

# **REDES DE INTERACCIÓN ECOLÓGICAS: BALANCE Y FRUSTRACIÓN EN REDES COMPLEJAS CON SIGNO**

Trabajo Fin de Máster  
Andrea Girón Dolader

Directores  
Jesús Gómez Gardeñes  
Hugo Saiz Bustamante

Física de la Materia Condensada  
Universidad de Zaragoza  
Junio 2015

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Teoría de redes</b>	<b>5</b>
2.1. Modularidad . . . . .	6
2.2. Frustración y balance estructural . . . . .	8
2.3. Triadas . . . . .	9
<b>3. Aplicación</b>	<b>10</b>
3.1. Redes ecológicas . . . . .	10
3.2. Algoritmo . . . . .	12
3.3. Modelo nulo . . . . .	13
3.4. Resultados . . . . .	15
<b>4. Conclusiones</b>	<b>18</b>
<b>5. Agradecimientos</b>	<b>19</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>20</b>

## 1. Introducción

Durante los últimos 15 años diversos métodos en física estadística y modelos no lineales han sido reformulados con el fin de incluir patrones de interacción realistas entre los constituyentes de sistemas complejos [1–3]. Esta reformulación surge a raíz de la disponibilidad de conjuntos de datos que representan las relaciones entre los constituyentes de sistemas macroscópicos de diversa naturaleza, como tecnológicos, biológicos y sociales y su representación mediante redes complejas [4, 5]. El estudio de redes ha permitido analizar tanto las interacciones entre los elementos que forman el sistema como el papel que juegan en su organización y en su funcionamiento [6].

Normalmente, estas redes se construyen con un solo tipo de interacción entre sus componentes, sin tener en cuenta que en los sistemas reales pueden existir diferentes tipos de interacciones entre ellos. Por ejemplo, en comunidades ecológicas los organismos que forman parte del sistema pueden interactuar entre ellos de forma positiva (mutualismo, facilitación) o de forma negativa (competición, parasitismo) dándose todas las interacciones al mismo tiempo dentro de la misma comunidad.

Las redes que combinan interacciones positivas y negativas se denominan redes con signo y han sido estudiadas de manera teórica [7, 8] y aplicadas sobre todo a las redes sociales. Sin embargo, no se tienen muchos ejemplos aplicados a otras áreas como, por ejemplo, los sistemas ecológicos.

Estas redes presentan una propiedad, denominada balance estructural, basada en la organización de sus nodos en subgrupos [7]. Una red está balanceada cuando se puede dividir en grupos de nodos de forma que en el interior de cada grupo solo existan conexiones positivas y nodos pertenecientes a distintos grupos estén conectados de forma negativa [9]. El balance estructural se ha relacionado con la estabilidad de redes sociales ya que predice la aparición de conflictos o tensiones que pueden provocar alteraciones en el sistema [7]. Por ejemplo, se ha estudiado la evolución del balance estructural entre las alianzas de los países que participaron en la Primera Guerra Mundial [10]. El resultado indica que la guerra estalló cuando todos los países tenían un alto grado de balance y el sistema presentaba balance estructural (se podía dividir en dos grupos enemistados entre sí y formados por países aliados) (Figura 1).

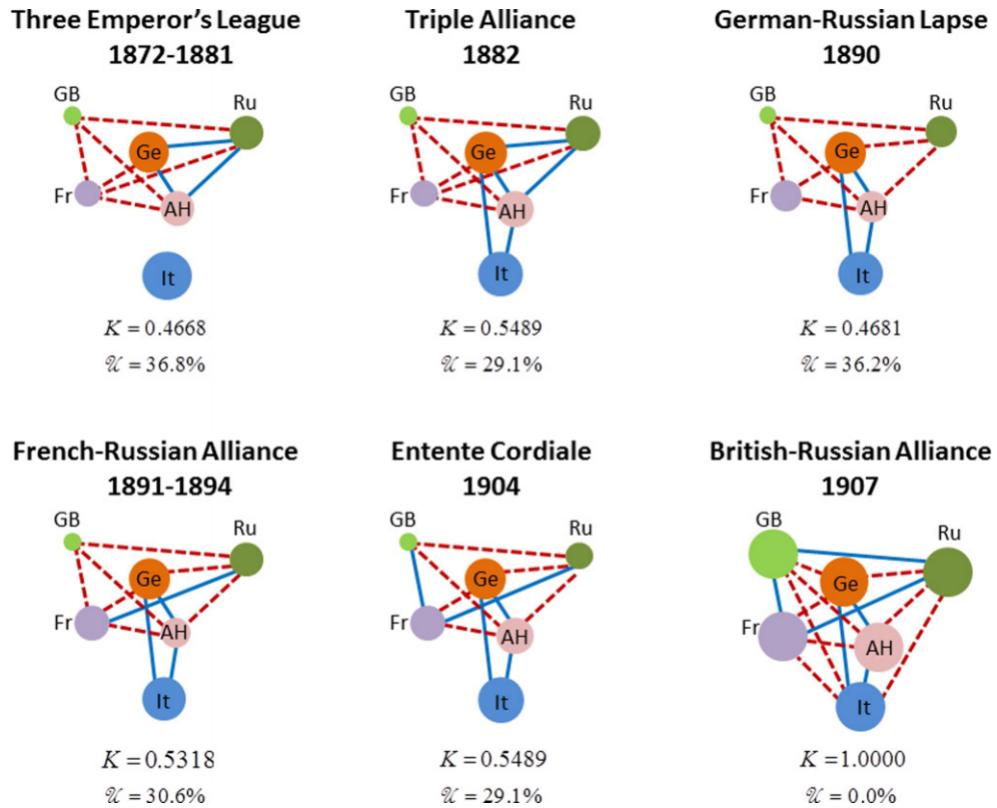
Normalmente las redes reales no son capaces de organizarse de una forma perfectamente balanceada y presentan links negativos entre nodos pertenecientes al mismo grupo y links positivos entre nodos de distinto grupo [8]. Estos links expresan el grado de frustración del sistema. Se ha visto en trabajos previos que los sistemas sociales (tanto de humanos como de animales) presentan un mayor balance estructural (menor frustración) que el esperado por azar. Además, se ha planteado la hipótesis de que la evolución promueve la estabilidad del sistema y la evolución de la cooperación mediante la eliminación de estos enlaces que contribuyen a la frustración del sistema [11–13]. Sin embargo, la escasez de redes reales que incluyan conexiones positivas y negativas ha impedido el estudio de esta hipótesis más allá de las redes sociales.

Las comunidades ecológicas suponen un buen punto de partida para estudiar el balance en redes con signo en la naturaleza. En estas comunidades, las diferentes especies que conviven en un ecosistema interactúan entre sí de forma tanto positiva como negativa. Por ejemplo, en zonas áridas y con pocos recursos, hay especies que se benefician de micro-ecosistemas creados por otras especies en los que las condiciones son más favorables, aumentando así su

supervivencia [14]. Por otra parte, las diferentes especies pueden competir entre sí por el espacio y los recursos [15]. Estas interacciones ocurren a escala local y tienen efecto en el patrón espacial de las especies de plantas, haciendo posible establecer una relación entre la distribución espacial de las especies y las interacciones entre ellas.

