INCLUSIONES ASINTOTICAS DEL ℓ_∞^n-CUBO Y DE ℓ_p^n, $0 < p < 2$,

EN ESPACIOS DE DIMENSION FINITA

por

Julio J. Bernués Pardo

Memoria presentada para optar

al Grado de Doctor en Ciencias

Matemáticas. Realizada bajo

la dirección del Profesor

Dr. Jesús Bastero Eleizalde.

Zaragoza, Mayo 1991.

La Memoria que presento ha sido realizada en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, bajo la dirección del Profesor Dr. Jesús Bastero Eleizalde, a quien quiero expresar mi sincero agradecimiento por la constante ayuda que me ha prestado; sin ella, esta Memoria no sería posible. También quiero manifestar mi gratitud a los Profesores Nigel Kalton y Gilles Pisier, de las Universidades de Columbia-Missouri y París VI respectivamente, por la atención y las ideas que de ellos recibí durante mis estancias en dichas Universidades.

Quiero dar las gracias asimismo a los compañeros del Area de Análisis Matemático del Departamento de Matemáticas por haber hecho posible el que mi trabajo se realizara dentro de un magnífico ambiente científico y humano. Hago extensivo este reconocimiento a los amigos y Profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Columbia-Missouri.

Durante la realización de esta Memoria he disfrutado de una Beca de Investigación financiada por la Diputación General de Aragón. Quiero agradecer de forma especial a D. José Antonio Rojo y al equipo del CONAI, la ayuda e interés que siempre me manifestaron. Lamentablemente, tras su marcha, el "gracias al CONAI" se transformó en "a pesar del CONAI". También fui miembro del Proyecto de Investigación P.S. 87-0059 subvencionado por la DGICYT.

A Laura

INDICE

INTRODUCCION

La presente Memoria está incluída en lo que actualmente se conoce como la Teoría Local de los Espacios Normados, que es una rama del Análisis Funcional y más concretamente de la Geometría de los Espacios de Banach. La Teoría Local es una de las áreas del Análisis Funcional que más rápidamente se ha desarrollado en la última década. Según V.Milman*, "... estudia las propiedades de los espacios normados de dimensión finita y su comportamiento cuando la dimensión tiende a infinito. Este desarrollo floreciente no es accidental. Los matemáticos en el pasado no fijaban su atención en los espacios de alta dimensión como tales. Al principio de este siglo la geometría (geometría convexa) se ocupaba principalmente del estudio de las dimensiones dos y tres. Desde luego, algunos resultados se extendían automáticamente a dimensión n, pero conservando su espíritu de baja dimensión. Cuando se vió que el estudio de los espacios de dimensión alta era importante, éste fue iniciado mediante una *aproximación* por espacios de dimensión infinita. Esto produjo el florecimiento del Análisis Funcional. Después de varias décadas de increíbles éxitos para el Análisis Funcional, fue claro y manifiesto que este desarrollo no daba de hecho casi ninguna información relevante sobre los espacios normados de alta dimensión. Un espacio de dimensión infinita es habitualmente una mala aproximación para un espacio de alta dimensión."... "Actualmente, está comúnmente aceptado que la Teoría Local existe y es diferente de sus dos raíces: la Geometría Convexa de baja dimensión y el Análisis Funcional de dimensión infinita."

Un problema habitual en Análisis Funcional es conocer si un espacio infinito dimensional dado E, contiene buenos subespacios (ℓ_p, c_0, etc...), y de qué forma (complementados, isométricos, casi isométricos, isomorfos ...). El Teorema de Dvoretzky [Dv 1961], re-demostrado y mejorado en [F-L-M 1977], es considerado como el punto de arranque de la Teoría Local y da respuestas al problema de encontrar buenos subespacios, ahora en espacios normados de *dimensión finita.* En la versión de [F-L-M] el

---

* Milman, V. *"Spaces of large dimension; some counter-intuitive results"*. Centre for Math. Anal. Australian Nat. Univ. **20**, 1988.

resultado se enuncia como sigue: *Para todo* $0 < \varepsilon < 1$, *existe una constante* $C(\varepsilon) > 0$ *de forma que si* E *es un espacio normado de dimensión finita* n, *entonces contiene un subespacio* $(1+\varepsilon)$*-isomorfo a* ℓ_2^k *siempre que*

$$k \le C(\varepsilon)\ \log n$$

Dados F, E, denotaremos mediante el diagrama $F \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ el hecho de que si $0 < \varepsilon < 1$, entonces E tiene un subespacio $(1+\varepsilon)$-isomorfo a F. Según ésto, el Teorema de Dvoretzky dice que $\ell_2^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ siempre que $k \le C(\varepsilon) \log \dim E$. La relación entre dim E y k se puede mejorar usando las nociones de tipo y cotipo Rademacher. Esto fue descubierto también en [F-L-M], donde se demuestra que $\ell_2^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ siempre que dim $E \ge C(\varepsilon, q)\, C_q^{-q} k^{q/2}$ con C_q la constante del cotipo de E. En particular, $\ell_2^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_p^n, 1 \le p < 2$, siempre que $n \ge C(\varepsilon)\, k$, que es la relación óptima.

En [Di 1986], el autor considera espacios E r-normados y extiende los resultados de [F-L-M].

También se han investigado las inclusiones de $\ell_p^k,\ p \ne 2$. Concretamente, en [J-S 1 1982], se demuestra que para todo $0 < p < 2$ y $0 < r < p$ con $r \le 1$, $\ell_p^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_r^n$ siempre que $n \ge C(p, r, \varepsilon)\, k$. En [Pi 2 1983],el resultado es extendido a todo espacio de Banach en términos de la constante de tipo p-estable de E, $ST_p(E)$, probando

i) Si $1 < p < 2$, $\ell_p^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ siempre que $k \le C(\varepsilon, p)\, \big(ST_p(E)\big)^{p'}$ donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

ii) Si $p = 1$, $\ell_1^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ siempre que $\log k \le C(\varepsilon)\, ST_1(E)$.

G. Schechtman ha continuado esta línea de investigación y en [Sch 1987], demuestra que para todo subespacio $E \subset L_p$ de dimensión finita y $0 < r \le p < 2$, $E \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_r^n$ siempre que $n \ge C(\varepsilon, p, r)\, (\dim E)^{1+r/p}$. En [B-L-M 1989], los autores mejoran los métodos de Schechtman y demuestran que si $E \subset L_1$, dim $E = k$, $E \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_1^n$ siempre que $n \ge C(\varepsilon)\, k\, (\log k)^3$ y, en función de la constante del tipo T_p de E, $E \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_1^n$ siempre que $n \ge C(\varepsilon, T_p)\, k$. Recientemente, Talagrand en [T 2 1990], elimina el exponente 3 del logaritmo.

Las técnicas empleadas en la demostración de los resultados anteriores son de naturaleza probabilística. Daremos a continuación una idea de las mismas siguiendo para ello la versión del Teorema de Dvoretzky publicada por G. Pisier en [Pi 1 1986].

i) Sean $\xi_1, \ldots, \xi_k$ variables aleatorias gaussianas independientes e igualmente distribuídas con valores en E. La propiedad fundamental de estas variables es que para todo $x = (a_i)_1^k \in S_{\ell_2^k}$, donde $S_{\ell_2^k}$ es la esfera del espacio euclídeo, $\sum_{i=1}^{k} a_i \xi_i$ tiene la misma distribución que ξ_1. Consideramos el suceso $A_x = \{ \, | \, \| \sum_{i=1}^k a_i \xi_i \| - M \, | \leq \varepsilon M \, \}$, con $x = (a_i)_1^k \in S_{\ell_2^k}$ y M la esperanza de $\| \sum_{i=1}^k a_i \xi_i \|$, denotada por $I\!E \| \sum_{i=1}^k a_i \xi_i \|$. Por la propiedad anterior, el suceso tiene la misma medida que $B = \{ \, | \, \|\xi_1\| - I\!E\|\xi_1\| \, | \leq \varepsilon \, I\!E\|\xi_1\| \, \}$.

ii) La estimación de la probabilidad de B es lo que se conoce con el nombre de *desigualdad de desviación* de la variable $\|\xi_1\|$ respecto de su media. Se puede demostrar que $I\!P(A_x) = I\!P(B) \geq 1 - f(\varepsilon, \dim E)$, para una cierta función dependiente de ε y $\dim E$ pero no de x.

iii) El tercer paso es un argumento de densidad. Considérese una $\delta(\varepsilon)$-red N_ε en $S_{\ell_2^k}$, cuya cardinalidad se puede estimar en función de k y ε. Es un cómputo sencillo el ver que $I\!P(\bigcap_{x \in N_\varepsilon} A_x) \geq 1 - \operatorname{card} N_\varepsilon \, f(\varepsilon, \dim E)$. Si imponemos a esta última cantidad que sea estrictamente positiva (de aquí sale la relación entre n, k y ε), aseguramos la existencia de un elemento ω en el espacio de probabilidad tal que para todo $x = (a_i)_1^k \in N_\varepsilon$ tenemos $1 - \varepsilon \leq \dfrac{\| \sum_{i=1}^k a_i \xi_i \|}{M} \leq 1 + \varepsilon$, (estamos diciendo simplemente que $\bigcap_{x \in N_\varepsilon} A_x \neq \emptyset$), y por la densidad de la $\delta(\varepsilon)$-red lo mismo es cierto para todo $x = (a_i)_1^k \in S_{\ell_2^k}$. Por homogeneidad encontramos el operador que da la inclusión de ℓ_2^k en E.

En el esquema anterior ha sido esencial el disponer de una buena *desigualdad de desviación*. Estas aparecen repetidamente como técnica indispensable en las demostraciones en Teoría Local. Particularmente importante es el estudio de desigualdades de desviación de funciones f definidas sobre espacios métricos de probabilidad y sobre espacios de probabilidad producto y el ejemplo más importante es el espacio $\{0,1\}^n$ con la probabilidad de contar y la métrica inducida por la inclusión $\{0,1\}^n \subset \ell_p^n$, $1 \leq p < \infty$; este espacio recibe el nombre de ℓ_p^n-cubo. Una primera técnica para obtener desigualdades de desviación es utilizar el hecho de que en los espacios de probabilidad producto se produce el llamado *fenómeno de concentración de la medida*. Este viene a decir que si tomamos un conjunto de medida no muy pequeña ($\geq 1/2$), entonces incluso una pequeña dilatación de ese conjunto da un conjunto de medida casi la unidad. Las desigualdades usadas en [F-L-M] y [Di] son obtenidas utilizando este método. También en [Am-M 1 1980] y [Mau 1979], se deducen desigualdades de desviación para funciones definidas sobre los espacios $\{0,1\}^n$ y Π_n (el espacio de las permutaciones de $\{1,\ldots,n\}$) respectivamente, y las utilizan para construir conjuntos simétricos dentro de los espacios de Banach. En [T 1 1988], y [J-S 2 1991], los autores consideran funciones definidas sobre $\{0,1\}^n$ y dan desigualdades que mejoran las obtenidas en [Am-M 1]; finalmente en [T 3 1991] el autor utiliza las propiedades de $\{0,1\}^n$ para producir desigualdades para funciones definidas sobre cualquier espacio de probabilidad producto.

Otra técnica para obtener desigualdades de desviación es utilizar las llamadas *acotaciones exponenciales* para sumas de diferencias de martingalas acotadas. En [J-S 1982], se utilizan las acotaciones exponenciales de Azuma y Azuma-Pisier. También en [Sch 1987], y [B-L-M 1989], los autores hacen uso de éstas y otras nuevas.

Otro apunte importante que se puede sacar del esquema anterior es que a la hora de encontrar buenos subespacios dentro de E es suficiente restringir el proceso a un número finito de puntos (la $\delta(\varepsilon)$-red). Estas son posiblemente las raíces de lo que modernamente se ha desarrollado con el nombre de Teoría Local no Lineal, que trata de las propiedades de inmersión de los espacios métricos de cardinal finito y su comportamiento asintótico. En Teoría no Lineal las aplicaciones lineales se sustituyen por aplicaciones Lipschitzianas, la norma por la distancia y la dimensión por el logaritmo del cardinal.

La primera vez que un enunciado sobre espacios métricos finitos aparece en este contexto es en un trabajo de Marcus y Pisier, [Mar-P 1984], donde se demuestra que una contracción definida sobre un subconjunto finito T de L_p con valores en un espacio de Hilbert posee una extensión a todo L_p con norma $c_p\,[\log(\text{card }T)\,]^{1/p-1/2}$. Este es un teorema relativo a la propiedad de extensión para aplicaciones Lipschitzianas.

En [B-F-M 1986], obtienen un análogo al Teorema de Dvoretzky: *"Para todo $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que todo espacio métrico finito (X,d) contiene un subconjunto Y tal que* card $Y \geq C(\varepsilon)\log(\text{card }X)$ *y (Y, d_Y) está $(1+\varepsilon)$-incluido en ℓ_2".*

Ya anteriormente se habían comenzado a investigar las inclusiones de espacios métricos en espacios normados. En [J-L 1984], se demuestra que si T es un subconjunto finito de un espacio de Hilbert de cardinal $|T|$, podemos encontrar una copia $(1+\varepsilon)$-isométrica de T en $\ell_2^{C(\varepsilon)\log|T|}$. En [Sch] el autor generaliza este resultado y encuentra inclusiones de conjuntos finitos $T \subset L_p, 1 \leq p < 2$, en ℓ_p^n. Allí las estimaciones a las que llega son menos satisfactorias que las de [J-L], concretamente $n = C(\varepsilon)\,|T|\,\log|T|$.

Un trabajo especialmente importante dentro de esta teoría no lineal es [B-M-W 1986], en el que se introduce el concepto de tipo Rademacher métrico para espacios métricos y se prueba un teorema del tipo del de Maurey-Pisier lineal encontrando una estrecha relación entre los dos tipos Rademacher (lineal y métrico), y entre las inclusiones uniformes en E de ℓ_p^n y de los ℓ_p^n-cubos. También se estudian relaciones de inclusión casi-isométrica entre los diferentes ℓ_p^n-cubos. Hacemos notar en este punto que todavía no se ha encontrado una definición adecuada de cotipo Rademacher métrico para espacios métricos.

A continuación pasamos a comentar Capítulo por Capítulo el contenido de la Memoria.

En el Capítulo 0 introducimos la notación, definiciones y propiedades de los conceptos básicos que serán manejados a lo largo de la memoria. La notación es estándar. Las propiedades y proposiciones que aparecen son suficientemente conocidas y se enuncian sin demostración, si bien se indica una referencia en donde puede ser consultada una prueba de los mismos.

El Capítulo I está dividido en dos secciones. En la primera, I.a., presentamos las acotaciones exponenciales que posteriormente nos servirán para obtener desigualdades de desviación. En la segunda, I.b., repasamos el método basado en el fenómeno de concentración de la medida en espacios producto y estudiamos las relaciones entre distintas desigualdades de desviación obteniendo alguna nueva (Teorema I.b.12.). También deducimos de las desigualdades conocidas nuevas versiones que serán aplicadas en Capítulos posteriores. En la parte más importante del Capítulo, sección I.b.3., vemos la equivalencia entre las desigualdades de [Am-M 1] y las de [T 1] y [J-S

2] en el caso de que $\{0,1\}^n \subset \ell_1^n$ (Teorema I.b.21); finalmente damos nuevas desigualdades de desviación para ciertas clases de funciones definidas en $\{0,1\}^n$; denotando por M_f la mediana de la variable aleatoria f obtenemos:

Corolario I.b.25. *Sea $\{0,1\}^n$ equipado con la probabilidad de contar $\mathbb{P}$ y sea f una función $f\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

(i) Para todo $\eta, \eta' \in \{0,1\}^n$, $\|\eta\|_1 \le \|\eta'\|_1 \Longrightarrow f(\eta) \le f(\eta')$

(ii) Para todo $\eta, \eta', \eta'' \in \{0,1\}^n$ tal que $\|\eta''\|_1 = \|\eta'\|_1 + 1 = \|\eta\|_1 + 2$ se tiene

$$f(\eta'') - f(\eta') \le f(\eta') - f(\eta)$$

Con estas condiciones $\forall\, t > 0$,

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} \le \exp - \frac{t^2 n}{8\Delta^2 f} \tag{10}$$

donde Δf es la variación de f i.e. $\Delta f = f(1,\dots,1) - f(0,\dots,0)$

y

Teorema I.b.27. *Sea $\{0,1\}^n$ con la probabilidad de contar $\mathbb{P}$, y F una función $F\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\eta, \eta' \in \{0,1\}^n$, $\|\eta\|_1 \le \|\eta'\|_1 \Longrightarrow F(\eta) \le F(\eta')$. Entonces para todo $t > 0$ existe $k = k(t) \ge \left[\frac{n}{2}\right]$ tal que la función $f = F \circ i_k$ verifica*

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} \le 2 \exp - \frac{t^2 n}{128\Delta^2 F}$$

con $i_k\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}^n$, $i_k(\eta) = (\eta, 0, \overset{n-k}{\dots}, 0)$

Las dos desigualdades mejoran las obtenidas en los artículos [Am-M 1], [T 1] y [J-S 2].

En el Capítulo II iniciamos el estudio de la inclusión del ℓ_∞^n-cubo en espacios normados, r-normados y en otros ℓ_p^n-cubos. Esta cuestión se puede enunciar de manera sencilla como sigue: "Dado un espacio r-normado E, determinar el número de puntos en E que podemos encontrar que estén (salvo error ε) a igual distancia uno de otro". Las estimaciones que obtenemos son óptimas en la mayoría de los casos. Utilizando las desigualdades arriba enunciadas I.b.25. y I.b.27., demostramos:

Teorema II.b.5. *Para todo $0 < r < 1$ existe una constante $C = C(r) > 0$ tal que, para todo $0 < \varepsilon < 1$ y para todo espacio r-normado E de dimensión $\dim E = n$, con base 1-subsimétrica normalizada $\{e_1, \dots, e_n\}$ existe un subconjunto de N puntos $T = \{x_1, \dots, x_N\}$ en E de forma que*

$$1 - \varepsilon < \|x_i - x_j\| < 1 + \varepsilon \qquad \forall\ i \neq j$$

siempre que

$$n > \frac{C}{\varepsilon^2} \log N$$

También como aplicación de las desigualdades del Capítulo I, obtenemos buenas inclusiones en amplias familias de espacios normados (Teoremas II.b.7., II.c.1., II.c.3., II.c.4., II.c.6., II.c.8.). Igualmente mejoramos los resultados obtenidos en [B-M-W] para inclusiones del ℓ_∞^n-cubo en los ℓ_p^n-cubos, (Corolario II.b.4.).

Los resultados de la sección II.b. han sido publicadas en [B-B-K 1990]. Así mismo los resultados contenidos en I.b.3. y II.c. forman otro artículo de investigación, [B-B].

El Capítulo III en su primera parte, secciones III.a., III.b., y III.c., estudia el problema de la inclusión de ℓ_p^n en espacios r-Banach, $0 < r \leq p < 2$. En concreto demostramos los siguientes Teoremas:

Teorema III.b.1. *Sean $r < p < 2$ verificando $\dfrac{(4-p)p}{4} < r < p$. Existe $C(r,p) > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo espacio r-Banach E, ℓ_p^k está $(1+\varepsilon)$-incluido en E siempre que*

$$k \leq C(r,p)\, \varepsilon^{\frac{p^2}{r(p-r)}} \big(ST_p(E)\big)^{\frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}$$

Teorema III.c.1. *Sea $0 < r < 1$. Para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe una constante $C(\varepsilon, r) > 0$ tal que para todo espacio r-Banach E, ℓ_r^k está $(1+\varepsilon)$-incluido en E siempre que*

$$\log k \leq C(\varepsilon, r)\big(ST_r(E)\big)^r$$

Las técnicas empleadas en la demostración de ambos resultados,(uso de variables p-estables, desigualdades de desviación, comparación de variables aleatorias), son las mismas que las usadas por Pisier en [Pi 2] para el caso de espacios de Banach ($r = 1$). En algunos casos los resultados de Pisier se adaptan de manera inmediata al caso de espacios r-Banach; en otros la generalización no es en modo alguno trivial.

Como Corolario obtenemos el resultado central (Teorema 1) de [J-S 1] para el caso $r < 1$:

Corolario III.b.5. *Si* $E = \ell_r^n$ $(0 < r < 1)$ *y* $r < p < 2$ *entonces para todo* $0 < \varepsilon < 1$ *existe una constante* $C = C(\varepsilon, r, p)$ *tal que* ℓ_p^k *está* $(1+\varepsilon)-$*incluido en* ℓ_r^n *siempre que* $k \leq Cn$

También como consecuencia resulta un análogo del Teorema de Maurey-Pisier para el tipo ([Mau-P]) en espacios r-Banach. Dicho teorema es el siguiente:

Teorema III.d.1. *Sea* E *espacio r-Banach infinito dimensional.*

i) Los números definidos como

$$\begin{aligned} p(E) &= \inf\{p \,|\, \ell_p^n \,\textit{está}\, (1+\varepsilon) - \textit{incluido en}\, E \;\forall n \in I\!N,\, \forall\, 0 < \varepsilon < 1\} \\ \tilde{p}(E) &= \sup\{p \,|\, E \textit{ es de tipo estable } p\} \\ p'(E) &= \sup\{p \,|\, E \textit{ es de tipo Rademacher } p\} \end{aligned}$$

son iguales ($p(E) = \tilde{p}(E) = p'(E)$)*.*

ii) $\ell_{p(E)}$ *es finitamente representable en* E*.*

Este mismo resultado fue enunciado por Kalton en [K-1]. Los métodos usados por él son infinito-dimensionales y nada tienen que ver con los empleados aquí. Además con nuestras técnicas podemos describir con detalle la forma en que $\ell_{p(E)}$ es finitamente representable en E.

En la última sección del Capítulo extendemos primeramente el teorema antes mencionado de [J-L] y, utilizando la demostración de Pisier [Pi 1] del Teorema de Dvoretzky, logramos buenas respuestas al problema de la inclusión de subconjuntos de un espacio de Hilbert en espacios de Banach (Teorema III.e.4.). Finalmente, mediante las técnicas desarrolladas en las secciones anteriores, damos una solución parcial al problema de la inclusión de puntos de L_p en ℓ_r^n, $0 < r \leq p < 2, r \leq 1$, mejorando en los casos considerados los resultados de [Sch] (Teoremas III.e.5. y III.e.7. y Corolarios III.e.6., III.e.6. y III.e.10.).

CAPITULO 0.

0.a. VARIABLES ALEATORIAS.

En esta sección recordaremos las herramientas probabilísticas que necesitaremos a lo largo de la memoria; las definiciones se adaptarán a su posterior uso por lo que evitaremos generalizaciones innecesarias.

0.a.1. Generalidades. Martingalas.

A lo largo de la sección todas las variables aleatorias que aparecen se suponen definidas, salvo que se especifique lo contrario, sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. En $\mathbb{R}$ consideramos siempre la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$. Las letras $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ denotarán sub$-\sigma$-álgebras de Σ y por f, g entenderemos variables aleatorias reales Σ-medibles. Escribiremos simplemente variables aleatorias para denotar variables aleatorias *reales.*

Dada una función f, la σ-álgebra generada por la familia $\{ f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B} \}$ es la menor σ-álgebra que hace a f medible. Dicha σ-álgebra se denota por $\sigma(f)$.

Sea $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ nuestro espacio de probabilidad, y sea $\mathcal{F} \subset \Sigma$. Denotamos por $\mathbb{P}_{\mathcal{F}}$ la medida de probabilidad inducida por $\mathbb{P}$ en $\mathcal{F}$.

Definiciones 0.a.1.

i) Las sub$-\sigma$-álgebras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se dicen independientes si para todo $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$ se tiene

$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\}$$

ii) Dos variables aleatorias f, g se dicen independientes *si las σ-álgebras $\sigma(f)$ y $\sigma(g)$ lo son, i.e. para todo $A, B \in \mathcal{B}$,*

$$\mathbb{P}\{f \in A\,,\, g \in B\} = \mathbb{P}\{f \in A\} \cdot \mathbb{P}\{g \in B\}$$

iii) Una variable aleatoria se dice simétrica *si para todo* $A \in \mathcal{B}$

$$\mathbb{P}\{f \in A\} = \mathbb{P}\{-f \in A\}$$

Se dice simétrica respecto a $c \in \mathbb{R}$ *si* $f - c$ *es simétrica.*

iv) Dos variables aleatorias se dice que están igualmente distribuídas *si para todo* $A \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{P}\{f \in A\} = \mathbb{P}\{g \in A\}$$

y se denota $f \stackrel{d}{=} g$.

v) Dos variables aleatorias f, g *se dicen que son iguales* casi seguramente, $(c.s., \mathbb{P})$, *si* $\mathbb{P}\{f \neq g\} = 0$.

A menudo utilizaremos la abreviatura v.a.i.i.d. para indicar variables aleatorias independientes igualmente distribuídas.

En la memoria aparecerán variables aleatorias con valores en $\mathbb{R}^n$. Las definiciones y notaciones anteriores sirven también en el caso vectorial.

Definición 0.a.2. *Sea* f *una variable aleatoria. Un número real* M_f *se dice mediana de* f *si*

$$\mathbb{P}\{f \geq M_f\} \geq \frac{1}{2} \quad y \quad \mathbb{P}\{f \leq M_f\} \geq \frac{1}{2}$$

o equivalentemente si

$$F(M_f - 0) \leq \frac{1}{2} \leq F(M_f)$$

donde F *es la función de distribución de* $\mathbb{P}$.

Observaciones.

i) Toda variable aleatoria posee mediana (no necesariamente única).

ii) Si $f \geq g$ entonces $M_f \geq M_g$.

iii) $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona $\implies g(M_f)$ es una mediana de $g \circ f$.

iv) Si f es simétrica respecto a $c \in I\!R$ entonces c es mediana de f.

Definición 0.a.3. *Sea f una v.a. integrable $f\colon \Omega \to I\!R$ y $\mathcal{F} \subset \Sigma$. La esperanza condicional de f respecto de $\mathcal{F}$, denotada por $I\!E\,(\,f\,|\,\mathcal{F}\,)$, es la única (c.s.,$I\!P_{\mathcal{F}}$) variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible tal que para todo conjunto A $\mathcal{F}$-medible se tiene,*

$$\int_A f(\omega)\,dI\!P(\omega) = \int_A I\!E\,(\,f\,|\,\mathcal{F}\,)\,(\omega)\,dI\!P_{\mathcal{F}}(\omega)$$

En el futuro escribiremos simplemente (c.s.) en vez de (c.s. , $I\!P$) ó (c.s. , $I\!P_{\mathcal{F}}$). En el caso de que tengamos variables aleatorias f $\mathcal{F}$-medible y g $\mathcal{G}$-medible con $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ la igualdad $f = g$ $(c.s.)$ significa igualdad respecto de la probabilidad $I\!P_{\mathcal{F}}$ (es decir relativa a la σ-álgebra más pequeña).

La demostración de la siguiente lista de propiedades se puede encontrar por ejemplo en [L-R], Cap. 6.

Propiedades 0.a.4.

i) Si $\mathcal{F} = \{\,\emptyset, \Omega\,\}$ entonces $I\!E(f\,|\,\mathcal{F}) = I\!E(f)$, donde $I\!E(f)$ es la esperanza de f.

ii) Para toda variable aleatoria integrable $f\colon \Omega \to I\!R$ $\mathcal{F}-$ medible $I\!E(f\,|\,\mathcal{F}) = f,\ c.s.$ (en particular $I\!E(f\,|\,\sigma(f)\,) = f,\ c.s.$).

iii) Si f es integrable, $I\!E\,(\,I\!E(f\,|\,\mathcal{F})\,) = I\!E(f)$.

iv) Sean f, g variables aleatorias tal que g y $f \cdot g$ son integrables. Si f es $\mathcal{F}$-medible se tiene

$$I\!E(f\,g\,|\,\mathcal{F}) = f\,I\!E(g\,|\,\mathcal{F}),\ c.s.$$

v) Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y f es integrable,

$$I\!E(f\,|\,\mathcal{F}) = I\!E(I\!E(f\,|\,\mathcal{F})|\,\mathcal{G}) = I\!E(I\!E(f\,|\,\mathcal{G})|\,\mathcal{F}),\ \ c.s.$$

vi) Si f es integrable y $\sigma(f)$ y $\mathcal{F}$ son independientes entonces

$$\mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F}) = \mathbb{E}(f), \ \ c.s.$$

vii) Sea $\sigma(\mathcal{F},\mathcal{G})$ la menor σ-álgebra generada por $\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$. Sea f una variable aleatoria integrable. Si $\sigma(f)$ y $\mathcal{F}$ son independientes de $\mathcal{G}$ entonces,

$$\mathbb{E}(f \,|\, \sigma(\mathcal{F},\mathcal{G})) = \mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F}) \ \ c.s.$$

Definición 0.a.5. *Sea $(\mathcal{F}_n, n \geq 1)$ una sucesión creciente de sub$-\sigma$-álgebras de Σ (i.e. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Una sucesión de variables aleatorias integrables $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ definidas sobre Ω constituyen una martingala (discreta) respecto de $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ si verifica las siguientes dos condiciones:*

i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es $\mathcal{F}_n$-medible.

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(f_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = f_n$ (c.s. $\mathbb{P}_{\mathcal{F}_n}$).

• Si $\mathcal{F}_n = \sigma(f_1, \ldots, f_n)$, es decir $\mathcal{F}_n$ es la mínima σ-álgebra que hace medibles a $\{ f_i \mid 1 \leq i \leq n \}$, diremos simplemente que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una martingala.

• Dada una función integrable $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ y una sucesión creciente de σ-álgebras $(\mathcal{F}_n, n \geq 1)$ se llama *martingala asociada a f* a la martingala $f_n = \mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F}_n)$.

• Sean $(\Omega_i, \mathbb{P}_i, \Sigma_i)$, $i = 1, \ldots, n$ espacios de probabilidad. Consideramos el espacio $(\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \ , \ \mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i \ , \ \Sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} \Sigma_i)$ es decir el producto cartesiano con la probabilidad producto respecto de la σ-álgebra Σ generada por los conjuntos de la forma $\{A_1 \times \cdots \times A_n \mid A_i \subset \Sigma_i \ i = 1, \ldots, n\}$.

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función Σ-medible e integrable. Para todo $i = 1, \ldots, n$ sea $\mathcal{F}_i = \sigma\langle\{ A_1 \times \cdots \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n \mid A_k \subset \Sigma_k, \ k = 1, \ldots, i \}\rangle$. Escribiremos abreviadamente, $\mathcal{F}_i = \sigma\langle \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n \rangle$. Bajo estas condiciones,

$$\mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F}_i)(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \int_{\Omega_{i+1} \times \ldots \times \Omega_n} f(\omega_1, \ldots \omega_i, \omega'_{i+1}, \ldots, \omega'_n) \, d\mathbb{P}_{i+1} \ldots d\mathbb{P}_n$$

• Dada una martingala $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ asociada a la sucesión $\mathcal{F}_n$ escribimos $d_n = f_n - f_{n-1}$, donde suponemos $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y así $f_0 = \mathbb{E}(f)$. La sucesión $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ se llama sucesión de diferencias de martingala (asociada a $\mathcal{F}_n$). Claramente d_n es $\mathcal{F}_n$-medible.

Proposición 0.a.6. *Sea $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Dada una función integrable $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ y una sucesión creciente de sub-σálgebras $(\mathcal{F}_n, n \geq 1)$ de Σ denotar $\mathcal{F} = \sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \Big)$. Bajo estas hipótesis,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F}_n\,) = \mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F}\,) \qquad (c.s.)$$

La demostración se puede consultar en [L-R] pg. 409.

Un caso particular de la Proposición anterior, del que haremos uso en la Memoria es el siguiente:

Proposición 0.a.7. *Sea (ξ_n) una sucesión de variables aleatorias que forman (c.s.) una serie convergente, (i.e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = f$ (c.s.)). Suponer f integrable. Sea $\mathcal{F}_n = \sigma\,(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y construyamos la martingala asociada a f, $f_n = \mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F}_n\,)$. Sea (d_n) su sucesión de diferencias asociada. Bajo estas condiciones,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = f - \mathbb{E}(f), \quad (c.s.)$$

0.a.2. Variables aleatorias de Rademacher, gaussianas y p-estables.

Definición 0.a.8. *Una variable aleatoria ε se dice de Rademacher si tiene como función de probabilidad*

$$\mathbb{P}\{\,\varepsilon = 1\,\} = \mathbb{P}\{\,\varepsilon = -1\,\} = \frac{1}{2}$$

Definición 0.a.9. *Una variable aleatoria γ se dice gaussiana normalizada (o simplemente gaussiana) si tiene como función de distribución*

$$F(x) = \mathbb{P}\{\,\gamma \leq x\,\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp -\frac{t^2}{2}\, dt$$

Definición 0.a.10. *Una variable aleatoria θ se dice p-estable si su transformada de Fourier es*

$$\mathbb{E}(\exp\, it\,\theta) = e^{-c\,|t|^p}$$

para algún $c > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Una variable p-estable se dice estándar si cumple la definición para $c = 1$.

Puesto que solamente usaremos variables p-estables estándar omitiremos el adjetivo estándar.

Comentarios.0.a.11. Ver [Lo].

i) Las variables 2-estables son exactamente las variables gaussianas.

ii) Sólamente existen variables p-estables para $0 < p \leq 2$.

iii) Sean $\theta_1, \ldots, \theta_n$ variables p-estables i.i.d.. Para todo $(a_i) \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,\theta_i \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \theta_1$$

iv) Las variables 2-estables (i.e. gaussianas) tienen momentos finitos de cualquier orden, es decir $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty$ para todo $r > 0$. En el caso de variables p-estables, $0 < p < 2$, la situación es muy diferente. Es conocido que $\lim\limits_{t\to\infty} t^p\,\mathbb{P}\,\{\,|\theta| > t\,\}$ existe y es finito y no nulo. De aquí se deduce $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty \Longleftrightarrow r < p$.

Observación. Toda variable p-estable es simétrica.

0.b. ESPACIOS CUASI-NORMADOS Y ESPACIOS METRICOS.

Constantes numéricas

A lo largo de la memoria las letras $C, c, K, ...$ denotarán constantes numéricas reales. En general no estaremos interesados en estimar su valor. Es por eso que distintas apariciones de la misma letra pueden representar diferentes valores numéricos. Sí en cambio las distinguiremos, mediante el uso de subíndices $C_p, c_1, K_2, ...$, cuando en la demostración de un resultado interese resaltar su localización en lemas previos.

Desigualdades numéricas.

Las siguientes desigualdades elementales entre números reales serán de utilidad sobre todo en el Capítulo III.

1. $\forall\; x, y \geq 0$ y $0 < r \leq 1$, $(x+y)^r \leq x^r + y^r \leq 2^{1-r}\,(x+y)^r$

2. $\forall\; x, y \geq 0$ y $1 \leq r < \infty$, $x^r + y^r \leq (x+y)^r \leq 2^{r-1}\,(x^r + y^r)$

3. $\forall\; x, y \geq 0$ y $0 < r \leq 1$, $|\, x^r - y^r \,| \leq |\, x - y \,|^r$

0.b.1. Espacios cuasi-normados.

Definición 0.b.1. *Un espacio vectorial E se dice cuasi-normado si existe una función $\|\cdot\|: E \to I\!R^+$ tal que*

i) $\|\, x \,\| \geq 0$ *y* $\|\, x \,\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $\forall x \in E$.

ii) $\|\, \lambda\, x \,\| = |\lambda|\, \|\, x \,\|$, $\forall\; \lambda \in I\!R$, $x \in E$.

iii) Existe una constante C tal que $\|\, x + y \,\| \leq C \left(\|\, x \,\| + \|\, y \,\| \right)$, $\forall x, y \in E$.

La menor de las constantes C que verifican iii) se llama constante de la cuasi-norma $\|\cdot\|$ de E.

Si reemplazamos la condición iii) por

iii)$'$ $\| x+y \|^r \leq \| x \|^r + \| y \|^r \,, \quad \forall x, y \in E, \quad 0 < r \leq 1$

llegamos a la definición de espacio r-normado. Para $r = 1$ se obtienen, por supuesto, los espacios normados.

Definición 0.b.2. *Dos cuasi-normas $\| \cdot \|$ y $\| \cdot \|_0$ sobre un mismo espacio cuasi-normado E se dicen equivalentes si existen constantes $c, C > 0$ tal que para todo $x \in E$,*

$$c\| x \| \leq \| x \|_0 \leq C\| x \|$$

Comentarios 0.b.3.

i) Si $\| \cdot \|$ es una r-norma entonces es s-norma para todo $0 < s < r$.

ii) Todo espacio r-normado es cuasi-normado con constante $C \leq 2^{1/r-1}$, como se deduce facilmente de la desigualdad $x^r + y^r \leq 2^{1-r}\,(x+y)^r$ aplicada a iii)$'$. A la inversa, si $(E, \| \cdot \|)$ es un espacio cuasi-normado con constante C, entonces $\| \cdot \|$ es equivalente a una r-norma donde $0 < r < \dfrac{\log 2}{\log 2C}$. Ver [Ro] ó [K-P-R].

iii) Para toda r-norma, $\big| \, \|x\|^r - \|y\|^r \big| \leq \|x-y\|^r$ (toda r-norma $\|\cdot\|$ es uniformemente continua).

Notación. Dado un espacio cuasi-normado $(E, \| \cdot \|)$ escribiremos

$$B_E = \{ \, x \in E \mid \|x\| \leq 1 \, \} \qquad \text{y} \qquad S_E = \{ \, x \in E \mid \|x\| = 1 \, \}$$

A continuación, introducimos la notación relativa a espacios concretos que irán apareciendo a lo largo de la memoria.

- **Espacios** $L_p\,,\ \ell_p\,,\ \ell_{p\infty}\,,\ L_{p\infty}\,,\ (0 < p \leq \infty)$**.**

Espacio	**Vectores**	**Cuasi-norma**
$\ell_p\ ,\ 1 \leq p < \infty$	$(a_i)_{i=1}^{\infty},\ a_i \in \mathbb{R}$	$\big(\sum_{i=1}^{\infty} \lvert a_i\rvert^p\big)^{1/p}$
ℓ_∞	$(a_i)_{i=1}^{\infty},\ a_i \in \mathbb{R}$	$\sup_{i\in\mathbb{N}} \lvert a_i\rvert$
$\ell_p^n\ ,\ 1 \leq p < \infty$	$(a_i)_{i=1}^{n},\ a_i \in \mathbb{R}$	$\big(\sum_{i=1}^{n} \lvert a_i\rvert^p\big)^{1/p}$
ℓ_∞^n	$(a_i)_{i=1}^{n},\ a_i \in \mathbb{R}$	$\sup_{1\leq i\leq n} \lvert a_i\rvert$
$\ell_{p,\infty}\ ,\ 1 \leq p < \infty$	$(a_i)_{i=1}^{\infty},\ a_i \in \mathbb{R}$	$\sup_{i\in\mathbb{N}} i^{1/p} a_i^*$
$\ell_{p,\infty}^n\ ,\ 1 \leq p < \infty$	$(a_i)_{i=1}^{n},\ a_i \in \mathbb{R}$	$\sup_{1\leq i\leq n} i^{1/p} a_i^*$
$L_p(\Omega,\Sigma,\mathbb{P}) = L_p$	$f\colon\Omega \to \mathbb{R}$, medibles	$\left(\int_\Omega \lvert f(\omega)\rvert^p\, d\mathbb{P}(\omega)\right)^{1/p}$
$L_\infty(\Omega,\Sigma,\mathbb{P}) = L_\infty$	$f\colon\Omega \to \mathbb{R}$, medibles	$\text{ess}\ \sup_{\omega\in\Omega} \lvert f(\omega)\rvert$
$L_{p,\infty}(\Omega,\Sigma,\mathbb{P}) = L_{p,\infty}$	$f\colon\Omega \to \mathbb{R}$, medibles	$\text{ess}\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*$

(a_i^*) y f^* denotan la reordenación no-decreciente de $(\lvert a_i\rvert)$ y $\lvert f\rvert$ respectivamente.

