El teorema espectral de operadores normales acotados

Iuliana Alexandra Loiszli
Trabajo de fin del grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Prólogo

El teorema espectral es de gran importancia en la teoría de operadores acotados sobre espacios de Hilbert. El propósito de este trabajo es proporcionar una descripción espectral completa de la estructura de los operadores normales.

Mucha de la información sobre un operador lineal T se obtiene estudiando el operador $T - \lambda I$, en donde I es el operador identidad y λ es un número complejo. Por otra parte, a veces, el inverso de un operador es más importante que el propio operador. En particular, la teoría espectral estudia el operador inverso $(T - \lambda I)^{-1}$, cuando éste existe.

En el caso finito dimensional, se tiene que dada una aplicación lineal $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, su comportamiento viene determinado por los valores $\{Te_1, \ldots, Te_n\}$, siendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathbb{C}^n$. En este caso la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ definida por

$$Te_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \quad i = 1, \ldots n \tag{1}$$

representa la aplicación T. Si λ es tal que $(T - \lambda I)^{-1}$ no existe, entonces λ recibe el nombre de valor propio de T. Estos valores propios son precisamente las raíces de la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$ (donde el operador T se identifica con su matriz asociada A). Se llama vector propio correspondiente al valor propio λ a todo vector no nulo $x \in \mathbb{C}^n$ que cumple que $Tx = \lambda x$.

El teorema tiene raíces en *Álgebra Lineal*, donde se establece que si H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ de dimensión n, un operador lineal $T : H \to H$ es diagonalizable si y sólo si existe una base del espacio H, formada por los vectores propios de T, de manera que la matriz de representación de T respecto a la dicha base sea diagonal. Los elementos diagonales $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ son los valores propios correspondientes. Además, entonces el espacio H se puede poner

$$H = \ker(T - \lambda_1 I) \oplus \ker(T - \lambda_2 I) \oplus \cdots \oplus \ker(T - \lambda_n I). \tag{2}$$

La suma anterior es la suma directa ortogonal. Esta descomposición permite dar una descripción de T en sus elementos básicos. Cada $x \in H$ se puede escribir de manera única como

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k, \text{ con } x_k \in \ker(T - \lambda_k I), \ 1 \leq k \leq n,$$

con lo cual

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Siendo P_k la proyección ortogonal de H sobre $\ker(T - \lambda_k I), \ 1 \leq k \leq n$, entonces resulta la descomposición espectral de T :

$$T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k. \tag{3}$$

En particular, la anterior descripción es aplicable a cualquier operador T normal, pues está demostrado que una matriz normal es diagonalizable.

La descomposición anterior del espacio H en términos del operador T, y la representación del mismo T en sus elementos básicos, dada en (2), son de utilidad teórica y practica. Es por tanto de mucho interés extender (1) y (2) para operadores normales en espacios de dimensión infinita. En este caso existe la dificultad de que en general un operador normal puede no tener valores propios. Sin embargo es posible generalizar (1) y (2) con una adecuada interpretación de la representación anterior. En vez de utilizar proyecciones ortogonales sobre los subespacios $\ker(T-\lambda I)$ se emplearán medidas espectrales; y en lugar de la suma se utilizará la integral.

A continuación se da una breve descripción de esta generalización. Se considera un operador autoadjunto T, ya que sus valores propios son números reales y por lo tanto se pueden ordenar de una manera natural: $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Se usan las proyecciones P_k de la fórmula (3) para definir otras nuevas:

$$\begin{aligned}
&E_{\lambda_0} = 0,\\
&E_{\lambda_1} = P_1,\\
&E_{\lambda_2} = P_1 + P_2,\\
&\ \ldots\\
&E_{\lambda_n} = P_1 + P_2 + \cdots + P_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (3) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$T = \lambda_1(E_{\lambda_1} - E_{\lambda_0}) + \lambda_2(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) + \cdots + \lambda_n(E_{\lambda_n} - E_{\lambda_{n-1}}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}).$$

Denotando $E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$ por ΔE_{λ_k} se tiene que

$$T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Delta E_{\lambda_k},$$

lo cual sugiere una representación integral de la forma

$$T = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda.$$

Siguiendo esta idea, la descomposición espectral del operador T puede extenderse también en el contexto de los espacios de dimensión infinita. Un resultado semejante se obtendrá para operadores normales.

El contenido de este trabajo se divide en tres partes:

En el primer capítulo (*Álgebras de Banach*) el objetivo es dar definiciones, propiedades y teoremas clásicos de la teoría de Gelfand de las álgebras de Banach conmutativas que son necesarios para la teoría espectral que se presenta después.

El segundo capítulo está dedicado a la *teoría espectral de operadores normales acotados* que mediante el cálculo funcional relacionado con la teoría de las C^*-álgebras presentada en el primer capítulo, nos llevará a varios enfoques del teorema espectral. Se discutirán algunas propiedades de los operadores normales acotados, incluyendo la representación espectral de los mismos.

El último capítulo, empieza con algunas propiedades de los operadores normales que son consecuencias inmediatas del teorema espectral. Después se presentan algunas aplicaciones para operadores normales compactos, como por ejemplo, la alternativa de Fredholm para la resolución de ecuaciones.

Summary

The spectral theorem is of great importance in the theory of bounded operators on a infinite dimensional complex Hilbert space. The purpose of this paper is to provide a complete description of the structure of normal operators, which is very useful in applications.

The content of this paper is divided into three parts:

In the first chapter the spectral theory for Banach algebras is outlined, including the Gelfand-Naimark theorem for commutative C^*-algebras.

The second chapter deals with continous functional calculus, which is relevant in the theory of C^*-algebras presented in first chapter. Resolutions of the identity or spectral measures are introduced; and finally the spectral theorem for bounded normal operators on a Hilbert space is given. Some important applicactions are showed in the third chapter.

CONTENTS

1. Banach Algebras

1.1. Preliminaries

A **Banach algebra** is a Banach space A over the complex field $\mathbb{C}$ which posesses an associative, distributive multiplication, satisfying the following properties for all $x,\ y \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}:$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad y \quad \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

If A contains a unit element e such that $xe = ex = x$, then it is asumed that $\|e\| = 1$. It is said that A is commutative if $xy = yx$, $\forall x, y \in A$.

There are two classes of Banach algebra which are important to mention. One is the algebra $C(K)$ of all complex continuous functions on a nonempty compact Hausdorff space K, with pointwise addition and multiplication, and the supremum norm. The other is the space $B(X)$ of all bounded linear operators on X, with the usual operator norm and multiplication defined as composition. The latter is not commutative.

An element $x \in A$ is said to be **invertible** if there exists an element $y \in A$ such that

$$xy = yx = e,$$

where e is the unit element of A. In this case, the unique element y is called the inverse of x and is denoted by x^{-1}. Let A^{-1} be the set of all invertible elements of A; it is clear that A^{-1} is a group.

Theorem. *If A is a Banach algebra and $x \in A$ with $\|x\| < 1$, then*

a) $e - x \in A^{-1}$,

b) $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leq \dfrac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$.

Note that this theorem implies that A^{-1} is an open subset of A.

Let A be a Banach algebra. The **spectrum** of $x \in A$ is defined as the set

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ is not invertible } \}.$$

The complement of $\sigma(x)$ is called the **resolvent set** of x and the **spectral radius** of x is the number

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Theorem. *If A is a Banach algebra and $x \in A$, then $\sigma(x)$ is a nonempty compact subset of $\mathbb{C}$.*

Note that, $\rho(x) \leq \|x\|$ for all $x \in A$. In fact,

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} (\|x^n\|)^{1/n} = \inf_{n\geq 1} (\|x^n\|)^{1/n}.$$

The following theorem will be important in Gelfand theory.

Theorem (Gelfand-Mazur). *If A is a Banach algebra such that $\forall x \in A$, $x \neq 0$, $\exists\, x^{-1} \in A$, then A is isometrically isomorphic to the algebra of complex numbers.*

1.2. Gelfand representation

First let introduce some definitions.

If A is a complex algebra, then a **character** of A is a linear functional φ on A, which is not identically 0 and

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y \in A.$$

Let Φ_A be the set of all characters of A. Obviously each character of a Banach algebra with unit e satisfies $\varphi(e) = 1$.

If A a commutative complex algebra with a unit, then a subset J of A is called an **ideal** if $xy \in J$ whenever $x \in A,\ y \in J$. An ideal is **proper** if $J \neq A$, and a proper ideal is **maximal** if is not contained in another proper ideal of A.

Note that every proper ideal J of A is contained in a maximal ideal of A. If J is an ideal then its closure $\overline{J}$ is also an ideal. Therefore every maximal ideal of A is closed.

Let A be a commutative Banach algebra. From the above definitions one has:

a) $x \in A^{-1} \Leftrightarrow x \notin J$, for all J proper ideal of A.

b) $x \in A$ is invertible $\Leftrightarrow \varphi(x) \neq 0,\ \forall \varphi \in \Phi_A$.

c) $\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \Phi_A\},\ \forall x \in A$.

d) If $\varphi \in \Phi_A$, then $\ker(\varphi)$ is a maximal ideal.

If M is a maximal ideal of A, then A/M is a Banach algebra with multiplication defined by

$$(x+M)(y+M) = xy+M;$$

and the quotient map $\varphi_M : A \to A/M$ given by $\varphi_M(x) = x+M$ is a homomorphism. The unit element of A/M is $e+M$ and $\|\varphi_M(e)\| = 1$, with e the unit of A.

The quotient map φ_M, defined as before is a character of A, which proves that for any $\varphi_M(x) \neq 0$ exists its inverse in A/M. By the Gelfand-Mazur theorem, there is an isometrically isomorphism h of A/M to $\mathbb{C}$.

Put $\varphi = h \circ \varphi_M$. Then φ is a character of A ($\varphi \in \Phi_A$), with $\varphi(e) = 1$ and $M = \ker(\varphi)$. This assertion means that every maximal ideal of A is the kernel of some $\varphi \in \Phi_A$.

The **spectrum** of A, $SpecA$, is defined as the set of maximal ideals of A.

Now using property d), it is possible to identify all maximal ideales of A with the set of characters of A, $SpecA \equiv \Phi_A$.

Let A be a commutative Banach algebra. For each $x \in A$, the **Gelfand transform** of x is the function

$$\widehat{x} : SpecA \to \mathbb{C}$$

defined by

$$\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x), \quad \varphi \in SpecA.$$

Let $\widehat{A}$ be the set of all $\widehat{x}$, for $x \in A$. The Gelfand topology of $SpecA$ is the smallest topology that makes every $\widehat{x}$ continuous. Then $\widehat{A} \subset C(SpecA)$.

The term **Gelfand transformation** is applied to the homomorphism of A into $SpecA$ given by

$$\begin{aligned} G : A &\to \widehat{A} \subseteq C(SpecA) \\ x &\to \widehat{x} \quad : \quad SpecA \to \mathbb{C} \end{aligned}$$

An **involution** on an algebra A is an application $* : A \to A$, satisfying the following properties for all $x, y \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}$:

i) $(x+y)^* = x^* + y^*$,

ii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$,

iii) $(xy)^* = y^*x^*$,

iv) $x^{**} = x$.

If $x^* = x$, x is said to be **hermitian,** or **self-adjoint.** And $x \in A$ is said to be **normal** if $xx^* = x^*x$.
A Banach algebra A with an involution that satisfies $\|xx^*\| = \|x\|^2$ for all $x \in A$ is called a C^***-algebra**.

The fundamental result of the theory of C^*-algebras and the key to the proof of the spectral theorem that will be given in the next chapter is as follows:

Theorem (Gelfand-Naimark). *If A is a commutative C^*-algebra with a unit and $\Delta := SpecA$ is its spectrum of maximal ideals, then the Gelfand transform $G : A \to C(\Delta)$ is an isometric isomorphism of A such that*

$$\widehat{(x^*)} = \overline{\widehat{x}}, \quad \forall x \in A,$$

or, equivalently, $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$ for all $\varphi \in \Delta$ and $x \in A$.
Therefore, x is hermitian $\Leftrightarrow \widehat{x}$ is real.

2. Spectral theory of bounded normal operators

2.1. Continuous functional calculus for normal operators

In order to fix the notation that will be used, it is convenient to recall the definition of a *Hilbert space*, denoted by H with $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the scalar product. The scalar product leads to a norm $\| \cdot \|$, which is defined as $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$. Every Hilbert space is also a Banach space.

Throughout this paper, will stand for $B(H)$ the Banach algebra of bounded linear operators T on a Hilbert space H with the norm

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \le 1\}.$$

If $T \in B(H)$, then there exists a unique operator $T^* \in B(H)$ for which

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

T^* is called the **adjoint** of T.
An operator $T \in B(H)$ is said to be **normal** if $TT^* = T^*T$, and is **hermitian** or **self-adjoint** if $T = T^*$.

Then:

a) T is normal if and only if $\|Tx\| = \|T^*x\|$, $\forall x \in H$.

b) If T is normal and $Tx = \lambda x$ for some $x \in H$ and $\lambda \in \mathbb{C}$, then $T^*x = \overline{\lambda}x$.

c) If T is normal, then exists $\lambda \in \sigma(T)$ such that $|\lambda| = \|T\|$.

