rotación de los brazos inferiores sobre el eje  $x_{ch}'''$  y por la mangueta sobre su eje  $z_{ch}'''$ .

Puede verse como el ángulo girado por los brazos inferiores es al final de 0.15 rad, tal como se había previsto antes.

En la misma Figura VI-8, las curvas de menor valor absoluto, representan los ángulos girados por la mangueta alrededor de su propio eje vertical ( $z_m'''$ ).

Es importante comprobar la aparición de estos pequeños movimientos de rotación de la mangueta, que suponen la variación, a causa de la carga, del ángulo de convergencia del tren delantero del vehículo.

### VI.2.3 - Simulación de una maniobra de dirección

Partiendo de la situación de velocidad estabilizada en línea recta, se simula en esta caso la realización de una maniobra de dirección consistente en una sucesión de movimientos opuestos del volante.

En la Figura VI-9, la curva de menor amplitud representa el desplazamiento que se ha impuesto a la cremallera sobre el eje transversal del chasis. Este movimiento de la dirección es el que se realiza para cambiar de carril en la calzada.

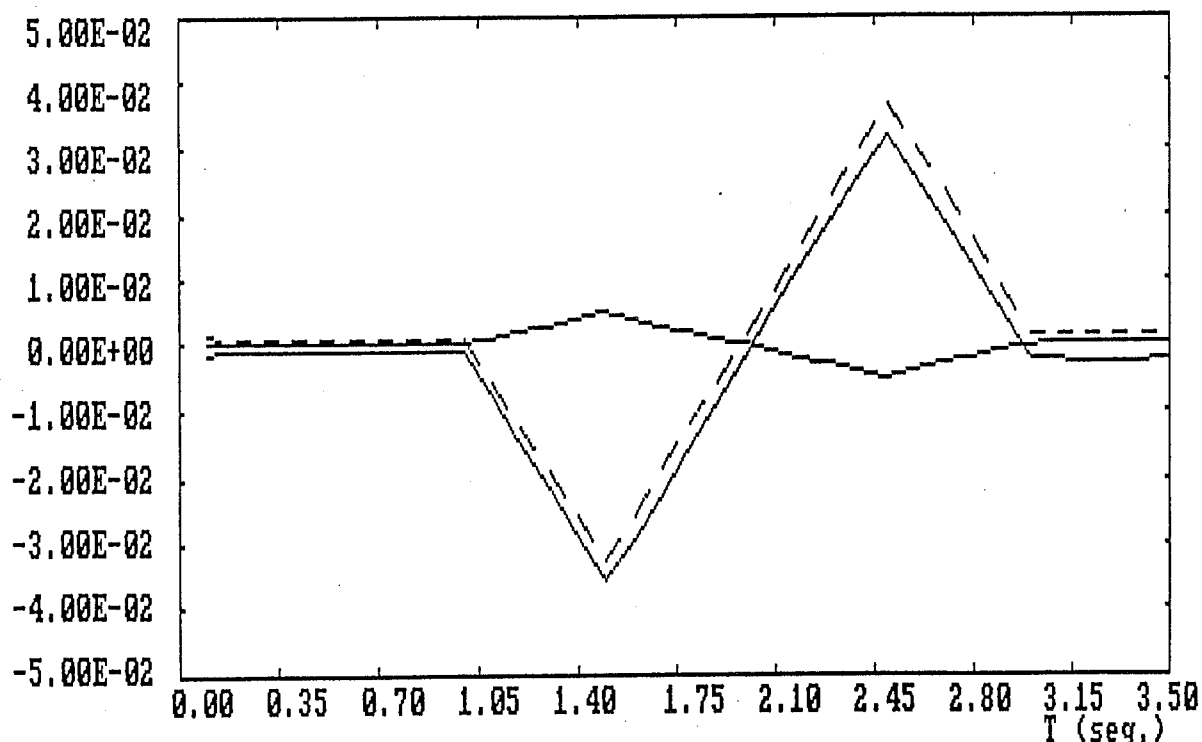


Fig. VI-9: Maniobra de dirección: Desplazamiento de la cremallera y ángulo girado por las manguetas.

En la misma Figura VI-9, las curvas de mayor amplitud representan los ángulos girados por las manguetas en torno a su eje vertical, es decir, los ángulos de dirección de las ruedas.

Teniendo en cuenta que la distancia existente entre el eje de giro de la mangueta (línea A-C) y el punto E de acoplamiento con el brazo de dirección es aproximadamente de 0.14 m, y que el desplazamiento máximo de la cremallera es de 0.005 m, el giro de dirección de la mangueta debe ser aproximadamente de  $\text{Arctan}(0.005/0.14) = 0.0357 \text{ rad}$ .

Puede verse como el giro de dirección obtenido con la simulación concuerda con la previsión hecha aunque se mantienen pequeñas diferencias entre los dos lados a causa de la constitución del mecanismo de dirección.

En la Figura VI-10 se representa la velocidad angular de guiñada del vehículo.

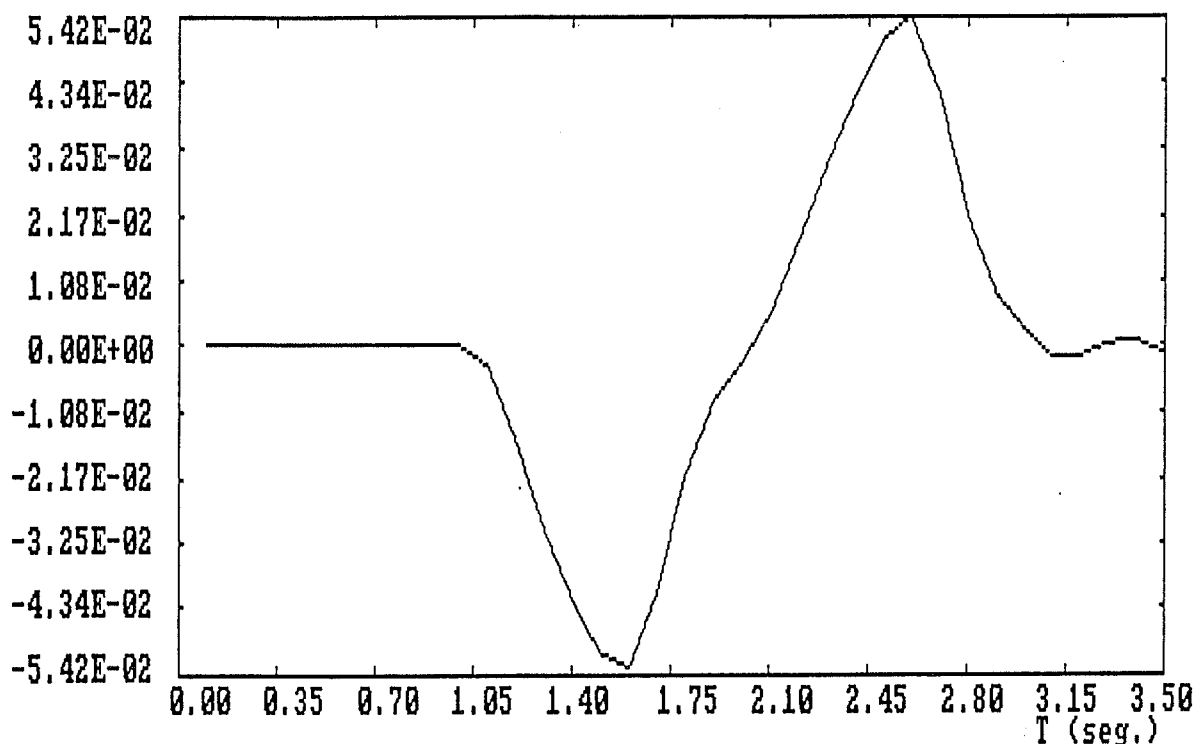


Fig. VI-10: Maniobra de dirección: Velocidad de guiñada del vehículo.

Como puede verse, la velocidad angular de guiñada sigue aproximadamente los movimientos del volante de

dirección, aunque en los instantes finales se observa como, al reemprender la línea recta, el vehículo todavía no se ha estabilizado completamente.

Partiendo de la batalla del vehículo (2.5 m) y del ángulo de dirección (0.0357 rad), se deduce que el radio de la curva es de  $R_c = 2.5/\text{SEN}(0.0357) = 70$  m. La velocidad de guiñada es igual a la velocidad de desplazamiento del vehículo partido por el radio de la curva, es decir,  $3.95/70 = 0.056$  rad/seg, valor que concuerda con el obtenido en la simulación.

En la Figura VI-11 se representa la trayectoria del vehículo sobre el terreno.

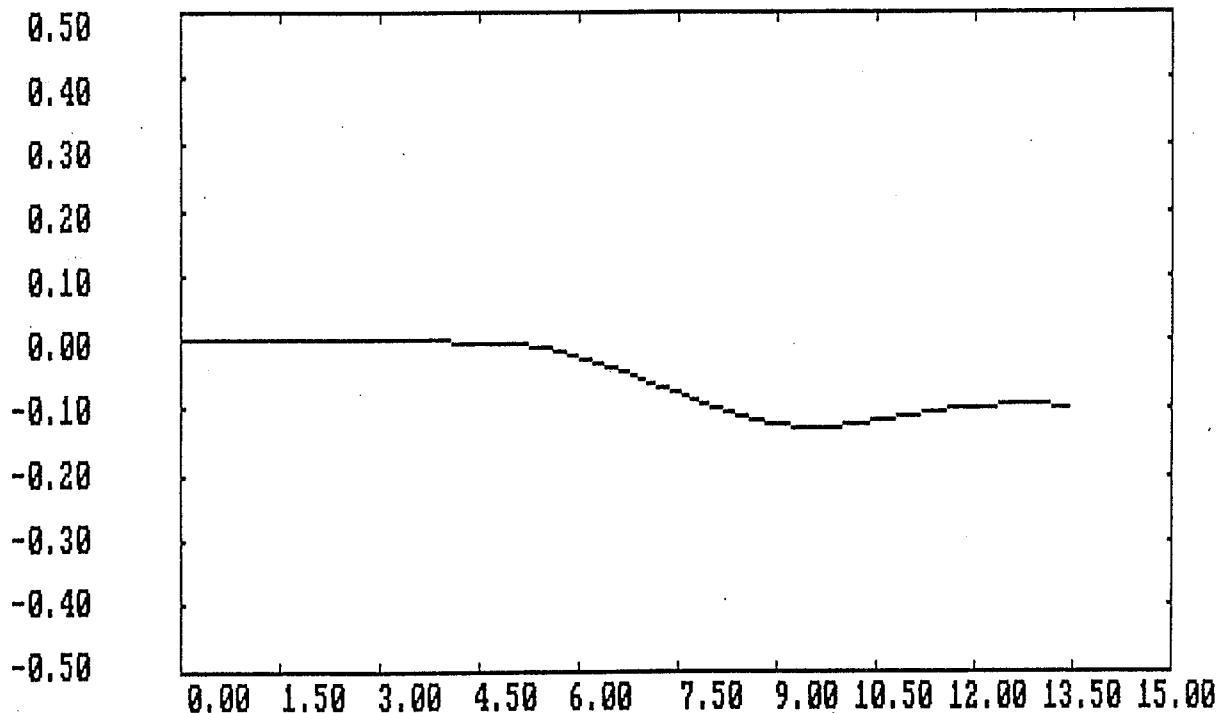


Fig. VI-11: Maniobra de dirección: Trayectoria del vehículo sobre el terreno.

### VI.3 - CONCLUSIONES SOBRE LA MODELIZACION DEL VEHICULO

En este Capítulo se ha culminado el proceso de construcción de un modelo completo de vehículo, mediante el ensamblaje de los submodelos previamente elaborados.

Los ejemplos de simulación efectuados con este modelo

completo de vehículo, han puesto de manifiesto tanto la validez del propio modelo como su capacidad para considerar efectos que otros modelos menos sofisticados no tienen en cuenta.

En estos ejemplos, se han resaltado sobre todo los aspectos geométricos derivados de la consideración de los mecanismos tridimensionales de suspensión y dirección.

Ello es debido a que, por una parte, podían estimarse previamente varios de los resultados que debían obtenerse y, por otra parte, a que se considera relativamente novedosa la modelización en bond graph de un vehículo completo considerando la constitución geométrica tridimensional de los citados mecanismos.

La influencia de los efectos puestos de manifiesto en los resultados, aunque pequeña en el caso expuesto, en general no es desdeñable, ya que si el diseño geométrico de los mecanismos fuera otro menos convencional, efectos como la variación de la vía o de la convergencia con la carga podrían ser mucho mayores.

Aunque las simulaciones mostradas han buscado más poner de manifiesto tanto la validez del modelo como sus capacidades de tipo geométrico, es obvio que este modelo es perfectamente aplicable a maniobras en las que la influencia de los efectos dinámicos de las ruedas o del comportamiento de los neumáticos fuera mucho mayor, como por ejemplo, en el caso de altas velocidades.

Puede concluirse que, con modelos como el desarrollado, puede hacerse un estudio dinámico completo de la cinemática y dinámica de sistemas vehiculares complejos.

## **Capítulo VII**

### **CONCLUSIONES**

A lo largo de los anteriores Capítulos se ha desarrollado el proceso de construcción modular de un modelo vehicular complejo.

Tras la Introducción del Capítulo I, se ha comenzado, en el Capítulo II, haciendo recopilación y análisis de los modelos, formulaciones, nomenclaturas, etc. necesarios para la correcta modelización de los sistemas mecánicos vehiculares objeto de esta Tesis.

Posteriormente, en el Capítulo III, se han desarrollado nuevas modelizaciones para sistemas mecánicos complejos, pensadas para su uso en la modelización de sistemas vehiculares, pero aplicables en cualquier mecanismo compuesto por sólidos rígidos.

A continuación, en los Capítulos IV y V, y haciendo uso de los resultados de los Capítulos anteriores, se han desarrollado modelos complejos de elementos y sistemas vehiculares: ruedas, suspensiones y dirección.

Por último, en el Capítulo VI, se ha construido un modelo completo de vehículo en el que se ensamblan, como módulos, los modelos desarrollados previamente.

Se resumen a continuación las principales aportaciones realizadas en los anteriores Capítulos, y las conclusiones que se deducen tanto de las discusiones efectuadas en la elaboración de los modelos como de los resultados de las simulaciones realizadas.

Por último, se exponen las que se consideran futuras líneas de investigación que pueden desarrollarse a partir de los trabajos aquí expuestos.