La notación para las cuasi-normas serán las habituales, (ver [L-T 1,2]) i.e. $\big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\big)^{1/p} = \|(a_i)\|_p\,,\ \sup_{i\in\mathbb{N}} i^{1/p} a_i^* = \|(a_i)\|_{p,\infty}\ ,\ \left(\int_\Omega |f(\omega)|^p\, d\mathbb{P}(\omega)\right)^{1/p} = \|f\|_p$

Comentarios 0.b.4.

i) Las expresiones $\|(a_i)\|_p$ y $\|f\|_p$ representan una norma si $1 \leq p \leq \infty$ y una p-norma si $0 < p < 1$. Las expresiones $\|(a_i)\|_{p,\infty}$ y $\|f\|_{p,\infty}$ son equivalentes a una norma si $p > 1$, a una p-norma si $p < 1$ y a una r-norma para todo $r < p$ si $p = 1$. (Ver [K-2]).

ii) Para todo $0 < p \leq q \leq \infty$ y $(a_i) \in I\!R^n$,

$$\| (a_i) \|_q \leq \| (a_i) \|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \| (a_i) \|_q$$

iii) Para todo $0 < p \leq q$, $L_q \subset L_p$ y además para todo $f \in L_q$, $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.

iv) Para todo $0 < p < q$, $L_q \subset L_{q,\infty} \subset L_p$ y además existe una constante $C_{p,q} > 0$ tal que para todo $f \in L_q$

$$C_{p,q} \|f\|_p \leq \|f\|_{q,\infty} \leq \|f\|_q$$

v) Para todo $0 < p < \infty$ y $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p\infty}$

$$\| (a_i) \|_{p,\infty} = \| (|a_i|) \|_{p,\infty} = \| (|a_i|^p) \|_{1,\infty}^{1/p}$$

vi) Para todo $0 < p, q \leq \infty$ y $n, m \in I\!N$, denotamos $\ell_p^n(\ell_q^m) = \ell_q^m \bigoplus \overset{n}{\cdots} \bigoplus \ell_q^m$ con la cuasi-norma $\|x\|_{\ell_p^n(\ell_q^m)} = \| \, \|x_i\|_q \, \|_p$ donde $x = (x_1, \ldots x_n)$, $x_i \in \ell_q^m$. Análogamente se define $\ell_{p_1}^{n_1}(\ell_{p_2}^{n_2}(\ldots(\ell_{p_k}^{n_k})\ldots))$, $0 \leq p_1, \ldots, p_k \leq \infty$, $n_i \in I\!N$.

- **Espacios de Orlicz de sucesiones.**

Definición 0.b.5.

i) Una función de Orlicz φ es una función real continua, no-decreciente y convexa definida en $[0, \infty)$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = +\infty$. φ es no degenerada si $\varphi(t) > 0, \ \forall t > 0$. Si además $\varphi(1) = 1$, φ se dice normalizada.

ii) Una función de Orlicz no-degenerada satisface la condición Δ_2 en cero si existe $C > 0$ tal que $\varphi(2t) \leq C\,\varphi(t)\,, \quad \forall\ t > 0.$

Notación. Llamaremos simplemente función de Orlicz a toda función de Orlicz no degenerada normalizada.

Con la notación anterior, el espacio de Orlicz de sucesiones es:

Espacio	**Vectores**	**Norma (Luxemburg)**
ℓ_φ	$(a_i)_{i=1}^\infty,\ a_i \in I\!R$	$\inf\{\, t > 0 \mid \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\frac{\lvert a_i \rvert}{t}) \leq 1\,\}$
ℓ_φ^n	$(a_i)_{i=1}^n,\ a_i \in I\!R$	$\inf\{\, t > 0 \mid \sum_{i=1}^{n} \varphi(\frac{\lvert a_i \rvert}{t}) \leq 1\,\}$

La norma de un vector será denotada en ambos casos por $\|(a_i)\|_\varphi$.

Los coeficientes de Simonenko para una función de Orlicz φ, p_φ, q_φ se definen como

$$p_\varphi = \inf_{t>0} \frac{t\,\varphi'(t)}{\varphi(t)} \qquad\qquad q_\varphi = \sup_{t>0} \frac{t\,\varphi'(t)}{\varphi(t)}$$

donde $\varphi'(t)$ es la derivada por la derecha de φ (ver [Ma]).

- **Espacios de Lorentz de sucesiones.**

Sea $0 < p < \infty$. Sea $\omega = (\omega_i)_{n=1}^\infty$ una sucesión no creciente tal que $\omega_1 = 1$, $\lim_{i\to\infty} \omega_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i = \infty$.

El espacio de Lorentz de sucesiones se define como

Espacio	**Vectores**	**Cuasi-norma**
$d(\omega, p)$	$(a_i)_{i=1}^\infty,\ a_i \in I\!R$	$\big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{*^p}\ \omega_i\big)^{1/p}$
$d^n(\omega, p)$	$(a_i)_{i=1}^n,\ a_i \in I\!R$	$\big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{*^p}\ \omega_i\big)^{1/p}$

La cuasi-norma de un vector será denotada en ambos casos por $\|(a_i)\|_{d(\omega,p)}$.

Bases en espacios cuasi-Banach.

Definiciones 0.b.6.

i) *Una sucesión* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *en un espacio cuasi-Banach* E *se dice base de Schauder de* E *si para todo* $x \in E$ *existe una única sucesión de escalares* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *tal que* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n$.

ii) *Sea* $K \geq 1$. *Una base de Schauder se dice K-incondicional si para todo* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n$,

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\, a_n\, e_n \| \leq K \, \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n \|$$

para toda elección de $\varepsilon_n = \pm 1$

iii) *Sea* $K \geq 1$. *Una base de Schauder se dice K-simétrica si para todo* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n$,

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\, a_n\, e_{\pi(n)} \| \leq K \, \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n \|$$

para toda elección de $\varepsilon_n = \pm 1$ *y toda permutación* $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

iv) *Sea* $K \geq 1$. *Una base de Schauder se dice K-subsimétrica si para todo* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n$,

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n \| \leq \| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\, a_n\, e_{m_n} \| \leq K \, \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n \|$$

para toda elección de $\varepsilon_n = \pm 1$ *y toda sucesión creciente* (m_n).

Comentarios 0.b.7.

Dado un espacio cuasi-Banach $(E, \| \cdot \|)$ con base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ K-incondicional se puede re-definir la cuasi-norma de forma que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ sea 1-incondicional. En efecto, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n$ se define la cuasi-norma $\| x \|_0 = \sup_{\varepsilon_n = \pm 1} \| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\, a_n\, e_n \|$ que es 1-incondicional y equivalente a la dada. Resultados análogos son ciertos en los casos simétrico y subsimétrico.

Dado un espacio cuasi-Banach $(E, \| \cdot \|)$ con base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ simétrica escribiremos

$$\lambda(n) = \| \sum_{i=1}^{n} e_i \|$$

Si la cuasi-norma es 1-simétrica entonces $\lambda(n) = \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, e_{\pi(i)} \| \ \forall\ \varepsilon_i = \pm 1, \forall\ \pi$ permutación.

Distancia de Banach-Mazur.

Definición 0.b.8. *La distancia Banach-Mazur entre dos espacios cuasi-Banach isomorfos E y F se define como*

$$d\,(E, F) = \inf\{\, \| T \| \cdot \| T^{-1} \| \ \ | \, T\colon E \to F \text{ isomorfismo} \,\}$$

Diremos que E y F son C-isomorfos, $C \geq 1$, si $d\,(E, F) \leq C$.

Nosotros habitualmente manejaremos la siguiente definición equivalente:

Definición 0.b.9. *$d\,(E, F)$ es el ínfimo de las constantes $C > 0$ tal que existe un isomorfismo $T\colon E \to F$*

$$\| x \|_E \leq \| T(x) \|_F \leq C \, \| x \|_E \qquad \forall\ x \in E$$

Es fácil comprobar que cuando los espacios son de dimensión finita el ínfimo es en realidad un mínimo y por tanto existe un isomorfismo $T\colon E \to F$ tal que

$$\| x \|_E \leq \| T(x) \|_F \leq \mathrm{d}\,(X, Y) \, \| x \|_E \qquad \forall\ x \in E$$

Definición 0.b.10. *Dados E, F espacios cuasi-Banach y $C \geq 1$, diremos que E está C-incluido en F si existe un subespacio F_1 de F tal que $d\,(E, F_1) \leq C$.*

Escribiremos abreviadamente la anterior propiedad mediante el diagrama $E \overset{C}{\hookrightarrow} F$

Representatividad finita.

Definición 0.b.11. *Dados dos espacios cuasi-Banach E, F, se dice que E es finitamente representable en F si para todo $\varepsilon > 0$ y todo subespacio de dimensión finita $E_1 \subset E$ existe un subespacio $F_1 \subset F$ tal que*

$$d\,(E_1, F_1) \leq 1 + \varepsilon$$

La propiedad anterior en general es dificil de verificar pues involucra a todos los subespacios finito dimensionales de E. La siguiente conocida proposición permite simplificar el problema en algunos casos importantes. Ver [Be] para una demostración.

Proposición 0.b.12. *Sean E, F espacios cuasi-normados y sea E_n una sucesión creciente de subespacios de E, $\dim E_n = n$, tal que $\overline{\bigcup_{n\geq 1} E_n} = E$. Entonces E es finitamente representable en F si y sólo si $E_n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} F$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $n \in I\!N$.*

El espacio ℓ_p, $(0 < p < \infty)$ verifica las condiciones de la Proposición 0.b.13. donde $E_n = \ell_p^n$.

Desigualdad de Khintchine. Tipo y cotipo Rademacher.

Teorema 0.b.13.(Desigualdad de Khintchine). *Para todo $0 < p < \infty$ existen $a_p, b_p > 0$ tal que para cualquier $n \in I\!N$ y cualquier sucesión de números reales $a_1, \ldots, a_n$ se tiene*

$$a_p \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(I\!E \Big| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i \Big|^p \right)^{1/p} \leq b_p \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2}$$

donde ε_i denotan v.a.i.i.d. de Rademacher.

Ver [Be] ó [L-T] para una demostración.

Definición 0.b.14. *Un espacio cuasi-Banach E se dice de tipo Rademacher p (o simplemente tipo p) si existe una constante $C > 0$, tal que para todo $n \in I\!N$ y cualesquiera vectores $x_1, \ldots, x_n \in E$*

$$I\!E \, \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \| \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

donde ε_i denotan v.a.i.i.d. de Rademacher.

Definición 0.b.15. *Un espacio cuasi-Banach E se dice de cotipo Rademacher q (o simplemente cotipo q) si existe una constante $C > 0$, tal que para todo $n \in I\!N$ y cualesquiera vectores $x_1, \ldots, x_n \in E$*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leq C \, I\!E \, \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \|$$

donde ε_i denotan v.a.i.i.d. de Rademacher.

Claramente las definiciones de tipo y cotipo dependen únicamente de la estructura finito dimensional del espacio E. El siguiente resultado recoge este hecho.

Proposición 0.b.16. *Si E es finitamente representable en F entonces*

i) F es de tipo $p \Longrightarrow E$ es de tipo p.

ii) F es de cotipo $q \Longrightarrow E$ es de cotipo q.

0.b.2. Espacios métricos.

Definición 0.b.17. *Sea (M,ρ) un espacio métrico;*

i) Sea $A \subset M$. Para todo $x \in M$ se define la distancia de x a A como $\rho(x,A) = \inf\{\, \rho(x,a) \mid a \in A \,\}$.

ii) Para $A \subset M$ y $t > 0$ se llama t-dilatación de A a

$$A_t = \{x \in M \mid \ \rho(x,A) \leq t\,\}$$

iii) Se llama diametro de M a diam $M = \sup_{x\neq y} \rho(x,y)$

Definición 0.b.18. *Sean dos espacios métricos (M,ρ) y (M',ρ'),*

i) Dada una función $f\colon M \to M'$, se llama módulo de continuidad de f a la función $\omega_f\colon I\!R^+ \to I\!R^+$ definida por

$$\omega_f(t) = \sup_{\rho(x,y)\leq t} \rho'(f(x),f(y))$$

ii) Una función $f\colon M \to M'$ se dice Lipschitziana si

$$\sup_{x\neq y} \frac{\rho'(f(x),f(y))}{\rho(x,y)} < \infty$$

En el segundo caso dicho supremo recibe el nombre de constante de Lipschitz de f y la denotaremos indistintamente $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$ ó σ_f (o simplemente σ si no hay lugar a confusión).

Observación. Si f es una función Lipschitziana con constante σ entonces $\omega_f(t) \leq \sigma t$.

Definición 0.b.19. *La distancia de Lipschitz entre dos espacio métricos M y M' se define como*

$$d(M,M') = \inf\{\, \|\, f \,\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \|\, f^{-1} \,\|_{\mathrm{Lip}} \ \mid f\colon M \to M' \text{ biyectiva}\,\}$$

Definición 0.b.20. *Dados M y M' espacios métricos y $C \geq 1$, diremos que M está C incluido en M' si existe un subconjunto M_1 de M' tal que* $\mathrm{d}(M, M_1) \leq C$.

Escribiremos abreviadamente la anterior propiedad mediante el diagrama $M \overset{C}{\hookrightarrow} M'$

Observación. Si M es un espacio normado de dimensión finita la distancia de Lipschitz y la de Banach-Mazur coinciden.

Definición 0.b.21. *Para todo $1 \leq p \leq \infty$ llamamos ℓ_p^n-cubo al espacio métrico $(\{-1,+1\}^n, \rho_p)$ donde ρ_p es la distancia inducida por la inclusión $\{-1,+1\}^n \subset \ell_p^n$. Es decir, para todo $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1,+1\}^n$,*

$$\begin{aligned} \rho_p(\varepsilon, \varepsilon') &= \Big(\sum_{i=1}^{n} |\,\varepsilon_i - \varepsilon_i'|^p\Big)^{1/p} \quad \textit{si} \quad 1 \leq p < \infty \\ \rho_\infty(\varepsilon, \varepsilon') &= \sup_{1 \leq i \leq n} |\,\varepsilon_i - \varepsilon_i'| \qquad \textit{si} \quad p = \infty \end{aligned}$$

donde $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1}^n$, $\varepsilon' = (\varepsilon_i')_{i=1}^n$

A veces será más cómodo emplear como ℓ_p^n-cubo el espacio métrico $(\{0,1\}^n, \rho_p)$. La distancia de Lipschitz entre ambos espacios es claramente igual a 1.

CAPITULO I

I.a. ACOTACIONES EXPONENCIALES.

Sean $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$ variables aleatorias i.i.d. de Rademacher. El Teorema central del límite dice que la variable aleatoria normalizada $\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}{\sqrt{n}}$ tiende en distribución a una variable normal $N(0,1)$ y por tanto es posible una estimación del tipo

$$\mathbb{P}\{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}{\sqrt{n}} > t\} \approx c \exp -\frac{t^2}{2}$$

Acotaciones exponenciales, conocidas también como desigualdades de tipo Bernstein, existen (sin necesidad de usar el Teorema central del límite) para sumas de variables aleatorias mucho más generales. En esta sección damos varios resultados para martingalas acotadas.

El primero es bien conocido y tan sólo damos una referencia de donde puede ser encontrada una prueba del mismo.

Teorema I.a.1. *Sea* $(d_i)_{i=1}^\infty$ *una sucesión de diferencias de martingalas tal que* $\|d_i\|_\infty = \lambda_i < \infty$ *y* $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2 < \infty$ *. Entonces para todo* $t > 0$

$$\mathbb{P}\{\big|\sum_{i=1}^\infty d_i\big| > t\} \leq 2 \exp -\frac{t^2}{4\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2}$$

Más aún, si $1 < q < 2$ *y* $\|(\lambda_i)\|_{q,\infty} < \infty$ *entonces, para todo* $t > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\big|\sum_{i=1}^\infty d_i\big| > t\right\} \leq 2 \exp -c_q \left(\frac{t}{\|(\lambda_i)\|_{q,\infty}}\right)^{q'}$$

$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$

Demostración: Ver [J-S] para una demostración de ambas desigualdades. La primera desigualdad se conoce como la desigualdad de Azuma. La segunda es consecuencia de la primera y fue obtenida por Pisier (ver [J-S]); es conocida por algunos autores como la desigualdad de Azuma-Pisier.

Se pueden dar acotaciones, haciendo uso de la quasi-norma $\|\cdot\|_{q,\infty}$, también en el caso $q=1$. Este va a ser el contenido de nuestra segunda desigualdad. El resultado ha sido usado por Pisier en [Pi-2] e incluímos una demostración puesto que ni allí ni en el resto de la bibliografía consultada hemos encontrado una.

Teorema I.a.2. *Sea $(d_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de diferencias de martingalas escalares tal que $\|d_i\|_\infty = \lambda_i < \infty$ y $\|\,(\lambda_i)\,\|_{1,\infty} < \infty$. Entonces para todo $t>0$*

$$I\!P\{\big|\sum_{i=1}^{\infty} d_i\big| > t\} \le K \exp - \left(\exp \frac{c\,t}{\|(\lambda_i)\|_{1,\infty}}\right)$$

Demostración: Es suficiente demostrarlo para una sucesión finita $(d_i)_{i=1}^{n}$. En efecto, sea (λ_i) tal que $\|\,(\lambda_i)\,\|_{1,\infty} < \infty$. Suponer que para todo $n \in I\!N$ tenemos

$$I\!P\{\big|\sum_{i=1}^{n} d_i\big| > t\} \le K \exp - \left(\exp \frac{c\,t}{\|(\lambda_i)_1^n\|_{1,\infty}}\right)$$

Denotar $A_n = \{\,\big|\sum_{i=1}^{n} d_i\big| > t\}$. Entonces $\{\,\big|\sum_{i=1}^{\infty} d_i\big| > t\} \subseteq \bigcup_{n\ge 1}\bigcap_{k\ge n} A_k$ y por ser una unión creciente de sucesos,

$$I\!P\{\,\big|\sum_{i=1}^{\infty} d_i\big| > t\} \le I\!P\{\bigcup_{n\ge 1}\bigcap_{k\ge n} A_k\,\} = \lim_{n\to\infty} I\!P\{\,\bigcap_{k\ge n} A_k\,\} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, I\!P\{A_n\}$$

Es claro que $\|(\lambda_i)_1^n\|_{1,\infty} \le \|\,(\lambda_i)\,\|_{1,\infty}\ \ \forall n \in I\!N$ y por tanto

$$I\!P\{\,\big|\sum_{i=1}^{\infty} d_i\big| > t\} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, I\!P\{A_n\} \le K \exp - \left(\exp \frac{c\,t}{\|(\lambda_i)\|_{1,\infty}}\right)$$

Por homogeneidad podemos suponer que $\|(\lambda_i)\|_{1,\infty} = \sup_{1\le i\le n}\{i\lambda_i^*\} = 1$ y así encontramos una permutación π in $\{1,\ldots,n\}$ de modo que $\lambda_{\pi(i)} \le \frac{1}{i}$.

Sea $2 \le N < n$. Claramente $\sum_{i=1}^{N} \lambda_{\pi(i)} \le \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} < c\log N$, c constante numérica.

$$\begin{aligned} I\!P\{\big|\sum_{i=1}^{n} d_i\big| > (c+1)\log N\} &= I\!P\{\big|\sum_{i=1}^{n} d_{\pi(i)}\big| > (c+1)\log N\} \\ &\le I\!P\{\big|\sum_{i=1}^{N} d_{\pi(i)}\big| > c\log N\} + I\!P\{\big|\sum_{i=N+1}^{n} d_{\pi(i)}\big| > \log N\} \end{aligned}$$

El primer sumando es cero ; para el segundo dibujarse una figura para comprobar que $\displaystyle\sum_{i=N+1}^{n} \lambda^2_{\pi(i)} \leq \sum_{i=N+1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_N^n \frac{1}{x^2}\,dx < \frac{1}{N}$ y así por Teorema I.a.1

$$I\!P\{\Big|\sum_{i=1}^{n} d_i\Big| > (c+1)\log N\} \leq 2\exp - \frac{N\log^2 N}{4}$$

La demostración concluye distinguiendo dos casos:

Caso 1. Si $t \geq 4(c+1)$, escribimos $N = \left[\exp \frac{t}{c+1}\right]$. Podemos elegir n suficientemente grande para que sea $N < n$. Siempre $N \leq \exp \frac{t}{c+1} \leq 2N$ y $(c+1)\log N \leq t$.

$$I\!P\{\Big|\sum_{i=1}^{n} d_i\Big| > t\} \leq I\!P\{\Big|\sum_{i=1}^{n} d_i\Big| > (c+1)\log N\}$$
$$\leq 2\exp - \frac{N\log^2 N}{4} \leq 2\exp -(\exp \frac{t}{c+1})$$

puesto que por la elección de N, $N \geq [\exp 4] \geq \exp\sqrt{8}$ y así

$$\frac{N\log^2 N}{4} \geq 2N \geq \exp\frac{t}{c+1}$$

Caso 2. Si $t \leq 4(c+1)$ entonces $K\exp -(\exp \frac{t}{c+1}) \geq K\exp -(\exp 4) = 1$ para $K = \exp(\exp 4)$ y la desigualdad es trivialmente cierta. ///

El siguiente resultado ha sido usado y demostrado por Schechtman en [Sch] y considera un caso particular de martingala: suma de variables aleatorias independientes de media nula.

Teorema 1.a.3. *Sean $(d_i)_{i=1}^{\infty}$ variables aleatorias independientes y acotadas tal que $I\!E(d_i) = 0$. Denotando $\sup_{1\leq i\leq n} \|d_i\|_1 = A$ y $\sup_{1\leq i\leq n} \| d_i \|_\infty = B$ se tiene,*

$$I\!P\{\Big|\sum_{i=1}^{n} d_i\Big| > t\} \leq 2\exp - \frac{t^2}{4eABn}$$

para todo $t \leq 2eAn$.

Observación. Notar que en el caso de que consideremos variables aleatorias i.i.d. la desigualdad de Schechtman es (salvo la constante numérica) más ajustada que la de Azuma.

I.b.- DESIGUALDADES DE DESVIACION.

I.b.1.- Desigualdades isoperimétricas y de desviación. Generalidades.

A lo largo de esta sección estudiaremos ciertas propiedades de espacios métricos de probabilidad. Las medidas probabilidad se supondrán definidas sobre la σ-álgebra de Borel. Salvo que necesitemos referirnos explícitamente a ella la omitiremos en todos los enunciados y resultados. Los subconjuntos que aparezcan se supondrán Borel-medibles.

Sea S^{n-1} la esfera unidad en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Dotarla con la métrica geodésica ρ_n (i.e. distancia a lo largo de meridianos) y la medida probabilidad de Haar invariante por rotaciones, $\mathbb{P}_n$. Con la notación introducida en la sección 0.b.2. podemos enunciar el siguiente

Teorema I.b.1. *Para cada* $0 < a < 1$ *y* $t \geq 0$

$$\inf\{\, \mathbb{P}_n\{A_t\} \mid A \subseteq S^{n-1}\,,\, \mathbb{P}_n\{A\} = a\,\}$$

se alcanza en los casquetes esféricos de medida a.

Demostración: Ver por ejemplo [M-S], Apéndice 1 (por M. Gromov). ///

Observación. Denotamos por $B(r_a)$ un casquete esférico de medida a. Si suponemos que la frontera del conjunto A en S^{n-1} es suficientemente regular, entonces su perímetro viene dado por

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{P}_n\{A_t\} - \mathbb{P}_n\{A\}}{t}$$

y por el resultado anterior

$$\mathcal{P}(A) \geq \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{P}_n\{\big(B(r_a)\big)_t\} - \mathbb{P}_n\{B(r_a)\}}{t} = \mathcal{P}\big(B(r_a)\big)$$

Más aún, es cierto que para todos los conjuntos Borel de medida a, el que tiene perímetro menor es el casquete esférico $B(r_a)$. Esto es lo que se conoce como la *desigualdad isoperimétrica* sobre S^{n-1} clásica.

En el caso particular de $a = \frac{1}{2}$ el ínfimo se alcanza en la semiesfera. Computando su t-dilatación obtenemos

Corolario I.b.2. *Si $A \subseteq S^{n-1}$ con $\mathbb{P}_n\{A\} \geq \frac{1}{2}$ entonces*

$$\mathbb{P}_n\{A_t\} \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp -\frac{t^2 n}{2}$$

Demostración: Ver [Mi]. ///

Observación. Este tipo de desigualdades que estiman la probabilidad $\mathbb{P}(A_t)$ de conjuntos A tal que $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$ reciben el nombre de *desigualdades isoperimétricas.*

Notación. Dado un espacio métrico de probabilidad $(\Omega, \rho, \mathbb{P})$ y $t > 0$ se denota

$$\alpha(\Omega, t) = 1 - \inf \{ \, \mathbb{P}(A_t) \, ; \, \mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \, \}$$

Dicha función recibe el nombre de *función de concentración.*

A menudo entrarán en juego *sucesiones* de espacios métricos de probabilidad $(\Omega_n, \rho_n, \mathbb{P}_n)$. Siempre que no lleve a confusión denotaremos en este caso $\alpha(n, t) = \alpha(\Omega_n, t)$.

Definición I.b.3. *Una familia de espacios métricos de probabilidad $(\Omega_n, \rho_n, \mathbb{P}_n)_{n \geq 1}$ se dice* familia de Levy *si para todo $t > 0$, $\alpha(n, t) \to 0$ cuando $n \to \infty$. La familia se dice normal de Levy con constantes c_1 y c_2 si*

$$\alpha(n, t) \leq c_1 \exp -c_2 t^2 n$$

Ejemplos.

(1) Con esta nueva notación el Corolario afirma que $(S^{n-1}, \rho_n, \mathbb{P}_n)$ es una familia normal de Levy con constantes $c_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ y $c_2 = \frac{1}{2}$.

(2) $(\{-1,1\}^n, \rho_n, \mathbb{P}_n)$, donde $\rho_n(x,y) = \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ y $\mathbb{P}_n$ es la medida de contar normalizada, es una familia normal de Levy con constantes $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = 2$. También $(\{0,1\}^n, \rho_n, \mathbb{P}_n)$, donde $\rho_n(x,y) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ y $\mathbb{P}_n$ es la medida de contar normalizada, es una familia normal de Levy con constantes $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = 2$. Ver por ejemplo [A-M] pág 6.

(3) El grupo de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$, $(\Pi_n, \rho_n, \mathbb{P}_n)$ con la medida de contar normalizada y $\rho_n(\pi, \tau) = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{card}\,\{\pi(i) \neq \tau(i)\}$ es una familia normal de Levy con constantes $c_1 = 2$ y $c_2 = \frac{1}{64}$. Ver [Mau].

Nosotros estamos interesados en medir la concentración del rango de una v.a. real f respecto de un valor fijo M, i.e. encontrar acotaciones para $\mathbb{P}\{|f - M| > t\}$. Estas son las llamadas *desigualdades de desviación*. El valor M que se suele considerar es un valor central, bien la esperanza $\mathbb{E}(f)$, bien una mediana M_f de f. Normalmente dichas acotaciones van a estar en función de algún parámetro asociado a f. El parámetro más usual es su constante de Lipschitz σ.

Un sencillo y conocido argumento nos permite relacionar $\mathbb{P}\{(A_t)\}$ con desigualdades de desviación y esta es la principal razón para usar en esta sección las desigualdades isoperimétricas. La demostración se encuentra esencialmente en [T] ó en [M-S] Cap. 7 en versiones ligeramente distintas.

Lema I.b.4. *Sea $(\Omega, \rho, \mathbb{P})$ un espacio métrico de probabilidad con función de concentración $\alpha(\Omega, t)$. Para toda $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitziana se verifica*

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} \leq 2\alpha(\Omega, \frac{t}{\sigma})$$

Demostración: Dada $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sea

$$A = \{f \geq M_f\} \quad \text{y} \quad B = \{f \leq M_f\}$$

La definición de mediana dice que $I\!P\{A\}, I\!P\{B\} \geq \frac{1}{2}$. Sea $x \in A_t$. Para todo $t' > t$ existe $a \in A$ tal que $\rho(x,a) \leq t'$; esto implica $f(a) - f(x) \leq \sigma t'$, $\forall\, t' > t$ y así $f(x) \geq M_f - \sigma t',\ \ \forall\, t' > t$; por tanto $f(x) \geq M_f - \sigma t$, y tenemos que

$$A_t \subseteq \{f - M_f \geq -\sigma t\}$$

Análogamente se demuestra que $x \in B_t \Rightarrow f(x) \leq M_f + \sigma t$, y tenemos a su vez que

$$B_t \subseteq \{f(x) - M_f \leq \sigma t\}$$

Por tanto,

$$I\!P\{|f - M_f| \leq t\} \geq I\!P\{(A_{\frac{t}{\sigma}}) \cap (B_{\frac{t}{\sigma}})\}$$

y así

$$I\!P\{|f - M_f| > t\} \leq 2I\!P\{\Omega \setminus A_{\frac{t}{\sigma}}\} \leq 2\alpha(\Omega, \frac{t}{\sigma})$$

///

En el caso de familias de Levy, el Lema queda enunciado de la siguiente forma:

Lema I.b.5. *Sea $(\Omega_n, \rho_n, I\!P_n)$ una familia de Levy con función de concentración $\alpha(n,t)$. Para toda $f\colon \Omega_n \to I\!R$ Lipschitziana se verifica*

$$I\!P_n\{|f - M_f| > t\} \leq 2\alpha(n, \frac{t}{\sigma})$$

Comentario. Para n grande la función f toma valores cercanos a M_f sobre un subconjunto de Ω_n de probabilidad cercana a 1. Esto es lo que se conoce como el *fenómeno de concentración de la medida.* Por tanto el Lema dice abreviadamente que en toda familia de Levy se produce un fenómeno de concentración de la medida.

A la inversa, si disponemos de desigualdades de desviación para toda función f, encontramos las correspondiente desigualdades isoperimétricas.

Lema I.b.6. *Sea* (Ω, ρ) *un espacio métrico. Para todo subconjunto propio no vacío* $A \subset \Omega$ *la función* $\rho(\cdot, A)$ *es Lipschitziana de constante de Lipschitz* $\sigma = 1$.

Demostración: Fijar $x, y \in \Omega$. Para todo $a, b \in A$ la desigualdad triangular asegura que

$$\rho(x,a) - \rho(y,b) = \rho(x,a) - \rho(x,b) + \rho(x,b) - \rho(y,b) \leq \rho(a,b) + \rho(x,y)$$

Tomando ínfimos respecto de $a \in A$ resulta

$$\rho(x,A) - \rho(y,b) \leq \rho(x,y) \qquad \forall \ b \in \Omega$$

pasando ahora $\rho(y,b)$ al otro miembro y tomando ínfimos respecto de $b \in A$ tenemos

$$\rho(x,A) \leq \rho(x,y) + \rho(y,A)$$

como esto es cierto para todo $x, y \in \Omega$ hemos probado que $\sigma \leq 1$. Para la otra desigualdad fijar un elemento $x \notin A$ y entonces

$$\sigma \geq \sup_{y \neq x} \frac{|\,\rho(x,A) - \rho(y,A)\,|}{\rho(x,y)} \geq \sup_{y \in A} \frac{\rho(x,A)}{\rho(x,y)} = \frac{\rho(x,A)}{\inf\limits_{y \in A} \rho(x,y)} = 1$$

///

Lema I.b.7. *Sea* $(\Omega, \rho, I\!\!P)$ *un espacio métrico de probabilidad. Si existe una función* $\alpha\colon (0,\infty) \to I\!\!R$ *tal que para toda función* $f\colon \Omega \to I\!\!R$ *Lipschitziana con constante de Lipschitz* σ *se verifica la desigualdad*

$$I\!\!P\{|f - M_f| > t\} \leq \alpha(\frac{t}{\sigma})$$

entonces $\alpha(\Omega, t) \leq \alpha(t)$

Demostración: Para todo conjunto $A \subseteq \Omega$ con $I\!\!P\{A\} \geq \frac{1}{2}$ sea la función $f = \rho(\cdot, A)$. Por Lema I.b.6. $\sigma = 1$ y además podemos elegir $M_f = 0$; por tanto la expresión $I\!\!P\{|f - M_f| > t\} \leq \alpha(\dfrac{t}{\sigma})$ se transforma en $I\!\!P\{\Omega \setminus A_t\} \leq \alpha(t)$ ó equivalentemente

$$I\!\!P\{A_t\} \geq 1 - \alpha(t)$$

Tomando ínfimos en la familia de subconjuntos $A \subseteq \Omega$ con $\mathbb{P}\{A\} \geq \frac{1}{2}$ resulta

$$1 - \alpha(\Omega, t) \geq 1 - \alpha(t)$$

es decir $\alpha(\Omega, t) \leq \alpha(t)$.

///

La siguiente Proposición muestra cómo la mediana de la función f puede ser sustituida por cualquier otra cantidad dejándonos de esta forma libertad para elegir aquella que sea más cómoda a la hora de realizar los cálculos. En [M-S] Apéndice V se demuestra este resultado para el caso de acotaciones del tipo $\exp -t^2$. Aquí veremos que también es cierto cuando aparecen acotaciones de tipo más general. Nuestra demostración sigue los pasos de [M-S] Apéndice V.

Proposición I.b.8. *Sea $\varphi(t)$ una función de Orlicz verificando la condición Δ_2 para todo $t > 0$ y sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Son equivalentes*

(1) Existen constantes $K_1, \delta_1 > 0$ y $A \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, t \geq 0$

$$\mathbb{P}\{|f - A| > t\} \leq K_1 \exp -\delta_1 \varphi(t)$$

(2) Existen constantes $K_2, \delta_2 > 0$ tal que si $\tilde{f}$ es una función (variable aleatoria) i.i.d. que f, $\forall\, t \geq 0$

$$\mathbb{P}\{|f - \tilde{f}| > t\} \leq K_2 \exp -\delta_2 \varphi(t)$$

(3) Existen constantes $K_3, \delta_3 > 0$ tal que $\forall\, t \geq 0$

$$\mathbb{P}\{|f - \mathbb{E}(f)| > t\} \leq K_3 \exp -\delta_3 \varphi(t)$$

(4) Existen constantes $K_4, \delta_4 > 0$ tal que $\forall\, t \geq 0$

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} \leq K_4 \exp -\delta_4 \varphi(t)$$

y la relación entre los K_i y los δ_i es

$$K_1 \leq K_4 \leq 2K_3 \leq 2(K_2 + 1) \leq 2(2K_1 + 1)$$

y

$$\delta_1 \geq \delta_4 \geq C\delta_3 \geq \frac{C}{2}\delta_2 \geq \frac{C^2}{2}\delta_1$$

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$\begin{aligned} I\!P\{|f - \tilde{f}| > t\} &\leq I\!P\{|f - A| + |\tilde{f} - A| > t\} \leq I\!P\{|f - A| > \frac{t}{2}\} + I\!P\{|\tilde{f} - A| > \frac{t}{2}\} \\ &\leq 2K_1 \exp -\delta_1 \varphi(\frac{t}{2}) \leq 2K_1 \exp -\delta_1 C\varphi(t) \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

Si φ es una función convexa definida en $[a, b]$ entonces existe φ' en casi todo punto y se verifica la regla de Barrow i.e. $\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \varphi(t)\, dt \ \ \forall\, x \in [a, b]$. Ver [H-S], Cap. V.

Sea $g(x) = \exp \frac{\delta_2}{2}\varphi(x)$. Si denotamos por F la función de distribución de la variable $|f - \tilde{f}|$, entonces para todo $a \geq 0$ tenemos (ver [F], Cap V.6.),

$$\begin{aligned} \int_0^{a+0} g(x)\, dF(x) &= \int_0^a g'(x)\,(1 - F(x))\, dx + g(0)\,(1 - F(0)) - g(a)\,(1 - F(a)) \\ &\leq \int_0^a g'(x)\,(1 - F(x))\, dx + 1 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I\!E\Bigg(\exp \frac{\delta_2}{2}\varphi(|f - \tilde{f}|) \Bigg) &\leq \int_0^\infty \frac{\delta_2}{2}\varphi'(t) \exp\left(\frac{\delta_2}{2}\varphi(t)\right) I\!P\{|f - \tilde{f}| > t\}\, dt + 1 \\ &\leq K_2 \int_0^\infty \frac{\delta_2}{2}\varphi'(t) \exp -\left(\frac{\delta_2}{2}\varphi(t)\right) dt + 1 = K_2 + 1 \end{aligned}$$

Como $I\!E(f) = I\!E(\tilde{f})$ usando la desigualdad de Jensen con la función convexa (por serlo φ) $\exp\left(\frac{\delta_2}{2}\varphi(|\cdot|)\right)$ tenemos

$$I\!E\Bigg(\exp \frac{\delta_2}{2}\varphi(|f - I\!E(f)|) \Bigg) \leq I\!E\Bigg(\exp \frac{\delta_2}{2}\varphi(|f - \tilde{f}|) \Bigg) \leq K_2 + 1$$

Aplicar ahora la desigualdad de Tchebychev

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|f-\mathbb{E}(f)|>t\} &\leq \mathbb{P}\{\exp\frac{\delta_2}{2}\varphi(|f-\mathbb{E}(f)|)>\exp\frac{\delta_2}{2}\varphi(t)\,\} \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\Big(\exp\frac{\delta_2}{2}\varphi(|f-\mathbb{E}(f)|)\Big)}{\exp\frac{\delta_2}{2}\varphi(t)} \leq (K_2+1)\exp-\frac{\delta_2}{2}\varphi(t)
\end{aligned}
$$

(3) $\Rightarrow$ (4)

Por ser $\varphi(t)$ continua y de rango $[0,\infty]$ existe un número t_0 tal que $\varphi(t_0) > \frac{\log 2K_3}{\delta_3}$. Por hipótesis t_0 cumple que

$$
\mathbb{P}\{|f-\mathbb{E}(f)|>t_0\} \leq K_3\exp-\delta_3\varphi(t_0) < \frac{1}{2}
$$

y, en particular, $\mathbb{P}\{f > t_0+\mathbb{E}(f)\} < \frac{1}{2}$ y $\mathbb{P}\{f < \mathbb{E}(f)-t_0\} < \frac{1}{2}$. Por definición de mediana ésto significa $|\mathbb{E}(f)-M_f| < t_0$.