El objetivo de este trabajo es estudiar el balance estructural de distintas redes ecológicas construidas a partir del patrón de asociación espacial entre las especies que lo forman. Para ello hemos analizado 31 redes de diferentes comunidades ecológicas en España pertenecientes a ecosistemas mediterráneos y alpinos. Además, hemos desarrollado un algoritmo que combina algunas propiedades relacionadas con el balance estructural, como la modularidad y la frustración, con el fin de obtener un resultado óptimo en el menor tiempo posible. Por último, hemos analizado el balance estructural a nivel local mediante la proporción de triadas balanceadas y no balanceadas que encontramos en cada red. Estudios sociológicos plantean que las triadas no balanceadas son fuentes de estrés para el sistema y provocan la aparición de conflictos [7].

Nuestra hipótesis es la siguiente: si el balance estructural promueve la estabilidad de los sistemas, las redes ecológicas deben estar balanceadas. Específicamente esperamos que, independientemente del tipo de comunidad ecológica, las redes presenten una frustración menor y un menor número de triadas no balanceadas que lo esperado por azar.



**Figura 1:** Evolución del balance global entre los seis participantes principales de la Primera Guerra Mundial a lo largo del tiempo. Las líneas azules representan alianzas mientras que las líneas rojas discontinuas representan enemistad. El grado de balance de cada país esta representado por el tamaño del círculo. GB representa Gran Bretaña; Ru, Rusia; Ge, Alemania; Fr, Francia; AH, Imperio Austro-Húngaro y It, Italia. [10]

## 2. Teoría de redes

Una red es, en su forma más simple, una colección de puntos que llamamos vértices o nodos unidos entre sí por links [5] (Figura 2). Diferentes sistemas en física, biología o ciencias sociales pueden ser representados mediante redes. Éstas nos proporcionan una herramienta para estudiar las conexiones e interacciones entre los distintos componentes del sistema y analizar el papel que éstas juegan en su funcionamiento global.

La mayoría de las redes se construyen con un solo tipo de interacción entre sus componentes. Sin embargo, esto puede ser una simplificación de los sistemas reales donde los componentes normalmente interactúan de diferentes maneras. Así, por ejemplo, en una red social podríamos considerar la amistad como una interacción positiva y la enemistad como negativa. Es decir, tendríamos links tanto positivos como negativos.

En este trabajo nos centraremos en estudiar redes ecológicas, en las que los nodos representan las diferentes especies que conviven en un ecosistema determinado y los links las conexiones, tanto positivas como negativas, que se establecen entre ellas.

Es importante, con el fin de simplificar el análisis de las redes, poder representarlas en forma matemática, lo que nos será útil para realizar cálculos. La forma más cómoda de representar una red es mediante la matriz de adyacencia (1).

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Interacción positiva entre los nodos } i \text{ y } j \\ 0 & \text{Nodos } i \text{ y } j \text{ no conectados o interacción neutra} \\ -1 & \text{Interacción negativa entre los nodos } i \text{ y } j \end{cases} \quad (1)$$

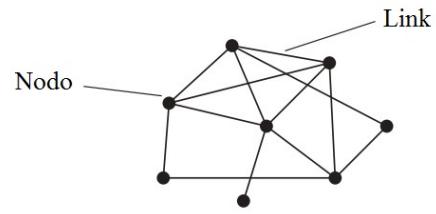
La matriz de adyacencia de una red con signo como la de la figura 3 será de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

**Figura 3:** Ejemplo de una red con signo.

Como vemos los elementos de la diagonal son 0 ya que no existen *self-links*, los nodos no se conectan consigo mismos. Además, la matriz es simétrica, si el nodo  $i$  está conectado al nodo  $j$ , el  $j$  estará conectado al  $i$ .

En este trabajo nos centraremos en estudiar el balance estructural de diferentes redes ecológicas. Para ello vamos a introducir dos magnitudes diferentes que nos servirán para analizar las redes: la modularidad y la frustración.



**Figura 2:** Esquema de una red.

## 2.1. Modularidad

Dada una partición de una red, es decir, dada una red dividida en diferentes grupos, clusters o comunidades, decimos que tiene alta modularidad si existe una gran densidad de conexiones entre nodos pertenecientes a una misma comunidad y escasas conexiones entre nodos de diferente comunidad [16] (Figura 4).

De forma matemática podemos definir la modularidad como el número de links entre nodos pertenecientes a un mismo grupo menos los links esperados en una red equivalente en la que las conexiones se realizan de forma aleatoria [16].

Si denotamos  $c_i$  como el grupo o comunidad a la que pertenece el nodo  $i$ , siendo  $n_c$  el número total de comunidades, podemos escribir el número total de links entre nodos pertenecientes a un mismo grupo mediante la expresión:

$$\sum_{i,j} \delta(c_i, c_j) = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} \delta(c_i, c_j), \quad (3)$$

donde  $\delta(m, n)$  es la delta de Kronecker,  $A_{ij}$  la matriz de adyacencia y el factor  $\frac{1}{2}$  es necesario porque cada par de nodos  $i, j$  se cuenta dos veces en el segundo sumatorio debido a que la matriz es simétrica.

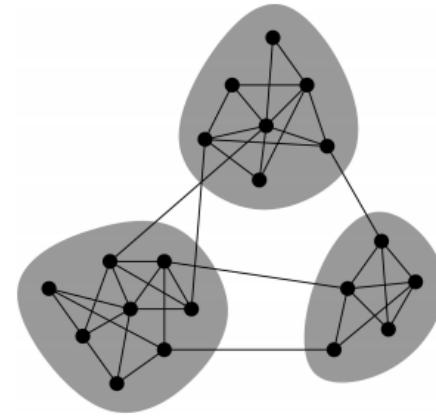
Calculamos ahora el número esperado de links entre nodos en una red construida de forma aleatoria. Consideramos un link que sale del nodo  $i$ , teniendo éste grado  $k_i$ . Consideramos un total de  $2m$  extremos de links en toda la red, donde  $m$  es el número total de links. Así, la probabilidad de que el extremo de nuestro link sea uno de los  $k_j$  extremos unidos al nodo  $j$  es  $k_j/2m$ . Si tenemos en cuenta los  $k_i$  extremos unidos al nodo  $i$ , el número total esperado de links entre los nodos  $i$  y  $j$  será  $k_i k_j / 2m$  y el número esperado de links entre todas las parejas de vértices del mismo grupo:

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{k_i k_j}{2m} \delta(c_i, c_j), \quad (4)$$

donde el factor  $\frac{1}{2}$  evita que contemos cada link dos veces. Calculando la diferencia entre las ecuaciones (3) y (4) obtenemos la diferencia entre el número real de links que unen nodos pertenecientes a un mismo grupo y el esperado:

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} \delta(c_i, c_j) - \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{k_i k_j}{2m} \delta(c_i, c_j) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left( A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta(c_i, c_j). \quad (5)$$

Normalmente, no se calcula el número de links sino la fracción, que obtenemos dividiendo por el número total de links,  $m$ :



**Figura 4:** Red con alta modularidad [16].

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left( A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta(c_i, c_j). \quad (6)$$

Esta magnitud se denomina modularidad. Es estrictamente menor que 1, toma valores positivos si existen más links entre nodos del mismo grupo que los esperados y valores negativos si hay menos links de los esperados.