## VII.1 - PRINCIPALES APORTACIONES Y CONCLUSIONES

En el Capítulo III, se ha desarrollado la técnica de modelización de sólidos de masa despreciable y la técnica de modelización de las discontinuidades en los enlaces entre sólidos.

La técnica de modelización de sólidos de masa despreciable es aplicable en todos aquellos sistemas que incorporan sólidos cuya masa puede despreciarse frente a la masa de los demás sólidos del sistema, pero que son capaces de transmitir esfuerzos de todo tipo comportándose como sólidos rígidos.

Esta técnica de modelización tiene las siguientes características:

- Pueden modelizarse sólidos con masa despreciable de dos o tres dimensiones y con cualquier número de puntos de enlace.

- Permite una mayor sencillez en la modelización y en la formulación de ecuaciones de cada sólido ya que se eliminan al menos un elemento Gyrotor (dos si se dispone del elemento IN), la Fuente de Esfuerzo de acción gravitatoria, varios bonds y Transformer (por el hecho de considerar sólo los puntos de enlace del sólido, no el c.d.g.) y los cambios de coordenadas necesarios para trabajar en referencias inerciales absolutas.

- Supone una gran mejora en la modelización de restricciones entre sólidos al poder, en muchos casos, eliminar simultáneamente puertas Inercia, o Inercia Nula, y Compliances, o elementos Muelle Rígido, de restricción. En efecto, en la modelización convencional, al modelizar las restricciones entre los sólidos, aparecían Inercias con causalidad diferencial que se eliminaban añadiendo elementos Compliance de alta rigidez. Ello complicaba la modelización e incrementaba el número de ecuaciones, las cuales además tenían carácter stiff por dos motivos: las Compliances añadidas eran de alta rigidez, para mantener la restricción del enlace, y las inercias eran pequeñas por tratarse de sólidos de masa despreciable, ya que está era la hipótesis de partida. En resumen, se empleaban Compliances de alta rigidez para evitar la causalidad diferencial de unas Inercias de pequeño valor.

- Incrementa la velocidad de la simulación tanto por la eliminación de grafos y elementos como, sobre todo, por la eliminación de Inercias de pequeño valor y Compliances de alta rigidez en los enlaces.

- Permite optimizar los modelos dinámicos complejos eligiendo qué sólidos se consideran de masa despreciable en función de lo que se pretende analizar.

- Abre, también, una vía para emplear la técnica de bond graph en la realización de determinados análisis geométricos y cinemáticos.

- Se sigue haciendo uso directo de la técnica de bond graph, con todas las ventajas que esto conlleva, siendo directamente utilizables los programas de ordenador existentes basados en dicha técnica, dispongan o no del elemento Inercia Nula.

En cuanto a la técnica de modelización en bond graph de las discontinuidades en los enlaces entre sólidos, se han analizado las situaciones de pérdida y recuperación del contacto entre dos cuerpos rígidos. Dichas situaciones se dan en casos como la pérdida de contacto de una rueda con el suelo o la existencia de holgura en una articulación.

Partiendo del problema de la modulación de Compliances, que se estudia en el Capítulo II, y planteando los casos unidimensional y pluridimensional, se llega a otros problemas derivados, como son el problema de la tensión residual y el problema de la no coincidencia en el espacio de los puntos de pérdida y recuperación del contacto.

Ello ha llevado a establecer una condición general para la variación de los parámetros de las Compliances de enlace, y a confeccionar las correspondientes modelizaciones de los casos uni y pluridimensional.

Así mismo, se ha planteado y resuelto, la modelización de la desaparición de restricciones en enlaces uni y bidimensionales, lo cual tiene aplicación en la modelización de holguras.

Los modelos presentados tienen, evidentemente, algunas limitaciones, como su inevitable carácter stiff o las



hipótesis de simplificación supuestas en las holguras bidimensionales. Sin embargo, son modelos válidos en los casos presentados y son ejemplo de aplicación de las soluciones generales propuestas.

En el Capítulo IV se ha desarrollado la modelización de ruedas neumáticas.

La principal aportación es la construcción de un modelo tridimensional de rueda que contempla:

- La dinámica de traslación y rotación de la rueda, con los correspondientes efectos giroscópicos y los posibles desequilibrios.

- La modelización de la interfase Rueda-Calzada, incluyendo la modelización de la deriva, el deslizamiento longitudinal y el comportamiento en el límite de adherencia. Ello ha llevado a la formulación de un modelo de fácil aplicación, cuyos resultados se comparan con los del modelo de Dugoff.

- La modelización del par de autoalineación y la resistencia a la rodadura.

- La modelización de la pérdida de contacto entre rueda y calzada.

- La modelización de la interfase Rueda-Vehículo.

- La deformación radial del neumático.

Partiendo del modelo tridimensional, se han desarrollado también los tres posibles modelos bidimensionales de rueda.

Al final de este Capítulo dedicado a las ruedas, se han deducido varias conclusiones y se han formulado algunas observaciones que se resumen a continuación.

Sobre los modelos bidimensionales, se han expuesto sus aplicaciones y sus limitaciones, la mayoría de las cuales son consecuencia de no considerarse, salvo en el modelo XZ, la rotación de la rueda sobre su eje.

También se ha puesto de manifiesto la necesidad de

considerar en la simulación algunos factores, dada la importancia de los efectos que producen: los desequilibrios, los efectos giróscopicos, el despegue de la calzada, la deformación radial de la rueda, etc.

Sobre la modelización del comportamiento de la interfase rueda-calzada se hacen varias observaciones.

Aunque la modelización básica desarrollada es suficientemente precisa para la realización de estudios preliminares a lo largo de todo el rango de los valores posibles de deslizamiento "s" y de deriva "α", se hace notar que el modelo tridimensional está abierto a la posibilidad de obtener mayor precisión en los resultados mediante el empleo de fuentes de esfuerzo que introducirían los esfuerzos calculados mediante modelos más sofisticados del comportamiento de la interfase neumático-calzada.

De este modo podría considerarse también la influencia que ejercen sobre los esfuerzos laterales y longitudinales y sobre el par de autoalineación, factores como la carga sobre la rueda, el ángulo de caída, etc.

Se indica que estos modelos más sofisticados tienen su principal aplicación en el modelo tridimensional, ya que sólo en él pueden conocerse variables como el deslizamiento, el ángulo de caída, etc.

Por último, se señala que una de las principales ventajas del nuevo modelo de rueda, radica en que se trata de un modelo global de rueda, no de neumático, que considera a ésta en su conjunto y que puede integrarse fácilmente, gracias a estar desarrollada con la técnica de bond graph, como un submodelo independiente, en un modelo completo de vehículo.

En el Capítulo V, se han desarrollado los modelos tridimensionales en bond graph de los sistemas de suspensión Mac Pherson y de dirección de cremallera.

El hecho de considerar en detalle la constitución tridimensional de ambos sistemas, permite la realización de análisis cinemáticos y dinámicos completos que pueden ser de gran ayuda en el diseño.

En cuanto a la modelización simplificada de los sis-

temas de suspensión y dirección y en cuanto a los modelos bidimensionales, puede decirse que son modelizaciones útiles en determinados casos, como se ha demostrado con el ejemplo expuesto de la suspensión bidimensional YZ.

En el Capítulo VI se ha construido un modelo de vehículo completo tridimensional, mediante el ensamblaje de los submodelos tridimensionales previamente elaborados de ruedas, suspensiones y dirección, con lo que se culmina la elaboración de un modelo complejo.

Con dicho modelo, cuyas variables y ecuaciones se recogen en el Anexo, se han realizado una serie de simulaciones que han puesto de manifiesto tanto su validez como su capacidad para considerar efectos complejos de tipo cinemático y dinámico.

Modelos como el desarrollado permiten:

- Conocer lo que ocurre en el interior del sistema (esfuerzos en los enlaces, etc.)
- Considerar un mayor número de factores que influyen en el comportamiento global del vehículo.
- Hacer posible el empleo correcto de submodelos complejos (neumáticos, etc.), ya que se dispone, durante la simulación, de variables como cargas, ángulos, etc. que otros modelos más sencillos no consideran.

Hay que señalar que la elaboración de estos modelos complejos es posible en la práctica, por una parte, gracias a que la técnica de bond graph permite ensamblar de forma sistemática submodelos elaborados previamente y, por otra parte, gracias a la existencia de programas de generación automática de ecuaciones a partir de los diagramas de grafos.

Pero hay que añadir también que la elaboración de estos modelos se simplifica notablemente gracias al empleo de los modelos de sólidos sin masa desarrollados en el Capítulo III.

Como resumen final, en esta tesis se han aportado nuevas herramientas para facilitar y mejorar la modelización, se han desarrollado submodelos complejos de

elementos y sistemas vehiculares y se ha demostrado la forma de llevar a cabo, con dichos submodelos, el desarrollo modular, y la optimización, de modelos vehiculares complejos en bond graph.

## VII.2 - FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACION

Se considera que, como continuación de los trabajos expuestos, podrían seguirse las siguientes líneas de investigación:

- Acotación del error cometido al suponer inercia nula en la modelización de sólidos de masa despreciable.
- Modelización de holguras en otros tipos de enlace entre sólidos y consideración de hipótesis menos simplificadas.
- Inclusión, en el modelo de rueda, de formulaciones más sofisticadas del comportamiento de la interfase neumático-calzada, como las propuestas por Pacejka, Bakker, etc.
- En la modelización de ruedas, consideración de suelo no horizontal.
- Modelización de otros sistemas de suspensión y dirección, tanto en lo referente a la constitución del mecanismo (suspensiones multibrazo, etc.) como en lo referente a los elementos energéticos (suspensiones activas, etc.).
- Inclusión, en la modelización del vehículo, de otros sistemas como el motor, la transmisión, los frenos, etc.
- Incorporación de sólidos flexibles en los modelos.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] R.C. Rosenberg, D.C. Karnopp.- Introduction to Physical System Dynamics. McGraw-Hill Book Co., 1983.
- [2] M.J.L. Tierneho, A.M. Bos.- Modelling the Dynamics and Kinematics of Mechanical Systems with Multibond Graphs. Journal of the Franklin Institute. Vol. 319, Nº 1/2, pp. 37-50. Jan/Feb 1985.
- [3] P.C. Breedveld.- Multibond Graphs Elements in Physical Systems Theory. Journal of the Franklin Institute. Vol. 319, Nº 1/2, pp. 1-36, Jan/Feb 1985.
- [4] J.U. Thoma.- Introduction to Bond Graphs and their applications. Pergamon Oxford, 1975.
- [5] D. Karnopp, D.L. Margolis, R.C. Rosenberg.- System Dynamics: A unified approach. John Wiley & Sons, 2nd. Ed. 1990.
- [6] A.M. Bos.- Modelling Multibody Systems in terms of Multibond Graphs. Tesis doctoral presentada en Twente University, Enschede (Holanda) 1986.
- [7] R.R. Allen.- Multiport Models for the Kinematic and Dynamic Analysis of Gear Power Transmissions. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design. Vol. 101, Abril 1979.
- [8] Peter C. Breedveld.- Decomposition of Multiport Elements in a Revised Multibond Graph Notation. Journal of the Franklin Institute, Vol. 318, Nº 4, pp. 253-273, October 1984.
- [9] J. Barreto, J. Lefèvre.- R-Fields in the Solution of Implicit Equations. Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, nº 1/2, pp. 227-236, Jan/Feb 1985.
- [10] F. Lorenz, J. Wolper.- Assigning Causality in the Case of Algebraic Loops. Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, nº 1/2, pp. 237-241, Jan/Feb 1985.

- [11] R.C. Rosenberg.- Exploiting Bond Graph Causality in Physical System Models. Transactions of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. Vol. 109, pp. 378-383, December 1987.
- [12] A.M. Bos, M.J.L. Tiernego.- Formula Manipulation in the Bond Graph Modelling and Simulation of Large Mechanical Systems. Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, n<sup>o</sup> 1/2, pp. 51-65, Jan/Feb 1985.
- [13] Peter C. Breedveld.- A Bond Graph Algorithm to Determine the Equilibrium State of a System. Journal of the Franklin Institute, Vol. 318, N<sup>o</sup> 2, pp. 71-75, 1984.
- [14] F.T. Brown.- Bond Graphs for Nonholonomic Dynamic Systems. Transactions of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. Vol. 109, December 1976.
- [15] D.L. Margolis.- A Survey of Bond Graph Modeling for Interacting Lumped and Distributed Systems. Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, N<sup>o</sup> 1/2, pp. 125-135, 1985.
- [16] A.M. Bos, P.C. Breedveld.- 1985 Update of the Bond Graph Bibliography. Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, N<sup>o</sup> 1/2, pp. 269-286, Jan/Feb 1985.
- [17] J.A.M. Remmerswaal, H.B. Pacejka.- A Bond Graph Computer Model to Simulate Vacuum Cleaner Dynamics for Design Purposes. Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, N<sup>o</sup> 1/2, pp. 83-92, Jan/Feb 1985.
- [18] J.J. Granda.- Computer Generation of Physical System Differential Equations Using Bond Graphs. Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, N<sup>o</sup> 1/2, pp. 243-255, Jan/Feb 1985.
- [19] D. Karnopp.- Bond Graphs in Control: Physical State Variables and Observers. Journal of the Franklin Institute. Vol. 308, n<sup>o</sup> 3, pp. 219-234, Sept. 1979.
- [20] J.A. López, C. Vera, A. Miravete.- Neumáticos. E.T.S.I.I. de la Universidad de Zaragoza.
- [21] C.H. Verheul, P.J. Jillesma, H.B. Pacejka.- Progress Report on the Torque-Steer Investigation. Rapport n<sup>o</sup>

- VT.W.07085, Delft University of Technology. December 1985.
- [22] H.B. Pacejka.- The Interplay between Cornering Force and Vehicle Handling Characteristics. Delft University of Technology.
- [23] H.B. Pacejka.- Analysis of the Shimmy Phenomenon. Delft University of Technology.
- [24] H.B. Pacejka, J.v.d. Berg, P.J. Jillesma.- Front Wheel Vibrations. Delft University of Technology.
- [25] H.B. Pacejka.- In-Plane and Out-of-Plane Dynamics of Pneumatic Tyres. Vehicle System Dynamics, 10 (1981), pp. 221-251
- [26] H.B. Pacejka.- Analysis of the Dynamic Response of a Rolling String-Type Tyre Model to Lateral Wheel-Plane Vibrations. Vehicle System Dynamics, 1 (1972), pp. 37-66
- [27] H.B. Pacejka.- Tyre Characteristics and Vehicle Behaviour
- [28] J.A. López.- Simulación de Vehículos en Maniobras de Frenada. Revista A.I.T. nº 62-63-64, 1985, pp. 62-73
- [29] A. Miravete, J.A. López, C. Vera.- Suspensión. E.T.S.I.I. de la Universidad de Zaragoza.
- [30] H.B. Pacejka.- Bond Graphs in Vehicle Dynamics. 3rd Seminar on Advanced Vehicle Dynamics. Amalfi May 1986
- [31] H.B. Pacejka.- Modelling Complex Vehicle Systems Using Bond Graphs. Journal of the Franklin Institute. Vol. 319, Nº 1/2, pp. 67-81, Jan/Feb 1985.
- [32] H.B. Pacejka, C.G.M. Tol.- A Bond Graph computer model to simulate the 3D Dynamic Behaviour of a Heavy Truck. IMACS/North Holland Publishing Company, 1983.
- [33] A.M. Bos.- A Bond Graph Approach to the Modelling of a Motorcycle. 3rd Seminar on Advanced Vehicle Dynamics. Amalfi May 1986
- [34] J. Félez.- Un Método para el Análisis Unificado de la Cinemática y Dinámica de Sistemas Vehiculares basado en la



Técnica de los Grafos de Unión. Tesis Doctoral. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Zaragoza. Septiembre 1989.