Theorem (Continuous functional calculus). *Let $T \in B(H)$ be a normal operator. There exists a unique *-homomorphism*

$$\Phi_T : C(\sigma(T)) \to B(H)$$

such that $\Phi_T(u) = I$ y $\Phi_T(v) = T$, with $u(\lambda) = 1$, $v(\lambda) = \lambda$ for all $\lambda \in \sigma(T)$. Furthermore, Φ_T is an isometry and its range is the closed subalgebra generated by I, T and T^*, with I the identity on H.

With the notation of the previous theorem, will denote $f(T) = \Phi_T(f)$ for all $f \in C(\sigma(T))$.

2.2. Spectral measure

As observe in the section 2.1, $B(H)$, is a C^*-algebra, and the theory developed on C^*-algebras may be applied to it to obtain representation theorems of normal operators.

Let X be a compact Hausdorff space and $\mathscr{B}(X)$ be a σ-algebra of Borel subset of X. Suppose H is a Hilbert space. Then a **resolution of the identity** or **spectral measure** is a mapping

$$E : \mathscr{B}(X) \to B(H)$$

such that

i) $E(\emptyset) = 0,\ E(X) = I$.

ii) Each $E(\omega)$ is a self-adjoint projection, i.e. $E(\omega)^2 = E(\omega) = E(\omega)^*,\ \forall \omega \in \mathscr{B}(X)$.

iii) If $\omega',\ \omega'' \in \mathscr{B}(X)$, then $E(\omega' \cap \omega'') = E(\omega')E(\omega'')$.

iv) If $\omega',\ \omega'' \in \mathscr{B}(X)$ with $\omega' \cap \omega'' = \emptyset$, then$E(\omega' \cup \omega'') = E(\omega') + E(\omega'')$.

v) For every $x,\ y \in H$, the function $E_{x,y} : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{C}$ defined by

$$E_{x,y}(\omega) = \langle E(\omega)x, y \rangle$$

is a regular complex measure on $\mathscr{B}(X)$.

Once established the continuous functional calculus for a normal operator T, for fixed $x, y \in H$ one defines a linear functional

$$\Lambda_{x,y} : C(\sigma(T)) \to \mathbb{C}$$

by $\Lambda_{x,y}(f) = \langle \Phi_T(f)x, y \rangle$; and the Riesz theorem provides a Borel measure $\mu_{x,y}$ representing this functional,

$$\langle E(\omega)x, y \rangle = \mu_{x,y}(\omega).$$

This assertion is the key to the proof of the next theorem:

Theorem. *Let A be a closed subalgebra of $\mathscr{B}(H)$ which contains the identity operator I, and SpecA the maximal ideal space of A.*

a) There exists a unique spectral measure E on the Borel subsets of Δ that satisfies

$$T = \int_\Delta \widehat{T}\, \mathrm{d}E$$

for every $T \in A$, where the integral is interpreted as

$$\langle Tx, y \rangle = \int_\Delta \widehat{T}\, \mathrm{d}E_{x,y}, \quad x, y \in H.$$

In other words, it can be defined $\Phi : \mathscr{B}(\Delta) \to B(H)$ such that

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int_\Delta f \mathrm{d}E_{x,y}$$

for every bounded Borel function f on Δ.

b) If $S \in B(H)$, then $ST = TS$ for all $T \in B(H)$ if and only if $SE(\omega) = E(\omega)S, \forall\, \omega \subset \Delta$.

2.3. The spectral theorem

As a consequence of the theorem of the previous section, we obtain the spectral theorem for bounded normal operators:

Theorem. *If $T \in B(H)$ is a normal operator, then there exists a unique spectral measure E on the Borel subset of $\sigma(T)$ which satisfies:*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda).$$

The spectral measure E that gives this theorem describes the *spectral decomposition of T.*

Clearly, the proof of the theorem is based on the previous one particularizing to a single operator.

If E is the spectral decomposition of a normal operator $T \in B(H)$ and f is a bounded Borel functions on $\sigma(T)$, since $\Phi(f) = f(T)$, will have

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \, \mathrm{d}E(\lambda).$$

In particular the spectral decomposition of the identity operator I is

$$I = \int_{\sigma(T)} \mathrm{d}E(\lambda).$$

3. Applications

3.1. Basis properties

Let H be a Hilbert space, an operator $T \in B(H)$ and $\sigma(T)$ its spectrum. A number λ is an **eigenvalue** of T if $\ker(T - \lambda I) \neq 0$ and its corresponding **eigenspace** is $\ker(T - \lambda I)$.

The **point spectrum** $\sigma_p(T)$ of T is the set of all eigenvalues of T.

If $\lambda \in \sigma_p(T)$ and $Tx = \lambda x$ with $x \neq 0$, then x is an **eigenvector** of T corresponding to the eigenvalue λ.

Theorem. *A normal operator $T \in B(H)$ is self-adjoint if and only if $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Theorem. *If $T \in B(H)$, then*

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0 \; \forall x \in H \Leftrightarrow T = T^* \text{ and } \sigma(T) \subset [0, \infty).$$

If $T \in B(H)$ satisfies that $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, we call T a **positive** operator.

3.2. Eigenvalues of normal operators

Theorem. *If $T \in B(H)$ is a normal operator and E is its spectral decomposition, then the following assertions are true:*

a) If $f \in C(\sigma(T))$, then $\ker(f(T)) = \mathrm{Im}(E(f^{-1}(0)))$.

b) For every $\lambda \in \sigma(T)$, $\ker(T - \lambda I) = \mathrm{Im}(E(\{\lambda\}))$.

c) Suppose $\lambda \in \sigma(T)$. Then λ is an eigenvaue of T if and only if $E(\{\lambda\}) \neq 0$.

d) If the spectrum of T is a countable set, then every $x \in H$ has a unique expansion of the form

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

with $Tx_i = \lambda_i x_i$. Also, $x_i \perp x_j,\ i \neq j$.

Next, will describe the spectrum of normal compact operators in Hilbert space. But first it is necessary to define the concept of compact operator.

A linear operator T between two Banach spaces X and Y, is said to be **compact** if $\overline{T(B_X(0,1))}$ is compact in Y, where $B_X(0,1)$ is the open unit ball in X.

A normal operator $T \in B(H)$ is compact if and only if all points of $\sigma(T)$, except possibly 0, are isolated and their corresponding eigenspaces are finite dimensional.

In the next section, **3.3. Applications to equations with compact normal operators**, we want to find the solution to the functional equation

$$x = \lambda Tx + y,$$

where $T \in B(H)$ is a compact normal operator, $\lambda \in \mathbb{C}$ and $y \in H$; specifying the *Fredlom alternative: Either, for each $y \in H$, the equation $x = \lambda Tx + y$ has a unique solution, or the homogeneous equation $x = \lambda Tx$ has a non-zero solution, in which case the complete equation has a solution if and only if y is ortogonal to each solutions of the homogeneous equation.*

The latter section, **3.4. Fredholm integral equations** discusses the Fredholm equations of the second kind

$$f(s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\, dt + g(s)$$

with $K,\ g$ known functions and f a function to determine. As in the previous section, the Fredholm alternative is specified.

Índice general

Capítulo 1

Álgebras de Banach

En este capítulo se exponen algunos resultados elementales sobre la teoría de Gelfand de las álgebras de Banach que hay que tener en cuenta para el posterior desarrollo del trabajo.

1.1. Definición y primeras propiedades

Se dan por sentado los hechos básicos sobre *espacios de Banach*, que por definición son espacios normados y completos; es decir, espacios normados tales que toda sucesión de Cauchy en ellos es convergente.

Definición 1.1.1. *Un espacio A se llama* ***álgebra de Banach*** *si A es un espacio de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *con una multiplicación asociativa y distributiva tal que* $\forall x,y \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}$ *se cumple:*

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad \text{y} \quad \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Se dirá que A posee unidad si existe $e \in A\,(unidad)$ *tal que* $xe = ex = x, \forall x \in A$ *con* $\|e\| = 1$.
Se dirá que A es conmutativa si $xy = yx,\ \forall x,y \in A$.

Ejemplos

- Un ejemplo trivial es $\mathbb{C}$ con el producto usual de números complejos, con elemento unidad $1+i0 = 1$.
- El espacio de las funciones continuas con valores complejos sobre un espacio topológico compacto K con la norma del supremo, denotado por *C(K)*, es un ejemplo de álgebra de Banach conmutativa con la función constante 1 como unidad del espacio. En este caso las operaciones son la de suma y producto punto a punto de las funciones.
- Otro ejemplo de álgebra de Banach, no conmutativa, es el espacio de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Banach X, que se denotará por *B(X)*. El producto en este espacio se define como la composición de operadores, y la unidad es el operador identidad I.
- $L^1(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty\}$ con el producto llamado convolución y denotado por $*$. Se define de la siguiente manera:

  $$(f*g)(s) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s-t)g(t)\,dt \qquad \big(f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)\big).$$

  $L^1(\mathbb{R}^n)$ es conmutativa pero no posee unidad.

Cuando X es un espacio de Hilbert $X = H$ existe una relación estrecha entre el espacio $C(K)$ y $B(H)$, que se manifiesta en la parte de la teoría de álgebras de Banach que se dedica a la teoría espectral.

Definición 1.1.2. *Sea A álgebra de Banach con unidad $e \in A$. Se dice que un elemento $x \in A$ es* ***inversible*** *si existe un elemento $y \in A$ tal que*

$$yx = xy = e.$$

En este caso, el inverso y de x es único y se denota por x^{-1}.
El conjunto de los elementos inversibles de A se denota como A^{-1}. Claramente, A^{-1} es un grupo.

Proposición 1.1.3. *Sea A álgebra de Banach y $x \in A$ con $\|x\| < 1$. Entonces*

a) $e - x \in A^{-1}$,

b) $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leq \dfrac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$.

Demostración. Sea la sucesión $s_n = e + x + x^2 + \cdots + x^n$.
Se cumple que

$$\|s_{n+1} - s_n\| = \|x^{n+1}\| \leq \|x\|^{n+1}$$

y como $\|x\| < 1$ se tiene que $\|s_{n+1} - s_n\| \to 0$.
Sea ahora $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\|s_m - s_n\| = \|x^{n+1} + \cdots + x^m\| &\leq \|x\|^{n+1} + \cdots + \|x\|^m \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \|x\|^k - \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x\|^k \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

pues $\|x\| < 1$ y por lo tanto la sucesión es de Cauchy.
Por ser A completo se deduce que existe s $\in A$ tal que $s_n \to s$.
Además, como $x^n \to 0$ y

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)s_n,$$

se deduce, haciendo $n \to \infty$, que $s(e-x) = e = (e-x)s$; es decir, s es el inverso de $e - x$.

Para el segundo apartado se utiliza lo anterior y así se tiene que

$$\|s - e - x\| = \|e + x + x^2 + \cdots - e - x\| = \|x^2 + x^3 + \cdots\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n.$$

La hipótesis $\|x\| < 1$ implica que la última serie es convergente con suma

$$\sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}.$$

$\square$

Teorema 1.1.4. *Si A es un álgebra de Banach entonces*

- *El grupo A^{-1} de los elementos inversibles de A, es un subconjunto abierto de A.*
- *La aplicación $x \in A^{-1} \mapsto x^{-1} \in A^{-1}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Para demostrar la primera afirmación se prueba que: dado $x \in A^{-1}$, $h \in A$ con

$$\|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$$

se tiene que $x + h \in A^{-1}$.

En efecto, nótese que $x+h = x\left(e+x^{-1}h\right)$ y $\|x^{-1}h\| < \frac{1}{2}$, con lo cual, por la proposición anterior se tiene que $e+x^{-1}h \in A^{-1}$ y por lo tanto $x+h \in A^{-1}$.
Además, por el apartado $b)$ de la misma proposición, se cumple que

$$\| \left(e+x^{-1}h\right)^{-1} - e + x^{-1}h\| \leq \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1-\|x^{-1}h\|}.$$

Multiplicando ahora por $\|x^{-1}\|$ y sabiendo que $\|x^{-1}h\| < \frac{1}{2}$, se obtiene

$$\| \left(e+x^{-1}h\right)^{-1} x^{-1} - ex^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}h\|^2\|x^{-1}\|.$$

Es decir,

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2. \tag{1.1}$$

Para que la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ sea un homeomorfismo tiene que ser biyectiva y continua con la inversa continua.
De la formula (1.1) se deduce la continuidad de la aplicación, pues dados $x, x+h \in A^{-1}$ con

$$\|x+h-x\| = \|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$$

se cumple que

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2 + \|x^{-1}\|^2\|h\|.$$

Finalmente, ya que la aplicación coincide con su propia inversa se concluye que es un homeomorfismo de A^{-1} en A^{-1}. □

Definición 1.1.5. *Dada A álgebra de Banach y $x \in A$, se define como **espectro** de x al conjunto*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \ \text{no inversible en } A\}$$

*El complementario de $\sigma(x)$ se llama **conjunto resolvente** de x, es decir, el conjunto*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, (x-\lambda e)^{-1} \in A\}.$$

Al número

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

*se le llama **radio espectral** de x.*

Teorema 1.1.6. *Si A es álgebra de Banach con unidad y $x \in A$, entonces el espectro de x es un compacto no vacío del plano complejo.*

Demostración. Sea $|\lambda| > \|x\|$, lo que implica $|\lambda^{-1}|\|x\| < 1$ y así por la proposición anterior se tiene que $e - \lambda^{-1}x \in A^{-1}$, es decir $\lambda e - x \in A^{-1}$.
Luego $\lambda \notin \sigma(x)$, lo que implica que $\sigma(x) \subseteq \overline{B(0, \|x\|)}$ y asi $\sigma(x)$ es acotado.
Para probar que $\sigma(x)$ es cerrado se define la función

$$\begin{aligned} g :& \mathbb{C} \to A \\ & \lambda \mapsto \lambda e - x. \end{aligned}$$

Evidentemente g es continua y por tanto el conjunto resolvente, $\mathbb{C} \setminus \sigma(x) = g^{-1}(A^{-1})$, es un abierto ya que lo es A^{-1}, por el Teorema 1.1.4. Por consiguiente $\sigma(x)$ es cerrado y, al ser también acotado es compacto.