Maximizando la expresión (6) obtenemos la mejor partición posible de la red, es decir, podremos dividir la red en grupos o comunidades, desconociendo su tamaño y su número, de forma que haya una gran densidad de links en el interior de un mismo grupo y escasos links entre grupos diferentes. Este proceso se denomina detección de comunidades y resulta muy útil para estudiar la estructura de las redes.

En el caso de redes con signo, redes con conexiones positivas y negativas, una red con alta modularidad no solo tiene gran densidad de links entre nodos del mismo grupo sino que éstos deben ser positivos, mientras que links entre nodos de diferentes grupos deben ser negativos.

En este tipo de redes el número esperado de links positivos y negativos entre dos nodos  $i$  y  $j$  será, respectivamente,  $k_i^+ k_j^+ / 2m^+$  y  $k_i^- k_j^- / 2m^-$ . Donde  $k_i^+$  y  $k_i^-$  representan el número de links positivos y negativos del nodo  $i$  y  $m^+$  y  $m^-$  el número total de links positivos y negativos de la red. Así, tenemos dos contribuciones distintas a la modularidad [17]:

$$Q^+ = \frac{1}{2m^+} \sum_{ij} \left( A_{ij}^+ - \frac{k_i^+ k_j^+}{2m^+} \right) \delta(c_i, c_j), \quad (7)$$

$$Q^- = \frac{1}{2m^-} \sum_{ij} \left( A_{ij}^- - \frac{k_i^- k_j^-}{2m^-} \right) \delta(c_i, c_j), \quad (8)$$

siendo  $A_{ij}^+$  y  $A_{ij}^-$  las matrices de adyacencia que contienen las conexiones positivas y negativas respectivamente.

La modularidad total será un punto intermedio entre la tendencia de los links positivos a formar comunidades y la tendencia de los links negativos a destruirlas. Si queremos que tanto  $Q^+$  como  $Q^-$  contribuyan a la modularidad de forma proporcional al número de links positivos y negativos de la red:

$$Q = \frac{2m^+}{2m^+ + 2m^-} Q^+ - \frac{2m^-}{2m^+ + 2m^-} Q^-. \quad (9)$$

Sustituyendo en la ecuación (9) las expresiones (7) y (8) obtenemos:

$$Q = \frac{1}{2m^+ + 2m^-} \sum_i \sum_j \left[ A_{ij} - \left( \frac{k_i^+ k_j^+}{2m^+} - \frac{k_i^- k_j^-}{2m^-} \right) \right] \delta(c_i, c_j). \quad (10)$$

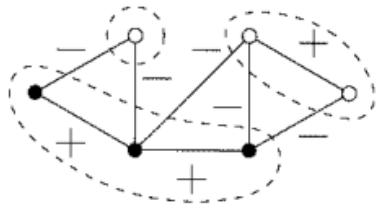
Al igual que en el caso de redes con un solo tipo de links, maximizando la ecuación (10) obtendremos la partición óptima de la red. Sin embargo, en este caso se buscará que dentro de

un mismo grupo solo haya conexiones positivas y entre grupos diferentes haya solo conexiones negativas.

Este cálculo parece suficiente para estudiar el balance en redes, sin embargo, la modularidad se centra en maximizar la densidad de links dentro de cada grupo en vez de minimizar los links negativos entre nodos pertenecientes a un mismo grupo. Por ello, necesitamos combinar la modularidad con otra magnitud, la frustración.

## 2.2. Frustración y balance estructural

Considerando la partición de una red, el cálculo de la frustración nos permite determinar si la red está balanceada o no. Una red balanceada se puede separar en grupos de forma que dentro de ellos solo haya links positivos, mientras que los links negativos conecten nodos pertenecientes a distintos grupos (Figura 5).



**Figura 5:** Ejemplo de una red balanceada [5].

Normalmente, en las redes reales existen links que hacen que la red no esté balanceada. Dada la partición de una red en grupos el número de estos links expresan el grado de frustración del sistema y son, por un lado, los links positivos entre diferentes grupos y, por otro, los links negativos dentro de un mismo grupo.

Podemos expresar la frustración con la siguiente expresión [8]:

$$F = \sum_{ij} \lambda A_{ij}^- \delta(c_i, c_j) + (1 - \lambda) A_{ij}^+ (1 - \delta(c_i, c_j)), \quad (11)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro que determina la contribución de ambos tipos de links. Puesto que el término  $(1 - \lambda) A_{ij}^+$  no depende de la partición de la red, es irrelevante y podemos simplificar la ecuación (11):

$$F = \sum_{ij} (\lambda A_{ij}^- - (1 - \lambda) A_{ij}^+) \delta(c_i, c_j). \quad (12)$$

Considerando la misma contribución para ambos tipos de links, es decir,  $\lambda = 1/2$  y sabiendo que  $A_{ij} = A_{ij}^+ - A_{ij}^-$  la expresión para la frustración nos queda:

$$F = - \sum_{ij} A_{ij} \delta(c_i, c_j). \quad (13)$$

Así, si los nodos  $i$  y  $j$  pertenecen al mismo grupo y están conectados por un link positivo, la frustración total se reduce, mientras que si la conexión es negativa la frustración aumenta.

El objetivo es encontrar la partición de la red que minimiza la ecuación (13). Sin embargo, si trabajamos con redes en las que hay pocas conexiones negativas, la partición que se obtiene no es la óptima. Esto se debe a la falta de más términos para tener en cuenta los casos en

los que los nodos  $i$  y  $j$  no se encuentran en el mismo grupo. Para solucionarlo proponemos añadir dos nuevos términos a la ecuación (13):

$$F = [-aA_{ij} + \epsilon(1 - A_{ij})] \delta(c_i, c_j) + bA_{ij}^+(1 - \delta(c_i, c_j)), \quad (14)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $\epsilon$  son constantes. Así, el término  $\epsilon(1 - A_{ij})\delta(c_i, c_j)$  penaliza, por un lado, la existencia de links negativos entre nodos pertenecientes al mismo grupo y, por otro, la ausencia de links positivos entre nodos del mismo grupo y el término  $bA_{ij}^+(1 - \delta(c_i, c_j))$  penaliza la existencia de links positivos entre nodos pertenecientes a distinto grupo.

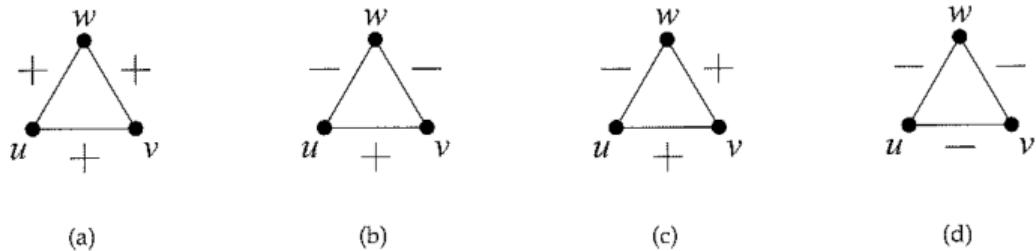
### 2.3. Triadas

Una vez hemos estudiado el balance estructural de una red a nivel global podemos estudiarlo a nivel local analizando el número de triadas balanceadas y no balanceadas que encontramos en ella. Este estudio se realiza normalmente en redes sociales en las que se ha demostrado que las triadas no balanceadas aparecen con menor frecuencia que las balanceadas.