[35] J. Félez, C. Vera, I. San José, R. Cacho.- BONDYN: A Bond Graph Based Simulation Program for Multibody Systems. Transactions of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. Vol. 112. pp. 717-727. Diciembre 1990.

[36] J.R. Ellis, D.A. Guenther, A.Y. Maalej, (1989).- Suspension derivatives in vehicle modelling and simulation. Int. Journal of Vehicle Design, Vol. 10, nº 5, pp. 507-518.

[37] J.R. Ellis, D.A. Guenther, A.Y. Maalej, (1989).- Suspension derivatives of a kinematic suspension model. Int. Journal of Vehicle Design, Vol. 10, nº 5, pp. 519-530.

[38] G. Gim, P.E. Nikravesh, (1990).- An analytical model of pneumatic tyres for vehicle dynamic simulations. Part 1: Pure slips. Int. Journal of Vehicle Design, Vol. 11, nº 6, pp. 589-618.

[39] S. Sankar, R. Guntur, T.S. Sankar, (1982).- Effect of wheel slip on the stability and stopping ability of a road vehicle. Int. Journal of Vehicle Design, Vol. 3, nº 1, pp. 77-89.

[40] H. Dugoff, P.S. Fancher, L. Segel, (1970).- An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamic performance. SAE Transactions 700377 (citado por Gim, G. and Nikravesh, P.E. [38] y por J.A. López [20])

[41] A. Blundell.- Bond Graphs for Modelling Engineering Systems. Ellis Horwood Limited Publishers. 1982

[42] G. Gim, P.E. Nikravesh (1991).- An analytical model of pneumatic tyres for vehicle dynamic simulations. Part 2: Comprehensive slips. Int. Journal of Vehicle Design, Vol. 12, nº 1, pp. 19-38.

[43] L. Daniel Metz, Cheryl K. Akouris, Craig S. Agney, Mark C. Clark.- Moments of Inertia of Mounted and Unmounted Passenger Car and Motorcycle Tires. SAE Paper nº 900760. 1990.

- [44] E. Bakker, L. Nyborg, H.B. Pacejka.- Tyre Modelling for use in Vehicle Dynamics Studies. SAE Paper n<sup>o</sup> 870421. 1987.
- [45] J.J. Beaman, R.C. Rosenberg.- Constitutive and Modulation Structure in Bond Graph Modeling. Transactions of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. Vol. 110. pp. 395-402. Diciembre 1988.
- [46] M.E. Ingram, G.Y. Masada.- The Extended Bond Graph Notation. Transactions of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. Vol. 113. pp. 113-117. 1991.
- [47] D. Karnopp.- Alternative Bond Graph Causal Patterns and Equation Formulation for Dynamic Systems. Transactions of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. Vol. 105. pp. 58-63. Junio 1983.
- [48] D. Karnopp.- Bond Graphs for Vehicle Dynamics. Vehicle System Dynamics, Vol. 5, 1976, pp. 171-184.
- [49] D. Karnopp.- The Energetic Structure of Multibody Dynamic Systems. Journal of the Franklin Institute. Vol. 306, N<sup>o</sup> 4, pp. 165-181, 1978.
- [50] R.R. Allen.- Multiport Representation of Inertia Properties of Kinematics Mechanisms. Journal of the Franklin Institute. Vol. 308, N<sup>o</sup> 3, pp. 235-253, 1979.
- [51] D. Karnopp, R.C. Rosenberg.- System Dynamics: a Unified Approach. John Wiley. New York, 1975.
- [52] E.P. Fahrenthold, J.D. Wargo.- Vector Bond Graph Analysis of Mechanical Systems. Transactions of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. Vol. 113. pp. 344-353. Septiembre 1991.
- [53] C.W. Mousseau, M.W. Sayers, D.J. Fagan.- Symbolic Quasi-Static and Dynamic Analyses of Complex Automobile Models. The Dynamics of Vehicles on roads and on tracks: proceedings of 12th IAVSD Symposium, Lyon (France), 1991. Suppl. to Vehicle System Dynamics, Vol. 20. pp. 446-459.
- [54] E. Pankiewicz, W. Schmid, B. Thomson.- NUBEMM: A Special Multibody System as Part of a Modern Simulation Con-

cept in the Automobile Industry. The Dynamics of Vehicles on roads and on tracks: proceedings of 12th IAVSD Symposium, Lyon (France), 1991. Suppl. to Vehicle System Dynamics, Vol. 20. pp. 460-474.

[55] R.C. Quirt, R.J. Anderson.- Comparisons of a Linear with a Non Linear Multibody Simulation of an Off-Road Vehicle. The Dynamics of Vehicles on roads and on tracks: proceedings of 12th IAVSD Symposium, Lyon (France), 1991. Suppl. to Vehicle System Dynamics, Vol. 20. pp. 490-503.

[56] W. Schiehlen.- Prospects of the German Multibody System Research Project on Vehicle Dynamics Simulation. The Dynamics of Vehicles on roads and on tracks: proceedings of 12th IAVSD Symposium, Lyon (France), 1991. Suppl. to Vehicle System Dynamics, Vol. 20. pp. 537-550.

[57] K.P. Schnelle, A. Van Zanten, M. Hiller.- Simulation of Nonlinear Vehicle Dynamics with the Modular Simulation Package FASIM. The Dynamics of Vehicles on roads and on tracks: proceedings of 12th IAVSD Symposium, Lyon (France), 1991. Suppl. to Vehicle System Dynamics, Vol. 20. pp. 551-565.

[58] A. Stribersky, M.W. Sayers.- Applications of Symbolic Manipulation for Investigating the Nonlinear Dynamics of Ground Vehicles. The Dynamics of Vehicles on roads and on tracks: proceedings of 12th IAVSD Symposium, Lyon (France), 1991. Suppl. to Vehicle System Dynamics, Vol. 20. pp. 608-624.

## Anexo

### ECUACIONES DEL MODELO DE VEHICULO COMPLETO

En este Anexo se recogen las ecuaciones del modelo de vehículo completo desarrollado en el Capítulo VI.

En primer lugar se recogen las variables de estado  $X(i)$ , que son los desplazamientos de las Compliances, las velocidades de las Inercias y los ángulos de Cardan.

X(1) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 1	X	
X(2) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 1	Y	
X(3) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 1	Z	
X(4) =	DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. RUEDA 1	X	
X(5) =	DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. RUEDA 1	Y	
X(6) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 2	X	
X(7) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 2	Y	
X(8) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 2	Z	
X(9) =	DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. RUEDA 2	X	
X(10) =	DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. RUEDA 2	Y	
X(11) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 3	X	
X(12) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 3	Y	
X(13) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 3	Z	
X(14) =	DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. RUEDA 3	X	
X(15) =	DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. RUEDA 3	Y	
X(16) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 4	X	
X(17) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 4	Y	
X(18) =	DESPL. COMPL. NEUMATICO 4	Z	
X(19) =	DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. RUEDA 4	X	
X(20) =	DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. RUEDA 4	Y	
X(21) =	DESPL. COMPL. SUSPENSION DELANTERA 1	X	
X(22) =	DESPL. COMPL. SUSPENSION DELANTERA 1	Y	
X(23) =	DESPL. COMPL. SUSPENSION DELANTERA 1	Z	
X(24) =	DESPL. COMPL. RIG. UNION B1	X	
X(25) =	DESPL. COMPL. RIG. UNION B1	Y	
X(26) =	DESPL. COMPL. RIG. UNION B1	Z	
X(27) =	DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. BRAZ. INF. 1	X	
X(28) =	DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. BRAZ. INF. 1	Y	

X(29) = DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. BRAZ. INF. 1 Z  
X(30) = DESPL. COMPL. SUSPENSION DELANTERA 2 X  
X(31) = DESPL. COMPL. SUSPENSION DELANTERA 2 Y  
X(32) = DESPL. COMPL. SUSPENSION DELANTERA 2 Z  
X(33) = DESPL. COMPL. RIG. UNION B2 X  
X(34) = DESPL. COMPL. RIG. UNION B2 Y  
X(35) = DESPL. COMPL. RIG. UNION B2 Z  
X(36) = DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. BRAZ. INF. 2 X  
X(37) = DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. BRAZ. INF. 2 Y  
X(38) = DESPL. COMPL. RIG. ORIENT. BRAZ. INF. 2 Z  
X(39) = DESPL. COMPL. RIG. UNION F1 X  
X(40) = DESPL. COMPL. RIG. UNION F1 Y  
X(41) = DESPL. COMPL. RIG. UNION F1 Z  
X(42) = DESPL. COMPL. RIG. UNION F2 X  
X(43) = DESPL. COMPL. RIG. UNION F2 Y  
X(44) = DESPL. COMPL. RIG. UNION F2 Z  
X(45) = DESPL. COMPL. RIG. UNION H X  
X(46) = DESPL. COMPL. RIG. UNION H Y  
X(47) = DESPL. COMPL. RIG. DIRECCION Y  
X(48) = DESPL. COMPL. SUSPENSION TRASERA 3 X  
X(49) = DESPL. COMPL. SUSPENSION TRASERA 3 Y  
X(50) = DESPL. COMPL. SUSPENSION TRASERA 3 Z  
X(51) = DESPL. COMPL. SUSPENSION TRASERA 4 X  
X(52) = DESPL. COMPL. SUSPENSION TRASERA 4 Y  
X(53) = DESPL. COMPL. SUSPENSION TRASERA 4 Z  
X(54) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 1 X  
X(55) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 1 Y  
X(56) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 1 Z  
X(57) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 1 X  
X(58) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 1 Y  
X(59) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 1 Z  
X(60) = VELOC. INERC. TRASL. HUELLA 1 X  
X(61) = VELOC. INERC. TRASL. HUELLA 1 Y  
X(62) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 2 X  
X(63) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 2 Y  
X(64) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 2 Z  
X(65) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 2 X  
X(66) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 2 Y  
X(67) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 2 Z  
X(68) = VELOC. INERC. TRASL. HUELLA 2 X  
X(69) = VELOC. INERC. TRASL. HUELLA 2 Y  
X(70) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 3 X  
X(71) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 3 Y  
X(72) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 3 Z  
X(73) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 3 X  
X(74) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 3 Y

X(75) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 3 Z  
X(76) = VELOC. INERC. TRASL. HUELLA 3 X  
X(77) = VELOC. INERC. TRASL. HUELLA 3 Y  
X(78) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 4 X  
X(79) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 4 Y  
X(80) = VELOC. INERC. ROT. RUEDA 4 Z  
X(81) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 4 X  
X(82) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 4 Y  
X(83) = VELOC. INERC. TRASL. RUEDA 4 Z  
X(84) = VELOC. INERC. TRASL. HUELLA 4 X  
X(85) = VELOC. INERC. TRASL. HUELLA 4 Y  
X(86) = VELOC. INERC. ROT. MANGUETA 1 X  
X(87) = VELOC. INERC. ROT. MANGUETA 1 Y  
X(88) = VELOC. INERC. ROT. MANGUETA 1 Z  
X(89) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. INF. 1 X  
X(90) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. INF. 1 Y  
X(91) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. INF. 1 Z  
X(92) = VELOC. INERC. ROT. MANGUETA 2 X  
X(93) = VELOC. INERC. ROT. MANGUETA 2 Y  
X(94) = VELOC. INERC. ROT. MANGUETA 2 Z  
X(95) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. INF. 2 X  
X(96) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. INF. 2 Y  
X(97) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. INF. 2 Z  
X(98) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. DIR. 1 X  
X(99) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. DIR. 1 Y  
X(100) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. DIR. 1 Z  
X(101) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. DIR. 2 X  
X(102) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. DIR. 2 Y  
X(103) = VELOC. INERC. ROT. BRAZ. DIR. 2 Z  
X(104) = VELOC. INERC. TRASL. CREMALLERA X  
X(105) = VELOC. INERC. TRASL. CREMALLERA Y  
X(106) = VELOC. INERC. TRASL. CREMALLERA Z  
X(107) = VELOC. INERC. ROT. CHASIS X  
X(108) = VELOC. INERC. ROT. CHASIS Y  
X(109) = VELOC. INERC. ROT. CHASIS Z  
X(110) = VELOC. INERC. TRASL. CHASIS X  
X(111) = VELOC. INERC. TRASL. CHASIS Y  
X(112) = VELOC. INERC. TRASL. CHASIS Z  
X(113) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 1  $\phi$   
X(114) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 1  $\theta$   
X(115) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 1  $\tau$   
X(116) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 2  $\phi$   
X(117) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 2  $\theta$   
X(118) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 2  $\tau$   
X(119) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 3  $\phi$   
X(120) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 3  $\theta$

