Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Grado

Calibración y estimación de modelos económicos de competencia en precios, con un bien de consumo homogéneo.

Autor

Raquel Arié Mosteo

Director

Juan Perote Peña

Grado en Administración y Dirección de Empresas

Facultad de Economía y Empresa

2015

RESUMEN

En este trabajo voy a realizar una comprobación de la hipótesis de la competencia perfecta en el mercado de un bien de consumo cualquiera. En concreto, he tomado una muestra de empresas para comprobar la adecuación de la teoría clásica y algunas de sus variantes.

La muestra escogida consiste en los 20 bares que hay distribuidos a lo largo de una avenida principal de Zaragoza, utilizando como bien homogéneo de referencia la caña de cerveza.

Tras análisis de los datos descarto la competencia perfecta como modelo explicativo de los precios, por lo que me planteo modelos alternativos de oligopolio.

Como primera aproximación utilizo una extensión del modelo de Hotelling para estimar los precios suponiendo que su variación podría ser debida a la competencia imperfecta.

En una segunda etapa aplico una versión reducida del modelo de Bertrand con producto diferenciado para así obtener de las regresiones econométricas resultantes la influencia de diferentes variables sobre los precios.

Como resultado he obtenido que ambos modelos no consiguen explicar totalmente la dispersión de precios, por lo que finalmente propongo una serie de alternativas que podrían explicar la variación, como la calidad del servicio, la importancia del coste fijo, la psicología del consumidor o variables como la reputación o experiencia de la empresa en el mercado.

ABSTRACT

In this work I have tested the perfect competition hypothesis for given consumption good. In particular, I have taken a sample of producers to check the accuracy of the classical theory and some possible variations.

The sample chosen consists of 20 bars distributed along well-known street in Zaragoza, using an specific homogeneous consumption good: half pint of beer.

After analysing the data, I reject perfect competition as an adequate model explaining prices in the market, and therefore I try some alternative oligopoly models.

In a first approach I use an extension of the Hotelling model in order to predict the prices assuming that their variation could be due to imperfect competition.

In a second stage, I applied a reduced version of the Bertrand model with differenciated product and obtained the influences of different variables on prices from the regressions output.

As a result I have concluded that both models cannot fully explain prices dispersion in the market and therefore I finally propose some alternatives models to explain the variation. Such as quality of service, the importance of sunk costs, the psychological aspects of consumption or variables such as reputation or firms' experience in the market.

INDICE

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo voy a tratar temas como los diferentes modelos de competencia y factores que influyen en la oferta y la demanda de un bien, con el fin de comprobar si la hipótesis de la competencia perfecta en el mercado de un bien de consumo aparentemente homogéneo funciona siempre de la misma forma.

A lo algo del trabajo se comprobar que la competencia perfecta no se puede aplicar al bien que hemos escogido por lo que me voy a plantear testar otros modelos de oligopolio.

Los modelos económicos a los que voy a hacer referencia serán los siguientes:

- Oligopolio de Cournot: se caracteriza por contar con pocas empresas y un producto homogéneo. Las empresas eligen cantidades y el precio es decidido por el mercado.
- Oligopolio de Bertrand: este modelo supone que todas las empresas compiten simultáneamente en precios y los compradores deciden cuánto comprar a dicho precio. El producto puede ser homogéneo o diferenciado.
- Oligopolio de Hotelling: en este caso se analiza un producto no homogéneo, sino diferenciado, donde la diferencia se da en el coste de transporte o desplazamiento de los consumidores. Las empresas eligen precios simultáneamente y, en la versión original, su localización espacial.

Estos modelos serán necesarios en la investigación para poder predecir los precios del mercado, para ello en primer lugar se tomará una muestra de empresas y un bien homogéneo obteniendo una serie de precios y otras variables potencialmente relevantes.

A continuación dadas las características del sector comprobaremos que ni el modelo de competencia perfecta, ni los modelos de Cournot y Bertrand con producto homogéneo (competencia imperfecta) explican convenientemente la dispersión de los precios de la muestra.

Posteriormente he realizado un estudio más sofisticado aplicando modelos alternativos con producto diferenciado, en particular el modelo de Hotelling y el modelo de Bertrand, pudiendo así comparar cuantitativamente los resultados de ambos modelos y sacar conclusiones.

En particular concluyo que ninguno de los modelos puede explicar en su totalidad las causas de la dispersión de precios encontrada en el sector por lo que propongo una serie de alternativas que sí podrían explicar dichas variaciones.

La estructura del trabajo será la siguiente:

Empezaré con un marco teórico, explicando las diferentes teorías y modelos económicos que pueden ser de utilidad a lo largo del trabajo y a continuación describiré de forma resumida las etapas que he ido siguiendo en la investigación.

Posteriormente pasaré a desarrollar la investigación explicándola con detalle.

Finalmente presentaré y discutiré las conclusiones obtenidas de la investigación.

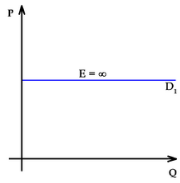
2. MARCO TEÓRICO

2.1.CAPITULO I. TEORIAS ECONOMICAS

A continuación explicaré brevemente diversas teorías económicas que considero esenciales para la comprensión y posterior desarrollo de este trabajo. Dichas teorías explican el comportamiento y estructura económica diferenciando los precios de bienes de consumo.

- <u>Competencia perfecta:</u> en la teoría económica, la competencia perfecta describe los mercados de forma que los participantes no son lo suficientemente grandes como para tener el poder de mercado para fijar el precio de un producto homogéneo. En este tipo de mercados los vendedores no suelen dedicar mucho tiempo a elaborar una estrategia de mercadotecnia ni a implementar actividades relacionadas con ésta, como la investigación de mercados, desarrollo de producto, fijación de precios o programas de promoción ya que se trata de un producto homogéneo sin diferenciación. Teniendo en cuenta las condiciones descritas cabe añadir que los vendedores tienen una curva de demanda individual horizontal o perfectamente elástica.

- <u>Factores condicionantes de la oferta y de la demanda:</u>



  - **Demanda**: cantidad de un bien o servicio que estan dispuestos a adquirir los demandantes a un precio determinado y condicionado por una serie de factores:
    1. *Precio del bien*: a mayor precio, menor demanda, esto quiere decir que cuanto más caro sea un producto menor sera la cantidad que los consumidores están dispuestos a a adquirir.
    2. *Precio de los bienes relacionados:*
       - Bienes complementarios: son bienes que se consumen conjuntamente, es decir, no es posible consumir uno sin consumir simultaneamente el otro. Al aumentar el precio de uno de ellos, disminuye la demanda del dicho bien y la de su bien complementario.
       - Bienes sustitutivos: son aquellos que satisfacen las mismas necesidades. Al aumentar el precio de uno de los bienes, disminuye la demanda del mismo, pero aumenta la de su bien sustitutivo.

3. *Renta disponible*: la relacion entre los cambios en la renta disponible y las variaciones de la demanda permite clasificar los bienes en:
   - Bienes inferiores: aquellos cuya demanda disminuye al aumentar la renta disponible.
   - Bienes normales: aquellos cuya demanda aumenta en la misma proporcion que la renta de los demandantes.
   - Bienes de lujo: son aquellos bienes normales cuya demanda aumenta sustancialmente al incrementar la renta diponible (elasticidad-renta < 1).
4. *Preferencias del consumidor*: determinan el comportamiento de los demandantes con independencia del precio o la renta.

- **Oferta**: la cantidad de un bien o servicio que las empresas estan dispuestas a producir a un precio determinado y condicionado por una serie de factores:
  1. *El precio del bien*: cuanto más caro sea un bien, mayor será la cantidad del mismo que las emrpesas estén dispuestas a ofertar.
  2. *Costes de producción*: dependen de:
     - Costes de factores de producción: el beneficio empresarial se calcula como la diferencia entre los ingrtesos y los costes totales. Si aumentan los costes totales, disminuye el beneficio empresaral y por tanto la empresa puede optar por reducir su oferta.
     - Tecnología: cuánto más eficiente sea una tecnología, mayores beneficios empresariales obtendrá la empresa y por tanto decidirá incrementar su oferta.
  3. *Objetivos empresariales*: no es lo mismo producir para un mercado con grandes expectativas de crecimiento que para otro en el cual las expectativas sean reducidas, a mayores expectativas, mayor sera la oferta.

- Competencia imperfecta:

La competencia imperfecta se da en los mercados en los que una o más empresas pueden influir sobre el precio en mayor o menor medida debido a que se ofertan productos diferenciados de tal forma que cuanto menor sea el número de empresas existentes, mayor será su capacidad para influir sobre el precio.

La forma mas habitual de medir el poder de mercado es el Indice de Lerner:

- Índice de Lerner:

Mide el grado de poder de monopolio de una empresa. Se determina mediante la razón de la diferenciación entre el precio y el coste marginal respecto al precio, o mediante el inverso multiplicativo del valor absoluto de la elasticidad precio de la demanda.

$$L = \frac{P - Cmg}{P}$$

En el caso del oligopolio de Cournot se comprueba que el índice de Lerner en el equilibrio es:

$$L = \frac{P - Cmg}{P} = \frac{r_i}{e} = r_i \left(\frac{\Delta P}{\Delta Qd} \; x \; \frac{Qd}{P} \right)$$

Donde r_i es la cuota de mercado en tanto por 1 del oligopolista iésimo y es la elasticidad precio del mercado.

En el caso de un monopolio el índice de Lerner será:

L= $\frac{1}{e}$ ya que la cuota de mercado de un monopolista es 1.

El valor de L puede oscilar desde cero, para una empresa de competencia perfecta y hasta uno cuando el coste marginal sea cero.

A continuación voy a explicar de forma resumida los diferentes modelos de oligopolio más frecuentes, comenzando con su definición.

- Oligopolio:

Forma de mercado en la cual el mercado o industria está dominado por un pequeño número de vendedores. La competencia oligopolística puede dar lugar a una amplia gama de diferentes resultados. En algunas situaciones, las empresas pueden emplear prácticas comerciales restrictivas (colusión, el reparto de mercados, etc.) para subir los precios y limitar la producción comportándose de manera similar a un monopolio.

En los oligopolios como hay un pequeño número de vendedores en el mercado, el comportamiento de cada uno de ellos se verá afectado por las decisiones de los otros, apareciendo el fenómeno de la interdependencia estratégica.

Para predecir el comportamiento de empresas estratégicamente interdependientes, los economistas utilizan una herramienta analítica que es la teoría de juegos.

Dada la importancia de esta teoría voy a proceder a explicarla de forma resumida.

Se trata de estudiar y de explicar el comportamiento y la interacción de los diversos agentes de un mercado, así como los incentivos que llevan a éstos a realizar sus procesos de decisión. El objetivo es dar con la estrategia óptima adelantándose y previendo la estrategia del resto.

La teoría de juegos se suele representar gráficamente a través de matrices y árboles de decisión.