Se considera ahora la función $f : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to A^{-1}$ definida por la fórmula $f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$. Procediendo igual que en la demostración de la Proposición 1.1.3, con

$$s_n = e + \frac{x}{\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2} + \cdots + \frac{x^n}{\lambda^n} \quad \text{y} \quad |\lambda^{-1}| \|x\| < 1.$$

Se obtiene al hacer tender n a ∞, que el inveso de $e - \lambda^{-1}x$, es

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x^n.$$

Es decir, $(\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1}s$, con lo cual

$$\begin{aligned} f(\lambda) \quad &= (\lambda e - x)^{-1} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} x^n \\ &= \frac{1}{\lambda} e + \frac{1}{\lambda^2} x + \cdots + \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n + \cdots \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - \lambda^{-1} x}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

cuando $|\lambda| > \|x\|$. En particular, f es holomorfa (o analítica) con valores en A. Por tanto si φ es un funcional lineal continuo definido sobre A, se tiene que

$$\varphi(f(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} \varphi(x^n)$$

es holomorfa sobre el conjunto resolvente de x, que se anula en el infinito.

Si $\sigma(x)$ fuera vacío, entonces $\varphi(f(\lambda))$ sería entera y acotada (por anularse en ∞). Por el teorema de Liouville, $\varphi \circ f$ sería identicamente nula y luego por Hahn-Banach $f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$ también sería cero, lo cual es imposible. Entonces $\sigma(x)$ no es vacío, quedando así demostrado el teorema. $\square$

Corolario 1.1.7. *Sea A un álgebra de Banach con unidad y $x \in A$, entonces $\rho(x) \leq \|x\|$, $\forall x$. De hecho*

$$\rho(x) = \lim_{n \to \infty} (\|x^n\|)^{1/n} = \inf_{n \geq 1} (\|x^n\|)^{1/n}.$$

Demostración. Se ha visto en la demostración anterior que $\sigma(x) \subseteq \overline{B(0, \|x\|)}$. Por lo tanto, si $\lambda \in \sigma(x)$ se tiene que $|\lambda| \leq \|x\|$, es decir

$$\rho(x) \leq \|x\|, \ \forall x. \tag{1.3}$$

También en el curso de la demostración anterior se ha establecido que, si $|\lambda| > \|x\|$ entonces

$$\varphi(f(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} \varphi(x^n)$$

es analítica en la bola de centro 0 y radio $r > \|x\|$ y que se anula en el infinito, con la función f dada por la fórmula (1.2). Por la relación (1.3), se puede reemplazar la condición $r > \|x\|$ por $r > \rho(x)$.

Luego $\{\lambda^{-(n+1)} x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada para todo $|\lambda| > \rho(x)$. Sea entonces $M(\lambda) > 0$ tal que

$$\|\lambda^{-(n+1)} x^n\| < M(\lambda) \quad \text{con} \quad |\lambda| > \rho(x).$$

Se obtiene

$$\|x^n\| \leq |\lambda|^{n+1} M(\lambda).$$

Por lo tanto

$$\limsup_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda|, \quad |\lambda| > \rho(x).$$

Luego

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x). \tag{1.4}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \cdots + x^{n-1}),$$

Si $\lambda \in \sigma(x)$ implica que $\lambda^n e - x^n$ no es inversible, con lo cual $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Utilizando de nuevo la relación (1.3) se tiene que $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que

$$\rho(x) \leq \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n}.$$

Finalmente, reescribiendo la última relación y la (1.4), en la desigualdad

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x) \leq \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n},$$

se tiene igualdad, pues siempre se cumple que $\liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$. □

El teorema previo y el que viene a continuación son los resultados que generan la representación de Gelfand.

Teorema 1.1.8 (Gelfand-Mazur)**.** *Si A es álgebra de Banach tal que $\forall x \in A$, $x \neq 0$, $\exists\, x^{-1} \in A$, entonces A es isométricamente isomorfa al álgebra de los números complejos.*

Demostración. Sea $x \in A$. Por el Teorema 1.1.6, se tiene que el espectro de x es no vacío y así $\exists\, \lambda \in \sigma(x)$ tal que $\nexists\, (x-\lambda e)^{-1}$ en A. Luego, como $x - \lambda e \in A$ de la hipótesis se deduce que necesariamente $x - \lambda e = 0$, es decir $x = \lambda e$.

Así la aplicación que asocia a cada $x \in A$ su correspondiente $\lambda \in \mathbb{C}$ es un isomorfismo que cumple

$$|\lambda| = \|\lambda e\| = \|x\|, \ \forall x \in A.$$

□

1.2. Representación de Gelfand

La teoría de Gelfand sobre álgebras de Banach conmutativas depende de tres conceptos fundamentales: homomorfismos complejos, ideales maximales y espectros.

Definición 1.2.1. *Sea A álgebra compleja. Un funcional lineal complejo φ de A se llama* ***homomorfismo complejo*** *de A si para cada $x \in A$ y $y \in A$ se cumple*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Se llama ***carácter*** *de A a cualquier homorfismo complejo no idénticamente nulo.*

Evidentemente, todo carácter de un álgebra de Banach A cumple $\varphi(e) = 1$, con e elemento unidad, pues dado $y \in A$ tal que $\varphi(y) \neq 0$ se tiene que

$$\varphi(y) = \varphi(ye) = \varphi(y)\varphi(e).$$

Se denota por Φ_A al conjunto de caracteres de A.

Definición 1.2.2. *Sea A álgebra conmutativa con unidad. Un subespacio vectorial J de A se dice* ***ideal*** *si $xy \in J$ siempre que $x \in A$, $y \in J$. Un ideal J de A se dice* ***propio*** *si $J \neq A$ y es* ***maximal*** *si es propio y no está contenido en otro ideal de A.*

Observación. Todo ideal propio J de A está contenido en algún ideal maximal de A. Si J es un ideal entonces $\overline{J}$ (la clausura topológica de J) es un ideal de A.

Nótese que si $x \in A$ tal que $\|e - x\| < 1$ entonces $x \in A^{-1}$, pues si $\|e - x\| < 1$, implica por la relación (1.3), que 1 es elemento del conjunto resolvente de $e - x$ y por la Proposición 1.1.3,

$$x = e - (e - x) \in A^{-1}.$$

Por lo tanto, si J es un ideal propio de A, también lo es $\overline{J}$, ya que si $\overline{J} = A$ entonces existe $x \in J$ con $\|e - x\| < 1$, es decir $xx^{-1} = e \in J$ y así $J = A$.

En particular, si M es ideal maximal de A entonces $\overline{M}$ es un ideal propio de A, pero por ser M maximal, necesariamente $M = \overline{M}$, luego todo ideal maximal es cerrado.

De estas definiciones se deducen las siguientes propiedades:

Propiedades 1.2.3. *Sea A álgebra de Banach conmutativa con unidad y Φ_A el conjunto de caracteres de A.*

a) $x \in A^{-1} \Leftrightarrow x \notin J$, *para todo J ideal propio de A.*

b) $x \in A$ *es inversible* $\Leftrightarrow \varphi(x) \neq 0$, $\forall \varphi \in \Phi_A$.

c) $\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \Phi_A\}$, $\forall x \in A$.

d) Si $\varphi \in \Phi_A$, *entonces* $\ker(\varphi)$ *es ideal maximal.*

Demostración. El segundo apartado es consecuencia del hecho de que dado φ, carácter de A, y $x \in A^{-1}$ se cumple

$$1 = \varphi(e) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}).$$

Por tanto $\varphi(x) \neq 0$ y entonces si $\lambda \in \sigma(x)$ implica que $x - \lambda e$ es no inversible y por lo anterior se tiene que $\varphi(x)$ es nulo, es decir $\varphi(x) = \lambda$. Esto prueba el tercer apartado.

Para probar la propiedad *d)*, consideramos $\varphi \in \Phi_A$. Por *b)* se deduce que si $x \in \varphi^{-1}(0)$ se tiene que x es inversible y luego por *a)*, $\varphi^{-1}(0)$ es un ideal propio de A. Hay que probar que $\varphi^{-1}(0)$ es maximal. Suponiendo que no lo sea, se tiene que $\varphi^{-1}(0) \subseteq M$, M ideal maximal de A. Si existe $x \in M$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, entonces de nuevo por el apartado b) se tiene que existe $x^{-1} \in A$, con lo cual $x^{-1}x = e \in M$ y así $M = A$.

□

Si M es un ideal maximal de A se tiene que M es cerrado y así A/M, cuyos elementos son de la forma $x + M$ con $x \in A$, es un espacio de Banach respecto a la norma

$$\|x + M\| = \inf_{y \in M} \|x + y\|. \tag{1.5}$$

Sea $x \in A$ y la aplicación cociente $\varphi_M : A \to A/M$ dada por

$$\varphi_M(x) = x + M.$$

Si $x,\ y \in A$ son tales que $\varphi_M(x) = \varphi_M(x')$ y $\varphi_M(y) = \varphi_M(y')$, es decir $x - x' \in M$ y $y - y' \in M$ entonces

$$x'y' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y) \in M.$$

Por lo tanto $\varphi_M(x'y') = \varphi_M(xy)$. Así se define el producto en A/M como

$$(x + M)(y + M) = xy + M$$

o equivalentemente $\varphi_M(x)\varphi_M(y) = \varphi_M(xy)$. Luego φ_M es un homomorfismo y es continuo, pues $\|\varphi_M(x)\| \leq \|x\|$, $\forall x \in A$ por definición de la norma (1.5).

La misma fórmula, (1.5), implica que para $x \in A$ se cumple que

$$\|x+y\| \leq \|\varphi_M(x)\|$$

para algún $y \in M$. Nótese que para $x, x' \in A$ y $y, y' \in M$ se tiene

$$(x+y)(x'+y') = xx' + M,$$

con lo cual

$$\|\varphi_M(xx')\| \leq \|(x+y)(x'+y')\| \leq \|x+y\|\|x'+y'\|.$$

Es decir,

$$\|\varphi_M(x)\varphi_M(x')\| \leq \|\varphi_M(x)\|\|\varphi_M(x')\|$$

siendo entonces A/M un álgebra de Banach.

Si e es el elemento unidad de A, se cumple que $\varphi_M(e) \neq 0$, y la última relación implica que $\|\varphi_M(e)\| \geq 1 = \|e\|$. Por otro lado, por la continuidad de $\varphi_M(x)$ se tiene que $\|\varphi_M(e)\| \leq \|e\| = 1$. En consecuencia $e+M$ es la identidad en A/M con $\|\varphi_M(e)\| = 1$.

Teorema 1.2.4. *Si A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad y M un ideal maximal de A entonces A/M es isométricamento isomorfo a* $\mathbb{C}$.

Demostración. La aplicación cociente definida como antes, $\varphi_M : A \to A/M$ resulta que es un carácter de A, lo cual prueba que para cualquier $\varphi_M(x) \neq 0$ existe su inverso en A/M. Por el teorema de Gelfand-Mazur, A/M es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$. □

Definición 1.2.5. *Al conjunto de los ideales maximales de A, que se denota por SpecA, se le llama* ***espectro de*** A.

Teorema 1.2.6. *Sea A álgebra de Banach conmutativa con unidad y* Φ_A *el conjunto de caracteres de A. Entonces,*

a) *Todo ideal maximal de A es el núcleo de algún* $\varphi \in \Phi_A$.

b) $\|\varphi\| = 1$ *para todo* $\varphi \in \Phi_A$.

Demostración. *a)* Sea M un ideal maximal de A. Así M es cerrado y A/M es un álgebra de Banach. Por el Teorema 1.2.4, A/M es isomorfo a $\mathbb{C}$. Sea φ_M la aplicación cociente

$$\varphi_M : A \to A/M \cong \mathbb{C}.$$

Claramente, φ_M es un carácter y $M = \ker(\varphi_M)$.

