

REVISTA
DE LA
ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICO - QUIMICAS Y NATURALES
DE
ZARAGOZA

SERIE 2.ª

FASCICULO 2.º

TOMO XIII



1958

INDICE

Los números enteros en la aritmética y geometría	5
por Enrique Llanos y Molina	
Definición de número entero y 2.2. con subíndice	129
una y otros	
entre los definidos en la	
de la medida y de la integración por	165
El	
El	167
El	
El	165
El	167

Los agentes tensoactivos en la extracción de penicilina, por Enrique Escudero Molins	5
Oculares de cuatro lentes, tipo 2-2, con superficies esfé- ricas y asféricas, por J. Casas y J. Lacasta	129
Sobre las definiciones y teoremas fundamentales de la teoría de la medida y de la integración, por Pedro Pi Calleja	165
Cinemática cuántica relativista, por L. M. Garrido	197
Preparación y propiedades del tetrionato talioso, por Luis Lostao Camón	265
Necrología	273

SOBRE LAS DEFINICIONES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LA MEDIDA Y DE LA INTEGRACION⁽¹⁾

por PEDRO PI CALLEJA

I N D I C E

CONTENIDO

- CAP. I. — *Teorema fundamental de los conjuntos medibles respecto a una medida exterior de CARATHÉODORY.* — 1. Introducción. — 2. Nomenclatura. — 3. Medidas exteriores de CARATHÉODORY. Conjuntos medibles. — 4. Teorema fundamental de los conjuntos medibles. — 5. Los conjuntos borelianos y la medida exterior métrica.
- CAP. II. — *Las definiciones clásicas de conjuntos medibles (L) como caso particular de la teoría general de la medida.* — 1. Introducción. — 2. Medida exterior regular. Medida interior de CARATHÉODORY. — 3. Caracterización de conjuntos medibles por continentes y contenidos medibles.
- CAP. III. — *Integral de LEBESGUE en conjuntos de medida infinita.* — 1. Introducción. — 2. Definición y lema fundamental. — 3. Identificación con la integral de LEBESGUE - VALLÉE POUSSIN. — 4. Convergencia a cero de la integral con $|X_r|$. — 5. Aditividad numerable de la integral como función de conjunto. — 6. Teorema de convergencia acotada de LEBESGUE. — 7. Teorema de FATOU.

(1) El contenido de este artículo figura en varios capítulos de la memoria inédita que fue presentada como becario de la «Fundación Juan March», y en parte aparece también en el volumen III de la obra de J. REY PASTOR, P. PI CALLEJA y C. A. TREJO: *Análisis matemático*, Cap. XXIV: *Teoría de la medida* (Kapelusz, Buenos Aires, XI-1959).

CONTENIDO

En el capítulo I de este artículo se da una simplificación del teorema fundamental de los conjuntos medibles respecto a una medida exterior de CARATHÉODORY, y en el capítulo II se relaciona la teoría general de la medida con las definiciones clásicas de los conjuntos medibles (L), según exposición original que aclara y completa muchos puntos de los textos conocidos. Más importante es el capítulo III donde se extiende la definición y los teoremas de la teoría de LEBESGUE al caso de conjuntos de medida infinita, dando así vastísimo alcance al método de REY PASTOR, que tanto simplifica el desarrollo de dicha teoría.

CAPÍTULO I

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS CONJUNTOS MEDIBLES
RESPECTO A UNA MEDIDA EXTERIOR DE CARATHÉODORY

&I —1. *Introducción.* — Es bien sabido que C. CARATHÉODORY en sus "*Vorlesungen über reelle Funktionen*" (2.^a ed., Leipzig, Teubner, 1927) desarrolló en forma axiomática, de tipo esencialmente geométrico, la teoría general de la medida, que a partir de la idea fundamental de aditividad numerable de E. BOREL (1898), dio paso al proceso de integración de H. LEBESGUE (1902), tan importante por hacer permutables la integral y el paso al límite en condiciones amplias. Esta propiedad y el teorema de F. RIESZ (1911) demostrando que las integrales de LEBESGUE-STIELTJES eran las funcionales lineales continuas más generales sobre el espacio de funciones numéricas continuas con la topología de la convergencia uniforme, sugirieron a J. RADON (1913) la idea de definir la integral de LEBESGUE por métodos funcionales que daban lugar a una "medida de RADON" sobre el espacio euclídeo R_m que abarcaba con gran generalidad las teorías de la integración y de la medida de LEBESGUE y de STIELTJES. Pero en ella se utilizaba aún esencialmente la topología de R_m . Su generalización a espacios abstractos cualesquiera fue lograda por O. NIKODYM (1930) y perfeccionada por J. VON NEUMANN (1940).