X(121) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 3  $\tau$   
 X(122) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 4  $\phi$   
 X(123) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 4  $\theta$   
 X(124) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. RUEDA 4  $\tau$   
 X(125) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. CHASIS  $\phi$   
 X(126) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. CHASIS  $\theta$   
 X(127) = DESPL. ANG. CARDAN ABS. CHASIS  $\tau$   
 X(128) = DESPL. ANG. CARDAN UNION A1  $\phi$   
 X(129) = DESPL. ANG. CARDAN UNION A1  $\theta$   
 X(130) = DESPL. ANG. CARDAN UNION A1  $\tau$   
 X(131) = DESPL. ANG. CARDAN UNION A2  $\phi$   
 X(132) = DESPL. ANG. CARDAN UNION A2  $\theta$   
 X(133) = DESPL. ANG. CARDAN UNION A2  $\tau$   
 X(134) = DESPL. ANG. CARDAN UNION B1  $\phi$   
 X(135) = DESPL. ANG. CARDAN UNION B1  $\theta$   
 X(136) = DESPL. ANG. CARDAN UNION B1  $\tau$   
 X(137) = DESPL. ANG. CARDAN UNION B2  $\phi$   
 X(138) = DESPL. ANG. CARDAN UNION B2  $\theta$   
 X(139) = DESPL. ANG. CARDAN UNION B2  $\tau$   
 X(140) = DESPL. ANG. CARDAN UNION C1  $\phi$   
 X(141) = DESPL. ANG. CARDAN UNION C1  $\theta$   
 X(142) = DESPL. ANG. CARDAN UNION C1  $\tau$   
 X(143) = DESPL. ANG. CARDAN UNION C2  $\phi$   
 X(144) = DESPL. ANG. CARDAN UNION C2  $\theta$   
 X(145) = DESPL. ANG. CARDAN UNION C2  $\tau$   
 X(146) = DESPL. ANG. CARDAN UNION E1  $\phi$   
 X(147) = DESPL. ANG. CARDAN UNION E1  $\theta$   
 X(148) = DESPL. ANG. CARDAN UNION E1  $\tau$   
 X(149) = DESPL. ANG. CARDAN UNION E2  $\phi$   
 X(150) = DESPL. ANG. CARDAN UNION E2  $\theta$   
 X(151) = DESPL. ANG. CARDAN UNION E2  $\tau$   
 X(152) = DESPL. ANG. CARDAN UNION F1  $\phi$   
 X(153) = DESPL. ANG. CARDAN UNION F1  $\theta$   
 X(154) = DESPL. ANG. CARDAN UNION F1  $\tau$   
 X(155) = DESPL. ANG. CARDAN UNION F2  $\phi$   
 X(156) = DESPL. ANG. CARDAN UNION F2  $\theta$   
 X(157) = DESPL. ANG. CARDAN UNION F2  $\tau$   
 X(158) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G1  $\phi$   
 X(159) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G1  $\theta$   
 X(160) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G1  $\tau$   
 X(161) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G2  $\phi$   
 X(162) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G2  $\theta$   
 X(163) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G2  $\tau$   
 X(164) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G3  $\phi$   
 X(165) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G3  $\theta$   
 X(166) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G3  $\tau$

X(167) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G4  $\phi$   
X(168) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G4  $\theta$   
X(169) = DESPL. ANG. CARDAN UNION G4  $\tau$   
X(170) = DESPL. CREMALLERA DIRECCION

A continuación se exponen las ecuaciones del modelo. En las ecuaciones diferenciales, escritas al final, las derivadas de las variables X(i) se denotan Y(i).

Previamente se definen una serie de constantes y parámetros que se emplean en las ecuaciones. Las constantes y parámetros definidos en el Capítulo VI no se repiten aquí.

SXj (j=1,2,3,4): Parámetro de deslizamiento.

SYj (j=1,2,3,4): Parámetro de deriva.

RDDj (j=1,2,3,4): Resistencia a la rodadura.

PAj (j=1,2,3,4): Par de autoalineación.

FRj (j=1,2,3,4): Par de frenada.

TRj (j=1,2): Par de tracción.

FGR: Fuerza de gravedad sobre la rueda.

FGC: Fuerza de gravedad sobre el chasis.

Dir: Flujo de accionamiento de la dirección.

IN: Parámetro de las Inercias de pequeño valor, sustituibles por elementos Inercia Nulas.

CR: Parámetro de las Compliances de alta rigidez, sustituibles por elementos Muelle Rígido.

RR: Parámetro de las Resistencias situadas en paralelo con las Compliances de alta rigidez.

MS: Parámetro de las Inercias de pequeño valor empleadas en la modelización de la deriva y el deslizamiento.



Definición de los elementos de los Gyrator GR<sub>ij</sub> siendo i=1,2,3,4 para las cuatro ruedas e i=5 para el chasis:

$$GR1X = IRX * X(54)$$

$$GR1Y = IRY * X(55)$$

$$GR1Z = IRZ * X(56)$$

$$GR2X = IRX * X(62)$$

$$GR2Y = IRY * X(63)$$

$$GR2Z = IRZ * X(64)$$

$$GR3X = IRX * X(70)$$

$$GR3Y = IRY * X(71)$$

$$GR3Z = IRZ * X(72)$$

$$GR4X = IRX * X(78)$$

$$GR4Y = IRY * X(79)$$

$$GR4Z = IRZ * X(80)$$

$$GR5X = ICX * X(107)$$

$$GR5Y = ICY * X(108)$$

$$GR5Z = ICZ * X(109)$$

Definición de los elementos de las matrices de cambio de base correspondientes a los 19x3=57 ángulos de Cardan:

$$SFI1 = SIN(X(113))$$

$$CFI1 = COS(X(113))$$

$$STE1 = SIN(X(114))$$

$$CTE1 = COS(X(114))$$

$$STU1 = SIN(X(115))$$

$$CTU1 = COS(X(115))$$

$$SFI2 = SIN(X(116))$$

$$CFI2 = COS(X(116))$$

$$STE2 = SIN(X(117))$$

$$CTE2 = COS(X(117))$$

$$STU2 = SIN(X(118))$$

$$CTU2 = COS(X(118))$$

$$SFI3 = SIN(X(119))$$

$$CFI3 = COS(X(119))$$

$$STE3 = SIN(X(120))$$

$$CTE3 = COS(X(120))$$

$$STU3 = SIN(X(121))$$

$$CTU3 = COS(X(121))$$

SFI4 = SIN(X(122))  
CFI4 = COS(X(122))  
STE4 = SIN(X(123))  
CTE4 = COS(X(123))  
STU4 = SIN(X(124))  
CTU4 = COS(X(124))

SFI5 = SIN(X(125))  
CFI5 = COS(X(125))  
STE5 = SIN(X(126))  
CTE5 = COS(X(126))  
STU5 = SIN(X(127))  
CTU5 = COS(X(127))

SFI6 = SIN(X(128))  
CFI6 = COS(X(128))  
STE6 = SIN(X(129))  
CTE6 = COS(X(129))  
STU6 = SIN(X(130))  
CTU6 = COS(X(130))

SFI7 = SIN(X(131))  
CFI7 = COS(X(131))  
STE7 = SIN(X(132))  
CTE7 = COS(X(132))  
STU7 = SIN(X(133))  
CTU7 = COS(X(133))

SFI8 = SIN(X(134))  
CFI8 = COS(X(134))  
STE8 = SIN(X(135))  
CTE8 = COS(X(135))  
STU8 = SIN(X(136))  
CTU8 = COS(X(136))

SFI9 = SIN(X(137))  
CFI9 = COS(X(137))  
STE9 = SIN(X(138))  
CTE9 = COS(X(138))  
STU9 = SIN(X(139))  
CTU9 = COS(X(139))

SFI10 = SIN(X(140))  
CFI10 = COS(X(140))  
STE10 = SIN(X(141))

CTE10 = COS(X(141))  
STU10 = SIN(X(142))  
CTU10 = COS(X(142))

SFI11 = SIN(X(143))  
CFI11 = COS(X(143))  
STE11 = SIN(X(144))  
CTE11 = COS(X(144))  
STU11 = SIN(X(145))  
CTU11 = COS(X(145))

SFI12 = SIN(X(146))  
CFI12 = COS(X(146))  
STE12 = SIN(X(147))  
CTE12 = COS(X(147))  
STU12 = SIN(X(148))  
CTU12 = COS(X(148))

SFI13 = SIN(X(149))  
CFI13 = COS(X(149))  
STE13 = SIN(X(150))  
CTE13 = COS(X(150))  
STU13 = SIN(X(151))  
CTU13 = COS(X(151))

SFI14 = SIN(X(152))  
CFI14 = COS(X(152))  
STE14 = SIN(X(153))  
CTE14 = COS(X(153))  
STU14 = SIN(X(154))  
CTU14 = COS(X(154))

SFI15 = SIN(X(155))  
CFI15 = COS(X(155))  
STE15 = SIN(X(156))  
CTE15 = COS(X(156))  
STU15 = SIN(X(157))  
CTU15 = COS(X(157))

SFI16 = SIN(X(158))  
CFI16 = COS(X(158))  
STE16 = SIN(X(159))  
CTE16 = COS(X(159))  
STU16 = SIN(X(160))  
CTU16 = COS(X(160))

SFI17 = SIN(X(161))  
CFI17 = COS(X(161))  
STE17 = SIN(X(162))  
CTE17 = COS(X(162))  
STU17 = SIN(X(163))  
CTU17 = COS(X(163))

SFI18 = SIN(X(164))  
CFI18 = COS(X(164))  
STE18 = SIN(X(165))  
CTE18 = COS(X(165))  
STU18 = SIN(X(166))  
CTU18 = COS(X(166))

SFI19 = SIN(X(167))  
CFI19 = COS(X(167))  
STE19 = SIN(X(168))  
CTE19 = COS(X(168))  
STU19 = SIN(X(169))  
CTU19 = COS(X(169))

Definición de los términos de las matrices de cambio de base entre sólidos. La primera (GCij con i=1,2,3 y j=1,2,3) corresponde a la orientación absoluta del chasis y las demás a las uniones A1, A2, B1, B2, C1, C2, E1, E2, F1, F2, G1, G2, G3 y G4. Cada una es el producto de tres matrices simples de cambio de base.

GC11 = CTE5 \* CTU5 - STE5 \* SFI5 \* STU5  
GC21 = CTE5 \* STU5 + STE5 \* SFI5 \* CTU5  
GC31 = (-STE5 \* CFI5)  
GC12 = (-STU5 \* CFI5)  
GC22 = CFI5 \* CTU5  
GC32 = SFI5  
GC13 = CTU5 \* STE5 + STU5 \* SFI5 \* CTE5  
GC23 = STU5 \* STE5 - CTU5 \* SFI5 \* CTE5  
GC33 = CTE5 \* CFI5

A111 = CTE6 \* CTU6 - STE6 \* SFI6 \* STU6  
A121 = CTE6 \* STU6 + STE6 \* SFI6 \* CTU6  
A131 = (-STE6 \* CFI6)  
A112 = (-STU6 \* CFI6)  
A122 = CFI6 \* CTU6  
A132 = SFI6  
A113 = CTU6 \* STE6 + STU6 \* SFI6 \* CTE6  
A123 = STU6 \* STE6 - CTU6 \* SFI6 \* CTE6

$A133 = CTE6 * CFI6$   
 $A211 = CTE7 * CTU7 - STE7 * SFI7 * STU7$   
 $A221 = CTE7 * STU7 + STE7 * SFI7 * CTU7$   
 $A231 = (-STE7 * CFI7)$   
 $A212 = (-STU7 * CFI7)$   
 $A222 = CFI7 * CTU7$   
 $A232 = SFI7$   
 $A213 = CTU7 * STE7 + STU7 * SFI7 * CTE7$   
 $A223 = STU7 * STE7 - CTU7 * SFI7 * CTE7$   
 $A233 = CTE7 * CFI7$

$B111 = CTE8 * CTU8 - STE8 * SFI8 * STU8$   
 $B121 = CTE8 * STU8 + STE8 * SFI8 * CTU8$   
 $B131 = (-STE8 * CFI8)$   
 $B112 = (-STU8 * CFI8)$   
 $B122 = CFI8 * CTU8$   
 $B132 = SFI8$   
 $B113 = CTU8 * STE8 + STU8 * SFI8 * CTE8$   
 $B123 = STU8 * STE8 - CTU8 * SFI8 * CTE8$   
 $B133 = CTE8 * CFI8$

$B211 = CTE9 * CTU9 - STE9 * SFI9 * STU9$   
 $B221 = CTE9 * STU9 + STE9 * SFI9 * CTU9$   
 $B231 = (-STE9 * CFI9)$   
 $B212 = (-STU9 * CFI9)$   
 $B222 = CFI9 * CTU9$   
 $B232 = SFI9$   
 $B213 = CTU9 * STE9 + STU9 * SFI9 * CTE9$   
 $B223 = STU9 * STE9 - CTU9 * SFI9 * CTE9$   
 $B233 = CTE9 * CFI9$

$C111 = CTE10 * CTU10 - STE10 * SFI10 * STU10$   
 $C121 = CTE10 * STU10 + STE10 * SFI10 * CTU10$   
 $C131 = (-STE10 * CFI10)$   
 $C112 = (-STU10 * CFI10)$   
 $C122 = CFI10 * CTU10$   
 $C132 = SFI10$   
 $C113 = CTU10 * STE10 + STU10 * SFI10 * CTE10$   
 $C123 = STU10 * STE10 - CTU10 * SFI10 * CTE10$   
 $C133 = CTE10 * CFI10$

$C211 = CTE11 * CTU11 - STE11 * SFI11 * STU11$   
 $C221 = CTE11 * STU11 + STE11 * SFI11 * CTU11$   
 $C231 = (-STE11 * CFI11)$   
 $C212 = (-STU11 * CFI11)$

C222 = CFI11 \* CTU11  
C232 = SFI11  
C213 = CTU11 \* STE11 + STU11 \* SFI11 \* CTE11  
C223 = STU11 \* STE11 - CTU11 \* SFI11 \* CTE11  
C233 = CTE11 \* CFI11

E111 = CTE12 \* CTU12 - STE12 \* SFI12 \* STU12  
E121 = CTE12 \* STU12 + STE12 \* SFI12 \* CTU12  
E131 = (-STE12 \* CFI12)  
E112 = (-STU12 \* CFI12)  
E122 = CFI12 \* CTU12  
E132 = SFI12  
E113 = CTU12 \* STE12 + STU12 \* SFI12 \* CTE12  
E123 = STU12 \* STE12 - CTU12 \* SFI12 \* CTE12  
E133 = CTE12 \* CFI12