Ahora poniendo $\varphi = h \circ \varphi_M$, se tiene que $\varphi \in \Phi_A$, con $\varphi(e) = 1$ y que $M = \ker(\varphi)$.

b) Debido a que $\varphi(e) = 1$ se tiene que $\|\varphi\| \geq 1$. Ahora, por definición

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|<1} |\varphi(x)|,$$

y por tanto si $\|\varphi\| > 1$, existe $x \in A$ tal que $\|x\| < 1$ y $\varphi(x) = 1$. Por la Proposición 1.1.3, $e - x$ es inversible en A. Luego,

$$\varphi(e) = \varphi\left((1-x)(1-x)^{-1}\right) = (\varphi(e) - \varphi(x))\,\varphi\left((1-x)^{-1}\right) = 0,$$

lo cual es contradicción con $\varphi(e) = 1$. Así $\|\varphi\| = 1$. □

En conclusión, este teorema y el apartado *d)* de la Propiedad 1.2.3, afirman que:

M es un ideal maximal en A si y sólo si M es el núcleo de φ para algún $\varphi \in \Phi_A$.

Esto significa que todos ideales maximales de A se pueden identificar con los caracteres de A, $SpecA \equiv \Phi_A$.

Este último hecho y el que $\|\varphi\| = 1$, permiten identificar a $SpecA$ con un subconjunto de la esfera unitaria Ω_A del dual A' de A. Se define la *topología de Gelfand* en $SpecA$ como la topología débil inducida por la del dual A' de A, $\sigma(A',A)$. Nótese que la topología débil en A inducida por el dual A', es la mínima topología que hace continuos a los elementos de Φ_A.
Por tanto $SpecA$ es un compacto, ya que Ω_A es un compacto, por el teorema de Alaoglu-Bourbaki (véase [B, p.193]).

Definición 1.2.7. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con $SpecA$ su espectro de ideales maximales. Se define la* ***transformada de Gelfand*** *de $x \in A$ como la función*

$$\widehat{x} : SpecA \to \mathbb{C}$$

definida por

$$\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

para todo $x \in A$ y $\varphi \in SpecA$.
Sea $\widehat{A}$ el conjunto de todas las funciones $\widehat{x}$, para $x \in A$. Con la topología de Gelfand en $SpecA$ inducida por $\widehat{A}$, se tiene que $\widehat{x}$ es continua.

La ***transformación de Gelfand*** *es el homomorfismo de A en el álgebra de las funciones continuas sobre $SpecA$ dado por*

$$\begin{aligned} G : A &\to \widehat{A} \subseteq C(SpecA) \\ x &\to \widehat{x} \quad : \quad SpecA \to \mathbb{C} \end{aligned}$$

Observación. La transformada de Gelfand satisface la relación

$$\|\widehat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|, \forall x \in A, \tag{1.6}$$

que es consecuencia del Corolario 1.1.7 y de la Propiedad 1.2.3, *c)*, pues

$$\|\widehat{x}\|_\infty = \sup_{\varphi \in SpecA} |\widehat{x}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in SpecA} |\varphi(x)| = \rho(x) \leq \|x\|.$$

En la siguiente definición se introduce una versión abstracta de la conjugación compleja. Entre las álgebras de Banach, las que poseen involución son muy importantes en teoría de operadores, ya que los operadores en espacios de Hilbert tienen adjunto, y éste juega un papel importante en la descomposión espectral.

Definición 1.2.8. *Una* ***involución*** *o* ***conjugación*** *en un álgebra A es una aplicación $* : A \to A$ que $\forall x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, verifica:*

i) $(x+y)^* = x^* + y^*$,

ii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$,

iii) $(xy)^* = y^* x^*$,

iv) $x^{**} = x$.

*Si se cumple que $x^* = x$ entonces se dice que x es **hermitiano** o **autoadjunto**.*
*Se dice que $x \in A$ es **normal** si $xx^* = x^*x$.*
*Toda álgebra de Banach dotada de una involución que satisface $\|xx^*\| = \|x\|^2$ para cada $x \in A$, se llama **C^*-álgebra** y si tiene unidad e se debe cumplir que $e^* = e$.*

Definición 1.2.9. *Si A es un álgebra con una involución, decimos que un subconjunto $S \subset A$ es **normal** cuando*

i) $xy = yx,\ \forall x, y \in A$

ii) $x^* \in A, \forall x \in A$.

Ejemplos

- $\mathbb{C}$ con la norma dada por el valor absoluto y con involución: $z^* = \bar{z}$ para $z \in \mathbb{C}$, es una C^*-álgebra conmutativa con unidad.
- De nuevo, el espacio $C(K)$ definido al inicio de la sección, con la involución $f^*(x) = \overline{f(x)}$ para $f \in C(K)$ y $x \in K$.
- Si A es una C^*-álgebra, toda subálgebra con involución y cerrada en A es una C^*-álgebra.

El resultado básico fundamental de la teoría de C^*-álgebras es el siguiente:

Teorema 1.2.10 (Gelfand-Naimark)**.** *Si A es una C^*-álgebra conmutativa con unidad y $\Delta := SpecA$ es su espectro de ideales maximales, entonces la transformación de Gelfand $G : A \to C(\Delta)$ es un isomorfismo isométrico tal que*

$$\widehat{(x^*)} = \overline{\widehat{x}}, \quad \forall x \in A,$$

o equivalentemente $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$ para cada $\varphi \in \Delta$ y $x \in A$.
Por tanto, x es hermitiano $\Leftrightarrow \widehat{x}$ es real.

Nótese que en particular el teorema muestra que la transformada de Gelfand convierte la involución en conjugación compleja.

Demostración. Sea $u \in A$ tal que $u = u^*$ y $\varphi \in \Delta$. Se quiere ver $\varphi(u)$ es real. Para esto se considera $z = u + ite$ con $t \in \mathbb{R}$ y e el elemento unidad de A.
Si $\varphi(u) = \alpha + i\beta$ con α y β reales, entonces

$$\varphi(z) = \alpha + i(\beta + t) \quad \text{y} \quad zz^* = u^2 + t^2 e,$$

pues

$$zz^* = (u + ite)(u^* - ite) = uu^* - itu + itu^* + t^2 e.$$

Así

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\varphi(z)|^2 \leq \|z\|^2 = \|zz^*\| \leq \|u\|^2 + t^2,$$

es decir,

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|u\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

lo que implica que necesariamente $\beta = 0$.
Si $x \in A$, entonces $x = u + iv$ con $u = u^*,\ v = v^*$; a saber,

$$u = \frac{x + x^*}{2} \quad \text{y} \quad v = \frac{x - x^*}{2i}$$

nótese que $x^* = u - iv$. Por tanto, como $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ son números reales,

$$\varphi(x^*) = \varphi(u) - i\varphi(v) = \overline{\varphi(u) + i\varphi(v)} = \overline{\varphi(x)}.$$

Considerando ahora $y = xx^*$ con $x \in A$ se tiene que $y = y^*$. Como A es C^*-álgebra implica que $\|y^2\| = \|y\|^2$. Por inducción se obtiene que $\|y^m\| = \|y\|^m$, $\forall m = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.
Entonces, por la fórmula (1.6) y Corolario 1.1.7, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\widehat{y}\|_\infty = \rho(y) &= \lim_{n\to\infty} \left(\|y^{2^n}\|\right)^{2^{-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\|y\|^{2^n}\right)^{2^{-n}} = \|y\|.\end{aligned}$$

Pero

$$\widehat{y} = (xx^*)\widehat{} = (x^*)\widehat{}\,\widehat{x} = \overline{\widehat{x}}\widehat{x} = |\widehat{x}|^2,$$

es decir, se cumple la igualdad en normas

$$\|\widehat{x}\|_\infty^2 = \|\widehat{y}\|_\infty = \|y\| = \|xx^*\| = \|x\|^2, \quad \forall x \in A,$$

lo cual significa que la transformación de Gelfand es isométrica.

Luego, por ser A completo y G una isometría resulta que $\widehat{A}$ es cerrado en $C(\Delta.)$ En particular, la fórmula del enunciado muestra que si $\widehat{x} \in \widehat{A}$ entonces el conjugado complejo $\overline{\widehat{x}}$ de $\widehat{x}$ también está en $\widehat{A}$.

El teorema de Stone-Weierstrass afirma que dada A una subálgeba cerrada de $C(K)$, K un espacio compacto que contiene la unidad e, separa puntos de K (es decir, si $x, y \in K$ con $x \neq y$, $\exists f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$) y que si $f \in A$ también $\overline{f} \in A$, se tiene que A es denso en $C(K)$.

Nótese que $\widehat{A}$ cumple las hipótesis del mismo y por lo tanto $\widehat{A}$ es denso en $C(\Delta)$, luego $\widehat{A}$ debe coincidir con $C(\Delta)$. □

Un caso particular del teorema anterior es el siguiente corolario:

Corolario 1.2.11. *Si A es una C^*-álgebra conmutativa con unidad generada por un elemento $x \in A$; es decir, tal que los polinomios en x y x^* son densos en A, entonces $\psi : C(\sigma(x)) \to A$ dado por*

$$(\psi f)\widehat{} = f \circ \widehat{x}$$

es un isomorfismo isométrico tal que

$$\psi\overline{f} = (\psi f)^*$$

para todo $f \in C(\sigma(x))$. Además, si $f(\lambda) = \lambda$ entonces $\psi f = x$.

Demostración. Sea $\Delta = SpecA$ el espectro de A y $\varphi \in \Delta$. Se tiene que $\widehat{x} : \Delta \to \mathbb{C}$ es una aplicación continua tal que $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, donde $\widehat{x}$ es la transformada de Gelfand en Δ. Por la Propiedad 1.2.3, *c)* se tiene que $\varphi(x) \in \sigma(x)$. A continuación se prueba que la aplicación

$$\varphi \in \Delta \mapsto \varphi(x) \in \sigma(x)$$

es un homeomorfismo entre compactos.

Sea $\varphi_1, \varphi_2 \in \Delta$ de manera que

$$\widehat{x}(\varphi_1) = \widehat{x}(\varphi_2),$$

es decir, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

El teorema de Gelfand-Naimark implica que $\varphi_1(x^*) = \varphi_2(x^*)$. Sea P un polinomio en dos variables. Ya que φ_1 y φ_2 son homomorfismos, resulta que

$$\varphi_1(P(x, x^*)) = \varphi_2(P(x, x^*)).$$

Por hipótesis, los elementos de la forma $P(x,x^*)$ son densos en A. Se puede concluir que $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$ para $y \in A$. Así $\varphi_1 = \varphi_2$, con lo cual $\widehat{x}$ es inyectiva. Más aún, $\widehat{x}$ es continua con Δ compacto y por tanto $\widehat{x}$ es un homeomorfismo de Δ en $\sigma(x)$.

Luego existe un isomorfismo isométrico de $C(\sigma(x))$ en $C(\Delta)$ tal que $f \mapsto f \circ \widehat{x}$ que conserva la conjugación compleja. Y de nuevo por el teorema anterior, como $(\psi f) = G^{-1}(f \circ \widehat{x})$, se tiene la conclusión.

Si $f(\lambda) = \lambda$ entonces $f \circ \widehat{x} = \widehat{x}$ y así $\psi f = x$. □

A continuación se completará esta sección con un lema que también será util en la teoría del cálculo funcional continuo que se verá en el siguiente capítulo.

Observación. Si el álgebra A es una subálgebra de un álgebra B, puede ocurrir que algún elemento $x \in A$ no es inversible en A, pero es inversible en B. Por tanto el espectro depende del álgebra. De la definición del espectro se sigue que

$$\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x),$$

y en general no hay coincidencia de estos dos conjuntos. En el caso de C^*-álgebras se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.2.12. *Si B es una C^*-álgebra con x un elemento normal de B y A una subálgebra con involución y cerrada de B que contiene la unidad e y $x^* \in A, \forall x \in A$, entonces*

$$\sigma_A(x) = \sigma_B(x), \quad \forall x \in A.$$

Demostración. Véase [Z, Theorem 24.6]. □

El teorema anterior permite evitar ambigüedades en la elección del espectro.

Capítulo 2

Teoría espectral de operadores normales acotados

2.1. Cálculo funcional continuo para operadores normales

En esta sección se aplicarán los resultados de la teoría espectral de Gelfand, del capitulo anterior, al estudio de operadores normales acotados sobre un espacio de Hilbert. Con el objetivo de fijar la notación que será usada, es conveniente recordar la definición de un *espacio de Hilbert*, que se denotará por H con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su producto escalar. El producto escalar da lugar a una norma $\|\cdot\|$ que se define como

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

H es un espacio de Hilbert si es completo con respecto a esta norma. Cada espacio de Hilbert es así también un espacio de Banach.

A lo largo del trabajo, se denotará por $B(H)$ al álgebra de Banach de operadores lineales y acotados T sobre un espacio de Hilbert H con la norma

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Un operador T es acotado si $\|T\| < \infty$.

El siguiente resultado de Análisis Funcional será de gran utilidad a lo largo de este capítulo.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Riesz)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $\varphi \in H'$, donde se ha denota por H' el espacio dual de H. Entonces existe un único $y \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$. Además se cumple que $\|\varphi\| = \|y\|$.