La figura 6 muestra las cuatro posibles configuraciones de tres nodos conectados entre sí con links positivos y negativos. Si estudiamos estas triadas como redes sociales en las que los links positivos simbolizan amistad y los negativos enemistad podemos entender fácilmente por qué algunas de estas configuraciones son estables y otras no.

La configuración (a) es estable, a todo el mundo le gusta todo el mundo. El caso (b), también estable, es un poco más sutil. Los individuos  $u$  y  $v$  se gustan mientras que a ninguno de los dos les gusta  $w$ . Se puede entender como estable si consideramos que  $u$  y  $v$  están de acuerdo en su enemistad con  $w$ . La configuración (c), sin embargo, puede ser problemática, ya que  $v$  tiene una relación de amistad con  $u$  y  $w$ , quienes a su vez son enemigos entre sí. Desde el punto de vista de una red social, esta configuración pone a  $v$  en una situación difícil, teniendo que elegir a quien prefiere. Por último, la configuración (d) es inestable, lo normal es que tres personas que no se llevan bien no permanezcan juntas.

Se ha observado en redes sociales que son más comunes las triadas con configuraciones balanceadas que las no balanceadas, indicando que son sistemas estables. Así, podemos estudiar la estabilidad de sistemas analizando el número de triadas de cada tipo que tenemos en la red.



**Figura 6:** Configuraciones posibles de triadas en una red con signo. (a) y (b) están balanceadas y son estables, (c) y (d), sin embargo, no están balanceadas y no son estables [5].

### 3. Aplicación

Hasta ahora hemos presentado las propiedades relacionadas con el balance estructural que presentan las redes. Vamos ahora a aplicarlo a redes reales, en concreto, redes ecológicas que representan las interacciones entre las diferentes especies que coexisten en un determinado ecosistema.

Vamos a ver como se construyen las redes ecológicas a partir del patrón de asociación espacial. Presentaremos los detalles del algoritmo utilizado, que combina las propiedades explicadas anteriormente con el fin de obtener el resultado óptimo en el menor tiempo posible, y por último, veremos cuáles son los resultados obtenidos en nuestras redes.

Como hemos comentado anteriormente el resultado esperado es que nuestras redes ecológicas presenten un balance estructural mayor (menor frustración) que lo que se espera por azar.

#### 3.1. Redes ecológicas

Contamos con un total de 31 redes ecológicas construidas a partir de datos recogidos en cuatro zonas distintas de España: Parque Natural Cabo de Gata-Níjar (Almería), Monegros (Aragón), Sierra de Guara (Aragón) y Parque Nacional Ordesa-Monte Perdido (Aragón) (Tabla 1).

En estas redes los nodos representan las diferentes especies vegetales que encontramos en cada zona y los links las interacciones (positivas, neutras o negativas) que existen entre ellas. La determinación del tipo de interacción que existe entre dos especies se lleva a cabo mediante el análisis del patrón de asociación espacial entre pares de especies. Pese a ser una aproximación, se ha comprobado que el patrón de asociación espacial entre especies es una valiosa herramienta para estudiar comunidades ecológicas y se ha aplicado en numerosos trabajos para el estudio de interacciones ecológicas [18, 19].

Para aplicar este método se identifican las diferentes especies que viven en la zona que queremos estudiar, registrando su posición espacial. Además se genera una distribución espacial aleatoria de estas especies en función de su abundancia en la zona. Comparando la distribución espacial real y la aleatoria podemos obtener tres resultados distintos (Figura 7):

- Cuando dos especies aparecen asociadas más de lo que cabría esperar por azar se deduce un beneficio de dicha asociación y se asume una interacción positiva entre ambas (facilitación).
- Si dos especies aparecen asociadas menos de lo que cabría esperar por azar se considera un perjuicio de dicha asociación y se asume una interacción negativa entre ambas (competición).
- Cuando dos especies aparecen asociadas según lo esperado por azar se considera que no existe interacción entre ambas o que dicha interacción es neutra (neutralidad).

Con esta información somos capaces de codificar las interacciones entre especies que se dan en cada zona en una matriz de adyacencia similar a la que veíamos en la ecuación (1) (Capítulo 2), lo que nos va a permitir estudiar las propiedades de cada una de las redes.

Localización	Nombre	Número de Nodos
Parque Natural Cabo de Gata-Níjar (Almería)	Alfa-estepaC	67
	Alfa-estepaL	56
	Alfa-estepaM	69
	Romesab	104
	Brujo	62
	Fraile	117
	Isleta	49
Monegros (Aragón)	Lecinena	32
	Lomaza	50
	Planeron	42
	Sariñena	75
	NofragN	37
	NofragS	39
Parque Nacional Ordesa-Monte Perdido (Huesca)	GorizN2004	76
	GorizN2005	56
	GorizS2004	75
	GorizS2005	21
	SesaN2004	70
	SesaN2005	61
	SesaS2004	72
	SesaS2005	56
	Abena	83
Sierra de Guara (Huesca)	Aras	91
	Arguis	72
	Belsue	65
	Ibort	60
	Ipies	63
	Lucera	71
	Nocito	83
	Rapun	70
	Rasal	125

Cuadro 1: Tamaño de las redes utilizadas y su localización.

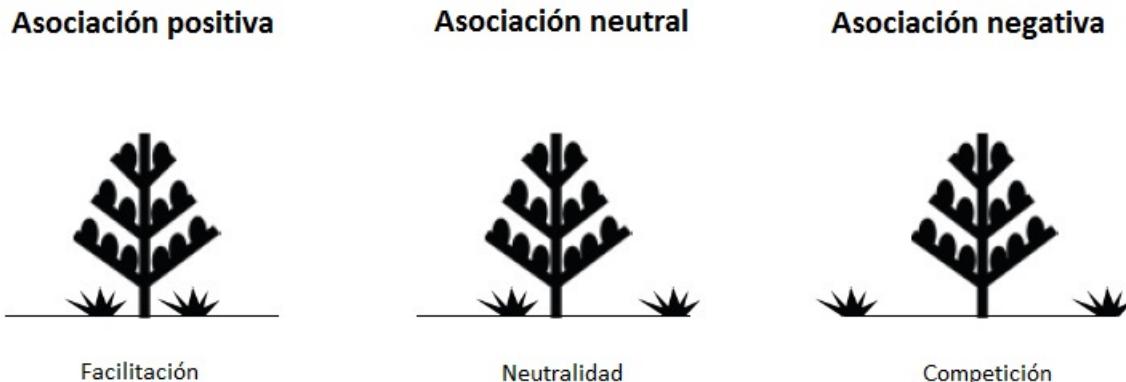


Figura 7: Tipos de asociación entre especies en un ecosistema. (Imagen cedida por H. Saiz)

### 3.2. Algoritmo

Hemos visto que el problema de evaluar el balance estructural en una red con signo (encontrar la partición que maximiza el número de links positivos y minimiza el de negativos dentro de un mismo grupo) es similar al problema de detección de comunidades, ya que en ninguno de los dos casos conocemos ni el número total de grupos ni su tamaño. Así, encontrar la partición óptima es un problema NP-complejo y requiere de técnicas de optimización.

