Formulación simpléctica de la Mecánica Cuántica

Pablo Sala de Torres-Solanot
Trabajo de fin del grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Abstract

In spite of the fact that quantum mechanics has been formulated in an algrebaic way, a geometrical formulation has been developed since 70's [1]. Our goal in this thesis will be to explain how to compute this 'geometrization' in terms of observables $\mathcal{O}$ and then to apply it to the contractions of the underlying algebraic structures of open quantum systems.

On one hand, in order to reformulate quantum mechanics, we need to identify the minimal mathematical apparatus. In our case, our main objects will be the space of observables $\mathcal{O}$ and the space of states $\rho \in \mathcal{O}^*$. This presentation of quantum mechanics is known as the Heisenberg picture. So in the first chapter we will identify these ingredients, then we will study the underlying mathematical structures of $\mathcal{O}$ and finally we will transport them into a geometrical formulation. To this aim, we will define a pair of tensors fields, R and the bivector Λ, which codify the Jordan and Lie algebras, respectively. Eventually, at the end of the chapter we will explain how to compute the vector field associated with the dynamics over $\mathcal{O}$ and also over $\mathcal{O}^*$, this last one given by the von Neumann equation for closed systems.

However, due to the non-negligible interaction between a real quantum system and its environment, the system loses some of its genuine quantum features and eventually displays some 'classical' behaviour, where observables which didn't commute, start to do it. This kind of systems, known as open quantum systems, will be the reason of this work.

Therefore, we would like to study how the algebra of observables $\mathcal{O}$ change under the evolution, in order to describe what happens to the observables of an open quantum system. As this evolution is not unitary, we will make use of the mathematical concept of *contractions of algebras*. This concept became popular with Segal [2] and Inönü and Wigner [3], who tried to consider the symmetry group of classical mechanics as being a limit, in some sense, of the Poincaré group. In the second chapter, we will define contraction of an algebra and will classify them for the case of Lie algebras. We will also introduce a new concept, which has been called contraction of Jordan algebras associated to an associative algebra. Finally, we will develop the effect of a contraction of a Lie-Jordan algebra $\mathfrak{g}$ over the tensors R and Λ.

Once we will have become familiar with contractions, they will be applied to a particular example of dissipative quantum system, in order to exemplify how to deal with this new formulation of quantum mechanics and contractions, and to understand in a deeper sense how this systems behave.

In addition, we will face up with the quantum Zeno effect. This effect, which has been developed in the last forty years [4], could be useful in several fields such as: the control of decoherence in quantum computing, to reduce the dosage in neutron tomography, efficient preservation of spin polarization in gases etc. Because of this effect, one is supposed to be able to protect a particular quantum state by continuously measuring the system in study. Our feeling, is that we can explain this process by making use of the geometrical formalism of quantum mechanics and the theory of contractions. For this reason, we have compute the

dynamical vector field associated with the quantum Zeno evolution, as reader can find in the appendices. We have also applied it to some examples as a first step to understand the problem.

As reader could verify, this work makes use of many different branches of mathematics: Lie and Jordan algebras, theory of contractions, differential geometry, symplectic geometry, quantum mechanics and algebra, among others. Because of that, some topics have not been explained enough and have been developed in appendices. In them, reader can find almost any physical or mathematical concept mentioned in this work and also examples and deeper explanations about some concepts. However, this work is self-contained enough and reader will not have any problem to understand it without appendices. Regarding the computations done in order to understand and learn how to work with this formulation the author has used Mathematica. Because of complexity of calculations rises with dimension, we have just work with two and three dimensions.

In addition, I must say that this work is the continuation of another previous one, which was titled: "Sistemas cuánticos Hamiltonianos en Mecánica Cuántica: el efecto Zenón", which was also wrote by me. That is the reason of the analysis of the quantum Zeno effect in terms of contractions of algebras. Despite the fact we will not be able to totally explain quantum Zeno effect through contractions, we will analyze in some depth. Next, we introduce in Spanish, a symbol appendix in order to clarify the notation use during the writing.

Geometría diferencial

TM	—	Fibrado tangente a la variedad.
T_pM	—	Espacio tangente a la variedad en el punto p.
X	—	Campo vectorial sobre la variedad.
X_p	—	Campo vectorial sobre la variedad en el punto p.
X^K	—	Campo vectorial asociado a la aplicación lineal K.
ϕ_t	—	Flujo asociado al campo vectorial X.
Λ	—	Bivector codificando la estructura de Poisson.
R	—	2-tensor codificando la estructura de Jordan.
x^i	—	Funciones coordenadas.
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	—	Elemento de la base del espacio tangente a un punto.
$\wedge$	—	Producto exterior.
$\otimes_S$	—	Producto simétrico.
$\mathcal{L}_X$	—	Derivada de Lie respecto al campo X.

Álgebras

$\mathcal{O}$	—	Álgebra de observables.
$\mathcal{O}^*$	—	Dual del álgebra de observables.
$\rho, \xi_A \equiv \tilde{A} \in \mathcal{O}^* \quad A \in \mathcal{O}$	—	Elementos del dual del álgebra de observables.
$\hat{A} \in (\mathcal{O}^*)^*$	—	elemto del bidual del álgebra de observables.
$[A,B] = AB - BA$	—	Paréntesis de Lie.
$[A,B]_- = -\frac{i}{2}(AB - BA)$	—	Paréntesis de Lie para $\mathcal{O}$.
$A \circ B \equiv [A,B]_+ = \frac{1}{2}(AB + BA)$	—	Paréntesis de Jordan para $\mathcal{O}$.
$\langle A,B\rangle_{\mathcal{O}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(AB)$	—	Producto escalar sobre $\mathcal{O}$.

During the writing we will make use of Einstein summation convention, whick means summation over repeated indices.

Índice general

Capítulo 1

La formulación geométrica de la Mecánica Cuántica

Para poder reformular la teoría cuántica desde un punto de vista geométrico es imprescindible identificar los ingredientes principales que engloba el marco cuántico, de forma que podamos reformular la estructura matemática que lo sostiene. Entre estos ingredientes encontramos[1]: un **espacio de estados** al cual denotaremos $\mathcal{S}$, que corresponde al conjunto de rayos de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ complejo separable en la formulación usual de la Mecánica Cuántica, y que representan los estados puros del sistema, y un **espacio de observables** $\mathcal{O}$, que corresponde al conjunto de las magnitudes físicas del sistema, y que en la formulación habitual es el conjunto de operadores esencialmente autoadjuntos en el espacio de Hilbert considerado. Debemos considerar además el proceso de **medida** y la **evolución** de los estados del sistema físico. El proceso de medida viene representado por una asignación numérica al par definido por el estado físico y el observable $\mathcal{O} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, mientras que para describir la evolución del sistema debemos introducir una ecuación diferencial, correspondiente a la ecuación de Schrödinger en la formulación tradicional, cuyas soluciones definen la evolución temporal de los estados del sistema físico.

Existen no obstante otras interpretaciones distintas. En este trabajo haremos referencia a una de ellas, *la imagen de Heisenberg.* En esta imagen, los estados cuánticos del sistema $\psi(\vec{r})$, permanecen inalterables a lo largo del tiempo. Es decir, existe una densidad de probabilidad en el espacio que es constante. Es en esta imagen, donde los observables 'evolucionan'. Sin embargo, ¿qué significa que un observable evolucione?, ¿cuál es la ecuación diferencial que rige dicha evolución? y por último, ¿existe alguna relación entre las evoluciones dadas en ambas imágenes?.

Toda la teoría desarrollada a continuación, será para el caso particular de un espacio de Hilbert de dimensión **finita** N de manera que podamos prescindir de dificultades topológicas que hacen referencia a propiedades de continuidad de los operadores que aparecen, así como a sus posibles dominios de definición.

[1] En el primer capítulo del apéndice se pueden encontrar los axiomas, bajo los cuales se desarrolla el marco cuántico A.

1.1. Los observables. Estructuras geométricas en $\mathcal{O}$

La descripción de Heisenberg de la mecánica cuántica considera al sistema cuántico, descrito por una $\mathbb{C}^*$-álgebra $\mathcal{A}$ cuya parte real [5] son los observables $\mathcal{O}$ del sistema (en este caso los elementos autoadjuntos de dicha álgebra), y sus estados cuánticos $\mathcal{S}$ son funcionales normalizados y positivos actuando sobre ellos, las denominadas matrices densidad. Desde el punto de vista de la formulación habitual para el caso de sistemas finitos de dimensión N, dicha $\mathbb{C}^*$-álgebra viene dada por el conjunto de End($\mathcal{H}$), y $\mathcal{O}$ por el subconjunto de endomorfismos Hermíticos. Por otro lado, el conjunto de estados viene dado por el subconjunto $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{O}^*$ de operadores positivos con traza uno actuando en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En un sistema finito de dimensión compleja N, este conjunto es $\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathcal{O}^* \,:\, Tr(\rho) = 1\,;\, \rho \geq 0\}$.[2]

Definición 1.1. Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa sobre el cuerpo de los números reales o de los complejos que es a su vez espacio de Banach. Además se requiere que la multiplicación en el álgebra y la norma del espacio estén relacionadas por la desigualdad $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$ para todo $x,\, y \in \mathcal{A}$, de manera que la multiplicación sea una operación continua.

Definición 1.2. Una $\mathbb{C}^*$-álgebra $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach sobre el cuerpo de los números complejos, junto con una aplicación $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaciendo:

- Para cada $x \in \mathcal{A}$: $x^{**} = (x^*)^* = x$.
- Para cada $x \in \mathcal{A}$: $\|x^*x\| = \|x\|^2$.
- Para todo $x\,, y \in \mathcal{A}$: $(x+y)^* = x^* + y^*, \qquad (xy)^* = y^*x^*$.
- Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y todo $x \in \mathcal{A}$: $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$.

Puesto que trataremos con sistemas cuánticos de dimensión finita N, identificamos el conjunto de observables con el espacio de operadores Hermíticos de dimensión N, $\mathcal{O} = \mathrm{Herm(N)}$. Estos definen un álgebra de Lie real isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ del grupo unitario $U(\mathcal{H})$, que corresponde a los operadores anti-Hermíticos. En el caso de sistemas de dimensión finita, definen el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(N)$. Dicho isomorfismo viene dado por,

$$\alpha : \mathcal{O} \to \mathfrak{u}(\mathcal{H}), \qquad \alpha(A) = iA. \tag{1.1}$$

Una ´geometrización' de la estructura de álgebra de Lie en el espacio de observables vendrá dada por la identificación del paréntesis de Lie con un tensor de Poisson[3] definido sobre el espacio dual $\mathfrak{u}(\mathcal{H})^*$ del álgebra de Lie $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$. Por otro lado, de manera similar transportaremos la estructura de álgebra de Jordan. De esta forma pasamos de un espacio vectorial restringido a transformaciones lineales, a una variedad N^2-dimensional para $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ y $\mathfrak{u}(\mathcal{H})^*$, donde disponemos de transformaciones más generales, dependientes del punto sobre la variedad.

Ahora siguiendo el desarrollo dado en [6], iremos caracterizando el álgebra de observables $\mathcal{O}$.

[2] Como veremos, la existencia del producto escalar en el espacio de observables, nos permitirá definir un isomorfismo entre este y su dual, de forma que podríamos haber presentado al conjunto de estados ρ como matrices Hermíticas, de traza uno y definida positivas, sin más que tener presente que son objetos distintos a los observables.

[3] Este objeto será definido más adelante.

Lema 1.1.1. *El espacio de observables $\mathcal{O}$ queda dotado de una estructura de álgebra de Lie real, isomorfa a la estructura natural existente en $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ definiendo*

$$[A, B]_{-} := \alpha^{-1}(\alpha(A)\alpha(B) - \alpha(B)\alpha(A)) = -i\,[\alpha(A), \alpha(B)]\,, \tag{1.2}$$

donde por comodidad definiremos $[\alpha(A), \alpha(B)] = \frac{1}{2}\,(\alpha(A)\alpha(B) - \alpha(B)\alpha(A))$.