E211 = CTE13 \* CTU13 - STE13 \* SFI13 \* STU13  
E221 = CTE13 \* STU13 + STE13 \* SFI13 \* CTU13  
E231 = (-STE13 \* CFI13)  
E212 = (-STU13 \* CFI13)  
E222 = CFI13 \* CTU13  
E232 = SFI13  
E213 = CTU13 \* STE13 + STU13 \* SFI13 \* CTE13  
E223 = STU13 \* STE13 - CTU13 \* SFI13 \* CTE13  
E233 = CTE13 \* CFI13

F111 = CTE14 \* CTU14 - STE14 \* SFI14 \* STU14  
F121 = CTE14 \* STU14 + STE14 \* SFI14 \* CTU14  
F131 = (-STE14 \* CFI14)  
F112 = (-STU14 \* CFI14)  
F122 = CFI14 \* CTU14  
F132 = SFI14  
F113 = CTU14 \* STE14 + STU14 \* SFI14 \* CTE14  
F123 = STU14 \* STE14 - CTU14 \* SFI14 \* CTE14  
F133 = CTE14 \* CFI14

F211 = CTE15 \* CTU15 - STE15 \* SFI15 \* STU15  
F221 = CTE15 \* STU15 + STE15 \* SFI15 \* CTU15  
F231 = (-STE15 \* CFI15)  
F212 = (-STU15 \* CFI15)  
F222 = CFI15 \* CTU15  
F232 = SFI15  
F213 = CTU15 \* STE15 + STU15 \* SFI15 \* CTE15  
F223 = STU15 \* STE15 - CTU15 \* SFI15 \* CTE15  
F233 = CTE15 \* CFI15

$$\begin{aligned}
G111 &= CTE16 * CTU16 - STE16 * SFI16 * STU16 \\
G121 &= CTE16 * STU16 + STE16 * SFI16 * CTU16 \\
G131 &= (-STE16 * CFI16) \\
G112 &= (-STU16 * CFI16) \\
G122 &= CFI16 * CTU16 \\
G132 &= SFI16 \\
G113 &= CTU16 * STE16 + STU16 * SFI16 * CTE16 \\
G123 &= STU16 * STE16 - CTU16 * SFI16 * CTE16 \\
G133 &= CTE16 * CFI16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G211 &= CTE17 * CTU17 - STE17 * SFI17 * STU17 \\
G221 &= CTE17 * STU17 + STE17 * SFI17 * CTU17 \\
G231 &= (-STE17 * CFI17) \\
G212 &= (-STU17 * CFI17) \\
G222 &= CFI17 * CTU17 \\
G232 &= SFI17 \\
G213 &= CTU17 * STE17 + STU17 * SFI17 * CTE17 \\
G223 &= STU17 * STE17 - CTU17 * SFI17 * CTE17 \\
G233 &= CTE17 * CFI17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G311 &= CTE18 * CTU18 - STE18 * SFI18 * STU18 \\
G321 &= CTE18 * STU18 + STE18 * SFI18 * CTU18 \\
G331 &= (-STE18 * CFI18) \\
G312 &= (-STU18 * CFI18) \\
G322 &= CFI18 * CTU18 \\
G332 &= SFI18 \\
G313 &= CTU18 * STE18 + STU18 * SFI18 * CTE18 \\
G323 &= STU18 * STE18 - CTU18 * SFI18 * CTE18 \\
G333 &= CTE18 * CFI18
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G411 &= CTE19 * CTU19 - STE19 * SFI19 * STU19 \\
G421 &= CTE19 * STU19 + STE19 * SFI19 * CTU19 \\
G431 &= (-STE19 * CFI19) \\
G412 &= (-STU19 * CFI19) \\
G422 &= CFI19 * CTU19 \\
G432 &= SFI19 \\
G413 &= CTU19 * STE19 + STU19 * SFI19 * CTE19 \\
G423 &= STU19 * STE19 - CTU19 * SFI19 * CTE19 \\
G433 &= CTE19 * CFI19
\end{aligned}$$

Flujos (F<sub>nj</sub>) y Esfuerzos (E<sub>nj</sub>) en los grafos, siendo n el número del grafo (ver Fig. VI-3) y j=X para la primera componente, j=Y para la segunda componente y j=Z para la tercera componente:

$$F290Y = -X(108) + X(55)$$

$$\begin{aligned}
F292Y &= -X(108) + X(63) \\
F25Y &= -((X(54) * G121 + X(55) * G122 + X(56) * G123)) + X(87) \\
F28X &= X(54) * G111 + X(55) * G112 + X(56) * G113 - X(86) \\
F28Z &= X(54) * G131 + X(55) * G132 + X(56) * G133 - X(88) \\
F62Y &= -((X(62) * G221 + X(63) * G222 + X(64) * G223)) + X(93) \\
F65X &= X(62) * G211 + X(63) * G212 + X(64) * G213 - X(92) \\
F65Z &= X(62) * G231 + X(63) * G232 + X(64) * G233 - X(94) \\
F99Y &= -((X(70) * G321 + X(71) * G322 + X(72) * G323)) + X(108) \\
F102X &= X(70) * G311 + X(71) * G312 + X(72) * G313 - X(107) \\
F102Z &= X(70) * G331 + X(71) * G332 + X(72) * G333 - X(109) \\
F135Y &= -((X(78) * G421 + X(79) * G422 + X(80) * G423)) + X(108) \\
F138X &= X(78) * G411 + X(79) * G412 + X(80) * G413 - X(107) \\
F138Z &= X(78) * G431 + X(79) * G432 + X(80) * G433 - X(109) \\
F190X &= X(89) * B111 + X(90) * B112 + X(91) * B113 - X(107) \\
F190Y &= X(89) * B121 + X(90) * B122 + X(91) * B123 - X(108) \\
F190Z &= X(89) * B131 + X(90) * B132 + X(91) * B133 - X(109) \\
F237X &= X(95) * B211 + X(96) * B212 + X(97) * B213 - X(107) \\
F237Y &= X(95) * B221 + X(96) * B222 + X(97) * B223 - X(108) \\
F237Z &= X(95) * B231 + X(96) * B232 + X(97) * B233 - X(109) \\
F318X &= -(X(108) * G4GZ + X(109) * (-G4GY)) + X(110) * GC11 + X(111) * GC21 + X(112) * GC31 \\
F318Y &= -(X(107) * (-G4GZ) + X(109) * G4GX) + X(110) * GC12 + X(111) * GC22 + X(112) * GC32 \\
F318Z &= -(X(107) * G4GY + X(108) * (-G4GX)) + X(110) * GC13
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + X(111) * GC23 + X(112) * GC33 \\
F314X & = -(X(108) * G3GZ + X(109) * (-G3GY)) + X(110) * GC11 \\
& + X(111) * GC21 + X(112) * GC31 \\
F314Y & = -(X(107) * (-G3GZ) + X(109) * G3GX) + X(110) * GC12 \\
& + X(111) * GC22 + X(112) * GC32 \\
F314Z & = -(X(107) * G3GY + X(108) * (-G3GX)) + X(110) * GC13 \\
& + X(111) * GC23 + X(112) * GC33 \\
F232X & = -(X(108) * B2GZ + X(109) * (-B2GY)) + X(110) * GC11 \\
& + X(111) * GC21 + X(112) * GC31 \\
F232Y & = -(X(107) * (-B2GZ) + X(109) * B2GX) + X(110) * GC12 \\
& + X(111) * GC22 + X(112) * GC32 \\
F232Z & = -(X(107) * B2GY + X(108) * (-B2GX)) + X(110) * GC13 \\
& + X(111) * GC23 + X(112) * GC33 \\
F185X & = -(X(108) * B1GZ + X(109) * (-B1GY)) + X(110) * GC11 \\
& + X(111) * GC21 + X(112) * GC31 \\
F185Y & = -(X(107) * (-B1GZ) + X(109) * B1GX) + X(110) * GC12 \\
& + X(111) * GC22 + X(112) * GC32 \\
F185Z & = -(X(107) * B1GY + X(108) * (-B1GX)) + X(110) * GC13 \\
& + X(111) * GC23 + X(112) * GC33 \\
F223X & = -(X(108) * A2GZ + X(109) * (-A2GY)) + X(110) * GC11 \\
& + X(111) * GC21 + X(112) * GC31 \\
F223Y & = -(X(107) * (-A2GZ) + X(109) * A2GX) + X(110) * GC12 \\
& + X(111) * GC22 + X(112) * GC32 \\
F223Z & = -(X(107) * A2GY + X(108) * (-A2GX)) + X(110) * GC13 \\
& + X(111) * GC23 + X(112) * GC33 \\
F176X & = -(X(108) * A1GZ + X(109) * (-A1GY)) + X(110) * GC11 \\
& + X(111) * GC21 + X(112) * GC31 \\
F176Y & = -(X(107) * (-A1GZ) + X(109) * A1GX) + X(110) * GC12 \\
& + X(111) * GC22 + X(112) * GC32 \\
F176Z & = -(X(107) * A1GY + X(108) * (-A1GX)) + X(110) * GC13 \\
& + X(111) * GC23 + X(112) * GC33
\end{aligned}$$

$$F286X = -(X(108) * HGZ + X(109) * (-HGY)) + X(110) * GC11 + X(111) * GC21 + X(112) * GC31$$

$$F286Y = -(X(107) * (-HGZ) + X(109) * HGX) + X(110) * GC12 + X(111) * GC22 + X(112) * GC32$$

$$F286Z = -(X(107) * HGY + X(108) * (-HGX)) + X(110) * GC13 + X(111) * GC23 + X(112) * GC33$$

$$F8X = X(55) * PG1Z + X(57) * CFI1 + X(58) * SFI1 - (X(59) * CTU1 + X(60) * STU1)$$

$$F8Y = (X(54) * CTE1 + X(56) * STE1) * (-PG1Z) + X(57) * (-SFI1) + X(58) * CFI1 - ((X(59) * (-STU1) + X(60) * CTU1) * CFI1 + X(61) * SFI1)$$

$$F8Z = -((X(59) * (-STU1) + X(60) * CTU1) * (-SFI1) + X(61) * CFI1)$$

$$F45X = X(63) * PG2Z + X(65) * CFI2 + X(66) * SFI2 - (X(67) * CTU2 + X(68) * STU2)$$

$$F45Y = (X(62) * CTE2 + X(64) * STE2) * (-PG2Z) + X(65) * (-SFI2) + X(66) * CFI2 - ((X(67) * (-STU2) + X(68) * CTU2) * CFI2 + X(69) * SFI2)$$

$$F45Z = -((X(67) * (-STU2) + X(68) * CTU2) * (-SFI2) + X(69) * CFI2)$$

$$F82X = X(71) * PG3Z + X(73) * CFI3 + X(74) * SFI3 - (X(75) * CTU3 + X(76) * STU3)$$

$$F82Y = (X(70) * CTE3 + X(72) * STE3) * (-PG3Z) + X(73) * (-SFI3) + X(74) * CFI3 - ((X(75) * (-STU3) + X(76) * CTU3) * CFI3 + X(77) * SFI3)$$

$$F82Z = -((X(75) * (-STU3) + X(76) * CTU3) * (-SFI3) + X(77) * CFI3)$$

$$F118X = X(79) * PG4Z + X(81) * CFI4 + X(82) * SFI4 - (X(83) * CTU4 + X(84) * STU4)$$

$$F118Y = (X(78) * CTE4 + X(80) * STE4) * (-PG4Z) + X(81) * (-SFI4) + X(82) * CFI4 - ((X(83) * (-STU4) + X(84) * CTU4) * CFI4 + X(85) * SFI4)$$