Si $t \geq 2t_0$.

Observamos que siempre $|f-M_f| \leq |f-\mathbb{E}(f)|+t_0$ y por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|f-M_f|>t\} &\leq \mathbb{P}\{|f-\mathbb{E}(f)|>t-t_0\} \leq K_3\exp-\delta_3\varphi(t-t_0) \\
&\leq K_3\exp-\delta_3\varphi\big(\frac{t}{2}\big) \leq K_3\exp-\delta_3 C\varphi(t)
\end{aligned}
$$

Si $t < 2t_0$, entonces $2K_3\exp-\delta_3 C\varphi(t) > 2K_3\exp-\delta_3\varphi(t_0) > 1$ y la desigualdad es trivial.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Tomar $A = M_f$

///

I.b.2.- Desigualdades de desviación. Caso general.

En esta sección daremos desigualdades generales de desviación con las menores restricciones posibles sobre el espacio métrico y las funciones. Hemos visto anteriormente una forma general de encontrar desigualdades de desviación para funciones Lipschitzianas en términos de su constante de Lipschitz. La construcción se puede extender a la clase de las funciones continuas. En este contexto las desigualdades dependerán de un nuevo parámetro asociado a la función : el módulo de continuidad $\omega_f(t)$. La relación entre las desigualdades para funciones de Lipschitz y para funciones continuas resulta ser sorprendentemente estrecha y nos permitirá usar una u otra según nos convenga. La siguiente Proposición se encuentra esencialmente incluida en [M-S] Cap. 6 y 7 , pero no bajo un enunciado preciso; es por esta razón que damos aquí una demostración del resultado:

Proposición I.b.9. *Sea $(\Omega, \rho, \mathbb{P})$ espacio métrico de probabilidad y $\alpha\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por la izquierda. Son equivalentes:*

(i) Existe $c_1 > 0$ tal que para toda función $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uniformemente continua y $\forall\, t > 0$

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > \omega_f(t)\} \leq c_1\, \alpha(t)$$

(ii) Existe $c_2 > 0$ tal que para toda función $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitziana de constante de Lipschitz σ y $\forall\, t > 0$

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} \leq c_2\, \alpha(\frac{t}{\sigma})$$

y la relación entre las dos constantes es

$$c_2 \leq c_1 \leq 2c_2$$

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$. Es inmediato puesto que $\omega_f(t) \leq \sigma\, t$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. El Lema I.b.7. implica que para todo A tal que $\mathbb{P}\{A\} \geq \frac{1}{2}$ y $t > 0$,

$$\mathbb{P}\{\rho(x, A) > t\} \leq c_2\, \alpha(t)$$

Vamos a aplicar la desigualdad recién obtenida a apropiados conjuntos A, repitiendo esencialmente el argumento utilizado en I.b.4. Dada $f : \Omega \to I\!R$ sean

$$A_1 = \{f \leq M_f\} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \{f \geq M_f\}$$

sabemos que $I\!P\{A_1\}, I\!P\{A_2\} \geq \frac{1}{2}$.

Para todo $0 < t' < t$, $x \in \Omega$ e $i = 1, 2$ tenemos que $\rho(x, A_i) \leq t' \Rightarrow \exists\, a_i \in A_i$ tal que $\rho(x, a_i) \leq t$. Por definición de módulo de continuidad

$$\rho(x, A_1) \leq t' \Rightarrow f(x) \leq M_f + \omega_f(t) \qquad \text{y} \qquad \rho(x, A_2) \leq t' \Rightarrow f(x) \geq M_f - \omega_f(t)$$

es decir,

$$(A_1)_{t'} \subseteq \{f(x) \leq M_f + \omega_f(t)\} \qquad \text{y} \qquad (A_2)_{t'} \subseteq \{f(x) \geq M_f - \omega_f(t)\}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} I\!P\{|f - M_f| \leq \omega_f(t)\} &= I\!P\{\,\{f(x) \leq M_f + \omega_f(t)\} \cap \{f(x) \geq M_f - \omega_f(t)\}\,\} \\ &\geq I\!P\{(A_1)_{t'} \cap (A_2)_{t'}\} \geq 1 - 2\, c_2\, \alpha(t') \qquad \forall\, 0 < t' < t \end{aligned}$$

Concluir pasando al límite cuando $t' \to t$.

///

Observación. Siempre que para todo $x \in \Omega$ e $i = 1, 2$ exista $a_i \in A_i$ tal que $\rho(x, A_i) = \rho(x, a_i)$, el enunciado será cierto con $\alpha(t) = \alpha(\Omega, t)$.

El primer resultado de desviación que vamos a enunciar es conocido. Las hipótesis se refieren a funciones Lipschitzianas y a espacios métricos finitos equipados con la probabilidad de contar. Antes de presentar el Teorema necesitamos la siguiente

Definición I.b.10. *Dado un espacio métrico finito (Ω, ρ), diremos que tiene longitud ℓ si existen $0 < a_1, \ldots, a_n$ y una sucesión $\{\Omega^k\}_0^n$ de particiones de Ω con $\Omega^k = \{A_i^k\}_{i=1}^{m_k}$ con las siguientes propiedades:*

(1) $m_0 = 1$, *i.e.* $\Omega^0 = \{\Omega\}$

(2) $m_n = \operatorname{card}\Omega$, *i.e.* $\Omega^n = \big\{\{x\}\big\}_{x\in\Omega}$

(3) Ω^k *es un refinamiento de* Ω^{k-1}

(4) Para todo $k = 1,\ldots,n$, $r = 1,\ldots,m_{k-1}$ *e* i,j *tal que* $A_i^k, A_j^k \subseteq A_r^{k-1}$ *existe una biyección* $\varphi : A_i^k \to A_j^k$ *de modo que* $\rho(x,\varphi(x)) \leq a_k$*. La longitud viene expresada por* $\ell^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$*.*

Teorema I.b.11. *Sea* $(\Omega,\rho,I\!P)$ *un espacio métrico finito de longitud* ℓ *y* $I\!P$ *la medida de contar normalizada.*

(i) Si $A \subseteq \Omega$ *y* $I\!P(A) \geq \frac{1}{2}$*, entonces para todo* $t > 0$

$$I\!P\{(A_t)\} \geq 1 - 2\exp -\frac{t^2}{16\ell^2}$$

(ii) Para toda función $f\colon\Omega \to I\!R$ *con constante de Lipschitz* σ *y para todo* $t > 0$

$$I\!P\{|f - I\!E(f)| > t\} \leq 2\exp -\frac{t^2}{4\sigma^2\ell^2}$$

Demostración: *Véase [M-S], Capítulo 7.* ///

Observación. A la vista del apartado (ii) y teniendo en cuenta la Proposición I.b.8. se deduce fácilmente

$$I\!P\{|f - M_f| \leq t\} \geq 1 - 4\exp -\frac{t^2}{16\sigma^2\ell^2}$$

En el siguiente Teorema no exigimos la finitud de los espacios métricos ni que estén dotados con la probabilidad de contar.

Teorema I.b.12. *Sean* $(\Omega_i,\rho_i,I\!P_i,\Sigma_i)$ *espacios métricos de probabilidad. Formar* $\Omega = \prod_{i=1}^{n}\Omega_i$, $\rho = \sum_{i=1}^{n}\rho_i$, $I\!P = \bigotimes_{i=1}^{n} I\!P_i$ y $\Sigma = \bigotimes_{i=1}^{n}\Sigma_i$*. Para toda función* $f\colon\Omega \to I\!R$ *con constante de Lipschitz* σ *y para todo* $t > 0$ *se tiene,*

$$I\!P\{|f - I\!E(f)| > t\} \leq 2\exp -\frac{t^2}{4\sigma^2 A^2}$$

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > \omega_f(t)\} \leq 4 \exp -\frac{t^2}{16A^2}$$

donde $A^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad y \quad a_i = \sup_{x_i \in \Omega_i} \int_{\Omega_i} \rho_i(x_i, y_i)\, d\mathbb{P}(y_i)$

Demostración: Sea $\mathcal{F}_i, \quad 1 \leq i \leq n$ la familia de $\sigma-$álgebras siguiente

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{F}_i = \sigma\langle \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_i \times \Omega_{i+1} \times \ldots \times \Omega_n \rangle$

$\mathcal{F}_n = \sigma\langle \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n \rangle$

Dada la función f construimos la martingala asociada a $\mathcal{F}_i$, $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)$. La diferencia de martingalas $d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$ cumple $\displaystyle\sum_{i=1}^n d_i = f - \mathbb{E}(f)$. Estamos en condiciones de usar el la desigualdad de Azuma, Teorema I.a.1. Para ello resta computar $\|d_i\|_\infty$.

Para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$

$$\begin{aligned}
&d_i(x) = |\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)(x) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})(x)| = \\
&= \left| \int_{\Omega_{i+1}\times\ldots\times\Omega_n} f(x_1, ..., x_i, y_{i+1}, ..., y_n)\, d\mathbb{P}(y_{i+1})...d\mathbb{P}(y_n) - \right. \\
&- \left. \int_{\Omega_i\times\ldots\times\Omega_n} f(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, ..., y_n)\, d\mathbb{P}(y_i)...d\mathbb{P}(y_n) \right| \leq \\
&\leq \int_{\Omega_i\times\ldots\times\Omega_n} \big| f(x_1, ..., x_i, y_{i+1}, ..., y_n) - f(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, ..., y_n) \big|\, d\mathbb{P}(y_i)...d\mathbb{P}(y_n) \\
&\leq \sigma \int_{\Omega_i\times\ldots\times\Omega_n} \rho((x_1, ..., x_i, y_{i+1}, ..., y_n), (x_1, ..., x_{i-1}, y_i, ..., y_n))\, d\mathbb{P}(y_i)...d\mathbb{P}(y_n) \\
&= \sigma \int_{\Omega_i} \rho_i(x_i, y_i)\, d\mathbb{P}(y_i) \leq \sigma\ a_i
\end{aligned}$$

///

Observación. El enunciado del Teorema I.b.12. habría quedado igual si hubiesemos elegido como distancia en Ω otra distinta de $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i$, por ejemplo $\rho = \left(\sum_{i=1}^n \rho_i^p\right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$. Sin embargo en las aplicaciones del Teorema I.b.12. en el capítulo II se consiguen resultados óptimos para $p = 1$ y es por esta razón que tan sólo lo enunciamos en este caso.

Observación. En las hipótesis del Teorema I.b.12. no hemos impuesto ninguna condición sobre los espacios Ω_i. Por tanto si hiciéramos $n = 1$ dispondríamos de una desigualdad de desviación válida para todo espacio métrico. Veámos lo que ocurre en este caso. Por comodidad suprimiremos el subíndice 1 de la notación. Claramente, para todo $x \in \Omega$,

$$|f(x) - \mathbb{E}(f)| \leq \sigma \int_{\Omega} \rho_1(x,y)\, d\mathbb{P}(y) = \sigma\, a$$

por tanto $\|f - \mathbb{E}(f)\|_{\infty} \leq \sigma a$.

Si $t > \sigma a$

$$\mathbb{P}\{|f - \mathbb{E}(f)| > t\} \leq \mathbb{P}\{|f - \mathbb{E}(f)| > \sigma a\} = 0$$

Si $t \leq \sigma a$ tenemos $\dfrac{t^2}{4\sigma^2 a^2} \leq \dfrac{1}{4}$ y así

$$2 \exp -\frac{t^2}{4\sigma^2 a^2} \geq 2 \exp -\frac{1}{4} > 1$$

En cualquier caso la desigualdad es una trivialidad. El Teorema I.b.12. tiene un significado no trivial cuando estamos tratando con *espacios producto*. En particular de él se deduce una desigualdad de desviación para $\{0,1\}^n$ esencialmente igual a la apuntada en los Ejemplos I.b.3. (allí se habla de funciones de concentración pero por Lema I.b.4. obtenemos fácilmente desigualdades de desviación).

I.b.3.- Desigualdades de desviación. El espacio $\{0,1\}^n$. Funciones convexas.

Se pueden obtener mejores desigualdades de desviación a costa de perder algo de generalidad; tal es la situación en esta sección. En ella se restringe la elección tanto del espacio métrico de probabilidad subyacente como de la función f.

El caso $\Omega = \{0,1\}^n \subset I\!R^n$ con la probabilidad de contar $I\!P = \left(\frac{\delta_0 + \delta_1}{2}\right)^n$ ha sido particularmente estudiado (δ_0 and δ_1 son deltas de Dirac). El primer resultado de desviación en torno a $\{0,1\}^n$ es el publicado por Amir y Milman (ver [A-M], pág. 6) donde establecen la desigualdad siguiente

Teorema I.b.13. *Sea $\Omega = \{0,1\}^n$ con la probabilidad arriba escrita y metrizado con la distancia ρ_1 i.e. $\Omega \subset \ell_1^n$. Para toda función $f\colon \Omega \to I\!R$ Lipschitziana de constante σ_1 y todo $t > 0$*

$$I\!P\{|f - M_f| > t\} \leq \exp -\frac{2t^2}{n\sigma_1^2} \tag{1}$$

Observación.

(i) Otra demostración de esta desigualdad (con peores constantes numéricas) puede hacerse aplicando el Teorema I.b.12; (en nuestro caso $a_i = \frac{1}{2}$, $\forall\, i$). Es inmediato comprobar, usando también la Proposición I.b.8. para obtener la desviación respecto a la mediana, que para todo $1 \leq p < \infty$, $f\colon \Omega \to I\!R$ Lipschitziana de constante σ_p y $t > 0$,

$$I\!P\{|f - M_f| > t\} \leq 4\ \exp -\frac{t^2}{4n\sigma_p^2} \tag{2}$$

(ii) Observar que si hacemos tender $n \to \infty$ en las anteriores desigualdades no tenemos un fenómeno de concentración, en aparente contradicción con el hecho de que $\{0,1\}^n$ es una familia de Levy. La razón es que $\{0,1\}^n$ es una familia de Levy si está equipado con la métrica $\frac{\|\cdot\|_1}{n}$, y en (1) y (2) estamos considerando la distancia $\|\cdot\|_1$ *sin normalizar*. En la literatura aparecen indistintamente las dos situaciones y nos hemos inclinado en esta sección por la segunda por conveniencia ya que es la forma en que la aplicaremos en el Capítulo II.

(iii) Un caso particularmente importante es cuando $f(\eta) = \sum_{i=1}^n \eta_i = \|\eta\|_1$. La desigualdad (1) queda de la forma

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} = \mathbb{P}\{|\sum_{i=1}^n \eta_i - \frac{n}{2}| > t\} \leq \exp -\frac{2t^2}{n} \tag{1'}$$

Lo interesante de este caso es que la variable aleatoria $\sum_{i=1}^n \eta_i$ tiene como función de distribución la de una binomial, i.e. $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \eta_i = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \quad k = 0, \ldots, n$ y (1') proporciona la misma cota que la que obtendríamos aplicando el Teorema Central del Límite.

(iv) La Proposición I.b.9. nos permite dar también una desigualdad en la que aparece el módulo de continuidad $\omega_p(\varepsilon)$, $1 \leq p < \infty$. Para toda $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > \omega_p(\varepsilon)\} \leq 2 \exp -\frac{2\varepsilon^2}{n} \tag{3}$$

y análogamente para la desigualdad (2).

El próximo resultado (incluído en su mayor parte en [J-S 2]) proporciona desigualdades de desviación más finas, en general, que las dadas en la sección I.b.2.. Para conseguir esta mayor precisión necesitaremos restringir tanto la clase de funciones como el espacio métrico subyacente. Antes de pasar a enunciarlo necesitamos un poco de

Notación.

Sean $(X_i, \|\cdot\|_i)$ $i = 1, \ldots, n$ espacios normados. Sean Ω_i subconjuntos finitos de X_i equipados con una medida de probabilidad $\mathbb{P}_i$ y la distancia ρ_i heredada de la norma $\|\cdot\|_i$. Considerar ahora para $1 \leq p < \infty$, $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ con la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^p\right)^{1/p} \quad \text{y} \quad \Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i \ , \quad \mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{P}_i \ , \quad \text{y} \quad \rho_p = \left(\sum_{i=1}^n \rho_i^p\right)^{1/p}.$$

Para toda función $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ denotaremos por $\tilde{f}$ una extensión convexa de f a conv Ω. Como siempre M_f es la mediana de f respecto de $\mathbb{P}$ y $\sigma_p,\ \tilde{\sigma}_p,\ \omega_p(t),\ \tilde{\omega}_p(t)$ son respectivamente las constantes de Lipschitz y los módulos de continuidad de las funciones f y $\tilde{f}$.

Teorema I.b.14. *Con la notación anterior, si* diam $\Omega_i \leq 1\,,\ \forall\, 1 \leq i \leq n$

(i) *Si* $2 \leq p < \infty\,,\ A \subset \Omega\ \ ,\forall\, t > 0$

$$\mathbb{P}\{(\mathrm{conv}A)_t\} \geq 1 - \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \exp -\frac{t^p}{4}$$

(ii) *Si* $2 \leq p < \infty\,,\forall\, t > 0$

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} \leq 4\ \exp -\frac{t^p}{4\tilde{\sigma}_p^p} \tag{4}$$

(iii) *Si* $1 \leq p \leq 2\,,\ A \subset \Omega\ \ ,\forall\, t > 0$

$$\mathbb{P}\{(\mathrm{conv}A)_t\} \geq 1 - \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \exp -\frac{t^2}{4n^{\frac{2}{p}-1}}$$

(iv) *Si* $1 \leq p \leq 2\,,\forall\, t > 0$

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} \leq 4\ \exp -\frac{t^2}{4n^{\frac{2}{p}-1}\tilde{\sigma}_p^2} \tag{5}$$

(Nótese que $\mathbb{P}\{(\mathrm{conv}A)_t\} = \mathbb{P}\{\Omega \cap (\mathrm{conv}A)_t\}$).

Demostración: (i) y (ii) Ver [J-S 2].

(iii) La relación $||\cdot||_p \leq n^{1/p-1/2}||\cdot||_2$, para $1 \leq p \leq 2$, implica $\rho_p \leq n^{1/p-1/2}\rho_2$. Usando (i) para $p = 2$ resulta

$$\mathbb{P}\{\rho_p(\cdot, \mathrm{conv}A) > t\} \leq \mathbb{P}\{\rho_2(\cdot, \mathrm{conv}A) > tn^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\} \leq \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \exp -\frac{t^2}{4n^{\frac{2}{p}-1}}$$

(iv) Como $\rho_p \leq n^{1/p-1/2}\rho_2$, se tiene $\tilde{\sigma}_2 \leq \tilde{\sigma}_p n^{1/p-1/2}$; ahora usar (ii) con $p = 2$.

///

Comentario I.b.15. Para conjuntos Ω_i , alguno de los cuales tiene diámetro mayor que la unidad, las desigualdades que resultan son $\forall\, t > 0$:

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} \leq 4\ \exp -\frac{t^p}{4\tilde{\sigma}_p^p(\max \operatorname{diam}\Omega_i)^p} \quad 2 \leq p < \infty \tag{6}$$

y

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} \leq 4\ \exp -\frac{t^2}{4n^{2/p-1}\tilde{\sigma}_p^2(\max \operatorname{diam}\Omega_i)^2} \quad 1 \leq p \leq 2 \tag{7}$$

Observaciones.

(i) Los apartados (i) y (ii) del teorema anterior aparecieron por primera vez en un artículo de Talagrand ([T 1], Teorema 3) donde consideró $\Omega = \{-1, 1\}^n$ equipado con la probabilidad uniforme y $p = 2$. Posteriormente fueron generalizados al caso que hemos expuesto por Johnson y Schechtman ([J-S 2], Corolario 4)

(ii) El suceso $\{|f - M_f| > t\}$ depende únicamente de los valores de la función f sobre Ω mientras que en la estimación obtenida intervienen, a través de $\tilde{\sigma}_p$, los valores sobre conv Ω. Es por eso que podemos sustituir, como se apunta en [J-S], $\tilde{\sigma}_p$ por el ínfimo de las constantes de Lipschitz sobre todas las las extensiones convexas $\tilde{f}$ a conv Ω.

(iii) Recordar que en virtud del Lema 1.b.8. podemos medir la desviación de una función respecto de M_f o de $\mathbb{E}(f)$ o de cualquier valor según nos convenga.

Es también posible dar desigualdades de desviación en las que el parámetro que interviene es el módulo de continuidad.

Teorema I.b.16. *Con la notación del Teorema I.b.14., para todo $\varepsilon > 0$ y para toda función convexa $\tilde{f}$: conv $\Omega \to \mathbb{R}$ se tiene,*

i) Si $2 \leq p$,

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\} \leq 4\ \exp -\frac{\varepsilon^p}{4} \tag{8}$$

ii) Si $1 \le p \le 2$,

$$I\!\!P\{|f - M_f| > \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\} \le 4\ \exp - \frac{\varepsilon^2}{4n^{\frac{2}{p}-1}} \tag{9}$$

Demostración: La demostración está basada en la del Teorema 3 en [T 1].

Sea $A = \{f \le M_f\} \subset \Omega$. Por definición de mediana, $I\!\!P(A) \ge \dfrac{1}{2}$. Para todo $(a_i)_1^k$ con $a_i \in A$ y para todo $(t_i)_1^k$ tal que $t_i \ge 0$ y $\sum_{i=1}^k t_i = 1$ tenemos

$$\tilde{f}(\sum_{i=1}^k t_i a_i) \le \sum_{i=1}^k t_i \tilde{f}(a_i) \le \sum_{i=1}^k t_i M_f = M_f$$

Por tanto $\tilde{f}(\mathrm{conv}A) \le M_f$.

Para todo $a \in \mathrm{conv}A$ y $\eta \in \Omega$ la definición de módulo de continuidad implica $\rho_p(\eta, a) \le \varepsilon \Rightarrow f(\eta) \le M_f + \tilde{\omega}_p(\varepsilon)$ y de aquí,

$$I\!\!P\{(\mathrm{conv}A)_\varepsilon\} \le I\!\!P\{f \le M_f + \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\}$$

y, aplicando el Teorema I.b.14.(i),

$$I\!\!P\{f > M_f + \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\} \le 2 \exp - \frac{\varepsilon^p}{4}$$

Sea ahora $B = \{f < M_f - \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\} \subset \Omega$ y sea $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Esto implica $\tilde{\omega}_p(\varepsilon') \le \tilde{\omega}_p(\varepsilon)$.

Como en el paso anterior, $f(\mathrm{conv}B) < M_f - \tilde{\omega}_p(\varepsilon)$ y

$$I\!\!P\{(\mathrm{conv}B)_{\varepsilon'}\} \le I\!\!P\{f < M_f + \tilde{\omega}_p(\varepsilon') - \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\}$$

De nuevo por el Teorema I.b.14.(i),

$$\frac{1}{2} \le I\!\!P\{f \ge M_f + \tilde{\omega}_p(\varepsilon') - \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\} \le \frac{1}{I\!\!P\{f < M_f - \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\}} \exp - \frac{\varepsilon'^p}{4}$$

Teniendo en cuenta solamente el primero y el último término de la anterior cadena de desigualdades y pasando al límite cuando $\varepsilon' \to \varepsilon$ resulta

$$I\!\!P\{f < M_f - \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\} \le 2 \exp - \frac{\varepsilon^p}{4}$$

///

Comentario I.b.17. Si algún conjunto Ω_i tiene diámetro mayor que 1, es inmediato comprobar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\} \leq 4 \ \exp - \frac{\varepsilon^p}{4(\max \operatorname{diam}\Omega_i)^p} \quad 2 \leq p < \infty$$

y

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > \tilde{\omega}_p(\varepsilon)\} \leq 4 \ \exp - \frac{\varepsilon^2}{4n^{2/p-1}(\max \operatorname{diam}\Omega_i)^2} \quad 1 \leq p \leq 2$$

El restringirnos a funciones convexas hace que las desigualdades (4) y (5) sean apreciablemente mejores, en general, que las de la sección I.b 2.; (esta afirmación se podrá verificar en las aplicaciones del Capítulo II). Sin embargo en el caso de que metricemos respecto de la distancia ρ_1 no hay mejora substancial. Vamos a ver a continuación que en el caso básico $\Omega = \{0,1\}^n \subset \ell_1^n$ las desigualdades (2) y (5) y las (3) y (9) son, salvo constantes numéricas, la misma. Y más aún, a semejanza de lo que ocurría en el caso general (Proposición I.b.9.), las cuatro desigualdades son equivalentes entre sí. Antes de enunciar este hecho necesitaremos los siguientes Lemas:

Lema I.b.18. *Sea A un subconjunto convexo de un espacio normado X. Denotar por ρ distancia dada en X por la norma. Entonces la función $\rho(\cdot, A)$ es convexa.*

Demostración: Fijar $x, y \in X$. Para todo $\varepsilon > 0$ sean $a, b \in A$ tal que

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, a) \leq \rho(x, A) + \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \rho(y, b) \leq \rho(y, A) + \varepsilon$$

Por convexidad, para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ el punto $\lambda a + (1-\lambda)b \in A$ y

$$\begin{aligned}\rho(\lambda x + (1-\lambda)y, A) &\leq \rho(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda a + (1-\lambda)b) \\ &\leq \lambda\rho(x, a) + (1-\lambda)\rho(y, b) \leq \lambda\rho(x, A) + (1-\lambda)\rho(y, A) + \varepsilon\end{aligned}$$

Como la desigualdad es cierta para todo ε, queda demostrado. ///

Lema I.b.19. *Sean $A \subset \{0,1\}^n$ y $\eta \in \{0,1\}^n$. Entonces*

$$\eta \in A \Longleftrightarrow \eta \in \operatorname{conv} A$$

Demostración: Tan solo hay que demostrar la implicación hacia la izquierda. Dado $\eta = \big(\eta(j)\big)_{j=1}^{n} \in \operatorname{conv} A$ suponer que se puede expresar de la forma

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} t_i \eta_i \qquad 0 < t_i \leq 1 \qquad \sum_{i=1}^{k} t_i = 1$$

con $\eta_i \in A$. Claramente $\eta(j) = 1 \Longrightarrow \eta_i(j) = 1 \quad \forall\, 1 \leq i \leq k$. Análogamente $\eta(j) = 0 \Longrightarrow \eta_i(j) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq k$. Por tanto $\eta = \eta_i$ para todo i.

///

Lema I.b.20. *Sea* $([0,1]^n, \rho_1)$ *y* $A \subseteq \{0,1\}^n$*. Entonces para todo* $\eta \in \{0,1\}^n \setminus \operatorname{conv} A$

$$\rho_1(\eta, A) = \rho_1(\eta, \operatorname{conv} A)$$

Demostración: Suponer $A = \{\eta_i\}_1^k$ y sea $\eta \notin \operatorname{conv} A$. El lema es consecuencia del siguiente hecho: Sea $T = \{(a_i)_1^k \in I\!R^k \ \mid \ \sum_{i=1}^{k} a_i = 1,\ 0 \leq a_i \leq 1\}$. Para todo $(a_i)_1^k \in T$,

$$\rho_1(\eta, \sum_{i=1}^{k} a_i \eta_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \rho_1(\eta, \eta_i)$$

Una vez demostrado este hecho es fácil concluir puesto que

$$\begin{aligned}\rho_1(\eta, \operatorname{conv} A) &= \inf_{(a_i)_1^k \in T} \rho_1(\eta, \sum_{i=1}^{k} a_i \eta_i) = \inf_{(a_i)_1^k \in T} \sum_{i=1}^{k} a_i \rho_1(\eta, \eta_i) \\ &\geq \inf_{(a_i)_1^k \in T} (\sum_{i=1}^{k} a_i) \inf_{1 \leq i \leq k} \rho_1(\eta, \eta_i) = \rho_1(\eta, A)\end{aligned}$$

La otra desigualdad $\rho_1(\eta, \operatorname{conv} A) \leq \rho_1(\eta, A)$ es trivial.

Para demostrar la igualdad que nos falta sea $\eta = \big(\eta(j)\big)_{j=1}^{n}$. Desarrollando en coordenadas tenemos

$$\rho_1(\eta, \sum_{i=1}^{k} a_i \eta_i) = \sum_{j=1}^{n} |\eta(j) - \sum_{i=1}^{k} a_i \eta_i(j)|$$

y
$$\sum_{i=1}^{k} a_i \rho_1(\eta,\eta_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{n} |\eta(j)-\eta_i(j)| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_i|\eta(j)-\eta_i(j)|$$

es suficiente por tanto comprobar que $|\eta(j)-\sum_{i=1}^{k} a_i\eta_i(j)| = \sum_{i=1}^{k} a_i|\eta(j)-\eta_i(j)|$ para todo j.

Si $\eta(j)=0$ es inmediato.

Si $\eta(j)=1$,

$$|1-\sum_{i=1}^{k} a_i\eta_i(j)| = |\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i\eta_i(j)| = |\sum_{i=1}^{k} a_i(1-\eta_i(j))| = \sum_{i=1}^{k} a_i|\eta(j)-\eta_i(j)|$$

///

Estamos ya en condiciones de establecer el teorema anunciado anteriormente:

Teorema I.b.21. *Sea* $\Omega = \{0,1\}^n \subset \ell_1^n$.

(i) Existe una constante $c_1 > 0$ tal que para toda función de Lipschitz $f\colon\Omega \to \mathbb{R}$ y para todo $t > 0$

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > t\} \le c_1 \;\exp -\frac{t^2}{4n\sigma_1^2}$$

(ii) Existe una constante $c_2 > 0$ tal que para toda función convexa de Lipschitz $\tilde f\colon \mathrm{conv}\ \Omega \to \mathbb{R}$ y para todo $t > 0$

$$\mathbb{P}\{|\tilde f - M_f| > t\} \le c_2 \;\exp -\frac{t^2}{4n\tilde\sigma_1^2}$$

(iii) Existe una constante $c_3 > 0$ tal que para toda función continua $f\colon\Omega \to \mathbb{R}$ y para todo $t > 0$

$$\mathbb{P}\{|f - M_f| > \omega_1(t)\} \le c_3 \;\exp -\frac{t^2}{4n}$$

(iv) Existe una constante $c_4 > 0$ tal que para toda función convexa y continua $\tilde f\colon \mathrm{conv}\ \Omega \to \mathbb{R}$ y para todo $t > 0$

$$\mathbb{P}\{|\tilde f - M_f| > \tilde\omega_1(t)\} \le c_4 \;\exp -\frac{t^2}{4n}$$

y la relación entre las constantes viene dada por

$$c_1 \le c_3 \le 2c_2 \le 2c_1 \qquad \text{y} \qquad c_3 \le 2c_2 \le 2c_4 \le 2c_3$$

Más aún, todas éllas son equivalentes.

Demostración: (i)-(iv) son respectivamente las desigualdades (2), (5), (3) y (9). Para la equivalencia de todas éllas la forma más rápida es probar $(i) \Leftrightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$. La primera equivalencia es el Lema I.b.9. La segunda implicación es inmediata pues $\omega_1(t) \le \tilde{\omega}_1(t)$. Lo mismo ocurre con la tercera pues $\tilde{\omega}_1(t) \le \tilde{\sigma}_1 t$. Para la última implicación usar (ii) con la función convexa $\rho(\cdot, \operatorname{conv} A)$ (Lema I.b.18.) de constante de Lipschitz $\sigma_1 = 1$ (Lema I.b.6.) de esta manera llegamos a que para todo $A \in \Omega$ tal que $I\!P(A) \ge \frac{1}{2}$,

$$I\!P\big(\,(\operatorname{conv} A)_t\,\big) \ge 1 - c_2 \ \exp -\frac{t^2}{4n}$$

Observar que los Lemas I.b.19 y I.b.20. implican que para todo $A \in \{0,1\}^n$ y todo $t > 0$,

$$I\!P(A_t) = I\!P\big(\,(\operatorname{conv} A)_t\,\big)$$

por tanto estimada la función de concentración para Ω. Concluir aplicando el Lema I.b.4.

///

Comentario I.b.22. Nos preguntamos ahora lo que ocurre si $1 < p$. El Lema I.b.9 nos da siempre la equivalencia entre (i) y (iii). También son equivalentes (ii) y (iv) gracias a que disponemos de las desigualdades (i) y (iii) del Teorema I.b.14. (ver el Teorema I.b.16.). Sin embargo no es cierto $(ii) \Rightarrow (iii)$. El siguiente contraejemplo, desarrollado sólamente para $p = 2$ muestra que, en general, es imposible tener para toda función una acotación del tipo

$$I\!P\{|f - M_f| > \omega_2(t)\} \le c \ \exp -ct^2$$

Contraejemplo.

Sea $\Omega = \{0,1\}^n$ con la probabilidad $I\!P(\eta) = \dfrac{1}{2^n}$ y la distancia euclídea. Sea $f\colon \Omega \to I\!R$ definida por $f(\eta) = \sum_{i=1}^n \eta_i$. Para esta función es claro que $M_f = \dfrac{n}{2}$ y así para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} I\!P\{\,|f - M_f\,| > \varepsilon M_f\} &= I\!P\{\,|\sum_{i=1}^n \eta_i - \frac{n}{2}\,| > \varepsilon \frac{n}{2}\} \\ &= I\!P\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n (2\eta_i - 1)}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\sqrt{n}\,\} \end{aligned}$$

En virtud del Teorema Central del Límite, la variable $\dfrac{\sum_{i=1}^n (2\eta_i - 1)}{\sqrt{n}}$ tiende en distribución a una variable gaussiana normalizada γ. Pero se puede decir aún más; según un resultado de A.Berry [Ber], (ver también [H-H]), existe una constante numérica $C > 0$ tal que

$$\sup_{x \in I\!R} \left| I\!P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (2\eta_i - 1)}{\sqrt{n}} \le x \right) - I\!P(\gamma \le x) \right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Debido a esta proximidad *uniforme* entre las dos variables es ahora fácil deducir la existencia de constantes numéricas $c, c' > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ y $n \in I\!N$,

$$I\!P\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n (2\eta_i - 1)}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\sqrt{n}\,\} \ge c \exp -c'\varepsilon^2 n$$

Por otra parte para todo $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \omega_2(\delta) &= \sup_{\|\eta - \eta'\|_2 \le \delta} |\,f(\eta) - f(\eta')\,| \le \sup_{\|\eta - \eta'\|_2 \le \delta} \sum_{i=1}^n |\,\eta_i - \eta_i'\,| \\ &= \sup_{\|\eta - \eta'\|_2 \le \delta} \sum_{i=1}^n |\,\eta_i - \eta_i'\,|^2 \le \delta^2 \end{aligned}$$

Por tanto para todo $\varepsilon > 0$, $\omega_2\left(\sqrt{\varepsilon \frac{n}{2}}\right) \le \dfrac{\varepsilon n}{2}$ y por hipótesis se tiene

$$\begin{aligned} I\!P\{\,|f - M_f\,| > \varepsilon M_f\} = I\!P\{\,|f - M_f\,| > \varepsilon \frac{n}{2}\} &\le I\!P\{\,|f - M_f\,| > \omega_2\left(\sqrt{\varepsilon \frac{n}{2}}\right)\} \\ &\le c \exp -c\varepsilon n \end{aligned}$$

Esta cota es más pequeña que la correcta dada por el Teorema Central del Límite (para comprobarlo tomar $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$) lo que es una contradicción.

A continuación, y siguiendo con el caso $\{0,1\}^n$, encontraremos desigualdades de desviación para ciertas clases de funciones mejorando (1),(2),(4) y (5), descritas al principio de la sección. Agradecemos a J.M. Carnicer sus sugerencias en la demostración del siguiente Teorema.

Teorema I.b.23. *Sea* $\big([0,1],\Sigma,\mathbb{P}\big)$ *una medida de probabilidad sobre el intervalo* $[0,1]$. *Sea* $\psi\colon[0,1]\to[0,1]$ *una función no decreciente, cóncava y* $x_0\in[0,1]$. *Para todo* $0\le t\le 1$

$$\mathbb{P}\{|\psi-\psi(x_0)|>t\}\le \mathbb{P}\{|x-x_0|>\frac{tx_0}{2}\}$$

Demostración: Por ser ψ cóncava, es continua y existe la derivada por la izquierda $\psi'_-(t)$ para todo t y además ψ'_- es una función positiva no creciente. Para todo $0\le t\le 1$,

$$1\ge\int_0^1\psi'_-(y)\,dy\ge\int_0^t\psi'_-(y)\,dy\ge t\psi'_-(t)$$

Ahora, para todo $0\le x\le 1$ y usando el Teorema del Valor Medio,

$$|\psi(x)-\psi(x_0)|\le|\psi'_-(\xi)|\,|x-x_0|\le|x-x_0|\,\frac{1}{\xi}$$

donde ξ es un punto intermedio entre x y x_0. Obsérvese que para todo $0\le t\le 1$,

$$|x-x_0|>t\xi\Longrightarrow|x-x_0|>\frac{tx_0}{2}$$

En efecto, si $|x-x_0|\le\frac{tx_0}{2}\left(\le\frac{x_0}{2}\right)$ entonces $\xi\ge\frac{x_0}{2}$ y así $|x-x_0|\le t\xi$. Por tanto, reuniendo los cálculos realizados

$$|\psi(x)-\psi(x_0)|>t\Longrightarrow|x-x_0|>t\xi\Longrightarrow|x-x_0|>\frac{tx_0}{2}$$

y así,

$$\mathbb{P}\{|\psi-\psi(x_0)|>t\}\le \mathbb{P}\{|x-x_0|>\frac{tx_0}{2}\}$$

///

Observación.

(i) Un caso particularmente importante es cuando x_0 es tal que $\psi(x_0)$ es una mediana de ψ.

(ii) Si la probabilidad $I\!P$ es simétrica respecto de, digamos, $\frac{1}{2}$ entonces

$$I\!P\{|\psi - M_\psi| > t\} \leq I\!P\{|x - \frac{1}{2}| > \frac{t}{4}\}$$

Observar que en este caso podemos tomar como mediana $M_\psi = \psi(\frac{1}{2})$

Corolario I.b.24. *En las condiciones anteriores si $I\!P$ es la probabilidad binomial dada por $I\!P(\frac{k}{n}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ $\quad k = 0, \ldots, n$ entonces para todo $0 \leq t \leq 1$*

$$I\!P\{|\psi - M_\psi| > t\} \leq \exp -\frac{t^2}{8}$$

Demostración: Usar el Teorema I.b.23. junto con la observación de que la binomial arriba definida es simétrica respecto de $\frac{1}{2}$ y a continuación la desigualdad (1') del Teorema I.b.13.. De esta forma,

$$I\!P\{|\psi - M_\psi| > t\} \leq I\!P\{\,|x - \frac{1}{2}| > \frac{t}{4}\} \leq \exp -\frac{t^2}{8}$$

///

Corolario I.b.25. *Sea $\{0,1\}^n$ equipado con la probabilidad de contar $I\!P$ y sea f una función $f\colon \{0,1\}^n \to I\!R$ tal que*

(i) Para todo $\eta, \eta' \in \{0,1\}^n$, $\|\eta\|_1 \leq \|\eta'\|_1 \Longrightarrow f(\eta) \leq f(\eta')$

(ii) Para todo $\eta, \eta', \eta'' \in \{0,1\}^n$ tal que $\|\eta''\|_1 = \|\eta'\|_1 + 1 = \|\eta\|_1 + 2$ se tiene

$$f(\eta'') - f(\eta') \leq f(\eta') - f(\eta)$$

Con estas condiciones $\forall\, t > 0$,

$$I\!P\{|f - M_f| > t\} \leq \exp -\frac{t^2 n}{8\Delta^2 f} \tag{10}$$

donde Δf es la variación de f i.e. $\Delta f = f(1, \ldots, 1) - f(0, \ldots, 0)$

Demostración: Es inmediato comprobar que $\|\eta\|_1 = \|\eta'\|_1 \Longrightarrow f(\eta) = f(\eta')$ es decir, f se puede considerar como una función de $\|\eta\|_1$ definida sobre $\{0, \ldots, n\}$.