El Equilibrio de Nash es el principal concepto de solución en teoría de juegos. Es la situación en la cual todos los jugadores han puesto en práctica una estrategia que maximiza sus ganancias dadas las estrategias maximizadoras de los otros. De esta manera todos los jugadores actúan racionalmente a la vez, en otras palabras ningún jugador tiene incentivos para modificar individualmente su estrategia si los demás mantienen la suya del equilibrio.

Es importante tener presente que un equilibrio de Nash no implica que se logre el mejor resultado conjunto para los participantes, sino sólo el mejor resultado para cada uno de ellos considerados individualmente dado que los demás se encuentran en la situación de equilibrio. Es perfectamente posible que el resultado fuera mejor para todos si, de alguna manera, los jugadores coordinaran su acción.

A continuación voy a explicar de forma breve los modelos de oligopolio más utilizados.

- **Modelo de Cournot**: se trata de un modelo económico usado para describir una estructura de industrias en la que las empresas compiten en las cantidades que van a fijar. En este modelo las empresas asumen que las cantidades producidas por sus rivales no dependen de sus propias decisiones.

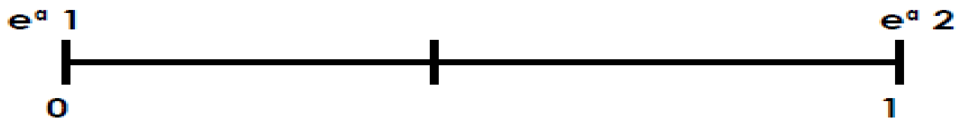
El equilibrio de mercado se supone que se alcanza mediante un proceso dinámico que no se formaliza por el cual las empresas ajustan sus cantidades hasta que éstas son compatibles entre sí.

- **Modelo de Bertrand**: se trata de un modelo económico que describe las interacciones entre las empresas que fijan los precios simultáneamente y los compradores que deciden cuanto comprar a dicho precio. El modelo supone un producto homogéneo, la no cooperación de las empresas. En este modelo las empresas asumen que los precios de sus rivales no dependen de sus propias decisiones.

- **Modelo de Hotelling**: este modelo se va a definir más ampliamente debido a su importancia en el desarrollo del trabajo de investigación realizado.

En la mayoría de las industrias los productos están diferenciados. Las cuotas de mercado dependen no sólo de los precios, sino también de las diferencia de diseño, características, rendimiento, durabilidad del producto de cada empresa…Si el producto no es homogéneo, aunque una empresa fije un precio más alto que sus rivales, no se tiene por qué quedar sin demanda.

El modelo supone que dos empresas compiten simultáneamente en precios con un producto homogéneo y costes marginales constantes, solo se diferenciaran en su localización. Cada una de las empresas está situada en una ciudad lineal de longitud unitaria representada en un segmento:



Por el lado de la demanda, se asume que hay N consumidores que demandan a lo sumo una unidad del bien y que están distribuidos uniformemente a lo largo de la ciudad lineal.

Cada consumidor es identificado por el lugar donde vive, que equivale a una distancia concreta X desde el origen (en el extremo izquierdo).

Se asume que:

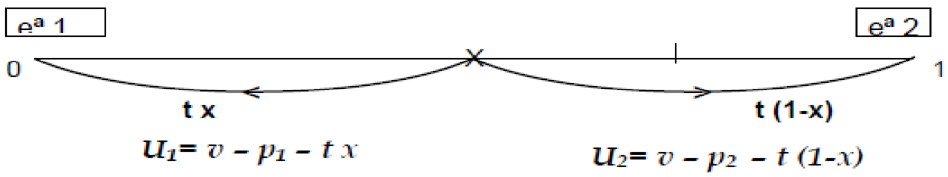
1.- todos los consumidores tienen una valoración bruta del bien idéntica, que denotamos por v (expresada en dinero). v = máximo precio que estarían dispuestos a pagar por una unidad del bien, con v > c.

2.- Para adquirir el producto, los consumidores deben incurrir en un coste de transporte T(x), que depende de la distancia que les separa de la empresa a la que decidan comprar (este coste también puede incluir el valor del tiempo empleado en el desplazamiento).

La utilidad que obtiene un consumidor situado en "x" al demandar una unidad del bien (el excedente que extrae del consumo), se puede expresar como:

U= v – p – T (x)

Asumimos que T(x) es lineal y denotamos por "t" al coste monetario por unidad de longitud recorrida.



La presencia de costes de transporte introduce diferenciación entre las dos empresas ya que un mismo consumidor podría estar dispuesto a comprar el bien más caro a una empresa si con ello se ahorrase el coste de transporte a la otra empresa. Aunque el producto sea el mismo, algunos consumidores prefieren, al mismo precio, comprar a una de ellas. El parámetro "t" nos sirve para medir el grado de diferenciación del producto ya que a mayor "t" mayor será el coste de desplazamiento para los consumidores.

2.2 CAPITULO II. ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

En primer lugar al interesarme por este tipo de investigación y hacerme la pregunta de si siempre se cumplían las reglas de la competencia perfecta según la teoría clásica de la economía, debía centrarme en un mercado pequeño que estuviera a mi alcance para poder estudiarlo y analizarlo.

Una vez decidido que el producto homogéneo iba a ser la caña de cerveza, decisión que tome por ser un bien totalmente conocido y al alcance de todos, tenía que buscar un espacio donde se diera la competencia perfecta referente a este producto.

Tras analizar algunas zonas de Zaragoza, me decanté por la Avenida de Madrid, debido a que la zona no tenía demasiada importancia siempre y cuando hubiese una alta densidad de bares para analizar y dicha avenida cumplía con esta característica, además se trataba de una zona donde la competencia principal se establecía entre los bares, por su amplia gama y por estar repartidos homogéneamente a lo largo de dicha avenida.

Tras tener el marco espacial de mi investigación debía buscar variables que considerase que podrían explicar la variación de precios, las que elegí fueron las siguientes (es preciso destacar que no es fácil encontrar variables explicativas que puedan explicar la variación del precio además como investigadora externa tampoco contaba con un acceso fácil y directo, por lo que me decante por variables que pudiera observar yo misma).

1. *Nacionalidad de los propietarios*: elegí esta variable porque cabía la posibilidad de que los propietarios de diferentes culturas tuviesen una forma diferente de ver y actuar en el mercado o de organizar un negocio que los propietarios occidentales y tal vez ello se viese reflejado en el precio de los productos.
2. *Número de camareros contratados*: consideré esta variable importante debido a que un mayor número de camareros es un mayor gasto para el propietario, lo cual podía influir en el precio del producto final.
3. *Número de mesas del local*: esta variable me pareció interesante ya que el número de mesas suponía un gasto extra en ocasiones oculto ya que en el caso de haber más o menos mesas podía significar un local más grande o el pago extra de una terraza, lo

cual al igual que el número de camareros supondría un gasto mayor para el propietario y por tanto verse reflejado a posteriori en el precio final del producto.

4. *Número de bares competidores a una distancia de 50m a cada lado del bar*: la cantidad de bares en una zona pequeña puede suponer una elevada competencia que por regla general lo que hará es obligar a igualar los precios de los productos homogéneos de los bares que se encuentren en esta situación para no perder clientes. Se trata de una medida cuantitativa de la intensidad de la competencia que soporta cada bar.

En un primer momento consideré analizar también variables como los metros cuadrados del local o precios de bienes complementarios y sustitutivos pero dada la reticencia de los propietarios y camareros a la hora de ayudarme a resolver estas cuestiones, decidí escoger variables que fueran fácilmente observables por mi sin necesidad de tener que preguntar directamente.

Una vez obtenidos todos los datos me planteé utilizarlos para calibrar el modelo de Hotelling con alguna variación dado el elevado número de empresas de las cuales disponía datos, para ello tuve que obtener la distancia en metros que había entre cada bar. Con este modelo encontré el precio estimado de la caña y pude compararlo con el precio real.

Tras obtener los datos del modelo de Hotelling, y ver que los resultados no eran muy satisfactorios en cuanto a la predicción de los precios, busqué otro modelo de competencia en precios y me decanté por el modelo de Bertrand con producto diferenciado que en su forma reducida justificaría el planteamiento de un modelo de regresión simple que he estimado con la ayuda del programa Gretl.

Para comprender mejor posteriormente los resultados de las regresión realizadas con la ayuda del programa informático Gretl dejo a continuación un pequeño inciso con la explicación de las mismas y su utilidad.

El análisis de la regresión es un proceso estadístico para la estimación de relaciones entre variables.

En estadística la regresión lineal o ajuste lineal es un método matemático que modela la relación entre una variable dependiente Y, las variables independientes X_i y un término aleatorio ε. Este modelo puede ser expresado como:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

Y_t: Variable dependiente, explicada o regresando.

$X_1, X_2, \cdots, X_p$: Variables explicativas, independientes o regresores.

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$: Parámetros a estimar, miden la influencia que las variables explicativas tienen sobre el regresando.

> β_0 es la intersección o término "constante", las β_i $(i > 0)$ son los parámetros respectivos a cada variable independiente, y p es el número de parámetros independientes a tener en cuenta en la regresión. La regresión lineal puede ser contrastada con la regresión no lineal.

Regresión lineal simple:

Dadas dos variables (Y: variable dependiente; X: independiente) se trata de encontrar una función simple (lineal) de X que nos permita aproximar Y mediante: Ŷ = a + bX

a (ordenada en el origen, constante)

b (pendiente de la recta)

A la cantidad e=Y-Ŷ se le denomina residuo o error residual.

Con esto conseguiré la información necesaria para saber si las variables seleccionadas realmente influyen o no en el precio de la caña de cerveza.

Por ultimo y para finalizar con la investigacion, medi el grado de poder de monopolio calculando el Indice de Lerner a traves de la formula (P-C) / P, para el precio real de cada bar y para el precio estimado.

Ademas calculé la suma de los residuos al cuadrado como indicador de la bondad del ajuste.

$$(Precio\ real - Precio\ estimado\ )^2$$

Finalmente diseñé una ponderación para darle cierta importancia a cada bar en cuanto a la distancia entre ellos, para obtener informacion acerca del poder del mercado promedio de este sector, es decir cuanto aumentaba el precio de la caña de cerveza respecto al coste marginal.

3. DESARROLLO

3.1 CAPITULO I. TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Para poder llevar a cabo el trabajo de investigación lo primero fue realizar la recogida de información necesaria, para ello me desplace a la Avenida de Madrid de Zaragoza el día 25 de abril del 2015 a las 19.00h para conseguir en los veinte bares y cafeterías que se distribuyen a lo largo de la avenida, los datos de los que prescindía mencionados anteriormente en el epígrafe anterior tales como el precio de la caña, número de camareros, número de mesas de cada establecimiento o la nacionalidad del propietario.