Por otro lado, el espacio de operadores Hermíticos también está dotado de otro producto binario interno, conocido como producto de Jordan, definido por

$$A \circ B \equiv [A, B]_{+} = \frac{1}{2}\,(AB + BA)\,, \tag{1.3}$$

donde con esta definición conseguimos que,

$$A \circ A = A^2.$$

Por completitud y puesto que haremos uso de ello más adelante introduzcamos las definiciones siguientes.

Definición 1.3. Un álgebra de Lie $(\mathcal{A}, [\cdot,\cdot])$ es un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo $\mathbb{K}$ junto con una operación binaria $[\cdot,\cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, llamada paréntesis de Lie, que satisface las propiedades siguientes:

- es bilineal, es decir, $[ax + by, z] = a\,[x, z] + b\,[y, z]$ y $[z, ax + by] = a\,[z, x] + b\,[z, y]$ para todo a, b en $\mathbb{K}$ y todo x, y, z en $\mathcal{A}$.
- es antisimétrica: $[x, y] + [y, x] = 0$ para todo x, y en $\mathcal{A}$.
- satisface la identidad de Jacobi: $[[x, y]\,, z] + [[y, z]\,, x] + [[z, x]\,, y] = 0$ para todo x, y, z en $\mathcal{A}$.

Definición 1.4. Un álgebra conmutativa $(\mathcal{A}, \circ)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice álgebra de Jordan si

$$(x \circ y) \circ (x \circ x) = x \circ (y \circ (x \circ x)) \quad \forall\, x, y \in \mathcal{A}.$$

Por último, las estructuras de Lie y de Jordan pueden ser combinadas para definir una nueva estructura conocida como álgebra de Lie-Jordan.

Definición 1.5. Un álgebra de Lie-Jordan es un espacio vectorial real dotado de una estructura de Jordan $\circ$ y una estructura de Lie real $[\cdot,\cdot]$ que satisfacen:

- $[a, b \circ c] = [a, b] \circ c + b \circ [a, c]$ para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$.
- Para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$ y para algún $\hbar \in \mathbb{R}$ se tiene $(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = \hbar^2\,([[a, b]\,, c] - [a, [b, c]])$ para algún $\hbar \in \mathbb{R}$. La razón por la que se introduce la constante $\hbar$, es porque en el límite clásico, $\hbar = 0$, el álgebra de Jordan se vuelve asociativa.

Lema 1.1.2. *El espacio de observables $\mathcal{O}$, con las operaciones definidas anteriormente, forman un álgebra de Lie-Jordan.*

Demostración. Consultar [7] para la demostración. □

Esto nos permite definir una estuctura de *álgebra asociativa* en el espacio de observables combinando ambas estructuras,

$$AB = A \circ B + i\,[A, B] \;\; \forall\, A, B \,\in\, \mathcal{O} \tag{1.4}$$

Por ahora se ha llegado a que $\mathcal{O} \equiv i\mathfrak{u}(\mathcal{H})$. Las estructuras definidas anteriormente en $\mathcal{O}$ pueden ser transportadas a $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$ por el isomorfismo dado en (1.1). También podemos transportar dichas estructuras a $\mathcal{O}^*$, debido a la existencia en $\mathcal{O}$ de un producto escalar,

$$\langle A, B\rangle_{\mathcal{O}} := \frac{1}{2}Tr(AB) \quad A, B \,\in\, \mathcal{O}, \tag{1.5}$$

de manera que $A \,\in\, \mathcal{O} \mapsto \xi_A := \langle A, \cdot\rangle_{\mathcal{O}} \,\in\, \mathcal{O}^*$.

Por tanto, debido a la existencia de este producto escalar sobre el espacio de observables, para cada elemento elemento $\xi_C \,\in\, \mathcal{O}^*$ existe un elemento $C \,\in\, \mathcal{O}$, tal que $\xi_C = \langle C, \cdot\rangle_{\mathcal{O}}$.[4]

Nota. El espacio de observables $\mathcal{O}$ forma un álgebra de Lie-Jordan-Banach (LJB), es decir, un álgebra de Lie-Jordan, completa con respecto a la norma inducida por el producto escalar [5]. La complexificación de este espacio $(\mathcal{O}, \circ, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{O}})$, da lugar a la $\mathbb{C}^*$-álgebra original. Este hecho permite trasladar el análisis de las estructuras subyacentes a dicha $\mathbb{C}^*$-álgebra, al álgebra de observables, lo que a su vez nos permitirá desarrollar la formulación geométrica de la mecánica cuántica mediante la tensorización de las estructuras de Lie y de Jordan.

Transportemos estas estructuras existentes sobre el espacio de observables, $\mathcal{O}$ a su espacio dual $\mathcal{O}^*$, de manera que podamos aplicar las herramientas aportadas por la geometría diferencial, entre las que destacan las estructura de Poisson y la forma simétrica correspondiente. Pasaremos pues a considerar una nueva estructura, muy parecida a la de álgebra de Lie, sobre el espacio de funciones, $C^\infty(\mathcal{O}^*)$.

Definición 1.6. Una estructura de Poisson en una variedad diferenciable P está dada por una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal antisimétrica $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(P) \times C^\infty(P) \mapsto C^\infty(P)$ tal que

a) $\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0$ (Identidad de Jacobi).

b) $\{f_1 f_2, g\} = f_1\,\{f_2, g\} + f_2\,\{f_1, g\}$ (Regla de Leibniz).

Observar que a) significa que $C^\infty(P)$ queda dotado de una estructura de álgebra de Lie real. Por otro lado la importancia de la propiedad b) es que garantiza la existencia de un campo vectorial, que se denotará como X_f, conocido como campo Hamiltoniano, tal que $X_f(g) = \{g, f\}$.

Nota. Resaltar que un álgebra de Poisson, es un álgebra de Lie real, dotada de un producto adicional para el cual el paréntesis de Lie es una derivación.

Una forma de geometrizar la estructura de álgebra de Lie existente en $\mathcal{O}$ es la siguiente. Asociamos un tensor de Poisson sobre el dual de $\mathcal{O}$, de manera que como el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es de dimensión finita N, podemos identificar $\mathcal{O}$ con el espacio de funciones lineales $\mathbb{C}$-valuadas sobre su dual $\mathcal{O}^*$[5], es decir, $\mathcal{O} \equiv \mathrm{Lin}(\mathcal{O}^*, \mathbb{C})$. De esta forma definimos el paréntesis de Poisson de dos funciones (lineales) $\hat{u}, \hat{v} \,\in\, \mathrm{Lin}(\mathcal{O}^*, \mathbb{C})$ como

$$\{\hat{u}, \hat{v}\} = \widehat{[u, v]},$$

[4] Se ha hecho uso del teorema de representación de Riesz.

[5] Notar que en general, en un álgebra de Poisson se pueden considerar todo tipo de funciones $C^\infty(\mathcal{O}^*)$ como veremos en el siguiente capítulo.

donde el conmutador de la izquierda es el paréntesis de Poisson de $\hat{u}$ y $\hat{v}$, pensados como elementos de $(\mathcal{O}^*)^*$.[6]

Podemos pues considerar la estructura de Poisson existente en $\mathcal{O}^*$[7] [6], y extender de modo análogo la estructura de Jordan existente en $\mathcal{O}$ a través de (1.5). Así, denotando $\hat{A}$ y $\hat{B}$ a las funciones lineales sobre $\mathcal{O}^*$ correspondientes a los elementos $A, B \in \mathcal{O}$, podemos definir los tensores Λ y R de manera que para todo $\xi_C \in \mathcal{O}^*$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\Lambda(d\hat{A}, d\hat{B})(\xi_C) &= \xi_C([A,B]_-) = \frac{-i}{4}\mathrm{Tr}\ C(AB-BA) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ C\,[A,B]_- = \left\langle C, [A,B]_- \right\rangle_{\mathcal{O}} \\
R(d\hat{A}, d\hat{B})(\xi_C) &= \xi_C([A,B]_+) = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\ C(AB+BA) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ C\,[A,B]_+ = \left\langle C, [A,B]_+ \right\rangle_{\mathcal{O}}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

donde como se puede apreciar $\xi_C \in \mathcal{O}^*$ hace de punto sobre la variedad.

Por último, como ya comentamos en (1.4), ambas estructuras nos permitían definir un álgebra asociativa. De modo coherente, estos dos campos vectoriales pueden juntarse para dar lugar a un campo vectorial de la forma,

$$(R + i\Lambda)\,(d\hat{A}, d\hat{B})(\xi_C) = \xi_C(AB) = \frac{1}{2}Tr(CAB),\ \xi_C \in \mathcal{O}^*. \tag{1.7}$$

Usando este tensor se puede definir un producto de funciones en $\mathcal{O}^*$ de la forma,

$$(\hat{A} * \hat{B})(\xi_C) = \xi_C(AB) = (R + i\Lambda)(d\hat{A}, d\hat{B})(\xi_C).$$

1.2. La dinámica

Una vez establecidas las estructuras geométricas análogas a la imagen de Schrödinger, querríamos escribir unas ecuaciones de movimiento en el espacio de fases de los observables $\mathcal{O} \equiv i\mathfrak{u}(\mathcal{H})$, o bien sobre el espacio de estados, $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{O}^*$. Así, en la imagen de Heisenberg si $A \in \mathcal{O}$ se tiene

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2}{\hbar}[A, H]_-\,, \tag{1.8}$$

o de forma análoga, sobre $\mathcal{O}^*$,

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{2}{\hbar}\left\{\hat{H}, \rho\right\}. \tag{1.9}$$

Dichas ecuaciones dinámicas vienen determinadas por el campo vectorial asociado al operador Hamiltoniano, lo que en 1.6 llamamos campo Hamiltoniano. En general, para obtener el campo dinámico asociado a una cierta evolución, sea ésta Hamiltoniana o no, seguiremos el siguiente desarrollo. Sea $K \in \mathrm{End}(\mathcal{O})$ y sea $\gamma : I \to \mathcal{O}$ una curva tal que,

$$\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t_0} = K(\gamma(t_0)) =: X^K_{\gamma(t_0)} \in T_{\gamma(t_0)}\mathcal{O}.$$

[6] Usaremos la notación $\hat{A}$ para denotar a los elementos de $A \in \mathcal{O}$ vistos como funciones lineales sobre el dual, es decir $\hat{a} \in (\mathcal{O}^*)*$.

[7] Desarrollaremos esta idea en la sección 2 del siguiente capítulo y construiremos dicho tensor para un álgebra de Lie cualquiera.

Es decir, definimos el campo asociado a la aplicación lineal K como aquel que en el punto $\gamma(t_0)$ se identifica con el vector tangente a la curva en dicho punto. De esta forma si $\{e_i\}$ es base ortonormal de $\mathcal{O}$ [8] se tendrá que $\gamma(t) = \sum_j \gamma_j(t) e_j$, y así

$$\left.\frac{d\gamma_j}{dt}\right|_{t_0} = \langle e_j, K(\gamma(t_0))\rangle_{\mathcal{O}} .$$

Así desde el punto de vista geométrico, si $\tilde{e}_i$ son las funciones coordenadas respecto a dicha base se tendrá,

$$\left.\frac{d\gamma_j}{dt}\right|_{t_0} = X^K_{\gamma(t_0)}(d\tilde{e}_j)$$

y por tanto,

$$\langle e_j, K(\gamma(t_0))\rangle_{\mathcal{O}} = X^K_{\gamma(t_0)}(d\tilde{e}_j)$$

De este modo obtenemos que si $B \in \mathcal{O}$, de manera que $\tilde{B} \in \mathcal{O}^*$ entonces

$$\boxed{X^K_{\gamma(t_0)}(d\tilde{B}) = \langle B, K(\gamma(t_0))\rangle_{\mathcal{O}} = \left\langle K^\dagger(B), \gamma(t_0)\right\rangle_{\mathcal{O}}} \tag{1.10}$$

donde recordemos que $\gamma(t_0) \in \mathcal{O}$ y donde $K^\dagger$ representa el operador traspuesto conjugado.