Nuestro algoritmo consta de dos partes (Figura 8):

1. Primero, aprovechando la similitud entre el problema de detección de comunidades y el de estudiar el balance estructural en redes con signo, comenzamos buscando la partición que maximiza la modularidad. Para ello, hemos utilizado el algoritmo determinista presentado en [20] que maximiza la ecuación (10) anteriormente descrita (Capítulo 2.1).

Como hemos comentado, la modularidad se centra en maximizar la densidad de nodos dentro de un mismo grupo en vez de minimizar los links negativos. Por esta razón, la partición que obtenemos maximizando la ecuación (10) no es la que tiene menor frustración. Sin embargo, podemos utilizar el resultado obtenido como condición inicial para el siguiente paso.

2. La segunda parte del algoritmo consiste en encontrar la partición de la red que minimice la frustración (Capítulo 2.2). Para ello, implementamos el método *Simulated Annealing* [21] para minimizar la ecuación (12) teniendo como partición inicial la que hemos obtenido en el paso 1.

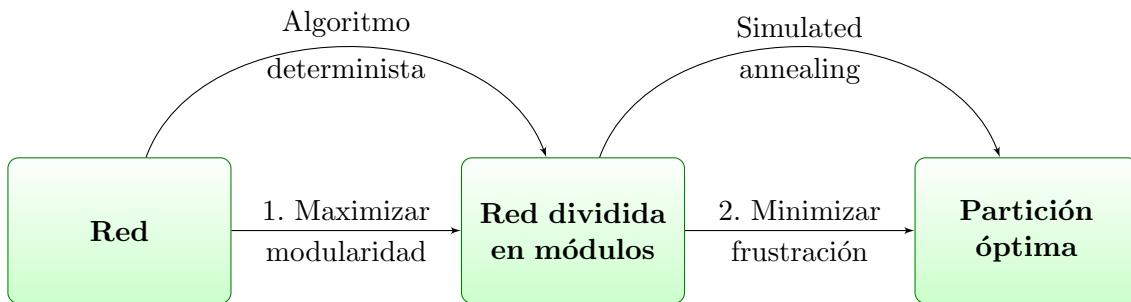


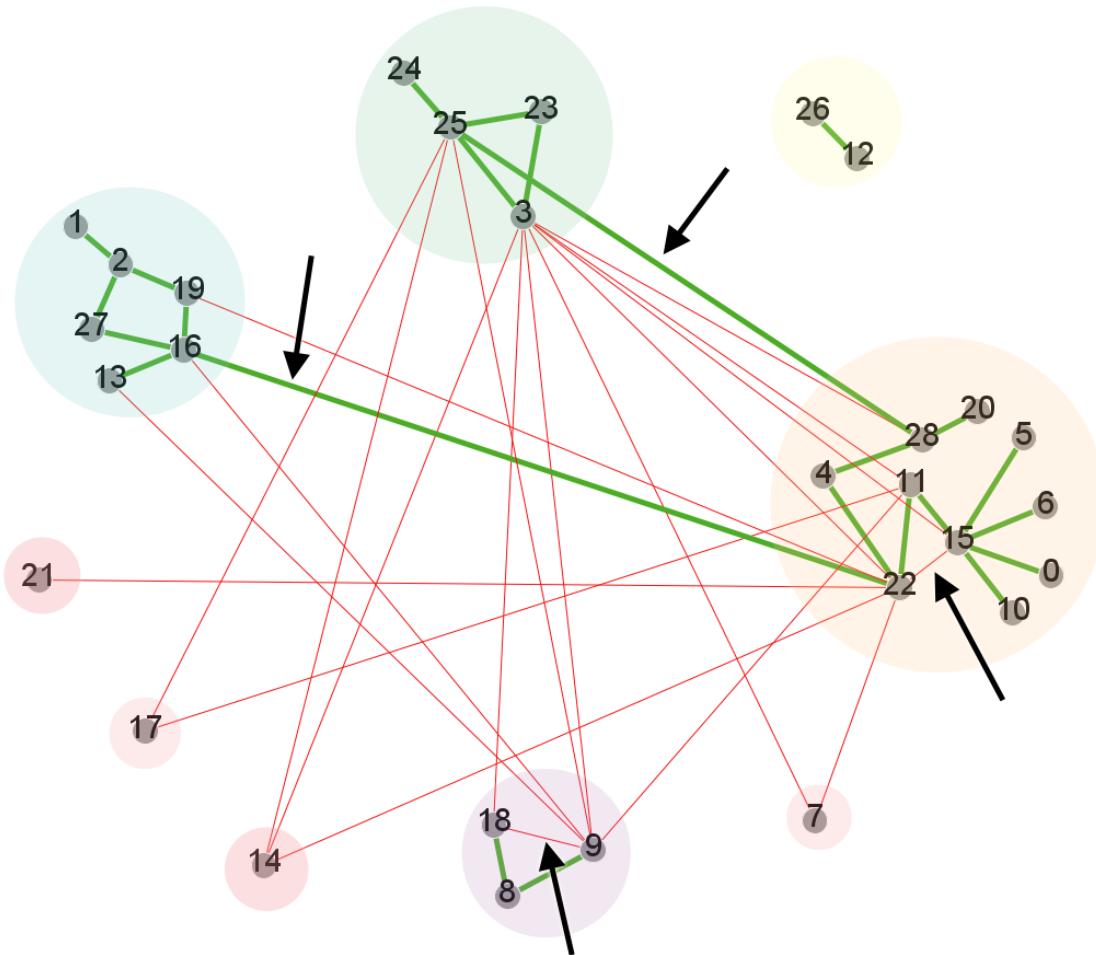
Figura 8: Esquema del algoritmo utilizado.

El resultado de la combinación de estos dos procesos de optimización es una considerable reducción del tiempo de computación empleado. Esto es posible gracias a que el resultado obtenido de la maximización de la modularidad está muy cerca del resultado final y el coste computacional de este proceso es mucho menor que el de minimizar la frustración desde una configuración inicial aleatoria.