Sin embargo, la idea de prescindir de la teoría de la medida para generalizar por método puramente funcional el concepto de integral se debe a W. H. YOUNG (1911), y dicho método fue desarrollado en forma abstracta y general por P. J. DANIELL (1918). En el método geométrico de CARATHÉODORY la medida juega un papel fundamental, y así, según dice el polígrafo autor N. BOURBAKI ("*Eléments de Mathématique*", Liv. VI: "*Intégration*", Cap. V: "*Intégration des mesures*", París, Hermann, Act. Sci. et Ind. n.º 1.244, 1956), "depuis lors, les auteurs qui ont traité d'intégration se

sont partagés entre ces deux points de vue, non sans entrer dans des débats qui ont fait couler beaucoup d'encre sinon beaucoup de sang" (refiriéndose a la crítica que del primer volumen de su "*Intégration*", Act. Sci. et Ind. n.º 1.175, 1952, hizo P. HALMOS en el Bull. Amer. Math. Soc., 59, 1953, p. 249).

Se achaca al método de CARATHÉODORY la forma penosa cómo se llega a demostrar que los conjuntos medibles respecto a una medida exterior forman una familia numerablemente aditiva. Así, pues, es importante dar demostración simplificada de este teorema fundamental, lo que se intenta en su forma más general, combinando diversas ideas sugeridas en los principales textos que tratan la cuestión, mientras que en éstos se encuentran demostraciones mucho más complicadas que la expuesta más adelante.

En espacios abstractos, se han ocupado sobre medidas exteriores en general, los libros:

S. SAKS: *Theory of the integral* (2.ª ed., Monog. Matem. VII, Varsovia, 1937; Stechert, Nueva York);

H. HAHN y A. ROSENTHAL: *Set Functions* (Albuquerque, Univ. New Mexico Press, 1948);

P. R. HALMOS: *Measure Theory* (van Nostrand, Nueva York, 1950);

J. VON NEUMANN: *Functional Operators. Measures and Integrals* (Princeton Univ. Press, 1950);

M. E. MUNROE: *Introduction to Measure and Integration* (Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953);

A. ZAAZEN: *An introduction to the theory of integration* (North-Holland, Amsterdam, 1958).

&I-2. *Nomenclatura.* — Un espacio topológico E (E, G) es un conjunto total E de puntos x y una clase G de subconjuntos G de E , llamados los conjuntos *abiertos* del espacio, tales que la clase G contenga el conjunto vacío \emptyset y el total E , siendo G cerrada respecto a intersecciones (\cap) en número finito y respecto a uniones (\cup) arbitrarias (no necesariamente en número finito o numerable). Entorno U_x de un punto x (ó U_x de un subconjunto X de E) es un conjunto que contenga un abierto al que pertenezca x (o en el que esté contenido X). Entorno reducido de x es un entorno del que se ha suprimido el punto x , designado por

$$U_x^r = U_x - \{x\}. \quad (I-1)$$

Una base de entornos es una familia V de entornos tal que para todo U_x exista un entorno $V_x \in V$ con $V_x \subseteq U_x$, donde " \in " significa "perteneciente a", y " \subseteq " significa "contenido en", reservando " \subset " para "parte propia de".

El espacio topológico es un espacio de HAUSDORFF si cada dos puntos distintos tienen entornos disjuntos (sin punto común).

Un conjunto F es cerrado si su complemento $E - F$ es abierto.

Se llama *clausura* del conjunto X a la intersección \bar{X} de todos los cerrados que contienen el conjunto X . Una familia A de conjuntos es un *cubrimiento* de X si cada punto de X pertenece a un conjunto de la familia A . Si ésta consta sólo de un número finito de conjuntos, el cubri-

miento se llama *finito*. Referida a A , toda familia parcial de A que sea también cubrimiento de X se llama *subcubrimiento* de X . El cubrimiento se llama *abierto* si son abiertos los conjuntos que forman la familia A . El conjunto X se llama *compacto* si todo cubrimiento abierto de X contiene un subcubrimiento finito de X .