Extendemos, interpolando linealmente, f al intervalo $[0,n]$ y denotamos a esta nueva función con la misma letra f. Observar que la condición (ii) dice que la función f definida sobre $\{0,\dots,n\}$, (o $[0,n]$) es cóncava.

Normalizamos, definiendo $\psi\colon[0,1]\to[0,1]$ como

$$\psi(x)=\frac{f(xn)-f(0)}{\Delta f}$$

La función ψ es a su vez creciente y cóncava y por (i) tenemos en $[0,1]$ la probabilidad binomial definida en el Corolario I.b.24. Observamos también que, puesto que f es creciente, podemos elegir $f(\frac{n}{2})$ como mediana de f (y $\psi(\frac{1}{2})$ como mediana de ψ). Estamos en condiciones por tanto de aplicar dicho Corolario:

$$I\!P\{\,|f-M_f|>t\,\}=I\!P\Big\{\Big|\psi(\frac{\eta}{n})-\psi(\frac{1}{2})\Big|>\frac{t}{\Delta f}\Big\}\leq\exp-\frac{t^2n}{8\Delta^2 f}$$

siempre que $t\leq\Delta f$. Pero si $t>\Delta f$ el suceso que estamos estimando es vacío y la desigualdad trivial.

///

Observación. Si comparamos la desigualdad (10) con las anteriormente enunciadas (1),(2),(4) y (5), es inmediato comprobar que para cualquier extensión convexa de f

(1) Si $1\leq p\leq 2$

$$\frac{\Delta f}{\sqrt{n}}\leq\sigma_2\leq\sigma_p n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\leq\tilde{\sigma}_p n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

y de aquí

$$\frac{t^2n}{\Delta^2 f}\geq\frac{t^2}{\sigma_p^2 n^{\frac{2}{p}-1}}\geq\frac{t^2}{\tilde{\sigma}_p^2 n^{\frac{2}{p}-1}}$$

Es decir, salvo las constantes numéricas la desigualdad (10) es mejor que (1),(2) y (5).

Un ejemplo de función donde la mejora es substancial es $f(\eta)=\log\Big(1+\sum_{i=1}^n\eta_i\Big)$ Para tal función $\Delta f=\log(n+1)$ y (10) proporciona

$$I\!P\{|f-M_f|>t\}\leq\exp-\frac{t^2n}{8\log^2(n+1)}$$

Por otra parte es inmediato comprobar que para todo $1 \le p \le 2$, $\sigma_p = \log 2$. Por tanto, para todo $1 \le p \le 2$ y $t > 0$,

$$-\frac{t^2 n}{\log^2(n+1)} \ll -\frac{t^2}{\log 2 n^{\frac{2}{p}-1}} \le -\frac{t^2}{\sigma_p^2 n^{\frac{2}{p}-1}} \le -\frac{t^2}{\tilde{\sigma}_p^2 n^{\frac{2}{p}-1}}$$

con lo que (10) es notáblemente más ajustada que (1), (2) y (5).

(2) Si $2 < p < \infty$

$$\frac{\Delta f}{\sqrt{n}} \le \frac{\Delta f}{n^{1/p}} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \le \sigma_p n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \le \tilde{\sigma}_p n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \ll \tilde{\sigma}_p$$

Esto hace que también en este caso (10) sea mejor que (2). En cuanto a (4), la dependencia respecto de n es mucho mejor en (10) y no podemos asegurar nada de la dependencia en t.

Concluímos el capítulo estudiando lo que ocurre si eliminamos la restricción de concavidad. En este caso tenemos desigualdad de desviación, no de la función f sino de su restricción a $\{0,1\}^k$ (con $k \ge \left[\frac{n}{2}\right]$) consistente en hacer nulas las últimas coordenadas.

Notación. Para todo $k \le n$ denotamos por i_k la inclusión $i_k\colon \{0,1\}^k \hookrightarrow \{0,1\}^n$ dada por $i_k\big((\eta_1, \dots, \eta_k)\big) = (\eta_1, \dots, \eta_k, 0 \dots, 0)$

Lema I.b.26. *Sea $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$ una función no decreciente. Para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe $a = a(\varepsilon, \psi) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ tal que*

$$x, y \in \left[a - \frac{\varepsilon}{8}, a + \frac{\varepsilon}{8}\right] \Longrightarrow |\psi(x) - \psi(y)| \le \varepsilon$$

Demostración: Llamar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{8}$. Por ser ψ una función no decreciente, ≥ 0 y $\psi(1) \le 1$

$$\begin{aligned}\int_{1/4}^{1/2} [\psi(t+\delta) - \psi(t-\delta)]\,dt &= \int_{1/4+\delta}^{1/2+\delta} \psi(t)\,dt - \int_{1/4-\delta}^{1/2-\delta} \psi(t)\,dt \\ &= \int_{1/2-\delta}^{1/2+\delta} \psi(t)\,dt - \int_{1/4-\delta}^{1/4+\delta} \psi(t)\,dt \le \int_{1/2-\delta}^{1/2+\delta} \psi(t)\,dt \le 2\delta\end{aligned}$$

Por tanto existe $a \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ tal que $\psi(a+\delta) - \psi(a-\delta) \leq 8\,\delta = \varepsilon$; (si no fuera así tendríamos

$$\int_{1/4}^{1/2} [\psi(t+\delta) - \psi(t-\delta)]\, dt > \int_{1/4}^{1/2} 8\delta\, dt = 2\delta$$

contradicción). Por el crecimiento de ψ podemos concluir

$$x, y \in [a-\delta, a+\delta] \quad \Longrightarrow \quad |\,\psi(x) - \psi(y)\,| \leq 8\,\delta = \varepsilon$$

///

Teorema I.b.27. *Sea $\{0,1\}^n$ con la probabilidad de contar $I\!\!P$, y F una función $F\colon \{0,1\}^n \to I\!\!R$ tal que para todo $\eta, \eta' \in \{0,1\}^n$, $\|\eta\|_1 \leq \|\eta'\|_1 \Longrightarrow F(\eta) \leq F(\eta')$. Entonces para todo $t > 0$ existe $k = k(t) \geq [\frac{n}{2}]$ tal que la función $f = F \circ i_k$ verifica*

$$I\!\!P\{|f - M_f| > t\} \leq 2 \exp - \frac{t^2 n}{128 \Delta^2 F}$$

Demostración: Extendemos F al intervalo $[0, n]$ de manera que la nueva función siga siendo creciente denotándola con la misma letra F. Normalizamos, definiendo $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$ como

$$\psi(x) = \frac{F(xn) - F(0)}{\Delta F}$$

Sea $\varepsilon = \frac{t}{\Delta F}$. Observar que si $t \geq \Delta F$ $(\geq \Delta f)$, la desigualdad es trivial pues el suceso es vacío, por tanto podemos suponer $0 < \varepsilon = \dfrac{t}{\Delta F} < 1$. Sea $a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ el elemento asociado a ψ y ε según el Lema I.b.26.. Tomar $k = [2an] \geq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Por hipótesis, F (resp f) es de la forma $F(\sum_{i=1}^{n} \eta_i)$ (resp $f(\sum_{i=1}^{k} \eta_i)$); por tanto podemos tomar como mediana de f , $M_f = f\Big(\,[\dfrac{k}{2}]\Big)$ y

$$I\!\!P\{|f - M_f| > t\} = I\!\!P\{\Big|f - f\Big([\frac{k}{2}]\Big)\Big| > t\} = I\!\!P\{\Big|\psi - \psi\Big(\frac{k}{2n}\Big)\Big| > \frac{t}{\Delta F}\}$$

Claramente, $\left|\dfrac{k}{2n} - a\right| = \dfrac{|k - 2an|}{2n} \leq \dfrac{1}{2n}$, por tanto $\dfrac{k}{2n} \in [a - \dfrac{\varepsilon}{16}, a + \dfrac{\varepsilon}{16}]$ si $\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{\varepsilon}{16}$ ó equivalentemente si $n \geq \dfrac{8}{\varepsilon}$. Esta es una restricción sobre la que volveremos más tarde.

Por consiguiente, si $n \geq \dfrac{8}{\varepsilon}$ el Lema I.b.26. asegura que

$$\Big|\psi\big(\frac{\sum_{i=1}^{k}\eta_i}{n}\big) - \psi\Big(\frac{k}{2n}\Big)\Big| > \varepsilon \Longrightarrow \Big|\frac{\sum_{i=1}^{k}\eta_i}{n} - a\Big| > \frac{\varepsilon}{8}$$

y así,

$$\Big|\frac{\sum_{i=1}^{k}\eta_i}{n} - a\Big| > \frac{\varepsilon}{8} \Longrightarrow \Big|\frac{\sum_{i=1}^{k}\eta_i}{n} - \frac{k}{2n}\Big| + \big|a - \frac{k}{2n}\big| > \frac{\varepsilon}{8} \Longrightarrow \Big|\frac{\sum_{i=1}^{k}\eta_i}{n} - \frac{k}{2n}\Big| > \frac{\varepsilon}{16}$$

Por tanto, si $n \geq \dfrac{8}{\varepsilon}$ tenemos

$$\begin{aligned} I\!\!P\{|\psi - \psi\Big(\frac{k}{2n}\Big)| > \frac{t}{\Delta F}\} &\leq I\!\!P\{\Big|\frac{\sum_{i=1}^{k}\eta_i}{n} - \frac{k}{2n}\Big| > \frac{t}{16\Delta F}\} \leq \exp - \frac{t^2 n^2}{128 k \Delta^2 F} \\ &\leq \exp - \frac{t^2 n}{128\Delta^2 F} \leq 2\exp - \frac{t^2 n}{128\Delta^2 F} \end{aligned}$$

Hemos usado la desigualdad de Amir-Milman (1') así como la relación trivial $\dfrac{n}{k} \geq 1$.

Para concluir observemos que la restricción $n \geq \dfrac{8\Delta F}{t}$ no es tal. En efecto, si $n < \dfrac{8\Delta F}{t}$ entonces, teniendo en cuenta también que $t < \Delta F$,

$$2\exp - \frac{t^2 n}{128\Delta^2 F} \geq 2\exp - \frac{tn}{128\Delta F} > 2\exp - \frac{1}{16} > 1$$

y la desigualdad es trivial.

///

Observación. En las aplicaciones que haremos de este resultado daremos a la restricción $n \geq \dfrac{8\Delta F}{t}$ un significado distinto. Por comodidad enunciamos también el Teorema I.b.27. de forma más próxima a su uso porterior.

Teorema I.b.28. *Sea $\{0,1\}^n$ con la probabilidad de contar $I\!\!P$ y F una función $F\colon \{0,1\}^n \to I\!\!R$ tal que para todo $\eta, \eta' \in \{0,1\}^n$, $\|\eta\|_1 \leq \|\eta'\|_1 \Longrightarrow F(\eta) \leq F(\eta')$. Entonces para todo $t > 0$ existe $k = k(t) \geq \big[\frac{n}{2}\big]$ tal que si $n \geq \dfrac{8\Delta F}{t}$, la función $f = F \circ i_k$ verifica*

$$I\!\!P\{|f - M_f| > t\} \leq \exp - \frac{t^2 n}{128\Delta^2 F}$$

Las tablas a continuación resumen las desigualdades de la sección.

Sea $\Omega = \{0,1\}^n$ equipado con la probabilidad de contar $I\!P$.

FUNCION	**DISTANCIA**	$I\!P\,\{\,\lvert\, f - M_f\,\rvert > \omega_f(\varepsilon)\,\}$	
$f\colon \Omega \to I\!R$	$\Omega \subset \ell_1^n$	$\leq 2\ \exp - \dfrac{2\varepsilon^2}{n}$	(3)
$f\colon \operatorname{conv}\Omega \to I\!R$, convexa		$\leq 4\ \exp - \dfrac{\varepsilon^2}{4n}$	(9)
$f\colon \Omega \to I\!R$	$\Omega \subset \ell_2^n$	$\leq 2\ \exp - \dfrac{2\varepsilon^2}{n}$	(3)
$f\colon \operatorname{conv}\Omega \to I\!R$, convexa		$\leq 4\ \exp - \dfrac{\varepsilon^2}{4}$	(9)
$f\colon \Omega \to I\!R$	$\Omega \subset \ell_p^n,\ 2 < p < \infty$	$\leq 2\ \exp - \dfrac{2\varepsilon^2}{n}$	(3)
$f\colon \operatorname{conv}\Omega \to I\!R$, convexa		$\leq 4\ \exp - \dfrac{\varepsilon^p}{4}$	(8)
$f\colon \Omega \to I\!R$	$\Omega \subset \ell_p^n,\ 1 \leq p < 2$	$\leq 2\ \exp - \dfrac{2\varepsilon^2}{n}$	(3)
$f\colon \operatorname{conv}\Omega \to I\!R$, convexa		$\leq 4\ \exp - \dfrac{\varepsilon^2}{4n^{2/p-1}}$	(9)

Sea $\Omega = \{0,1\}^n$ equipado con la probabilidad de contar $I\!P$.

FUNCION	**DISTANCIA**	$I\!P\,\{\,|\,f - M_f\,| > t\,\}$	
$f\colon \Omega \to I\!R$	$\Omega \subset \ell_1^n$	$\leq 2\ \exp -\dfrac{2t^2}{\sigma^2 n}$	(1)
$f\colon \mathrm{conv}\,\Omega \to I\!R$, convexa		$\leq 4\ \exp -\dfrac{t^2}{4\sigma^2 n}$	(5)
$f\colon \Omega \to I\!R$	$\Omega \subset \ell_2^n$	$\leq 2\ \exp -\dfrac{2t^2}{\sigma^2 n}$	(1)
$f\colon \mathrm{conv}\,\Omega \to I\!R$, convexa		$\leq 4\ \exp -\dfrac{t^2}{4\sigma^2}$	(5)
$f\colon \Omega \to I\!R$	$\Omega \subset \ell_p^n,\ 2 < p < \infty$	$\leq 2\ \exp -\dfrac{2t^2}{\sigma^2 n}$	(1)
$f\colon \mathrm{conv}\,\Omega \to I\!R$, convexa		$\leq 4\ \exp -\dfrac{t^p}{4\sigma^p}$	(4)
$f\colon \Omega \to I\!R$	$\Omega \subset \ell_p^n,\ 1 \leq p < 2$	$\leq 2\ \exp -\dfrac{2t^2}{\sigma^2 n}$	(1)
$f\colon \mathrm{conv}\,\Omega \to I\!R$, convexa		$\leq 4\ \exp -\dfrac{t^2}{4\sigma^2 n^{2/p-1}}$	(5)
$f\colon \Omega \to I\!R$	creciente, cóncava	$\leq \exp -\dfrac{t^2 n}{128\Delta^2 f}$	(10)

CAPITULO II

II.a. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

En este capítulo vamos a dar respuestas a la siguiente cuestión:

Cuestión II.a.1. *Dado* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio r-normado de dimensión* $\dim E = n$, *y* $\varepsilon > 0$, *estimar el máximo* $N = N(\varepsilon, n, E)$ *tal que* $\left(\{-1,+1\}^N, \rho_\infty\right)$ *está* $(1+\varepsilon)$*-incluido en* E. *(Esto último lo denotamos en 0.b.20. mediante el diagrama* $\{-1,+1\}^N \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$*).*

Observación. Observar que a la vista de las definiciones 0.b.19. y 0.b.20., la expresión $M \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} M'$ es equivalente a que exista una función $f\colon M \to M'$ inyectiva tal que

$$\rho(x,y) \le \rho'(f(x), f(y)\,) \le (1+\varepsilon)\,\rho(x,y)$$

$\forall\, x, y \in M$.

Observación. Trivialmente $M \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} M'$ implica $M \overset{1+\varepsilon'}{\hookrightarrow} M'$ para todo $\varepsilon' \ge \varepsilon$. Utilizando este hecho, junto con la observación anterior, es fácil comprobar que $M \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} M'\ \ \forall\ \varepsilon > 0$ es equivalente a que para todo $0 < \varepsilon < 1$ exista una función $f\colon M \to M'$ inyectiva tal que

$$(1-\varepsilon)\,\rho(x,y) \le \rho'(f(x), f(y)\,) \le (1+\varepsilon)\,\rho(x,y)$$

$\forall\, x, y \in M$.

Las dos observaciones anteriores junto con el hecho $\rho_\infty((\varepsilon_i), (\varepsilon_i')) = 2$, para todo $(\varepsilon_i) \ne (\varepsilon_i')$, $(\varepsilon_i), (\varepsilon_i') \in \{-1,+1\}^N$, nos permiten reformular la cuestión II.a.1. de la siguiente forma:

Cuestión II.a.2. *Dado* $0 < \varepsilon < 1$ *y* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio r-normado de dimensión* $\dim E = n$, *estimar el máximo cardinal* $N_1 = N_1(\varepsilon, n, E)$ *de los subconjuntos* T *de*

E que verifican

$$1-\varepsilon \leq \| x-y \| \leq 1+\varepsilon \qquad \forall\, x \neq y \in T$$

En efecto, dado $0 < \varepsilon < 1$ y E, $\dim E = n$, si existe $N = N(\varepsilon, n, E)$ tal que $\{-1,+1\}^N \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ entonces el conjunto $T = f\big(\{-1,+1\}^N\big) \subset E$ hace que sea $N_1 \geq 2^N$. A la inversa, si existe un $T \subset E$ de cardinal N_1 verificando $(*)$, entonces $\{-1,+1\}^{[\log_2 N_1]} \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ y por tanto $N \geq [\log_2 N_1]$.

Notación. A la hora de referirnos al número N_1 que aparece en la Cuestión II.a.2., omitiremos el subíndice 1. También a partir de ahora los logarítmos serán neperianos (y no en base 2).

Observación. La Cuestión II.a.2. expresada en lenguaje geométrico dice lo siguiente: *"Dado un espacio r-normado E determinar el número de puntos que podemos encontrar que estén (salvo un error ε) a igual distancia uno de otro"*.

Comentario II.a.3. Es conocido, ver [Pet], un resultado general para inclusiones isométricas, es decir para $\varepsilon = 0$. Dicho resultado dice que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\min(4, n+1) \leq N \leq 2^n$$

y más aún $N = 2^n \Leftrightarrow E = \ell_\infty^n$

Comentario II.a.4. Una versión infinito-dimensional de la Cuestión II.a.2. es conocida (ver por ejemplo [Do], Lema 3.4, donde el autor consideraba espacios E más generales). El enunciado trasladado a nuestro contexto es el siguiente: *"Sea E un espacio r-Banach de dimensión infinita. Para todo* $0 < \varepsilon < 1$, *existe una sucesión infinita de puntos $\{x_n\} \subset E$ tal que*

$$1-\varepsilon \leq \| x_i - x_j \| \leq 1+\varepsilon \qquad \forall\, i \neq j \in \mathbb{N}$$

Al tratar con espacios r-normados es conveniente manejar $\|\cdot\|^r$ en vez de $\|\cdot\|$. Por esta razón necesitamos el siguiente lema:

Lema II.a.5. *Sea E un espacio r-Banach y $T \subset E$. Sean $0 < \varepsilon < 1$ y $\delta = \dfrac{\varepsilon r}{2^{1/r-1}}$. Si*

$$1 - \delta \leq \| x - y \|^r \leq 1 + \delta \qquad \forall\, x \neq y \in T$$

entonces T verifica $(*)$.

Demostración: Observar que también $0 < \delta < 1$. La demostración se reduce a utilizar propiedades de números reales. En efecto, con los valores ε y δ dados tenemos que probar que $|t^r - 1| \leq \delta \Longrightarrow |t-1| \leq \varepsilon\,,\ \ t > 0$. Aplicando el Teorema del Valor Medio a la función $f(t) = t^{1/r}$ resulta,

$$|t-1| = |t^r - 1| \frac{\xi^{1/r-1}}{r} \leq \delta \frac{(1+\delta)^{1/r-1}}{r} \leq \delta \frac{2^{1/r-1}}{r} = \varepsilon$$

///

El primer resultado nos dice que N no puede ser demasiado grande; en concreto ha de satisfacer una relación de la forma

$$n \geq C(\varepsilon, r) \log N$$

Proposición II.a.6. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio r-normado de de dimensión $\dim E = n$ y $0 < \varepsilon < 1$. Sea $T \subset E$ tal que $\operatorname{card} T = N$ y*

$$1 - \varepsilon \leq \| x - y \| \leq 1 + \varepsilon \qquad \forall\, x \neq y \in T$$

entonces

$$\log N \leq \log \left(\frac{2^{1/r} + 1 + (2^{1/r} - 1)\varepsilon}{1 - \varepsilon} 2^{1/r-1} \right) n$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad suponer $0 \in T$. En las afirmaciones posteriores usamos la desigualdad 2. de 0.b.. Por hipótesis las bolas $B\left(x, \dfrac{1-\varepsilon}{2^{1/r}}\right)$,

$x \in T$ son disjuntas y están todas contenidas en $B\left(0, \dfrac{2^{1/r}+1+(2^{1/r}-1)\varepsilon}{2}\right)$. Por tanto,

$$\sum_{x\in T} \operatorname{vol} B\left(x, \frac{1-\varepsilon}{2}\right) \le \operatorname{vol} B\left(0, \frac{2^{1/r}+1+(2^{1/r}-1)\varepsilon}{2}\right)$$

vol $(\cdot)$ denota la mediada de Lebesgue en $I\!R^n$ y estamos identificando E con $I\!R^n$. Por ser conjuntos disjuntos y por las propiedades de la medida Lebesgue,

$$N \operatorname{vol} B\left(0, \frac{1-\varepsilon}{2^{1/r}}\right) \le \operatorname{vol} B\left(0, \frac{2^{1/r}+1+(2^{1/r}-1)\varepsilon}{2}\right)$$

o sea,

$$N\left(\frac{1-\varepsilon}{2^{1/r}}\right)^n \operatorname{vol} B_E \le \left(\frac{2^{1/r}+1+(2^{1/r}-1)\varepsilon}{2}\right)^n \operatorname{vol} B_E$$

simplificar y finalizar tomando logaritmos.

///

II.b. INCLUSION DEL ℓ_∞^n-CUBO EN ESPACIOS r-NORMADOS CON BASE 1-SUBSIMETRICA.

II.b.1. Caso $E = \ell_1^n$.

Comenzamos con este caso particular por que no tiene complicaciones técnicas y éllo hace que el esquema de la demostración, que básicamente vamos a repetir a lo largo del capítulo, se vea con claridad.

Teorema II.b.1. *Para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe un subconjunto de N puntos $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ en ℓ_1^n de forma que $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_1 < 1 + \varepsilon, \ \forall\, i \neq j$, siempre que*

$$n > \frac{4}{\varepsilon^2} \log N$$

Demostración: Sea $0 < \varepsilon < 1$. Sea la variable aleatoria $\xi = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, e_i$ donde ε_i son variables aleatorias i.i.d. de Rademacher. Sea ξ' una copia independiente de ξ, i.e. $\xi' = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i'\, e_i$ con ε_i' v.a.i.i.d. de Rademacher independientes de las ε_i.

Observar que, en distribución, $|\varepsilon_i - \varepsilon_i'| \overset{\mathrm{d}}{=} 2\,\eta_i$ donde η_i son v.a.i.i.d. tal que $\mathbb{P}\{\eta_i = 0\} = \mathbb{P}\{\eta_i = 1\} = \frac{1}{2}$, por tanto

$$\|\xi - \xi'\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i - \varepsilon_i'| \overset{\mathrm{d}}{=} 2 \sum_{i=1}^{n} \eta_i$$

Claramente, $\mathbb{E}\|\xi - \xi'\|_1 = n$.

Queremos calcular la probabilidad del suceso

$$\{\, \big|\, \|\xi - \xi'\|_1 - \mathbb{E}\|\xi - \xi'\|_1 \,\big| > \varepsilon\, \mathbb{E}\|\xi - \xi'\|_1 \,\}$$

$$\mathbb{P}\{\, \big|\, \|\xi - \xi'\|_1 - \mathbb{E}\|\xi - \xi'\|_1 \,\big| > \varepsilon\, \mathbb{E}\|\xi - \xi'\|_1 \,\} = \mathbb{P}\{\, \big|2 \sum_{i=1}^{n} \eta_i - n\big| > \varepsilon\, n \,\} \leq \exp - \frac{\varepsilon^2\, n}{2}$$

para el último paso hemos usado la desigualdad de Amir-Milman (I.b.13. (1')) con la función $f = \dfrac{\|\cdot\|_1}{n}$. Es inmediato observar que en este caso también $M_f = n$

pues la variable $\sum_{i=1}^{n} \eta_i$ es simétrica respecto de su esperanza (ver Definición 0.a.2. Observación ii).

Consideramos ahora un número N de copias independientes de ξ , $\xi_1, \ldots, \xi_N$. Para cada una de las $\binom{N}{2}$ parejas que podemos formar podemos repetir los cálculos anteriores. Se trata ahora de determinar N de tal forma que

$$\mathbb{P}\{ \big| \, \|\xi_i - \xi_j\|_1 - \mathbb{E}\|\xi_i - \xi_j\|_1 \big| \leq \varepsilon \, \mathbb{E}\|\xi_i - \xi_j\|_1 \, , \, \forall \, i \neq j \, \} > 0$$

Así aseguramos la existencia de un elemento ω en el espacio de probabilidad para el cual

$$\mathbb{E}\|\xi_i - \xi_j\|_1 \, (1-\varepsilon) \leq \|\xi_i(\omega) - \xi_j(\omega)\|_1 \leq (1+\varepsilon) \, \mathbb{E}\|\xi_i - \xi_j\|_1 \qquad \forall \, i \neq j$$

y los puntos $x_i = \dfrac{\xi_i(\omega)}{n}$ cumplen la tesis del teorema.

Para concluir por tanto, sea

$$A_{i,j} = \{ \, \omega \mid \big| \, \|\xi_i - \xi_j\|_1 - \mathbb{E}\|\xi_i - \xi_j\|_1 \big| > \varepsilon \, \mathbb{E}\|\xi_i - \xi_j\|_1 \, \}$$

Estamos interesados en el suceso: $\displaystyle\bigcap_{1 \leq i < j \leq N} A_{i,j}^c$, donde $A_{i,j}^c = \Omega \setminus A_{i,j}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{ \bigcap_{1 \leq i < j \leq N} A_{i,j}^c \} = 1 - \mathbb{P}\{ \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} A_{i,j} \} &\geq 1 - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{P}\{A_{i,j}\} \\ &\geq 1 - \binom{N}{2} \exp - \frac{\varepsilon^2 \, n}{2} \end{aligned}$$

y así

$$\mathbb{P}\{ \bigcap_{1 \leq i < j \leq N} A_{i,j}^c \} > 0 \Longleftrightarrow 1 - \binom{N}{2} \exp - \frac{\varepsilon^2 \, n}{2} > 0$$

y ésto es cierto si $n > \dfrac{4}{\varepsilon^2} \log N$. ///

Observación. El caso $0 < p < 1$ se reduce de forma inmediata al $p = 1$ considerando la variable $\|\xi - \xi'\|_p^p$. Teniendo además en cuenta el Lema II.a.5. obtenemos el siguiente

Corolario II.b.2. *Para todo* $0 < \varepsilon < 1$ *existe un subconjunto de* N *puntos* $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ *en* ℓ_p^n , $0 < p < 1$, *de forma que* $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_p < 1 + \varepsilon$, $\forall\, i \neq j$, *siempre que*

$$n > \frac{4^{1/p}}{p^2 \varepsilon^2} \log N$$

///

II.b.2. Caso $E = \ell_p^n$, $1 < p < \infty$**.**

La forma más rápida de resolver nuestro problema cuando $E = \ell_p^n$ es proceder como en el caso $p = 1$ y usar la desigualdad de desviación del Corolario I.b.25. con la función $f\colon \{0,1\}^n \to I\!R$, $f = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} \right)^{1/p}$ y $M_f = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/p}$. Así se logra una estimación $n > \frac{c}{\varepsilon^2} \log N$. La razón de considerarlo por separado está en que la demostración de II.b.3. contiene información adicional sobre las inclusiones; vemos qué ocurre cuando nos acercamos a ℓ_∞^n $(p \to \infty)$

Teorema II.b.3. *Para todo* $0 < \varepsilon < 1$ *existe un subconjunto de* N *puntos* $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ *en* ℓ_p^n, $1 \leq p < \infty$, *de forma que* $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_p < 1 + \varepsilon$, $\forall\, i \neq j$, *siempre que*

i) Si $\varepsilon < \frac{1}{p\, 2^{1/p}}$

$$n > \frac{8}{p^2\, 4^{1/p}\, \varepsilon^2} \log N$$

ii) Si $\varepsilon \geq \frac{1}{p\, 2^{1/p}}$

$$n > 8 \log N$$

Demostración:

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Como en el caso $p = 1$, sea $\xi = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\, e_i$ con ε_i variables aleatorias i.i.d. de Rademacher y ξ' una copia independiente de ξ, $\xi' = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i'\, e_i$. Fijándonos en la distribución de $|\varepsilon_i - \varepsilon'_i|^p$ deducimos

$$\|\xi - \xi'\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i - \varepsilon'_i|^p \right)^{1/p} \stackrel{\mathrm{d}}{=} 2 \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \right)^{1/p}$$

donde η_i son v.a.i.i.d. tal que $I\!P\{\eta_i = 0\} = I\!P\{\eta_i = 1\} = \dfrac{1}{2}$.

La mediana de la función $f = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} \right)^{1/p}$ es $M_f = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/p}$, (ver Definición 0.a.2., Observación iii)), y medimos la desviación de f respecto de élla.

$$I\!P\{ \, \big| \, \|\xi - \xi'\|_p - 2 \left(\frac{n}{2}\right)^{1/p} \big| > \varepsilon \, 2 \left(\frac{n}{2}\right)^{1/p} \}$$
$$= I\!P\{ \, \Big| \left(\frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} \right)^{1/p} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \Big| > \varepsilon \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \}$$

Caso i).

Si $\varepsilon < \dfrac{1}{p\,2^{1/p}}$ sea $\delta = \dfrac{p\,2^{1/p}}{4} \varepsilon$ $(\Longrightarrow \delta < \frac{1}{4})$. Por el Teorema del Valor Medio, para cierto $\theta \in (\, \dfrac{1}{2} - \delta, \dfrac{1}{2} + \delta \,)$

$$\Big| \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} - \frac{1}{2} \Big| < \delta \Longrightarrow \Big| \left(\frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} \right)^{1/p} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \Big| \le \frac{1}{p} \theta^{1/p-1} \Big| \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} - \frac{1}{2} \Big|$$
$$\le \frac{\delta}{p\,\theta^{1-1/p}} \le \frac{\delta}{p\,(\frac{1}{2} - \delta)^{1-1/p}} \le \frac{\delta\, 4^{1-1/p}}{p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \varepsilon$$

Por tanto,

$$I\!P\{ \, \Big| \left(\frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} \right)^{1/p} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \Big| > \varepsilon \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \} \le I\!P\{ \, \Big| \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} - \frac{1}{2} \Big| > \delta \, \} \le \exp -2n\delta^2$$

usamos al final la desigualdad de Amir-Milman, I.b.13. $(1')$. Concluir ahora como en el Teorema II.b.1. y sustituir δ por su expresión en ε.

Caso ii).

Si $\varepsilon \ge \dfrac{1}{p\,2^{1/p}}$ tomar $\delta = \frac{1}{4}$ y, razonando como en el Caso i),

$$I\!P\{ \, \Big| \left(\frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} \right)^{1/p} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \Big| > \varepsilon \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} \} \le I\!P\{ \, \Big| \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} - \frac{1}{2} \Big| > \frac{1}{4} \, \} \le \exp -\frac{n}{8}$$

///

Observación. El Teorema II.b.3.(ii) nos dice que para todo error ε, hay un p suficientemente grande (es decir ℓ_p^n suficientemente cerca de ℓ_∞^n) tal que encontramos $\exp \dfrac{n}{8}$ puntos a, aproximadamente, la misma distancia uno de otro, que son esencialmente los puntos que existen en ℓ_∞^n a igual distancia ($\varepsilon = 0$).

Corolario II.b.4. *Sea $0 < \varepsilon < 1$ y $1 \leq p \leq \infty$. Existe una constante $C = C(\varepsilon, p) > 0$ tal que para todo $n \in I\!N$ existe un número natural $N \geq C\,n$ tal que el ℓ_∞^N-cubo está $(1+\varepsilon)$-incluido en el ℓ_p^n-cubo.*

Demostración: Notar que el conjunto T está formado por puntos de la forma $\dfrac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i}{M}$ donde M es una constante que depende únicamente de n y p. Claramente T está 1-incluido en el ℓ_p^n cubo $\{-1,1\}^n$ y como vimos en la introducción del capítulo, el Teorema II.b.3. implica que $\{-1,+1\}^{[\log_2 N]}$, es decir $\{-1,+1\}^{[Cn]}$, está $(1+\varepsilon)$-incluido en T.

///

Observación. De esta forma el Corolario II.b.4. mejora el resultado obtenido en [B-M-W], Teorema 6.6., donde se consiguen inclusiones de orden $N \geq C\,n^{1/3}$.

II.b.3 Caso 1-subsimétrico.

Teorema II.b.5. *Para todo* $0 < r < 1$ *existe una constante* $C = C(r) > 0$ *tal que, para todo* $0 < \varepsilon < 1$ *y para todo espacio* r*-normado* E *de dimensión* $\dim E = n$*, con base 1-subsimétrica normalizada* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *existe un subconjunto de* N *puntos* $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ *en* E *de forma que* $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \| < 1 + \varepsilon$, $\forall\, i \neq j$*, siempre que*

$$n > \frac{C}{\varepsilon^2} \log N$$

Demostración: Sea $F(\eta) = \| \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \|^r$, $\forall\ \eta = (\eta_i) \in \{0,1\}^n$. Por tratarse de una base 1-subsimétrica, F es una función creciente en el sentido del Teorema I.b.27. Extendemos linealmente F al intervalo $[0, n]$ y normalizamos definiendo $\psi(x) = \dfrac{F(xn)}{\Delta F}$, $x \in [0,1]$.

Para todo $1 \leq k \leq n$, sea $\xi = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\, e_i$ con ε_i variables aleatorias i.i.d. de Rademacher y ξ' una copia independiente de ξ, $\xi' = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon'_i\, e_i$. Claramente por la 1-incondicionalidad de la base,

$$\|\xi - \xi'\|^r \overset{\mathrm{d}}{=} 2^r \, \| \sum_{i=1}^{k} \eta_i e_i \|^r$$

donde η_i son v.a.i.i.d. tal que $\mathbb{P}\{\eta_i = 0\} = \mathbb{P}\{\eta_i = 1\} = \dfrac{1}{2}$. Equivalentemente con la notación introducida en el Teorema I.b.27,

$$\|\xi - \xi'\| \overset{\mathrm{d}}{=} 2\,(F \circ i_k(\eta)) = 2f(\eta)\ , \qquad \eta = (\eta_i) \in \{0,1\}^k$$

Fijar $0 < \varepsilon < 1$. Para tal ε tomar el número $k \geq [\frac{n}{2}]$ determinado por el Teorema I.b.28 y considerar las variables aleatorias $\xi = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\, e_i$ y $\xi' = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon'_i\, e_i$. Entonces el Teorema I.b.28 asegura que si $n > \dfrac{8\Delta F}{\varepsilon M_f}$,

$$\mathbb{P}\{\, \big|\, \|\xi - \xi'\| - 2M_f \,\big| > 2\varepsilon M_f \,\} = \mathbb{P}\{\, |\, f - M_f \,| > \varepsilon M_f \,\} \leq \exp -\frac{\varepsilon^2 n M_f^2}{128 \Delta^2 F}$$

Resta únicamente encontrar una buena cota inferior del cociente $\dfrac{M_f^2}{\Delta^2 F}$. Para éllo tomar como mediana de f a $M_f = f\big(\dfrac{k}{2}\big)$ (Definición 0.a.2., Obs. iii)); de esta forma

$$\frac{M_f^2}{\Delta^2 F} = \psi^2\big(\frac{k}{2n}\big)$$

Puesto que la función ψ es no decreciente y $k \geq \big[\dfrac{n}{2}\big] \geq \dfrac{n-1}{2}$ resulta,

$$\psi^2\big(\frac{k}{2n}\big) \geq \psi^2\big(\frac{n-1}{4n}\big) \geq \psi^2\big(\frac{1}{8}\big)$$

(la última desigualdad se cumple siempre que $n \geq 2$ lo cual no es una restricción).

La función ψ asociada a toda r-norma 1-subsimétrica verifica

$$\psi(2^{-j}) \geq 2^{-(j+1)} \qquad j = 0, 1, ...$$

En efecto, sea $m \geq 0$ tal que $\dfrac{m}{n} < \dfrac{1}{2^j} \leq \dfrac{m+1}{n}$. Si $n < 2^j$, es decir si $m \geq 1$ resulta, por ser norma 1-subsimétrica,

$$1 \leq \| \sum_{i=1}^{n} e_i \|^r \leq 2^j \| \sum_{i=1}^{m+1} e_i \|^r \leq 2^{j+1} \| \sum_{i=1}^{m} e_i \|^r$$

por tanto, $\psi(2^{-j}) \geq \psi\big(\dfrac{m}{n}\big) \geq \dfrac{1}{2^{j+1}}$. Si por el contrario $n \leq 2^j$, es decir si $m = 0$ hay que razonar de diferente manera. Para éllo recordar que la función ψ es la interpolación lineal de otra función definida en los puntos $\{0, \frac{1}{n}, \ldots, 1\}$; es inmediato comprobar que si $x \in \big[0, \frac{1}{n}\big]$ entonces $\psi(x) = \dfrac{n}{\Delta F} x$ y puesto que $\Delta f \leq n$, $\psi(2^{-j}) \geq 2^{-j}$. En cualquier caso, y volviendo al problema original conseguimos $\psi(\dfrac{1}{8}) \geq \dfrac{1}{16}$.