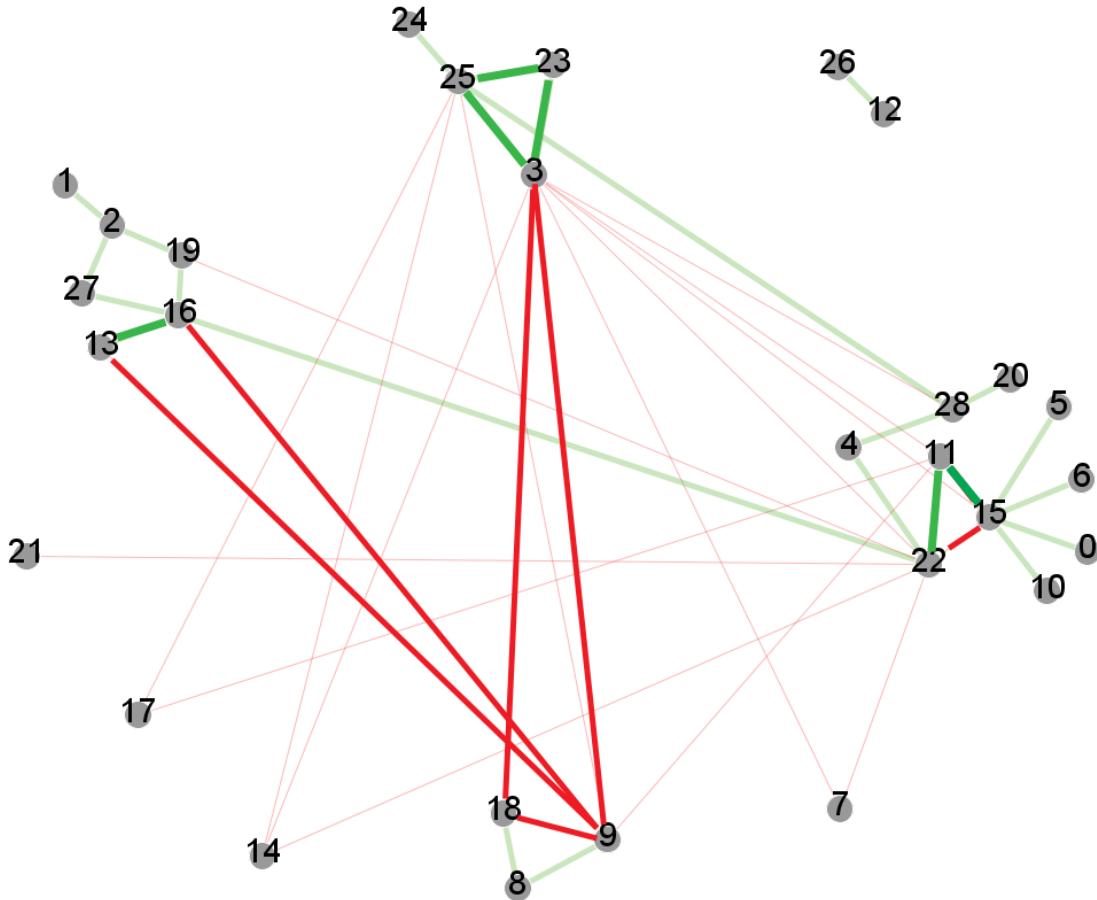
Por último, con el fin de determinar el número de triadas balanceadas y no balanceadas que hay en cada una de las redes se ha creado un algoritmo para recorrer todas las conexiones entre nodos contando los distintos tipos de triadas.

### 3.3. Modelo nulo

Una vez desarrollado el algoritmo podemos encontrar para cada red la partición que minimiza la frustración y podemos conocer el número de triadas de cada tipo que hay en ellas. En la figura 9 se muestra la partición óptima para una de nuestras redes de estudio. Cada nodo representa una especie distinta del ecosistema, los links verdes son conexiones positivas y los rojos conexiones negativas. Se ha escogido la red *nofragS* (Monegros) por ser una de las redes con menor tamaño con el fin de poder ver con claridad los distintos grupos que se forman. Como vemos en la figura la red queda dividida en 9 grupos distintos. Las flechas señalan los links que contribuyen a la frustración de la red, en este caso 4, dos positivos entre diferentes grupos y dos negativos conectando nodos del mismo grupo. Además, se han contado las triadas de cada tipo que encontramos en esta red: 5 triadas (---), 5 triadas (- - +), 4 triadas (- + +) y 1 (+ + +). En la figura 10 se han destacado una triada de cada tipo.



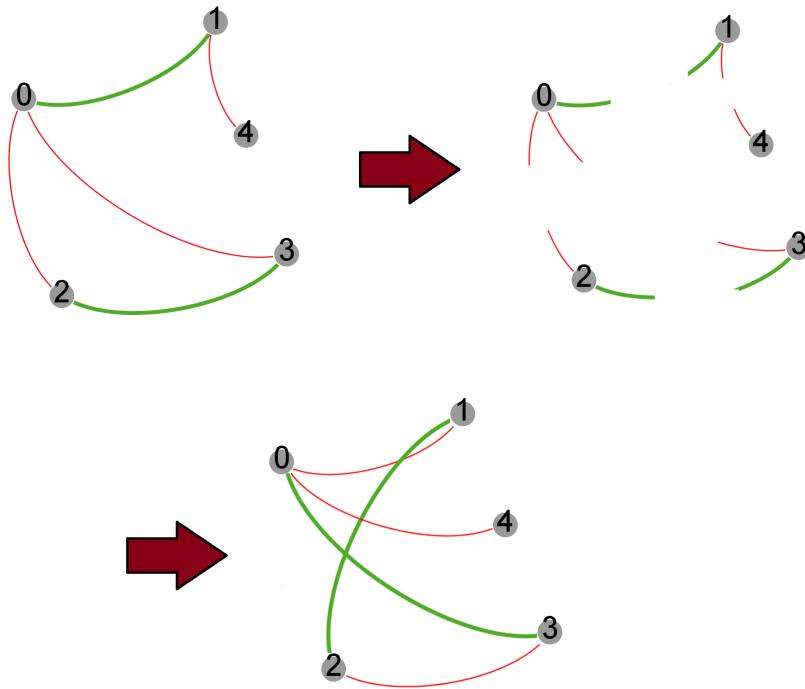
**Figura 9:** Partición óptima de la red *nofragS* (Monegros). Las flechas indican los links que contribuyen a la frustración, en total 4.



**Figura 10:** Ejemplo de una triada de cada tipo en la red nofragS.

Llegados a este punto hemos visto que podemos calcular la partición que minimiza la frustración de cada una de nuestras redes ecológicas y conocer el número de triadas de cada tipo que poseen. Sin embargo, no podemos afirmar que el valor obtenido para la frustración en cada caso indique que las redes son balanceadas. Asimismo, no podemos llegar a ninguna conclusión a partir del número de triadas balanceadas y no balanceadas obtenido. Necesitamos comparar los resultados obtenidos para las redes ecológicas con el resultado que se obtendría en el caso de redes generadas al azar.

Para ello vamos a construir 100 redes equivalentes a cada una de las 31 redes originales. Estas redes equivalentes tienen el mismo número de nodos que las redes originales, conectados entre sí de forma aleatoria, manteniendo el número de links positivos y negativos que tenía cada nodo en la red original (Figura 11).