Un *espacio métrico* E (E, ρ) es un conjunto total E de puntos $x \in E$, donde se ha definido una función real ρ (llamada *distancia*) sobre el *producto cartesiano* $E \times E$, tal que $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$, $\rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(x, z)$, donde " \iff " significa "*equivalente a*". De esto se deduce fácilmente que además es $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. Espacio métrico es caso muy particular de espacio de HAUSDORFF.

En un espacio métrico, un *entorno esférico* de a de radio ε es la *esfera abierta* de centro a y radio ε dada por el conjunto:

$$U(a, \varepsilon) = \{x \text{ tal que } \rho(a, x) < \varepsilon\}. \quad (\text{I-2})$$

Los entornos esféricos de un espacio métrico forman una base de entornos de dicho espacio. Un *entorno esférico reducido* es el conjunto:

$$U^+(a, \varepsilon) = \{x \text{ tal que } 0 < \rho(a, x) < \varepsilon\}. \quad (\text{I-3})$$

La *distancia entre dos conjuntos* X, Y de un espacio métrico se define por

$$\rho(X, Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} \rho(x, y), \quad (\text{I-4})$$

donde el segundo miembro representa el *extremo inferior* ("inf") de las distancias de cada punto $x \in X$ a cada punto $y \in Y$. En particular, si X consta de un solo punto x , es

$$\rho(x, Y) = \rho(\{x\}, Y). \quad (\text{I-5})$$

Se llama *diámetro* $d(X)$ de un conjunto X al *extremo superior* ("sup") de las distancias de cada par de puntos x_1, x_2 de X :

$$d(X) = \sup_{x_1, x_2 \in X} \rho(x_1, x_2). \quad (\text{I-6})$$

La *diferencia entre dos conjuntos* $X - Y$ es el conjunto de los elementos de X que no pertenecen a Y , es decir:

$$X - Y = X - (X \cap Y). \quad (\text{I-7})$$

En el *espacio euclídeo* R_m , con *distancia euclídea* dada por:

$$\rho(x, y) = + \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}, \quad (\text{I-8})$$

un *intervalo abierto* I de puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ es el ortoedro $\{x \text{ tal que } a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ con medida elemental (L) dada por:

$$\tau_L(I) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i) > 0. \quad (\text{I-9})$$

Si se considera $a_i \leq x_i \leq b_i$, se obtiene el *intervalo cerrado* \bar{I} que es clausura del anterior, en caso de ser $a_i < b_i$ para todo i . Si algún $a_i = b_i$, el intervalo se llama *degenerado*.

En un espacio topológico general se dirá que una familia H de conjuntos es *numerablemente* (finitamente) *aditiva* si cumple: 1.º) El conjunto vacío \emptyset pertenece a H ; 2.º) Si X pertenece a H , también su complemento $E - X$ pertenece a H ; 3.º) La unión infinita-numerable (finita) de conjuntos pertenecientes a H , también pertenece a H .

Es importante observar que este concepto varía ligeramente según distintos autores, los que también emplean nomenclaturas variadas. Aquí se adopta la más adecuada y sencilla al caso tratado.

Si la familia aditiva (finita o numerable) H contiene todos los conjuntos cerrados F , contiene también todos los abiertos G (y recíprocamente). Entonces la *familia mínima numerablemente aditiva* que cumpla estas condiciones (intersección de todas las familias numerablemente aditivas que contienen los abiertos y cerrados de E) forma la familia numerablemente aditiva B de *conjuntos borelianos* o de conjuntos (B) del espacio E . Este concepto es importante en los espacios métricos y en los espacios *completos* (es decir, donde se cumple el criterio general de convergencia de CAUCHY).

Una función numérica uniforme de conjunto $\sigma(X)$ que toma sus valores en la *recta acabada* \bar{R}_1 (nomenclatura de BOURBAKI, designando así la recta euclídea R_1 a la que se han agregado los puntos $-\infty, +\infty$ con las convenciones de H. HAHN en "*Reelle Funktionen*", Leipzig, 1932, pp. 177 y 180) se dirá que es *numerablemente aditiva* si cumple las condiciones: 1.ª) Está definida en una familia numerablemente aditiva H de conjuntos; 2.ª) Si $\{X_n\}$ es una sucesión numerable de conjuntos disjuntos de H , se cumple:

$$\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n) \in \bar{R}_1; \quad (I-10)$$

3.ª) Es $\sigma(\emptyset) = 0$.