Resumiendo los cálculos arriba realizados tenemos que si $n > \dfrac{8\Delta F}{\varepsilon M_f}$ entonces ,

$$I\!P\{\, \big| \|\xi - \xi'\|^r - 2^r M_f \big| > 2^r \varepsilon M_f \,\} = I\!P\{\, | f - M_f | > \varepsilon M_f \,\} \leq \exp -\frac{\varepsilon^2 n}{C}$$

Tomando $\xi_1, \ldots \xi_N$ copias independientes de ξ y concluyendo de la forma habitual, hay un ω elemento del espacio de probabilidad, tal que los correspondientes puntos $x_i = \dfrac{\xi_i(\omega)}{2\psi(\frac{k}{2n})}$ satisfacen la tesis de teorema. La relación entre n y N viene dada por

$$\binom{N}{2} \exp -\frac{\varepsilon^2 n}{C} < 1$$

y es fácil comprobar que ésta se cumple siempre que $n > \dfrac{C}{\varepsilon^2} \log N$. Finalizar usando el Lema II.a.5.

Queda por analizar la restricción $n > \dfrac{8}{\varepsilon}$ exigida en la demostración. Veremos que en realidad está incluida en nuestro resultado. Podemos suponer $N \geq 3$, pues siempre existen dos puntos a igual distancia uno de otro en cualquier espacio r-normado. También la constante C se puede tomar ≥ 8; por tanto si $N \geq 3 \implies \dfrac{\varepsilon}{\log N} < 1$ y así, $n > \dfrac{C}{\varepsilon^2} \log N \implies n > \dfrac{C}{\varepsilon} > \dfrac{8}{\varepsilon}$.

///

Corolario II.b.6. *El cubo de ℓ_∞^n se incluye $(1+\varepsilon)$ en todo espacio r-normado finito dimensional E con base 1-subsimétrica siempre que*

$$\dim E > \frac{C}{\varepsilon^2} n$$

C es una constante absoluta.

///

El Teorema II.b.5. se puede generalizar fácilmente a ciertas sumas directas de espacios con base 1-subsimétrica.

Notación. Sean $E_i,\ i = 1, \ldots, m$ espacios r-normados con base 1-subsimétrica normalizada de dimensión n_i. Construimos el espacio $E = \big(\bigoplus_1^m E_i\big)_{\ell_\infty^n}$ donde la r-norma viene dada por $\| x \| = \sup\limits_{1 \leq i \leq m} \| x_i \|_{E_i}$ con $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E$. Observar que el espacio E tiene base 1-incondicional pero no 1-subsimétrica. La dimensión E es $\dim E = \sum\limits_{i=1}^m n_i$

Con esta notación podemos ya enunciar el siguiente resultado:

Corolario II.b.7. *Para todo* $0 < r < 1$ *existe una constante numérica* $C = C(r) > 0$ *tal que, para todo* $0 < \varepsilon < 1$ *existe un subconjunto de* N *puntos* $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ *en* E *de forma que* $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_1 < 1 + \varepsilon, \ \forall \ i \neq j$*, siempre que*

$$\dim E > \frac{C}{\varepsilon^2} \log N$$

Demostración:

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Por el Teorema II.b.5. para cada i existe un conjunto T_i de puntos en E_i de cardinalidad N_i tal que

$$1 - \varepsilon \leq \| x_i - y_i \|_{E_i} \leq 1 + \varepsilon \qquad x_i, y_i \in T_i$$

siempre que $n_i > \dfrac{C}{\varepsilon^2} \log N_i$. Considerar el conjunto

$$T = \prod_{i=1}^{m} T_i = \{ (x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}) \mid x_{k_i} \in T_i \}$$

Tenemos card $T = N_1 \ldots N_m$ y para todo par de puntos distintos $x, y \in T$

$$\| x - y \|_E = \sup_{1 \leq i \leq m} \| x_{k_i} - y_{k_i} \|_{E_i}$$

por tanto,

$$1 - \varepsilon \leq \| x - y \|_E \leq 1 + \varepsilon \qquad x, y \in T$$

y las estimaciones sobre N_i nos dan

$$N_i < \exp \frac{\varepsilon^2 \, n_i}{C} \ \forall \ i \Longrightarrow \text{card } T = N_1 \ldots N_m < \exp \frac{\varepsilon^2 \dim E}{C}$$

///

Observación. En los resultados obtenidos en esta sección la relación entre n y N, para ε fijo, es la mejor posible, según vimos en la Proposición II.a.6. i.e. $n \sim C(\varepsilon, r) \log N$.

II.c. INCLUSION DEL ℓ_∞^n-CUBO EN ESPACIOS NORMADOS.

La demostración del Teorema II.b.5. utiliza de manera crucial la 1-subsimetría de la base; ello nos permitía conocer la distribución de la variable $\| \xi - \xi' \|$ y así reducir el problema al caso ℓ_1^n y subsiguientemente a la desigualdad de desviación de Amir-Milman para una función muy sencilla. Sin embargo el proceso no se puede repetir incluso en el caso de tener una base, por ejemplo, 2-subsimétrica.

No obstante, las desigualdades expuestas en el Capítulo I nos van a permitir extender la clase de espacios para la cual hay respuesta positiva a nuestra cuestión. La situación en el caso general será la siguiente:

(i) Dado el espacio E de dimensión n y $0 < \varepsilon < 1$, elegimos convenientemente una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y definimos la variable aleatoria $\xi = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, e_i$ con ε_i variables aleatorias i.i.d. de Rademacher; tomamos ξ' una copia independiente de ξ. La variable $\| \xi - \xi' \|$ tiene distribución

$$\| \xi - \xi' \| \stackrel{d}{=} 2 \, \| \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, e_i \|$$

donde η_i son variables aleatorias i.i.d. con distribución, $I\!\!P\{ \eta_i = 0 \} = \dfrac{1}{2}$ y $I\!\!P\{ \eta_i = 1 \} = I\!\!P\{ \eta_i = -1 \} = \dfrac{1}{4}$.

(ii) Metrizar $\{-1, 1, 0\}^n$ convenientemente dotándole de la probabilidad producto. Para un cierto valor A, necesitamos estimar la probabilidad

$$I\!\!P\{ \, | \, \| \xi - \xi' \| - 2A| > \varepsilon 2A\} = I\!\!P\{ \, | \, f \, - A \, | > \varepsilon A\}$$

donde la función $f \colon \{-1, 1, 0\}^n \to I\!\!R$ está definida como

$$f(\eta) = \| \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, e_i \| \qquad \text{para} \qquad \eta \in \{-1, 1, 0\}^n$$

El valor apropiado de A será M_f ó $I\!\!E(f)$ y la clave estará en relacionar el valor εM_f con la constante de Lipschitz o el modulo de continuidad de f.

(iii) Una vez conseguida una buena desigualdad de desviación concluiremos como en la sección anterior repitiendo el proceso con N variables aleatorias i.i.d. $\{X_1, \ldots, X_N\}$ y estimando N de tal forma que el suceso

$$\{\, \big| \|\xi_i - \xi_j\| - A \big| \leq \varepsilon A\,, \quad \forall\, i \neq j\,\}$$

tenga probabilidad positiva.

Observación. El problema puede ser replanteado de forma que la función f está definida sobre un espacio métrico producto equipado con la *probabilidad de contar*. Aunque no explotaremos esta idea, es interesante detenernos un poco en ella.

Sea $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ dotado con la probabilidad de contar $\mu(a_i) = \frac{1}{4}\ i = 1, \ldots, 4$ y la métrica $\rho(a_i, a_j) = 1\,, \forall\ \ i \neq j$. Definimos $\varphi\colon \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \to \{-1, 1, 0\}$ como $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = 0\,,\ \varphi(a_3) = 1\ ,\ \varphi(a_4) = -1$. Al pasar al espacio producto consideramos las métricas $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i),\ x, y \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^n$ y $\{-1, 1, 0\}^n \subset \ell_1^n$; tanto en $\{-1, 1, 0\}^n$ como en $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}^n$ entendemos que estamos tomando la probabilidad producto que denotaremos con las mismas letras $I\!\!P$ y μ. Denotar también $\Phi = \varphi \bigotimes \ldots \bigotimes \varphi$.

Dada $f\colon \{-1, 1, 0\}^n \to I\!\!R$ es sencillo comprobar que

(1) $I\!\!P = \mu \circ \Phi^{-1}$

(2) $M_f = M_{f \circ \Phi}$

(3) $\omega_{f\circ\Phi}(t) \leq \omega_f(2t) \qquad \text{y} \qquad \sigma_f \leq \sigma_{\Phi \circ f} \leq 2\sigma_f$

Por tanto,

$$I\!\!P\{\, |f - M_f| > \omega_f(t)\,\} \leq \mu\{\, |f \circ \Phi - M_{f\circ\Phi}| > \omega_{f\circ\Phi}(\frac{t}{2})\,\}$$

y análogamente con las desigualdades en las que interviene la constante de Lipschitz.

II.c.1. Los resultados.

En los resultados a continuación obtendremos la relación óptima entre n y N i.e. $n > C(\varepsilon)\log N$. Estaremos también interesados en encontrar la mejor función $C(\varepsilon)$ posible.

Notación. Para todo $K \geq 1$ y toda función $\psi\colon (0,\infty) \to I\!\!R^+$ tal que $\varliminf_{t\to 0} \psi(t) = 0$ denotar por $\mathcal{S}(K)$ la familia de los espacios normados de dimensión finita con base K-simétrica normalizada y

$$\mathcal{E}(K,\psi) = \{\, E \in \mathcal{S}(K) \mid \frac{\lambda([t \dim E])}{\lambda(\dim E)} \leq \psi(t),\ \ \forall\, t > 0\,\}$$

Teorema II.c.1. *Sea $K \geq 1$ y ψ como arriba. Para todo $0 < \varepsilon < 1$, existe $C(\varepsilon, K, \psi) > 0$ tal que para todo $E \in \mathcal{E}(K,\psi)$ existe un subconjunto de N puntos $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ en E de forma que $1-\varepsilon < \|\, x_i - x_j \,\|_1 < 1+\varepsilon$, $\forall\, i \neq j$, siempre que*

$$\dim E > C(\varepsilon, K, \psi)\log N$$

Demostración: Suponer que $E = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ donde $\{e_i\}_1^n$ es una base K-simétrica normalizada de E. Considerar $\Omega = \{-1,1,0\}^n$ como subconjunto de ℓ_1^n. Es claro que diam $\{0,-1,1\} = 2$. Sea $\xi = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\, e_i$ donde $\{\varepsilon_i\}_1^n$ son v.a.i.i.d. de Rademacher. Sea ξ' otra i.i.d. copia de ξ. Claramente

$$\|\xi - \xi'\| \overset{d}{=} 2\|\sum_{i=1}^n \eta_i e_i\,\|$$

donde $\{\eta_i\}_1^n$ son variables aleatorias i.i.d. con distribución

$$I\!\!P\{\,\eta_i = 0\,\} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad I\!\!P\{\,\eta_i = 1\,\} = I\!\!P\{\,\eta_i = -1\,\} = \frac{1}{4}$$

Definimos por tanto $f\colon \{-1,1,0\}^n \to I\!\!R$ como $f(\eta) = \|\sum_{i=1}^n \eta_i\, e_i\|$ y así,

$$I\!\!P\{\,\big|\,\|\xi-\xi'\| - 2M_f\big| > 2\varepsilon M_f\,\} = I\!\!P\{\,|f - M_f\big| > \varepsilon M_f\,\}$$

Por el Comentario 0.b.7., existe una norma $\|\cdot\|_0$ en E de forma que $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es 1-simétrica, normalizada y

$$||x|| \leq ||x||_0 \leq K||x|| \qquad \forall\ x \in E$$

Necesitamos encontrar acotaciones para M_f y $\omega_1(t)$. Para éllo demostraremos que

(a) $M_f \geq \frac{1}{2}K^{-1}\lambda(n)$

(b) $\omega_1(\delta n) \leq CK\lambda([\delta n])$, $\forall\ 0<\delta<1$

En efecto,

(a) Sea $g\colon\Omega \to I\!R$ definida como $g(\eta) = \|\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i\|_0$; puesto que en esta nueva norma la base (e_i) es 1-simétrica normalizada es claro que $g(\eta) = \|\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|e_i\|_0$. Escribimos $\lambda_0(k) = \|\sum_{i=1}^{k}\eta_i e_i\|_0$ para todo $1\leq k\leq n$ y claramente $M_g = \lambda_0(\dfrac{n}{2})$ si n es par y $M_g = \lambda_0(\dfrac{n+1}{2})$ si n es impar; y por la desigualdad triangular y de nuevo la 1-simetría de la base $2M_g \geq \lambda_0(n)$. Para terminar

$$M_f \geq K^{-1}M_g \geq \frac{1}{2}K^{-1}\lambda(n)$$

(b) Sea $\phi_i = \eta_i - \eta_i'$; ϕ_i puede tomar valores $0,\pm1,\pm2$. Sean

$$A = \{i : |\phi_i| = 2\} \qquad \text{y} \qquad B = \{i : |\phi_i| = 1\}$$

Observar que $\|\eta-\eta'\|_1 = 2\,\text{card }A + \text{card }B$. Dados $\eta,\eta' \in \Omega$ tal que $\|\eta-\eta'\|_1 \leq \delta n$,

$$\begin{aligned}|f(\eta)-f(\eta')| &\leq \|\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-\eta_i')\,e_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{n}|\eta_i-\eta_i'|\,e_i\|_0 \\ &= \|\sum_{i\in A}2e_i + \sum_{i\in B}e_i\|_0 \leq 2\,\lambda_0(\,\text{card }A + \text{card }B\,) \\ &\leq 2\,\lambda_0(\,2\,\text{card }A + \text{card }B\,) = 2\,\lambda_0(\|\,\eta-\eta'\,\|_1) \leq 2\,K\,\lambda([\delta n])\end{aligned}$$

y así $\omega_1(\delta n) \leq 2K\,\lambda([\delta n])$.

Dado $0 < \varepsilon < 1$, sea $0 < \delta < 1$ tal que $\psi(\delta) \leq \dfrac{\varepsilon}{4K^2}$. Entonces

$$\frac{\omega_1(\delta n)}{M_f} \leq 4K^2 \frac{\lambda([\delta n])}{\lambda(n)} \leq 4K^2 \psi(\delta) \leq \varepsilon$$

luego $\varepsilon M_f \geq \omega_1(\delta n)$ y usando la desigualdad (3) del Teorema I.b.13,

$$I\!\!P\{|f - M_f| > \varepsilon M_f\} \leq I\!\!P\{|f - M_f| > \omega_1(\delta n)\} \leq 4 \ \exp -Cn\delta^2$$

Para finalizar, repetir el razonamiento efectuado en Teorema II.b.1. con N variables aleatorias i.i.d. $\xi_1, \ldots, \xi_N$. El conjunto T formado por $x_i = \dfrac{\xi_i}{2\,M_f}$ $i = 1 \ldots N$ satisface la tesis del enunciado.

///

Observación. Como vimos en la sección anterior, Teorema II.b.5., para $K = 1$ existe una función $C(K, \psi, \varepsilon)$ independiente de toda función de control ψ con lo que encontramos una solución positiva al problema para todo espacio con base 1-simétrica; recordar que en ese caso podíamos tomar $C(K, \psi, \varepsilon) = C\,\varepsilon^{-2}$, C constante numérica.

Observación. Ejemplos de familias de espacios verificando la condición dada en Teorema II.c.1. son: los espacios de Orlicz de sucesiones ℓ_φ^n donde φ es una función de Orlicz que satisface la condición Δ_2 en cero, los espacios de Lorentz de sucesiones $E = d^n(\omega, p)$, con $1 \leq p < \infty$ y $\omega = (i^{-r})_{i=1}^n$, $0 < r < 1$, etc.. Es fácil ver que en el caso particular de espacios K-isomorfos a ℓ_φ^n la estimación que se obtiene es

$$n > C \left(\frac{CK^2}{\varepsilon}\right)^{2q_\varphi} \log N$$

donde q_φ es el coeficiente de Simonenko de φ (ver Definición 0.b.5.); sin embargo esta dependencia puede ser mejorada. Antes de verlo necesitamos el siguiente conocido lema cuya demostración puede consultarse en [Ma]:

Lema II.c.2. *φ una función de Orlicz que satisface la condición Δ_2 en cero. Sean p_φ y q_φ sus coeficientes de Simonenko. Entonces* $\forall\ \ 0 \leq \alpha \leq 1$ *y* $t > 0$,

$$\alpha^{q_\varphi} \varphi(t) \leq \varphi(\alpha t) \leq \alpha^{p_\varphi} \varphi(t)$$

Teorema II.c.3. *Sea $K > 1$. Sea φ una función de Orlicz verificando la condición Δ_2 en cero. Existe una constante numérica $C > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo espacio normado n-dimensional E, K-isomorfo a ℓ_φ^n, existe un subconjunto de N puntos $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ en E de forma que $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_1 < 1 + \varepsilon, \ \forall\, i \neq j$, siempre que*

$$n > C \left(\frac{4K}{\varepsilon}\right)^{q_\varphi \max\{1, \frac{2}{p_\varphi}\}} \log N$$

Demostración: Considerar $\Omega = \{0, -1, 1\}^n$ como subconjunto de $\ell_{p_\varphi}^n$. Claramente diam $\{0, -1, 1\} = 2$. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de E tal que

$$\|(a_i)\|_\varphi \leq \| \sum_{i=1}^n a_i x_i \|_E \leq K \, \|(a_i)\|_\varphi$$

Sea $f(\eta) = \| \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \|_E \,, \ \forall\, \eta \in \Omega$. Denotar por $\tilde{f}$ la extensión convexa natural de f a conv Ω, i.e. $f(x) = \| \sum_{i=1}^n a_i x_i \|_E \,, \ \forall\, x = (a_i) \in$ conv Ω. Por definición de la norma en ℓ_φ^n es inmediato ver que para todo $1 \leq k \leq n$, $\lambda(k) = \| \sum_{i=1}^k e_i \|_\varphi = \dfrac{1}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)}$ donde φ^{-1} es la función inversa de φ. Por tanto, y razonando como en el Teorema anterior es claro que

$$M_f \geq \frac{1}{2\, \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Para todo $\delta > 0$ y $(a_i), (a_i') \in$ conv Ω tal que $\|(a_i - a_i')\|_{p_\varphi} \leq \delta$,

$$|f((a_i)) - f((a_i'))| \leq ||(a_i - a_i')||_E \leq K||(a_i - a_i')||_\varphi$$

De nuevo, por definición de la norma en ℓ_φ^n y el Lema II.c.2.,

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{|a_i - a_i'|}{||(a_i - a_i')||_\varphi}\right) &\leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{|a_i - a_i'|}{2}\right)^{p_\varphi} \varphi\left(\frac{2}{||(a_i - a_i')||_\varphi}\right) \\ &\leq \frac{\delta^{p_\varphi}}{2^{p_\varphi}} \varphi\left(\frac{2}{||(a_i - a_i')||_\varphi}\right) \end{aligned}$$

por tanto, para todo $\delta > 0$ y despejando $||(a_i - a_i')||_\varphi$,

$$\tilde{\omega}_{p_\varphi}(\delta) \leq \frac{2K}{\varphi^{-1}\left(\frac{2^{p_\varphi}}{\delta^{p_\varphi}}\right)}$$

Dado $0 < \varepsilon < 1$, sea $\delta > 0$ tal que $\delta^{p_\varphi} = 2^{p_\varphi} \left(\frac{\varepsilon}{4K}\right)^{q_\varphi} n$. Por el Lema II.c.2., es inmediato comprobar que

$$\varphi \left[\frac{\varepsilon}{4K} \varphi^{-1} \left(\frac{2^{p_\varphi}}{\delta^{p_\varphi}} \right) \right] \geq \frac{1}{n}$$

y de aquí, $\tilde{\omega}_{p_\varphi}(\delta) \leq \varepsilon M_f$. Para concluir haremos uso del las desigualdades del Comentario I.b.17. Si $p_\varphi \geq 2$,

$$I\!P\{|f - M_f| > \varepsilon M_f\} \leq I\!P\{|f - M_f| > \tilde{\omega}_{p_\varphi}(\delta)\} \leq 4 \ \exp -\left(\frac{\varepsilon}{4K}\right)^{q_\varphi} \frac{n}{4}$$

y si $p_\varphi \leq 2$

$$I\!P\{|f - M_f| > \varepsilon M_f\} \leq 4 \ \exp -\left(\frac{\varepsilon}{4K}\right)^{\frac{2q_\varphi}{p_\varphi}} \frac{n}{4}$$

Concluir como en el Teorema anterior. ///

Observación. Hacemos notar que cuando $q_\varphi \leq 2$ podemos obtener una mejor dependencia respecto de ε debido a que en ese caso ℓ_φ^n es de cotipo 2 (ver Corolario II.c.9. más adelante).

También podemos mejorar las estimaciones en el caso de espacios de Lorentz de sucesiones con $\omega = i^{-r}$, $0 < r < 1$. En efecto, no es dificil ver que para todo $1 \leq k \leq n$, $\lambda(k) = \| \sum_{i=1}^{k} e_i \|_{d^n(\omega,p)} \sim K_{r,p} k^{\frac{1}{p} - \frac{r}{p}}$ y de aquí se deduce inmediatamente que $\frac{\lambda([t\, n])}{\lambda(n)} \leq C_{r,p} t^{\frac{1}{p} - \frac{r}{p}} = \psi(t)$. Es fácil comprobar ahora que la relación entre n y N dada por el Teorema II.c.1. es

$$n > C_{p,r} \left(\frac{K^2}{\varepsilon} \right)^{\frac{2p}{1-r}} \log N$$

La mejora de la dependencia respecto de ε es el contenido del siguiente

Teorema II.c.4. *Sean $1 \leq p \leq \infty$, $0 < r < 1$ y $K > 1$. Para todo $q > \frac{p}{1-r}$ existe $C = C(p, r, q) > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo espacio normado n-dimensional E, K-isomorfo a $d^n(\omega, p)$ con $\omega = (i^{-r})_{i=1}^n$, existe un subconjunto de N puntos $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ en E de forma que $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_1 < 1 + \varepsilon$, $\forall \ i \neq j$, siempre que*

$$n > C \left(\frac{K}{\varepsilon} \right)^{\max(2,q)} \log N$$

Demostración: Considerar $\Omega = \{0,-1,1\}^n$ como subconjunto de ℓ_q^n. Sea $\{x_i\}_{i=1}^n$ una base de E tal que

$$\|(a_i)\|_{d^n(\omega,p)} \leq \| \sum_{i=1}^n a_i x_i \|_E \leq K \, \|(a_i)\|_{d^n(\omega,p)}$$

Sea $f(\eta) = \| \sum_{i=1}^n \eta_i x_i \|_E$, $\forall\, \eta \in \Omega$. Denotar por $\tilde{f}$ la extensión convexa natural de f a conv Ω, i.e. $f(x) = \| \sum_{i=1}^n a_i x_i \|_E$, $\forall\, x = (a_i) \in$ conv Ω. Por los comentarios anteriores es claro que

$$M_f \geq C n^{\frac{1}{p} - \frac{r}{p}}$$

Para todo $\delta > 0$ y $(a_i), (a'_i) \in$ conv Ω tal que $\|(a_i - a'_i)\|_q \leq \delta$,

$$|f((a_i)) - f((a'_i))| \leq ||(a_i - a'_i)||_E \leq K||(a_i - a'_i)||_{d^n(\omega,p)}$$

Para abreviar llamar $b_i = a_i - a'_i$. Sea q' tal que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = \dfrac{1}{p}$. Es fácil ver que la condición $q > \dfrac{p}{1-r}$ implica $rq' < p$. Tenemos,

$$\begin{aligned} ||(b_i)||_{d^n(\omega,p)} &= \left(\sum_{i=1}^n b_i^{*^p} \frac{1}{i^r} \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n \left(b_i^* \frac{1}{i^{r/p}} \right)^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|(b_i)\|_q \left(\sum_{i=1}^n i^{-\frac{rq'}{p}} \right)^{1/q'} \leq \delta C n^{(1-\frac{rq'}{p})\frac{1}{q'}} = \delta C n^{-1/q} n^{\frac{1-r}{p}} \end{aligned}$$

Por tanto $\tilde{\omega}_q(C\dfrac{\varepsilon}{K} n^{1/q}) \leq \varepsilon M_f$ y así,

$$I\!P\{|f - M_f| > \varepsilon M_f\} \leq I\!P\{|f - M_f| > \tilde{\omega}_q(C\frac{\varepsilon}{K} n^{1/q})\} \leq 4 \ \exp -\big(C\frac{\varepsilon}{K}\big)^{\max(2,q)} n$$

Hemos aplicado las desigualdades del Comentario I.b.17. a los casos $q \geq 2$ y $q \leq 2$. Concluir de la forma habitual. ///

El siguiente resultado trata con ciertos espacios con base K-incondicional. Este estudio nos fue sugerido por N. Kalton como primer ejemplo de espacio no con base K-subsimétrica.

Lema II.c.5.

i) Para todo $0 < p$, $0 < q \leq s \leq \infty$ *y* $(a_{ij}) \in I\!R^{nm}$,

$$\| (a_{ij}) \|_{\ell_p^n(\ell_s^m)} \leq \| (a_{ij}) \|_{\ell_p^n(\ell_q^m)} \leq m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} \| (a_{ij}) \|_{\ell_p^n(\ell_s^m)}$$

ii) Para todo $0 < q$, $0 < p \leq r \leq \infty$ y $(a_{ij}) \in I\!R^{nm}$,

$$\| (a_{ij}) \|_{\ell_r^n(\ell_q^m)} \leq \| (a_{ij}) \|_{\ell_p^n(\ell_q^m)} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \| (a_{ij}) \|_{\ell_r^n(\ell_q^m)}$$

Demostración: Son consecuencia inmediata del Comentario 0.b.4.ii). En ambos casos la desigualdad de la izquierda es trivial. En cuanto a la segunda, si escribimos $A_i = (a_{i1}, ..., a_{im})$, $1 \leq i \leq n$, tenemos en i)

$$\begin{aligned} \| (a_{ij}) \|_{\ell_p^n(\ell_q^m)} = \left(\sum_{i=1}^n \| A_i \|_q^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\| A_i \|_s m^{1/q-1/s} \right)^p \right)^{1/p} \\ &= m^{1/q-1/s} \| (a_{ij}) \|_{\ell_p^n(\ell_s^m)} \end{aligned}$$

y en ii),

$$\begin{aligned} \| (a_{ij}) \|_{\ell_p^n(\ell_q^m)} = \left(\sum_{i=1}^n \| A_i \|_q^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \| A_i \|_q^r \right)^{1/r} n^{1/p-1/r} \\ &= n^{1/p-1/r} \| (a_{ij}) \|_{\ell_r^n(\ell_q^m)} \end{aligned}$$

///

Observación. El Lema II.c.5. es fácilmente generalizable a $\ell_{p_1}^{n_1}(\ell_{p_2}^{n_2}(\ldots(\ell_{p_k}^{n_k})\ldots))$ donde $0 \leq p_1, \ldots, p_k < \infty$, $n_i \in I\!N$.

Teorema II.c.6. *Sean* $1 \leq p, q < \infty$. *Existe una constante* $C = C(p,q) > 0$, *tal que para todo* $K \geq 1$, $0 < \varepsilon < 1$ *y todo espacio normado* E, K*-isomorfo a* $\ell_p^n(\ell_q^m)$, *existe un subconjunto de* N *puntos* $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ *en* E *de forma que* $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_1 < 1 + \varepsilon$, $\forall\, i \neq j$, *siempre que*

$$\dim E = nm > C \left(\frac{K}{\varepsilon} \right)^{\max\{2,p,q\}} \log N$$

Demostración: Sea $\{e_{ij}\}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ una base de E tal que para todo $(a_{ij}) \in I\!R^{nm}$,

$$\| (a_{ij}) \|_{\ell_p^n(\ell_q^m)} \leq \| \sum a_{ij} e_{ij} \|_E \leq K \| (a_{ij}) \|_{\ell_p^n(\ell_q^m)}$$

Sea $\Omega = \{-1,1,0\}^{nm}$ considerado como subconjunto de $\ell^{nm}_{\max\{p,q\}}$. Sea $f: \Omega \to I\!R$ definida como $f(\eta) = \| \sum \eta_{ij} e_{ij} \|_E$. Considerar su extensión convexa natural a conv $(\{-1,1,0\}^{nm})$ i.e. $\tilde{f}(x) = \| \sum x_{ij} e_{ij} \|_E$. Puesto que $\dfrac{||\eta||_{\ell_p^n(\ell_q^m)}}{n^{1/p} m^{1/q}} \geq \dfrac{||\eta||_1}{nm}$, se tiene por la Definición 0.a.2. Observación ii) que $M_f \geq \dfrac{n^{1/p} m^{1/q}}{2}$.

Caso $q \leq p$.

Para todo $x, x' \in$ conv $\{-1,1,0\}^{nm}$, por el Lema II.c.5. tenemos

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')| \leq \tilde{f}(x - x') \leq K \, ||x - x'||_{\ell_p^n(\ell_q^m)} \leq K \; m^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|x - x'\|_p$$

es decir $\tilde{\sigma}_p \leq K \, m^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$.

Si $p \geq 2$ la desigualdad (6) del Comentario I.b.15. hace que

$$I\!P\{ \, |f - M_f| > \varepsilon M_f \, \} \leq 4 \ \exp - \frac{\varepsilon^p M_f^p}{4 \tilde{\sigma}_p^p} \leq 4 \ \exp - \frac{C \varepsilon^p nm}{K^p}$$

Si por el contrario $p \leq 2$ usamos la desigualdad (7) del mismo Comentario I.b.15. y

$$I\!P\{ \, |f - M_f| > \varepsilon M_f \, \} \leq 4 \ \exp - \frac{\varepsilon^2 M_f^2}{4 \tilde{\sigma}_p^2} \leq 4 \ \exp - \frac{C \varepsilon^2 nm}{K^2}$$

Caso $q \geq p$.

El Lema II.c.5. en este caso implica $\tilde{\sigma}_q \leq K \, n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ y usando las desigualdades (6) y (7) del Comentario I.b.17. según sea $q \geq 2$ y $q \leq 2$ llegamos respectivamente a

$$I\!P\{ \, |f - M_f| > \varepsilon M_f \, \} \leq 4 \ \exp - \frac{C \varepsilon^q nm}{K^q}$$

y

$$I\!P\{ \, |f - M_f| > \varepsilon M_f \, \} \leq 4 \ \exp - \frac{C \varepsilon^2 nm}{K^2}$$

Se pueden resumir las anteriores desigualdades en una sola:

$$\mathbb{P}\{\,|f-M_f|>\varepsilon M_f\,\}\le 4\ \exp -\frac{C\varepsilon^{\max\{2,p,q\}}nm}{K^{\max\{2,p,q\}}}$$

///

El Teorema II.c.6. puede ser fácilmente extendido a espacios normados K-isomorfos a $\ell_{p_1}^{n_1}(\ell_{p_2}^{n_2}(\ldots(\ell_{p_k}^{n_k}))\ldots)$, $1\le p_1,\ldots,p_k<\infty$.

Corolario II.c.7. *Sea $K\ge 1$. Para todo $1\le p_1,...,p_k<\infty$ existe una constante $C=C(p_1,...,p_k)>0$ tal que para todo $0<\varepsilon<1$ y todo espacio normado E, K-isomorfo a $\ell_{p_1}^{n_1}(\ell_{p_2}^{n_2}(\ldots(\ell_{p_k}^{n_k}))\ldots)$, existe un subconjunto de N puntos $T=\{x_1,\ldots,x_N\}$ en E de forma que $1-\varepsilon<\|\,x_i-x_j\,\|_1<1+\varepsilon$, $\forall\ i\ne j$, siempre que*

$$\dim E=\prod_{j=1}^{k}n_j>C\ \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{\max\{2,p_1,\ldots,p_k\}}\log N$$

Demostración: Considerar $\{-1,1,0\}^{n_1\ldots n_k}\subset\ell_{\max\{p_1,p_2\ldots,p_k\}}$. Elegir una base (x_i) de E tal que

$$\|(a_i)\|_{\ell_{p_1}^{n_1}(\ell_{p_2}^{n_2}(\ldots(\ell_{p_k}^{n_k})\ldots)}\le\|\sum a_ix_i\|_E\le\|(a_i)\|_{\ell_{p_1}^{n_1}(\ell_{p_2}^{n_2}(\ldots(\ell_{p_k}^{n_k})\ldots)}$$

Tomar es $f(x)=\|x\|_E$. Es fácil comprobar que $M_f\ge\dfrac{n_1^{\frac{1}{p_1}}\ldots n_k^{\frac{1}{p_k}}}{2}$.

Para el cómputo de las distintas constantes de Lipschitz hay que tener en cuenta las relaciones de orden entre las cantidades $2,p_1,\ldots,p_k$ a fin de utilizar el Lema II.c.5. y las desigualdades del Comentario I.b.17. pero las operaciones son las mismas que en el Teorema II.c.6.. ///

Definición II.c.8. *Sea E un espacio normado de dimensión $\dim E=n$ y $1\le p\le q\le\infty$. Definimos*

$$\gamma_E(p,q)=\gamma_E=\inf\{\,||T||\ ||S||\ ;\ l_p^n\xrightarrow{T}E\xrightarrow{S}l_q^n\ ,\ S\circ T=Id\,\}$$

Observación. Por ser E de dimensión finita, la definición anterior es equivalente a la existencia de una base de vectores $e_1, \ldots, e_n \in E$ tal que para todo $(a_i)_{i=1}^n \in I\!R^n$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{1/q} \leq \| \sum_{i=1}^n a_i e_i \| \leq \gamma_E(p,q) \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p}$$

Teorema II.c.9. *Para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$ existe una constante $C = C_{p,q} > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo espacio normado E, existe un subconjunto de N puntos $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ en E de forma que $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_1 < 1 + \varepsilon, \ \forall \ i \neq j$, siempre que*

$$n^{1+r(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} > C \left(\frac{\gamma_E(p,q)}{\varepsilon} \right)^r \log N$$

donde $r = \max\{2, p\}$

Demostración: Considerar $\{0,1,-1\}^n \subset \ell_r^n$. Sea $f\colon \{0,1,-1\}^n \to I\!R$ definida por $f(\eta) = || \sum_{i=1}^n \eta_i x_i||$ y sea $\tilde{f} = \| \cdot \|$ su extensión natural convexa. Usando la observación anterior es inmediato comprobar que $M_f \geq \left(\dfrac{n}{2}\right)^{1/q}$ y $\tilde{\sigma}_r \leq \gamma_E \, n^{1/p-1/r}$. Por tanto, por el Comentario 0.b.15.,

$$I\!P\{|f - M_f| > \varepsilon M_f\} \leq 4 \exp - \frac{C \varepsilon^{\max\{2,p\}} n^{1+r(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}}{\gamma_E^{\max\{2,p\}}}$$

///

Observación. El Teorema II.c.9. da una estimación general de $N = N(n, \varepsilon)$ que puede ser mejorada añadiendo condiciones extra al espacio E. Esto es lo que se muestra en el siguiente

Corolario II.c.10.

i) Existe una constante numérica $C > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo espacio normado n-dimensional E con constante del cotipo C_q, existe un subconjunto de N puntos $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ en E de forma que $1-\varepsilon < \| x_i - x_j \|_1 < 1+\varepsilon, \ \forall \ i \neq j$, siempre que

$$n^{2/q} > \frac{C \ C_q^2}{\varepsilon^2} \log N$$

ii) *Existe una constante numérica $C > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo espacio normado n-dimensional E con constante del cotipo débil 2 wC_2, existe un subconjunto de N puntos $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ en E de forma que $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_1 < 1 + \varepsilon, \ \forall\, i \neq j$, siempre que*

$$n > \frac{C\ wC_2^2(1 + \log CwC_2)^2}{\varepsilon^2} \log N$$

Demostración:

i) Según el Teorema 5.2 en [F-L-M] existe un subespacio $F \subseteq E$ de dimensión $k \geq \dfrac{Cn^{2/q}}{C_2^q}$ tal que $\mathrm{d}(F, \ell_2^k) \leq 2$; por tanto $\gamma_F(2,2) \leq 2$. Por el Teorema II.c.9. existe un subconjunto de N puntos $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ en F de forma que $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_1 < 1 + \varepsilon, \ \forall\, i \neq j$, siempre que

$$k > \frac{C}{\varepsilon^2} \log N$$

y de aquí se deduce la tesis para E con

$$n^{2/q} > \frac{C\ C_q^2}{\varepsilon^2} \log N$$

ii) Usar los resultados en [M-P] y concluir como en i). ///

Observación. Se puede deducir el Corolario II.c.10. de los resultados siguientes: $\ell_2^{C(\varepsilon)n^{2/q}} \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ para todo $0 < \varepsilon < 1$ (Teorema 5.2. en [F-L-M]), junto con el Teorema II.b.3 para $p = 2$, más la transitividad de las inclusiones; aunque razonando de esta forma se llega a una peor dependencia respecto de ε, concretamente $C(\varepsilon) = C\varepsilon^{-4}$.

Comentario II.c.11. A lo largo del Capítulo hemos encontrado la relación óptima en n y N en espacios con base 1-subsimétrica (Teorema II.b.5.) y espacios en los que existe una buena relación entre εM_f y $\omega_p(\varepsilon)$. La solución en todos los casos es no constructiva: sabemos que los resultados se verifican "con probabilidad positiva" pero no se dice qué vectores forman el conjunto T. Aunque para ℓ_∞^n el problema tiene solución óptima (incluso con $\varepsilon = 0$) y la desigualdad de desviación asociada es la mejor posible, i.e. $I\!P\{\,|f-M_f|>t\,\}=0$, no sabemos si lo mismo ocurre para espacios cercanos de alguna forma a él, por ejemplo K-isomorfos o con mala constante del cotipo C_q para todo $q<\infty$. La razón está en el mal comportamiento del módulo de continuidad de f. Los ejemplos siguientes estudian dos espacios de norma "similar" a la de ℓ_∞^n; en ellos daremos un procedimiento constructivo para hallar la solución a nuestro problema. En ambos ejemplos obtendremos la relación óptima en n y N y una dependencia respecto de ε mejor que $C\varepsilon^{-2}$. Esto confirma la idea de que cerca de ℓ_∞^n el problema ha de tener solución más sencilla aunque todavía no hayamos dado con un método para encontrarla. El primero de los ejemplos nos fue sugerido por A. Pajor.

Ejemplo 1.

Notación. Sea en $I\!R^n$ la norma definida por $\|x\|=\sum_{i=1}^n \max\{|x_1|,\dots,|x_i|\}$, $x=(x_i)\in I\!R^n$. Denotar por E dicho espacio normado. La base canónica (e_i) forma una base 1-incondicional y no subsimétrica. Claramente, $\|e_i\|=n-i+1$ y para todo $\varepsilon_i=\pm1$, $\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i e_i\|=n$; como además $\sum_{i=1}^n\|e_i\|^q=\sum_{i=1}^n i^q\sim n^{q+1}$ se deduce que $C_q\geq n^{1/q}$.