Demostración. Para la demostración se puede consultar [M, p.111]. □

Definición 2.1.2. *Dado $T \in B(H)$ existe un único operador $T^* \in B(H)$ definido por la relación*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Decimos entonces que el operador T^* es el ***operador adjunto*** *de T.*
Un operador T se dice ***normal*** *si $TT^* = T^*T$, y se dice* ***hermitiano*** *o* ***autoadjunto*** *si $T = T^*$.*
T es ***unitario*** *si $T^*T = I = TT^*$ donde I es el operador identidad en H.*

Siempre se tiene que $\|T^*\| = \|T\|$.

La existencia y unicidad del operador adjunto es consecuencia del teorema de Riesz, porque, fijado $y \in H$, la aplicación

$$\begin{aligned} H &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \langle Tx, y \rangle \end{aligned}$$

es lineal y continua, o sea, de H'.

La aplicación $T \to T^*$ es una involución en $B(H)$ cumpliendo las propiedades

1. $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*$,

2. $(ST)^* = T^* S^*$,

3. $T^{**} = T$.

4. $I = I^*$, y si T es inversible $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Aplicando ahora las propiedades de la norma y del producto escalar se tiene que

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2,$$

Por otra parte, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en espacios de Hilbert se deduce que para todo $x \in H$,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \leq \|x\|\|T^*Tx\| \leq \|x\|^2\|T^*T\|.$$

Es decir, $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Por lo tanto

$$\|T\|^2 = \|T^*T\|, \ \forall T \in B(H).$$

En consecuencia, $B(H)$ resulta ser una C^*-álgebra (no conmutativa), con lo cual se puede aplicar la teoría presentada en el capítulo inicial.

A continuación se destacan algunas propiedades de los operadores normales en un espacio de Hilbert:

Proposición 2.1.3. *Sea $T \in B(H)$.*

a) T es normal si y sólo si para cada $x \in H$ se tiene $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

b) Si T es normal y si para algunos $x \in H$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que $Tx = \lambda x$, entonces $T^*x = \overline{\lambda} x$.

c) Si T normal entonces existe $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $|\lambda| = \|T\|$.

Demostración. El primer apartado es trivial si considerando $x \in H$ se calcula

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle$$

y

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle.$$

Para el *b)*, como T es normal entonces $T - \lambda I$ también lo es y por la parte *a)* se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = \|Tx - \lambda x\| &= \|(T - \lambda I)x\| = \|(T - \lambda I)^*x\| \\ &= \|(T^* - \overline{\lambda} I)x\| = \|T^*x - \overline{\lambda} x\|. \end{aligned}$$

De donde $T^*x = \overline{\lambda} x$.

La propiedad *c)* se prueba haciendo uso de que $B(H)$ es un C^*-álgebra, es decir que $\|T^2\| = \|T\|^2$. Por inducción se obtiene que $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$ para $k \in \mathbb{N}$, como en el Teorema 1.2.10. Luego, aplicando el Corolario 1.1.7, resulta que

$$\rho(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{1/2^k} = \lim_{k\to\infty} \|T\| = \|T\|.$$

Finalmente, por ser $\sigma(T)$ compacto,

$$\|T\| = \rho(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|.$$

□

Teorema 2.1.4 (Cálculo funcional continuo)**.** *Sea $T \in B(H)$ un operador normal sobre un espacio de Hilbert H, de modo que $TT^* = T^*T$. Existe un único *-homomorfismo*

$$\Phi_T : C(\sigma(T)) \to B(H)$$

tal que $\Phi_T(u) = I$ y $\Phi_T(v) = T$, donde $u(\lambda) = 1$, $v(\lambda) = \lambda$ para cada $\lambda \in \sigma(T)$. Además, Φ_T es isométrico y su rango es la subálgebra cerrada (conmutativa) C generada por I, T y T^*, donde I es la identidad sobre H.

Demostración. El último lema del capítulo anterior 1.2.12, permite escribir que

$$\sigma_C(T) = \sigma_{B(H)}(T),$$

con C la subálgebra cerrada (conmutativa) C generada por I, T y T^*.

Por el teorema de Gelfand-Naimark, la transformación de Gelfand G de C es un isomorfismo isométrico de C en $C(SpecC)$. Además, por el Corolario 1.2.11 se tiene que $SpecC$ es homeomorfo a $\sigma(T)$ via el homeomorfismo

$$\widehat{T} : SpecC \to \sigma(T).$$

Considerando $f \in C(\sigma(T))$ se define $\Phi_T(f)$ como el único elemento de C tal que

$$\Phi_T(f) = G^{-1}(f \circ \widehat{T}).$$

Se verifica que Φ_T es un *-homomorfismo de $C(\sigma(T))$ en $B(H)$, y

$$\Phi_T(u) = G^{-1}(u \circ \widehat{T}) = I,$$

$$\Phi_T(v) = G^{-1}(v \circ \widehat{T}) = T, \quad \Phi_T(\overline{v}) = G^{-1}(\overline{v} \circ \widehat{T}) = T^*,$$

pues $u \circ \widehat{T} = 1$ y $v \circ \widehat{T} = \widehat{T}$. Más aún,

$$\begin{aligned}\|\Phi_T(f)\| &= \|\widehat{(\Phi_T(f))}\|_\infty = \|f \circ \widehat{T}\|_\infty \\ &= \sup\{|f(\widehat{T}(\varphi))| : \varphi \in SpecC\} \\ &= \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|f\|_\infty,\end{aligned}$$

lo cual significa que Φ_T es isométrico.

Queda por ver que el rango de Φ_T es C. De las propiedades que tiene Φ_T se deduce que su rango es una subálgebra cerrada de $B(H)$ que contiene a I, T y T^*, es decir $\Phi_T(C(\sigma(T))) \supset C$. Por otra parte $\Phi_T^{-1}(C)$ es una subálgebra cerrada de $C(\sigma(T))$ conteniendo a 1 y u, lo cual implica que $\Phi_T^{-1}(C) = C(\sigma(T))$ y por lo tanto $\Phi_T(C(\sigma(T))) \subset C$. □

Definición 2.1.5. *Con las notaciones del teorema anterior, se define $f(T) = \Phi_T(f)$ para todo $f \in C(\sigma(T))$.*

Corolario 2.1.6 (Teorema de la aplicación espectral y Regla de composición)**.** *Si T es un operador normal sobre un espacio de Hilbert H, entonces*

i) Para cada $f \in C(\sigma(T))$ se tiene

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

ii) Para cada $f \in C(\sigma(T))$ y $g \in C(\sigma(f(T)))$ se tiene

$$(g \circ f)(T) = g(f(T)).$$

Demostración. i) Sea $f \in C(\sigma(T))$. Con la notación $f(T) = \Phi_T(f)$ del teorema anterior, se tiene que $\sigma(f(T))$ es el rango de la transformada de Gelfand de $\Phi_T(f)$, es decir

$$(\Phi_T(f))\widehat{\ } = f \circ \widehat{T}.$$

ii) Considerando $f \in C(\sigma(T))$ se tiene que por el apartado i), $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$. Esto prueba que existe $g \circ f$ cuando $g \in C(\sigma(f(T)))$.
Sea entonces

$$\Phi : C(\sigma(f(T))) \to B(H)$$

tal que $\Phi(g) = (g \circ f)(T)$. Se cumple que

$$\Phi(v) = (v \circ f)(T) = f(T),$$

cuando $v(\lambda) = \lambda$ es la función identidad en $\sigma(T)$. Además, $\Phi(1) = (1 \circ f) = 1$.
Esto prueba que Φ es un *-homomofismo y satisface la hipótesis del Teorema 2.1.4 para $f(T)$ normal en $B(H)$ (ya que $f(T) = \Phi_T(f)$ por la Definición 2.1.5). Por tanto $\Phi(g)$ se puede identificar con $\Phi_{f(T)}(g) = g(f(t))$. Luego

$$(g \circ f)(T) = \Phi(g) = g(f(T))$$

para cada $g \in C(\sigma(f(T)))$.

□

2.2. Medida espectral

Como se puede observar, en la sección anterior $B(H)$ resultó ser un C^*-álgebra, así la teoría presentada sobre las C^*-álgebras se puede aplicar para obtener teoremas de representación de los operadores normales.

Definición 2.2.1. *Sea X espacio compacto de Hausdorff y $\mathscr{B}(X)$ la σ-álgebra de los conjuntos de Borel de X. Sea H espacio de Hilbert. Se define la **medida espectral** o **resolución de la identidad** sobre $\mathscr{B}(X)$ a toda aplicación*

$$E : \mathscr{B}(X) \to B(H)$$

que satisface las propiedades:

i) $E(\emptyset) = 0$, $E(X) = I$.

ii) Todo $E(\omega)$ es una proyección ortogonal autoadjunta, es decir $E(\omega)^2 = E(\omega) = E(\omega)^*$, para todo $\omega \in \mathscr{B}(X)$.

iii) Si $\omega', \omega'' \in \mathscr{B}(X)$ entonces $E(\omega' \cap \omega'') = E(\omega')E(\omega'')$.

iv) Si $\omega', \omega'' \in \mathscr{B}(X)$ y $\omega' \cap \omega'' = \emptyset$ entonces $E(\omega' \cup \omega'') = E(\omega') + E(\omega'')$.

v) Para todo $x, y \in H$, la función $E_{x,y} : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{C}$ definida por

$$E_{x,y}(\omega) = \langle E(\omega)x, y\rangle$$

es una medida regular compleja sobre $\mathscr{B}(X)$.

A partir de la definición surgen algunas observaciones:
De la segunda y última condición se deduce que

$$E_{x,x}(\omega) = \langle E(\omega)x, x\rangle = \langle E(\omega)^2 x, x\rangle = \langle E(\omega)x, E(\omega)x\rangle = \|E(\omega)x\|^2,$$

luego $E_{x,x}$ es una medida positiva sobre $\mathscr{B}(X)$.

Más aún, se tiene que E es contablemente aditiva en la topología débil de los operadores y también en la topología fuerte de los operadores, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)x = E(\omega)x, \quad \forall x \in H$$

donde ω es la unión de los $\omega_n \in \mathscr{B}(X)$, disjuntos dos a dos. La afirmación se debe a que, dado un $x \in H$ se tiene que $E(\omega_n)E(\omega_m) = 0$ cuando $n \neq m$. Así $E(\omega_n)x$ y $E(\omega_m)x$ son ortogonales y por el apartado *v)* se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle E(\omega_n)x, y\rangle = \langle E(\omega)x, y\rangle,$$

para todo $x,\ y \in H$.

Ejemplo

Sea X compacto y $\mathscr{B}(X)$ la familia de los subconjuntos de Borel en X. Sea μ una medida positiva sobre $\mathscr{B}(X)$ y $H = L^2(X, \mu)$, donde

$$L^2(X,\mu) = \{f : X \to \mathbb{C}\ \mu\text{-medible tal que} \int_X |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu =: \|f\|_\mu^2 < \infty\}.$$

Entonces la función $E : \mathscr{B}(X) \to B(H)$ que para cada $\omega \in \mathscr{B}(X)$ define a $E(\omega)$ como la multiplicación por χ_ω, la función característica de ω, es decir $E(\omega)f = \chi_\omega f$, es una medida espectral para $(X, \mathscr{B}(X), H)$.
Todas las condiciones son obvias, excepto que sea contablemente aditiva. Para esto, fijando $f \in L^2(X, \mu)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|E(\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_k)f - \sum_{k=1}^{n} E(\omega_k)f\|^2 &= \|\chi_{\cup_{k=1}^{\infty}\omega_k} f - \sum_{k=1}^{n} \chi_{\omega_k} f\|^2 = \|\chi_{\cup_{k=1}^{\infty}\omega_k} f - \chi_{\cup_{k=1}^{n}\omega_k} f\|^2 \\
&= \|\chi_{\cup_{k=1}^{\infty}\omega_k - \cup_{k=1}^{n}\omega_k} f\|^2 = \|\chi_{\cup_{k=n+1}^{\infty}\omega_k} f\|^2 \\
&= \int_X \chi_{\cup_{k=n+1}^{\infty}\omega_k} |f|^2 \, \mathrm{d}\mu = \int_{\chi_{\cup_{k=n+1}^{\infty}\omega_k}} |f|^2 \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Establecido el cálculo funcional continuo para un operador normal acotado T en la sección 2.1, Teorema 2.1.4, fijados $x, y \in H$ se puede definir la siguente forma lineal continua

$$\Lambda_{x,y} : C(\sigma(T)) \to \mathbb{C}$$

por $\Lambda_{x,y}(f) = \langle \Phi_T(f)x, y\rangle$. El funcional está acotado, pues

$$|\langle \Phi_T(f)x, y\rangle| = |\langle f(T)x, y\rangle| \leq \|f(T)\| \|x\| \|y\| = \|f\|_\infty \|x\| \|y\|.$$

Por el teorema de representación de Riesz, tiene que existir una medida de Borel (compleja) $\mu_{x,y}$ sobre $\sigma(T)$. A partir de estas medidas se construirá la medida espectral asociada a T mediante la relación

$$\langle E(\omega)x,y\rangle = \mu_{x,y}(\omega),$$

como se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sea A una subálgebra normal con unidad cerrada de B(H) y SpecA el espacio de ideales maximales de A, denotado por* Δ.

a) Entonces existe una única medida espectral E sobre los conjuntos de Borel de Δ *tal que*

$$T = \int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}E \tag{2.1}$$

para todo $T \in A$, *donde la integral se interpreta como*

$$\langle Tx,y\rangle = \int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}E_{x,y}, \quad x,y \in H.$$

Dicho de otra forma, se puede definir $\Phi : \mathscr{B}(\Delta) \to B(H)$ *tal que*

$$\langle \Phi(f)x,y\rangle = \int_\Delta f\mathrm{d}E_{x,y}$$

para toda f de Borel acotada sobre Δ.

b) Si $S \in B(H)$, *entonces* $ST = TS$ *para todo* $T \in B(H)$ *si y sólo si* $SE(\omega) = E(\omega)S$ *para todo* $\omega \subset \Delta$.