Si en la condición 1.ª, la familia H es sólo finitamente aditiva, la condición 2.ª se sustituye por:

$$\sigma(X_1 \cup X_2) = \sigma(X_1) + \sigma(X_2) \in \bar{R}_1 \quad (I-11)$$

para todo par de conjuntos disjuntos X_1 y X_2 de H , y subsiste la condición 3.ª, entonces se dirá que $\sigma(X)$ es una función *finitamente aditiva* de conjunto (o *aditiva*, pues es fácil ver, mediante el conjunto vacío \emptyset , que una función numerablemente aditiva también lo es finitamente). La aditividad numerable también se llama *aditividad completa* o *aditividad infinita*.

Si para dos conjuntos cualesquiera $X \supseteq Y$ (con " \supseteq " significando "*contiene a*") de la familia H donde está definida la función de conjunto σ , es $\sigma(X) \geq \sigma(Y)$, se dirá que σ es *creciente*, mientras que si es $\sigma(X) \leq \sigma(Y)$, se dirá que es *decreciente*, y en uno y otro caso se dirá (*en sentido amplio*) que es *monótona* (*propia*mente si a \supset corresponde siempre $>$ o a \subset corresponde siempre $>$). Es fácil ver que una función *aditiva* de conjunto es

no-negativa si y sólo si es creciente, mientras que es no-positiva si y sólo si es decreciente.

Se dirá que una función de conjunto es una *función de medida* (o más sencillamente una *medida*) si es numerablemente aditiva y es no-negativa (es decir, creciente).

& I-3. *Medidas exteriores de CARATHÉODORY. Conjuntos medibles.* — Toda función numérica uniforme de conjunto $\mu(X)$ que toma sus valores en la recta acabada \bar{R}_1 , definida en una familia numerablemente aditiva H de un espacio topológico general E , se dirá que es una *medida exterior* si cumple los postulados:

M₁) Es creciente, es decir,

$$X_1 \subseteq X_2 \ (\in H) \rightarrow \mu(X_1) \leq \mu(X_2), \quad (\text{I-12})$$

donde “ \rightarrow ” significa “*implica*”;

M₂) Es *subaditiva numerable*, es decir:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n) \quad (\text{I-13})$$

para cualquier sucesión finita o infinitamente numerable de conjunto $X_n \in H$:

M₃) $\mu(\emptyset) = 0$.

Generalmente, la familia H consta de todos los subconjuntos del conjunto total E . Los postulados M₁ y M₃ implican que $\mu(X) \geq 0$. También es fácil ver que si una medida exterior es finitamente aditiva, entonces lo es también numerablemente y, por tanto, la medida exterior es entonces una medida en la misma familia H .

En un *espacio métrico* se dirá que la función de conjunto $\mu(X)$ anterior (cumpliendo los postulados M₁, M₂, M₃) es una *medida exterior métrica* si además cumple el postulado:

M₄) Si para dos conjuntos X_1, X_2 de H es positiva la distancia $\varrho(X_1, X_2) > 0$, entonces es $\mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2)$.

Dado un conjunto cualquiera de un espacio euclídeo R_m , todo cubrimiento de X mediante intervalos abiertos puede reducirse a un subcubrimiento numerable (teorema de LINDELÖF - HAUSDORFF, propiedad que tomando abiertos cualesquiera en lugar de intervalos, puede generalizarse a los espacios de LINDELÖF, es decir, a los espacios perfectamente separables o que cumplan el segundo axioma de numerabilidad según el cual existe en el espacio una base numerable de entornos). La suma de medidas elementales (L) (& I-2) de esta infinidad numerable de intervalos abiertos es la suma de una serie incondicionalmente convergente o divergente de términos positivos. Al extremo inferior de las sumas de las medidas elementales (L) correspondientes a todos los cubrimientos numerables de X por intervalos, designado por:

$$m_e(X) = |X| = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau_L(I_n) \right\}, \quad (\text{I-14})$$

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

se le llama *medida exterior de LEBESGUE* o medida exterior (L) del conjunto X . Puede emplearse la notación $|I|$ en lugar de $\tau_L(I)$ para la medida elemental (L) de I , porque se puede probar que para todo conjunto X que contenga un intervalo I y esté contenido en su clausura I , se cumple $m_e(X) = \tau_L(I)$. Además, se demuestra que la medida exterior (L) dada por (I-14) es una medida exterior métrica.