Por ejemplo, para obtener el campo Hamiltoniano 1.6 sobre la variedad al que denominaremos X^H, necesitaremos aplicar (1.10), al caso concreto en que $K = ad_H(\cdot) = [H, \cdot]_-$, el cual cumple que $ad^\dagger_H = -ad_H$ y así se obtiene

$$X^H_{\gamma(t_0)}(\tilde{B}) = \langle -ad_H(B), \gamma(t_0)\rangle_{\mathcal{O}} = \left\langle [B,H]_-, \gamma(t_0)\right\rangle_{\mathcal{O}} \tag{1.11}$$

y por tanto

$$\boxed{X^H_{(*)}(\cdot) = -\left\langle *, [H,\cdot]_-\right\rangle_{\mathcal{O}}}. \tag{1.12}$$

Por otro lado, querremos definir también la dinámica sobre el espacio de estados $\mathcal{O}^*$. Para ello, tomando la curva $\tilde{\gamma} : I \to \mathcal{O}^*$ y $K \in \mathrm{End}(\mathcal{O}^*)$, se tiene la aplicación adjunta de K dada por $K^* : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ y un camino $\gamma : I \to \mathcal{O}$ sin más que hacer uso del isomorfismo dado por el producto escalar. Así obtenemos que el campo actua,

$$X^K_{\tilde{\gamma}(t_0)}(d\hat{B}) = K(\tilde{\gamma}(t_0))(B) = \tilde{\gamma}(t_0)(K^*(B)) = \langle \gamma(t_0), K^*(B)\rangle_{\mathcal{O}} .$$

Para el caso de $K = ad^*_H : \mathcal{O}^* \to \mathcal{O}^*$, se tiene que

$$X^H_{\tilde{\gamma}(t_0)}(d\hat{B}) = \langle \gamma(t_0), ad_H(B)\rangle_{\mathcal{O}} = \left\langle \gamma(t_0), [H,B]_-\right\rangle_{\mathcal{O}} = \Lambda(d\hat{H}, d\hat{B})(\tilde{\gamma}(t_0)),$$

y por tanto,

$$\boxed{X^H_{(*)}(\cdot) = \left\langle *, [H,\cdot]_-\right\rangle_{\mathcal{O}} = \Lambda(d\hat{H}, \cdot)(*)}. \tag{1.13}$$

de forma que obtenemos un resultado análogo al obtenido en mecánica clásica.Como veremos en el apéndice los dos formalismos utilizados para desarrollar la teoría cuántica, el de Schrödinger y el de Heisenberg, son equivalentes. Dicha equivalencia viene dada por la aplicación (C.38).

[8] Al ser $\mathcal{O}$ espacio vectorial se identifica con el espacio tangente en cada punto, y por tanto $\{e_i\}$ también será base en dicho espacio. Es decir, $T\mathcal{O} = \mathcal{O} \times \mathcal{O}$.

Nota. Es importante resaltar que los campos vectoriales y los tensores R y Λ definidos anteriormente, son campos y 2-tensores *lineales*, es decir, toman la forma $X = a^i_j x^j \frac{\partial}{\partial x_i}$ en el caso de campos vectoriales, y análogamente para R y Λ. Esto hace que la derivada de Lie respecto a un campo X, $\mathcal{L}_X$[9], pueda ser calculada como una aplicación lineal sobre el espacio de bivectores Λ. De este hecho hecho nos serviremos en los capitulos siguientes, con el fin de analizar las contracciones de álgebras.

El siguiente esquema, resume el proceso de la geometrización de estructuras y del análisis que desarrollaremos en los dos próximos capítulos. Observar, como se van modificando paralelamente las estructuras tanto en la $\mathbb{C}^*$-álgebra como en $\mathcal{O}$, y como es posible recuperar las de un álgebra en función de las de la otra.

$$\mathbb{C}^* - \text{álgebra} = \mathcal{O} \oplus i\mathcal{O} \xrightarrow{\quad\quad\quad\mathfrak{Re}(\mathbb{C}^*)\quad\quad\quad} \mathcal{O}(\mathcal{H}) \equiv \text{LJB-álgebra}$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet = \circ + i\,[\cdot,\cdot] \arrow[d] & \text{Geometrización} \quad \text{(Cap. 1)} & \circ,\ [\cdot,\cdot] \arrow[d] \\
R + i\Lambda \arrow[d] & \text{Contracción} \quad \text{(Cap. 2)} & R,\ \Lambda \arrow[d] \\
(R + i\Lambda)_\infty & & R_\infty,\ \Lambda_\infty
\end{tikzcd}$$

[9] Ver apéndice de geometría diferencial E.13.

Capítulo 2

Contracción de álgebras

De manera rudimentaria, se entiende por *contracción* de un álgebra al proceso de transformación de la misma en otras álgebras, que en el caso de un álgebra de Lie, la transforma en otra álgebra de Lie 'más Abeliana'. En la literatura [8] se encuentra como los físicos han estado interesados en la teoría de contracciones, motivados por la explicación de porqué algunas teorías aparecen como límite de teorías más 'exactas'. Así por ejemplo, es bien conocido que la mecánica clásica puede ser considerada como una buena aproximación de la mecánica relativista cuando las velocidades que aparecen en el problema son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, o bien como se recupera el limite clásico cuando $\hbar \to 0$. Con esta idea, Segal [2] y años más tarde Inönü y Wigner [3], intentaron considerar el grupo de Galileo como el límite cuando $v/c \to 0$, del grupo de Poincaré. Otras situaciones similares se dan en la física: el universo de de Sitter y la mecánica cuántica. A día de hoy, este límite es de uso frecuente para obtener, partiendo de un grupo de Lie dado o una estructura de álgebra de Lie, una nueva estructura la cual se dice contraida de la original. Sin embargo, dicha idea no ha sido desarrollada sobre álgebras de Jordan.

La idea básica de una contracción es que uno tiene una familia de álgebras $\mathfrak{g} = (V, \mu)$ dependientes de un parámetro $\epsilon > 0$, de tal forma que en el límite $\epsilon = 0$ uno obtiene una nueva álgebra $\mathfrak{g}^0 = (V, \mu')$.

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial complejo o real, N-dimensional. Sea $\mathfrak{g} = (V, \mu)$ un álgebra. Las **constantes de estructura** C_{ij}^k, con $i, j, k = 1, 2, \ldots, N$ de L con respecto a la base $e_1, e_2, \ldots, e_N$ de V son un conjunto de N^3 números dados por

$$\mu(e_i, e_j) = C_{ij}^k e_k,$$

donde de nuevo hacemos uso del convenio de sumación sobre índices repetidos. Por tanto, conociendo las constantes de estructura, sabemos cómo actúa la operación binaria sobre todo el conjunto de elementos del álgebra.

Definición 2.2. Dos álgebras $\mathfrak{g} = (V, \mu)$ y $\mathfrak{g}' = (V, \mu')$ se dicen **isomorfas**, $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$, si existe $T \in \mathrm{Aut}(V)$ tal que

$$T(\mu(x, y)) = \mu'(Tx, Ty); \qquad x, y \in V \tag{2.1}$$

Ahora ya estamos en disposición de dar la definición principal de este capítulo [9].

Definición 2.3. Contracción. Sea $T(\epsilon) \in \mathrm{Aut}(V)$, $0 < \epsilon \leq 1$, una familia de aplicaciones lineales *no singulares*. Entonces las álgebras

$$\mathfrak{g}_\epsilon = (V, \mu_\epsilon), \qquad \epsilon > 0,$$

donde

$$\mu_\epsilon(x,y) = T^{-1}(\epsilon)\mu(T(\epsilon)x, T(\epsilon)y); \qquad x, y \in V \tag{2.2}$$

son *ismorfas* a $\mathfrak{g} = (V, \mu)$. Si el límite

$$\mu_0(x,y) = \lim_{\epsilon\to 0} \mu_\epsilon(x,y) \tag{2.3}$$

existe para todo $x, y \in V$, entonces μ_0 es un producto para un cierto álgebra $\mathfrak{g}^0 = (V, \mu_0)$ que se llama **contracción** de $\mathfrak{g}$ por $T(\epsilon)$, o de forma resumida $\mathfrak{g} \xrightarrow{T(\epsilon)} \mathfrak{g}^0$.

Existen dos casos triviales:

· Para que $\mathfrak{g}^0 \cong \mathfrak{g}$, una condición suficiente es que $T(0) = \lim_{\epsilon\to 0} T(\epsilon)$ exista y sea no singular. Sin embargo, esta condición no es necesaria.

· La elección $T(\epsilon) = \epsilon \cdot \mathbb{I}$ da lugar a una contracción $\mathfrak{g}^0$ la cual es Abeliana, es decir todas las constantes de estructura de la nueva álgebra son nulas.

2.1. Contracciones de álgebras de Lie: Contracciones de Inönü-Wigner

Dentro de las contracciones de álgebras de Lie existen unas de especial interés que son las conocidas como contracciones generalizadas de Inönü-Wigner. Inönü y Wigner [9] estudiaron bajo qué condiciones el límite $C_{ij}^k(0) = \lim_{\epsilon\to 0} C_{ij}^k(\epsilon)$ existía para un caso particular de la familia de transformaciones lineales $T(\epsilon)$ dependientes del parámetro ϵ, donde se ha denotado por $C_{ij}^k(\epsilon)$ a las constantes de estructura del álgebra $\mathfrak{g}_\epsilon$. Sea un álgebra de Lie $\mathfrak{g} = (V, [\cdot,\cdot])$ y una base de dicha álgebra $\{e_i, \ldots, e_n\}$, y consideremos la familia de transformaciones lineales tales que si el espacio vectorial subyacente se escribe como suma directa, $V = V_R \oplus V_N$, entonces $T(\epsilon)$ actúa $T(\epsilon)_{|V_R} = \mathbb{I}_{V_R} \qquad T(\epsilon)_{|V_N} = \epsilon \mathbb{I}_{V_N}$.