Demostración. Por la sección anterior, $B(H)$ es una C^*-álgebra y así es claro que A es una C^*-álgebra conmutativa. En consecuencia, el teorema de Gelfand-Naimark afirma que la aplicación $T \mapsto \widehat{T}$ es un isomorfismo isométrico de A sobre $C(\Delta)$.

- Existencia de E: Fijados $x,y \in H$, la aplicación $\Lambda_{x,y} : C(\Delta) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Lambda_{x,y}(\widehat{T}) = \langle Tx,y\rangle$$

es un funcional lineal y acotado tal que $\|\Lambda_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$, pues $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. El teorema de Riesz implica que $\forall x,\ y \in H$ existe una medida regular compleja $\mu_{x,y}$ sobre Δ tal que

$$\langle Tx,y\rangle = \int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,y}, \quad \forall T \in A.$$

Dicha medida cumple que $\overline{\mu_{x,y}} = \mu_{y,x}$, pues

$$\begin{aligned}\int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{y,x} &= \langle Ty,x\rangle = \langle y,T^*x\rangle = \overline{\langle T^*x,y\rangle}\\ &= \overline{\int_\Delta (T^*)\widehat{}\,\mathrm{d}\mu_{x,y}} = \overline{\int_\Delta \overline{\widehat{T}}\,\mathrm{d}\mu_{x,y}} = \int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}\overline{\mu_{x,y}}.\end{aligned}$$

Además se tiene que $\|\mu_{x,y}\| = \|\Lambda_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$. Esto implica que, para toda f de Borel fija acotada en Δ,

$$(x,y) \mapsto \int_\Delta f\,\mathrm{d}\mu_{x,y}$$

es una forma sesquilineal acotada sobre H. Ahora ampliando el cálculo funcional continuo, para cada f de Borel acotada sobre Δ se puede definir un operador $\Phi(f) \in B(H)$ tal que

$$\langle \Phi(f)x,y\rangle = \int_\Delta f\,\mathrm{d}\mu_{x,y}, \quad \forall x,y \in H.$$

Este operador Φ extiende a la inversa de la transformada de Gelfand, debido a que $\Phi(\widehat{T}) = T$. En particular, para f real se cumple que

$$\begin{aligned}\overline{\langle \Phi(f)x,y\rangle} &= \overline{\int_\Delta f\,\mathrm{d}\mu_{x,y}}\\ &= \int_\Delta f\,\mathrm{d}\overline{\mu_{x,y}} = \int_\Delta f\,\mathrm{d}\mu_{y,x} = \langle \Phi(f)y,x\rangle,\end{aligned}$$

y por la definición del adjunto, resulta que $\Phi(f)$ es hermitiano.
También se verifica que el operador Φ es multiplicativo

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g),$$

para todo f y g de Borel acotados. En efecto, se sabe que esto se cumple para $f,g \in C(\Delta)$, por tanto

$$\int_\Delta fg\,\mathrm{d}\mu_x, y = \langle \Phi(f)\Phi(g)x,y\rangle = \int_\Delta f\,\mathrm{d}\mu_{\Phi(g)x,y},$$

lo que implica que

$$g\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \mathrm{d}\mu_{\Phi(g)x,y}$$

para cada $x,y \in H$ y $g \in C(\Delta)$. En consecuencia las integrales son ciertas si f es de Borel acotada. Sea $z = \Phi(f)^*y$. Así

$$\begin{aligned}\int_\Delta fg\,\mathrm{d}\mu_{x,y} &= \int_\Delta f\,\mathrm{d}\mu_{\Phi(g)x,y}\\ &= \langle \Phi(f)\Phi(g)x,y\rangle\\ &= \langle \Phi(g)x,z\rangle = \int_\Delta g\,\mathrm{d}\mu_{x,z}.\end{aligned}$$

De nuevo se tiene que $f\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \mathrm{d}\mu_{x,z}$. Por tanto

$$\langle \Phi(fg)x,y\rangle = \int_\Delta fg\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \int_\Delta g\,\mathrm{d}\mu_{x,z} = \langle \Phi(f)\Phi(g)x,y\rangle$$

para cada f,g de Borel acotadas. Así queda visto que Φ es multiplicativo sobre las funciones de Borel acotadas en Δ.

Para cada ω de Borel en Δ se define entonces

$$E(\omega) := \Phi(f),$$

con f la función característica de ω, denotada χ_ω. Para que E sea la medida espectral buscada deberá cumplir las condiciones de la Definición 2.2.1.

Sea $E(\omega) = \Phi(f)$ y $E(\omega') = \Phi(g)$, entonces debido a que $\Phi(f)$ es multiplicativo, se tiene que

$$\begin{aligned}E(\omega\cap\omega') = \Phi(\chi_{\omega\cap\omega'}) &= \Phi(\chi_\omega\chi_{\omega'})\\ &= \Phi(\chi_\omega)\Phi(\chi_{\omega'}) = E(\omega)E(\omega').\end{aligned}$$

Ahora si $\omega = \omega'$ implica que $E(\omega)$ es una proyección y es autoadjunta, pues si f es real, $\Phi(f)$ es hermitiano.
Como $\chi_\emptyset = 0$ está claro que $E(\emptyset) = \Phi(0) = 0$. y como Φ extiende a la transformada de Gelfand se obtiene que $E(\Delta) = \Phi(\chi_\Delta) = \Phi(1) = I$.

Falta probar que E es contablemente aditiva en la topología débil de operadores, es decir

$$\langle E(\omega)x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle E(\omega_k)x,y\rangle$$

donde ω es la únion de los $\omega_k \in \mathscr{B}(\sigma(T)),\ k = 1,\dots$. Esto es consecuencia de la igualdad

$$\begin{aligned}\langle E(\omega)x,y\rangle &= \langle \Phi(\chi_\omega)x,y\rangle \\ &= \int_\Delta \chi_\omega \,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Delta \chi_{\omega_k} \,\mathrm{d}\mu_{x,y},\end{aligned}$$

ya que $\mu_{x,y}$ es una medida y por tanto contablemente aditiva. En definitiva, se tiene que

$$\langle E(\omega)x,y\rangle = \mu_{x,y}(\omega),$$

y por tanto E es la medida espectral buscada.

- Unicidad de E: La unicidad de la medida espectral construida anteriormente es inmediata, debido al teorema de representación de Riesz que implica la unicidad de la medida $\mu_{x,y}$, para cada $x,y \in H$. No obstante, la definición, $\langle E(\omega)x,y\rangle = E_{x,y}(\omega)$, determina unívocamente la proyección $E(\omega)$, para cada ω. Por lo tanto si existirían dos medidas espectrales $E,\ E'$, para todo $\omega \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ se tendría que $\langle E(\omega)x,y\rangle = \langle E'(\omega)x,y\rangle$, para todo $x,y \in H$, lo cual implica $E(\omega) = E'(\omega)$.

Para probar el apartado *b)* se considera $S \in B(H)$, $x,\ y \in H$ y tambíen $T \in H$. Aplicando la definición del operador adjunto se tiene

$$\langle STx,y\rangle = \langle Tx,S^*y\rangle = \int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}E_{x,S^*y}$$

y

$$\langle TSx,y\rangle = \int_\Delta \widehat{T}\,\mathrm{d}E_{Sx,y}.$$

Cuando $ST = TS$ para todo $T \in B(H)$, las dos medidas son iguales $\mathrm{d}E_{x,S^*y} = \mathrm{d}E_{Sx,y}$. Pero por la definición de la medida espectral resulta que

$$E_{x,S^*y}(\omega) = \langle E(\omega)x,S^*y\rangle = \langle SE(\omega)x,y\rangle$$

para todo $\omega \subset \Delta$. Análogamente,

$$E_{Sx,y}(\omega) = \langle E(\omega)Sx,y\rangle,$$

y por lo tanto $SE(\omega) = E(\omega)S$. El recíproco es cierto utilizando el mismo razonamiento.

□

2.3. Teorema espectral

En el Teorema 2.2.2 se ha demostrado que toda álgebra normal en un espacio de Hilbert induce una medida espectral E sobre los conjuntos de Borel de su espectro y, recíprocamente, que a partir de E se recuperan los operadores T del álgebra mediante una integral del tipo (2.1).

Como consecuencia se puede establecer el teorema espectral para operadores normales y acotados:

Teorema 2.3.1 (Teorema espectral para un operador normal acotado)**.** *Sea $T \in B(H)$ un operador normal. Entonces existe una única medida espectral E sobre los borelianos de $\sigma(T)$ tal que:*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda).$$

Además, todo $E(\omega)$ conmuta con cualquier operador $S \in B(H)$ que conmute con $T \in B(H)$.

La medida espectral E que da este teorema describe la *descomposición espectral de T*.

Demostración. Evidentemente, la demostración del teorema se apoya en el Teorema 2.2.2 particularizando a un solo operador.
Debido al cálculo funcional continuo existe un *-homomorfismo

$$\Phi : C(\sigma(T)) \to B(H)$$

tal que $\Phi(f) = f(T)$. Más aún, el rango de Φ es la subálgebra cerrada A de $B(H)$ engendrada por I, T y T^*. Además, por el Corolario 1.2.10 se sabe que $SpecA$ es homeomorfo a $\sigma(T)$ vía el homeomorfismo

$$\widehat{T} : SpecA \to \sigma(T).$$

Así se tiene que $\widehat{T}(\lambda) = \lambda$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$.
Aplicando el Teorema 2.2.2 para la subálgebra A, existe una única medida espectral E definida sobre los borelianos de $\sigma(T)$, cumpliendo que

$$\Phi(f) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda).$$

Finalmente, por la fórmula (2.1) se tiene

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda),$$

para toda f de Borel acotada, y en particular, reescribiendo la descomposición del operador identidad se tiene

$$I = \int_{\sigma(T)} \mathrm{d}E(\lambda).$$

Si $ST = TS$ con S normal, entonces también $ST^* = T^*S$ (véase [R, p.300]) y por consiguiente S conmuta con todo elemento de A. Ahora por el apartado *b)* del Teorema 2.2.2 se tiene que
$SE(\omega) = E(\omega)S$ para todo $\omega \subset \Delta$.

□

En resumen, usando las mismas notaciones que anteriormente y parte del contenido del Teorema 2.2.2 y del teorema espectral se puede ampliar el cálculo funcional continuo construyendo el **cálculo funcional extendido para un operador normal acotado**:

Corolario 2.3.2. *Dado un operador normal $T \in B(H)$, existe un único *-homomorfismo Φ definido sobre las funciones de Borel acotadas sobre $\sigma(T)$ en $B(H)$ con*

$$\Phi(f) = \int_{\sigma(T)} f\,\mathrm{d}E,$$

tal que:

i) $\Phi(u) = I$, $\Phi(v) = T$ *donde* $u(\lambda) = 1$, $v(\lambda) = \lambda$ *para cada* $\lambda \in \sigma(T)$.

ii) Además, Φ verfica entonces

$$\|\Phi(f)\| \leq \|f\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\},$$

siendo válida la igualdad si f es continua.

iii) Si $ST = TS$ con $S \in B(H)$, se tiene que $S\Phi(f) = \Phi(f)S$ para cada función f de Borel acotada.

Habitualmente se usa la notación $f(T) = \Phi(f)$.

Otra formulación de interés, que puede relacionarse directamente con la diagonalización de una matriz normal, es la siguiente:

Teorema 2.3.3 (Teorema de representación espectral de un operador normal acotado)**.** *Si $T \in B(H)$ es normal, existe un espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$ con μ medida positiva regular, una función $\varphi \in L^\infty(\mu)$ y un isomorfismo isométrico $U : L^2(\mu) \to H$ tales que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} L^2(\mu) \arrow[r, "U"] & H \arrow[d, "T"] \\ L^2(\mu) \arrow[u, "M_\varphi"] & H \arrow[l, "U^{-1}"] \end{tikzcd}$$

es conmutativo ($U^{-1}TU = M_\varphi$). $M_\varphi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ es el operador multiplicación definido por φ.

En esta formulación se pierde la unicidad: el espacio $(X, \mathscr{M}, \mu)$ y la función φ no están determinados unívocamente por T.

Idea de la demostración. Anteriormente en el ejemplo de medida espectral se ha probado que en el espacio $L^2(\mu)$ para cada $\omega \in \mathscr{B}(X)$ se puede construir la aplicación $E : \mathscr{B}(X) \to B(H)$ con $H = L^2(X, \mu)$ definido por la fórmula $E(\omega)f = \chi_\omega f$ con χ_ω la función característica de ω. E es así una medida espectral para $(X, \mathscr{B}(X), H)$.