En la siguiente tabla se pueden ver los datos recogidos:

NOMBRE	BARES	NACIONALIDAD	PRECIO	CAMAREROS	Nº MESAS
LA PANADERIA	1	ESPAÑOLA	1,20 €	3	15
CAFÉ BAR EL CONDE	2	CHINA	1,10 €	2	10
CAFETERIA DEL RIO	3	CHINA	1,10 €	2	8
BAR IVANE	4	ESPAÑOLA	1,10 €	2	7
CAFETERIA LINGOTE	5	CHINA	1,00 €	1	8
BAR 53 URBAN CAFÉ	6	CHINA	1,20 €	2	30
BAR LA BRASA DE ANDRES	7	CHINA	1,30 €	1	16
BAR LA TABERNA	8	CHINA	1,20 €	1	8
BAR 1965	9	CHINA	1,00 €	2	11
BAR GRAN GAVILAN	10	ESPAÑOLA	1,10 €	1	5
BAR MARI ROSE	11	ESPAÑOLA	1,00 €	1	2
BAR EL TREMENDO	12	ESPAÑOLA	1,00 €	2	4
LA ESTRELLA DE PLATA	13	ESPAÑOLA	1,20 €	2	30
CAFETERIA LA ESTACIÓN	14	CHINA	1,20 €	3	23
BAR BETWEEN	15	ESPAÑOLA	1,40 €	2	11
BAR PEPEPIKA	16	ESPAÑOLA	1,15 €	3	13
BAR QUILEZ	17	ESPAÑOLA	0,80 €	1	5
CAFETERIA BUJ	18	ESPAÑOLA	1,00 €	2	20
ORO NEGRO CARIBEÑO	19	ESPAÑOLA	1,55 €	2	23
LAS MAÑICAS	20	CHINA	1,20 €	3	22

Una vez obtenidos los datos necesitaba realizar una estimación aproximada del coste medio de la caña, para ello me informe del coste del barril de cerveza preguntando a unos cuantos propietarios de bares y calcule el coste medio de una caña.

Un barril de cerveza de 50 litros le cuesta al propietario del bar 142,36€ por lo que el coste medio de una caña, que tiene una capacidad 250ml, es de 0,7118€ aproximadamente.

Esto solo puede considerarse aproximado ya que aunque es muy difícil contrastar la información seguramente se encuentren diferencias dependiendo del volumen de compras de cada bar, del poder de negociación con los proveedores…etc.

Con todos estos datos disponibles ya podía empezar con el estudio de la competencia perfecta, dado que se trataba de medirla en una línea recta, en nuestro caso la Avenida de Madrid, decidí realizar, el análisis de la estimación de precios.

En este momento me encontré con el problema de que los bares no estaban distribuidos en una línea recta perfecta, sino que se encontraban a ambos lados de la avenida por lo que opté, con la ayuda de Google Maps realizar mi propia línea de bares calculando la distancia en metros entre cada bar y trazando una línea recta con los bares ordenados por cercanía.

Debido a que el modelo de competencia perfecta predeciría el mismo precio para todos los bares, en el caso real se observa un rango de diferentes precios entre [0,80-1,55] y una desviación típica de los precios de 0.16€, luego a pesar de ser un producto homogéneo (sin contar con la diferencia de marcas) no podríamos hablar de competencia perfecta puesto que la estructura de mercado que se observa no se ajusta a esta por ello me plantee modelos alternativos que enumero a continuación.

Modelos alternativos de competencia imperfecta:

- <u>Cournot:</u> se caracteriza por contar con pocas empresas y un producto homogéneo. Las empresas eligen cantidades y el precio es decidido por el mercado por lo que es poco realista en un producto de consumo ya que los costes de cambio de menú son reducidos. Además este modelo predice los mismos precios de todas las empresas que tengan los mismos costes y en este caso los costes de cada bar son diferentes. En conclusión no se podría decir que sea un modelo adecuado.

  Por otro lado en las regresiones se capta parte de la estructura de este modelo porque solo las variaciones de costes de las variables explicarían las variables de precio del modelo.
- <u>Bertrand:</u> este modelo se basa en que todas las empresas compiten simultáneamente en precios.

Dependiendo de si el producto es homogéneo o diferenciado; en el caso de producto homogéneo la teoría predice que las empresas fijarían el mismo precio por lo que no se ajusta a la evidencia que tenemos de este sector y por tanto podríamos descartarlo, sin embargo en el caso de producto diferenciado los precios dependen de los costes y de la demanda por lo que a priori podría ser compatible con los datos obtenidos.

- <u>Hotelling:</u> en este modelo las empresas eligen precios simultáneamente y se analiza un producto no homogéneo, sino diferenciado, donde la diferencia se da en el coste de transporte o desplazamiento de los consumidores.

El modelo de Hotelling me iba a permitir averiguar los precios de la caña de cerveza que deberían tener dichos bares al estar compitiendo simultáneamente en precios con un producto homogéneo y costes marginales constantes, solo teniendo en cuenta la diferencia de su localización.

Para aplicar correctamente este modelo necesitaba la distancia exacta entre cada bar:

Del bar 1 al bar 2	**15m**
Del bar 2 al bar 3	**25m**
Del bar 3 al bar 4	**1m**
Del bar 4 al bar 5	**110m**
Del bar 5 al bar 6	**72m**
Del bar 6 al bar 7	**85m**
Del bar 7 al bar 8	**19m**
Del bar 8 al bar 9	**41m**
Del bar 9 al bar 10	**44m**
Del bar 10 al bar 11	**48m**
Del bar 11 al bar 12	**67m**
Del bar 12 al bar 13	**96m**
Del bar 13 al bar 14	**72m**

Del bar 14 al bar 15	**200m**
Del bar 15 al bar 16	**210m**
Del bar 16 al bar 17	**400m**
Del bar 17 al bar 18	**73m**
Del bar 18 al bar 19	**21m**
Del bar 19 al bar 20	**100m**
Longitud total de la avenida	**1.888m**

*Asumiendo densidad homogénea a lo largo de la calle

Como se puede observar a la hora de calcular las ecuaciones de Hotelling iban a salir dos patrones diferentes de ecuaciones, por un lado las ecuaciones referentes a los bares 1 y 20 debido a que éstos solo van a competir en el modelo con un bar, el bar 1 competirá con el bar de su derecha y el bar 20 con el de su izquierda. Sin embargo los bares del 2 a 19 seguirán otro patrón diferente al anterior ya que compiten con dos bares cada uno, el de la derecha y el de la izquierda.

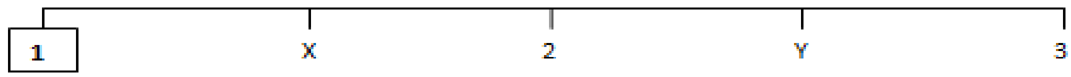
En este caso he considerado que la mayor competencia se encontraba dentro de la avenida Madrid para así poder realizar ecuaciones lineales y porque los bares competidores de calles perpendiculares a la avenida seleccionada se encontraban en su gran mayoría a distancias superiores a las de los bares analizados.

A continuación dejo el patrón de las ecuaciones realizadas para el modelo de Hotelling:

$\sum d_{20}$ = D (distancia total entre el bar 1 y el bar 20)

N = número total de consumidores a lo largo de la Avenida

Patrón seguido por las ecuaciones referentes a los bares 1 y 20:



$$\left.\begin{array}{l} U_1 = \mathrm{V} - P_1 - \mathrm{tx} \\ \\ U_2 = \mathrm{V} - P_2 - \mathrm{t}(d_{1.2} - \mathrm{x}) \end{array}\right\}$$

- $U_1 \geq U_2$

$- P_1 - \mathrm{tx} \geq - P_2 - \mathrm{t}d_{1.2} + \mathrm{tx}$

$P_2 - P_1 + \mathrm{t}d_{1.2}\ \mathrm{tx} \geq -\ 2\mathrm{tx}$

$$\mathbf{x} \leq \frac{\boldsymbol{P_2 - P_1}}{\boldsymbol{2t}} + \frac{\boldsymbol{d_{1.2}}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathrm{Max}\prod_1 = (P_1 - c)\left(\frac{X}{D}\right)N = (P_1 - c)\frac{N}{D}\left(\frac{P_2 - P_1}{2tx} + \frac{d_{1.2}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial \prod 1}{\partial P_1} = \frac{N}{D}\left[\frac{P_2 - P_1}{2tx} + \frac{d_{1.2}}{2} - \frac{1}{2t}(P_1 - c)\right] = 0;$$

$$P_2 - P_1 + d_{1.2}\,t - P_1 + c = 0\ ;$$

$$\boxed{\mathbf{-2}\boldsymbol{P_1 - P_2 = -d_{1.2}\,t - c}}$$

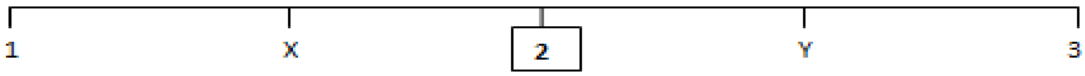
Curva de reacción del quilibrio de Nash de Hotelling para el bar 1:

$$\boldsymbol{P_1 = \frac{P_2 + d_{1.2}\,t + c}{2}}$$

Esta curva nos informa de que un aumento de 1€ del precio del bien del bar 2 conlleva una respuesta óptima del bar 1 que consistente en subir 0,50€ su propio precio.

Asimismo, por cada metro de mayor distancia entre los bares 1 y 2 se refleja en un aumento de $\frac{t}{2}$ € en el precio del bar 1 (o sea, con el t= 0,005, cada 100 metros de lejanía adicional supone un aumento de 25 céntimos en el precio de la caña del bar 1, y por cada euro de aumento del coste marginal, el bar 1 repercutirá 0,5€ en el precio de la caña.