Cuando elegimos bases $\{e_i, \ldots, e_r\}$ y $\{e_{r+1}, \ldots, e_r\}$ de V_R y V_N respectivamente, la transformación actua

$$T(\epsilon)e_{1\nu} = e_{1\nu} = b_{1\nu}^\epsilon, \qquad \nu = 1, \ldots, r,$$

$$T(\epsilon)e_{2\lambda} = \epsilon\, e_{2\lambda} = b_{2\lambda}^\epsilon, \qquad \lambda = r+1, \ldots, n.$$

Es decir, se presenta la contracción desde un punto de vista pasivo, donde la contracción viene dada por un cambio de base. Así teniendo en cuenta que $\mu, \nu \le r$,

$$\left[b_{1\mu}^\epsilon, b_{1\nu}^\epsilon\right] = [e_{1\mu}, e_{1\nu}] = C_{1\mu 1\nu}^\tau e_\tau = C_{1\mu 1\nu}^{1k} b_{1k}^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} C_{1\mu 1\nu}^{2\lambda} b_{2\lambda}^\epsilon,$$

donde $k = 1, \cdots, r$ y $\lambda = r+1, \ldots, n$, es por tanto necesario que

$$C_{1\mu 1\nu}^{2\lambda} = 0 \tag{2.4}$$

de forma que el límite cuando $\epsilon \to 0$ exista. Esta condición es equivalente a pedir que V_R sea una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Es decir, que los elementos de la base $\{e_i, \ldots, e_r\}$ cierren una subálgebra de Lie entre ellos. Esta condición es suficiente puesto que como

$$\left[b_{1\mu}^\epsilon, b_{2\lambda}^\epsilon\right] = \epsilon\, C_{1\mu 2\lambda}^{1k} b_{1k}^\epsilon + C_{1\mu 2\lambda}^{2\xi} b_{2\xi}^\epsilon$$

$$\left[b^{\epsilon}_{2\mu}, b^{\epsilon}_{2\lambda}\right] = \epsilon^2\, C^{1k}_{2\mu 2\lambda} b^{\epsilon}_{1k} + \epsilon\, C^{2\xi}_{2\mu 2\lambda} b^{\epsilon}_{2\xi}$$

entonces,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left[b^{\epsilon}_{1\mu}, b^{\epsilon}_{2\lambda}\right] = C^{2\xi}_{1\mu 2\lambda} b^{\epsilon}_{2\xi}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left[b^{\epsilon}_{2\mu}, b^{\epsilon}_{2\lambda}\right] = 0$$

donde por comodidad hemos llamado C^k_{ij} a $C^k_{ij}(1)$, es decir, a las constantes de estructura originales del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

De esta forma se obtiene que el álgebra contraida obtenida a partir de $\mathfrak{g}$, a la que llamaremos $\mathfrak{g}^0$, está generada por los vectores,

$$b^0_{1\mu},\ \text{para } \mu = 1, \ldots, r, \qquad b^0_{2\lambda},\ \text{para } \lambda = r+1, \ldots, n,$$

con las relaciones de conmutación y constantes de estructura obtenidas más arriba obteniendo así,

$$\begin{aligned}
&C^{1k}_{1\mu 1\nu}(0) = C^{1k}_{1\mu 1\nu}(1), && C^{2\lambda}_{1\mu 1\nu}(0) = C^{2\lambda}_{1\mu 1\nu}(1) = 0,\\
&C^{1k}_{1\mu 2\lambda}(0) = 0, && C^{2\xi}_{1\mu 2\lambda}(0) = C^{2\xi}_{1\mu 2\lambda}(1),\\
&C^{1k}_{2\lambda 2\xi}(0) = 0, && C^{2\eta}_{2\lambda 2\xi}(0) = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

con $\mu, \nu, k = 1, \ldots, r$ y $\lambda, \xi, \eta = r+1, \ldots, n$.

Inönü y Wigner también probaron que las constantes de estructura $C^k_{ij}(\epsilon)$ satisfacían la identidad de Jacobi, para cada ϵ, si así ocurría para $\epsilon = 1$.

Diremos que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ ha sido contraida con respecto a la subálgebra V_R, $C^{2\lambda}_{1\mu 1\nu}(0) = C^{2\lambda}_{1\mu 1\nu}(1) = 0$, definida por los vectores $e_{1\mu}$ con $\mu = 1, \ldots, r$, y que los elementos $e_{2\lambda}$, con $\lambda = r+1, \ldots, n$, han sido contraidos, ya que se cumple que $C^{1k}_{2\lambda 2\xi}(0) = 0$ y $C^{2\eta}_{2\lambda 2\xi}(0) = 0$.

En resumen, mientras que la subálgebra V_R definida por la contracción de Inönü-Wigner permanece invariable, todos los otros generadores se contraen.

2.1.1. Contracciones de Saletan

En 1961 Saletan [10],[11] buscando una generalización de las contracciones de Inönü-Wigner, propuso la siguiente dependencia de las transformaciones lineales U en el parámetro ϵ,

$$T(\epsilon) = u + \epsilon w \tag{2.6}$$

donde u y w son transformaciones lineales con la condición $T(1) = \mathbb{I}$, lo que permite escribir (2.6) como,

$$T(\epsilon) = \epsilon\mathbb{I} + (1-\epsilon)u.$$

Además la transformación $T(\epsilon)$ es singular si y sólo si $\epsilon = 0$, es decir, $u = T(0)$ es singular. La generalización consiste en que u puede ser cualquier matriz singular. Además Saletan utilizó un punto de vista activo, en el sentido de que las transformaciones no se consideraban un cambio de base sino una modificación del espacio lineal subyacente V. De esta forma 'transportaremos' la estructura de álgebra de Lie mediante las aplicaciones lineales e invertibles $T(\epsilon)$ con $\epsilon \neq 0$,

$$[a, b]_{\epsilon} = T(\epsilon)^{-1}\left[T(\epsilon)a, T(\epsilon)b\right],\ \forall\, a, b \in V. \tag{2.7}$$

El producto de Lie, $[\cdot,\cdot]_\epsilon$ depende del valor de ϵ y la forma explícita de cómo cambia el producto de Lie viene dada por,

$$[a,b]_\epsilon = T(\epsilon)^{-1}\left[T(\epsilon)a, T(\epsilon)b\right], \tag{2.8}$$

de manera que todas las álgebras de Lie $(V,[\cdot,\cdot]_\epsilon)$ son isomorfas a la original.

Algunas veces el límite $\epsilon \to 0$ de $[a,b]_\epsilon$ existirá para todo $a,b \in V$ y entonces dicho límite definirá un nuevo producto de Lie; sin embargo, la existencia de dicho límite no implica que el álgebra obtenida sea isomorfa a la original. Esto a se debe a la singularidad existente en $T(0)$.

Nota. En el desarrollo se hace uso de un resultado algebraico [12] existente en espacios lineales de dimensión finita que enuncia:

Lema 2.1.1. *Sea u un endomorfismo de un espacio lineal finito dimensional V. Entonces, existe un entero $q \in \mathbb{N}$ tal que $V = V_R \oplus V_N$, donde $V_N = ker(u^q)$, $V_R = Im(u^q)$ y las restricciones de u a V_N y V_R son nilpotente de orden q e invertible, respectivamente.*

Por tanto, de modo análogo a como hicimos con las contracciones de Inönü-Wigner, podríamos investigar cuáles son las condiciones para que dicho límite exista[1]. Sin entrar en detalles (pueden encontrarse en [11]), los resultados importantes de este proceso de contracción debido a Saletan son:

a) La condición necesaria y suficiente para la existencia del límite es,

$$[ua,ub]_N - u\,[ua,b]_N - u\,[a,ub]_N + u^2u\,[a,b]_N = 0 \;\; a,b \in V,$$

donde $[\cdot,\cdot]_N$ es la restricción del paréntesis de Lie al subespacio V_N.

b) Si la aplicación lineal u contrae el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^0$, entonces u^m también contrae el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ a otra álgebra, $\mathfrak{g}^0_m$. Además el espacio vectorial subyacente se divide en suma directa como, $V = V_R \oplus V_N$ de la misma forma que para u.

2.2. Contracciones de álgebras asociativas

Sea $\mathcal{A} = (V,\mu)$ un álgebra asociativa sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, con el producto $\mu : V\times V \to V, \quad (A,B) \mapsto A * B$ y sea $N : V \to V$ una aplicación lineal. Si N fuese una derivación del álgebra $\mathcal{A}$, entonces $N(A)*B + A*N(B) - N(A*B) = 0$. En otro caso, la aplicación,

$$\mu_N : V\times V \to V, \quad (A,B) \mapsto A *_N B = N(A)*B + A*N(B) - N(A*B), \tag{2.9}$$

es una aplicación bilineal y define una nueva estructura (V,μ_N).

Nuestro objetivo es que ambas álgebras (V,μ) y (V,μ_N) sean isomorfas. Por tanto, una idea es medir la obstrucción existente a que esta aplicación lineal sea un homomorfismo de dichas álgebras asociativas. Dicha obstrucción es medida por la torsión de μ-Nijenhuis de N

$$T_N(A,B) = N(A *_N B) - N(A)N(B). \tag{2.10}$$

Definición 2.4. Se dice que la aplicación lineal $N : V \to V$ es un tensor de μ-Nijenhuis si la torsión de μ-Nijenhuis se hace nula, $T_N(A,B) = 0$, $\forall\, A,B \in V$.

[1] Ejemplo hecho en los apéndices F.

LLegamos así al resultado más importante de esta sección.

Teorema 2.2.1. *El producto μ_N definido por (2.9)es asociativo si y sólo si se cumple*

$$AT_N(B,C) - T_N(AB,C) + T_N(A,BC) - T_N(A,B)C = 0.$$

Si este es el caso, μ_N es un producto asociativo compatible con μ, es decir que $\mu + \lambda\mu_N$ son asociativos para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

En particular, si N es un tensor de μ-Nijenhuis, entonces μ_N es un producto asociativo sobre V el cual es compatible con μ.

Demostración. Consultar página 4 de [13]. □

Por otro lado, se sabe [14] que un tensor de Nijenhuis para el álgebra de Lie $(V, [\cdot,\cdot])$ es una aplicación lineal $N : V \to V$ tal que $N([A,B]_N) = [N(A), N(B)]$, donde

$$[A,B]_N = [N(A), B] + [A, N(B)] - N[A,B], \tag{2.11}$$

y que entonces $[\cdot,\cdot]_N$ es un paréntesis de Lie compatible si N es un tensor de Lie-Nijenhuis.

Teorema 2.2.2. *Si N es un tensor de μ-Nijenhuis para un álgebra asociativa (V,μ), entonces N es un tensor de Nijenhuis para el álgebra de Lie $(V,[\cdot,\cdot])$, donde $[A,B] = \frac{-i}{2}(A*B - B*A)$ y*

$$[A,B]_N = \frac{-i}{2}(A *_N B - B *_N A).$$

Demostración. Aplicar la definición 2.11. □

Recordemos que dada una aplicación lineal $N : V \to V$con V espacio lineal de dimensión finita, por el lema 2.1.1 se tiene que $V = V_R \oplus V_N$, tal que la restricción de N a V_R y a V_N es invertible y nilpotente respectivamente.

Consideremos $U(\epsilon) = \epsilon\mathbb{I} + N$ la familia de morfismos lineales dependientes continuamente del parámetro $\epsilon \in \mathbb{R}$ de manera que en un entorno $\mathcal{U}$ de 0, $U(\epsilon)$ es invertible para $\epsilon \in \mathcal{U} - \{0\}$. Entonces consideremos la familia continua de productos $X *_N^\epsilon Y$ definidos por

$$\begin{aligned} X *_N^\epsilon Y &= U(\epsilon)^{-1}(U(\epsilon)(X) * (\epsilon)(Y)) && (2.12)\\ &= U(\epsilon)^{-1}(\epsilon^2 X * Y + \lambda(N(X) * Y + X * N(Y) + N(X) * N(Y)), && (2.13)\end{aligned}$$

para $\epsilon \in \mathcal{U} - \{0\}$. Todos estos productos son isomorfos por definición, y nos gustaría encontrar las condiciones que aseguran la existencia del límite

$$X *_N Y = \lim_{\epsilon\to 0} X *_N^\epsilon Y,$$

para todo $X, Y \in V$ y así encontrar la correspondiente contracción $X *_N Y$.

Notar que (2.12) puede ser rescrito de la forma,

$$X *_N^\epsilon Y = \epsilon X * Y + X \tilde{*}_N Y - U(\epsilon)^{-1} T_N(X,Y),$$

donde,

$$X \tilde{*}_N Y = N(X) * Y + X * N(Y) - N(X * Y),$$
$$T_N(X,Y) = N(X \tilde{*}_N Y) - N(X) * N(Y).$$

Por tanto el límite existe si y sólo si,

$$\lim_{\epsilon \to 0} U(\epsilon)^{-1} T_N(X,Y) \quad \text{existe para cada } X, Y \in V.$$

Es fácil encontrar que es condición necesaria que $T_N(X,Y) \in V_R$ para cada $X, Y \in V$ para que el límite exista.