**Figura 11:** Construcción de una red equivalente.

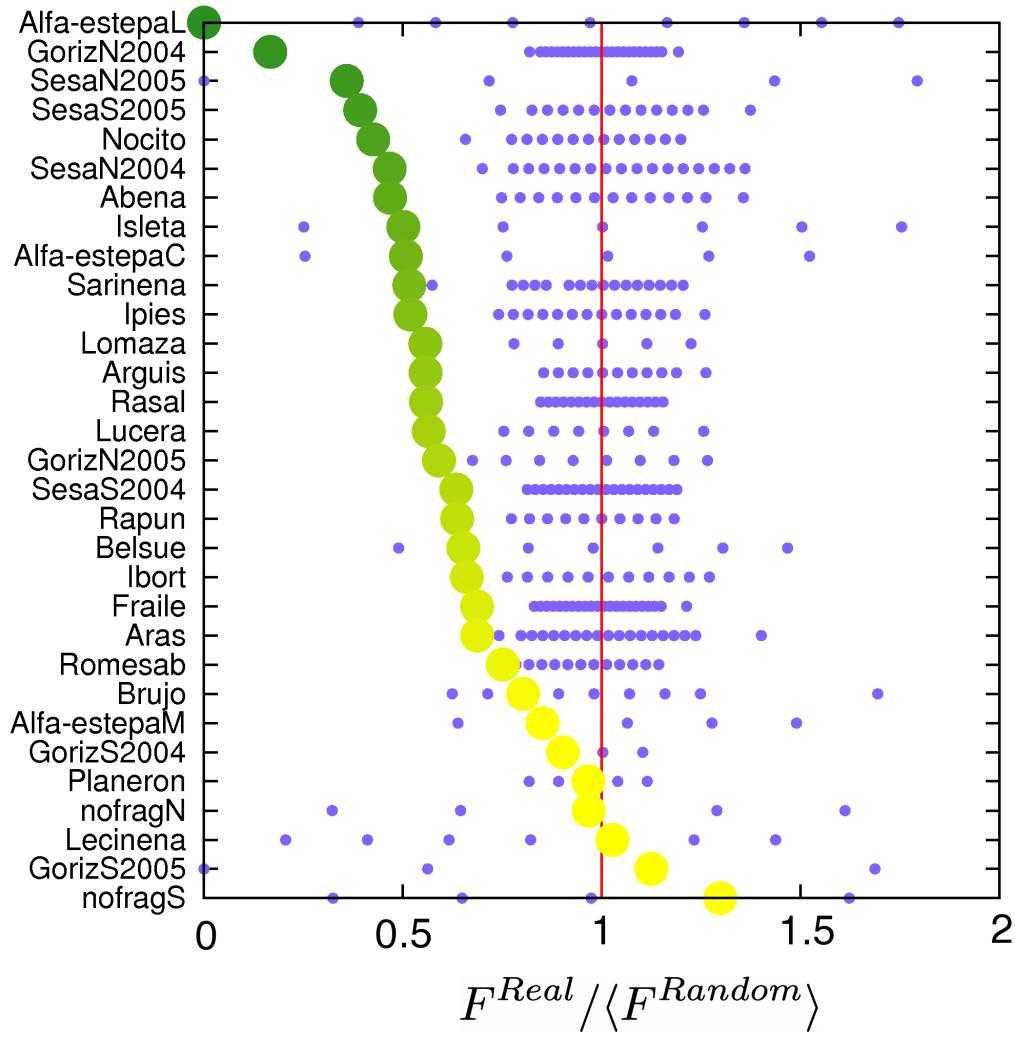
### 3.4. Resultados

Construidas las 100 redes equivalentes a cada una de las 31 redes originales ya podemos estudiar el balance estructural de cada una de ellas. En la figura 12 se muestran los resultados obtenidos. Se ha representado la frustración dividida entre la frustración media del modelo nulo para cada una de las 31 redes ecológicas. Así, si el valor de la frustración está en torno a 1 significa que la frustración obtenida para la red original es similar a la media de la obtenida para las redes equivalentes. Sin embargo, valores por debajo de la unidad indican una frustración menor en la red original, es decir, un mayor balance estructural.

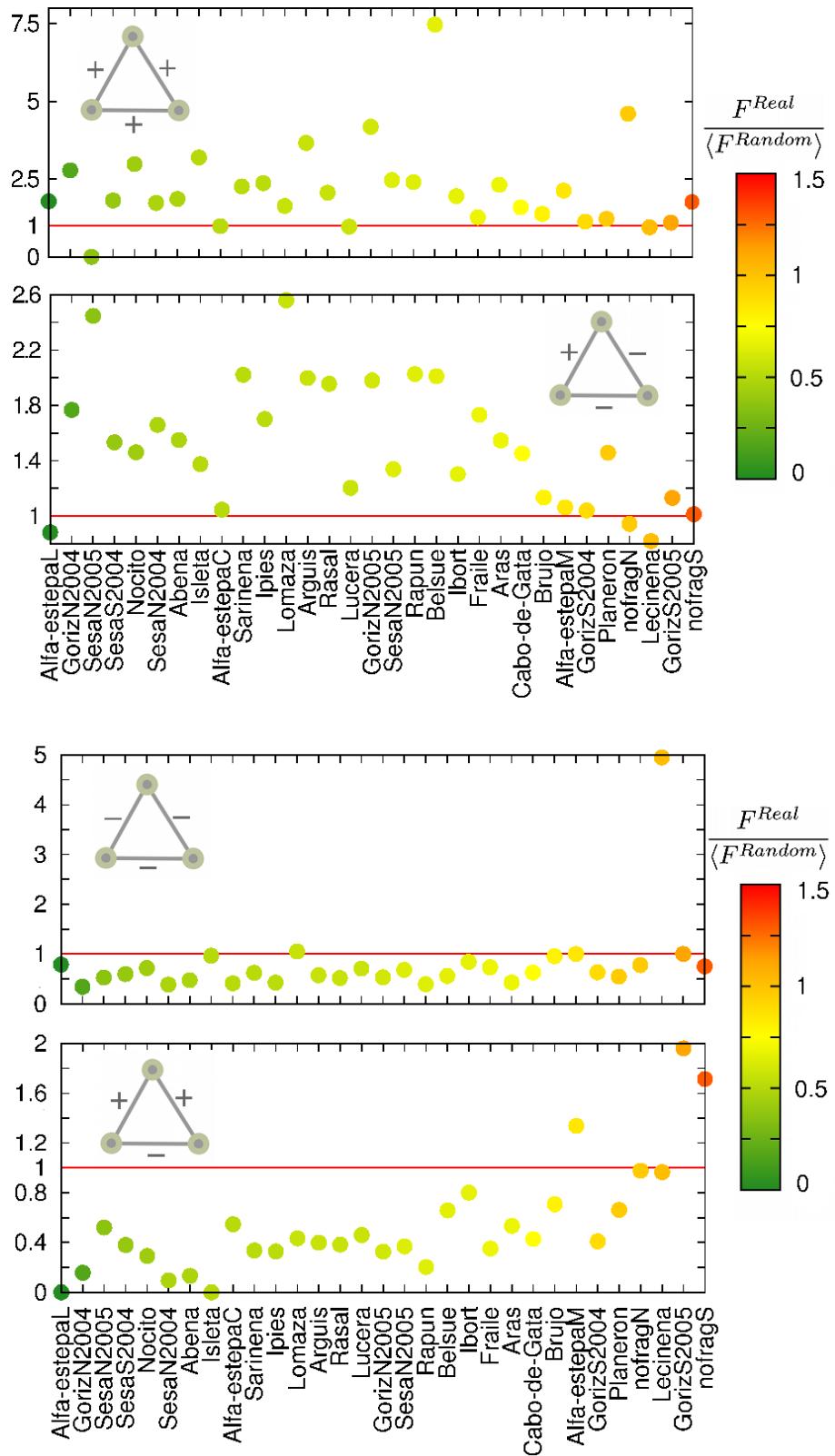
Como vemos en la figura 12 salvo tres de las redes, las demás, independientemente de su tamaño y localización, tienen una frustración menor que la obtenida para las redes equivalentes, es decir, presentan un mayor balance estructural que el esperado por azar.