Patron seguido por las ecuaciones referentes a los bares 2 a 19:



U_1 = V - P_1- t($d_{1.2}$ - x)

U_3 = V - P_3- t($d_{2.3}$ - y)

U_2 = V - P_2- tx

U_2 = V - P_2 – ty

- $U_2 \geq U_1$

- P_2- tx ≥ - P_1- t$d_{1.2}$ + tx

P_1 - P_2 + t$d_{1.2}$ tx ≥ - 2tx

$$\mathbf{x} \leq \frac{P_1 - P_2}{2t} + \frac{d_{1.2}}{2}$$

- $U_2 \geq U_3$

- P_2- ty ≥ - P_3- t$d_{2.3}$ + ty

P_3 - P_2 + t$d_{2.3}$ ty ≥ - 2ty

$$\mathbf{y} \leq \frac{P_3 - P_2}{2t} + \frac{d_{2.3}}{2}$$

$$\mathbf{x + y} = \left(\frac{P_1 - P_2}{2t} + \frac{d_{1.2}}{2}\right) + \left(\frac{P_3 - P_2}{2t} + \frac{d_{2.3}}{2}\right) = \mathbf{x'}$$

$\text{Max}\prod_2 = (P_2 - c)\left(\frac{X'}{D}\right)N$

$(P_2 - c)\frac{N}{D}\left[\left(\frac{P_1 - P_2}{2t} + \frac{d_{1.2}}{2}\right) + \left(\frac{P_3 - P_2}{2t} + \frac{d_{2.3}}{2}\right)\right] = 0$

$\frac{\partial \prod 2}{\partial P_2} = \frac{N}{D}\left[\left(\frac{P_1 - P_2}{2t} + \frac{d_{1.2}}{2}\right) + \left(\frac{P_3 - P_2}{2t} + \frac{d_{2.3}}{2}\right)\right] - \frac{1}{t}\,(P_2 - c) = 0;$

$P_1 - P_2 + d_{1.2}\,t + P_3 - P_2 + d_{2.3}\,t - 2(P_2 - c) = 0\ ;$

$P_1 - 4P_2 + P_3 = -\,d_{1.2}\,t - d_{2.3}\,t - 2c = 0;$

$$\boxed{\boldsymbol{P_1 - 4P_2 + P_3 = -t(d_{1.2} + d_{2.3}) - 2c}}$$

Curva de reacción en precios del quilibrio de Nash de Hotelling para el bar 2:

$$\boldsymbol{P_2 = \frac{P_1 + P_3 + t(d_{1.2} + d_{2.3}) + 2c}{4}}$$

Esta curva nos informa de que un aumento de 1€ del precio del bien del bar 3 conlleva una respuesta óptima del bar 2 que consistente en subir 0,25€ su propio precio. Asimismo, por cada metro de mayor distancia entre los bares 2 y 3 se refleja en un aumento de $\frac{t}{4}$€ en el precio del bar 2 es decir, con el t= 0,005, cada 100 metros de lejanía adicional supone un aumento de 12,5 céntimos en el precio de la caña del bar 2, y por cada euro de aumento del coste marginal, el bar 2 repercutirá 0,50€ en el precio de la caña.

Este sistema de ecuaciones lineales lo he resuelto mediante una matriz cuadrada 20x20 y la matriz de terminos independientes 20x1

Como resultado se forma una matriz cuadrada diagonal, ya que los elementos que no se encuentran en la diagonal principal son nulos.

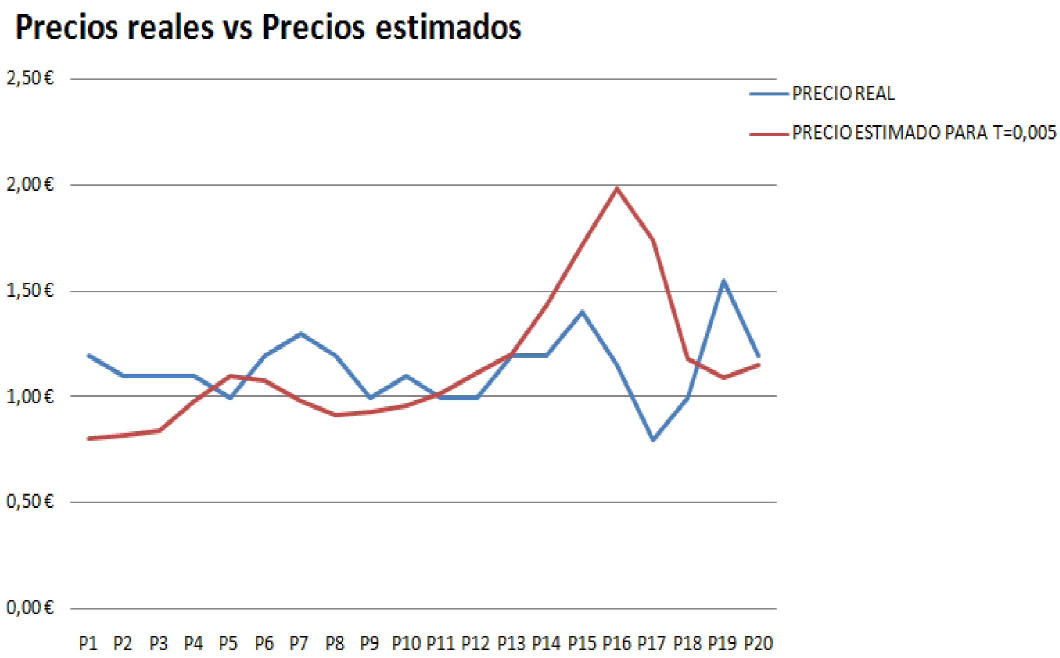
(Ver anexo I)

Los resultas obtenidos dependen de que valor de “t” se utilice en las ecuaciones (recordemos que “t” nos media el coste monetario por km de la longitud recorrida y se trata de una variable difícilmente observable). Por tanto la estimación de precios más próxima a los precios reales nos determina de forma implícita el valor de “t” mas compatible con el modelo. Tras simular varios escenarios de “t” finalmente concluí que el t = 0,005, era el mejor. Este valor de “t” quiere decir que recorrer un kilometro de la avenida Madrid suponía un coste de 0,005€.

	PRECIO REAL	PRECIO ESTIMADO
P1	1,20 €	0,80 €
P2	1,10 €	0,82 €
P3	1,10 €	0,84 €
P4	1,10 €	0,98 €
P5	1,00 €	1,10 €
P6	1,20 €	1,07 €
P7	1,30 €	0,98 €
P8	1,20 €	0,91 €
P9	1,00 €	0,93 €
P10	1,10 €	0,96 €
P11	1,00 €	1,02 €
P12	1,00 €	1,11 €
P13	1,20 €	1,20 €
P14	1,20 €	1,43 €
P15	1,40 €	1,72 €
P16	1,15 €	1,98 €
P17	0,80 €	1,74 €
P18	1,00 €	1,18 €
P19	1,55 €	1,09 €
P20	1,20 €	1,15 €

Esta desviación de precios demuestra que “t” sí afecta a los precios de cada bar y por tanto se trata de un producto diferenciado.

Como puede observarse con una t= 0,005 los precios estimados con el modelo de Hotelling se aproximan bastante a los precios reales ya que siguen el mismo patrón, con picos semejantes a los precios reales.



Como puede observarse con una t= 0,005 los precios estimados con el modelo de Hotelling se aproximan bastante a los precios reales ya que siguen el mismo patrón, con picos semejantes a los precios reales.

Podemos observar una diferencia mayor de los precios a partir del bar número 14, estos bares, están situados al final de la avenida Madrid llegando a la zona de la Aljafería, donde su situación es más dispersa ya que cuentan con una mayor distancia entre ellos.

Esta dispersión y que el coste de transporte del cliente sea más elevado puede ser el motivo que explique el mayor precio de la caña de cerveza en estos bares, reflejado en la grafica por un notable pico entre los bares 14 y 17.

Como observamos en el grafico anterior el ajuste de precios estimados predichos por el modelo de Hotelling no es demasiado bueno para poder explicar los precios reales observados, por ello voy a plantear otro modelo de competencia en precios con producto diferenciado; el modelo de Bertrand.

- Modelo de Bertrand con producto diferenciado:

Supondremos para simplificar dos empresas que producen cada una variedad de un mismo producto, cuyas funciones de demanda están por tanto relacionadas debido a la sustituibilidad entre ambas variedades:

$$q_1 = \alpha_1 - \beta_1 P_1 + \gamma_1 P_2$$

$$q_2 = \alpha_2 - \beta_2 P_2 + \gamma_2 P_1$$

$(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) > 0$, para todo $i = 1,2$

Estas funciones de demanda nos muestran que la cantidad optima que deberá producir una empresa dependerá de los parámetros α y β, de su propio precio, del grado de sustituibilidad de los bienes (donde a mayor γ mayor sustituibilidad) y del precio de la empresa competidora.

Cada empresa elije su propio precio sin saber el precio que elegirá su competidor (simultáneamente), por lo que para calcular el equilibrio de Nash, tengo que maximizar el beneficio de cada empresa en su propia variable de decisión.

$$\text{Max}\prod_1 = (P_1 - C_1)(\alpha_1 - \beta_1 P_1 + \gamma_1 P_2)$$

$$\text{Max}\prod_2 = (P_2 - C_2)(\alpha_2 - \beta_2 P_2 + \gamma_2 P_1)$$

Calculo las derivadas del beneficio respecto del precio de cada empresa:

$$\frac{\partial \prod 1}{\partial P_1} = \alpha_1 - 2\,\beta_1 P_1 + \gamma_1 P_2 + \beta_1 C_1 = 0$$

$$\frac{\partial \prod 2}{\partial P_2} = \alpha_2 - 2\,\beta_2 P_2 + \gamma_2 P_1 + \beta_2 C_2 = 0$$

De cada una de estas ecuaciones obtengo la curva de reaccion en precios de la empresa correspondiente, que dependerá del precio de la otra emrpesa y de los parametros de costes y demanda de ambas.

Empresa 1: $P_{1} = R_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, C_1, P_2)$

Empresa 2: $P_{2} = R_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, C_2, P_1)$

Siendo $R_1 \; y \, R_2$ las curvas de reacción (de la empresa 1 y 2). Los precios del quilibrio de Bertrand-Nash se obtendrán de resolver el sistema de las dos curvas de reacción por lo que la forma reducida de los precios de equilibrio será:

$$P_1^* = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, C_1, C_2)$$

$$P_2^* = f_2(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, C_1, C_2)$$

En equilibrio de Nash, el precio de cada empresa dependerá de los parámetros de la demanda y de los costes de las dos empresas, pero para simplificar el análisis voy a suponer una forma funcional lineal.

Al no disponer de información suficiente sobre los parámetros de demanda y costes de las dos empresas utilizaré como variables proxy las variables reales de las que dispongo en la muestra utilizada, que son la nacionalidad, el número de camareros y el número de mesas (variables de costes) y el grado de competitividad o número de bares a 50 metros (variable de demanda).

Por este motivo planteo la siguiente ecuación lineal genérica que permita explicar los precios basada en el modelo de Bertrand con producto diferenciado:

Precio = β_0 + $\beta_1$nacionalidad + β_2nº de camareros + β_3 nº de mesas+ β_4nº de bares en 50m+U_t

Donde los parámetros β_i son los coeficientes de la regresión lineal de cada una de las variables explicativas y U_t es la perturbación aleatoria.

Renombrando las variables para simplificar la ecuación de regresión queda de la siguiente forma:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + U_t$$

Con la ayuda del programa informático Gretl, realicé una serie de regresiones lineales con las variables endógenas y exógenas que disponía para poder saber cuáles de estas variables realmente explicaban conjuntamente la variación de los precios.

El programa Gretl lo que nos ofrece es una estimación por MCO (mínimos cuadrados ordinarios) de los coeficientes de la regresión y sus estadísticos más relevantes.
Con esta ecuación lo que espero es que las variables seleccionadas puedan explicar la variación de los precios.