$$F118Z = -((X(83) * (-STU4) + X(84) * CTU4) * (-SFI4) + X(85) * CFI4)$$

$$F168X = X(87) * AD1Z + F176X * A111 + F176Y * A121 + F176Z * A131$$

$$F168Y = X(86) * (-AD1Z) + F176X * A112 + F176Y * A122 + F176Z * A132$$

$$F168Z = F176X * A113 + F176Y * A123 + F176Z * A133$$

$$F215X = X(93) * AD2Z + F223X * A211 + F223Y * A221 + F223Z * A231$$

$$F215Y = X(92) * (-AD2Z) + F223X * A212 + F223Y * A222 + F223Z * A232$$

$$F215Z = F223X * A213 + F223Y * A223 + F223Z * A233$$

$$F252X = -X(109) * (-F1HY) + X(104)$$

$$F252Y = X(105)$$

$$F252Z = -X(107) * F1HY + X(106)$$

$$F264X = -X(109) * (-F2HY) + X(104)$$

$$F264Y = X(105)$$

$$F264Z = -X(107) * F2HY + X(106)$$

$$F275X = F286X - X(104)$$

$$F275Z = F286Z - X(106)$$

$$F280Y = -F286Y + X(105)$$

$$F282Y = dir - F280Y$$

$$E28X = F28X * RR + X(4) * CR$$

$$E28Z = F28Z * RR + X(5) * CR$$

$$E65X = F65X * RR + X(9) * CR$$

$$E65Z = F65Z * RR + X(10) * CR$$

$$E102X = F102X * RR + X(14) * CR$$

$$E102Z = F102Z * RR + X(15) * CR$$

$$E138X = F138X * RR + X(19) * CR$$

$$E138Z = F138Z * RR + X(20) * CR$$

$E190X = 0$   
 $E190Y = X(28) * CR + F190Y * RR$   
 $E190Z = X(29) * CR + F190Z * RR$

$E237X = 0$   
 $E237Y = X(37) * CR + F237Y * RR$   
 $E237Z = X(38) * CR + F237Z * RR$

$F35X = ((X(59) * CTU1 + X(60) * STU1) * CTE1 + ((X(59) * (-STU1) + X(60) * CTU1) * (-SFI1) + X(61) * CFI1) * (-STE1))$

$F35Y = ((X(59) * (-STU1) + X(60) * CTU1) * CFI1 + X(61) * SFI1)$

$F35Z = ((X(59) * CTU1 + X(60) * STU1) * STE1 + ((X(59) * (-STU1) + X(60) * CTU1) * (-SFI1) + X(61) * CFI1) * CTE1)$

$F159X = -X(87) * EG1Z + F35X * G111 + F35Y * G112 + F35Z * G113$

$F159Y = -((X(86) * (-EG1Z) + X(88) * EG1X)) + F35X * G121 + F35Y * G122 + F35Z * G123$

$F159Z = -(X(87) * (-EG1X)) + F35X * G131 + F35Y * G132 + F35Z * G133$

$F158X = -X(87) * CG1Z + F35X * G111 + F35Y * G112 + F35Z * G113$

$F158Y = -(X(86) * (-CG1Z)) + F35X * G121 + F35Y * G122 + F35Z * G123$

$F158Z = F35X * G131 + F35Y * G132 + F35Z * G133$

$F157X = -(X(87) * DG1Z + X(88) * (-DG1Y)) + F35X * G111 + F35Y * G112 + F35Z * G113$

$F157Y = -(X(86) * (-DG1Z)) + F35X * G121 + F35Y * G122 + F35Z * G123$

$F157Z = -X(86) * DG1Y + F35X * G131 + F35Y * G132 + F35Z * G133$

$F72X = ((X(67) * CTU2 + X(68) * STU2) * CTE2 + ((X(67) * (-STU2) + X(68) * CTU2) * (-SFI2) + X(69) * CFI2) * (-STE2))$

$$F72Y = ((X(67) * (-STU2) + X(68) * CTU2) * CFI2 + X(69) * SFI2)$$

$$F72Z = ((X(67) * CTU2 + X(68) * STU2) * STE2 + ((X(67) * (-STU2) + X(68) * CTU2) * (-SFI2) + X(69) * CFI2) * CTE2)$$

$$F206X = -X(93) * EG2Z + F72X * G211 + F72Y * G212 + F72Z * G213$$

$$F206Y = -((X(92) * (-EG2Z) + X(94) * EG2X)) + F72X * G221 + F72Y * G222 + F72Z * G223$$

$$F206Z = -(X(93) * (-EG2X)) + F72X * G231 + F72Y * G232 + F72Z * G233$$

$$F205X = -X(93) * CG2Z + F72X * G211 + F72Y * G212 + F72Z * G213$$

$$F205Y = -(X(92) * (-CG2Z)) + F72X * G221 + F72Y * G222 + F72Z * G223$$

$$F205Z = F72X * G231 + F72Y * G232 + F72Z * G233$$

$$F204X = -(X(93) * DG2Z + X(94) * (-DG2Y)) + F72X * G211 + F72Y * G212 + F72Z * G213$$

$$F204Y = -(X(92) * (-DG2Z)) + F72X * G221 + F72Y * G222 + F72Z * G223$$

$$F204Z = -X(92) * DG2Y + F72X * G231 + F72Y * G232 + F72Z * G233$$

$$F109X = ((X(75) * CTU3 + X(76) * STU3) * CTE3 + ((X(75) * (-STU3) + X(76) * CTU3) * (-SFI3) + X(77) * CFI3) * (-STE3))$$

$$F109Y = ((X(75) * (-STU3) + X(76) * CTU3) * CFI3 + X(77) * SFI3)$$

$$F109Z = ((X(75) * CTU3 + X(76) * STU3) * STE3 + ((X(75) * (-STU3) + X(76) * CTU3) * (-SFI3) + X(77) * CFI3) * CTE3)$$

$$F315X = F109X * G311 + F109Y * G312 + F109Z * G313 - F314X$$

$$F315Y = F109X * G321 + F109Y * G322 + F109Z * G323 - F314Y$$

$$F315Z = F109X * G331 + F109Y * G332 + F109Z * G333 - F314Z$$

$$F145X = ((X(83) * CTU4 + X(84) * STU4) * CTE4 + ((X(83) * (-STU4) + X(84) * CTU4) * (-SFI4) + X(85) * CFI4) * (-STE4))$$

$$F145Y = ((X(83) * (-STU4) + X(84) * CTU4) * CFI4 + X(85) * SFI4)$$

$$F145Z = ((X(83) * CTU4 + X(84) * STU4) * STE4 + ((X(83) * (-STU4) + X(84) * CTU4) * (-SFI4) + X(85) * CFI4) * CTE4)$$

$$\begin{aligned} F319X &= F145X * G411 + F145Y * G412 + F145Z * G413 - F318X \\ F319Y &= F145X * G421 + F145Y * G422 + F145Z * G423 - F318Y \\ F319Z &= F145X * G431 + F145Y * G432 + F145Z * G433 - F318Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E8X &= X(1) * CNX + F8X * RNX \\ E8Y &= X(2) * CNY + F8Y * RNY \\ E8Z &= X(3) * CNZ + F8Z * RNZ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E23X &= E28X \\ E23Y &= FR1 \\ E23Z &= E28Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E32X &= E28X \\ E32Y &= FR1 \\ E32Z &= E28Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E45X &= X(6) * CNX + F45X * RNX \\ E45Y &= X(7) * CNY + F45Y * RNY \\ E45Z &= X(8) * CNZ + F45Z * RNZ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E60X &= E65X \\ E60Y &= FR2 \\ E60Z &= E65Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E69X &= E65X \\ E69Y &= FR2 \\ E69Z &= E65Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E82X &= X(11) * CNX + F82X * RNX \\ E82Y &= X(12) * CNY + F82Y * RNY \\ E82Z &= X(13) * CNZ + F82Z * RNZ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E97X &= E102X \\ E97Y &= FR3 \\ E97Z &= E102Z \end{aligned}$$

$$E106X = E102X$$

$$E106Y = FR3$$

$$E106Z = E102Z$$

$$E118X = X(16) * CNX + F118X * RNX$$

$$E118Y = X(17) * CNY + F118Y * RNY$$

$$E118Z = X(18) * CNZ + F118Z * RNZ$$

$$E133X = E138X$$

$$E133Y = FR4$$

$$E133Z = E138Z$$

$$E142X = E138X$$

$$E142Y = FR4$$

$$E142Z = E138Z$$

$$E275X = X(45) * CR + F275X * RR$$

$$E275Z = X(46) * CR + F275Z * RR$$

$$E282Y = X(47) * CR + F282Y * RR$$

$$F171X = F157X - F168X$$

$$F171Y = F157Y - F168Y$$

$$F171Z = F157Z - F168Z$$

$$F181X = -(X(91) * (-BC1Y)) + F158X * C111 + F158Y * C112 + F158Z * C113$$

$$F181Y = F158X * C121 + F158Y * C122 + F158Z * C123$$

$$F181Z = -X(89) * BC1Y + F158X * C131 + F158Y * C132 + F158Z * C133$$

$$F218X = F204X - F215X$$

$$F218Y = F204Y - F215Y$$

$$F218Z = F204Z - F215Z$$

$$F228X = -(X(97) * (-BC2Y)) + F205X * C211 + F205Y * C212 + F205Z * C213$$

$$F228Y = F205X * C221 + F205Y * C222 + F205Z * C223$$

$$F228Z = -X(95) * BC2Y + F205X * C231 + F205Y * C232 + F205Z * C233$$

$$F246X = -(X(100) * (-FE1Y)) + F159X * E111 + F159Y * E112 + F159Z * E113$$

$$F246Y = F159X * E121 + F159Y * E122 + F159Z * E123$$

$$F246Z = -X(98) * FE1Y + F159X * E131 + F159Y * E132 + F159Z * E133$$

$$F248X = F252X * F111 + F252Y * F121 + F252Z * F131 - F246X$$

$$F248Y = F252X * F112 + F252Y * F122 + F252Z * F132 - F246Y$$

$$F248Z = F252X * F113 + F252Y * F123 + F252Z * F133 - F246Z$$

$$F258X = -(X(103) * (-FE2Y)) + F206X * E211 + F206Y * E212 + F206Z * E213$$

$$F258Y = F206X * E221 + F206Y * E222 + F206Z * E223$$

$$F258Z = -X(101) * FE2Y + F206X * E231 + F206Y * E232 + F206Z * E233$$

$$E4X = E8Y * (-PG1Z)$$

$$E4Y = E8X * PG1Z$$

$$E4Z = -PA1$$

$$E13X = -(E8X * CFI1 + E8Y * (-SFI1)) - X(57) * SX1$$

$$E13Y = -(E8X * SFI1 + E8Y * CFI1) - X(58) * SY1$$

$$E41X = E45Y * (-PG2Z)$$

$$E41Y = E45X * PG2Z$$

$$E41Z = -PA2$$

$$E50X = -(E45X * CFI2 + E45Y * (-SFI2)) - X(65) * SX2$$

$$E50Y = -(E45X * SFI2 + E45Y * CFI2) - X(66) * SY2$$

$$E78X = E82Y * (-PG3Z)$$

$$E78Y = E82X * PG3Z$$

$$E78Z = -PA3$$

$$E87X = -(E82X * CFI3 + E82Y * (-SFI3)) - X(73) * SX3$$

$$E87Y = -(E82X * SFI3 + E82Y * CFI3) - X(74) * SY3$$

$$E114X = E118Y * (-PG4Z)$$

$$E114Y = E118X * PG4Z$$

$$E114Z = -PA4$$

$$E123X = -(E118X * CFI4 + E118Y * (-SFI4)) - X(81) * SX4$$



$$E123Y = -(E118X * SFI4 + E118Y * CFI4) - X(82) * SY4$$

$$E273X = E275X$$

$$E273Y = E282Y$$

$$E273Z = E275Z$$

$$E286X = -E275X$$

$$E286Y = -E282Y$$

$$E286Z = -E275Z$$

$$E315X = X(48) * CR + F315X * RR$$

$$E315Y = X(49) * CR + F315Y * RR$$

$$E315Z = X(50) * CST + F315Z * RST$$

$$E319X = X(51) * CR + F319X * RR$$

$$E319Y = X(52) * CR + F319Y * RR$$

$$E319Z = X(53) * CST + F319Z * RST$$

$$F260X = F264X * F211 + F264Y * F221 + F264Z * F231 - F258X$$

$$F260Y = F264X * F212 + F264Y * F222 + F264Z * F232 - F258Y$$

$$F260Z = F264X * F213 + F264Y * F223 + F264Z * F233 - F258Z$$

$$E1X = -(X(55) * GR1Z + X(56) * (-GR1Y)) - (E4X * CTE1 + E4Z * (-STE1)) - (E23X * G111 + E23Y * G121 + E23Z * G131)$$

$$E1Y = TR1 - (X(54) * (-GR1Z) + X(56) * GR1X) - E4Y - (E23X * G112 + E23Y * G122 + E23Z * G132) - X(55) * RDD1$$

$$E1Z = -(X(54) * GR1Y + X(55) * (-GR1X)) - (E4X * STE1 + E4Z * CTE1) - (E23X * G113 + E23Y * G123 + E23Z * G133)$$

$$E38X = -(X(63) * GR2Z + X(64) * (-GR2Y)) - (E41X * CTE2 + E41Z * (-STE2)) - (E60X * G211 + E60Y * G221 + E60Z * G231)$$

$$E38Y = TR2 - (X(62) * (-GR2Z) + X(64) * GR2X) - E41Y - (E60X * G212 + E60Y * G222 + E60Z * G232) - X(63) * RDD2$$

$$E38Z = -(X(62) * GR2Y + X(63) * (-GR2X)) - (E41X * STE2 + E41Z * CTE2) - (E60X * G213 + E60Y * G223 + E60Z * G233)$$

$$E75X = -(X(71) * GR3Z + X(72) * (-GR3Y)) - (E78X * CTE3 + E78Z * (-STE3)) - (E97X * G311 + E97Y * G321 + E97Z * G331)$$

$$E75Y = -(X(70) * (-GR3Z) + X(72) * GR3X) - E78Y - (E97X * G312 + E97Y * G322 + E97Z * G332) - X(71) * RDD3$$

$$E75Z = -(X(70) * GR3Y + X(71) * (-GR3X)) - (E78X * STE3 + E78Z * CTE3) - (E97X * G313 + E97Y * G323 + E97Z * G333)$$

$$E111X = -(X(79) * GR4Z + X(80) * (-GR4Y)) - (E114X * CTE4 + E114Z * (-STE4)) - (E133X * G411 + E133Y * G421 + E133Z * G431)$$

$$E111Y = -(X(78) * (-GR4Z) + X(80) * GR4X) - E114Y - (E133X * G412 + E133Y * G422 + E133Z * G432) - X(79) * RDD4$$

$$E111Z = -(X(78) * GR4Y + X(79) * (-GR4X)) - (E114X * STE4 + E114Z * CTE4) - (E133X * G413 + E133Y * G423 + E133Z * G433)$$

$$\begin{aligned} F184X &= F181X * B111 + F181Y * B112 + F181Z * B113 - F185X \\ F184Y &= F181X * B121 + F181Y * B122 + F181Z * B123 - F185Y \\ F184Z &= F181X * B131 + F181Y * B132 + F181Z * B133 - F185Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F231X &= F228X * B211 + F228Y * B212 + F228Z * B213 - F232X \\ F231Y &= F228X * B221 + F228Y * B222 + F228Z * B223 - F232Y \\ F231Z &= F228X * B231 + F228Y * B232 + F228Z * B233 - F232Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E107X &= -(E315X * G311 + E315Y * G321 + E315Z * G331) \\ E107Y &= -(E315X * G312 + E315Y * G322 + E315Z * G332) \\ E107Z &= -(E315X * G313 + E315Y * G323 + E315Z * G333) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E143X &= -(E319X * G411 + E319Y * G421 + E319Z * G431) \\ E143Y &= -(E319X * G412 + E319Y * G422 + E319Z * G432) \\ E143Z &= -(E319X * G413 + E319Y * G423 + E319Z * G433) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E171X &= X(21) * CR + F171X * RR \\ E171Y &= X(22) * CR + F171Y * RR \\ E171Z &= X(23) * CSD + F171Z * RSD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E218X &= X(30) * CR + F218X * RR \\ E218Y &= X(31) * CR + F218Y * RR \\ E218Z &= X(32) * CSD + F218Z * RSD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E248X &= X(39) * CR + F248X * RR \\ E248Y &= X(40) * CR + F248Y * RR \\ E248Z &= X(41) * CR + F248Z * RR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E90X &= E82X + E107X * CTE3 + E107Z * STE3 \\ E90Y &= E82Y + E107Y \\ E90Z &= E82Z + E107X * (-STE3) + E107Z * CTE3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E126X &= E118X + E143X * CTE4 + E143Z * STE4 \\ E126Y &= E118Y + E143Y \\ E126Z &= E118Z + E143X * (-STE4) + E143Z * CTE4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E168X &= -E171X \\ E168Y &= -E171Y \\ E168Z &= -E171Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E161X &= E171X \\ E161Y &= E171Y \\ E161Z &= E171Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E215X &= -E218X \\ E215Y &= -E218Y \\ E215Z &= -E218Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E208X &= E218X \\ E208Y &= E218Y \\ E208Z &= E218Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E251X &= -E248X \\ E251Y &= -E248Y \\ E251Z &= -E248Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E260X &= X(42) * CR + F260X * RR \\ E260Y &= X(43) * CR + F260Y * RR \\ E260Z &= X(44) * CR + F260Z * RR \end{aligned}$$