Teorema 2.2.3. *Sea $\mu : V \times V \to V$ un producto bilinear (escribiremos $X * Y$ en vez de $\mu(X,Y)$) y $N : V \to V$ una aplicación lineal. Denotemos por $U(\epsilon) = \epsilon \mathbb{I} + N$ a la deformación de N y por $V = V_R \oplus V_N$ la descomposición de V relativa a N. Entonces el límite,*

$$\lim_{\epsilon \to 0} U(\epsilon)^{-1}(U(\epsilon)(X) * (\epsilon)(Y))$$

existe para cada $X, Y \in V$ y define una nueva operación bilineal (contraida)

$$X *_N Y,$$

sobre V si y sólo si la torsión de Nijenhuis $T_N(X,Y)$ toma valores en V_R. Si este es el caso, entonces

$$X *_N Y = X \tilde{*}_N Y + N^{-1} T_N(X,Y).$$

Además, N es un homomorfismo de (V, μ_N) en (V, μ):

$$N(X *_N Y) = N(X) * N(Y).$$

Demostración. Se puede encontrar un desarrollo completo en la página 5 de [13]. □

Nota. Notar que esta última implicación es equivalente a afirmar que N es un tensor de μ-Nijenhuis, es decir que,

$$T_N(X,Y) = N(X *_N Y) - N(X) * N(Y) = 0.$$

Por tanto por el teorema 2.2.1 se sigue que si (V, μ) es un álgebra asociativa entonces (V, μ_N) es un álgebra asociativa compatible.

2.3. Contracción de álgebras de Jordan

La teoría desarrollada hasta ahora sólo ha hecho referencia a la contracción de álgebras de Lie y de álgebras asociativas. Sin embargo, no existe en la literatura una descripción de lo que entenderíamos como 'contracción de álgebras de Jordan'. Será el objetivo de este capítulo intentar definir y formalizar este concepto.

Siendo este un primer desarrollo para este tipo de contracciones, desarrollaremos un formulación algebraica y no geométrica. En este caso nos hacemos la siguiente pregunta: Si N es un tensor de μ-Nijenhuis para un álgebra asociativa (V, μ), ¿será un tensor de Nijenhuis para un álgebra de Jordan dada por $A \circ_N B = N(A) \circ B + A \circ N(B) - N(A \circ B)$?

Sea $A \circ_N B := N(A) \circ B + A \circ N(B) - N(A \circ B)$ entonces a partir de esta definición se tiene que,

$$A \circ_N B = \frac{1}{2}(A *_N B + B *_N A).$$

Además, si N es un tensor de μ-Nijenhuis para un álgebra asociativa resulta que,

$$N(A \circ_N B) = \frac{1}{2}N(A *_N B + B *_N A) = \frac{1}{2}N(A)N(B) + N(B)N(A)) = N(A) \circ N(B),$$

y así N es un tensor de Nijenhuis para el álgebra de Jordan.

Por otro lado, es fácil ver que si $T_N^+(A,B)$ es la torsión de Nijenhuis de la estructura de Jordan, $T_N^-(A,B)$ la de Lie, entonces

$$T_N(A,B) = T_N^+(A,B) + iT_N^-(A,B) \quad A, B \in V,$$

y por tanto, en virtud de los teoremas 2.2.1, y 2.2.2 y de la nota 2.2 se tiene que:

Teorema 2.3.1. *Sea (V,μ) un álgebra asociativa y $N : V \to V$ una aplicación lineal. Denotemos por $U(\epsilon) = \epsilon\mathbb{I} + N$ a la deformación de N y por $V = V_R \oplus V_N$ la descomposición de V relativa a N. Entonces si la torsión de Nijenhuis $T_N(X,Y)$ toma valores en V_R se tiene que:*

a) La contracción (V, μ_N) es un álgebra asociativa compatible con (V,μ).

b) La contracción $(V, [\cdot,\cdot]_N)$ es un álgebra Lie compatible con $(V, [\cdot,\cdot])$.

c) La contracción $(V, \circ_N)$ es un álgebra de Jordan.

Faltaría ver la compatibilidad entre las álgebras de Jordan $(V, \circ)$ y $(V, \circ_N)$. Para ello notar que,

$$A \circ B = -A * B + i\,[A,B]\,,$$

y que

$$A \circ_N B = -A *_N B + i\,[A,B]_N\,,$$

y como sabemos que las álgebras asociativa y de Lie son compatibles, también se tendrá que el álgebra de Jordan lo es.

Notar que este resultado no es de carácter general, sino que sólo es aplicable a las álgebras de Jordan definidas como la parte totalmente simétrica de un álgebra asociativa conocida; siendo por otro lado el álgebra de Lie su parte antisimétrica. Por tanto, partiendo de una $\mathbb{C}^*$-álgebra $(\mathcal{A}, \cdot, *)$ con un producto asociativo dado, será posible caracterizar la contracción de estructuras sobre el espacio de observables $\mathcal{O}$. No obstante, la formulación suele darse en sentido contrario [5]. Partiendo de un álgebra de Lie-Jordan-Banach correspondiente a los observables $\mathcal{O}$, tomando las combinaciones de los productos de Lie y de Jordan, se define un producto asociativo $\bullet$ en $\mathcal{O}^{\mathbb{C}} = \mathcal{O} \oplus i\mathcal{O}$, de manera que dicha álgebra asociativa $(\mathcal{O}^{\mathbb{C}}, \bullet)$ equipada con la involución $x^* = (a+ib)^* = a - ib$ y la norma $\|x\| = \|x^*x\|^{1/2}$, definida a partir de la norma existente en $\mathcal{O}$, es la única $\mathbb{C}^*$-álgebra cuya parte real es $\mathcal{O}$.

2.4. El efecto en el tensor de Poisson Λ sobre $\mathfrak{g}^*$ asociado a una contracción de Lie sobre $\mathfrak{g}$

Recordemos que estamos trabajando en todo momento sobre un espacio de Hilbert de dimensión compleja N, y que de este modo el álgebra $\mathcal{O}$ es de dimensión finita. Como hemos visto en el Capítulo 1, la estructura de Lie existente en $\mathcal{O}$ **define de manera natural mediante** (1.6) **una estructura de Poisson** $\{\cdot,\cdot\}$ **sobre** $\mathcal{O}^*$. También anteriormente, hemos usado que en dimensión finita $\mathcal{O} \equiv (\mathcal{O}^*)^*$ a través de la aplicación,

$$\varphi : \mathcal{O} \to (\mathcal{O}^*)^* \qquad A \mapsto \hat{A}. \tag{2.14}$$

donde $\hat{A}(\alpha) = \alpha(A)$, $\forall \alpha \in \mathcal{O}^*$. Esto nos permite dualizar la estructura de Lie existente en $\mathcal{O}$ al subconjunto de $C^\infty(\mathcal{O}^*)$ dado por las funciones lineales sobre $\mathcal{O}^*$. De ahora en adelante la teoría se desarrollará para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ genérica, aplicándose el resultado al caso particular del álgebra $\mathcal{O}$.

Sea $(e_1, \ldots, e_N)$ una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y llamemos $x^i \equiv \hat{e}_i \, \forall \, i = 1, \ldots, N$ a las aplicaciones lineales correspondientes sobre $\mathfrak{g}^*$ dadas por

$$x^i(\xi) = \xi(e_i) \qquad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*. \tag{2.15}$$

De esta forma las relaciones de conmutación para la estructura de Poisson existente en $\mathfrak{g}^*$ estarán dadas por

$$\left\{x^i, x^j\right\}_{\mathfrak{g}} = C_{ij}^k x^k,$$

donde C_{ij}^k son las constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con respecto a la base,

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k,$$

y así, el paréntesis de Poisson para dos funciones $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ vendrá dado por:

$$\{f, g\}_{\mathfrak{g}} = C_{ij}^k x^k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \tag{2.16}$$

Como ya se hizo referencia en el capítulo anterior, la existencia de un álgebra de Lie y de Jordan en $\mathcal{O}$ permite definir de manera natural objetos tensoriales que traduzcan estas estructuras sobre $\mathcal{O}^*$. Así, la propiedad del paréntesis de Poisson, $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$, de ser antisimétrico y una biderivación en $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$[2] permite asociarle un bi-vector $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ escrito en coordenadas x^i como

$$\Lambda_{\mathfrak{g}} = C_{ij}^k x^k \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{2.17}$$

de manera que encontramos,

$$\begin{aligned}\{f, g\}_{\mathfrak{g}} = \Lambda_{\mathfrak{g}}(df, dg) &= \Lambda_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \frac{\partial g}{\partial x^j} dx^j\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \Lambda_{\mathfrak{g}}(dx^i, dx^j) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \left\{x^i, x^j\right\}_{\mathfrak{g}} = C_{ij}^k x^k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \; \forall \, f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).\end{aligned}$$

Del mismo modo el álgebra de Jordan es traducida por el tensor que en coordenadas x_i toma la forma,

$$R_{\mathfrak{g}} = d_{ij}^k x^k \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes_S \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{2.18}$$

de manera que,

$$R_{\mathfrak{g}}(df, dg) = \{f, g\}_{+\mathfrak{g}} \; \forall \, f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

Por último debemos investigar cúal es la condición equivalente a la identidad de Jacobi para el paréntesis de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$, que debe de cumplir $\Lambda_{\mathfrak{g}}$. Está condición equivale a que se anule el paréntesis de Schouten[3] del tensor de Poisson consigo mismo,

$$[\Lambda_{\mathfrak{g}}, \Lambda_{\mathfrak{g}}]_S = 0. \tag{2.19}$$

Nota. Para el caso del tensor R asociado al álgebra de Jordan sobre $\mathcal{O}$, no se tiene una condición análoga. No existe en la literatura referencias sobre este objeto y el análisis del mismo sale fuera del objetivo de este trabajo.

[2] A esta propiedad la denotamos en 1.6 por regla de Leibniz.

[3] Ver apéndice sobre geometría diferencial 3.

A continuación nuestro objetivo en esta sección será estudiar la relación existente entre la estructura de Poisson $\Lambda_{\mathfrak{g}^0}$ asociada a la contracción del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y la estructura $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ asociada a esta última.

Nota. Notar que la variedad soporte en todo el desarrollo es $M = \mathfrak{g}^*$, de forma que si $F : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ es una aplicación diferenciable, contaremos con sus respectivas aplicaciones diferencial, F_* y codiferencial F^*; transportando campos a campos y formas diferenciales a formas diferenciales.

Tal y como definimos contracción en la sección anterior, consideremos la familia de automorfismos $\phi_0(\epsilon) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\forall \epsilon \in (0,1]$, y denotemos por $\phi(\epsilon) = \phi_0(\epsilon)^*$ al mapa dual y por $\phi_2(\epsilon) = \phi(\epsilon)^*$ a,

$$\phi_2(\epsilon) : (\mathfrak{g}^*)^* \mapsto (\mathfrak{g}^*)^* \qquad x^a \mapsto \overline{x}^a,$$

donde $\overline{x}^a$[4] es la función lineal coordenada sobre $\mathfrak{g}^*$ asociada al elemento $\phi(\epsilon)(a)$, es decir:

$$\tilde{x}^a(\alpha) = \phi_2(\epsilon)(x^a) = \alpha(\phi(\epsilon)a) \ \forall \alpha \in \mathfrak{g}^*.$$

Así con la identificación $\mathfrak{g} \equiv (\mathfrak{g}^*)^*$, podemos poner:

$$[\phi_0(\epsilon)a, \phi_0(\epsilon)b] \equiv \left\{\tilde{x}^a, \tilde{x}^b\right\}_{\mathfrak{g}} = \Lambda_{\mathfrak{g}}(d\tilde{x}^a, d\tilde{x}^b) \in (\mathfrak{g}^*)^*.$$

y teniendo en cuenta la definición de contracción 2.3, se tiene que para todo $\epsilon \in (0,1]$ las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\epsilon = (V, [\cdot,\cdot]_\epsilon)$ donde,

$$[a,b]_{\phi_0(\epsilon)} = \phi_0(\epsilon)^{-1}\left[\phi_0(\epsilon)a, \phi_0(\epsilon)b\right] \equiv \phi_2(\epsilon)^{-1}\left\{\tilde{x}^a, \tilde{x}^b\right\}_{\mathfrak{g}} = \phi_2(\epsilon)^{-1}\Lambda_{\mathfrak{g}}(d\tilde{x}^a, d\tilde{x}^b), \tag{2.20}$$

son isomorfas a $\mathfrak{g} = (V, [\cdot,\cdot])$.