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1-20
Variable dependiente: PRECIO

	Coeficiente	*Desv. Típica*	*Estadístico t*	*Valor p*	
Const	0.888348	0.131647	6.7479	<0.0001	***
PROPIEDAD	0.088082	0.073368	1.2006	0.2485	
CAMAREROS	0.015947	0.0576873	0.2764	0.7860	
MESAS	0.0110675	0.00544655	2.0320	0.0603	*
BARESEN50M	0.0128496	0.0333075	0.3858	0.7051	

Media de la vble. dep.	1.140000	D.T. de la vble. dep.	0.162707
Suma de cuad. Residuos	0.336225	D.T. de la regresión	0.149716
R-cuadrado	0.331561	R-cuadrado corregido	0.153311
F(4, 15)	1.860086	Valor p (de F)	0.169973
Log-verosimilitud	12.47831	Criterio de Akaike	−14.95661
Criterio de Schwarz	−9.977949	Crit. de Hannan-Quinn	−13.98472

R-cuadrado: explica el porcentaje de variación en los precios de las variables explicativas del modelo, en este caso R-cuadrado = 0,33 lo que significa que la tercera parte de la variación esta explicada por las variables.

Modelo estimado o FRM: Y_t = 0,8883 + 0,0880X_{1t} + 0,0159X_{2t} + 0,0110X_{3t}+ 0,0128X_{4t}+U_t

Propiedad: los bares cuya propiedad es de nacionalidad española presentas precios más altos que los de nacionalidad china. La caña de cerveza de un bar español cuesta 0.0880€ más que la de un bar de nacionalidad china.

Camareros: por cada camarero de más, el precio de la caña aumenta en 0,0159€ en promedio.

Nº de mesas: por cada mesa de más, el precio de la caña aumenta en 0,0110€.

Nº bares: por cada bar de más en 50m a derecha e izquierda, el precio de la caña aumenta en 0,01284€.

Contrastes individuales de significatividad:

$$\left.\begin{array}{l} Ho: \alpha_i = 0 \\ \\ Ha: \alpha_i \neq 0 \end{array}\right\} \quad \text{Bajo Ho: } \frac{\alpha_i - 0}{des(\alpha_i)} \sim t_{T-K} \quad i= 1,2,3$$

Nivel de confianza del 95%

$t_{(20-5)0.05/2}$=2,13 (Ver anexo II)

1,20> $t_{(20-5)0.05/2}$ =2,13 → no rechazo la Ho con un α= 5%, la propiedad del bar no es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

0,27 > $t_{(20-5)0.05/2}$= 2,13 → no rechazo la Ho con un α = 5%, el numero de camareros no es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

2,03>$t_{(20-5)0.05/2}$ = 2,13 → no rechazo la Ho con un α = 5%, el número de mesas no es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

0,38>$t_{(20-5)0.05/2}$ = 2,13 → no rechazo la Ho con un α = 5%, el numero de bares en 50m no es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

Contraste conjunto de significatividad:

Ho: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

Bajo Ho: $\frac{R^2/K-1}{(1-R^2)/T-K} \sim F_{K-1,T-K}$

Ha: $\alpha_1 \neq 0 y/o\ \alpha_2 \neq 0$ y/o $\alpha_3 \neq 0\ \alpha_4 \neq 0$

$F_{(5-1,20-5)0.05}$ = 3,06 (Ver anexo III)

F= $\frac{0.331561/5-1}{(1-0.331561)/20-5} = \frac{0.08289025}{0.0445626}$ = 1,8600 > $F_{(5-1,20-5)0.05}$ = 3,06 → No rechazo Ho, las variables explicativas no son conjuntamente significativas para explicar el precio de la caña.

Nivel de confianza de 90%

$t_{(20-5)0.1/2}$=1,75

1,20> $t_{(20-5)0.1/2}$ =1,75 → no rechazo la Ho con un α = 10%, la propiedad del bar no es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

0,27 > $t_{(20-5)0.1/2}$= 1,75 → no rechazo la Ho con un α = 10%, el numero de camareros no es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

2,03>$t_{(20-5)0.1/2}$ = 1,75 → rechazo la Ho con un α = 10%, el número de mesas es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

0,38>$t_{(20-5)0.1/2}$ = 1,75 → no rechazo la Ho con un α = 10%, el numero de bares en 50m no es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

Contraste conjunto de significatividad:

Ho: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

Bajo Ho: $\frac{R^2/K-1}{(1-R^2)/T-K} \sim F_{K-1,T-K}$

Ha: $\alpha_1 \neq 0 y/o\ \alpha_2 \neq 0$ y/o $\alpha_3 \neq 0\ \alpha_4 \neq 0$

$F_{(5-1,20-5)0.1}$ = 2,36

F= $\frac{0.331561/5-1}{(1-0.331561)/20-5} = \frac{0.08289025}{0.0445626}$ = 1,8600 > $F_{(5-1,20-5)0.1}$ = 2,36→ No rechazo Ho, las variables explicativas no son conjuntamente significativas para explicar el precio de la caña.

R-cuadrado = 0,3315, el 33,15% de las variaciones en el precio de la caña quedan explicadas por las variables.

Al comprobar que para un nivel de confianza del 90% el número de mesas sería una variable significativa y el resto de las variables resultan claramente no significativas las eliminamos del modelo ya que dejar en un modelo variables no significativas supone una pérdida de eficiencia.

Modelo 2: MCO, usando las observaciones 1-20
Variable dependiente: PRECIO

	Coeficiente	*Desv. Típica*	*Estadístico t*	*Valor p*	
Const	1.00716	0.0615409	16.3657	<0.0001	***
MESAS	0.00980371	0.00387479	2.5301	0.0210	**

Media de la vble. dep.	1.140000	D.T. de la vble. dep.	0.162707
Suma de cuad. Residuos	0.371042	D.T. de la regresión	0.143574
R-cuadrado	0.262342	R-cuadrado corregido	0.221361
F(1, 18)	6.401544	Valor p (de F)	0.020952
Log-verosimilitud	11.49295	Criterio de Akaike	−18.98590
Criterio de Schwarz	−16.99443	Crit. de Hannan-Quinn	−18.59714

Modelo estimado o FRM: Y_t = 1,00716+ 0,00980371X_{1t} +U_t

Nivel de confianza del 90%

$t_{(20-2)0.1/2}$=1,73

2,53> $t_{(20-2)0.05/2}$ =1,73 →rechazo la Ho con un α= 10%, la nueva variable mesas sería la única variable significativa para explicar el precio de la caña.

R-cuadrado = 0,2623, el 26,23% de las variaciones en el precio de la caña quedan explicadas por la variable "nº de mesas"

Debido a que la única variable que sale significativa es el número de mesas con un nivel de confianza del 90% decidí crear una nueva variable conjunta de las mesas y los camareros dándoles una importancia del 70% a los camareros y del 30% a las mesas, para ver si de este modo podía aumentar el nivel de confianza del modelo.

Modelo 3: MCO, usando las observaciones 1-20
Variable dependiente: PRECIO

	Coeficiente	*Desv. Típica*	*Estadístico t*	*Valor p*	
Const	0.880453	0.117161	7.5149	<0.0001	***
PROPIEDAD	0.0891633	0.0707559	1.2602	0.2257	
BARESEN50M	0.0111151	0.030311	0.3667	0.7186	
CAMAREROSMESAS	0.0351	0.0133547	2.6283	0.0183	**

Media de la vble. dep.	1.140000	D.T. de la vble. dep.	0.162707
Suma de cuad. Residuos	0.336740	D.T. de la regresión	0.145073
R-cuadrado	0.330537	R-cuadrado corregido	0.205012
F(3, 16)	2.633247	Valor p (de F)	0.085448
Log-verosimilitud	12.46299	Criterio de Akaike	−16.92598
Criterio de Schwarz	−12.94306	Crit. de Hannan-Quinn	−16.14848

Modelo estimado o FRM: Y_t = 0,8883 + 0,0891X_{1t} + 0,0111X_{2t} + 0,0351X_{3t}+U_t

Contrastes individuales de significatividad:

Ho: $\alpha_i = 0$

Bajo Ho: $\frac{\alpha_i - 0}{des(\alpha_i)} \sim t_{T-K}$ i= 1,2,3

Ha: $\alpha_i \neq 0$

Nivel de confianza del 95%

$t_{(20-4)0.05/2}$=2,11

1,26> $t_{(20-4)0.05/2}$ =2,11 → no rechazo la Ho con un α = 5%, la propiedad del bar no es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

0,36>$t_{(20-4)0.05/2}$ = 2,11 → no rechazo la Ho con un α = 5%, el numero de bares en 50m no es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

2,62>$t_{(20-4)0.05/2}$ = 2,11 → rechazo la Ho con un α = 5%, la nueva variable conjunta de camareros y mesas es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

Contraste conjunto de significatividad:

Ho: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$= 0

Bajo Ho: $\frac{R^2/K-1}{(1-R^2)/T-K} \sim F_{K-1,T-K}$

Ha: $\alpha_1 \neq 0 y/o\ \alpha_2 \neq 0$ y/o $\alpha_3 \neq 0$ $\alpha_4 \neq 0$

$F_{(4-1,20-4)0.1}$ = 3,24

F= $\frac{0.331561/5-1}{(1-0.331561)/20-5} = \frac{0.08289025}{0.0445626}$ = 1,8600 > $F_{(5-1,20-5)0.05}$ = 3,24→ No rechazo Ho, las variables explicativas no son conjuntamente significativas para explicar el precio de la caña.

Nivel de confianza de 90%

$t_{(20-4)0.1/2}$=1,7459

1,26> $t_{(20-4)0.1/2}$ =1,74→ no rechazo la Ho con un α = 10%, la propiedad del bar no es una variable significativa para explicar el precio de la caña

0,36 > $t_{(20-4)0.1/2}$= 1,74 → no rechazo la Ho con un α = 10%, el numero de bares en 50m no es una variable significativa para explicar el precio de la caña

2,62>$t_{(20-4)0.1/2}$ = 1,74 → rechazo la Ho con un α = 10%, la nueva variable conjunta de camareros y mesas es una variable significativa para explicar el precio de la caña

<u>Contraste conjunto de significatividad:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ho: } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \\ \\ \text{Ha: } \alpha_1 \neq 0 y/o\ \alpha_2 \neq 0 \text{ y/o } \alpha_3 \neq 0\ \alpha_4 \neq 0 \end{array}\right\} \text{Bajo Ho: } \frac{R^2/K-1}{(1-R^2)/T-K} \sim F_{K-1,T-K}$$

$F_{(4-1,20-4)0.1}$ = 2,46

F= $\frac{0.331561/5-1}{(1-0.331561)/20-5}$ = $\frac{0.08289025}{0.0445626}$ = 1,8600 > $F_{(5-1,20-5)0.1}$ = 2,46→ No rechazo Ho, las variables explicativas no son conjuntamente significativas para explicar el precio de la caña.