Igual que con la frustración, podemos representar el número de triadas encontradas en las redes originales dividido por el número medio de triadas encontradas en las redes equivalentes (Figura 13). Los resultados coinciden con nuestras predicciones, en el caso de las triadas balanceadas (tipos  $(- - +)$  y  $(+ + +)$ ) los valores obtenidos para nuestras redes ecológicas se encuentran por encima de la unidad en ambos casos. En el caso de las configuraciones no balanceadas (tipos  $(- - -)$  y  $(- + +)$ ), encontramos el caso contrario, los valores obtenidos se encuentran por debajo de la unidad. De esta forma, hemos visto que las triadas balanceadas son más abundantes en nuestras redes ecológicas que lo esperado por azar y las triadas no balanceadas se encuentran en menor número.

Los resultados obtenidos indican que las redes ecológicas son un ejemplo de sistemas robustos. Hemos visto que estas redes presentan un balance estructural mayor que el esperado por azar lo que sugiere que el balance estructural es una propiedad de las redes con signo estables. Además el equilibrio estructural puede ser un buen candidato para ser una propiedad general de las redes reales con signo y habría que comprobarlo en otros sistemas.



**Figura 12:** Frustración real dividida entre la frustración media del modelo nulo para cada una de las redes. Los puntos degradados representan el valor de la frustración de las redes originales dividido entre el valor medio de la frustración obtenida para el modelo nulo. Los puntos morados muestran la frustración de cada una de las redes equivalentes dividida entre el valor medio.



**Figura 13:** Número de triadas de cada tipo encontradas en cada una de las redes dividido por el número medio de triadas del mismo tipo encontrado en las redes equivalentes. Las dos gráficas de la parte superior representan las triadas balanceadas mientras que las de la parte inferior las triadas no balanceadas. El color de cada punto representa el valor de la frustración de la red.

## 4. Conclusiones

El objetivo de este trabajo es estudiar una propiedad característica de las redes con signo, el balance estructural y aplicarlo a un sistema real concreto, las redes ecológicas, que representan las interacciones entre las distintas especies que coexisten en un ecosistema. Para ello, hemos desarrollado diferentes puntos en este trabajo:

- Estudio teórico de dos magnitudes, la modularidad y la frustración. Ambas nos permiten encontrar la partición de la red en la que los links positivos conectan nodos pertenecientes al mismo grupo y los negativos conectan links pertenecientes a diferente grupo. Sin embargo, hemos visto que la modularidad da más importancia a la densidad de links que a su signo y la minimización de la frustración es un problema NP-complejo que requiere mucho tiempo de computación, por lo que necesitamos ambas magnitudes para lograr nuestro objetivo.
- Desarrollo de un algoritmo que combina ambas magnitudes. Mediante la maximización de la modularidad y tomando el resultado como condición inicial para la minimización de la frustración hemos conseguido obtener el resultado óptimo en el menor tiempo posible.
- Aplicación de los dos puntos anteriores al estudio de 31 redes ecológicas de diferente tamaño y localización, obteniendo la frustración y el número de triadas balanceadas y no balanceadas que encontramos en ellas. Mediante la construcción de redes equivalentes hemos podido comparar los resultados obtenidos en las redes originales con los obtenidos en redes generadas de forma aleatoria concluyendo que las redes ecológicas tienen un mayor balance estructural y poseen un mayor número de triadas balanceadas que las esperadas por azar.

Hasta ahora, el estudio de redes sociales ha mostrado que las relaciones sociales no se organizan de forma aleatoria sino de forma que se minimice su frustración, es decir, presentan balance estructural. En este trabajo hemos ampliado estos resultados a otros sistemas reales, las redes ecológicas, que representan las interacciones entre las diferentes especies que conviven en un ecosistema. Los resultados obtenidos presentan la estructura que minimiza la frustración como una organización óptima para redes con signo. Este resultado sugiere que esta organización que promueve el balance estructural puede ser la norma en redes reales con signo.

## **5. Agradecimientos**

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mis directores, Jesús Gómez Gardeñes y Hugo Saiz Bustamante, por haberme propuesto este tema para el trabajo fin de máster y por toda su ayuda y apoyo durante el desarrollo del mismo.

Además, dar las gracias a Concepción L. Alados y Yolanda Pueyo del Instituto Pirenaico de Ecología por prestar los datos de las redes de vegetación.

## Referencias

- [1] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74(1):47, 2002.
- [2] Sergey N Dorogovtsev and Jose FF Mendes. Evolution of networks. *Advances in Physics*, 51(4):1079–1187, 2002.
- [3] Mark EJ Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45(2):167–256, 2003.
- [4] Ernesto Estrada. *The structure of complex networks: theory and applications*. Oxford University Press, 2011.
- [5] Mark Newman. *Networks: an introduction*. Oxford University Press, 2010.
- [6] Stefano Boccaletti, Vito Latora, Yamir Moreno, Martin Chavez, and D-U Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4):175–308, 2006.
- [7] Frank Harary et al. On the notion of balance of a signed graph. *The Michigan Mathematical Journal*, 2(2):143–146, 1953.
- [8] VA Traag and Jeroen Bruggeman. Community detection in networks with positive and negative links. *Physical Review E*, 80(3):036115, 2009.
- [9] Patrick Doreian and Andrej Mrvar. Partitioning signed social networks. *Social Networks*, 31(1):1–11, 2009.
- [10] Ernesto Estrada and Michele Benzi. Walk-based measure of balance in signed networks: Detecting lack of balance in social networks. *Physical Review E*, 90(4):042802, 2014.
- [11] Ernesto Estrada and Michele Benzi. Walk-based measure of balance in signed networks: Detecting lack of balance in social networks. *Physical Review E*, 90(4):042802, 2014.
- [12] Amiyaal Ilany, Adi Barocas, Lee Koren, Michael Kam, and Eli Geffen. Structural balance in the social networks of a wild mammal. *Animal Behaviour*, 85(6):1397–1405, 2013.
- [13] Michael Szell and Stefan Thurner. Measuring social dynamics in a massive multiplayer online game. *Social Networks*, 32(4):313–329, 2010.
- [14] John F Bruno, John J Stachowicz, and Mark D Bertness. Inclusion of facilitation into ecological theory. *Trends in Ecology and Evolution*, 18(3):119–125, 2003.
- [15] David Tilman. *Resource Competition and Community Structure*. Princeton University Press, 1982.
- [16] Mark Newman. Modularity and community structure in networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(23):8577–8582, 2006.
- [17] Sergio Gómez, Pablo Jensen, and Alex Arenas. Analysis of community structure in networks of correlated data. *Physical Review E*, 80(1):016114, 2009.
- [18] Hugo Saiz and Concepción L Alados. Changes in semi-arid plant species associations along a livestock grazing gradient. *PloS One*, 7(7):e40551, 2012.

- [19] José Raventós, Thorsten Wiegand, and Martin De Luis. Evidence for the spatial segregation hypothesis: a test with nine-year survivorship data in a mediterranean shrubland. *Ecology*, 91(7):2110–2120, 2010.
- [20] MA Y-H. Xue, R.-R. and W. Li. Community detecting in signed networks based on modularity. *Math. Methods Sci. Mech.*, 2014.
- [21] Scott Kirkpatrick, MP Vecchi, et al. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680, 1983.