A partir de este ejemplo y ahora aplicando el teorema espectral se tiene que si T es un operador normal, existe E la descomposición espectral de T,

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda).$$

Un paso critico de la medida espectral $E(\omega)$ asociado a T a la medida μ es el siguiente: si $x \in H$ se tiene que

$$\mu(\omega) = \langle E(\omega)x, x\rangle$$

es una medida finita y ω un conjunto de Borel.
Si se escribe $U_{\chi_\omega} = E(\omega)x$, entonces U puede ser extendido a un isomorfismo del espacio $L^2(\mu)$. Para este isomorfismo U se tiene

$$U^{-1}E(\omega)Uf = \chi_\omega f.$$

Por lo tanto el operador multiplicativo definido por

$$M_\varphi(f) = \varphi f, \quad f \in L^2(\mu) \text{ y } \varphi \in L^\infty(\mu)$$

se identifica con la descomposición espectral de T, pues si φ es la función característica χ_ω, se tiene $M_\varphi f = \chi_\omega f$.

Capítulo 3

Aplicaciones del teorema espectral

3.1. Primeros resultados

Definición 3.1.1. *Sea H un espacio de Hilbert, un operador $T \in B(H)$ y $\sigma(T)$ su espectro. Un número $\lambda \in \mathbb{C}$ se dice que es un **valor propio** de T si* $\ker(T - \lambda I) \neq 0$.

*El conjunto de los valores propios de T se llama **espectro puntual** de T y se denota $\sigma_p(T)$. Observar que $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.*

*Si $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $T(x) = \lambda x$ con $x \neq 0$, entonces x se llama **vector propio** de T correspondiente al valor propio λ.*

Al subespacio $\ker(T - \lambda I)$ *se le llama **subespacio propio** o **autoespacio** correspondiente al valor propio λ.*

Observación. Sea $T \in B(H)$ normal. Si $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ y $\lambda \neq \mu$ entonces los vectores propios correspondientes a los valores propios son ortogonales. Es decir, $\ker(T - \lambda I) \perp \ker(T - \mu I)$.

Proposición 3.1.2. *Sea un operador $T \in B(H)$ normal. Entonces*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \ \|x\| \leq 1\}.$$

Demostración. Es evidente que

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \ \|x\| \leq 1\} \leq \|T\|,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Por otra parte, sea $\varepsilon > 0$. Hay que probar que

$$|\langle Tx_0, x_0\rangle| > \|T\| - \varepsilon$$

para algún $x_0 \in H$ con $\|x_0\| = 1$. Por el teorema de Gelfand-Naimark se tiene que $\|\widehat{T}\|_\infty = \|T\|$ y por la Proposición 2.1.3, *c)*, existe $\lambda_0 \in \sigma(T)$ tal que $|\lambda_0| = \|T\|$. Sea el conjunto

$$\omega = \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}.$$

Si E es la descomposición espectral de T con $E(\omega) \neq 0$, entonces existe $x_0 \in H$ con $\|x_0\| = 1$ y $E(\omega)x_0 = x_0$.

Se define

$$f(\lambda) = \begin{cases} \lambda - \lambda_0 & \text{si } \lambda \in \omega \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \omega \end{cases}$$

Entonces,

$$f(T) = (T - \lambda_o I)E(\omega) \ \text{ y } \ f(T)x_0 = Tx_0 - \lambda_0 x_0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \big||\langle Tx_0,x_0\rangle|-|\lambda_0|\big| &\leq |\langle Tx_0,x_0\rangle-\lambda_0| = |\langle Tx_0,x_0\rangle-\lambda_0\langle x_0,x_0\rangle| \\ &\leq \|f(T)\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

pues $|f(\lambda)| < \varepsilon$, $\forall \lambda \in \sigma(T)$. Finalmente, como $|\lambda_0| = \|T\|$ se tiene la desigualdad buscada. □

Proposición 3.1.3. *Un operador normal $T \in B(H)$ es autoadjunto si y sólo si $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea A la subálgebra normal de $B(H)$ generada por T. Entonces, por el Teorema 2.3.1, $\widehat{T}(\lambda) = \lambda$ sobre $\sigma(T)$. Así,

$$(T^*)\widehat{}(\lambda) = \overline{\widehat{T}(\lambda)} = \overline{\lambda},$$

para todo $\lambda \in \sigma(T)$. Luego, $T = T^*$ si y sólo si $\lambda = \overline{\lambda}$. □

Teorema 3.1.4. *Sea $T \in B(H)$. Entonces,*

$$\langle Tx,x\rangle \geq 0 \ \forall x \in H \text{ si y sólo si } T = T^* \text{ y } \sigma(T) \subset [0,\infty).$$

Demostración. Si $\langle Tx,x\rangle \geq 0$, entonces $\langle Tx,x\rangle$ es real y

$$\langle x,T^*x\rangle = \langle Tx,x\rangle = \langle x,Tx\rangle, \quad \forall x \in H.$$

Por tanto, $T = T^*$ y por la Proposición 3.1.3 se tiene que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Con la misma hipótesis y para $\lambda > 0$, se cumple

$$\lambda\|x\|^2 = \lambda\langle x,x\rangle \leq \langle (T+\lambda I)x,x\rangle \leq \|(T+\lambda I)x\|\|x\|,$$

es decir,

$$\|(T+\lambda I)x\| \geq \lambda\|x\|.$$

Entonces, $T+\lambda I$ es inversible en $B(H)$ y así $-\lambda \notin \sigma(T)$. Esto prueba que $\sigma(T) \subset [0,\infty)$.

Por otro lado, sea T autoadjunto y $\sigma(T) \subset [0,\infty)$. Aplicando el teorema espectral se tiene que

$$\langle Tx,x\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E_{x,x}(\lambda), \quad x \in H.$$

Como ya se ha visto en la sección 2.2, $E_{x,x}$ es una medida positiva. Además, $\lambda \geq 0$, y por tanto $\langle Tx,x\rangle \geq 0$, $\forall x \in H$. □

Para el siguiente teorema es necesario definir qué se entiende por un operador positivo.

Definición 3.1.5. *Sea un operador $T \in B(H)$. Se dice que T es **positivo** ó **no negativo**, y se escribe $T \geq 0$, si $\langle Tx,x\rangle \geq 0$, $\forall x \in H$.*

Teorema 3.1.6. *Sea $T \in B(H)$ es un operador positivo. Entonces existe un único operador positivo $S \in B(H)$ tal que $S^2 = T$. Se dice que S es la raíz cuadrada positiva de T. Además, si T es inversible, también lo es S.*

Demostración. Sea A una subálgebra normal con unidad cerrada en $B(H)$ que contiene a T, y Δ el espacio de ideales maximales de A. Entonces, por el teorema de Gelfand-Naimark (1.1.8) se tiene que $\widehat{A} = C(\Delta)$.

Por hipótesis T es positivo, lo que implica que T es autoadjunto y $\sigma(T) \subset [0,\infty)$ (Teorema 3.1.4). Por otro lado, se tiene que $\widehat{T}(\lambda) = \lambda$, en $\sigma(T)$, es decir $\widehat{T}(\Delta) = \sigma(T)$. Por lo tanto, $\widehat{T} \geq 0$. Luego, $\widehat{T} \geq 0$ es equivalente con $T \geq 0$.
Ya que toda función continua positiva tiene una única raíz cuadrada continua, se tiene que existe un único $S \in A$ tal que $S^2 = T$ y $\widehat{S} \geq 0$.

Falta probar que efectivamente S es único en $B(H)$. Se considera A_0 la más pequeña de estos álgebras A. Entonces existe $S_0 \in A_0$ tal que $S_0^2 = T$ y $S_0 \geq 0$. Sea ahora $S \in B(H)$ la raíz cuadrada positiva de T y A la menor subálgebra con unidad cerrada de $B(H)$ que contiene a S, entonces $T \in A$, pues $T = S^2$. Luego, como $A_0 \subset A$, se tiene que $S_0 \in A$, y por lo tanto $S = S_0$.

Por último, si T es inversible, $S^2 = T$ implica que $(T^{-1}S)S = I$. De hecho, $ST = TS = S^3$, con lo cual $S = T^{-1}ST$. Entonces,

$$S(T^{-1}S) = T^{-1}STT^{-1}S = I,$$

es decir $S^{-1} = T^{-1}S$. □

3.2. Valores propios de operadores normales

Si T es normal, sus valores propios guardan una relación sencilla con su descomposición espectral. Esta relación se deducirá de la siguiente aplicación al cálculo funcional extendido:

Lema 3.2.1. *Sea $T \in B(H)$ un operador normal y E su descomposición espectral. Si $f \in C(\sigma(T))$, entonces*

$$\ker(f(T)) = \operatorname{Im}(E(f^{-1}(0))).$$

Demostración. Considerando $\omega_0 = f^{-1}(0)$, se define

$$g(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \in \omega_0 \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \omega_0 \end{cases}$$

Entonces, si $\lambda \in \omega_0$, se sabe que $f(\lambda) = 0$, y por lo tanto $f(\lambda)g(\lambda) = 0$. Por otro lado, si $\lambda \notin \omega_0$, se tiene que $g(\lambda) = 0$. Luego, $fg = 0$, es decir que $f(T)g(T) = 0$. Como g es la función característica de ω_0, por el cálculo funcional extendido (Corolario 2.3.2) se tiene que $E(\omega_0) = \Phi(g) = g(T)$, y por lo tanto

$$\operatorname{Im}(E(\omega_0)) \subset \ker(f(T)). \tag{3.1}$$

Por otro lado, si consideramos ω el complementario de ω_0 relativo a $\sigma(T)$, entonces ω es la unión de los conjuntos disjuntos de Borel ω_n con $n = 1, 2, \dots$, cada uno de los cuales está a distancia positiva del conjunto compacto ω_0. Para cada $n = 1, 2, \dots$, se define $f_n(\lambda) = 1/f(\lambda)$ sobre ω_n y $f_n(\lambda) = 0$ en el resto de $\sigma(T)$. Por construcción, $f_n \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ y además

$$f_n(T)f(T) = E(\omega_n) \quad n = 1, 2, \dots .$$

Si $x \in \ker(f(T))$, es decir $f(T)x = 0$, entonces $E(\omega_n)x = 0$, y por la propiedad de aditividad contable de la medida espectral se tiene que $E(\omega)x = 0$. Pero como $E(\omega) + E(\omega_0) = I$ y por lo anterior $E(\omega_0)x = x$, se cumple que

$$\ker(f(T)) \subseteq \operatorname{Im}(E(\omega_0)). \tag{3.2}$$

Por lo tanto, las relaciones (3.1) y (3.2) implican la igualdad del enunciado. □

Proposición 3.2.2. *Sea $T \in B(H)$ un operador normal y E su descomposición espectral. Para cada $\lambda \in \sigma(T)$ se tiene*

i) $\ker(T - \lambda I) = \operatorname{Im}(E(\{\lambda\}))$.

ii) λ es valor propio de T si y sólo si $E(\{\lambda\}) \neq 0$.

Demostración. Considerando $\lambda \in \sigma(T)$ y aplicando el lema previo a $f(\lambda') = \lambda' - \lambda$, se tiene $f^{-1}(0) = \{\lambda\}$ y por lo tanto $f(T) = T - \lambda I$. Con esto queda probada la igualdad del apartado *i)*.

El segundo apartado es trivial usando el *i)* y sabiendo que por definición $\lambda \in \sigma_p(T)$ implica que $\ker(T - \lambda I) \neq 0$. □

Corolario 3.2.3. *Sea $T \in B(H)$ un operador normal. Cada punto aislado de $\sigma(T)$ es un valor propio.*

Demostración. Sea $T \in B(H)$ con E su decomposición espectral. Si $\lambda \in \sigma(T)$ es un punto aislado existe un entorno U de λ tal que $U \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$. Luego $\{\lambda\}$ es un subconjunto abierto de $\sigma(T)$, con lo cual $E(\{\lambda\}) \neq 0$. Por la Proposición 3.1.2, esto significa que $\ker(T - \lambda I) \neq 0$, o sea, λ es un valor propio de T. □

Corolario 3.2.4. *Sea $T \in B(H)$ un operador normal y $f \in C(\sigma(T))$.Para cada $x \in H$,*

$$Tx = \lambda x \Rightarrow f(T)x = f(\lambda)x.$$

Demostración. Se aplica el Lema 3.2.1 a la función g definida por la fórmula $g(\zeta) = f(\zeta) - f(\lambda)$ y se tiene en cuenta la Proposición 3.2.2. □

Proposición 3.2.5. *Sea $T \in B(H)$ un operador normal y E su descomposición espectral. Entonces, si el espectro de T es un conjunto contable, cada $x \in H$ tiene una única descomposición de manera*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

donde $Tx_i = \lambda_i x_i$. Además, $x_i \perp x_j$, cuando $i \neq j$.

Demostración. Sea $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ y $E_i = E(\{\lambda_i\})$ para cada $i = 1,2,3,\dots$. En los puntos de acumulación λ_i de $\sigma(T)$, E_i puede ser 0 ó no. Pero, en cualquier caso por la Proposición 3.2.2 los recorridos de E_i son ortogonales dos a dos, pues $\ker(T - \lambda_i I) \perp \ker(T - \lambda_j I)$, si $i \neq j$.