Proposición II.c.12. *Existe una constante numérica $C>0$ tal que para todo $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, existe un subconjunto de N puntos $T=\{x_1,\dots,x_N\}$ en E, de forma que $1-\varepsilon<\|\,x_i-x_j\,\|_1<1+\varepsilon$, $\forall\ i\neq j$, siempre que*

$$n>\frac{C}{\varepsilon}\log N$$

Demostración: Dado $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$ sea $k=[2\varepsilon n]$. Sea

$$T_1=\{\tilde{x}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k,0,\dots,0)\in I\!R^n\,;\,\varepsilon_i=\pm1,\ 1\leq i\leq k\,\}$$

El conjunto T buscado es $T=\{x=\dfrac{\tilde{x}}{2n}\,;\,\tilde{x}\in T_1\,\}$.

Para todo $\tilde{x},\tilde{y}\in T_1$, $\tilde{x}\neq\tilde{y}$, $\frac{1}{2}\,\|\tilde{x}-\tilde{y}\|\in\{n-k+1,\dots,n-1,n\}$ por tanto,

$$\|x-y\|\in(1-\frac{k-1}{n},1]\subseteq(1-2\varepsilon,1]\qquad\forall\ x\neq y\in T,\ \ x\neq y$$

es decir, para todo $x, y \in T$, $x \neq y$

$$1 - 2\varepsilon \leq \|x - y\| \leq 1$$

///

El segundo ejemplo es un espacio en el que la función f *"no se concentra demasiado"*.

Ejemplo 2.

Notación. Sea $\{\sigma_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ el conjunto de $\binom{n}{2}$ puntos equidistantes en el intervalo $[1, 2]$ ordenados de forma natural: $1 = \sigma_{1,1} < \sigma_{1,2} < \ldots < \sigma_{1,n} < \sigma_{2,3} < \ldots \sigma_{(n-1),n} = 2$. Definimos en $\mathbb{R}^n$ la norma

$$\|x\| = \max\{|x_n|, |x_i| + \frac{|x_j|}{\sigma_{i,j}} \ ; \ 1 \leq i < j \leq n\}$$

donde $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$. Denotar por E dicho espacio normado. La base canónica (e_i) es una base 1-incondicional normalizada de E y además

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq 2\|x\|_\infty \qquad\qquad \forall \ x \in \mathbb{R}^n$$

Para todo $\eta = (\eta_i) \in E$ con $\eta_i = 0, 1$, tenemos $\|\eta\| \in \{0, 1, 1 + \frac{1}{\sigma_{i,j}} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Más aún,

- $\|\eta\| = 1 \Longleftrightarrow \eta = e_i$ para algún i, y
- $\|\eta\| = 1 + \frac{1}{\sigma_{i,j}} \Longleftrightarrow \eta = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, \eta_k, \ldots)$, donde los valores 1 que aparecen están en las posiciones i y j y los restantes η_k pueden tomar valores 0 ó 1 indistintamente.

Para un subconjunto $A \subset \{0, 1\}^n$ denotamos

$$A^c = \{0, 1\}^n \setminus A \qquad \text{y} \qquad (0, A) = \{(0, \eta) \mid \eta \in A\} \subset \{0, 1\}^{n+1}$$

análogamente se define $(1, A)$.

Lema II.c.13. *Para todo $n \geq 2$ los conjuntos definidos inductivamente*

$$A_n = (0, A_{n-1}) \cup (1, A_{n-1}^c) \qquad\qquad A_1 = 0 \qquad A_1^c = 1$$

verifican

i) $\forall\ \eta_n \neq \eta'_n \in A_n, \quad \|\eta_n - \eta'_n\|_1 \geq 2.$

ii) $\forall\ \eta_n \neq \eta'_n \in A_n^c, \quad \|\eta_n - \eta'_n\|_1 \geq 2.$

iii) *card* $(A_n) =$ *card* $(A_n^c) = 2^{n-1}$.

Demostración: Por inducción. Es inmediato comprobarlo para $n = 2$. Suponer que el enunciado es cierto para n y vamos a demostrarlo para $n+1$. Observar primeramente que $A_{n+1} = (0, A_n) \cup (1, A_n^c)$ implica $A_{n+1}^c = (0, A_n^c) \cup (1, A_n)$.

Es claro que card $(A_{n+1}) =$ card $(A_n)+$ card $(A_n^c) = 2^n =$ card (A_{n+1}^c) con lo que se demuestra iii). Ahora, para todo par de puntos $\eta_{n+1}, \eta'_{n+1} \in A_{n+1}$ distintos tenemos, por la definición de A_{n+1} y la hipótesis de inducción,

a) Si $\eta_{n+1} = (0, \eta_n)$, $\eta'_{n+1} = (0, \eta'_n)$, con $\eta_n, \eta'_n \in A_n$, entonces $\|\eta_{n+1} - \eta'_{n+1}\|_1 = \|\eta_n - \eta'_n\|_1 \geq 2$.

b) Si $\eta_{n+1} = (1, \eta_n)$, $\eta'_{n+1} = (1, \eta'_n)$, con $\eta_n, \eta'_n \in A_n^c$, entonces $\|\eta_{n+1} - \eta'_{n+1}\|_1 = \|\eta_n - \eta'_n\|_1 \geq 2$,

c) Si $\eta_{n+1} = (0, \eta_n)$, $\eta'_{n+1} = (1, \eta'_n) \in (1, A_n^c)$, con $\eta_n, \eta'_n \in A_n, A_n^c$ respectivamente, entonces $\|\eta_{n+1} - \eta'_{n+1}\|_1 = 1 + \|\eta_n - \eta'_n\|_1 \geq 2$ pues A_n y A_n^c son disjuntos. ///

Observación. El Lema II.c.13. es igualmente válido, con las modificaciones obvias, en el espacio $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}^n$ que es la forma en que lo vamos a usar a continuación.

Proposición II.c.14. *Existe una constante numérica $C > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$, existe en E un subconjunto de N puntos $T = \{x_1, \ldots, x_N\}$ de forma que $1 - \varepsilon < \| x_i - x_j \|_1 < 1 + \varepsilon$, $\forall\ i \neq j$, siempre que*

$$n > \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \log N$$

Demostración: Dado $0 < \varepsilon < 1$ sea $k = [\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\sqrt{\varepsilon} n] < n$. Sean

$$T_1 = \{\tilde{x} = (0, \ldots 0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)\, ;\, \varepsilon_i = \pm 1\} \qquad \text{y} \qquad T_2 = \{\frac{\tilde{x}}{2}\, ;\, \tilde{x} \in T_1\}$$

Por el Lema II.c.13., sea $T_3 \subset T_2$ un subconjunto de cardinalidad card $T_3 = 2^{k-1}$ tal que $\|x - y\|_1 \geq 2$ para todo $x, y \in T_3$, $x \neq y$. La propiedad importante de T_3 es que para todo par de elementos distintos $x, y \in T_3$ tenemos

$$\|x - y\| \in \{\, 1 + \frac{1}{\sigma_{(n-1),n}}, 1 + \frac{1}{\sigma_{(n-2),(n-1)}}, 1 + \frac{1}{\sigma_{(n-2),n}}, \ldots$$
$$\ldots, 1 + \frac{1}{\sigma_{(n-k+1),(n-k+2)}}, \ldots, 1 + \frac{1}{\sigma_{(n-k+1),n}}\,\} = A$$

Claramente card $A = 1 + 2 + \ldots + k - 1 \leq k^2$ y, puesto que los puntos $\sigma_{i,j}$ dan lugar a intervalos de longitud constante $\binom{n}{2}^{-1}$,

$$\Big|\frac{1}{\sigma_{i,j}} - \frac{1}{\sigma_{i,(j+1)}}\Big| = \frac{|\sigma_{i,j} - \sigma_{i,(j+1)}|}{\sigma_{i,j}\,\sigma_{i,(j+1)}} \leq \binom{n}{2}^{-1} \qquad \text{si} \quad 1 \leq i < j < n$$

y

$$\Big|\frac{1}{\sigma_{(i-1),n}} - \frac{1}{\sigma_{i,n}}\Big| = \frac{|\sigma_{(i-1),n} - \sigma_{i,n}|}{\sigma_{(i-1),n}\,\sigma_{i,n}} \leq \binom{n}{2}^{-1} \qquad \text{si} \quad 2 \leq i < j = n$$

Por tanto, como $1 \leq \sigma_{i,j} \leq 2$ para todo $1 \leq i < j \leq n$,

$$\frac{3}{2} \leq \|x - y\| \leq 1 + \frac{1}{\sigma_{(n-k+1),(n-k+2)}} \leq \frac{3}{2} + k^2 \binom{n}{2}^{-1} \leq \frac{3}{2}(1 + \varepsilon)$$

El conjunto T buscado es $T = \{\frac{x}{3}\, ;\, x \in T_3\}$. ///

CAPITULO III

III.a. NOTACION Y RESULTADOS PREVIOS.

III.a.1. Introducción.

En lo sucesivo $(E, \|\cdot\|)$ denotará un espacio r-Banach $(0 < r < 1)$, p será un número real verificando $0 < p < 2, r \leq p$.

Enunciamos a continuación los dos resultados centrales del capítulo:

Teorema III.b.1. *Sea $r < p < 2$ verificando $\dfrac{(4-p)p}{4} < r < p$. Existe $C(r,p) > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo espacio r-Banach E, ℓ_p^k está $(1+\varepsilon)$-incluido en E siempre que*

$$k \leq C(r,p)\, \varepsilon^{\frac{p^2}{r(p-r)}} \big(ST_p(E)\big)^{\frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}$$

Teorema III.c.1. *Sea $0 < r < 1$. Para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe una constante $C(\varepsilon, r) > 0$ tal que para todo espacio r-Banach E, ℓ_r^k está $(1+\varepsilon)$-incluido en E siempre que*

$$\log k \leq C(\varepsilon, r)\big(ST_r(E)\big)^r$$

Las técnicas empleadas en la demostración de ambos resultados, i.e. uso de variables p-estables, desigualdades de desviación, comparación de variables aleatorias, son las usadas por Pisier en [Pi 2] para el caso de espacios de Banach $(r = 1)$. En algunos casos los resultados de Pisier se adaptan de manera inmediata al caso de espacios r-Banach; en otros la generalización no es en modo alguno trivial.

Como Corolario obtenemos el resultado central (Teorema 1) de [J-S 1] para el caso $r < 1$:

Corolario III.b.5. *Si $E = \ell_r^n$ $(0 < r < 1)$, y $r < p < 2$ entonces para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe una constante $C = C(\varepsilon, r, p)$ tal que ℓ_p^k está $(1+\varepsilon)-$incluido en ℓ_r^n siempre que $k \leq Cn$*

También como consecuencia damos una versión del Teorema de Maurey-Pisier para el tipo ([Mau-P]) en espacios r-Banach. Dicho teorema es el siguiente:

Teorema III.d.1. *Sea E espacio r-Banach infinito dimensional.*

i) Los números definidos como

$$p(E) = \inf\{p \,|\, \ell_p^n \textit{ está}\,(1+\varepsilon) - \textit{incluido en}\,E\ \forall n \in I\!N,\ \forall\, 0 < \varepsilon < 1\}$$

$$\tilde{p}(E) = \sup\{p \,|\, E \textit{ es de tipo estable } p\}$$

$$p'(E) = \sup\{p \,|\, E \textit{ es de tipo Rademacher } p\}$$

son iguales ($p(E) = \tilde{p}(E) = p'(E)$).

ii) $\ell_{p(E)}$ es finitamente representable en E.

Para finalizar el capítulo utilizaremos las técnicas empleadas en la demostración de los teoremas para dar una solución parcial al problema de la inclusión de puntos de L_p en ℓ_p^n.

III.a.2. Tipo estable.

Definición III.a.1. *Un espacio r-Banach E se dice de tipo p-estable (o de tipo estable p) si para todo $s < p$, hay una constante $C > 0$, tal que para todo $n \in I\!N$ y cualesquiera vectores $x_1, \ldots, x_n \in E$*

$$\left(I\!E \,\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \|^s \right)^{1/s} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p} \tag{1}$$

donde θ_i denotan variables aleatorias i.i.d. p-estables.

Observación. Igual que ocurría con el tipo p-Rademacher, si E es de tipo p-estable y F es finitamente representable en E entonces F es de tipo p-estable.

Teorema III.a.2. ([Pi 3]). *Para todo $0 < t < s < p$ existe una constante $C = C(r, s, t, p)$,tal que para todo espacio r-Banach E y vectores $x_1, \ldots, x_n \in E$*

$$\left(I\!E \,\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \|^t \right)^{1/t} \leq \left(I\!E \,\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \|^s \right)^{1/s} \leq C \left(I\!E \,\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \|^t \right)^{1/t}$$

Según este resultado todos los momentos de orden $s < p$ son equivalentes. Por tanto en la definición anterior la condición "*para todo* $s < p$", se puede sustituir por "*para algún* $s < p$".

Denotamos por $ST_p(E)$ el ínfimo de las constantes $C > 0$ satisfaciendo (1) con $s = r$ si $r < p$ y $s = \frac{r}{2}$ si $r = p$.

La definición de tipo estable es formalmente semejante a la de tipo Rademacher. Dicha semejanza no es únicamente formal pues existe una estrecha relación entre ambas. El siguiente resultado establece esta relación. Para una demostración ver [Pi 3].

Lema III.a.3. *Para todo espacio r-Banach E,*

(i) Si E es de tipo p entonces es de tipo estable q para todo $q < p$.

(ii) Si E es de tipo estable p es de tipo p.

Comentario III.a.4. Necesitaremos recordar las siguientes propiedades en relación con el tipo p-estable. Para más información ver [Pi 3].

i) Todo espacio r-Banach es de tipo estable s para todo $s \in (0, r)$. En particular, y en vista del Teorema III.a.2. y de las propiedades de las variables p-estables (Comentario 0.a.11.), $I\!\!E \, \| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \|^r < \infty \iff r < p$, donde θ_i son variables p-estables.

ii) Si E es de tipo estable s, es de tipo estable t para todo $t < s$.

iii) $ST_p(\ell_q^n) = C_{p,q} n^{1/q - 1/p}$ si $0 < q < p < 2$.

iv) $ST_p(\ell_p^n) = C_p (\log n)^{1/p}$ $0 < p < 2$.

v) El espacio ℓ_p es de tipo estable q para todo $q < p$, pero no es de tipo estable p $(0 < p < 2)$.

vi) Si S es una variable aleatoria de la forma $S = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i$ con $x_i \in E$, θ_i v.a.i.i.d. p-estables y S_i son copias independientes de S entonces, para todo $(a_i) \in I\!R^n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i S_i \overset{\mathrm{d}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} S_1$$

La siguiente definición equivalente de $ST_p(E)$ se encuentra, en el contexto de los espacio de Banach, en [Pi 2]. Su enunciado y demostración son válidas también en espacios r-Banach.

Lema III.a.5. *$ST_p(E)$ es el ínfimo de las constantes $C > 0$ tal que,*

$$\left(I\!E \, \| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \|^s \right)^{1/s} \leq C n^{1/p} \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$$

para todo $n \in I\!N$ y todo $x_1, \ldots, x_n \in E$, donde $s = r$ si $r < p$ y $s = r/2$, si $p = r$.

III.a.3. Resultados previos.

En varios momentos del Capítulo necesitaremos asegurar la convergencia de ciertas series de variables aleatorias así como la existencia de sus momentos; para ello nos apoyaremos en los siguientes bien conocidos resultados:

Lema III.a.6. *Sea ξ_n una sucesión de variables aleatorias con valores en un espacio de Hilbert tal que $I\!E(\xi_n) = 0$ y $I\!E\|\xi_n\|^2 < \infty$ para todo $n \in I\!N$. Entonces si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} I\!E\|\xi_n\|^2 < \infty$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ converge c.s.*

Lema III.a.7. *Sea ξ_n una sucesión de variables aleatorias independientes con valores en un espacio de Banach y $N(\cdot) = \sup_{n \in I\!N} \|\xi_n(\cdot)\|$. Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ converge c.s., entonces para todo $0 < q < \infty$ son equivalentes:*

i) $I\!E(N^q) < \infty$.

ii) $\mathbb{E}\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \|^q < \infty.$

La demostración del primer Lema puede consultarse en [Ka], Cap.III, Teorema 2, y la del segundo en [B] Cap. III, Corolario 2.

También necesitaremos una expresión de $\sum_{i=1}^n \theta_i x_i$ más conveniente; para hacerlo introduciremos nueva notación:

Definición III.a.8. *Una variable aleatoria exponencial es la que tiene como función de distribución $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$.*

Dados $x_1, \ldots, x_n \in E$ sea $Y : \Omega \to E$ una variable aleatoria con distribución $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (\delta_{x_i} + \delta_{-x_i})$ y sean $(Y_j, j \geq 1)$ copias independientes de Y. Sea Γ_j una variable aleatoria obtenida al sumar j variables exponenciales independientes. La función de distribución de Γ_j es conocida

$$\mathbb{P}(\Gamma_j \leq t) = \int_0^t \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} e^{-x}\, dx$$

así como su esperanza; si $s < jp$, entonces $\mathbb{E}(\Gamma_j^{-s/p}) \sim j^{-s/p}$. Para una demostración de ambos resultados ver [F].

El siguiente Teorema da la representación de $\sum_{i=1}^n \theta_i x_i$ que buscamos:

Teorema III.a.9. *Para todo $0 < p < 2$*

i) La serie $\sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-1/p}\, Y_j$ converge c.s. .

ii) Existe una constante $C_p > 0$ tal que

$$\frac{\sum_{i=1}^n \theta_i x_i}{n^{1/p}} \overset{\mathrm{d}}{=} C_p \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-1/p}\, Y_j$$

Demostración: Ver [Mar-Pi] Proposition 1.5. ///

El siguiente Lema nos da más información sobre las variables Γ_j. Nos referimos a páginas más adelante, en el apartado titulado "Estrategia", para una explicación de su papel e importancia.

Lema III.a.10. *Si* $0 < \dfrac{(4-p)p}{4} < r < p < 2$, $r \leq 1$ *se tiene,*

$$\sum_{j\geq 1} \mathbb{E}\left|\frac{1}{{\Gamma_j}^{1/p}} - \frac{1}{j^{1/p}}\right|^r = K_{p,r} < \infty$$

y si $r = p$ *entonces,*

$$\sum_{j\geq 2} \mathbb{E}\left|\frac{1}{{\Gamma_j}^{1/p}} - \frac{1}{j^{1/p}}\right|^r = K_p < \infty$$

Demostración: Como conocemos una expresión de la función de distribución de Γ_j vamos a estudiar para qué valores de k es finita la expresión:

$$\sum_{j\geq k} \mathbb{E}\left|\frac{1}{{\Gamma_j}^{1/p}} - \frac{1}{j^{1/p}}\right|^r = \int_0^\infty \sum_{j=k}^{\infty} |x^{-1/p} - j^{-1/p}|^r \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} e^{-x}\, dx = I_k$$

Usando primero la equivalencia de Stirling ($j! \sim j^j\, e^{-j}\, \sqrt{2\pi j}$) y luego el cambio de variable $\frac{x}{j} = t$ la fórmula de arriba se transforma en

$$I_k \sim \int_0^\infty \left|1 - t^{-1/p}\right|^r \frac{1}{t} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j j^{1/2 - r/p}\, dt$$

Para estudiar la convergencia de I_k dividimos la integral en tres trozos, $I_k = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{3/2} + \int_{3/2}^{\infty} = I_k^0 + I_k^1 + I_k^\infty$

- *Si* $r \leq \dfrac{p}{2}$, I_k^1 *diverge para todo* k.

En efecto primeramente,

$$\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j j^{1/2 - r/p} \geq \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j = \frac{t^k\, e^{-(t-1)(k-1)}}{e^{t-1} - t}$$

ahora, cerca de $t = 1$, $\left|1 - t^{-1/p}\right|^r$ se comporta como $|t-1|^r$ y $e^{t-1} - t$ lo hace como $(t-1)^2$. Por tanto I_k^1 está minorada por la integral de una función que, entorno a $t = 1$ es como $(t-1)^{r-2}$ y por tanto diverge, (si $0 < r \leq 1$) para todo valor de k.

- Sea $r > \dfrac{p}{2}$,

(i) $I_k^\infty < \infty$. Basta con acotar $j^{1/2-r/p} \leq 1$.

(ii) $I_k^0 < \infty$ *si y sólo si* $k > \frac{r}{p}$. Pues,

$$I_k^0 \sim \int_0^\varepsilon \frac{1}{t^{r/p-k+1}}\, dt$$

(iii) $I_k^1 < \infty$ *si* $\dfrac{(4-p)p}{4} < r \leq p$ *para todo* k. (Observar que $0 < p < 2 \Longrightarrow \dfrac{p}{2} < \dfrac{(4-p)p}{4} < p$).

Escribir $a = \dfrac{r}{p} - \dfrac{1}{2}$. Como $\dfrac{p}{2} < r \leq p$, se tiene, $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Usando equivalencias y un cambio de variable $u = t - 1$ es inmediato ver que

$$I_k^1 \sim \int_{-1/2}^{1/2} |u|^r \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{u+1}{e^u}\right)^j}{j^a}\, du$$

Sea $s = 1 - \dfrac{p}{2}$, $(0 < s < 1)$, y sea b tal que $sa + \dfrac{1}{b} = 1$. Por la desigualdad de Hölder

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{u+1}{e^u}\right)^j}{j^a} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{a}{as}}} \right)^{as} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{u+1}{e^u} \right)^{bj} \right)^{1/b} \sim \frac{1}{u^{2/b}}$$

para el último paso hemos sumado la serie geométrica y usado equivalencias. Por tanto, I_k^1 está mayorada por $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{1}{u^{2/b-r}}\, dt$. Sustituyendo ahora el valor de b, la integral converge si $\dfrac{(4-p)p}{4} < r$.

En resumen, si $\dfrac{(4-p)p}{4} < r < p$ entonces I_1^∞ I_1^0 e I_1^1 , convergen con lo que demostramos i). Si $r = p$, hemos de tomar $k \geq 2$ para que I_k^0 converja. En cuanto a I_2^1 notar que siempre $\dfrac{(4-r)r}{4} < r$ si $r > 0$ y podemos aplicar (iii). ///

Observación. Sobre el número $\dfrac{(4-p)p}{4}$ hacemos varias observaciones que serán de utilidad más adelante.

1.- $\dfrac{p}{2} < \dfrac{(4-p)p}{4} < p$ y así , $\dfrac{(4-p)p}{4} < r < p$ implica $1 < \dfrac{p}{r} < 2$.

2.- $\dfrac{(4-p)p}{4} < 1$ pues $p < 2$.

3.- La sucesión recurrente $p_{n+1} = \dfrac{(4-p_n)p_n}{4}$, $p_1 > 0$ es monótona decreciente con límite $\ell = 0$.

III.a.4. Lemas de aproximación.

Los siguientes lemas de aproximación son estándar y su demostración se puede encontrar en [J-S 1].

Definición III.a.11. *Un subconjunto T de la esfera unidad S_E de E es una δ-red si para todo $x \in S_E$ existe un $t \in T$ tal que $\| x - t \|^r \leq \delta$.*

Lema III.a.12. *Sea E un espacio r-normado de dimensión n, y $\delta > 0$. S_E contiene una δ-red de cardinalidad a lo más $\exp \dfrac{2n}{r\delta}$*

Lema III.a.13. *Sean E r-Banach y F s-Banach. Sean $0 < \varepsilon$, $\delta < 1$. Si un operador $T : E \to F$ verifica*

$$1 - \varepsilon \leq \|Tx\|^r \leq 1 + \varepsilon$$

para todo x en una $\delta^{s/r}$-red de S_E, entonces para todo $x \in S_E$

$$\frac{1 - 2\delta - \varepsilon}{1 - \delta} \leq \|Tx\|^r \leq \frac{1 + \delta}{1 - \delta}(1 + \varepsilon)$$

Pensando en precisar la dependencia respecto de ε de la función $C(\varepsilon, r, p)$ en el Teorema III.b.1. damos a continuación una versión más detallada de los lemas anteriores:

Lema III.a.14. *Sean E r-Banach y F s-Banach. Sean $0 < \varepsilon < 1$ y $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$. Si un operador $T : E \to F$ verifica*

$$1 - \delta \leq \|Tx\|^r \leq 1 + \delta$$

para todo x en una $\delta^{s/r}$-red de S_E, entonces para todo $x \in S_E$

$$1 - \varepsilon \leq \|Tx\|^r \leq 1 + \varepsilon$$

Demostración: Aplicar directamente Lema III.a.13. con $\delta = \varepsilon$. Es fácil comprobar que $\dfrac{(1+\delta)^2}{1-\delta} \leq 1+\varepsilon$ y $1-\varepsilon \leq \dfrac{1-3\delta}{1-\delta}$, cuando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

///

Lema III.a.15. *Sean E r-Banach y F s-Banach. Sean $0 < \varepsilon < 1$ y $\delta = \dfrac{\varepsilon s}{2^{1/s-1}}$. Si un operador $T : E \to F$ verifica*

$$1-\delta \leq \|Tx\|^s \leq 1+\delta$$

para todo $x \in S_E$, entonces

$$1-\varepsilon \leq \|Tx\| \leq 1+\varepsilon$$

para todo $x \in S_E$.

Demostración: Ver Lema II.a.5.

///

III.b. CASO $r < p$.

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar el siguiente teorema:

Teorema III.b.1. *Sea $r < p < 2$ verificando $\dfrac{(4-p)p}{4} < r < p$. Existe $C(r,p) > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo espacio r-Banach E, ℓ_p^k está $(1+\varepsilon)$-incluído en E siempre que*

$$k \leq C(r,p)\,\varepsilon^{\frac{p^2}{r(p-r)}}\big(ST_p(E)\big)^{\frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}$$

La clave de su demostración está en disponer de una adecuada desigualdad de desviación. La daremos en su forma más general:

Lema III.b.2. *Sea $1 < q < 2$. Sea ξ_j una sucesión de variables aleatorias independientes con valores en E tal que* $\operatorname{essup} \|\xi_j\| = \lambda_j < \infty$. *Si $\|\,(\lambda_j)\,\|_{q,\infty} < \infty$ y $\sum_j \xi_j$ converge c.s. a una variable ξ con $\|\xi\|^r$ integrable entonces,*

$$I\!P\left\{\big|\|\xi\|^r - I\!E\|\xi\|^r\big| > t\right\} \leq 2\exp -c_q\left(\frac{t}{\|\,(\lambda_j^r)\,\|_{q,\infty}}\right)^{q'}$$

Demostración: Sea $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ y para $j \geq 1$, $\mathcal{F}_j = \sigma\langle\,\xi_1, \ldots, \xi_j\,\rangle$. Escribir $d_j = I\!E(\|\xi\|^r\,|\mathcal{F}_j) - I\!E(\|\xi\|^r\,|\mathcal{F}_{j-1})$. La familia (d_j) es la sucesión de diferencias asociada a la martingala escalar $\big(I\!E(\|\xi\|^r\,|\mathcal{F}_j)\big)$. En vista de la Proposición 0.a.7. tenemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j = \|\xi\|^r - I\!E\|\xi\|^r$$

Para todo $j \geq 1$ escribir $\zeta_j = \xi - \xi_j$. Usando la desigualdad triangular y la continuidad de la función $\|\cdot\|^r$ tenemos por una parte, $\|\,\xi\,\|^r \leq \|\,\xi_j\,\|^r + \|\,\zeta_j\,\|^r$ y por otra

$$\|\,\xi\,\|^r \geq \big|\,\|\,\zeta_j\,\|^r - \|\,\xi_j\,\|^r\,\big| \geq \|\,\zeta_j\,\|^r - \|\,\xi_j\,\|^r$$

es decir, $-\|\,\xi\,\|^r \leq \|\,\xi_j\,\|^r - \|\,\zeta_j\,\|^r$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} d_j &\leq \mathbb{E}(\|\xi_j\|^r \,|\mathcal{F}_j) + \mathbb{E}(\|\zeta_j\|^r \,|\mathcal{F}_j) - \mathbb{E}(\|\zeta_j\|^r \,|\mathcal{F}_{j-1}) + \mathbb{E}(\|\xi_j\|^r \,|\mathcal{F}_{j-1}) \\ &= \| \xi_j \|^r + \mathbb{E} \| \xi_j \|^r \end{aligned}$$

La igualdad anterior se debe a que:

i) $\mathbb{E}(\|\xi_j\|^r \,|\mathcal{F}_j) = \| \xi_j \|^r$ pues ξ_j es $\mathcal{F}_j$-medible.

ii) $\mathbb{E}(\|\xi_j\|^r \,|\mathcal{F}_{j-1}) = \mathbb{E} \| \xi_j \|^r$ por independencia de las variables ξ_j.

iii) $\mathbb{E}(\|\zeta_j\|^r \,|\mathcal{F}_j) = \mathbb{E}(\|\zeta_j\|^r \,|\mathcal{F}_{j-1})$ porque ζ_j es independiente de ξ_j.

Análogamente se demuestra $d_j \geq -\| \xi_j \|^r - \mathbb{E} \| \xi_j \|^r$. Por tanto,

$$|d_j| \leq \| \xi_j \|^r + \mathbb{E} \| \xi_j \|^r$$

En el contexto de espacios de Banach ($r = 1$) la análoga a esta desigualdad fue obtenida por Yurinskii [Y] y utilizada entre otros por [Ac] y [Pi-1].

Ahora es inmediata la acotación $\operatorname{essup} |d_j| \leq 2 \operatorname{essup} \| \xi_j \|^r = 2\lambda_j^r$ y concluimos usando la desigualdad de Azuma-Pisier, Lema I.a.1..

///

Notación. Con la notación introducida en la sección anterior (ver Definición III.a.8.), escribimos

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-1/p} Y_j \qquad S_i = \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_{ij}^{-1/p}\, Y_{ij}$$

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p}\, Y_j \qquad \tilde{S}_i = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p}\, Y_{ij}$$

donde Γ_{ij} y Y_{ij} son copias independientes de Γ_j y Y_j respectivamente.

Proposición III.b.3. *Para todo $0 < r < p < 2$ las variables S y $\tilde{S}$ convergen c.s.. Más aún, $\mathbb{E}\| \tilde{S} \|^r$ y $\mathbb{E}\| S \|^r$ son finitos.*

Demostración: La variable S converge c.s. por el Teorema III.a.9. La finitud de $\mathbb{E}\| S \|^r$ es consecuencia inmediata del Teorema III.a.9. y el Comentario III.a.4.

Para demostrar la convergencia c.s. de $\tilde{S}$ observamos que ésta toma valores en un espacio de dimensión *finita* isomorfo por tanto a un espacio de Hilbert; podemos por tanto usar el Lema III.a.6., y puesto que $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2/p} < \infty$, $\tilde{S}$ converge c.s.. Queda por demostrar que para todo $0 < r < p < 2$ $I\!E\| \tilde{S} \|^r < \infty$. Esto es consecuencia directa del Lema III.a.10. y de las desigualdades

$$\begin{aligned} I\!E\| \tilde{S} \|^r &\leq \big| I\!E\| \tilde{S} \|^r - I\!E\| S \|^r \big| + I\!E\| S \|^r \\ &\leq \sum_{j\geq 1} I\!E\left| \frac{1}{{\Gamma_j}^{1/p}} - \frac{1}{j^{1/p}} \right|^r + I\!E\| S \|^r < \infty \end{aligned}$$

Notar que la restricción sobre r y p en el Lema III.a.10. es irrelevante en este contexto como muestra el Comentario 0.b.4.iii).

///

Estrategia.

Para que quede más claro el camino que vamos a seguir en la demostración del Teorema damos primeramente un esquema de la misma.

1. Sean $(x_i)_{i=1}^n$ "vectores apropiados" de E. Sean $k \in I\!N$ a determinar y $(a_i) \in I\!R^k$ tal que $\sum_{i=1}^k |a_i|^p = 1$. Considerar la variable aleatoria $\sum_{i=1}^k a_i\, S_i$. Por las propiedades de las variables p-estables se tiene $I\!E\| \sum_{i=1}^k a_i\, S_i \|^r = I\!E\| S \|^r < \infty$. Por vectores apropiados entendemos unos tales que $(ST_p(E))^r \sim I\!E\| S \|^r$.

2. Suponer que podemos estimar la probabilidad

$$I\!P\big\{ \big| \| \sum_{i=1}^k a_i S_i \|^r - I\!E\|S \|^r \big| \leq \varepsilon\, I\!E\|S \|^r \big\} = f_1(\varepsilon, r, p, k, I\!E\|S \|^r)$$

de manera que sea independiente del elemento (a_i) elegido. Entonces, en virtud de los lemas de aproximación y de igual manera a como hacíamos en el capítulo II, tendríamos una cota sobre

$$\begin{aligned} &I\!P\big\{ \big| \| \sum_{i=1}^k a_i S_i \|^r - I\!E\|S \|^r \big| \leq \varepsilon\, I\!E\|S \|^r \ ; \ \forall\ (a_i) \in \ \varepsilon\text{-red de } S_{\ell_p^k} \big\} \\ &\qquad = f_2(N_\varepsilon, \varepsilon, r, p, k, I\!E\|S \|^r) = f_2(N_\varepsilon, \varepsilon, r, p, k, ST_p(E)) \end{aligned}$$

donde N_ε es la cardinalidad de la ε-red de $S_{\ell_p^k}$. Obligando a esta última cantidad a ser > 0, obtendríamos la existencia de un elemento $\omega \in \Omega$ que verifica el enunciado con $M = \mathbb{E}\| S \|^r$. De la imposición de ser estríctamente mayor que 0 resulta la relación entre k , ε y $ST_p(E)$.

3. Como las variables $\Gamma_j^{-1/p}$ no están acotadas, no podemos aplicar el Lema III.b.2. a $\sum_{i=1}^{k} a_i S_i$. Es por eso que introducimos la variable $\sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i$ e intentamos repetir el razonamiento anterior. Sin embargo el nuevo problema es que la distribución de $\sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i$ ahora *depende* de (a_i).

4. Afortunadamente las dos variables $\sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i$ y $\sum_{i=1}^{k} a_i S_i$ están muy cercanas en el sentido del Lema III.a.10., de forma que vamos a poder medir la desviación de $\| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r$ respecto de $\mathbb{E}\|S\|^r$ (independiente de (a_i)) sin acumular un error importante.

5. Al final lo que se demostrará sera el siguiente hecho: "*Para todo* $0 < \varepsilon < 1$ *existe* $\omega = \omega_\varepsilon \in \Omega$ *tal que*

$$M\,(1-\varepsilon) \le \| \sum_{i=1}^{k} a_i\, \tilde{S}_i(\omega) \| \le M\,(1+\varepsilon)$$

para todo $(a_i) \in \mathbb{R}^k$ *tal que* $\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p = 1$, *donde* M *es una cierta constante independiente de* (a_i) *y de* ε ".

Una vez visto lo anterior, la aplicación $T_\varepsilon \colon \ell_p^k \to E$ definida por $T_\varepsilon(a_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \,\frac{\tilde{S}_i(\omega)}{M}$ hace que d $(\ell_p^k, T_\varepsilon(\ell_p^k)) \le 1 + \varepsilon$.

Primeramente, y antes de precisar lo que resta de la demostración del Teorema III.b.1. escribimos la desigualdad de desviación en la forma exacta en que la vamos a usar; por supuesto es un caso particular del Lema III.b.2 :

Lema III.b.4. *Sea $r < p < 2$ verificando $\dfrac{(4-p)p}{4} < r < p$. Sea $k \in I\!\!N$ y $(a_i) \in I\!\!R^k$ tal que $\sum_{i=1}^k |a_i|^p = 1$. Si además $x_i \in B_E$, entonces*

$$I\!\!P\left\{ \left| \| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \|^r - I\!\!E \| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \|^r \right| > t \right\} \leq 2 \exp -c_q \, t^{q'} \tag{2}$$

donde $q = \dfrac{p}{r}$ y $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$ i.e. $q' = \dfrac{1}{1-\frac{r}{p}}$.

Demostración: Recordar que la relación entre r y p implican $1 < q = \dfrac{p}{r} < 2$. Denotar

$$\xi_{ij} = a_i \, Y_{ij} \, \frac{1}{j^{1/p}} \, , \quad i = 1 \ldots k \ , \quad j \geq 1$$

Las variables ξ_{ij} son independientes y además $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{k,\infty} \xi_{ij} = \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i$. Como además se cumple $I\!\!E \| \displaystyle\sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \|^r < \infty$, estamos en condiciones de aplicar el Lema III.b.2. Claramente, $\lambda_{ij}^r = \text{essup} \, \|\xi_{ij}\|^r \leq |a_i|^r \dfrac{1}{j^{r/p}}$. Resta comprobar que $\| \left(|a_i|^r \, j^{-r/p} \right) \|_{q,\infty} \leq 1$ ó equivalentemente $\| \left(|a_i| \, j^{-1/p} \right) \|_{p,\infty} \leq 1$. Esta desigualdad es la misma que aparece al tratar el problema en el contexto de los espacios de Banach. Se puede consultar una demostración en [Pi 1].

///

Demostración del Teorema III.b.1. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema III.a.5. podemos escoger vectores $x_1, \ldots, x_n$ en la bola unidad de E tal que

$$\left(I\!\!E \, \| \sum_{i=1}^n \theta_i x_i \|^r \right)^{1/r} > \frac{1}{2} (ST_p(E)) n^{1/p}$$

El Teorema III.a.9. asegura que

$$I\!\!E \|S\|^r > \left(\frac{1}{2C_p} \right)^r (ST_p(E))^r \tag{1}$$

Sea $k \in I\!\!N$ que fijaremos posteriormente, y sea $(a_i) \in I\!\!R^k$ tal que $\sum_{i=1}^k |a_i|^p = 1$. Comparamos ahora las variables $\sum_{i=1}^k a_i S_i$ y $\sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i$. Vamos a demostrar que

$$\left| I\!\!E \| \, S \, \|^r - I\!\!E \| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \|^r \right| = \left| I\!\!E \| \sum_{i=1}^k a_i S_i \|^r - I\!\!E \| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \|^r \right| \leq K_{r,p} \, k^{1-r/p} \tag{2}$$

para ello utilizaremos la continuidad y la desigualdad triangular de la función $\|\cdot\|^r$ y entrará en juego el Lema III.a.10..

$$\left| I\!E\| \sum_{i=1}^{k} a_i S_i \|^r - I\!E\| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r \right| \leq I\!E\| \sum_{i=1}^{k} |a_i| \, (S_i - \tilde{S}_i) \ \|^r \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|^r I\!E\|S_i - \tilde{S}_i\|^r$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|^r I\!E\| \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1}{{\Gamma_j}^{1/p}} - \frac{1}{j^{1/p}} \right| Y_{ij} \|^r \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|^r I\!E \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1}{{\Gamma_j}^{1/p}} - \frac{1}{j^{1/p}} \right|^r \|Y_{ij}\|^r$$

$$\leq (\text{Lema III.a.10.}) \leq K_{r,p} \sum_{i=1}^{k} |a_i|^r \leq K_{r,p} \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p \right)^{r/p} k^{1-r/p} = K_{r,p} \, k^{1-r/p}$$

Sea $\delta = \dfrac{\varepsilon r}{5.\, 2^{1/r-1}}$. Escribimos $\delta' = \dfrac{\delta}{1 + (2\, C_p)^r}$ donde C_p es la constante que aparece en el Teorema III.a.9.. Entonces,

$$I\!P\left\{ \left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r - I\!E\| \sum_{i=1}^{k} a_i S_i \|^r \right| > \delta \, I\!E\|S\|^r \right\}$$

$$\leq I\!P\left\{ \left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r - I\!E\| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r \right| + \right.$$

$$\left. + \left| I\!E\|S\|^r - I\!E\| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r \right| > \delta' \, I\!E\|S\|^r + \delta' \, (2\, C_p)^r \, I\!E\|S\|^r \right\}$$

$$\leq (\text{por (1)}) \leq I\!P\left\{ \left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r - I\!E\| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r \right| + \right.$$

$$\left. + \left| I\!E\|S\|^r - I\!E\| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r \right| > \delta' \, I\!E\|S\|^r + \delta' \, ST_p(E)^r \right\}$$

Ahora si elegimos k de forma que $K_{r,p} \, k^{1-r/p} \leq \delta' \, ST_p(E)^r$ tenemos por (2),

$$I\!P\left\{ \left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r - I\!E\| \sum_{i=1}^{k} a_i S_i \|^r \right| > \delta \, I\!E\|S\|^r \right\}$$

$$\leq I\!P\left\{ \left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r - I\!E\| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r \right| > \delta' I\!E\|S\|^r \right\} \leq 2 \exp - C_{p,r} \, {\delta'}^{q'} \left(I\!E\|S\|^r \right)^{q'}$$

$$\leq (\text{por} \ \ (1)) \leq 2 \exp - C_{p,r} \, {\delta'}^{q'} \left(ST_p(E) \right)^{\frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}}$$

Es inmediato comprobar que la condición sobre k es la misma que

$$k \leq C(\varepsilon, r, p) \big(ST_p(E) \big)^{\frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}}$$

donde $C(\varepsilon, r, p)^{1-r/p} \leq \dfrac{\delta'}{K_{r,p}\,(1+(2\,C_p)^r)}$.