Por otro lado, como $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ es un bi-vector, considerando la imagen por la aplicación diferencial,

$$(\phi_*(\epsilon)) : T\mathfrak{g}^* \to T\mathfrak{g}^*,$$

se obtiene [11] que,

$$\begin{gathered}\left(\left(\phi_*(\epsilon)\right)\Lambda_{\mathfrak{g}}\right)(dx^a, dx^b)(p) = \left(\phi(\epsilon)^{-1}\right)^*\Lambda_{\mathfrak{g}}(d\tilde{x}^a, d\tilde{x}^b)(p) = \left(\phi_2(\epsilon)^{-1}\right)\Lambda_{\mathfrak{g}}(d\tilde{x}^a, d\tilde{x}^b)(p), \\ \forall p \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}),\end{gathered} \tag{2.21}$$

donde se ha usado que $\phi_2(\epsilon)^{-1} \equiv (\phi(\epsilon)^*)^{-1} = \left(\phi(\epsilon)^{-1}\right)^*$ y que $\phi^*(\epsilon)(x^a) = \phi(\epsilon)^*(x^a)$.

Así juntando (2.20) y (2.21) se obtiene,

$$\Lambda_{\mathfrak{g}_\epsilon}(dx^a, dx^b) \equiv [a,b]_{\phi_0(\epsilon)} = \left(\left(\phi_*(\epsilon)\right)\Lambda_{\mathfrak{g}}\right)(dx^a, dx^b), \tag{2.22}$$

y por tanto,

$$\Lambda_{\mathfrak{g}_\epsilon} = \left(\phi(\epsilon)\right)_*\Lambda_{\mathfrak{g}}, \tag{2.23}$$

que en el caso del límite $\epsilon \to 0$ resulta en

$$\Lambda_{\mathfrak{g}^0} = \lim_{\epsilon \to 0}\left(\phi(\epsilon)\right)_*\Lambda_{\mathfrak{g}}. \tag{2.24}$$

Por tanto, lo que hemos hecho es introducir formalmente la idea de contracción de álgebras de Lie desde un punto de vista geométrico. En nuestro estudio posterior, deberemos verificar

[4] Para evitar una notación recargada y confusa, denotaremos por x^a a lo que antes llamábamos $\hat{A}$ para el caso del álgebra de operadores $\mathcal{O}$.

que efectivamente, el tensor $\Lambda_{\mathfrak{g}^0}$ obtenido tras la contracción, es de tipo Poisson, es decir, cumple (1.6). Del mismo modo querremos ver qué ocurre con la estructura de Jordan y si es posible definir contracciones para dichas álgebras.

Desde un punto de vista dinámico, dado el isomorfismo

$$\phi(\epsilon) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \qquad \alpha \mapsto \phi(\epsilon)\alpha = \alpha \circ \phi_0(\epsilon),$$

si tomamos $\epsilon = 1/t$ con t una variable que representa el tiempo, la ecuación (2.23) representa la evolución (transporte) de la estructura de Poisson Λ, existente en el espacio de observables $\mathcal{O}$. Por ejemplo, en el caso de sistemas disipativos, (2.23) determina la evolución del tensor Λ_t para una determinada condición inicial $\Lambda_{\mathfrak{g}}$, de manera que en el límite, $t \to \infty$, $\Lambda_{\mathfrak{g}^0}$ da cuenta de cómo se ha contraido la estructura una vez que el sistema ha alcanzado el equilibrio. Este flujo $\phi(t)$, es el asociado a un campo vectorial X^L[5]. Es decir X^L es el generador infinitésimal del semigrupo uniparamétrico $\phi(t)$. De esta forma el tensor de Poisson, pasado un cierto tiempo $t > 0$, vendrá determinado por,

$$\Lambda_t = \phi_*(t)\Lambda_{\mathfrak{g}},$$

que nombrando $\phi(t) = \phi_t$ por comodidad, actua como ya hemos visto (2.21),

$$\Lambda_t(\alpha, \beta) = (\phi_t^*)^{-1} \left(\Lambda_{\mathfrak{g}} \left(\phi_t^*(\alpha), \phi_t^*(\beta) \right) \right), \ \forall\, \alpha, \beta \in \bigwedge{}^1 (\mathfrak{g}^*)\,. \tag{2.25}$$

Además dada la definición de derivada de Lie para tensores contravariantes,

$$\mathcal{L}_X(\Lambda) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\Lambda - \phi(t)_* \Lambda),$$

se puede concluir que,

$$\left. \frac{d}{dt}\Lambda_t \right|_{t=0} = -\mathcal{L}_X \Lambda. \tag{2.26}$$

De manera análoga se define la evolución para el tensor simétrico R, no obstante la demostración queda pendiente,

$$\left. \frac{d}{dt}R_t \right|_{t=0} = -\mathcal{L}_X R. \tag{2.27}$$

Notar que la ecuación (2.25) no es equivalente a la obtenida en (2.8)

$$[a, b]_\epsilon = U(\epsilon)^{-1} \left[U(\epsilon)a, U(\epsilon)b \right].$$

En ese caso se modificaba la estructura de Lie en un espacio *lineal* subyacente sobre el álgebra $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$. Ahora observamos el efecto de tal modificación sobre la estructura de Poisson existente sobre el dual del álgebra $\mathfrak{g}^*$, caracterizada por el tensor Λ.

Por tanto, si queremos desarrollar un estudio sobre la contracción de las estructuras Λ y R análogo al realizado por Saletan e Inönü y Wigner, deberemos estudiar para qué 'tipo' de campos dinámicos, los límites

$$\lim_{t \to \infty} e^{-t\mathcal{L}_X} \Lambda \qquad \lim_{t \to \infty} e^{-t\mathcal{L}_X} R, \tag{2.28}$$

existen. Así habrá de analizarse el operador $e^{-t\mathcal{L}_X}$ sobre el espacio de bivectores Λ y de 2-tensores R, para los distintos campos dinámicos. Notar que haciendo uso de la linealidad de

[5]El nombre del campo X^L es debido a Lindblad.

X, R y Λ comentada en 1.2, el espectro de este operador viene determinado por el espectro del operador $\mathcal{L}_X$, visto como aplicación lineal sobre sendos espacios. Este método desarrollado para el estudio de las contracciones desde un punto de vista geométrico, agiliza el análisis de las mismas y plantea una manera 'intuitiva' y fácilmente implementable del estudio de dichos límites 2.28. En el caso de que sólo nos interese conocer si existe una contracción del álgebra de Lie real sobre funciones lineales $(\mathfrak{g}^*)^*$, bastará con analizar el flujo ϕ_t asociado a dicho campo X.

Capítulo 3

Aplicación de contracciones de álgebras en su formulación geométrica

Una de las características más notorias de la mecánica cuántica es la no conmutatividad de algunos de sus observables [15]. Si un conmutador es nulo, los observables asociados se comportan como magnitudes clásicas una respecto a la otra, en el sentido de que ambas magnitudes pueden ser medidas simúltaneamente A.0.4. Así un sistema es clásico cuando todos sus observables conmutan.

Por otro lado, debemos tener en cuenta que un sistema cuántico debe ser pensando como un sistema abierto B, debido a que cualquier sistema real está sujeto a un acoplo incontrolable con el entorno, el cual le influye de una forma no despreciable. Así un sistema cuántico disipativo, es decir aquel sistema que interaccionando con el entorno sufre una 'fuga de probabilidad', pierde algunas de sus características cuánticas más genuinas durante su evolución; mostrando finalmente un comportamiento 'clásico', ya que algunos observables que en principio no conmutaban pasan a conmutar. Por ejemplo, dichos sistemas pierden la capacidad de interferir [16].

Parece pues interesante entender qué les ocurre a los observables de un sistema cuántico disipativo, y puesto que es la no-conmutatividad la que mide el acercamiento al mundo clásico, parece útil estudiar qué le ocurre al álgebra de observables $\mathcal{O}$ a lo largo de dicha evolución, en términos de contracciones de álgebras. Aplicaremos por tanto la formulación geométrica de la mecánica cuántica sobre el álgebra de observables, para así caracterizar la evolución de los mismos y la contracción de las estructuras subyacentes.

3.1. Ejemplo 1: Evolución en sistemas cuánticos abiertos

Consideremos la evolución de un *qubit*[1] que sufre un amortiguamiento en su fase [15] y [17], de manera que el operador de Kossakowski-Lindblad B.2, es decir la aplicación $L \in \mathrm{End}(\mathcal{O}^*)$ es de la forma

$$L(\rho) = -\gamma\,(\rho - \sigma_3\rho\sigma_3) \qquad \rho \in \mathcal{O}^* \tag{3.1}$$

siendo $\gamma > 0$ y σ_i con $i = 1, 2, 3, 4$ las matrices de Pauli.

[1] Se denomina *qubit* a un sistema cuántico con dos estados propios.

En este caso se tendrá que $\mathcal{O} \equiv i\mathfrak{u}(2)$. Sabemos que una base de este espacio viene dada por las matrices de Pauli más la matriz identidad (matrices todas ellas hermíticas), es decir,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo pues la matriz más general de la forma

$$A = \begin{pmatrix} x^4 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^4 - x^3 \end{pmatrix} = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 + x^4\sigma_4,$$

donde haciendo uso de la existencia de un producto escalar (1.5) se tiene,

$$x^i = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A\sigma_i) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4.$$

Además conocemos las constantes de estructura, tanto de Lie como de Jordan, de este álgebra.

$$[\sigma_i, \sigma_j]_- = \epsilon_{ijk}\,\sigma_k \qquad [\sigma_4, \sigma_j]_- = 0 \qquad \text{para } i, j, k = 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita, y por otro lado,

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = \delta_{ij}\,\sigma_4 \qquad [\sigma_4, \sigma_j]_+ = \sigma_j \qquad \text{para } i, j = 1, 2, 3. \tag{3.3}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecher. Si $\xi_A, \in \mathcal{O}^*$ es un punto sobre $\mathcal{O}^*$ tal que $A = x^n\sigma_n \in \mathcal{O}$, entonces se tendrá que las componentes i, j de los tensores obtenidos en (1.6) en esta base serán,

$$\Lambda(d\hat{\sigma}_i, d\hat{\sigma}_j)(\xi_A) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \big(A\,[\sigma_i, \sigma_j]_-\big) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \left(x^n\sigma_n\epsilon_{ijk}\sigma_k\right) = \frac{x^n\epsilon_{ijk}}{2}\mathrm{Tr}\ \left(\sigma_n\sigma_k\right) \tag{3.4}$$

$$= x^n\epsilon_{ijk}\delta_{kn} = x^k\epsilon_{ijk} \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3, \tag{3.5}$$

$$\Lambda(d\hat{\sigma}_4, d\hat{\sigma}_j)(\xi_A) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \big(A\,[\sigma_4, \sigma_j]_-\big) = 0 \quad \forall\, j = 1, 2, 3, 4. \tag{3.6}$$

y análogamente

$$R(d\hat{\sigma}_i, d\hat{\sigma}_j)(\xi_A) = x^4\delta_{ij}, \qquad R(d\hat{\sigma}_4, d\hat{\sigma}_j)(\xi_A) = x^j \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3. \tag{3.7}$$

Por tanto, los tensores vienen dados por,

$$\Lambda = x^1\frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3} + x^2\frac{\partial}{\partial x^3} \wedge \frac{\partial}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} \tag{3.8}$$

$$R = \sum_{j=1}^{3} x^4\frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{j=1}^{3} x^j\frac{\partial}{\partial x^j} \otimes_S \frac{\partial}{\partial x^4} + x^4\frac{\partial}{\partial x^4} \otimes \frac{\partial}{\partial x^4} \tag{3.9}$$

Como hemos obtenido en este último ejemplo, dada la definición de ambos tensores (1.6) resulta que:

Proposición 1. *Dada una base $\{e_n\}$ del álgebra $\mathcal{O}$ cuyas funciones coordenadas son $\{x^n\}$, se tienen las expresiones coordenadas:*

$$\Lambda = \frac{1}{2}c_{ij}^k x^k\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad R = \frac{1}{2}d_{ij}^k x^k\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{3.10}$$

donde c_{ij}^k y d_{ij}^k corresponden a las constantes de estructuras de las álgebras de Lie y de Jordan existentes en $\mathcal{O}$.