Como E es contablemente aditiva, se tiene que para $x \in H$

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i x = E(\sigma(T))x = x.$$

La serie converge en norma. Entonces, si $x_i \in \mathrm{Im}(E_i)$, es decir $x_i = E_i x$, se tiene la descomposición de x del enunciado y se cumple $x_i \perp x_j$, cuando $i \neq j$. La unicidad es consecuencia de la ortogonalidad de los vectores propio. De nuevo por la misma Proposición 3.2.2 se tiene que $Tx_i = \lambda_i x_i$.

□

A continuación se describe el espectro de los operadores normales compactos en espacios de Hilbert. Pero antes es necesario definir el concepto de operador compacto y especificar algunas propiedades del mismo. Se prescindirá de las demostraciones, ya que escapan del objetivo de este trabajo, y además, se pueden encontrar en cualquier libro de Análisis Funcional (véase por ejemplo [R, p.98]).

Definición 3.2.6. *Un operador lineal $T : X \to Y$ con X, Y espacios de Banach, se llama **compacto** si $\overline{T(B_X(0,1))}$ es un conjunto compacto en Y, donde $B_X(0,1)$ es la bola unidad en X.*

Propiedades 3.2.7. *Sea H un espacio de Hilbert y un operador $T \in B(H)$.*

i) Si $\dim \mathrm{Im}(T)$ es finito entonces T es compacto.

ii) Si T es compacto y $\lambda \neq 0$ entonces $\ker(T - \lambda I)$ es de dimensión finita.

iii) Si T es compacto y $\lambda \neq 0$ con $\lambda \in \sigma(T)$ entonces λ es valor propio de T y de T^*.

iv) T es compacto si y sólo si existe $T_n \in B(H)$ con rango finito tal que $\|T - T_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Teorema 3.2.8. *Un operador $T \in B(H)$ normal es compacto si y sólo si todos los puntos de $\sigma(T)$, salvo quizás el 0, son aislados y sus correspondientes autoespacios son finito-dimensionales.*

Demostración. Debido a las propiedades de los operadores compactos, la implicación directa es inmediata.

Para demostrar la implicación inversa, nótese que $\sigma(T)$ es contable por la condición de que el único punto de acumulación posible es el 0.
Sean λ_i los puntos no nulos de $\sigma(T)$ tal que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$. Se define $f_n(\lambda) = \lambda$ si $\lambda = \lambda_i$ y $i \leq n$, y $f_n(\lambda) = 0$ en los demás puntos de $\sigma(T)$. Usando la misma notación que en la Proposición 3.2.5, $E_i = E(\{\lambda_i\})$, se tiene que

$$f_n(T) = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_n E_n.$$

Por la Proposición 3.2.2, $\dim \mathrm{Im}(E_i) = \dim \ker(T - \lambda_i I)$ y este último es finito-dimensional (por hipótesis). Por lo tanto $f_n(T)$ es un operador compacto.

Nótese que $|\lambda - f_n(\lambda)| \leq |\lambda_n|$, para todo $\lambda \in \sigma(T)$. Esto implica que

$$\|T - f_n(T)\| \leq |\lambda_n| \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Luego por la Propiedad 3.2.7 *iv)* , T puede ser aproximado uniformemente por operadores de rango finito, con lo cual T es compacto.

□

Con esta hipótesis de contabilidad del espectro, es inmediato llegar a una representación del operador T que puede considerarse como una buena generalización a cualquier dimensión de la diagonalización en dimensión finita: si $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$, es una base ortonormal del espacio separable H formada por vectores propios de T y $Te_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha$ con $\alpha \in A$, de la igualdad

$$x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha, \quad x \in H$$

se sigue por continuidad que

$$Tx = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha \quad x \in H.$$

Análogamente, por el Corolario 3.2.4 se tiene

$$f(T)x = \sum_{\alpha \in A} f(\lambda_\alpha) \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha \quad x \in H.$$

Mediante esta representación se comprueba el siguiente resultado:

Proposición 3.2.9 (Desarrollo de Hilbert-Schmidt)**.** *Si $T \in B(H)$ es un operador normal y compacto, existe un sistema ortonormal contable (e_n) de vectores propios de T, de modo que cada $x \in H$ puede representarse de manera única en la forma*

$$x = \sum_n c_n e_n + z,$$

donde $T(z) = 0$ y $c_n = \langle x, e_n \rangle$.

Además, si $Te_n = \lambda_n e_n$ para cada n, dado $x \in H$ se verifica

$$Tx = \sum_n \lambda_n c_n e_n.$$

Demostración. Aplicando el Teorema 3.2.8 se sabe que $\sigma(T)$ es contable. Así, existe una base ortonormal $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ de H formada por los vectores propios de T. Separando los índices correspondientes a los valores propios nulos y no nulos, sean

$$B = \{\alpha \in A : Te_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha, \lambda_\alpha \neq 0\}$$
$$C = \{\alpha \in A : Te_\alpha = 0\}$$

Dado $x \in H$, sea

$$z = \sum_{\alpha \in C} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha \in \ker(T),$$

quedando

$$x = \sum_{\alpha \in B} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha + z$$

y

$$Tx = \sum_{\alpha \in B} \lambda_\alpha \langle x, e_\alpha \rangle e_n.$$

Tomando ahora (e_n) como los $(e_\alpha)_{\alpha \in B}$, se deduce la existencia del desarrollo. La unicidad se deduce que para cada n se tiene que $e_n \perp \ker(T)$, lo cual obliga a que

$$c_n = \langle x, e_n \rangle \quad \text{y} \quad z = x - \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

□

3.3. Resolución de ecuaciones con operadores normales compactos

En esta seción se quiere probar la existencia de soluciones de ecuaciones funcionales, denominada la *alternativa de Fredholm.*

Considerando $T \in B(H)$ un operador normal y compacto, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $y \in H$ un vector dado. Se quiere encontrar la solución a la ecuación funcional

$$x = \lambda Tx + y.$$

Un caso particular se obtiene para $y = 0$, cuando la ecuación resultante

$$x = \lambda Tx$$

se llamará *ecuación homogénea asociada*. Si $x \neq 0$ entonces λ que dice *valor característico* de T. Si λ es no nulo se tiene $Tx = \frac{1}{\lambda}x$, lo que significa que los valores característicos de T son los inversos de los valores propios no nulos de T y por lo tanto forman un conjunto contable, siendo todos puntos aislados.

En consecuencia, se tiene que las soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a un valor característico λ son exactamente los vectores propios asociados al valor propio $1/\lambda$, que formarán un subespacio finito-dimensional; su dimensión es, por definición, la multiplicidad del valor caraterístico λ (igual a la multiplicidad del valor propio $1/\lambda$).

Utilizando el desarrollo de Hilbert-Schmidt para este caso, se tiene que para un sistema ortonormal (e_n) de vectores propios de T se puede escribir

$$Tx = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H$$

donde los λ_n son los valores característicos de T contados tantas veces como indique su multiplicidad. Entonces

$$\begin{aligned} x = \lambda Tx + y \Leftrightarrow x - y &= \sum_n \frac{\lambda}{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle e_n \\ &\Leftrightarrow x = y + \sum_n c_n e_n \quad \text{con} \quad c_n = \frac{\lambda}{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle \\ &\Leftrightarrow x = y + \sum_n c_n e_n \quad \text{y} \quad (1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}) c_n = \frac{\lambda}{\lambda_n} \langle y, e_n \rangle. \end{aligned}$$

Se sigue de aquí:

- *Si λ no es un valor característico, es decir $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n, entonces para cualquier $y \in H$ existe una única solución que viene dada por la fórmula*

$$x = y + \sum_n \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \langle y, e_n \rangle e_n.$$

- *Si λ es un valor característico entonces, para que exista solución ha de ser necesariamente $\langle y, e_n \rangle = 0$ siempre que $\lambda_n = \lambda$. Cuando $\lambda_n = \lambda$ se tiene que (e_n) es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea*

$$x = \lambda T x,$$

obteniendo así como condición necesaria y suficiente para que exista solución que el término independiente y, sea ortogonal a las soluciones de la ecuación homogénea. En este caso las soluciones vienen dadas por

$$x = y + \sum_{\lambda_n = \lambda} c_n e_n + \sum_{\lambda_n \neq \lambda} \langle y, e_n \rangle e_n,$$

donde c_n son arbitrarios.

Los resultados anteriores incluyen y precisan la *alternativa de Fredholm:*

Corolario 3.3.1 (Alternativa de Fredholm para operadores normales compactos)**.** *Si $T \in B(H)$ es un operador normal y compacto, o bien la ecuación*

$$x = \lambda T x + y$$

tiene solución única para todo $y \in H$, o bien la ecuación homogénea

$$x = \lambda T x$$

tiene solución no nula, en cuyo caso la ecuación completa tiene solución si y sólo si y es ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea.

3.4. Ecuaciones integrales de Fredholm

Existen muchos tipos de ecuaciones integrales, pero en esta sección se discutirán las ecuaciones de Fredholm de segunda especie. Hay una relación estrecha entre las ecuaciones integrales lineales, que especifican relaciones lineales entre funciones de un espacio de funciones de dimensión infinita, y las ecuaciones lineales, que establecen relaciones entre vectores de un espacio vectorial de dimensión finita.

Definición 3.4.1. *Una* ***ecuación de Fredholm de segunda especie*** *es una ecuación*

$$f(s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\, \mathrm{d}t + g(s) \tag{3.3}$$

donde K, g son funciones conocidas y f es una función a determinar.

La función $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ recibe el nombre de ***núcleo****.*

En lo sigue, se supone que $K \in L^2([a,b] \times [a,b])$ y que satisface $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$ para todo s, t en $[a,b]$ (núcleo simétrico). Con ello, el operador

$$T : f \in L^2([a,b]) \to Tf \in L^2([a,b]),$$

dado por la fórmula

$$Tf(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)\,dt, \quad s \in [a,b],$$

es compacto y autoadjunto.

En términos de este operador, la ecuación (3.3) se escribe

$$f = Tf + g,$$

o, equivalentemente,

$$(I - T)f = g.$$

Por tanto, si las funciones $g, f \in L^2([a,b])$, la ecuación tiene solución para una g dada si y sólo si $g \in \operatorname{Im}(I-T)$. En cuanto a la unicidad, hay a lo más una solución para cada g de $L^2([a,b])$ si y sólo si $I-T$ es inyectivo, lo que equivale a que $1 \notin \sigma_p(T)$, es decir, a que $1 \notin \sigma(T)$ (por la compacidad de T). Cuando $1 \in \sigma_p(T)$, por ser $T^* = T$, se tiene que $\operatorname{Im}(I-T) = \ker(I-T)^{\perp}$. En resumen, se puede enunciar:

Teorema 3.4.2 (Alternativa de Fredholm.)**.** *O bien la ecuación de Fredholm (3.3) tiene una única solución, cualquiera que sea $g \in L^2([a,b])$, o bien la ecuación homogénea*

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

tiene solución no nula, en cuyo caso la ecuación completa tiene infinitas soluciones si y sólo si g es ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea.

También se puden obtener expresiones explícitas de la solución. A continuación se esboza un método. Se introduce un parámetro λ y se considera la ecuación

$$(I - \lambda T)f = g.$$

Los valores de λ para los que la correspondiente ecuación homogénea tiene solución no nula, los valores característicos de la ecuación, que son los inversos de los valores propios no nulos de T, formarán un conjunto finito o una sucesión (λ_n) tal que $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = +\infty$.

Para valores propios pequeños del parámetro, la ecuación se puede resolver por el método de aproximaciones sucesivas: si $|\lambda| < \dfrac{1}{\|T\|}$,

$$(I - \lambda T)^{-1} = I + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \cdots + \lambda^n T^n + \cdots$$

(para la validez de este desarrollo, lo único que se necesita es que T sea continuo). También el operador T^n es un operador integral, de núcleo

$$K_n(s,t) = \int_a^b K(s,t)K_{n-1}(u,t)\,\mathrm{d}u \quad (K_1 = K),$$

y, sustituyendo, se obtiene el *desarrollo de Neumann* de la solución:

$$f(s) = g(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)f(t)\,dt + \cdots + \lambda^n \int_a^b K_n(s,t)f(t)\,dt + \cdots$$

(con convergencia en $L^2([a,b])$).

Bibliografía

[B] Berberian, S.K.: *Lecture in functional analysis and operator theory*. Springer, 1974.

[Br] Bronson, R.: *Matrix Methods- an Introduction.*, Academic Press, New York, 1970.

[C] Cascales, B. y J.M. Mira: *Análisis funcional*, DM, ICE-Universidad de Murcia, Murcia, 2002.

[Cn] Conway, J.B.: *A course in functional analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[M] Miana, Pedro J.: *Curso de análisis funcional*, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, 2005.

[R] Rudin, W.: *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[R2] Rudin, W.: *Análisis real y complejo*, McGraw-Hill, Madrid, 1987.

[Z] Zelazko, W.: *Banach Algebras*, Elsevier, Amsterdam, 1973.