R cuadrado = 0,3305, el 33,05% de las variaciones en el precio de la caña quedan explicadas por las variables

Con el mismo criterio descrito anteriormente, eliminamos las variables no significativas para obtener una mayor eficiencia, además en este caso tanto a un nivel de confianza del 95% como del 90%, la variable conjunta es significativa y por tanto se escogerá el mayor nivel de confianza para continuar en el siguiente modelo.

Modelo 4: MCO, usando las observaciones 1-20
Variable dependiente: PRECIO

	Coeficiente	*Desv. Típica*	*Estadístico t*	*Valor p*	
Const	0.980951	0.0705588	13.9026	<0.0001	***
CAMAREROSMESAS	0.0294808	0.0116467	2.5313	0.0209	**

Media de la vble. dep.	1.140000	D.T. de la vble. dep.	0.162707
Suma de cuad. Residuos	0.370956	D.T. de la regresión	0.143557
R-cuadrado	0.262514	R-cuadrado corregido	0.221542
F(1, 18)	6.407234	Valor p (de F)	0.020902
Log-verosimilitud	11.49528	Criterio de Akaike	−18.99056
Criterio de Schwarz	−16.99910	Crit. de Hannan-Quinn	−18.60181

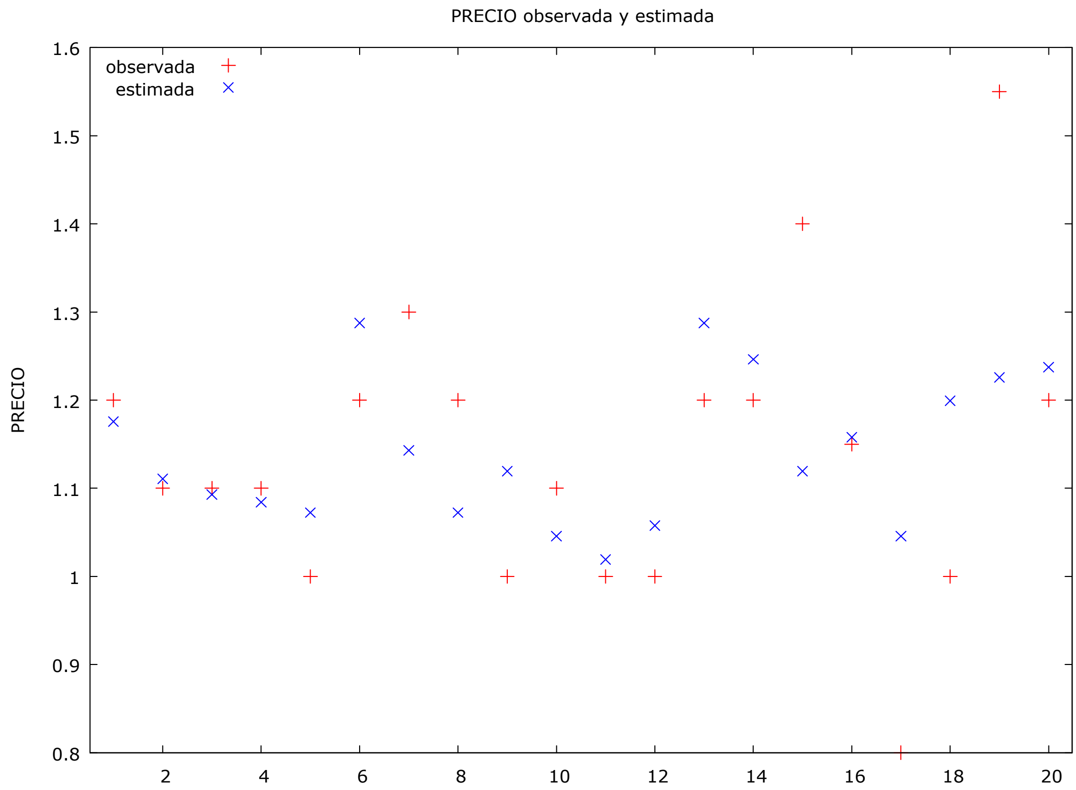
Modelo estimado o FRM: Y_t = 0,9809+ 0.0294X_{1t} + U_t

$t_{(20-2)0.05/2}$=2,10

2,53> $t_{(20-2)0.05/2}$ =2,10 →rechazo la Ho con un α = 5%, la nueva variable conjunta de camareros y mesas es una variable significativa para explicar el precio de la caña.

R cuadrado = 0,2625, el 26,25% de las variaciones en el precio de la caña quedan explicadas por la variable conjunta.

A continuacion adjunto un gráfico que muestra la variable estimada vs la variable observada.



Como se puede observar, este gráfico nos muestra que la mayor discrepancia entre los precios de la caña de cerveza de cada bar, se encuentran en los bares número 15 y número 19, al contrario que con el modelo de Hotelling donde las mayores discrepancias de precios las encontrábamos en los bares número 16 y número 17.

Al igual que el grafico del modelo de Hotelling, podemos observar una diferencia mayor de los precios en los bares que están situados al final de la avenida Madrid llegando a la zona de la Aljafería, donde encontramos una mayor distancia entre ellos.

Dado que parece que existe una diferenciacion espacial del producto, los precios observados en el mercado, seran mayores que el coste marginal, existiendo un determinado poder de mercado de los bares que sería interesante medir. Recordemos que el grado de poder de mercado está intimamente relaciado con la perdida de bienestar social (perdida de eficiencia).

A continuacion voy a realizar un calculo del grado de poder de mercado de los bares individuales y en agregado para toda la avenida, medido por el Indice de Lerner.

El indice de lerner se utiliza para medir el grado de poder de monopolio de una empresa a traves de la formula (P-C) / P, en este caso lo he calculado para el precio real de cada bar y para el precio estimado.

Por otro lado tambien he calculado la suma de los residuos al cuadrado.

$$(Precio\ real - Precio\ estimado\ )^2$$

BARES	PRECIO REAL	COSTE	PRECIO ESTIMADO PARA T=0,005	IL precio real (Pr-C)/Pr	IL precio estimado (Pe-C)/Pe	Residuos^2
1	1,20 €	0,7118 €	0,801066449	0,4068	0,1114	0,1591
2	1,10 €	0,7118 €	0,815332898	0,3529	0,1270	0,0810
3	1,10 €	0,7118 €	0,836665142	0,3529	0,1492	0,0693
4	1,10 €	0,7118 €	0,977727671	0,3529	0,2720	0,0150
5	1,00 €	0,7118 €	1,095645542	0,2882	0,3503	0,0091
6	1,20 €	0,7118 €	1,071254496	0,4068	0,3355	0,0166
7	1,30 €	0,7118 €	0,980772441	0,4525	0,2742	0,1019
8	1,20 €	0,7118 €	0,908235267	0,4068	0,2163	0,0851
9	1,00 €	0,7118 €	0,928568627	0,2882	0,2334	0,0051
10	1,10 €	0,7118 €	0,957439239	0,3529	0,2566	0,0203
11	1,00 €	0,7118 €	1,017588331	0,2882	0,3005	0,0003
12	1,00 €	0,7118 €	1,114314083	0,2882	0,3612	0,0131
13	1,20 €	0,7118 €	1,201068003	0,4068	0,4074	0,0000
14	1,20 €	0,7118 €	1,426357928	0,4068	0,5010	0,0512
15	1,40 €	0,7118 €	1,720763708	0,4916	0,5863	0,1029
16	1,15 €	0,7118 €	1,983096905	0,3810	0,6411	0,6941
17	0,80 €	0,7118 €	1,738023913	0,1103	0,5905	0,8799
18	1,00 €	0,7118 €	1,180398746	0,2882	0,3970	0,0325
19	1,55 €	0,7118 €	1,08997107	0,5408	0,3470	0,2116
20	1,20 €	0,7118 €	1,150885535	0,4068	0,3815	0,0024
						2,5507

	Metros	Punto Medio	Ponderaciones (∑punto medio * total metros)	IL Real * Ponderación
DE 1 A 2	15	7,5	0,003972458	0,001616128
DE 2 A 3	25	12,5	0,01059322	0,003738444
DE 3 A 4	1	0,5	0,006885593	0,002429988
DE 4 A 5	110	55	0,029396186	0,010374181
DE 5 A 6	72	36	0,048199153	0,013890996
DE 6 A 7	85	42,5	0,04157839	0,016915475
DE 7 A 8	19	9,5	0,027542373	0,012461864
DE 8 A 9	41	20,5	0,015889831	0,006464513
DE 9 A 10	44	22	0,022510593	0,006487553
DE 10 A 11	48	24	0,024364407	0,008598421
DE 11 A 12	67	33,5	0,030455508	0,008777278
DE 12 A 13	96	48	0,043167373	0,012440837
DE 13 A 14	72	36	0,044491525	0,018100636
DE 14 A 15	200	100	0,072033898	0,029305791
DE 15 A 16	210	105	0,108580508	0,053375076
DE 16 A 17	400	200	0,16154661	0,061556282
DE 17 A 18	73	36,5	0,125264831	0,013810448
DE 18 A 19	210	105	0,074947034	0,021599735
DE 19 A 20	100	50	0,082097458	0,044396186
	1888		0,026483051	0,010774188
			1	**0,357114019**

Una vez calculado el indice de lerner he diseñado una ponderación dandole a cada bar una determinada importancia en cuanto a la distancia (cuota de mercado de cada bar) para poder averguiar cuanto superior es el precio de la caña respecto del coste marginal.

El resultado muestra lo que aumenta el precio por encima del coste marginal, en este caso el bar representativo de la avenida Madrid establece un precio a la caña de un 35% superior a su coste marginal lo que supone una perdida recuperable de eficiencia o distorsion del mercado.

En cuanto al Indice de Lerner, a mayor IL agregado de la industria menor bienestar social y menor excedente del consumidor.

Por otro lado si comparamos la suma de residuos con el modelo econometrico explicativo, se podría decir que da una mejor explicación la variacion el modelo econometrico ya que muestra un menor valor, esto uiere decir que la cantidad de variacion de precios que no explica el modelo es menor en el modelo econometrioco que en la suma de residuos.

3.2 CAPITULO II. MODELOS ALTERNATIVOS

En este apartado voy a intentar encontrar una explicacion de cuales pueden ser los motivos por los que los precios del producto homogeneo no son iguales en la competencia perfecta analizada, dado que las variables explicativas que se habian seleccionado inicialmente no han podido ofrecer una explicación completa.