Calculemos ahora el campo vectorial X^L asociado al operador de Lindblad (3.1). Sea $\rho \in \mathcal{O}^*$ el estado cuántico del sistema de manera que $\tilde{\rho} \in \mathcal{O}$[2] y sea $A \in \mathcal{O}$, entonces ya vimos que el campo venía dado por

$$X^L_\rho(d\hat{A}) = L(\rho)(A) = \rho(L^*(A)) = \langle \tilde{\rho}, L^*(A) \rangle_{\mathcal{O}} \,.$$

Observar que para las matrices de Pauli $\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\sigma_4$ y entonces se tiene que,

$$L^*(\sigma_1) = -2\gamma\sigma_1 \qquad L^*(\sigma_2) = -2\gamma\sigma_2 \qquad L^*(\sigma_3) = 0 \qquad L^*(\sigma_4) = 0,$$

y por tanto,

$$X^L_\rho(d\hat{\sigma_1}) = -2\gamma x^1 \qquad X^L_\rho(d\hat{\sigma_2}) = -2\gamma x^2.$$

En definitiva, en la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ se tiene

$$X^L_\rho = -2\gamma \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right).$$

En este caso sencillo, para calcular las soluciones de las ecuaciones diferenciales (2.26) y (2.27), dadas por

$$\Lambda_t = e^{-t\mathcal{L}_{X^L}}\Lambda \qquad R_t = e^{-t\mathcal{L}_{X^L}}R$$

sumamos la serie obtenida a partir de la exponencial del operador $\mathcal{L}_{X^L}$, haciendo uso de las relaciones[3],

$$\left(\mathcal{L}_{X^L}\right)^n(\Lambda) = (2\gamma)^n \underbrace{x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2}}_{T} \qquad \left(\mathcal{L}_{X^L}\right)^n(R) = (4\gamma)^n \underbrace{x^4 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \right)}_{S} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

de manera que se obtiene,

$$\Lambda_t = \Lambda + \left(e^{-2\gamma t} - 1\right) T \qquad R_t = R + \left(e^{-4\gamma t} - 1\right) S,$$

que en el límite $t \to \infty$ da lugar a las contracciones,

$$\Lambda_\infty = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \wedge \frac{\partial}{\partial x^1},$$

$$R_\infty = x^4 \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \otimes \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^4} \otimes \frac{\partial}{\partial x^4} \right) + \sum_{j=1}^{3} x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes_S \frac{\partial}{\partial x^4}$$

Para este ejemplo es fácil verificar las estructuras de Jordan, de Lie y la compatibilidad de Lie-Jordan, obteniéndose así una 'buena' contracción de todas ellas, y por tanto también de la estructura asociativa inducida por ambas.

a) Estructura de Lie:

$$[\sigma_1, \sigma_3]_\infty = -\sigma_2, \qquad [\sigma_2, \sigma_3]_\infty = \sigma_1, \qquad [\sigma_1, \sigma_2]_\infty = 0, \qquad [\sigma_4, \sigma_j]_\infty = 0 \qquad \text{para } j = 1, 2, 3. \tag{3.11}$$

[2]De nuevo se ha hecho uso del isomorfismo existente entre un espacio y su dual dado por el producto escalar.

[3]Debido a la longitud de las cuentas, la resolución de las mismas se han hecho en Mathematica 9.0 usando cálculo simbólico.

b) Estructura de Jordan:

$$(\sigma_i \circ \sigma_j)_\infty = 0, \qquad (\sigma_4 \circ \sigma_j)_\infty = \sigma_j \qquad \text{para } i, j = 1, 2, 3. \tag{3.12}$$

Vemos pues como en ambos casos las estructuras se han vuelto más sencillas, en el sentido de que algunos paréntesis de Jordan y de Lie se han anulado. De hecho para el caso del álgebra de Lie, se ha obtenido el álgebra del grupo Euclídeo en dos dimensiones, $\mathfrak{e}(2)$[4] Nos preguntamos ahora por la caracterización de la contracción de Lie obtenida, aplicando la teoría desarrollada en el Capítulo 2. En este sentido, la transformación lineal sobre el álgebra $\mathcal{O}$, es el endomorfismo adjunto $(\phi_t)^*$ de $\phi_t : \mathcal{O}^* \to \mathcal{O}^*$, donde ϕ_t es el flujo asociado al campo X^L. Puesto que trabajamos con campos lineales, esto nos permitirá desarrollar de manera algebraica la evolución de la contracción.

Sea $\{e_i\}$ base de $\mathcal{O}^*$, entonces el flujo asociado a X^L sobre la variedad $\mathcal{O}^*$ vendrá dado por,

$$\phi_t(\rho_0) = e^{-tX^L} \rho_0,$$

donde por ser X^L un campo lineal podrá escribirse de la forma,

$$X^L = a^i_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i},$$

y así podemos ver a ϕ_t como aplicación lineal sobre $\mathcal{O}^*$ dada por $\phi_t(\rho_0) = e^{-a^i_j} \rho_0$. Como estamos en un espacio lineal de dimensión finita, el endomorfismo adjunto de ϕ_t viene dado por la conjugación de la matriz que representa a ϕ_t. De esta forma en el ejemplo en el que estamos se tiene,

$$(\phi_t)^* = \text{Diag}\left(e^{-2\gamma t}, e^{-2\gamma t}, 1, 1\right).$$

Notar que dicha contracción se puede identificar con las introducidas por Saletan, siendo

$$u = \text{Diag}(0, 0, 1, 1) \qquad w = \text{Diag}(1, 1, 0, 0),$$

y $\epsilon = e^{-2\gamma t}$. Por tanto se obtiene que el espacio vectorial subyacente se escinde en $V_R = \langle \sigma_3, \sigma_4 \rangle$ y $V_N = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, donde se comprueba que los elementos de V_R generan una subálgebra de Lie del álgebra inicial.

3.2. Ejemplo 2: Efecto Zenón Cuántico en dos niveles

Este efecto, descrito en el apéndice D, recibe su nombre en 1976 [4]. Se trata de un fenómeno existente en el mundo cuántico, por el cual uno podría congelar un sistema cuántico en un estado determinado [18], [19],[20], mediante una sucesión de medidas sobre el sistema de interés.

Dicha sucesión de observaciones continuadas, tiene un efecto similar sobre el sistema cuántico [19], al que tenía la evolución en sistemas cuánticos abiertos. Entre ellos, la pérdida casi total de coherencia. Nos preguntamos pues si será posible entender la dinámica de Zenón desde el punto de vista expuesto en el Ejemplo 1. Puesto que necesitamos caracterizar la evolución de un sistema cuántico bajo este efecto, necesitamos deducir el campo dinámico asociado a dicha evolución X^Z. En el apéndice D.1, se deduce la expresión para este campo obteniéndose que toma la forma:

$$X^Z_\rho(\hat{A}) = \langle A, Z(\rho) \rangle_{\mathcal{O}} = \left\langle Z^\dagger(A), \rho \right\rangle_{\mathcal{O}} = \left\langle -[P, [H_Z, A]]_+ + [H_Z, A], \rho \right\rangle_{\mathcal{O}} \quad A \in \mathcal{O},\ \rho \in \mathcal{O}^*. \tag{3.13}$$

[4]Ver ejemplo apéndice F.

Dado el campo dinámico, el planteamiento es el siguiente:

Sea un sistema cuántico en el estado $\rho \in \mathcal{O}^*$ cuya evolución viene determinada por un Hamiltoniano H, y sea P el proyector que representa al proceso de medir, protegiendo el subespacio sobre el que proyecta. Dado que la evolución viene descrita por el campo de Zenón (3.13), ¿Es cierto que se produce una contracción del álgebra de Lie-Jordan de los observables, de forma que existen los límites (2.26) y (2.27)? ¿En caso de que así sea, las álgebras obtenidas siguen siendo de Lie-Jordan o conservan alguna estructura?

Consideremos el Hamiltoniano y el proyector P,

$$H = \begin{pmatrix} a & \Omega_1 + i\Omega_2 \\ \Omega_1 + i\Omega_2 & b \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que protege el subespacio generado por $\langle(1,0)\rangle$. Puesto que estamos en un sistema cuántico de 2 niveles consideraremos de nuevo $\mathcal{O} \equiv i\mathfrak{u}(2)$, siendo la base, la formada por las matrices de Pauli más la identidad. En este caso, el campo dinámico toma la forma,

$$X_Z = \left(\frac{a}{4}x^2, -\frac{a}{4}x^1, 0, 0\right), \qquad \text{o bien} \qquad X_Z = \frac{a}{4}x_2\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{a}{4}x^1\frac{\partial}{\partial x^2} \tag{3.14}$$

De nuevo, debemos analizar la convergencia de los límites

$$\Lambda_t = e^{-t\mathcal{L}_{X^Z}}\Lambda \qquad R = e^{-t\mathcal{L}_{X^Z}}R$$

En el ejercicio anterior abordamos el proceso de contracción haciendo uso de propiedades recursivas particulares para el problema dado. En este caso haremos uso del procedimiento general, analizando del operador $\mathcal{L}_X^Z$. Centrémonos en la contracción de la estructura de Lie. Sabemos que el tensor Λ es un tensor antisimétrico y así su representación matricial viene dada por,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & x^3 & -x^2 & 0 \\ -x^3 & 0 & x^1 & 0 \\ x^2 & -x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

una matriz antisimétrica. Por otro lado la derivada de Lie transforma objetos antisimétricos en objetos antisimétricos, por lo cual $\mathcal{L}_{X^z}\Lambda$ es un tensor antisimétrico.

Por tanto, la existencia de una base de matrices antisimétricas $\{B_i\}$ dependientes de las coordenadas $\{x^i\}_{i=1}^9$ permitirían expresar cualquier bivector (antisimétrico) sobre la variedad $\mathcal{O}^*$, como combinación lineal de elementos de dicha base. Esto nos permite representar $\mathcal{L}_{X^Z}$ como una matriz y por otro lado a Λ como un vector en dicho espacio. De esta forma, sólo necesitaríamos calcular la exponencial de dicha matriz y aplicar el resultado a Λ. No obstante, para que dicho límite definierá una contracción, sería necesario que si $\{v_i\}$ es la base de vectores propios del operador $\mathcal{L}_{X^Z}$, Λ estuviera contenida en el subespacio invariante asociado a los valores propios nulos o/y a aquellos con parte real positiva de $\mathcal{L}_{X^Z}$. De esta manera dicho limite convergería. También puede darse el caso de que sean imaginarios puros como veremos.

En efecto, este desarrollo es el que se ha seguido para programar en Mathematica 9.0 las cuentas a realizar , siendo para este caso la representación matricial de $\mathcal{L}_{X^Z}$, de tamaño 12. Se ha encontrado que los valores propios del operador $\mathcal{L}_{X^Z}$ son imaginarios puros y nulos (ya que la matriz obtenido es antisimétrica), y que $\Lambda \in \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{X^Z})$ y por tanto la dinámica de Zenón no contrae el álgebra de Lie. Por otro lado, tampoco contrae el álgebra de Jordan, de forma que $\Lambda_\infty = \Lambda$ y $R_\infty = R$, y por tanto las álgebras resultantes son las originales.