Respecto a una medida exterior μ de un espacio topológico general definida en una familia numerablemente aditiva H , se dirá que un conjunto $X \in H$ es *medible* (μ), o sencillamente medible, escribiendo $X \in (\mu)$, cuando para todo conjunto $W \in H$ se cumple:

$$\mu(W) = \mu(W \cap X) + \mu(W - X). \quad (I-15)$$

Es fácil ver que esta definición (de CARATHÉODORY) es equivalente a decir (con H. KESTELMAN: *Modern Theories of Integration*, Oxford Univ. Press, 1937) que $X \in (\mu)$ cuando y sólo cuando para todo par de conjuntos A y B de la familia H tales que:

$$A \subseteq X, B \subseteq I - X \text{ se cumpla } \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \quad (I-16),$$

pues en el teorema directo basta tomar $W = A \cup B$ y en el teorema recíproco, tomar $A = W \cap X$, $B = W - X$.

Es inmediato deducir que $E \in (\mu)$, $\mu(X) = 0 \rightarrow X \in (\mu)$; $X \in (\mu) \rightarrow E - X \in (\mu)$.

En virtud de la condición M_2 de subaditividad numerable, se cumple (I-15) si y sólo si es:

$$\mu(W) \geq \mu(W \cap X) + \mu(W - X), \quad (I-17)$$

y como ésta es evidente para $\mu(W) = +\infty$, bastará comprobar (I-17) o (I-15) para todo $W \in H$ de medida exterior finita para afirmar que $X \in (\mu)$, & I-4. *Teorema fundamental de los conjuntos medibles.* — La importancia de los conjuntos medibles radica en la aditividad numerable de su medida exterior restringida a ellos y en que forman una familia numerablemente aditiva, es decir, que la restricción de una medida exterior μ a la familia de conjuntos medibles (μ) es una medida. Esto se va a demostrar por sucesivos teoremas, donde se supondrá que $\mu(X)$ es una medida exterior definida en una familia numerablemente aditiva H de un espacio topológico general E y que cumple, por tanto, los postulados M_1, M_2, M_3 del & I-3.

TEOR. I-1. — Si X es un conjunto medible (μ) e $Y \in H$ con medida exterior finita $\mu(Y) < +\infty$, para cualquier $V \in H$, es:

$$\mu(X_V \cup Y_V) = \mu(X_V) + \mu(Y_V) - \mu(X_V \cap Y_V), \quad (I-18)$$

designando $X_V = X \cap V$, $Y_V = Y \cap V$.

En efecto, por ser X medible, para cualquier $W \in H$ se verifica (I-15), y

si en esta igualdad se toma primero $W = Y_V$ y luego $W = X_V \cup Y_V$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mu(Y_V) &= \mu(X \cap Y_V) + \mu(Y_V - X) = \\ &= \mu(V_V \cap Y_V) + \mu(Y_V - X_V); \\ \mu(X_V \cup Y_V) &= \mu(X \cap (X_V \cup Y_V)) + \mu((X_V \cup Y_V) - X) = \\ &= \mu(X_V) + \mu(Y_V - X_V).\end{aligned}$$

Por ser $\mu(Y_V) < +\infty$, podremos despejar $\mu(Y_V - X_V)$ en la primera y sustituir en la segunda, obteniendo así (I-18). Para $V = E$, se obtiene en lugar de (I-18) la igualdad

$$\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cap Y). \quad (\text{I-19})$$

TEOR. I-2. — Si X es un conjunto medible (μ) y V e Y son conjuntos cualesquiera de la familia H , tales que X e Y sean disjuntos, designando como antes $X_V = X \cap V$, $Y_V = Y \cap V$, entonces es:

$$\mu(X_V \cup Y_V) = \mu(X_V) + \mu(Y_V). \quad (\text{I-20})$$

En efecto, si $\mu(Y_V) = +\infty$, la (I-20) es evidente, mientras que si $\mu(Y_V) < +\infty$, el teor. I-2 es un corolario inmediato del teor. I-1.

TEOR. I-3. — Si $\{X_n\}$ es una sucesión de conjuntos medibles (μ), disjuntos dos a dos y V es un conjunto cualquiera de la familia H , entonces es:

$$\mu(V \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V \cap X_n). \quad (\text{I-21})$$

En efecto, $\bigcup_{n=1}^{k-1} X_n$ es disjunto con X_k medible, de donde por el teor.