Las posibles opciones que se me vienen a la mente que podrian explicar la diferencia de precios son:

1. Por un lado que la variable de los costes fijos esté relacionada con la calidad del servicio de tomarse una caña:
   - *Amabilidad o servicio*: esta variable puede influir en el precio de manera que un buen servicio al cliente proboque en el consumidor una buena experiencia, lo cual le hará repetir y ademas estará dispuesto a pagar un precio mas elevado por un producto y por tanto al propietario la oportunidad de subir su precio sin el riesgo de perder clientela. Ocurrira de este modo todo lo contrario cuando el bar no sea capaz de ofrecer un buen servicio.
   - *Decoracion o ambiente del local*: ocurre lo mismo con esta variable, ya que puede influenciar a los consumidores a la hora de elegir un local.
   - *Limpieza e higiene*: por otro lado esta variable puede tener un mayor efecto cuando esta no se cumple, es decir un local o bar que se encuentre en malas condiciones higienicas notará mas la caida de su clientela, es decir esta variable en negativo tendra un efecto exponencial mas elevado que los resultados que se conseguirian si dicha variable se llevara a cabo.

2. La variable de los costes fijos afecte directamente al precio de la caña (en contra de la teoria economica) relacionado con la economia del comportamiento de que los precios esten relacionados con:

- *Coste de la caña*: en este caso el coste de la caña puede ser también una de las variables difíciles de observar que pueden explicar la diferencia de precios ya que posicionado al bar como cliente, a la hora de adquirir su materia prima, en este caso la cerveza, éste puede tener un mayor o menor poder de negociación para conseguir un buen precio lo cual podría explicar la diferencia de precios en su producto final.

- *Psicología del consumidor:*

La economia tradicional supone que los precios de los productos en el mercado estan determinados por un equilibrio entre dos fuerzas, la oferta y la demanda, y el precio en el que confluyen ambas fuerzas determinará el precio de mercado.

En este caso voy a hablar de la demanda ya que esta está condicionada por la predisposición del consumidor a pagar un precio, pero lo cierto es que el consumidor es facilmente manipulable y como dice Dan Ariely [ver referencia página 64] “en realidad los consumidores no tienen la sartén por el mango ni en cuanto a sus propias preferencias ni en cuanto a los precios que están dispuesto a pagar por los distintos bienes y experiencias”. Es por esto que los precios no vienen marcados en su totalidad por la escasez de los productos, ni por la dificultad de su elaboración ni por la demanda existente, algunos de los efectos que se dan en el comportamiento de los consumidores y que por consiguiente pueden afectar a los precios son los siguientes:

- *Efecto señuelo*: este efecto consiste en que las empresas ofrezcan un producto que en realidad no tienen especial interés en vender, pero que lo utilizaran como señuelo para que el producto que sí desean vender parezca más atractivo y deseable que el anterior.
- *Efecto placebo y expectativas*: este efecto simplemente hace que en muchas ocasiones los consumidores se dejan llevar por expectativas o impresiones que nublan su capacidad de juicio a la hora de comprar.

- *Hábitos y costumbres:* en este caso que un consumidor tenga el habito o la costumbre de acudir a un mismo bar en ocasiones hace indiferente que los bares competentes tengan precios más altos o más bajos, ya que el motivo por el cual el consumidor adquiere dicho producto, no es su precio, por lo que esta variable pasará a segundo plano para el cliente.

3. Reputación del establecimiento: en un mundo cada vez más competitivo donde un consumidor puede cambiarse a la competencia en tan solo unos segundos, el cultivo de una buena reputación es una cuestión clave, ya que, la opinión de otros consumidores sigue siendo primordial en la toma de decisiones de compra y por tanto una buena o mala reputación puede reflejarse en los beneficios de la empresa y por tanto en los precios.
4. Experiencia:
   - *Experiencia de los consumidores*: existe una relación muy estrecha entre las experiencias de los consumidores y su disposición a recomendar esa empresa. Los consumidores satisfechos no sólo están más dispuestos a recomendar, sino que también lo están a comprar de nuevo. Razón por la cual una buena experiencia puede ser muy positivo para la empresa ya que puede aumentar su número de clientes y además contar con clientes fijos.
   - *Experiencia de los empleados:* que los empleados tengan experiencia en el sector, supone una ventaja competitiva para la empresa ya que lo empleados ya tienen los conocimientos precisos para trabajar en el sector, ya conocen los gustos de los clientes y qué hacer para aumentar la rentabilidad. Esta experiencia en los empleados también puede ayudar a que la experiencia de los clientes sea positiva.
5. Consumo relacionado conjunto: las ofertas, productos complementarios o productos que se sirven en "pack" como la caña de cerveza + tapa, pueden influir notablemente en el precio y en la demanda de clientes que acudan a dicho establecimiento.

4. CONCLUSIONES

Tras haber analizado el sector y haber aplicado los modelos económicos que más se ajustaban a sus características, se podría decir que ni el modelo de Hotelling ni el modelo de Bertrand con producto diferenciado resuelven de forma suficientemente satisfactoria la pregunta inicial de cuál es el motivo que explicaría la dispersión de precios.

La primera conclusión clara que se puede sacar tras la investigación es que el sector seleccionado, que en un principio parecía ser claramente una competencia perfecta con un producto homogéneo como es la caña de cerveza, se configura como un mercado oligopolístico con producto diferenciado.

Una vez que me decidí a aplicar el modelo de Hotelling, para lo que utilicé herramientas estadísticas y analíticas propias de la microeconomía, pude comprobar que los precios estimados se aproximaban bastante a los precios reales con una calibración del coste de transporte del consumidor por Km recorrido de t=0,005€, donde la mayor dispersión de precios estimados por el modelo de Hotelling se daban en los bares 16 y 17 (bar "Pepepika" y bar "Quilez" respectivamente).

He podido observar que el bar "Pepepika" es relativamente nuevo y cuenta con ofertas llamativas, motivo por el cual podría considerarse la dispersión en precios, en cuanto al bar "Quilez", se trata de un bar antiguo, que lleva muchos años en el mismo sitio y cuenta con el precio de caña de cerveza más barato de toda la avenida, debido a su antigüedad es posible que no tenga gastos de establecimiento y no invierta en innovación, motivos también que podrían explicar el bajo precio del producto y por tanto la dispersión existente.

Por otro lado al aplicar el modelo teórico de Bertrand con producto diferenciado con la ayuda de las herramientas microeconómicas pertinentes y correr las regresiones econométricas necesarias, obtuve que la variable conjunta de número de camareros y número de mesas sí era una variable significativa que podía explicar la variación del precio de la caña de cerveza, sin embargo hay que destacar que el R cuadrado es solamente de un

26,25%, lo que quiere decir que tan solo el 26,25% de las variaciones en el precio de la caña de cerveza queda explicado por ésta variable.

También observé que la mayor dispersión de precios se daba en los bares 15 y 19 (bar "Between" y bar "Oro Negro Caribeño" respectivamente).

En cuanto a estos establecimientos, el bar "Between" cuenta con las mismas características que el bar "Pepepika", es nuevo y cuenta con ofertas de tapas y descuentos, respecto al bar "Oro Negro Caribeño", se trata de un bar especializado en cafés, es un bar un poco más selecto que el resto. Estos motivos podrían explicar la dispersión en precios encontrada.

A modo de conclusión y comparación entre los dos modelos utilizados en la investigación, voy a utilizar la suma de los cuadrados de los residuos de ambos modelos, que nos mide en una única magnitud numérica comparable el grado de ajuste de las predicciones de cada modelo teórico a los precios reales observados. En este caso el Modelo de Hotelling tendría un grado de ajuste del 35% y el Modelo de Bertrand con producto diferenciado un 37%.

Dado que a mayor porcentaje peor es el ajuste de los datos predichos a reales, el modelo que mejor explicacion ofrece será el de Hotellong.

Por último dado que ambos modelos aplicados no podían explicar en su totalidad la dispersión de precios, propuse modelos alternativos que podrían ayudar a dicha explicación ayudándome de herramientas de marketing e investigación de mercados.

- Que los costes fijos esten relacionados con la calidad del servicio: Amabilidad o servicio, decoracion o ambiente del local y limpieza e higiene.
- Que los costes fijos afecten directamente al precio de la caña (en contra de la teoria economica): Coste de la caña, psicología de los consumidores o hábitos y costumbres.
- Reputación de cada bar.
- Experiencia, de los consumidores y de los empleados.
- Consumo relacionado conjunto: ofertas, productos complementarios o productos que se sirven conjuntamente en paquetes ("packs").

5. BIBLIOGRAFIA

- Introducción a la teoría de juegos y teoría de oligopolio.
  - Varian, H.R. (1992): Análisis Microeconómico. Bosch. Barcelona.
  - Nicholson, W. (1997): Teoría Microeconómica. McGraw-Hill, Madrid.
  - Maté García, Jorge Julio. Microeconomía avanzada : cuestiones y ejercicios resueltos.
  - Carlos Pérez Domínguez Madrid : Pearson educación, cop. 2007

- Estimaciones y constrastes de hipótesis parametricas.
  - Douglas A.. Statistical techniques in business & economics / Douglas A. Lind, William G. Marchal, Samuel A. Wathen. 15th ed., International ed.
  - Canavos, George C.. Probabilidad y estadística : aplicaciones y métodos. McGraw-Hill, D. L. 2003
  - Pérez Suárez, Rigoberto. Análisis de datos económicos, Pirámide, D. L. 1997

- Especificación y estimación del modelo lineal genera, validación y predicción (Contraste de hipótesis, predicciones…).
  - Greene, William H.: Análisis econométrico / William H. Greene. - 3ª ed., reimp. Madrid [etc.]: Prentice-Hall, 2008

- Estrategias basadas en la diferenciación.
  - Navas, J.E. y Guerras, L.A. (2007). Cap. 8 (pp. 265-292). Grant, R. (2006). Caps. 8 (pp. 313-337) y 9 (pp. 339-366)

- Introducción al comportamiento de compra del consumidor y decisiones sobre el producto y precio.
  - Fundamentos de marketing / Miguel Santesmases Mestre: Pirámide, (2011)
  - Kotler, Philip : Fundamentos de marketing, dirección del marketing y principios del marketing / Philip Kotler, Gary Armstrong /Pearson Educación

- "Las Trampas del Deseo" Cómo controlar los impulsos irracionales que nos llevan al error – Dan Ariely, Editorial Planeta S.A, edición Octubre 2013

http://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia

http://www.microeconomia.org

http://www.enciclopediafinanciera.com

http://www.liderazgoymercadeo.com

http://www.puromarketing.com

6. ANEXOS

1. ANEXO I. MATRICES MODELO HOTELLING

Matriz A

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	1
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2

Matriz B

-0,7868
-1,6236
-1,5536
-1,9786
-2,3336
-2,2086
-1,9436
-1,7236
-1,8486
-1,8836
-1,9986
-2,2386
-2,2636
-2,7836
-3,4736
-4,4736
-3,7886
-1,8936
-2,0286
-1,2118

Matriz A^{-1}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-0,5774	-0,1547	-0,0415	-0,0111	-0,0030	-0,0008	-0,0002	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	-0,1547	-0,3094	-0,0829	-0,0222	-0,0060	-0,0016	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	-0,0415	-0,0829	-0,2902	-0,0777	-0,0208	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	-0,0111	-0,0222	-0,0777	-0,2888	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	-0,0030	-0,0060	-0,0208	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	-0,0008	-0,0016	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	-0,0002	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	-0,0001	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	0,0000	0,0000
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0001	-0,0001
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0015	-0,0004	-0,0002
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0207	-0,0056	-0,0016	-0,0008
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2887	-0,0774	-0,0208	-0,0060	-0,0030
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0207	-0,0774	-0,2888	-0,0777	-0,0222	-0,0111
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0056	-0,0208	-0,0777	-0,2902	-0,0829	-0,0415
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	-0,0016	-0,0060	-0,0222	-0,0829	-0,3094	-0,1547
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0002	-0,0008	-0,0030	-0,0111	-0,0415	-0,1547	-0,5774

A^{-1} x B = C

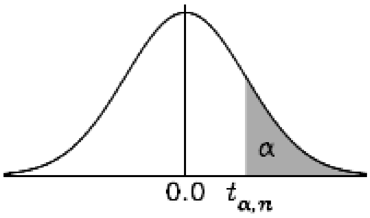
Matriz C

P1=	0,8011
P2=	0,8153
P3=	0,8367
P4=	0,9777
P5=	1,0956
P6=	1,0713
P7=	0,9808
P8=	0,9082
P9=	0,9286
P10=	0,9574
P11=	1,0176
P12=	1,1143
P13=	1,2011
P14=	1,4264
P15=	1,7208
P16=	1,9831
P17=	1,7380
P18=	1,1804
P19=	1,0900
P20=	1,1509

2. ANEXO II. T-STUDENT

t de studen: En probabilidad y estadística, la distribución t (de Student) es una distribución de probabilidad que surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño de la muestra es pequeño.