Esto es debido a que $\mathcal{L}_{X^Z}\Lambda = 0$ y $\mathcal{L}_{X^Z}R = 0$ y por tanto dicha evolución no contrae la dinámica (se dice que es unitaria). De hecho es fácil obtener que dicho campo Hamiltoniano X^Z tiene como operador Hamiltoniano asociado,

$$H_0 = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta - \frac{a}{2} \end{pmatrix}, \text{donde } \Delta \in \mathbb{R}, \text{ de manera que } X^Z = \Lambda(d\tilde{H}_0, \cdot).$$

3.3. Ejemplo 3: Efecto Zenón en tres niveles

El ejemplo anterior, aunque didáctico, no ha reportado ninguna información sobre la posibilidad de explicar la dinámica de Zenón mediante la teoría de contracciones. De hecho, en el estudio del efecto Zenón para el caso de sistemas de dos niveles, se ha encontrado que para el Hamiltoniano más general (el usado en el ejemplo anterior) y para cualquier proyector P en dos dimensiones, no existen contracciones del álgebra de Lie. De hecho, se obtiene que para todo tiempo, finito e infinito, las álgebras obtenidas son difeomorfas a la inicial.

Este resultado, no implica que se haya de descartar la posibilidad de obtener contracciones de álgebras para la dinámica de Zenón, ya que podría ser debido a la baja dimensión del espacio considerado. Por tanto, para este ejemplo consideraremos un espacio de dimensión superior.[5]

Sean el Hamiltoniano del sistema y el proyector,

$$H = \begin{pmatrix} a & \Omega_1 + i\Omega_2 & \Omega_3 + i\Omega_4 \\ \Omega_1 - i\Omega_2 & b & \Omega_5 + i\Omega_6 \\ \Omega_3 - i\Omega_4 & \Omega_5 - i\Omega_6 & c \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Realizando un desarrollo análogo al del anterior ejemplo, encontramos que Λ pertenece al subespacio invariante asociado al autovalor cero del operador $\mathcal{L}_{X^Z}$, que vuelve a ser antisimétrico. Por tanto, no encontraremos una contracción del álgebra de Lie en $\mathcal{O}^*$, sino que se tendrá $\Lambda_\infty = \Lambda$. Por otro lado se encuentra también que $R_\infty = R$. Por tanto, llegamos al mismo resultado obtenido en el ejemplo anterior. ¿Se deduce entonces que debemos considerar proyectores sobre subespacios de mayor dimensión? Pese a que aún no se ha desarrollado un análisis completo del problema, esta parece ser una vía acertada para la explicación del mismo, pues se han encontrado casos en los se transforman las estructuras algebraicas iniciales. Sin embargo, queda por analizar si dichas transformaciones dan lugar a contracciones del álgebra.

3.4. Conclusión

En resumen, habiendo partido de una $\mathbb{C}^*$-álgebra, un álgebra de Banach compleja asociativa dotada de una involución antilineal $(\mathcal{A}, \cdot, \dagger)$, hemos identificado los elementos autoadjuntos $\mathcal{O} = \{A \in \mathcal{A} | A^\dagger = A\}$ con los observables del sistema cuántico, y además definiendo los nuevos productos,

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA), \qquad [A, B] = \frac{-i}{2}(AB - BA),$$

[5]Esto supondrá hacer uso de Mathematica como programa de análisis simbólico (a no ser que la complejidad del problema haga necesario un análisis numérico). En este caso, el operador $\mathcal{L}_{X^Z}$ tiene una representación matricial de dimensión 252.

hemos dotado a $\mathcal{O}$ de una estructura de álgebra de Lie-Jordan-Banach.

Una vez hemos caracterizado el álgebra de observables, el resultado importante de la primera sección es que hemos transportado las estructuras algebraicas existentes en el espacio lineal $\mathcal{O}$, a una variedad diferenciable[6] de manera que hemos encontrado nuevos objetos (diferenciales) y transformaciones sobre dicha variedad. De esta forma, nos hemos servido de objetos tensoriales para geometrizar las estructuras algebraicas existentes en $\mathcal{O}$, R y Λ.

Tras este enorme salto que supone reformular la mecánica cuántica sobre una variedad diferenciable y a raíz de la caracterización dada en [15] para sistemas cuánticos abiertos, se nos ocurrió si podríamos caracterizar las estructuras algebraicas subyacentes para todo tiempo t de la evolución de un sistema cuántico, y en caso de que así fuera, si sería posible determinar dichas estructuras una vez el sistema haya alcanzado el equilibrio $t \to \infty$.

Haciendo por tanto uso de la teoría de contracciones, encontramos para dichos tensores ecuaciones análogas a $\mu_\epsilon(x,y) = T^{-1}(\epsilon)\mu(T(\epsilon)x, T(\epsilon)y) \quad \forall\, x, y \in V$, donde las transformaciones $T(\epsilon)$ vienen dadas por el flujo del campo dinámico X. Como consecuencia conseguimos obtener dos ecuaciones diferenciales que rigen **la evolución de las estructuras algebraicas**, dadas por

$$\left.\frac{d}{dt}\Lambda_t\right|_{t=0} = -\mathcal{L}_X\Lambda \qquad \left.\frac{d}{dt}R_t\right|_{t=0} = -\mathcal{L}_X R.$$

Por último, los resultados relevantes obtenidos en este trabajo han sido: por un lado la deducción de las condiciones suficientes para que un álgebra de Jordan asociada a un álgebra asociativa, definiera una contracción 2.3.1; por otro, gracias a la formulación geométrica de la mecánica cuántica hemos conseguido:

· Definir el proceso de contracción de álgebras de Jordan, el cual no hemos encontrado descrito en la literatura científica.

· Generalizar el tipo de isomorfismos de un álgebra que determinan una contracción de la misma.

· Imponer condiciones necesarias y suficientes sobre dichas transformaciones con el fin de que determinen una contracción, mediante el análisis del espectro del operador $\mathcal{L}_X$ actuando sobre el espacio correspondiente (bivectores y 2-tensores).

· Definir el proceso de contracción de las estructuras de Poisson, dualizando la correspondiente álgebra de Lie real.

· Comprender la evolución de las estructuras algebraicas subyacentes en un determinado sistema físico.

· Conciliar el formalismo geométrico con la teoría de contracciones y así aplicar esta formulación a la resolución de problemas físicos.

· Empezar a entender la casuística dada en la dinámica del efecto Zenón cuántico.

Como hemos señalado en el último punto, tan sólo empezamos a entender el efecto que sobre las estructuras algebraicas, tiene la evolución de Zenón. Como corroboramos en el

[6] Para ello hemos tomado como carta global $(M(N,\mathbb{C}),\varphi)$ la dada por

$$\varphi : M(N,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^{N^2}, \qquad A \mapsto (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{NN}),$$

Ejemplo 3, no es trivial el encontrar un caso de contracción de la estructura de Lie. Por tanto, queda como problema abierto el entender si existen casos para los cuales la dinámica de Zenón defina buenas contracciones, o si existe algún impedimento en su formulación que impida la aplicación de la teoría de contracción de álgebras a este efecto en concreto y por qué. De hecho, tampoco se puede descartar la posibilidad, de que mientras la evolución transforma el álgebra de Lie en álgebras isomorfas para todo tiempo t; el álgebra de Jordan pueda contraerse. A estas preguntas se les intentará dar respuesta en breve.

Bibliografía

[1] J. Clemente-Gallardo. The geometrical formulation of quantum mechanics. *Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. 67: 51-103*, 2012.

[2] E. Segal. A class of operator algebras which are determined by groups. *Duke Mathematical Journal*, 18, 1951.

[3] E. Inönü and E. P. Wigner. On the contraction of groups and their representations. In *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, pages 488–502. Springer, 1993.

[4] B. Misra and E. C. G. Sudarshan. The Zeno ' s paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics*, 18(4):756–763, 1976.

[5] F Falceto, L Ferro, A Ibort, and G Marmo. Reduction of Lie–Jordan algebras: Quantum. *arXiv preprint arXiv:1309.4124*, 2013.

[6] J. F. Cariñena, J. Clemente-Gallardo, and G. Marmo. Geometrization of quantum mechanics. *Theoretical and Mathematical Physics*, 152(1):894–903, 2007.

[7] Gérard G Emch. *Mathematical and conceptual foundations of 20th-century physics*. Elsevier, 2000.

[8] A. Fialowski and M. de Montigny. Deformations and contractions of Lie algebras. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(28):6335, 2005.

[9] E. Weimar-Woods. Contractions, generalized Inönü-Wigner contractions and deformations of finite-dimensional Lie algebras. *Reviews in Mathematical Physics*, 12(11):1505–1529, 2000.

[10] E. J. Saletan. Contraction of Lie groups. *Journal of Mathematical physics*, 2(1):1–21, 1961.

[11] J. F. Cariñena and J. Marqués. Contractions of Lie algebras: A review. *without publication.*

[12] P. R. Halmos. Finite-dimensional vector spaces. the university series in undergraduate mathematics, 1958.

[13] J. F Carinena, J. Grabowski, and G. Marmo. Quantum bi-Hamiltonian systems. *International Journal of Modern Physics A*, 15(30):4797–4810, 2000.

[14] J. Grabowski. Abstract Jacobi and Poisson structures. quantization and star-products. *Journal of Geometry and Physics*, 9(1):45–73, 1992.

[15] D. Chruściński, P. Facchi, G. Marmo, and S. Pascazio. The observables of a dissipative quantum system. *Open Systems & Information Dynamics*, 19(01), 2012.

[16] K. Durstberger. Geometry of entaglement and decoherence in quantum systems. Master's thesis, Universität Wien, 2005.

[17] J. F. Cariñena and J. A. Clemente-Gallardo, J.-Galtier. Open systems and geometric quantum mechanics: Examples. in preparation.

[18] P. Facchi and S. Pascazio. The geometry of the quantum Zeno effect. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 9(02), 2012.

[19] P. Facchi and S. Pascazio. Quantum zeno dynamics: mathematical and physical aspects. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(49):493001, 2008.

[20] P. Sala. Sistemas cuánticos Hamiltonianos en mecánica cuántica: El efecto Zenón. Master's thesis, University of Zaragoza, 2014.

[21] A. Rivas and S. F. Huelga. *Open Quantum Systems.* Springer, 2012.

[22] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of N-level systems. *Journal of Mathematical Physics*, 17(5):821–825, 1976.

[23] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics.* CRC Press, 2003.

[24] R. Abraham, J. E. Marsden, T. S. Ratiu, and R. Cushman. *Foundations of mechanics.* Benjamin/Cummings Publishing Company Reading, Massachusetts, 1978.

[25] S. Otten. An introduction to distributions and foliations. *Michigan State University*, 2008.

[26] A. Ashtekar and T. A. Schilling. Geometrical formulation of quantum mechanics. In *On Einstein's Path*, pages 23–65. Springer, 1999.

[27] P.W. Michor. The moment mapping for unitary representations. *Annals of Global Analysis and Geometry, 8(3):299-313*, 1990.

[28] M. C. Fischer, B. Gutiérrez-Medina, and M. G. Raizen. Observation of the quantum Zeno and anti-Zeno effects in an unstable system. *Physical Review Letters*, 87(4):040402, 2001.

[29] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland. Quantum Zeno effect. *Physical Review A*, 41(5):2295, 1990.

[30] R. M. Wald. *General relativity.* University of Chicago press, 2010.

[31] M. Crampin and F. A. E. Pirani. *Applicable differential geometry*, volume 59. Cambridge University Press, 1986.

[32] J. F. Cariñena, F. Falceto, and M. F. Rañada. A geometric approach to a generalized virial theorem. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(39):395210, 2012.

[33] N. Ciccoli and P. l Witkowski. From Poisson to quantum geometry. *Lecture Notes, available at http://toknotes. mimuw. edu. pl*, 2006.