I-2 es:

$$\mu(V \cap \bigcup_{n=1}^k X_n) = \mu(V \cap \bigcup_{n=1}^{k-1} X_n) + \mu(V \cap X_k),$$

y aplicando inducción completa, para todo k finito se obtiene:

$$\mu(V \cap \bigcup_{n=1}^k X_n) = \sum_{n=1}^k \mu(V \cap X_n).$$

Por ser $V \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \supseteq V \cap \bigcup_{n=1}^k X_n$, de la condición M_1 de monotonía de

μ (&I-3), se obtiene:

$$\mu(V \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) \geq \mu(V \cap \bigcup_{n=1}^k X_n) = \sum_{n=1}^k \mu(V \cap X_n)$$

y haciendo $k \rightarrow \infty$ resulta:

$$\mu(V \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V \cap X_n),$$

que con la desigualdad de sentido contrario obtenida de la condición M_2 de subaditividad numerable de μ (&I-3), prueba (I-21).

En particular, para $V = E$, la (I-21) se convierte en:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n), \quad (\text{I-22})$$

lo que aún no demuestra sea $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in (\mu)$, es decir, que la familia de conjuntos medibles (μ) sea infinitamente aditiva y μ sea una medida.

TEOR. I-4. — *La intersección D de dos conjuntos medibles X_1 y X_2 es medible.*

En efecto, sea W un conjunto cualquiera de la familia H de medida exterior finita. Aplicando (I-15) al conjunto medible X_1 con $W - D$ en lugar de W , será:

$$\begin{aligned} \mu(W - D) &= \mu((W - D) \cap X_1) + \mu((W - D) - X_1) = \\ &= \mu((W \cap X_1) - D) + \mu(W - X_1). \end{aligned}$$

Si ahora se aplica (I-15) al conjunto medible X_2 con $W \cap X_1$ en lugar de W , será:

$$\begin{aligned} \mu(W \cap X_1) &= \mu((W \cap X_1) \cap X_2) + \mu((W \cap X_1) - X_2) = \\ &= \mu(W \cap D) + \mu((W \cap X_1) - D). \end{aligned}$$

Eliminando $\mu((W \cap X_1) - D)$ entre ambas igualdades anteriores, se obtiene, por ser X_1 medible:

$$\mu(W \cap D) + \mu(W - D) = \mu(W \cap X_1) + \mu(W - X_1) = \mu(W),$$

lo que prueba es D medible, en virtud de la observación final del &I-3.

TEOR. I-5. — *La unión de dos conjuntos medibles es medible.*

En efecto, si X_1 y X_2 son medibles, también lo son sus complementos $E - X_1$ y $E - X_2$ y, por tanto, su intersección (teor. I-4):

$$(E - X_1) \cap (E - X_2) = E - (X_1 \cup X_2) \in (\mu),$$

es decir, $X_1 \cup X_2 \in (\mu)$, como se quería demostrar. Por inducción completa resulta que los conjuntos medibles forman una familia finitamente aditiva.

TEOR. I-6. — *La familia de conjuntos medibles es numerablemente aditiva y la función $\mu(X)$ restringida a ella es una medida.*

Se va a probar que si $X_n \in (\mu)$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$, entonces

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in (\mu).$$

En efecto, para cualquier $W \in H$, por el teor. I-5 es:

$$S_k = \bigcup_{n=1}^k X_n \in (\mu).$$

Con $Y_k = X_k - S_{k-1} = X_k - (X_k \cap S_{k-1})$ es $S_k = S_{k-1} \cup Y_k$ con Y_k, S_{k-1} disjuntos, y si $Y_1 = X_1$, queda $S_k = \bigcup_{n=1}^k Y_n$, $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ con Y_n ($n = 1, 2, \dots$) disjuntos dos a dos. Aplicando (I-15), se obtiene:

$$\mu(W) = \mu(W - S_k) + \mu(W - S_k) = \sum_{n=1}^k \mu(W \cap Y_n) + \mu(W - S_k),$$

en virtud de (I-21) del teor. I-3.