El resto de la demostración es estándar. Tenemos ya estimada la probabilidad

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r - \mathbb{E}\|S\|^r \right| > \delta\, \mathbb{E}\|S\|^r \right\} \leq 2 \exp -C_{p,r}\, \delta^{q'} \left(ST_p(E)\right)^{\frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}$$

Sea $\delta_1 = \delta^{\min(1,p)/r}$. Sea N_{δ_1} la cardinalidad de una δ_1-red T_{δ_1} en la bola unidad de ℓ_p^n. Dicho cardinal está acotado superiormente según el Lema III.a.12. por $\exp \dfrac{2k}{\min(1,p)\delta_1}$ Tal y como hacíamos en el Capítulo I es fácil ver que entonces

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i \|^r - \mathbb{E}\|S\|^r \right| \leq \delta\, \mathbb{E}\|S\|^r \ \mid \ \forall (a_i) \in T_{\delta_1} \right\}$$

$$\geq 1 - N_{\delta_1}\, 2 \exp -C_{p,r}\, \delta^{q'} \left(ST_p(E)\right)^{\frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}$$

Si obligamos a que el segundo miembro de la desigualdad sea estríctamente mayor que 0, entonces existirá un elemento $\omega = \omega(\delta)$ en el espacio de probabilidad de forma que $\left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i(\omega) \|^r - \mathbb{E}\|S\|^r \right| \leq \delta\, \mathbb{E}\|S\|^r$ es cierto para todo (a_i) en la $\delta^{\min(1,p)/r}$-red. Esto se logra en virtud del Lema III.a.12 si

$$2 \exp \frac{2k}{\min(1,p)\delta_1} \exp -C_{p,r}\, \delta^{q'} \left(ST_p(E)\right)^{\frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}} < 1$$

Para terminar escribamos la anterior desigualdad abreviadamente:

$$2 \exp Ck \exp -C'A < 1$$

donde $A = \left(ST_p(E)\right)^{\frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}$ y C, C' son las constantes, dependientes de δ, p y r, que acompañan a k e A respectivamente. La desigualdad se cumple si, en particular, $Ck - C'A < -1$; es decir si $C'A > Ck + 1$. Y esta última se verifica cuando $C'A > (C+1)k$ siempre que $k > 1$. Evidentemente la condición $k > 1$ es supérflua pues $\mathbb{R} = \ell_p^1$ está incluído en cualquier espacio r-normado.

Hemos demostrado de esta forma que

$$C'A > (C+1)k \implies 2 \exp Ck \exp -C'A < 1$$

y la traducción de $C'A > (C+1)k$ no es más que

$$k \leq C(\varepsilon, r, p)\big(ST_p(E)\big)^{\frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}$$

Es fácil ver que la función $C(\varepsilon, r, p)$ puede tomarse de la forma

$$C(\varepsilon, r, p) = C(r, p)\varepsilon^{\frac{1}{\frac{r}{p}(1-\frac{r}{p})}}$$

La aplicación directa de los Lemas III.a.14 y III.a.15 nos llevan a que dado $0 < \varepsilon < 1$ exista un $\omega \in \Omega$ tal que

$$\left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \tilde{S}_i(\omega) \| - \mathbb{E}\|S\|^r \right| \leq \varepsilon\, \mathbb{E}\|S\|^r$$

para todo $(a_i)_1^n$ en la esfera unidad de ℓ_p^n. ///

Como estaba anunciado deducimos como corolario el resultado central en [J-S 1].

Corolario III.b.5. *Si $E = \ell_r^n$ $(0 < r < 1)$, y $r < p < 2$ entonces para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe una constante $C = C(\varepsilon, r, p)$ tal que ℓ_p^k está $(1+\varepsilon)-$incluido en ℓ_r^n siempre que $k \leq Cn$*

Demostración: Recordar que el espacio s-normado ℓ_s^n cumple $ST_p(\ell_s^n) = C_{p,s}n^{1/s-1/p}$, si $0 < s < p < 2$. Sea la sucesión $p_{m+1} = \dfrac{(4-p_m)p_m}{4}, p_1 = p$. El Teorema III.b.1. asegura que para todo $s \in (p_2, p_1]$, $s < 1$ se tiene que $\ell_{p_1}^k$ está $(1+\varepsilon)-$incluido en ℓ_s^n para todo $k \leq Cn$. Si $s \in (p_3, p_2]$ entonces existe $s_1 \in (p_2, p_1]$ tal que $s \in (\dfrac{(4-s_1)s_1}{4}, s_1)$. Ahora, por una parte, $\ell_{p_1}^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_{s_1}^{n_1}$ siempre que $k \leq Cn_1$. Por otra $\ell_{s_1}^{n_1} \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_s^n$ siempre que $n_1 \leq Cn$. Por tanto $\ell_{p_1}^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_s^n$ siempre que $k \leq C^2 n$.

En general, por iteración, dado $s \in (p_{m+1}, p_m]$ encontramos una sucesión de $s_i \in (p_{i+1}, p_i]$, $i = 1 \ldots m$ tal que al repetir con ellos el proceso anterior resulta $\ell_{p_1}^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_s^n$ siempre que $k \leq C^m n$.

Para concluir recordar que la sucesión $p_{m+1} = \dfrac{(4-p_m)p_m}{4}, p_1 = p$ tiene como límite 0, por tanto para todo $0 < r < 1$ existirá un $m = m(r,p)$ tal que $r \in (p_{m+1}, p_m]$.

///

Corolario III.b.6. *Sea $r < p < 2$. Para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe una constante $C(\varepsilon, r, p) > 0$ y un número $q = q(r,p)$, $r < q < p$, tal que para todo espacio r-Banach E, ℓ_p^k está $(1+\varepsilon)-$incluido en E siempre que*

$$k \leq C(\varepsilon, r, p)\big(ST_q(E)\big)^{\frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}}$$

Demostración: Existe un $m \in I\!N$ tal que $p_{m+1} < r \leq p_m$. Tomar q suficientemente cerca de p_m para que $\dfrac{(4-q)q}{4} < r < q$ y aplicar Corolario III.b.6. para conseguir una $(1+\varepsilon)$-inclusión de ℓ_p^k en $\ell_q^{C(\varepsilon,p,r)k}$. Ahora usar el Teorema III.b.1.

///

III.c. CASO $r = p$.

El resultado que vamos a probar en la sección es el siguiente:

Teorema III.c.1. *Sea $0 < r < 1$. Para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe una constante $C(\varepsilon, r) > 0$ tal que para todo espacio r-Banach E, ℓ_r^k está $(1+\varepsilon)$-incluído en E siempre que*

$$\log k \leq C(\varepsilon, r)\big(ST_r(E)\big)^r$$

Para ello seguiremos esencialmente la misma estructura que la de la sección anterior si bien con bastantes más complicaciones técnicas.

Disponemos de una desigualdad de desviación que, como en el caso $r < p$, es consecuencia de la correspondiente desigualdad para martingalas escalares.

Lema III.c.2. *Sea ξ_j una sucesión de variables aleatorias independientes con valores en E tal que* $\operatorname{essup} \|\xi_j\| = \lambda_j < \infty$. *Si $\| (\lambda_j^r) \|_{1,\infty} < \infty$ y $\sum_j \xi_j$ converge c.s.a una variable ξ con $\| \xi \|^r$ integrable; entonces, para todo $t > 0$*

$$I\!P\left\{ \left| \|\xi\|^r - I\!E\|\xi\|^r \right| > t \right\} \leq K \exp - \exp\left(\frac{c\,t}{\|(\lambda_j^r)\|_{1,\infty}} \right)$$

Demostración: Repetir la demostración del Lema III.b.2. utilizando la correspondiente desigualdad I.a.2. ///

Estrategia.

Recordamos lo hecho en la sección anterior: Las variables $\Gamma_j^{-1/p}$ no están uniformemente acotadas. Esto imposibilita el uso directo de la desigualdad de desviación con la variable $\| \sum_{i=1}^k a_i\, S_i \|^r$. Por eso introducimos una nueva variable "cercana" a ella: $\| \sum_{i=1}^k a_i\, \tilde{S}_i \|^r$. La cercanía de ambas variables se concreta en el Lema III.a.10..

En el caso que ahora nos ocupa la función $\| \sum_{i=1}^k a_i\, S_i \|^r$ no es integrable. Por ello el método seguido con S_i y $\tilde{S}_i$ no sirve y tenemos que considerar otras nuevas variables "cercanas" a éstas e *integrables*.

Notación. Sea $m \geq 2$ a precisar más adelante.

$$\phi = \sum_{j \geq m} j^{-1/r} Y_j \qquad \psi = \sum_{j \geq m} \Gamma_j^{-1/r} Y_j$$
$$\phi_i = \sum_{j \geq m} j^{-1/r} Y_{ij} \qquad \psi_i = \sum_{j \geq m} \Gamma_{ij}^{-1/r} Y_{ij}$$
$$\Phi^r = \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i \|^r \qquad \Psi^r = \| \sum_{i=1}^{k} a_i \psi_i \|^r$$

donde $\phi_i, i = 1 \ldots k$, son copias independientes de ϕ.

A lo largo de la sección las letras S , S_i , Y , Y_j , Y_{ij} , Γ_j , Γ_{ij} , denotan las mismas variables aleatorias que las introducidas en III.a. Supondremos además que los vectores x_i de la definición de Y pertenecen a B_E (i.e. $\|x_i\| \leq 1$).

Proposición III.c.3. *Las series ϕ y ψ convergen c.s. y Φ^r, Ψ^r son integrables.*

Demostración: Para demostrar la convergencia c.s. de ϕ y ψ repetir el razonamiento hecho en la Proposición III.b.3. con las variables S y $\tilde{S}$. Por el Lema III.a.10. y el argumento también utilizado en III.b.3. basta probar la integrabilidad de Φ^r para tener la de Ψ^r (o viceversa). Demostraremos que Φ^r es integrable. Puesto que ϕ toma valores en un espacio de dimensión *finita* podemos usar el Lema III.a.7.. Claramente la variable $N = \sup_{j \geq m} \|j^{-1/r} Y_j\|$ cumple $\mathbb{E}(N^q) < \infty$, para todo $0 < q < \infty$ y por el mencionado Lema III.a.7., $\mathbb{E}\| \Phi^r \|^q < \infty$, para todo $0 < q < \infty$.

///

Antes de pasar a la demostración del Teorema III.c.1. precisamos la forma exacta en que vamos a usar la desigualdad de desviación:

Lema III.c.4. *Sea $0 < r = p < 1$. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $(a_i) \in \mathbb{R}^k$ tal que $\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p = 1$. Para todo $t > 0$,*

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i \|^r - \mathbb{E} \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i \|^r \right| > t \right\} \leq K \exp -(\exp c\, t)$$

Demostración: Sean $\xi_{ij} = a_i Y_{ij} \dfrac{1}{j^{1/r}}$, $1 \le i \le k$, $j \ge m$. Las variables ξ_{ij} son independientes y $\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\j=m}}^{k,\infty} \xi_{ij} = \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i = \Phi$. Como $\|\Phi\|^r$ es integrable, estamos en condiciones de aplicar el Lema III.c.2 .. Las acotaciones sobre $\lambda_{ij}^r = \operatorname{essup} \|\xi_{ij}\|^r$ son la mismas que las realizadas en Lema III.b.4.. ///

El ingrediente más importante en la demostración del Teorema III.c.1. es el siguiente lema :

Lema III.c.5. *Sean $\delta > 0$, $0 < r < 1$. Existen funciones $m = m(\delta, r)$, $C(\delta, r)$ y $\varphi(\delta, r)$ con $\varphi(\delta, r) \to 0$ cuando $\delta \to 0$ y r fijo, tal que para todo número natural k que verifique*

$$\log k \le C(\delta, r)\big(ST_r(E)\big)^r$$

y todo $(a_i) \in I\!R^k$, se tiene

$$\left| I\!E \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i \|^r - M^r \right| < M^r \varphi(\delta, r)$$

donde $M = \left(I\!E \, \| \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i S_i \|^{r/2} \right)^{2/r}$

Más brevemente, con la notación introducida arriba, hay que demostrar que las hipótesis del Lema implican,

$$\left| I\!E \Phi^r - M^r \right| < M^r \varphi(\delta, r)$$

Suponer la tesis del Lema III.c.5. cierta; vamos a probar primeramente el Teorema III.c.1..

Demostración del Teorema III.c.1.

Fijar $0 < \varepsilon < 1$. Sea $\delta = \delta(\varepsilon)$ que será precisado más tarde. Sea también $k \in I\!N$ (a elegir más adelante) y $(a_i) \in I\!R^k$ con $\sum_{i=1}^{k} |a_i|^r = 1$. Existen vectores

$x_1 \dots x_n \in B_E$ tal que

$$\frac{1}{n^{1/r}} \left(I\!\!E \, \| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \|^{r/2} \right)^{2/r} \geq \frac{1}{2} ST_r(E)$$

Notemos que por el Teorema III.a.9.

$$M = \left(I\!\!E \, \| \sum_{i=1}^{k} a_i S_i \|^{r/2} \right)^{2/r} \overset{d}{=} \frac{1}{n^{1/r} C_r} \left(I\!\!E \, \| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \|^{r/2} \right)^{2/r} \geq \frac{1}{2C_r} ST_r(E)$$

Dado $0 < \varepsilon < 1$ sean $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ y $\delta' = \delta'(\varepsilon, r)$ tales que $\delta \geq \varphi(\delta', r) + \delta'$. Si $\log k \leq C(\delta', r)\big(ST_r(E)\big)^r$ tenemos

$$\begin{aligned} I\!\!P\Big\{ \Big| \, \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i \|^r - M^r \Big| > \delta \, M^r \Big\} & \\ & \leq I\!\!P\Big\{ \Big| \, \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i \|^r - I\!\!E\Phi^r \Big| + \Big| I\!\!E\Phi^r - M^r \Big| > \varphi(\delta', r) M^r + \delta' M^r \Big\} \\ & \leq (\text{Lema III.c.5.}) \leq I\!\!P\Big\{ \Big| \, \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i \|^r - I\!\!E\Phi^r \Big| > \delta' \, M^r \Big\} \\ & \leq K \exp -(\exp c\delta' M^r) \end{aligned}$$

Repetimos el final de la demostración hecha para el caso $r < p$. Tenemos estimada

$$I\!\!P\Big\{ \Big| \, \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i \|^r - M^r \Big| \leq \delta \, M^r \Big\} \geq 1 - K \exp -(\exp c_r \delta' (ST_r(E)^r)$$

Sea N_δ la cardinalidad de una δ-red T_δ en la bola unidad de ℓ_r^n. Entonces,

$$\begin{aligned} I\!\!P\Big\{ \Big| \, \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i \|^r - M^r \Big| \leq \delta \, M^r \ \mid \ \forall (a_i) \in T_\delta \Big\} & \\ & \geq 1 - N_\delta \, K \exp -(\exp c_r \delta' (ST_r(E)^r) \end{aligned}$$

Si hacemos que el segundo miembro de la desigualdad sea estríctamente mayor que 0, entonces existirá un elemento $\omega = \omega(\delta)$ en el espacio de probabilidad de forma que

$\left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i(\omega) \|^r - M^r \right| \leq \delta\, M^r$ es cierto para todo (a_i) en la $\delta-$red. Esto se logra en virtud del Lema III.a.12 si

$$K \,\exp \frac{2k}{r\delta} \exp -(\exp c_r \delta'(ST_r(E)^r) > 0$$

Es sencillo comprobar que esta desigualdad se cumple si $\log k \leq C(\delta', r)\big(ST_r(E)\big)^r$.

Observamos también que el $\delta(\varepsilon)$ que hemos de elegir es $\delta = \dfrac{\varepsilon r}{5.\, 2^{1/r-1}}$ de forma que la aplicación consecutiva de los Lemas III.a.14 y III.a.15 hacen que

$$\left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \phi_i(\omega) \| - M \right| \leq \varepsilon\, M$$

para todo (a_i) en la esfera unidad de ℓ_r^n.

///

Demostración del Lema III.c.5.. Resultados previos.

La demostración del Lema III.c.5. es laboriosa y la dividiremos en 6 pasos. Pero antes necesitamos enunciar unos resultados previos:

El primer resultado es una propiedad elemental de martingalas suficientemente conocida.

Proposición III.c.6. *Sea (f_n) una martingala tal que $\mathbb{E}(f_n^2) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces la diferencia de martingala es una familia ortogonal. Es decir, $\mathbb{E}(d_n \cdot d_m) = 0$ para todo $n \neq m$.*

Sea $(\mathcal{F}_n \;, n \geq 1)$ una sucesión creciente de σ-álgebras. Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible respecto de $\sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \Big)$ tal que $\mathbb{E}(f^2) < \infty$. Denotar por (d_n) la sucesión de diferencias de martingala asociada a $\mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F}_n\,)$

Proposición III.c.7. *Con la notación anterior, si además $\sup_{\omega \in \Omega} |\, d_n(\omega)\,| \leq \lambda_n < \infty$ entonces,*

$$\mathbb{E}\,|f - \mathbb{E}(f)\,|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$$

Demostración: La demostración es consecuencia de Proposición 0.a.7. y de la ortogonalidad de diferencias de martingala. Pisier, en [Pi 2], usa y demuestra este resultado. ///

Un caso particular interesante de la anterior Proposición es cuando tomamos $f = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j$ y $\mathcal{F}_n = \sigma\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle$.

Proposición III.c.8. *Para todo* $0 < p$ *y* $(a_i) \in I\!R^n$, $n > 1$

$$\| (a_i) \|_{p\infty} \leq \| (a_i) \|_p \leq c_p (\log n)^{1/p} \| (a_i) \|_{p\infty}$$

Demostración: Por las propiedades de la cuasi-norma $\| (a_i) \|_{p\infty}$, (ver Comentario 0.b.4.v)), basta demostrarlas para $p = 1$. Observar que

$$\sup_{1 \leq i \leq n} i \, | \, a_i \, |^* = l \, | \, a_l \, |^* \leq | \, a_1 \, |^* + \ldots + | \, a_l \, |^* \leq \| (a_i) \|_1$$

Esto prueba la primera desigualdad.

Para la otra, puesto que $\| (a_i) \|_{1\infty} \leq 1 \iff | \, a_i \, |^* \leq \dfrac{1}{i}$, $\forall \; 1 \leq i \leq n$, resulta, $\| (a_i) \|_1 \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq c \log n$. ///

Lema III.c.9. *Sea* $m \geq 2$. *Para todo* $t > 0$,

$$I\!P\{ \sum_{j \leq m} \Gamma_j^{-1} > t \} \leq \frac{m^2}{t}$$

Demostración:

$$I\!P\{ \sum_{j \leq m} \Gamma_j^{-1} > t \} \leq I\!P\Big\{ \bigcup_{j \leq m} \{ \Gamma_j^{-1} > \frac{t}{m} \} \Big\} \leq \sum_{j \leq m} I\!P\{ \Gamma_j^{-1} > \frac{t}{m} \} \leq m \, I\!P\{ \Gamma_1^{-1} > \frac{t}{m} \}$$
$$= m \int_0^{\frac{m}{t}} e^{-x} \, dx \leq \frac{m^2}{t}$$

///

Lema III.c.10. *Sea* (ξ_i) *una sucesión de variables aleatorias positivas. Sea la función* $\omega \to \|\xi_i(\omega)\|_{q,\infty}$. *Para todo* $0 < q < \infty$ *se tiene*

$$\| \ \|\xi_i(\omega)\|_{q,\infty}\|_{q,\infty}^q \leq 2e \sup_{t>0} t^q \sum_i \mathbb{P}(\xi_i > t)$$

Demostración: La demostración se puede consultar en [Pi 1], Lema 4.11.

///

Demostración del Lema III.c.5.

Paso 1. Dado $\delta > 0$ por Lema III.a.10. existe $m = m(\delta, r) \geq 2$ tal que

$$\sum_{j \geq m} \mathbb{E}\left|\frac{1}{{\Gamma_j}^{1/r}} - \frac{1}{j^{1/r}}\right|^r < \delta$$

y así,

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}(\Phi^r) - \mathbb{E}(\Psi^r)\right| &\leq \mathbb{E}\left|\Phi^r - \Psi^r\right| \leq \mathbb{E}\| \sum_{i=1}^k a_i \left(\phi_i - \psi_i\right) \|^r \leq \mathbb{E} \sum_{i=1}^k |a_i|^r \| \phi_i - \psi_i \|^r \\ &\leq \sum_{j \geq m} \mathbb{E}\left|\frac{1}{{\Gamma_j}^{1/r}} - \frac{1}{j^{1/r}}\right|^r < \delta \end{aligned}$$

este $m(\delta, r)$ no es todavía el m que hay que elegir.

Paso 2. La notación $\mathbb{E}_Y$ significa que integramos únicamente respecto de Y_{ij} con Γ_{ij} fijas y análogamente $\mathbb{E}_\Gamma$. Con esta notación, $\mathbb{E}_\Gamma \mathbb{E}_Y = \mathbb{E}_Y \mathbb{E}_\Gamma = \mathbb{E}$. En este apartado usamos ademas las desigualdades numéricas de las sección 0.b.

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}(\Psi^{r/2}) - (\mathbb{E}(\Phi^r))^{1/2}\right| &\leq \mathbb{E}\left|\Psi^{r/2} - (\mathbb{E}(\Phi^r))^{1/2}\right| \leq \mathbb{E}\left|\Psi^r - \mathbb{E}(\Phi^r)\right|^{1/2} \\ &\leq \mathbb{E}\left|\Psi^r - \mathbb{E}_Y(\Psi^r)\right|^{1/2} + \mathbb{E}\left|\mathbb{E}_Y(\Psi^r) - \mathbb{E}(\Phi^r)\right|^{1/2} \\ &= \mathbb{E}\left|\Psi^r - \mathbb{E}_Y(\Psi^r)\right|^{1/2} + \mathbb{E}_\Gamma\left|\mathbb{E}_Y(\Psi^r) - \mathbb{E}_Y(\Phi^r)\right|^{1/2} \end{aligned}$$

La última igualdad es trivialmente cierta pues la variable Φ sólo depende de las Γ_j.

Vamos a encontrar cotas para los dos sumandos que aparecen en el Paso 2.

Paso 3.

$$\left(\mathbb{E}_\Gamma\big|\mathbb{E}_Y(\Psi^r)-\mathbb{E}_Y(\Phi^r)\big|^{1/2}\right)^2 \leq \mathbb{E}_\Gamma\big|\mathbb{E}_Y(\Psi^r)-\mathbb{E}_Y(\Phi^r)\big| \leq \mathbb{E}\big|\Psi^r-\Phi^r\big| \leq \ \delta.$$

El Comentario 0.b.4.iii) prueba la primera desigualdad y el Paso 1 la tercera.

Paso 4. Para un m suficientemente grande,

$$\left(\mathbb{E}\big|\Psi^r-\mathbb{E}_Y(\Psi^r)\big|^{1/2}\right)^2 \leq \left(\mathbb{E}\big|\Psi^r-\mathbb{E}_Y(\Psi^r)\big|^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\mathbb{E}_\Gamma\mathbb{E}_Y\big|\Psi^r-\mathbb{E}_Y(\Psi^r)\big|^2\right)^{1/2} \leq 2\left(\sum_{j\geq m}\mathbb{E}_\Gamma\Gamma_j^{-2}\right)^{1/2} \leq \delta$$

La primera desigualdad es la misma que en Paso 3. Para la segunda desigualdad fijar $\{\Gamma_{ij}\}$. Sea la sucesión de σ-álgebras $\mathcal{F}_{ij}=\sigma\langle Y_{1m},\ldots,Y_{ij}\rangle$ y considerar la martingala asociada a Ψ^r. Denotar por d_{ij} la correspondiente sucesión de diferencias de martingala. Es fácil comprobar (una vez vista la demostración del Lema III.b.2) que

$$|\,d_{ij}\,| \leq \|\,a_i\Gamma_{ij}^{-1/r}Y_{ij}\,\|^r+\mathbb{E}\,\|\,a_i\Gamma_{ij}^{-1/r}Y_{ij}\,\|^r \leq 2|a_i|^r\Gamma_{ij}^{-1}$$

Por tanto por la Proposición III.c.7.

$$\mathbb{E}_Y\big|\Psi^r-\mathbb{E}_Y(\Psi^r)\big|^2 \leq 4\sum_{i,j}|a_i|^{2r}\Gamma_{ij}^{-2}$$

Ahora, tomando esperanza respecto de Γ_{ij} resulta

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\Gamma\mathbb{E}_Y\big|\Psi^r-\mathbb{E}_Y(\Psi^r)\big|^2 &\leq 4\sum_{i,j}|a_i|^{2r}\mathbb{E}_\Gamma\Gamma_{ij}^{-2} = 4\sum_{i=1}^{k}|a_i|^{2r}\sum_{j\geq m}\mathbb{E}_\Gamma\Gamma_j^{-2}\\ &\leq 4\sum_{i=1}^{k}|a_i|^{2r}\sum_{j\geq m}\mathbb{E}_\Gamma\Gamma_j^{-2} \leq 4\sum_{j\geq m}\mathbb{E}_\Gamma\Gamma_j^{-2}\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}|a_i|^{2r} \leq \left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^r\right)^2 = 1$ (ver Comentario 0.b.4.ii).

Por fin, la tercera desigualdad $2\left(\sum_{j\geq m}\mathbb{E}_\Gamma\Gamma_j^{-2}\right)^{1/2} \leq \delta$ se sigue del hecho de que $\mathbb{E}(\Gamma_j^{-2}) \sim j^{-2}$ (ver Definición III.a.8).

Paso 5. Tomar $m = m(\delta, r)$ el máximo de los que aparecen en los Pasos 1 y 4. Sea $\xi_i = \sum_{j\le m} \Gamma_{ij}^{-1}$. Usando consecutivamente los Lemas III.c.8., III.c.10 y III.c.9. obtenemos estimaciones de $\| \sum_{i=1}^{k} |a_i|^r \xi_i \|_{1/2}$ que serán aplicadas de inmediato en el Paso 6. En efecto,

$$\begin{aligned}
\| \sum_{i=1}^{k} |a_i|^r \xi_i \|_{1/2} &\le C \| \sum_{i=1}^{k} |a_i|^r \xi_i \|_{1,\infty} \le C \| \quad \| |a_i|^r \xi_i(\omega) \|_{1,\infty} \|_{1,\infty} \log k \\
&\le C \log k \ \sup_{t>0} t \sum_{i=1}^{k} I\!P\{|a_i|^r \xi_i > t\} \le C \log k \sup_{t>0} t \sum_{i=1}^{k} \frac{B(\delta, r)}{t} |a_i|^r \\
&= B'(\delta, r) \log k \sum_{i=1}^{k} |a_i|^r
\end{aligned}$$

con $B(\delta, r) = m^2(\delta, r)$ y $B' = C\,B$.

Paso 6. Usando desigualdades ya conocidas más el Paso 5 tenemos,

$$\begin{aligned}
\left| I\!E\Psi^{r/2} - M^{r/2} \right|^2 &= \left| I\!E\Psi^{r/2} - I\!E \| \sum_{i=1}^{k} a_i S_i \|^{r/2} \right|^2 \le \left(I\!E \left| \Psi^{r/2} - \| \sum_{i=1}^{k} a_i S_i \|^{r/2} \right| \right)^2 \\
&\le \left(I\!E \left| \Psi^{r} - \| \sum_{i=1}^{k} a_i S_i \|^{r} \right|^{1/2} \right)^2 \le \left(I\!E \| \sum_{i=1}^{k} a_i (\psi_i - S_i) \|^{r/2} \right)^2 \\
&\le \left(I\!E \left| \sum_{i=1}^{k} |a_i|^r \| \sum_{j\le m} \Gamma_{ij}^{-1/r} \, Y_{ij} \|^r \right|^{1/2} \right)^2 \le \left(I\!E \left| \sum_{i=1}^{k} |a_i|^r \sum_{j\le m} \Gamma_{ij}^{-1} \right|^{1/2} \right)^2 \\
&\le B'(\delta, r) \log k
\end{aligned}$$

es decir, si $\log k \le C(\delta, r) (ST_r(E))^r$ entonces

$$\left| I\!E(\Psi^{r/2}) - M^{r/2} \right| \le (B'(\delta, r) \log k)^{1/2} \le C'(\delta, r)\, (ST_r(E))^{r/2} \le C'(\delta, r)\, M^{r/2}$$

Final. Ahora juntando los Pasos 2 y 6,

$$\left| \, (I\!E\Phi^r)^{1/2} - M^{r/2} \right| \le \left| \, (I\!E\Phi^r)^{1/2} - I\!E(\Psi^{r/2}) \right| + \left| I\!E(\Psi^{r/2}) - M^{r/2} \right| \le \varphi'(\delta, r) M^{r/2}$$

El Teorema del Valor Medio aplicado a la función $\sqrt{x}$ afirma que

$$|\sqrt{x} - 1\,| \le t \quad (\Rightarrow \sqrt{x} \le 1 + t\,) \implies |\, x - 1\,| \le 2t(1 + t)$$

Usando esta observación con $x = \dfrac{\mathbb{E}\Phi^r}{M^r}$ resulta,

$$\left|\mathbb{E}(\Phi^r)^{1/2} - M^{r/2}\right| \leq \varphi'(\delta, r)\, M^{r/2} \Longrightarrow \left|\mathbb{E}\Phi^r - M^r\right| \leq \varphi(\delta, r) M^r$$

donde $\varphi(\delta, r) = 2\varphi'(\delta, r)\,\big(1 + \varphi'(\delta, r)\big)$.

///

III.d. EL TEOREMA DE MAUREY-PISIER PARA EL TIPO EN ESPACIOS r-BANACH.

En esta sección, E será un espacio r-Banach infinito dimensional.

Notación.

$$p(E) = \inf\{p \mid \ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E\ \forall\, n \in I\!N,\ \forall\ 0 < \varepsilon < 1\}$$

$$\tilde{p}(E) = \sup\{p \,|\, E \text{ es de tipo estable } p\}$$

Necesitaremos tener presentes dos hechos apuntados en páginas anteriores:

i) La relación entre tipo estable y tipo Rademacher (Lema III.a.3.).

ii) $\ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E\ \forall\, n \in I\!N,\ \forall\ 0 < \varepsilon < 1$ es lo mismo que decir que ℓ_p es finitamente representable en E (Proposición 0.b.12.).

Nuestro objetivo es, basándonos en los resultados de las secciones III b. y III.c., demostrar el siguiente Teorema:

Teorema III.d.1. *Sea E un espacio r-Banach infinito dimensional.*

i) $p(E) = \tilde{p}(E)$.

ii) $\ell_{p(E)}$ *es finitamente representable en E.*

Un ingrediente importante en la demostración de III.d.1 es el siguiente resultado debido a Kalton (ver [K-1]).

Teorema III.d.2.

(i) Si E es un espacio r-Banach de tipo Rademacher p con $1 < p \leq 2$, entonces E es un espacio de Banach (i.e. la r-norma que define E es equivalente a una norma).

(ii) Si E es un espacio r-Banach de tipo Rademacher p con $0 < r < p < 1$, entonces E es un espacio p-Banach (i.e. la r-norma que define E es equivalente a una p-norma).

(iii) *Si E es un espacio r-Banach de tipo 1 entonces E es p-Banach para todo $p < 1$ (i.e. la r-norma que define E es equivalente a una p-norma).*

Demostración del Teorema III.d.1. Haremos la demostración en 5 pasos destacando de esta forma resultados que tienen interés por sí mismos. Notar primeramente que si $\tilde{p}(E) > 1$, entonces E es un espacio de Banach (por Lema III.a.3. y Teorema III.d.2) y no hay nada que demostrar. Supondremos por consiguiente $\tilde{p}(E) \leq 1$.

Paso 1.

(i) $p(E) \leq 2$.

(ii) $\tilde{p}(E) \geq r$.

Demostración:

(i) Es consecuencia inmediata del Teorema de Dvoretzsky para espacios r-normados. Ver [Di], Teorema 11. Dicho Teorema asegura que $\ell_2^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$, $\forall n \in I\!N$, $\forall\, 0 < \varepsilon < 1$.

(ii) Todo espacio r-normado es de tipo s-estable para todo $s < r$ (ver Comentario III.a.4).

///

Paso 2. Los conjuntos $A = \{p \mid \ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E \quad \forall n \in I\!N, \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1\}$ y $B = \{p \mid E \text{ es de tipo estable } p\}$ son intervalos.

Demostración: El Corolario III.b.5. asegura que ℓ_p es finitamente representable en ℓ_{p_1} para todo $p_1 < p < 2$, $p_1 < 1$. El mismo resultado es cierto para todo $p_1 < p \leq 2$ sin más restricciones. (Ver [J-S 1]). Puesto que la propiedad de representatividad finita es transitiva, es inmediato ahora deducir que $p_1 \in A \Rightarrow p \in A$ para todo $p_1 < p \leq 2$.

Ahora el Comentario III.a.4.ii) implica que B es también un intervalo. ///

Paso 3. $\tilde{p}(E) \leq p(E)$

Recordar que $\forall\ 0 < p < \infty \quad \ell_p$ no es de tipo p-estable. Como el tipo estable se hereda por representatividad finita (Comentario 0.b.16) , entonces

$$2 \geq p > p(E) \Rightarrow \ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E\ \forall n\ \forall \varepsilon \implies \text{E no es de tipo estable p} \Rightarrow p \geq \tilde{p}(E)$$

///

Paso 4. $\tilde{p}(E) = p(E)$

Demostración: Suponer $\tilde{p}(E) < p(E)$. Por definición E es de tipo estable q para todo $q < \tilde{p}(E)$. Entonces es de tipo Rademacher q (Lema III.a.3.) y puede ser considerado como un espacio q-Banach (Teorema III.d.2.). Sean q y q_1 tal que $\tilde{p}(E) < q_1 < p(E)$ y $\frac{(4-q_1)q_1}{4} < q < q_1$. Por definición de $\tilde{p}(E)$, E no es de tipo q_1-estable, es decir $ST_{q_1}(E) = \infty$. Sin embargo el Teorema III.b.1. nos dice que $\ell_{q_1}^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ o sea $p(E) \leq q$, contradicción.

///

Observación. En el Paso 4 parece que hemos usado el Teorema III.b.1. de forma inapropiada pues $ST_{q_1}(E) = \infty$. Lo que queremos decir con $ST_{q_1}(E) = \infty$ es que para todo $n \in I\!N$ existen vectores $x_1, \ldots, x_{k(n)}$ tal que

$$\left(I\!E \,\| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \|^s \right)^{1/s} \geq n \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

Para todo $n \in I\!N$ aplicamos el Teorema III.b.1. al espacio $E_n = \langle x_1, \ldots, x_{k(n)} \rangle$ y puesto que $ST_{q_1}(E_n) \geq n$ resulta que $\ell_{q_1}^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$.

Paso 5. $ST_{\tilde{p}(E)} = \infty$ y $\ell_{\tilde{p}(E)}^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$, para todo $n \in I\!N$ y todo $0 < \varepsilon < 1$.

Demostración: Basta demostrar el segundo hecho ya que éste implica el primero. Para todo $p > \tilde{p}(E)$, $\ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ para todo $n \in I\!N$ y $0 < \varepsilon < 1$. Dado

$0 < \varepsilon < 1$, sean $n \in I\!N$ tal que $\exp \dfrac{1}{n} \leq 1+\varepsilon$ y $p > \tilde{p}(E)$ tal que $\dfrac{1}{\tilde{p}(E)} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{n \log n}$. Usando Comentario 0.b.4.ii) se tiene,

$$d(\ell_p^n, \ell_{p(E)}^n) \leq n^{\frac{1}{n \log n}} = \exp \frac{1}{n} \leq 1+\varepsilon$$

y así $\ell_{\tilde{p}(E)}^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$. ///

Observación. El Teorema III.b.1 también nos da información sobre la forma en que $\ell_{\tilde{p}(E)}$ es finitamente representable en E. Sea E_n una sucesión de subespacios de E , dim $E_n = n$. Por Teorema III.d.2. E es q-Banach para todo $q < \tilde{p}(E)$. Eligiendo dicho q de forma que $\dfrac{\big(4-p(E)\big)p(E)}{4} < q < p(E)$ estamos en condiciones de aplicar el Teorema III.b.1 y así,

$$\ell_{p(E)}^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E_n \quad \text{siempre que} \quad k \leq C(\varepsilon, q, p(E)\,)\,\big(ST_q(E)\big)^{\frac{1}{\frac{1}{p(E)} - \frac{1}{q}}}$$

///

Finalizamos con un corolario que también tiene su análogo en el contexto de los espacios de Banach y cuya demostración, a la vista de los pasos 1-5, es inmediata.

Corolario III.d.3.

i) $[\tilde{p}(E), 2] \subseteq \{p \mid \ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E \ \forall\, n \in I\!N \ \ \forall\, 0 < \varepsilon < 1\}$.

ii) $\{p \,|\, E$ *es de tipo estable* $p\}$ *es un intervalo abierto.*

///

III.e. INCLUSIONES DE SUBCONJUNTOS DE L_p EN ESPACIOS r-NORMADOS.