Aparece de manera natural al realizar la prueba t de Student para la determinación de las diferencias entre dos medias muestrales y para la construcción del intervalo de confianza para la diferencia entre las medias de dos poblaciones cuando se desconoce la desviación típica de una población y ésta debe ser estimada a partir de los datos de una muestra.



$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

n	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001	0.0005
1	0.000	0.325	0.727	1.376	3.078	6.320	12.706	31.820	63.656	318.390	636.791
2	0.000	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.964	9.925	22.315	31.604
3	0.000	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.925
4	0.000	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.958
7	0.000	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.784	5.408
8	0.000	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.782
10	0.000	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.929	4.318
13	0.000	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.141
15	0.000	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.921

19	**0.000**	**0.257**	**0.533**	**0.861**	**1.328**	**1.729**	**2.093**	**2.539**	**2.861**	**3.579**	**3.884**
20	**0.000**	**0.257**	**0.533**	**0.860**	**1.325**	**1.725**	**2.086**	**2.528**	**2.845**	**3.552**	**3.850**
21	**0.000**	**0.257**	**0.532**	**0.859**	**1.323**	**1.721**	**2.080**	**2.518**	**2.831**	**3.527**	**3.819**
22	**0.000**	**0.256**	**0.532**	**0.858**	**1.321**	**1.717**	**2.074**	**2.508**	**2.819**	**3.505**	**3.792**
23	**0.000**	**0.256**	**0.532**	**0.858**	**1.319**	**1.714**	**2.069**	**2.500**	**2.807**	**3.485**	**3.768**
24	**0.000**	**0.256**	**0.531**	**0.857**	**1.318**	**1.711**	**2.064**	**2.492**	**2.797**	**3.467**	**3.745**
25	**0.000**	**0.256**	**0.531**	**0.856**	**1.316**	**1.708**	**2.060**	**2.485**	**2.787**	**3.450**	**3.725**
26	**0.000**	**0.256**	**0.531**	**0.856**	**1.315**	**1.706**	**2.056**	**2.479**	**2.779**	**3.435**	**3.704**
27	**0.000**	**0.256**	**0.531**	**0.855**	**1.314**	**1.703**	**2.052**	**2.473**	**2.771**	**3.421**	**3.689**
28	**0.000**	**0.256**	**0.530**	**0.855**	**1.313**	**1.701**	**2.048**	**2.467**	**2.763**	**3.408**	**3.674**
29	**0.000**	**0.256**	**0.530**	**0.854**	**1.311**	**1.699**	**2.045**	**2.462**	**2.756**	**3.396**	**3.660**
30	**0.000**	**0.256**	**0.530**	**0.854**	**1.310**	**1.697**	**2.042**	**2.457**	**2.750**	**3.385**	**3.646**
40	**0.000**	**0.255**	**0.529**	**0.851**	**1.303**	**1.684**	**2.021**	**2.423**	**2.704**	**3.307**	**3.551**
50	**0.000**	**0.255**	**0.528**	**0.849**	**1.299**	**1.676**	**2.009**	**2.403**	**2.678**	**3.261**	**3.496**
60	**0.000**	**0.254**	**0.527**	**0.848**	**1.296**	**1.671**	**2.000**	**2.390**	**2.660**	**3.232**	**3.460**
70	**0.000**	**0.254**	**0.527**	**0.847**	**1.294**	**1.667**	**1.994**	**2.381**	**2.648**	**3.211**	**3.435**
80	**0.000**	**0.254**	**0.527**	**0.846**	**1.292**	**1.664**	**1.990**	**2.374**	**2.639**	**3.195**	**3.416**
90	**0.000**	**0.254**	**0.526**	**0.846**	**1.291**	**1.662**	**1.987**	**2.368**	**2.632**	**3.183**	**3.404**

3. ANEXO III. F- FISHER

F de Fhiser: Usada en teoría de probabilidad y estadística, la distribución F es una distribución de probabilidad continua. También se le conoce como distribución F de Snedecor (por George Snedecor) o como distribución F de Fisher-Snedecor.

La distribución F aparece frecuentemente como la distribución nula de una prueba estadística, especialmente en el análisis de varianza.

En estadística se denomina prueba F de Snedecor a cualquier prueba en la que el estadístico utilizado sigue una distribución F si la hipótesis nula no puede ser rechazada. El nombre fue acuñado en honor a Ronald Fisher.

- La hipótesis de que las medidas de múltiples poblaciones normalmente distribuidas y con la misma desviación estándar son iguales. Esta es, quizás, la más conocida de las hipótesis verificadas mediante el test F y el problema más simple del análisis de varianza.

- La hipótesis de que las desviaciones estándar de dos poblaciones normalmente distribuidas son iguales, lo cual se cumple.

Para α= 0.05

n2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.45	199.70	215.71	224.58	230.15	233.99	236.76	238.88	240.54	241.89	243.90	245.90	248.03	249.05	250.09	251.14	252.20	253.25	254.32
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.329	19.353	19.371	19.385	19.396	19.425	19.429	19.446	19.454	19.463	19.471	19.479	19.487	19.496
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1156	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8121	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5493	8.5264
4	7.7087	6.9443	6.5914	6.3883	6.2563	6.1631	6.0942	6.0411	5.9987	5.9644	5.9117	5.8578	5.8027	5.7744	5.7459	5.7170	5.6877	5.6580	5.6280
5	6.6079	5.7863	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5582	4.5271	4.4957	4.4638	4.4314	4.3984	4.3650
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0602	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1219	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6363	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3402	3.3043	3.2675	3.2297
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5004	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.1173	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3737	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8636	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4781	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6995	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6168	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6206	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.2317	2.8388	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240	2.0772	2.0035	1.9244	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1666	2.0970	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2898	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588	1.9104	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.1000

Para α= 0.10

n2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.863	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.438	59.857	60.195	60.705	61.222	61.741	62.002	62.265	62.529	62.794	63.061	63.325
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3667	9.3806	9.3916	9.4082	9.4248	9.4414	9.4500	9.4579	9.4662	9.4746	9.4829	9.4912
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304	5.2156	5.2003	5.1845	5.1762	5.1681	5.1598	5.1512	5.1425	5.1337
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199	3.8955	3.8703	3.8443	3.8310	3.8174	3.8037	3.7896	3.7753	3.7607
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974	3.2682	3.2380	3.2067	3.1905	3.1741	3.1572	3.1402	3.1228	3.1050
6	3.7760	3.4633	3.2888	3.1809	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369	2.9047	2.8712	2.8363	2.8183	2.8000	2.7812	2.7620	2.7423	2.7222
7	3.5894	3.2574	3.0740	2.9605	2.8833	2.8273	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025	2.6681	2.6322	2.5947	2.5753	2.5555	2.5351	2.5142	2.4928	2.4708
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7265	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380	2.5020	2.4642	2.4246	2.4041	2.3830	2.3614	2.3391	2.3162	2.2926
9	3.3604	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163	2.3789	2.3396	2.2983	2.2768	2.2547	2.2320	2.2085	2.1843	2.1592
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4141	2.3772	2.3473	2.3226	2.2840	2.2435	2.2007	2.1784	2.1554	2.1317	2.1072	2.0818	2.0554
12	3.1765	2.8068	2.6055	2.4801	2.3940	2.3310	2.2828	2.2446	2.2135	2.1878	2.1474	2.1049	2.0597	2.0360	2.0115	1.9861	1.9597	1.9323	1.9036
15	3.0732	2.6952	2.4898	2.3614	2.2730	2.2081	2.1582	2.1185	2.0862	2.0593	2.0171	1.9722	1.9243	1.8990	1.8728	1.8454	1.8168	1.7867	1.7551
20	2.9747	2.5893	2.3801	2.2489	2.1582	2.0913	2.0397	1.9985	1.9649	1.9367	1.8924	1.8449	1.7938	1.7667	1.7382	1.7083	1.6768	1.6432	1.6074
24	2.9271	2.5383	2.3274	2.1949	2.1030	2.0351	1.9826	1.9407	1.9063	1.8775	1.8319	1.7831	1.7302	1.7019	1.6721	1.6407	1.6073	1.5715	1.5327
30	2.8807	2.4887	2.2761	2.1422	2.0492	1.9803	1.9269	1.8841	1.8490	1.8195	1.7727	1.7223	1.6673	1.6377	1.6065	1.5732	1.5376	1.4989	1.4564
40	2.8354	2.4404	2.2261	2.0909	1.9968	1.9269	1.8725	1.8289	1.7929	1.7627	1.7146	1.6624	1.6052	1.5741	1.5411	1.5056	1.4672	1.4248	1.3769
60	2.7911	2.3932	2.1774	2.0410	1.9457	1.8747	1.8194	1.7748	1.7380	1.7070	1.6574	1.6034	1.5435	1.5107	1.4755	1.4373	1.3952	1.3476	1.2915
120	2.7478	2.3473	2.1300	1.9923	1.8959	1.8238	1.7675	1.7220	1.6842	1.6524	1.6012	1.5450	1.4821	1.4472	1.4094	1.3676	1.3203	1.2646	1.1926
∞	2.7055	2.3026	2.0838	1.9448	1.8473	1.7741	1.7167	1.6702	1.6315	1.5987	1.5458	1.4871	1.4206	1.3832	1.3419	1.2951	1.2400	1.1686	1.1000