Como $W - S_k \supseteq W - S$, si se aplica la condición M_1 de monotonía de μ (&5-3) a la anterior, se obtiene:

$$\mu(W) \geq \sum_{n=1}^k \mu(W \cap Y_n) + \mu(W - S).$$

Si en ésta se hace tender $k \rightarrow \infty$, y se vuelve a aplicar (I-21) del teor. I-3, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu(W) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(W \cap Y_n) + \mu(W - \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) = \mu(W \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) + \mu(W - \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) = \\ &= \mu(W \cap S) + \mu(W - S) \end{aligned}$$

que en virtud de (I-17) prueba que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in (\mu)$, como se quería demostrar.

Eso y (I-22) hace ver que $\mu(X)$, restringida a la familia de conjuntos medibles, es una medida.

TEOR. I-7. — *La intersección de una infinidad numerable de conjuntos medibles es medible.*

Pues, si $X_n \in (\mu)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), también es $E - X_n \in (\mu)$, y por tanto su unión (teor. I-6):

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (E - X_n) = E - \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \in (\mu),$$

de donde $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \in (\mu)$, como se quería demostrar.

&I-5. *Los conjuntos borelianos y la medida exterior métrica.* — Aun cuando la familia de conjuntos medibles sea numerablemente aditiva, puede no

contener los abiertos, y por tanto un conjunto boreliano puede no ser medible (μ).

EJEMPLO. Sea E (E, G) un espacio topológico general cualquiera (por ejemplo, la recta real R_1) y sean a, b números reales fijos tales que $0 \leq a \leq b$, $b \leq 2a$, definiendo $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(E) = b$ y $\mu(X) = a$ para todos los demás conjuntos. Entonces μ es una medida exterior, pues aun en el caso de que E conste de sólo dos puntos distintos, se cumple el postulado M_2 del &I—3, en virtud de ser $b \leq 2a$. Aplicando (I-15) se ve que en los casos $0 < a \leq b < 2a$ ó bien $0 < a < b = 2a$ con E distinto a dos puntos, los únicos conjuntos medibles son el conjunto vacío \emptyset y el total E , siendo los demás, incluso los borelianos, no medibles. En otro caso, es decir, cuando $0 = a = b$ ó cuando $0 < a < b = 2a$ con el conjunto total reducido a dos puntos distintos, resulta en cambio que *todo* conjunto X es medible; obsérvese que $0 = a < b$ no es posible si ha de ser $b \leq 2a$. En el espacio métrico que forma la recta real R_1 , la medida exterior anterior es métrica (es decir, cumple el postulado M_4 del &I—3) sólo si es $0 = a = b$.

La importancia de una medida exterior métrica está en que respecto a ella los conjuntos abiertos son siempre medibles, según un teorema clásico de CARATHÉODORY, cuya demostración, también clásica, es muy ingeniosa, pero bastante penosa, desarrollándose en forma análoga a la dada por CARATHÉODORY para probar que los conjuntos medibles forman una familia numerablemente aditiva.

Pero aun más, se puede afirmar que *en un espacio métrico cualquiera, la condición necesaria y suficiente para que respecto a una determinada medida exterior μ , los conjuntos borelianos sean medibles, es que μ sea una medida exterior métrica.*

Desde luego, la condición es suficiente, pues si entonces los conjuntos abiertos son medibles (según el mencionado teorema de CARATHÉODORY), la familia numerablemente aditiva de conjuntos medibles contendrá los borelianos (&I—2). Recíprocamente, la condición es necesaria, pues si todo conjunto boreliano es medible, también será medible todo abierto y entonces de esto se deduce que se cumple el postulado M_4 del &I—3 y que por tanto la medida exterior μ dada es métrica. En efecto, dados dos conjuntos X_1 y X_2 de la familia numerablemente aditiva H donde está definida la medida exterior μ tales que $\rho_0 = \rho(X_1, X_2) > 0$ existirá un abierto G que contenga X_1 y sea disjunto con X_2 , pues por ejemplo basta considerar la unión de todos los entornos esféricos de los puntos de X_1 de radio $\rho_0/2$. Como por hipótesis G es medible, puede aplicarse (I—15) tomando $W = X_1 \cup X_2$ y $X = G$, dando así:

$$\mu(X_1 \cup X_2) = \mu((X_1 \cup X_2) \cap G) + \mu((X_1 \cup X_2) - G) = \mu(X_1) + \mu(X_2),$$

que es lo afirmado en el postulado M_4 del &I—3, como se quería demostrar.