En esta sección estudiaremos el siguiente problema: *"Dado E un espacio r-normado de dimensión finita y $0 < \varepsilon < 1$, estimar el mayor $N \in \mathbb{N}$ de forma que todo subconjunto T de L_p, $0 < p < \infty$ de cardinal* card $T = N$ *verifica el diagrama $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$."* En el caso de que $E = \ell_r^n$ $0 < r < \infty$, podemos darle la vuelta al problema y preguntarnos *"dado $0 < \varepsilon < 1$ estimar el menor n tal que todo subconjunto T de L_p, $0 < p < \infty$ de cardinal,* card $T = N$, *verifica $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_r^n$"*. Por supuesto tendremos en general $n = n(N, \varepsilon, p, r)$.

En [J-L] se demuestra que si $T \subset \ell_2$, con card $T = N$, entonces $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_2^{C(\varepsilon)\log N}$. También en [Sch] se da una estimación sobre inclusiones en ℓ_p^n, $1 \leq p < 2$, de subconjuntos de L_p. La estimación que encuentra es $L_p \supset T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_p^{C(\varepsilon) N \log N}$. El autor también conjetura que la relación óptima es $n \sim C(\varepsilon, p)\,(\log N)^{C(p)}$.

Observación. Notemos que tomar $T \subset L_p$ ó $T \subset \ell_p$ es lo mismo, pues por un proceso de aproximación, para todo $T \subset L_p$ y $0 < \varepsilon < 1$ existe $T' \subset \ell_p$ tal que $\mathrm{d}(T, T') \leq 1+\varepsilon$ (ver por ejemplo [T 2], pág. 368). Además si dos funciones $x, x' \in T \subset L_p$ tienen soporte disjunto, también lo tienen sus correspondientes imágenes en T'.

Utilizando la demostración gaussiana del Teorema de Dvoretzsky desarrollada en [Pi 1] extendemos primeramente el resultado en [J-L] a la situación $\ell_2 \supset T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$, con E un espacio normado cualquiera. Tres resultados son necesarios previamente:

Notación. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea $\gamma \colon \Omega \to E$ una variable aleatoria gaussiana. Se definen

$$\sigma(\gamma) = \sup\{\, (\mathbb{E}\,|X(\gamma)\,|^2)^{1/2} \;|\; X \in B_{E^*} \,\}$$

y

$$d(\gamma) = \frac{\mathbb{E}(\,\|\gamma\|^2\,)}{\sigma^2(\gamma)} \left(\geq \left(\frac{\mathbb{E}(\,\|\gamma\|\,)}{\sigma(\gamma)} \right)^2 \right)$$

Teorema III.e.1. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea $\gamma: \Omega \to E$ una variable aleatoria gaussiana. Para todo $t > 0$*

$$\mathbb{P}\{\,|\,\|\gamma\| - \mathbb{E}\|\gamma\|\,| > t\,\mathbb{E}\|\gamma\|\,\} \leq 2\,\exp -\frac{2}{\pi^2}\,t^2\,d(\gamma)$$

Demostración: Ver [Pi 1], Teorema 2.1. ///

El siguiente conocido resultado será usado para estimar $d(\gamma)$. Es una versión del Teorema de Dvoretzsky-Rogers [D-R].

Lema III.e.2. *Para todo espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, $\dim E = n$, existen vectores $x_1, \ldots, x_m$, con $m = [n/2]$ tal que*

$$\|x_i\| \geq \frac{1}{2} \qquad y \qquad \|\sum_{i=1}^{m} a_i\,x_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)^{1/2}$$

$\forall\, i = 1, \ldots, m$ y $(a_i) \in \mathbb{R}^m$.

Demostración: Ver [D-R] ó [Pi 1], Lema 1.8. ///

Lema III.e.3. *Sea E un espacio de Banach de dimensión n. Si $x_1, \ldots, x_m$ son los vectores de E que aparecen en III.e.2., entonces la variable aleatoria $\gamma = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i\,x_i$, donde γ_i son v.a.i.i.d. gaussianas reales, verifica*

i)

$$d(\gamma) \geq C\,\log n$$

ii) Si además E tiene cotipo q, $2 \leq q < \infty$ con constante del cotipo C_q,

$$d(\gamma) \geq \frac{C}{C_q^2}\,n^{2/q}$$

Demostración: Ver [Pi 1], Capítulos 1 y 3. ///

Teorema III.e.4.

i) Existe una constante numérica $C > 0$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < 1$, *todo espacio normado* E *de dimensión* n *y todo subconjunto* $T \in \ell_2$ *de cardinal* card $T = N$, *se verifica el diagrama* $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ *siempre que*

$$\log n > \frac{C}{\varepsilon^2} \log N$$

ii) Para todo $2 \leq q < \infty$ *existe una constante numérica* $C = C(q) > 0$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < 1$, *todo espacio normado* E *de dimensión* n *y cotipo* q *con constante de cotipo* C_q, *y todo subconjunto* $T \in \ell_2$ *de cardinal* card T=N, *se verifica el diagrama* $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} E$ *siempre que*

$$n > \frac{C\, C_q^q}{\varepsilon^q} (\log N)^{\frac{q}{2}}$$

Demostración: Sea $t = (t_i)_1^\infty \in T$. Claramente podemos considerar $T \subset \ell_2^N$. Sean $(\gamma_i)_1^N$ variables gaussianas normalizadas i.i.d. Considerar la variable aleatoria $\gamma_t = \sum_{i=1}^N t_i \, \gamma_i$. Por el Comentario 0.a.11.iii), $\gamma_t \overset{d}{=} \| \, t \, \|_2 \, \gamma_1$.

Sean $x_1, \ldots, x_m \in E$, $m = [n/2]$, los vectores dados por el Lema III.e.2.. Tomar $\gamma_t^1, \ldots, \gamma_t^m$ copias i.i.d. de γ_t, i.e. $\gamma_t^j = \sum_{i=1}^N t_i \, \gamma_{ij}$. Definir por último

$$\Gamma_t = \sum_{j=1}^m \gamma_t^j \, x_j$$

Para todo $s, t \in T$, observamos que

$$\begin{aligned} \| \, \Gamma_t - \Gamma_s \, \| &= \| \sum_{j=1}^m \big(\sum_{i=1}^N (t_i - s_i) \, \gamma_{ij} \big) \, x_j \, \| = \| \sum_{i=1}^N (t_i - s_i) \big(\sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \, x_j \big) \, \| \\ &\overset{d}{=} \| \, t - s \, \|_2 \, \| \sum_{j=1}^m \gamma_{1j} \, x_j \, \| \end{aligned}$$

Estamos interesados en computar la probabilidad del suceso:

$$A_{s,t} = \left\{ \left| \frac{\| \, \Gamma_t - \Gamma_s \, \|}{\| \, t - s \, \|_2} - I\!E \, \| \sum_{j=1}^m \gamma_{1j} \, x_j \, \| \right| \leq \varepsilon \, I\!E \, \| \sum_{j=1}^m \gamma_{1j} \, x_j \, \| \right\}$$

o lo que es lo mismo, por la igualdad en distribución anterior en estimar

$$\mathbb{P}\{A_{s,t}\} = \mathbb{P}\Big\{ \Big| \, \| \sum_{j=1}^{m} \gamma_{1j}\, x_j \, \| - \mathbb{E} \, \| \sum_{j=1}^{m} \gamma_{1j}\, x_j \, \| \, \Big| \leq \varepsilon \, \mathbb{E} \| \sum_{j=1}^{m} \gamma_{1j}\, x_j \, \| \Big\}$$

Por el Teorema III.e.1. $\mathbb{P}\{A_{s,t}\} \geq 1 - 2 \exp - C\, \varepsilon^2\, d(\gamma)$. Aplicando ahora el Lema III.e.3. tenemos para el apartado i),

$$\mathbb{P}\{A_{s,t} \ \mid \forall\, s,t \in T\} \geq 1 - 2 \binom{N}{2} \exp - C\varepsilon^2 \, \log n$$

y para el apartado ii)

$$\mathbb{P}\{A_{s,t} \ \mid \forall\, s,t \in T\} \geq 1 - 2 \binom{N}{2} \exp - \frac{C\varepsilon^2}{C_q^2}\, n^{2/q}$$

Las anteriores cantidades son estrictamente positivas si, respectivamente

$$\log n > \frac{C}{\varepsilon^2} \log N \qquad \text{y} \qquad n > \frac{C\, C_q^q}{\varepsilon^q} (\log N)^{\frac{q}{2}}$$

y en los dos casos aseguramos la existencia de un elemento ω en el espacio de probabilidad tal que la función $f\colon T \to E$ definida como $f(t) = \dfrac{\Gamma_t(\omega)}{\mathbb{E}\| \sum_{j=1}^{m} \gamma_{1j}\, x_j \, \|}$ da la inclusión que satisface la tesis del Teorema.

///

Si $T \subset L_p$ con $0 < p < 2$ las inclusiones que se obtienen son menos satisfactorias. Mediante las técnicas desarrolladas en las secciones III.a. y III.b. encontraremos inclusiones de subconjuntos $T \subset L_p$, card $T = N$ en ℓ_r^n con $0 < r \leq p < 2$, $0 < r \leq 1$. En el caso $r < p$ conseguiremos una relación óptima entre n y N cuando sobre T las normas $\| \cdot \|_r$ y $\| \cdot \|_p$ sean comparables. Para $r = p$ mejoraremos las estimaciones dadas en [Sch] aunque sólamente para conjuntos particulares.

Notación. Sean r y p tales que $0 < r \leq p < 2$, $0 < r \leq 1$. Dado un subconjunto finito $T \subset \ell_r$ definir $D = \sup\limits_{t,s \in T} \dfrac{\|t - s\|_r}{\|t - s\|_p}$.

Teorema III.e.5. *Para todo r, p tales que $0 < r < p < 2$, $0 < r \leq 1$ existen constantes $C, C', C'' > 0$ dependientes únicamente de r y p tal que para todo $0 <$*

$\varepsilon < 1$ y todo subconjunto finito T de ℓ_p con cardinal card $T = N$, *el diagrama $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_r^n$ se verifica*

i) Si $0 < \dfrac{p(4-p)}{4} < r < p$, siempre que

$$D^{q'r} + \log N < C\varepsilon^{q'}\, n$$

ii) Si $r \leq \dfrac{p(4-p)}{4}$, siempre que

$$D^{q'r} + \log N < C'\varepsilon^{C''}\, n$$

donde $q = \frac{p}{r}$ y q' el exponente conjugado de q.

Demostración: Podemos suponer, puesto que $\bigcup\limits_{n\geq 1} \ell_p^n$ es denso en ℓ_p, que $T \subset \ell_p^M$ para un $M = M(\varepsilon, N)$ suficientemente grande. Sólamente hay que demostrar el primer apartado pues ii) es consecuencia inmediata de i), del Corolario III.b.5. y la propiedad transitiva de las inclusiones. Para simplificar la notación todas las constantes que aparezcan en la demostración que dependan únicamente de p y r serán denotadas con la misma letra C.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ sea la variable aleatoria $Y\colon \Omega \to \ell_r^n$ con función de distribución $Y \overset{d}{=} \dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\delta_{e_i} + \delta_{-e_i})$, con $e_i = (0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots 0) \in \ell_r^n$. Con la misma notación introducida en la sección III.a.1. definir para todo $t = (t_i)_1^M \in T$,

$$\Theta_t = \sum_{i=1}^{M} t_i S_i \qquad \text{y} \qquad \tilde{\Theta}_t = \sum_{i=1}^{M} t_i \tilde{S}_i$$

Por el Teorema III.a.9. y el Comentario 0.a.11., es claro que $\mathbb{E}\|S\|_r^r = Cn^{1/q'}$. Para todo $t, s \in T$ consideramos las variables $\Theta_t - \Theta_s$ y $\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s$. Por el Comentario III.a.4.vi) tenemos

$$\|\Theta_t - \Theta_s\|_r \overset{d}{=} \|t-s\|_p\, \|S\|_r \qquad \text{y} \qquad \mathbb{E}\Big(\,\|\Theta_t - \Theta_s\|_r^r\,\Big) = \|t-s\|_p^r\, C\, n^{\frac{1}{q'}}$$

Procediendo como en la demostración del Teorema III.b.1.es fácil ver que

$$\left|\, \mathbb{E}\Big(\,\|\Theta_t - \Theta_s\|_r^r\,\Big) - \mathbb{E}\Big(\,\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_r^r\,\Big) \right| \leq C\, \|t-s\|_r^r$$

es decir

$$\frac{1}{\|t-s\|_p^r}\left| I\!E\Big(\|\Theta_t - \Theta_s\|_r^r \Big) - I\!E\Big(\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_r^r \Big) \right| \le C\, D^r$$

Los cálculos realizados más el Lema III.b.4., hacen que

$$I\!P\left\{ \left| \frac{\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_r^r}{\|t-s\|_p^r} - \frac{I\!E\Big(\|\Theta_t - \Theta_s\|_r^r \Big)}{\|t-s\|_p^r} \right| > \varepsilon\, \frac{I\!E\Big(\|\Theta_t - \Theta_s\|_r^r \Big)}{\|t-s\|_p^r} \right\}$$

$$\le I\!P\left\{ \left| \frac{\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_r^r - I\!E\Big(\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_r^r \Big)}{\|t-s\|_p^r} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{I\!E\Big(\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_r^r \Big) - I\!E\Big(\|\Theta_t - \Theta_s\|_r^r \Big)}{\|t-s\|_p^r} \right| > C\varepsilon\, n^{1/q'} \right\}$$

$$\le I\!P\left\{ \left| \frac{\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_r^r - I\!E\Big(\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_r^r \Big)}{\|t-s\|_p^r} \right| > C\left(\varepsilon n^{1/q'} - D^r\right) \right\}$$

$$\le 2\, \exp -C\big(\varepsilon n^{1/q'} - D^r\big)^{q'}$$

Argumentando como siempre, tenemos estimada la probabilidad

$$I\!P\left\{ \left| \frac{\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_r^r}{\|t-s\|_p^r} - I\!E\big(\|S\|_r^r \big) \right| \le \varepsilon\, I\!E\big(\|S\|_r^r \big) \;\mid\; \forall t,s \in T \right\}$$

$$\ge 1 - \binom{N}{2}\, 2 \exp -C\big(\varepsilon n^{1/q'} - D^r\big)^{q'}$$

Si esa probabilidad es positiva existe un elemento ω en el espacio de probabilidad tal que

$$I\!E\big(\|S\|_r^r \big)\,(1-\varepsilon) \le \frac{\|\tilde{\Theta}_t(\omega) - \tilde{\Theta}_s(\omega)\|_r^r}{\|t-s\|_p^r} \le (1+\varepsilon) I\!E\big(\|S\|_r^r \big) \qquad \forall\ t,s \in T$$

Concluir usando el Lema III.a.15 para quitar el exponente r. Para cada ε, la función $f\colon T \to \ell_r^n$ que produce la inclusión es $f(t) = \dfrac{\tilde{\Theta}_t(\omega)}{\big(I\!E\big(\|S\|_r^r \big)\big)^{1/r}}$. Finalmente, teniendo en cuenta también la desigualdad numérica 2. en 0.b., comprobamos que la probabilidad del suceso anterior es positiva si $D^{q'r} + \log N < C\varepsilon^{q'}\, n$.

///

Observar que cuanto más pequeño sea D mejor estimación conseguiremos. En el Corolario a continuación obtenemos la mejor estimación posible. Antes de enunciarlo necesitamos realizar una nueva

Observación. Sea $T \subset \ell_p$ un conjunto numerable de puntos con soportes disjuntos dos a dos. La aplicación $f\colon T \to \ell_p$ definida por $f(t_i) = \|t_i\|_p\, e_i$ es una isometría. En efecto, para todo par de puntos $t_i, t_j \in T$,

$$\|t_i - t_j\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |t_i(k)|^p + |t_j(k)|^p = \| \ \|t_i\|_p e_i - \|t_j\|_p e_j \ \|_p^p = \|f(t_i) - f(t_j)\|_p^p$$

Observación. Si $T = \{\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_N e_N\}$, entonces $\displaystyle\sup_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{\|\lambda_i e_i - \lambda_j e_j\|_r}{\|\lambda_i e_i - \lambda_j e_j\|_p} \leq 2^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}$; este hecho es consecuencia inmediata de la desigualdad numérica 1. en 0.b..

Corolario III.e.6. *Para todo r, p tales que $0 < r < p < 2$, $0 < r \leq 1$ existen constantes $C, C', C'' > 0$ dependientes únicamente de r y p tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo subconjunto finito T de puntos de L_p con soportes disjuntos dos a dos y cardinal* card $T = N$, *el diagrama $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_r^n$ se verifica*

i) Si $0 < \dfrac{(4-p)p}{4} < r < p$, siempre que

$$n > \frac{C}{\varepsilon^{q'}} \log N$$

ii) Si $r \leq \dfrac{(4-p)p}{4}$, siempre que

$$n > \frac{C'}{\varepsilon^{C''}} \log N$$

donde $q = \dfrac{p}{r}$ y $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Demostración: Por las observaciones anteriores podemos suponer que el conjunto T es de la forma $T = \{\lambda_1 e_1, \dots \lambda_N e_N\} \subset \ell_p^N$ y $D \leq 2^{1/q'}$. Usar el Teorema III.e.5.

///

Observación. La relación entre n y N obtenida en III.e.6. es la mejor posible. En efecto, si existe una función $f(N, \varepsilon)$ tal que $\ell_p \supset T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_r^n$ para todo $T \subset \ell_p$ siempre que $n > f(N,\varepsilon)$, en particular será cierto para $T = \{e_1, \ldots, e_N\}$ donde e_i son los vectores de la base canónica de ℓ_p. Para todo $1 \leq i \neq j \leq N$, $\|e_i - e_j\|_p =$ cte. y la Proposición II.a.6. asegura que $f(N,\varepsilon) \leq C(\varepsilon)\log N$.

Siguiendo el mismo esquema de demostración que en el Teorema III.e.5., obtenemos inclusiones de ciertos conjuntos de puntos de ℓ_p en ℓ_p^n para todo $0 < p < 2$.

Teorema III.e.7.

i) Para todo $1 < p < 2$ *existe una constante* $C = C(p) > 0$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < 1$ *y todo subconjunto finito* T *de* ℓ_p *con cardinal* card $T = N$, *el diagrama* $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_p^n$ *se verifica siempre que*

$$D^p + (\log N)^{\frac{p}{p'}} < C\varepsilon^p \log n$$

ii) Para todo $0 < p \leq 1$ *y* $0 < \delta < \dfrac{p}{4-p}$, *existe una constante* $C = C(p,\delta) > 0$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < 1$ *y todo subconjunto finito* T *de* ℓ_p *con cardinal* card $T = N$, *el diagrama* $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_p^n$ *se verifica siempre que*

$$D^p + (\log N)^{\delta} < C\varepsilon^{1+\delta} \log n$$

donde $r = 1$ *en i) y* $r = \dfrac{p}{1+\delta}$ *en ii).*

Demostración: . Por la restricción sobre δ, tenemos $0 < \dfrac{p(4-p)}{4} < r < p$. Escribir $q = \dfrac{p}{r} (= 1+\delta)$ y sea q' el exponente conjugado de q, es decir $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. Suponer $T \subset \ell_p^M$ para un M suficientemente grande. Por el Comentario III.a.4.iv), $ST_p(\ell_p^n) = C_p(\log n)^{1/p}$, $\forall\ 0 < p < 2$. Por tanto existen vectores $x_1, \ldots, x_k \in B_{\ell_p^n}$ tales que $\|\sum_{i=1}^{k} \theta_i\, x_i\|_p \geq \dfrac{C_p}{2}(\log n)^{1/p} k^{1/p}$ donde θ_i son v.a.i.i.d. p-estables. Con la notación habitual, definir para todo $t = (t_i)_1^M \in T$,

$$\Theta_t = \sum_{i=1}^{M} t_i S_i \qquad \text{y} \qquad \tilde{\Theta}_t = \sum_{i=1}^{M} t_i \tilde{S}_i$$

Por el Teorema III.a.9., $I\!E\|S\|_p^r \geq C\,(\log n)^{r/p}$. Para todo $t, s \in T$ consideramos las variables $\Theta_t - \Theta_s$ y $\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s$. Por el Comentario III.a.4.vi),

$$\|\Theta_t - \Theta_s\|_p \stackrel{d}{=} \|t-s\|_p\,\|S\|_p \qquad \text{y} \qquad I\!E\Big(\,\|\Theta_t - \Theta_s\|_p^r\,\Big) \geq \|t-s\|_p^r\,C\,(\log n)^{r/p}$$

Procediendo como en la demostración del Teorema III.b.1.es fácil ver que

$$\left|\,I\!E\Big(\,\|\Theta_t - \Theta_s\|_p^r\,\Big) - I\!E\Big(\,\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_p^r\,\Big)\,\right| \leq C\,\|t-s\|_r^r$$

es decir

$$\frac{1}{\|t-s\|_p^r}\left|\,I\!E\Big(\,\|\Theta_t - \Theta_s\|_p^r\,\Big) - I\!E\Big(\,\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_p^r\,\Big)\,\right| \leq C\,D^r$$

Continuando como en la demostración del Teorema III.e.5., tenemos

$$I\!P\left\{\,\left|\,\frac{\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_p^r}{\|t-s\|_p^r} - \frac{I\!E\Big(\,\|\Theta_t - \Theta_s\|_p^r\,\Big)}{\|t-s\|_p^r}\,\right| > \varepsilon\,\frac{I\!E\Big(\,\|\Theta_t - \Theta_s\|_p^r\,\Big)}{\|t-s\|_p^r}\right\}$$
$$\leq 2\,\exp -C\big(\varepsilon(\log n)^{r/p} - D^r\big)^{q'}$$

Por tanto,

$$I\!P\left\{\,\left|\,\frac{\|\tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_s\|_p^r}{\|t-s\|_p^r} - I\!E\big(\,\|S\|_p^r\,\big)\,\right| \leq \varepsilon\,I\!E\big(\,\|S\|_p^r\,\big)\ \mid\ \forall t, s \in T\right\}$$
$$\geq 1 - \binom{N}{2}\,2\,\exp -C\big(\varepsilon(\log n)^{r/p} - D^r\big)^{q'}$$

Si esa probabilidad es positiva existe un elemento ω en el espacio de probabilidad tal que

$$I\!E\big(\,\|S\|_p^r\,\big)\,(1-\varepsilon) \leq \frac{\|\tilde{\Theta}_t(\omega) - \tilde{\Theta}_s(\omega)\|_p^r}{\|t-s\|_p^r} \leq (1+\varepsilon)I\!E\big(\,\|S\|_p^r\,\big) \qquad \forall\ t, s \in T$$

Concluir usando el Lema III.a.15. para quitar el exponente r. Para cada ε, la función $f\colon T \to \ell_p^n$ que produce la inclusión es $f(t) = \dfrac{\tilde{\Theta}_t(\omega)}{\big(I\!E\big(\,\|S\|_r^r\,\big)\big)^{1/r}}$. Finalmente comprobamos que la probabilidad del suceso anterior es positiva si $D^r + (\log N)^{\frac{1}{q'}} < C\varepsilon\,(\log n)^{1/q}$, es decir, si $D^p + (\log N)^{\frac{q}{q'}} < C\varepsilon^q\,\log n$. Si $1 < p < 2$, entonces $q = p$ y $q' = p'$ que demuestra i). Si $0 < p \leq 1$, observar que $q = 1 + \delta$ y $\dfrac{q}{q'} = \delta$.

///

En el caso de que T esté formado por puntos de soporte disjunto dos a dos podemos computar D fácilmente y dar el siguiente Corolario análogo al Corolario III.e.6.

Corolario III.e.8. *Para todo* $1 < p < 2$ *existe una constante* $C = C(p) > 0$ *tal que, para todo* $0 < \varepsilon < 1$ *y todo subconjunto finito* T *de puntos* L_p *con soporte disjunto dos a dos y cardinal* card $T = N$, *el diagrama* $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_p^n$ *se verifica siempre que*

$$\log n > \frac{C}{\varepsilon^p} (\log N)^{\frac{p}{p'}}$$

Demostración: Podemos suponer que el conjunto T es de la forma $T = \{\lambda_1 e_1, \ldots \lambda_N e_N\} \subset \ell_p^N$; para tal T, $D \leq 2^{1/q'}$. Usar el Teorema III.e.7.

///

Observación. Si $1 < p < 2$, escribimos $f(N) = \exp\left[(\log N)^{\frac{p}{p'}}\right]$. Es inmediato comprobar que $(\log N)^a \ll f(N) \ll N^b$ para todo $a, b > 0$. Por tanto la relación $f(N)$ es mejor que $N \log N$, que es la obtenida por Schechtman en [Sch] para conjuntos T cualesquiera, aunque es peor que la conjeturada por él mismo en el mismo artículo, $(\log N)^{C(p)}$.

Comentario III.e.9. Si $0 < p \leq 1$, la estimación que se obtiene al aplicar el Teorema III.e.7. a un conjunto T de puntos con soporte mutuamente disjunto es $\log n > \dfrac{C}{\varepsilon^{1+\delta}} (\log N)^{\delta}$, $\forall\ \delta > 0$. Esta puede ser sensiblemente mejorada haciendo uso de las técnicas de III.c.

Corolario III.e.10. *Para todo* $0 < p \leq 1$ *y* $0 < \varepsilon < 1$, *existen constantes* $C, C' > 0$ *dependientes de* p *y* ε *tal que, para todo subconjunto finito* T *de puntos de* L_p *con soporte disjunto dos a dos y cardinal* card $T = N$, *el diagrama* $T \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_p^n$ *se verifica siempre que*

$$n > C (\log N)^{C'}$$

Demostración: Suponer $T = \{\lambda_1 e_1, \ldots \lambda_N e_N\} \subset \ell_p^N$. Por el Comentario III.a.4.iv), $ST_p(\ell_p^n) = C_p (\log n)^{1/p}$, $\forall\ 0 < p \leq 1$. Por tanto existen en $B_{\ell_p^n}$ vectores

$x_1,\dots,x_k$ tales que $\Big(I\!E \, \| \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \|_p^{p/2}\Big)^{2/p} \geq \dfrac{C_p}{2} (\log n)^{1/p} k^{1/p}$ donde θ_i son v.a.i.i.d. p-estables. Para abreviar escribimos

$$M = \Big(I\!E \, \| \sum_{i=1}^{k} \theta_i \, x_i \, \|_p^{p/2}\Big)^{2/p} k^{-1/p} C_p^{-1} \geq (2C_p)^{-1} \, (\log n)^{1/p}$$

Con la notación de III.c., sean para todo $1 \leq i \leq N$, las variables $\Theta_i = \lambda_i \, \phi_i$. Ahora para todo $1 \leq i \neq j \leq N$ consideramos $\Theta_i - \Theta_j$. La desigualdad de desviación del Lema III.c.4. tiene en esta situación la forma

$$I\!P \Bigg\{ \left| \frac{\|\Theta_i - \Theta_j\|_p^p}{\|\lambda_i \, e_i - \lambda_j \, e_j\|_p^p} - \frac{I\!E \Big(\|\Theta_i - \Theta_j\|_p^p \Big)}{\|\lambda_i \, e_i - \lambda_j \, e_j\|_p^p} \right| > t \Bigg\} \leq K \, \exp -(\exp ct) \qquad \forall \, t > 0$$

El otro resultado esencial, el Lema III.c.5., se particulariza aquí como sigue: "*Sean* $\delta > 0$, $0 < p \leq 1$. *Existen funciones* $m = m(\delta,p)$, $C(\delta,p)$ *y* $\varphi(\delta,p)$ *con* $\varphi(\delta,p) \to 0$ *cuando* $\delta \to 0$, *tal que si* $\log 2 \leq C(\delta,p) \, \log n$, *entonces*

$$\left| \frac{I\!E \Big(\|\Theta_i - \Theta_j\|_p^p \Big)}{\|\lambda_i \, e_i - \lambda_j e_j\|_p^p} - M^p \right| < M^p \varphi(\delta,p)\text{"}$$

Utilizando estos resultados concluímos como en el Teorema III.e.5.. Para todo $0 < \varepsilon < 1$ sean $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ y $\delta' = \delta'(\varepsilon,p)$ tales que $\delta = \varphi(\delta',p) + \delta'$. Si $\log 2 \leq C(\delta',p) \, \log n$. Para todo $1 \leq i \neq j \leq N$ tenemos

$$\begin{aligned}
& I\!P \Bigg\{ \left| \frac{\|\Theta_i - \Theta_j\|_p^p}{\|\lambda_i \, e_i - \lambda_j e_j\|_p^p} - M^p \right| > \delta \, M^p \Bigg\} \\
& \leq I\!P \Bigg\{ \left| \frac{\|\Theta_i - \Theta_j\|_p^p}{\|\lambda_i \, e_i - \lambda_j e_j\|_p^p} - \frac{I\!E \Big(\|\Theta_i - \Theta_j\|_p^p \Big)}{\|\lambda_i \, e_i - \lambda_j e_j\|_p^p} \right| + \\
& \qquad\qquad + \left| \frac{I\!E \Big(\|\Theta_i - \Theta_j\|_p^p \Big)}{\|\lambda_i \, e_i - \lambda_j e_j\|_p^p} - M^p \right| > \varphi(\delta',p) M^p + \delta' M^p \Bigg\} \\
& \leq I\!P \Bigg\{ \left| \frac{\|\Theta_i - \Theta_j\|_p^p}{\|\lambda_i \, e_i - \lambda_j e_j\|_p^p} - \frac{I\!E \Big(\|\Theta_i - \Theta_j\|_p^p \Big)}{\|\lambda_i \, e_i - \lambda_j e_j\|_p^p} \right| > \delta' \, M^p \Bigg\} \leq K \exp -(\exp C\delta' M^p) \\
& \qquad\qquad \leq K \exp -(\exp C\delta' \, \log n) = K \exp -n^{C\delta'}
\end{aligned}$$

Por tanto si $\log 2 \leq C \log n$,

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \frac{\|\Theta_i - \Theta_j\|_p^p}{\|\lambda_i e_i - \lambda_j e_j\|_p^p} - M^p \right| \leq \delta M^p \mid \forall\, 1 \leq i \neq j \leq N \right\} \geq 1 - K \binom{N}{2} \exp -n^{C\delta'}$$

La probabilidad de este suceso es positiva si $n > C (\log N)^{C'}$. Observar que para tales n y N, y eligiendo convenientemente la constante C, la restricción $\log 2 \leq C \log n$ no es tal. Para finalizar, usando el Lema III.a.15. para quitar el exponente p, para cada ε, la función que produce la inclusión es $f(\lambda_i e_i) = \dfrac{\Theta_i(\omega)}{M}$.

///

BIBLIOGRAFIA

[Ac] **Acosta, A. de,** *"Inequalities for B-valued random vectors with applications to the strong law of large numbers".* Ann. Probab. **9**, (1981), 157-161.

[Al-M] **Alon, N., Milman, V.D.** *"Embedding of ℓ_∞^n in finite dimensional Banach spaces".* Israel Journal of Math. **45**, (1983), 265-280.

[Am-M 1] **Amir, D., Milman, V.D.** *"Unconditional and symmetric sets in n-dimensional normed spaces".* Israel Journal of Math. **37**, (1980), 3-20.

[Am-M 2] **Amir, D., Milman, V.D.** *"A quantitative finite-dimensional Krivine Theorem".* Israel Journal of Math. **50**, (1985), 1-12.

[B] **Badrikian, A** *"Prolégoménes au calcul de probabilités dans les Banach".* Lecture Notes in Mathematics **539**. Lección 1. Springer-Verlag 1976.

[Ba] **Ball, K.** *"Inequalities and sphere-packing in ℓ_p".* Israel Journal of Math. **58**, (1987), 243-256.

[B-B] **Bastero, J., Bernués J.** *"Applications of Talagrand's deviation inequality".* Aparecerá publicado en Mathematische Nachrichten.

[B-B-K] **Bastero, J., Bernués J., Kalton N.** *"Embedding ℓ_∞^n−cubes in finite dimensional 1-subsymmetric spaces".* Revista Matemática Univ. Complutense Madrid **2** (n$^{\underline{o}}$ suplementario), (1989), 47-52.

[Be] **Beauzamy, B.** *"Introduction to Banach Spaces and their geometry".* North-Holland 1985.

[Ber] **Berry, A.C.** *"The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates".* Trans. A.M.S. **49**, (1940), 122-136.

[B-F-M] **Bourgain, J., Figiel, T., Milman, V.D.** *"On Hilbertian Subsets of Finite Metric Spaces".* Israel Journal of Math. **55**, № 2, (1986), 147-152.

[B-L-M] **Bourgain, J., Lindenstrauss, J., Milman, V.D.** *"Approximation of zonoids by zonotopes".* Acta Math. **162**, (1989), 73-141.

[B-M-W] **Bourgain, J., Milman, V., Wolfson, H.** *"On type of metric spaces".* Trans. A.M.S. **249**, (1), (1986), 295-317.

[Di] **Dilworth, S. J.** *"The dimension of Euclidean subspaces of quasi-normed spaces".* Math. Proc. Cambridge Phil Soc. **97**, (1985), 311-320.

[Do] **Domínguez, T.** *"Some properties of the set and ball measures of non-compactness and applications".* J. London Math. Soc.(2) **34**, (1986), 120-128.

[Dv] **Dvoretzky, A.** *"Some results on convex bodies and Banach spaces".* Proc. Int. Symp. on linear spaces. Jerusalem 1961. 123-160.

[D-R] **Dvoretzky, A. Rogers, C.A.** *"Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces".* Proc. Nat. Acad. Sci. **36**, (1950), 192-197.

[F] **Feller, W.** *"An introduction to probability theory and its applications".* Vol. II. Wiley & Sons 1966.

[F-L-M] **Figiel, T., Lindenstrauss, J., Milman, V.D.** *"The dimension of almost spherical sections of convex bodies".* Acta Math. **139**, (1977), 53-94.

[G-L] **Gordon, Y., Lewis, D.R.** *"Random subspaces which miss sets in R^n and Dvoretzky's theorem on quasi-normed spaces".* Preprint.

[G-M] **Gromov, M., Milman, V.D.** *"A topological application of the isoperimetric inequality".* American Journal of Math. **105**, (1983), 843-854.

[H] **Hoffmann-Jorgensen, J.** *"Sums of independent Banach random variables".* Studia Math. **52**, (1974), 159-185.

[H-H] **Hall, P., Heyde, C.C.** *"Martingale Limit Theory and its Application".* Academic Press 1980.

[H-S] **Hewitt, E., Stomberg, K.** *"Real and abstract analisis".* G.T.M. **25**. Springer-Verlag 1965.

[J-L] **Johnson, W.B., Lindenstrauss, J.** *"Extension of Lipschitz mappings into a Hilbert space".* Contemp. Math. **26**, (1984), 189-206.

[J-S 1] **Johnson, W.B., Schechtman, G.** *"Embedding ℓ_p^m into ℓ_1^n".* Acta Math. **49**, (1982), 71-85.

[J-S 2] **Johnson, W.B., Schechtman, G.** *"Remarks on Talagrand's deviation inequality for Rademacher functions".* (Aparecerá en Longhorn Notes).

[Ka] **Kahane, J.P.** *"Some random series of functions".* Heath Mathematical Monographs. Rayteon E.C. 1968.

[K-1] **Kalton, N.J.** *"The convexity type of quasi-Banach spaces".* Sin publicar.

[K-2] **Kalton, N.J.** *"Convexity, type and the three space problem".* Studia Math. **69**, (1980-81), 247-287.

[K-P-R] **Kalton, N.J. Peck, N.T., Rogers, J.W.** *"An F-space sampler".* LNS **89**. Cambridge Univ. Press 1984.

[L-R] **Laha, R.G., Rohatgi, V.K.** *"Probability theory".* Wiley 1979.

[L-T 1] **Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.** *"Classical Banach spaces I".* Springer Verlag 1977.

[L-T 2] **Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.** *"Classical Banach spaces II"*. Springer Verlag 1977.

[Lo] **Loewe, M.** *"Probability theory I"*. Springer Verlag 1977.

[Ma] **Maligranda, L.** *"Indices and interpolation"*. Dissertationes Math. **234**, (1985), 1-49.

[Mar-P] **Marcus, M., Pisier, G.** *"Characterizations of almost surely continuous p-stable random Fourier series and strongly stationary processes"*. Acta Math. **152**, (1984), 245-301.

[Mau] **Maurey, B.** *"Construction de suites symétriques"*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B **288**, (1979), A679-681.

[Mau-P] **Maurey, B., Pisier, G.** *"Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et géométrie des espaces de Banach"*. Studia Math **58**, (1976), 45-90.

[Mi-P] **Milman, V.D., Pisier, G.** *"Banach spaces with a weak cotype 2 property"*. Israel Journal of Math. **54**, (1986), 139-158.

[Mi] **Milman, V.D.** *"A new proof of the theorem of A. Dvoretzky on sections of convex bodies "*. Functional Anal. and Appl. **5** (1971), 28-37.

[M-S] **Milman, V.D., Schechtman, G.** *"Asymtotic theory of finite dimensional normed spaces"*. Lecture Notes in Mathematics **1200**. Springer-Verlag 1986.

[Pe] **Petrov, V.** *"Sums de independent random variables"*. Springer-Verlag 1975.

[Pet] **Petty, G.M.** *"Equilateral sets in Minkowski spaces"*. Proc. A.M.S. **29**, Nº 2, (1971) 369-374.

[Pi 1] **Pisier, G.** *"Probabilistic Methods in the Geometry of Banach Spaces"*. Lect. Notes in Math. **1206**, 167-242. Springer 1986.

[Pi 2] **Pisier, G.** *"On the dimension of the ℓ_p^n subspaces of Banach spaces, for $1 \leq p < 2$"*. Trans. AMS. **276**, Nº 1, (1983) 201-211.

[Pi 3] **Pisier, G.** *"Type des espaces normes"*. Seminaire Maurey-Schwartz 1973-74. Exposé III.

[Pi 4] **Pisier, G.** *"Conferencia en la Universidad de Murcia"*. 1985.

[Ro] **Rolewicz, S.** *"On a certain class of linear metric spaces"*. Bull. Acad. Polon. Sci. C. III. **5**, (1957), 471-473.

[Sch] **Schetchman, G.** *"More on embedding subspaces of L_p in ℓ_r"*. Compositio Math. **61**, (1987), 159-169.

[Sz] **Szarek S. J.** *"On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of ℓ_1^n"*. Bull. Acad. Sci. Pol. **26**, (1978), 691-694.

[T 1] **Talagrand, M.** *"An isoperimetric theorem on the cube and the Khintchine-Kahane inequalities"*. Proc. of the A.M.S. **104**, (1988), 86-90.

[T 2] **Talagrand, M.** *"Embedding subspaces of L_1 into ℓ_1^N"*. Proc. of the A.M.S. **108**, (1990), 363-369.

[T 3] **Talagrand, M.** *"Isoperimetric inequality for $\{0,1\}^n$ with applications to deviation inequalities"*. Preprint.

[Y] **Yurinskii, V.** *"Exponential bounds for large deviations"*. Theor. Probab. Appl. **19**, (1974), 154-155.