$$E94X = E90X * CTU3 + (E90Y * CFI3 + E90Z * (-SFI3)) * (-STU3)$$

$$E94Y = E90X * STU3 + (E90Y * CFI3 + E90Z * (-SFI3)) * CTU3$$

$$E94Z = E90Y * SFI3 + E90Z * CFI3 + FGR$$

$$E130X = E126X * CTU4 + (E126Y * CFI4 + E126Z * (-SFI4)) * (-STU4)$$

$$E130Y = E126X * STU4 + (E126Y * CFI4 + E126Z * (-SFI4)) * CTU4$$

$$E130Z = E126Y * SFI4 + E126Z * CFI4 + FGR$$

$$\begin{aligned} E157X &= -E161X \\ E157Y &= -E161Y \end{aligned}$$

$$E157Z = -E161Z$$

$$E175X = -E168X$$

$$E175Y = -E168Y$$

$$E175Z = -E168Z$$

$$E184X = X(24) * CR + F184X * RR$$

$$E184Y = X(25) * CR + F184Y * RR$$

$$E184Z = X(26) * CR + F184Z * RR$$

$$E204X = -E208X$$

$$E204Y = -E208Y$$

$$E204Z = -E208Z$$

$$E222X = -E215X$$

$$E222Y = -E215Y$$

$$E222Z = -E215Z$$

$$E231X = X(33) * CR + F231X * RR$$

$$E231Y = X(34) * CR + F231Y * RR$$

$$E231Z = X(35) * CR + F231Z * RR$$

$$E245X = -E248X$$

$$E245Y = -E248Y$$

$$E245Z = -E248Z$$

$$E257X = -E260X$$

$$E257Y = -E260Y$$

$$E257Z = -E260Z$$

$$E263X = -E260X$$

$$E263Y = -E260Y$$

$$E263Z = -E260Z$$

$$E159X = -(E245X * E111 + E245Y * E121 + E245Z * E131)$$

$$E159Y = -(E245X * E112 + E245Y * E122 + E245Z * E132)$$

$$E159Z = -(E245X * E113 + E245Y * E123 + E245Z * E133)$$

$$E206X = -(E257X * E211 + E257Y * E221 + E257Z * E231)$$

$$E206Y = -(E257X * E212 + E257Y * E222 + E257Z * E232)$$

$$E206Z = -(E257X * E213 + E257Y * E223 + E257Z * E233)$$

$$E241X = -E248Z * FE1Y$$

$$E241Y = 0$$

$$E241Z = -E248X * (-FE1Y)$$

$$\begin{aligned} E253X &= -E260Z * FE2Y \\ E253Y &= 0 \\ E253Z &= -E260X * (-FE2Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E272X &= E251X * F111 + E251Y * F112 + E251Z * F113 + E263X \\ &* F211 + E263Y * F212 + E263Z * F213 + E273X - IN * (X(106) \\ &* X(108) - X(105) * X(109)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E272Y &= E251X * F121 + E251Y * F122 + E251Z * F123 + E263X \\ &* F221 + E263Y * F222 + E263Z * F223 + E273Y - IN * (X(106) \\ &* X(107) - X(104) * X(109)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E272Z &= E251X * F131 + E251Y * F132 + E251Z * F133 + E263X \\ &* F231 + E263Y * F232 + E263Z * F233 + E273Z - IN * (X(105) \\ &* X(107) - X(104) * X(108)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E322X &= E319X + E315X + E231X + E184X + E222X * A211 + \\ &E222Y * A212 + E222Z * A213 + E175X * A111 + E175Y * A112 + \\ &E175Z * A113 + E286X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E322Y &= E319Y + E315Y + E231Y + E184Y + E222X * A221 + \\ &E222Y * A222 + E222Z * A223 + E175X * A121 + E175Y * A122 + \\ &E175Z * A123 + E286Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E322Z &= E319Z + E315Z + E231Z + E184Z + E222X * A231 + \\ &E222Y * A232 + E222Z * A233 + E175X * A131 + E175Y * A132 + \\ &E175Z * A133 + E286Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E181X &= -(E184X * B111 + E184Y * B121 + E184Z * B131) \\ E181Y &= -(E184X * B112 + E184Y * B122 + E184Z * B132) \\ E181Z &= -(E184X * B113 + E184Y * B123 + E184Z * B133) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E228X &= -(E231X * B211 + E231Y * B221 + E231Z * B231) \\ E228Y &= -(E231X * B212 + E231Y * B222 + E231Z * B232) \\ E228Z &= -(E231X * B213 + E231Y * B223 + E231Z * B233) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E265X &= -((E251X * F131 + E251Y * F132 + E251Z * F133) * \\ &F1HY) - ((E263X * F231 + E263Y * F232 + E263Z * F233) * \\ &F2HY) \end{aligned}$$

$$E265Y = 0$$

$$\begin{aligned} E265Z &= -((E251X * F111 + E251Y * F112 + E251Z * F113) * (- \\ &F1HY)) - ((E263X * F211 + E263Y * F212 + E263Z * F213) * (- \\ &F2HY)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E176X &= E175X * A111 + E175Y * A112 + E175Z * A113 \\ E176Y &= E175X * A121 + E175Y * A122 + E175Z * A123 \\ E176Z &= E175X * A131 + E175Y * A132 + E175Z * A133 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E223X &= E222X * A211 + E222Y * A212 + E222Z * A213 \\ E223Y &= E222X * A221 + E222Y * A222 + E222Z * A223 \\ E223Z &= E222X * A231 + E222Y * A232 + E222Z * A233 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E287X1 &= E190X + E237X + E106X + E142X + E265X - (X(108) * \\ &GR5Z + X(109) * (-GR5Y)) - (E319Y * (-G4GZ) + E319Z * G4GY) \\ &- (E315Y * (-G3GZ) + E315Z * G3GY) - (E231Y * (-B2GZ) + \\ &E231Z * B2GY) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E287X2 &= -(E184Y * (-B1GZ) + E184Z * B1GY) - (E223Y * (- \\ &A2GZ) + E223Z * A2GY) - (E176Y * (-A1GZ) + E176Z * A1GY) - \\ &(E286Y * (-HGZ) + E286Z * HGY) \end{aligned}$$

$$E287X = E287X1 + E287X2$$

$$\begin{aligned} E287Y1 &= E190Y + E237Y + E106Y + E142Y + E265Y - (X(107) * \\ &(-GR5Z) + X(109) * GR5X) - (E319X * G4GZ + E319Z * (-G4GX)) \\ &- (E315X * G3GZ + E315Z * (-G3GX)) - (E231X * B2GZ + E231Z \\ &* (-B2GX)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E287Y2 &= -(E184X * B1GZ + E184Z * (-B1GX)) - (E223X * A2GZ \\ &+ E223Z * (-A2GX)) - (E176X * A1GZ + E176Z * (-A1GX)) - \\ &(E286X * HGZ + E286Z * (-HGX)) - TR1 - TR2 \end{aligned}$$

$$E287Y = E287Y1 + E287Y2$$

$$\begin{aligned} E287Z1 &= E190Z + E237Z + E106Z + E142Z + E265Z - (X(107) * \\ &GR5Y + X(108) * (-GR5X)) - (E319X * (-G4GY) + E319Y * G4GX) \\ &- (E315X * (-G3GY) + E315Y * G3GX) - (E231X * (-B2GY) + \\ &E231Y * B2GX) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E287Z2 &= -(E184X * (-B1GY) + E184Y * B1GX) - (E223X * (- \\ &A2GY) + E223Y * A2GX) - (E176X * (-A1GY) + E176Y * A1GX) - \\ &(E286X * (-HGY) + E286Y * HGX) \end{aligned}$$

$$E287Z = E287Z1 + E287Z2$$

$$\begin{aligned} E325X &= E322X * GC11 + E322Y * GC12 + E322Z * GC13 + TRAC \\ E325Y &= E322X * GC21 + E322Y * GC22 + E322Z * GC23 \\ E325Z &= E322X * GC31 + E322Y * GC32 + E322Z * GC33 + FGC \end{aligned}$$

$$E163X = -E181X$$

$$\begin{aligned} E163Y &= -E181Y \\ E163Z &= -E181Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E210X &= -E228X \\ E210Y &= -E228Y \\ E210Z &= -E228Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E158X &= -(E163X * C111 + E163Y * C121 + E163Z * C131) \\ E158Y &= -(E163X * C112 + E163Y * C122 + E163Z * C132) \\ E158Z &= -(E163X * C113 + E163Y * C123 + E163Z * C133) \end{aligned}$$

$$E177X = -E181Z * BC1Y - (E190X * B111 + E190Y * B121 + E190Z * B131)$$

$$E177Y = -(E190X * B112 + E190Y * B122 + E190Z * B132)$$

$$E177Z = -E181X * (-BC1Y) - (E190X * B113 + E190Y * B123 + E190Z * B133)$$

$$\begin{aligned} E205X &= -(E210X * C211 + E210Y * C221 + E210Z * C231) \\ E205Y &= -(E210X * C212 + E210Y * C222 + E210Z * C232) \\ E205Z &= -(E210X * C213 + E210Y * C223 + E210Z * C233) \end{aligned}$$

$$E224X = -E228Z * BC2Y - (E237X * B211 + E237Y * B221 + E237Z * B231)$$

$$E224Y = -(E237X * B212 + E237Y * B222 + E237Z * B232)$$

$$E224Z = -E228X * (-BC2Y) - (E237X * B213 + E237Y * B223 + E237Z * B233)$$

$$\begin{aligned} E36X &= -E159X - E158X - E157X \\ E36Y &= -E159Y - E158Y - E157Y \\ E36Z &= -E159Z - E158Z - E157Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E73X &= -E206X - E205X - E204X \\ E73Y &= -E206Y - E205Y - E204Y \\ E73Z &= -E206Z - E205Z - E204Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E33X &= -(E36X * G111 + E36Y * G121 + E36Z * G131) \\ E33Y &= -(E36X * G112 + E36Y * G122 + E36Z * G132) \\ E33Z &= -(E36X * G113 + E36Y * G123 + E36Z * G133) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E70X &= -(E73X * G211 + E73Y * G221 + E73Z * G231) \\ E70Y &= -(E73X * G212 + E73Y * G222 + E73Z * G232) \\ E70Z &= -(E73X * G213 + E73Y * G223 + E73Z * G233) \end{aligned}$$

$$E147X = E32X - (E168Y * (-AD1Z)) - (E159Y * (-EG1Z)) - (E158Y * (-CG1Z)) - (E157Y * (-DG1Z)) + E157Z * DG1Y$$

$$E147Y = E32Y - E168X * AD1Z - (E159X * EG1Z + E159Z * (-EG1X)) - E158X * CG1Z - E157X * DG1Z$$

$$E147Z = E32Z - E159Y * EG1X - (E157X * (-DG1Y))$$

$$E194X = E69X - (E215Y * (-AD2Z)) - (E206Y * (-EG2Z)) - (E205Y * (-CG2Z)) - (E204Y * (-DG2Z)) + E204Z * DG2Y$$

$$E194Y = E69Y - E215X * AD2Z - (E206X * EG2Z + E206Z * (-EG2X)) - E205X * CG2Z - E204X * DG2Z$$

$$E194Z = E69Z - E206Y * EG2X - (E204X * (-DG2Y))$$

$$E16X = E8X + E33X * CTE1 + E33Z * STE1$$

$$E16Y = E8Y + E33Y$$

$$E16Z = E8Z + E33X * (-STE1) + E33Z * CTE1$$

$$E53X = E45X + E70X * CTE2 + E70Z * STE2$$

$$E53Y = E45Y + E70Y$$

$$E53Z = E45Z + E70X * (-STE2) + E70Z * CTE2$$

$$E20X = E16X * CTU1 + (E16Y * CFI1 + E16Z * (-SFI1)) * (-STU1)$$

$$E20Y = E16X * STU1 + (E16Y * CFI1 + E16Z * (-SFI1)) * CTU1$$

$$E20Z = E16Y * SFI1 + E16Z * CFI1 + FGR$$

$$E57X = E53X * CTU2 + (E53Y * CFI2 + E53Z * (-SFI2)) * (-STU2)$$

$$E57Y = E53X * STU2 + (E53Y * CFI2 + E53Z * (-SFI2)) * CTU2$$

$$E57Z = E53Y * SFI2 + E53Z * CFI2 + FGR$$

Ecuaciones diferenciales correspondientes a las Compliances, con las que se obtienen los desplazamientos X(j) a partir de su derivada Y(j) que son los flujos:

$$Y(1) = F8X$$

$$Y(2) = F8Y$$

$$Y(3) = F8Z$$



Y(4) = F28X  
Y(5) = F28Z

Y(6) = F45X  
Y(7) = F45Y  
Y(8) = F45Z

Y(9) = F65X  
Y(10) = F65Z

Y(11) = F82X  
Y(12) = F82Y  
Y(13) = F82Z

Y(14) = F102X  
Y(15) = F102Z

Y(16) = F118X  
Y(17) = F118Y  
Y(18) = F118Z

Y(19) = F138X  
Y(20) = F138Z

Y(21) = F171X  
Y(22) = F171Y  
Y(23) = F171Z

Y(24) = F184X  
Y(25) = F184Y  
Y(26) = F184Z

Y(27) = F190X  
Y(28) = F190Y  
Y(29) = F190Z

Y(30) = F218X  
Y(31) = F218Y  
Y(32) = F218Z

Y(33) = F231X  
Y(34) = F231Y  
Y(35) = F231Z

Y(36) = F237X

Y(37) = F237Y  
Y(38) = F237Z

Y(39) = F248X  
Y(40) = F248Y  
Y(41) = F248Z

Y(42) = F260X  
Y(43) = F260Y  
Y(44) = F260Z

Y(45) = F275X  
Y(46) = F275Z

Y(47) = F282Y

Y(48) = F315X  
Y(49) = F315Y  
Y(50) = F315Z

Y(51) = F319X  
Y(52) = F319Y  
Y(53) = F319Z

Ecuaciones diferenciales correspondientes a las Inercias, con las que se obtienen los flujos X(j) a partir de su derivada Y(j) que son las aceleraciones:

Y(54) = E1X / IRX  
Y(55) = E1Y / IRY  
Y(56) = E1Z / IRZ

Y(57) = E13X / MS  
Y(58) = E13Y / MS

Y(59) = E20X / MR  
Y(60) = E20Y / MR  
Y(61) = E20Z / MR

Y(62) = E38X / IRX  
Y(63) = E38Y / IRY  
Y(64) = E38Z / IRZ

Y(65) = E50X / MS  
Y(66) = E50Y / MS

Y(67) = E57X / MR  
Y(68) = E57Y / MR  
Y(69) = E57Z / MR

Y(70) = E75X / IRX  
Y(71) = E75Y / IRY  
Y(72) = E75Z / IRZ

Y(73) = E87X / MS  
Y(74) = E87Y / MS

Y(75) = E94X / MR  
Y(76) = E94Y / MR  
Y(77) = E94Z / MR

Y(78) = E111X / IRX  
Y(79) = E111Y / IRY  
Y(80) = E111Z / IRZ

Y(81) = E123X / MS  
Y(82) = E123Y / MS

Y(83) = E130X / MR  
Y(84) = E130Y / MR  
Y(85) = E130Z / MR

Y(86) = E147X / IN  
Y(87) = E147Y / IN  
Y(88) = E147Z / IN

Y(89) = E177X / IN  
Y(90) = E177Y / IN  
Y(91) = E177Z / IN

Y(92) = E194X / IN  
Y(93) = E194Y / IN  
Y(94) = E194Z / IN

Y(95) = E224X / IN  
Y(96) = E224Y / IN  
Y(97) = E224Z / IN

Y(98) = E241X / IN  
Y(99) = E241Y / IN  
Y(100) = E241Z / IN

$$\begin{aligned} Y(101) &= E253X / IN \\ Y(102) &= E253Y / IN \\ Y(103) &= E253Z / IN \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(104) &= E272X / IN \\ Y(105) &= E272Y / IN \\ Y(106) &= E272Z / IN \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(107) &= E287X / ICX \\ Y(108) &= E287Y / ICY \\ Y(109) &= E287Z / ICZ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(110) &= E325X / MC \\ Y(111) &= E325Y / MC \\ Y(112) &= E325Z / MC \end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales correspondientes a los ángulos de Cardan, con las que se obtienen dichos ángulos  $X(j)$  a partir de su derivada  $Y(j)$  expresada en función de las velocidades angulares de los sólidos:

$$Y(113) = \text{COS}(X(114)) * X(54) + \text{SIN}(X(114)) * X(56)$$

$$Y(114) = X(55) - \text{TAN}(X(113)) * (\text{COS}(X(114)) * X(56) - \text{SIN}(X(114)) * X(54))$$

$$Y(115) = (\text{COS}(X(114)) * X(56) - \text{SIN}(X(114)) * X(54)) / \text{COS}(X(113))$$

$$Y(116) = \text{COS}(X(117)) * X(62) + \text{SIN}(X(117)) * X(64)$$

$$Y(117) = X(63) - \text{TAN}(X(116)) * (\text{COS}(X(117)) * X(64) - \text{SIN}(X(117)) * X(62))$$

$$Y(118) = (\text{COS}(X(117)) * X(64) - \text{SIN}(X(117)) * X(62)) / \text{COS}(X(116))$$

$$Y(119) = \text{COS}(X(120)) * X(70) + \text{SIN}(X(120)) * X(72)$$

$$Y(120) = X(71) - \text{TAN}(X(119)) * (\text{COS}(X(120)) * X(72) - \text{SIN}(X(120)) * X(70))$$

$$Y(121) = (\text{COS}(X(120)) * X(72) - \text{SIN}(X(120)) * X(70)) / \text{COS}(X(119))$$

$$Y(122) = \text{COS}(X(123)) * X(78) + \text{SIN}(X(123)) * X(80)$$

$$Y(123) = X(79) - \text{TAN}(X(122)) * (\text{COS}(X(123)) * X(80) - \text{SIN}(X(123)) * X(78))$$

$$Y(124) = (\text{COS}(X(123)) * X(80) - \text{SIN}(X(123)) * X(78)) / \text{COS}(X(122))$$

$$Y(125) = \text{COS}(X(126)) * X(107) + \text{SIN}(X(126)) * X(109)$$

$$Y(126) = X(108) - \text{TAN}(X(125)) * (\text{COS}(X(126)) * X(109) - \text{SIN}(X(126)) * X(107))$$

$$Y(127) = (\text{COS}(X(126)) * X(109) - \text{SIN}(X(126)) * X(107)) / \text{COS}(X(125))$$

$$Y(128) = -X(107) * \text{COS}(X(130)) - X(108) * \text{SIN}(X(130)) + X(86) * \text{COS}(X(129)) + X(88) * \text{SIN}(X(129))$$

$$Y(129) = X(87) - (X(108) * \text{COS}(X(130)) - X(107) * \text{SIN}(X(130))) / \text{COS}(X(128)) - (X(88) * \text{COS}(X(129)) - X(86) * \text{SIN}(X(129))) * \text{TAN}(X(128))$$

$$Y(130) = -X(109) + (X(108) * \text{COS}(X(130)) - X(107) * \text{SIN}(X(130))) * \text{TAN}(X(128)) + (X(88) * \text{COS}(X(129)) - X(86) * \text{SIN}(X(129))) / \text{COS}(X(128))$$

$$Y(131) = -X(107) * \text{COS}(X(133)) - X(108) * \text{SIN}(X(133)) + X(92) * \text{COS}(X(132)) + X(94) * \text{SIN}(X(132))$$

$$Y(132) = X(93) - (X(108) * \text{COS}(X(133)) - X(107) * \text{SIN}(X(133))) / \text{COS}(X(131)) - (X(94) * \text{COS}(X(132)) - X(92) * \text{SIN}(X(132))) * \text{TAN}(X(131))$$

$$Y(133) = -X(109) + (X(108) * \text{COS}(X(133)) - X(107) * \text{SIN}(X(133))) * \text{TAN}(X(131)) + (X(94) * \text{COS}(X(132)) - X(92) * \text{SIN}(X(132))) / \text{COS}(X(131))$$

$$Y(134) = -X(107) * \text{COS}(X(136)) - X(108) * \text{SIN}(X(136)) + X(89) * \text{COS}(X(135)) + X(91) * \text{SIN}(X(135))$$

$$Y(135) = X(90) - (X(108) * \text{COS}(X(136)) - X(107) * \text{SIN}(X(136))) / \text{COS}(X(134)) - (X(91) * \text{COS}(X(135)) - X(89) * \text{SIN}(X(135))) * \text{TAN}(X(134))$$

$$Y(136) = -X(109) + (X(108) * \text{COS}(X(136)) - X(107) * \text{SIN}(X(136))) * \text{TAN}(X(134)) + (X(91) * \text{COS}(X(135)) - X(89) * \text{SIN}(X(135)))$$

$$\text{SIN}(X(135)) / \text{COS}(X(134))$$

$$Y(137) = -X(107) * \text{COS}(X(139)) - X(108) * \text{SIN}(X(139)) + X(95) * \text{COS}(X(138)) + X(97) * \text{SIN}(X(138))$$

$$Y(138) = X(96) - (X(108) * \text{COS}(X(139)) - X(107) * \text{SIN}(X(139))) / \text{COS}(X(137)) - (X(97) * \text{COS}(X(138)) - X(95) * \text{SIN}(X(138))) * \text{TAN}(X(137))$$

$$Y(139) = -X(109) + (X(108) * \text{COS}(X(139)) - X(107) * \text{SIN}(X(139))) * \text{TAN}(X(137)) + (X(97) * \text{COS}(X(138)) - X(95) * \text{SIN}(X(138))) / \text{COS}(X(137))$$

$$Y(140) = -X(89) * \text{COS}(X(142)) - X(90) * \text{SIN}(X(142)) + X(86) * \text{COS}(X(141)) + X(88) * \text{SIN}(X(141))$$

$$Y(141) = X(87) - (X(90) * \text{COS}(X(142)) - X(89) * \text{SIN}(X(142))) / \text{COS}(X(140)) - (X(88) * \text{COS}(X(141)) - X(86) * \text{SIN}(X(141))) * \text{TAN}(X(140))$$

$$Y(142) = -X(91) + (X(90) * \text{COS}(X(142)) - X(89) * \text{SIN}(X(142))) * \text{TAN}(X(140)) + (X(88) * \text{COS}(X(141)) - X(86) * \text{SIN}(X(141))) / \text{COS}(X(140))$$

$$Y(143) = -X(95) * \text{COS}(X(145)) - X(96) * \text{SIN}(X(145)) + X(92) * \text{COS}(X(144)) + X(94) * \text{SIN}(X(144))$$

$$Y(144) = X(93) - (X(96) * \text{COS}(X(145)) - X(95) * \text{SIN}(X(145))) / \text{COS}(X(143)) - (X(94) * \text{COS}(X(144)) - X(92) * \text{SIN}(X(144))) * \text{TAN}(X(143))$$

$$Y(145) = -X(97) + (X(96) * \text{COS}(X(145)) - X(95) * \text{SIN}(X(145))) * \text{TAN}(X(143)) + (X(94) * \text{COS}(X(144)) - X(92) * \text{SIN}(X(144))) / \text{COS}(X(143))$$

$$Y(146) = -X(98) * \text{COS}(X(148)) - X(99) * \text{SIN}(X(148)) + X(86) * \text{COS}(X(147)) + X(88) * \text{SIN}(X(147))$$

$$Y(147) = X(87) - (X(99) * \text{COS}(X(148)) - X(98) * \text{SIN}(X(148))) / \text{COS}(X(146)) - (X(88) * \text{COS}(X(147)) - X(86) * \text{SIN}(X(147))) * \text{TAN}(X(146))$$

$$Y(148) = -X(100) + (X(99) * \text{COS}(X(148)) - X(98) * \text{SIN}(X(148))) * \text{TAN}(X(146)) + (X(88) * \text{COS}(X(147)) - X(86) * \text{SIN}(X(147))) / \text{COS}(X(146))$$

$$Y(149) = -X(101) * \cos(X(151)) - X(102) * \sin(X(151)) + X(92) * \cos(X(150)) + X(94) * \sin(X(150))$$

$$Y(150) = X(93) - (X(102) * \cos(X(151)) - X(101) * \sin(X(151))) / \cos(X(149)) - (X(94) * \cos(X(150)) - X(92) * \sin(X(150))) * \tan(X(149))$$

$$Y(151) = -X(103) + (X(102) * \cos(X(151)) - X(101) * \sin(X(151))) * \tan(X(149)) + (X(94) * \cos(X(150)) - X(92) * \sin(X(150))) / \cos(X(149))$$

$$Y(152) = -X(107) * \cos(X(154)) - X(108) * \sin(X(154)) + X(98) * \cos(X(153)) + X(100) * \sin(X(153))$$

$$Y(153) = X(99) - (X(108) * \cos(X(154)) - X(107) * \sin(X(154))) / \cos(X(152)) - (X(100) * \cos(X(153)) - X(98) * \sin(X(153))) * \tan(X(152))$$

$$Y(154) = -X(109) + (X(108) * \cos(X(154)) - X(107) * \sin(X(154))) * \tan(X(152)) + (X(100) * \cos(X(153)) - X(98) * \sin(X(153))) / \cos(X(152))$$

$$Y(155) = -X(107) * \cos(X(157)) - X(108) * \sin(X(157)) + X(101) * \cos(X(156)) + X(103) * \sin(X(156))$$

$$Y(156) = X(102) - (X(108) * \cos(X(157)) - X(107) * \sin(X(157))) / \cos(X(155)) - (X(103) * \cos(X(156)) - X(101) * \sin(X(156))) * \tan(X(155))$$

$$Y(157) = -X(109) + (X(108) * \cos(X(157)) - X(107) * \sin(X(157))) * \tan(X(155)) + (X(103) * \cos(X(156)) - X(101) * \sin(X(156))) / \cos(X(155))$$

$$Y(158) = -X(86) * \cos(X(160)) - X(87) * \sin(X(160)) + X(54) * \cos(X(159)) + X(56) * \sin(X(159))$$

$$Y(159) = X(55) - (X(87) * \cos(X(160)) - X(86) * \sin(X(160))) / \cos(X(158)) - (X(56) * \cos(X(159)) - X(54) * \sin(X(159))) * \tan(X(158))$$

$$Y(160) = -X(88) + (X(87) * \cos(X(160)) - X(86) * \sin(X(160))) * \tan(X(158)) + (X(56) * \cos(X(159)) - X(54) * \sin(X(159))) / \cos(X(158))$$

$$Y(161) = -X(92) * \cos(X(163)) - X(93) * \sin(X(163)) + X(62) * \cos(X(162)) + X(64) * \sin(X(162))$$

$$Y(162) = X(63) - (X(93) * \cos(X(163)) - X(92) * \sin(X(163))) / \cos(X(161)) - (X(64) * \cos(X(162)) - X(62) * \sin(X(162))) * \tan(X(161))$$

$$Y(163) = -X(94) + (X(93) * \cos(X(163)) - X(92) * \sin(X(163))) * \tan(X(161)) + (X(64) * \cos(X(162)) - X(62) * \sin(X(162))) / \cos(X(161))$$

$$Y(164) = -X(107) * \cos(X(166)) - X(108) * \sin(X(166)) + X(70) * \cos(X(165)) + X(72) * \sin(X(165))$$

$$Y(165) = X(71) - (X(108) * \cos(X(166)) - X(107) * \sin(X(166))) / \cos(X(164)) - (X(72) * \cos(X(165)) - X(70) * \sin(X(165))) * \tan(X(164))$$

$$Y(166) = -X(109) + (X(108) * \cos(X(166)) - X(107) * \sin(X(166))) * \tan(X(164)) + (X(72) * \cos(X(165)) - X(70) * \sin(X(165))) / \cos(X(164))$$

$$Y(167) = -X(107) * \cos(X(169)) - X(108) * \sin(X(169)) + X(78) * \cos(X(168)) + X(80) * \sin(X(168))$$

$$Y(168) = X(79) - (X(108) * \cos(X(169)) - X(107) * \sin(X(169))) / \cos(X(167)) - (X(80) * \cos(X(168)) - X(78) * \sin(X(168))) * \tan(X(167))$$

$$Y(169) = -X(109) + (X(108) * \cos(X(169)) - X(107) * \sin(X(169))) * \tan(X(167)) + (X(80) * \cos(X(168)) - X(78) * \sin(X(168))) / \cos(X(167))$$

Obtención del desplazamiento X(170) correspondiente a la fuente de flujo que acciona la dirección:

$$Y(170) = \text{Dir}$$