CAPÍTULO II

LAS DEFINICIONES CLÁSICAS DE CONJUNTOS MEDIBLES (L)
COMO CASO PARTICULAR DE LA TEORÍA GENERAL
DE LA MEDIDA

&II—1 *Introducción*.— Parece interesante destacar la forma en que rápidamente puede llegarse a estudiar las condiciones restrictivas que deben cumplir espacios topológicos generales y medidas exteriores para que los respectivos conjuntos medibles se ajusten a coincidir con los definidos clásicamente en las obras básicas de la teoría que tratan de la medida (L), tales como las siguientes:

H. LEBESGUE: "*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*" (París, Gauthier-Villars, 1.^a ed., 1904; 2.^a ed., 1928).

C.H. J. DE LA VALLÉE POUSSIN: "*Intégrales de LEBESGUE, Fonctions d'ensemble, Classes de BAIER*" (París, Gauthier-Villars, 2.^a ed., 1934).

Introducida la *función característica* $c_X(x)$ del conjunto X contenido en el intervalo finito I del espacio euclídeo R_m , como la función definida en I que vale 1 en los puntos de X y 0 en los de su complemento $I - X$, se define la *extensión* del conjunto X , o también su *medida de PEANO-JORDAN* o *medida (R)*, al valor, *en caso de existir*, de la integral de RIEMANN:

$$(R) \int_I c_X(x) dx = e(X). \quad (II-1)$$

En cambio, siempre existen, definidas por las integrales superior e inferior de DARBOUX, las llamadas:

$$\left. \begin{aligned} \text{extensión exterior} &= \bar{e}(X) = \int_I^+ c_X(x) dx, \\ \text{extensión interior} &= \underline{e}(X) = \int_I^- c_X(x) dx, \end{aligned} \right\} \quad (II-2)$$

y sólo si estas dos coinciden, el conjunto X tiene extensión.

La extensión de un intervalo I coincide con su medida elemental τ_I (I) (&I—2), que tiene la propiedad de aditividad finita (&I—2).

Se ve que la extensión exterior del conjunto X contenido en I es el extremo inferior de la suma de las medidas elementales de los subintervalos *continentes* a los que pertenece algún punto de X respecto de todas las particiones de I en número *finito* de subintervalos *no-rampantes* (sin punto interior común), mientras que el extremo superior de la suma de las me-

cidas elementales de los subintervalos *contenidos*, todos cuyos puntos, pertenecen a X , da la extensión interior.

La extensión, en caso de existir, da una medida que tiene la propiedad de aditividad finita, pero no la de aditividad numerablemente infinita.

Por ejemplo, cada uno de los puntos racionales de I en R_1 tiene extensión (nula) y su unión (que es numerable) no tiene extensión. Análogamente, si del intervalo I en R_1 se extraen sucesivamente cada uno de los puntos racionales, se obtiene una sucesión de conjuntos de extensión 1, cuya intersección numerable es el conjunto de números irracionales sin extensión.

También puede haber conjuntos abiertos o conjuntos perfectos sin extensión. Por ejemplo, sea el obtenido así en el intervalo cerrado $[0, 1]$ de la recta real R_1 : De $[0, 1]$ se extraen el intervalo abierto central I_1 de longitud $1/4$, de los dos segmentos restantes los respectivos intervalos abiertos centrales I_2, I_3 de longitud $1/4^2$, de los 2^2 segmentos restantes los respectivos intervalos abiertos centrales I_4, I_5, I_6, I_7 de longitud $1/4^3$ y así sucesivamente; entonces, el conjunto abierto extraído $G = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$ no tiene extensión, pues por ser denso en $[0, 1]$ es $\bar{e}(G) = 1$, y por suma de sus componentes, es:

$$e(G) = \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{4^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{2} < 1 = \bar{e}(G).$$

El complemento a $[0, 1]$ es ejemplo de conjunto perfecto sin extensión.

Para que todo conjunto tuviese medida, CANTOR propuso considerar como tal su extensión exterior, pero ésta no es ni finitamente aditiva. Por ejemplo, el conjunto Q de puntos racionales del intervalo $\bar{I} = [0, 1]$ en R_1 y el $\bar{I} - Q$ de los puntos irracionales tienen ambos extensión exterior 1, lo mismo que su unión disjunta \bar{I} .

A partir de la medida elemental de los intervalos (en los espacios euclídeos R_m) puede edificarse toda la teoría de la medida (según Ch. J. de la VALLÉE POUSSIN) basándose exclusivamente en la aditividad numerable, pero para que este método de medir no sea contradictorio, es esencial demostrar el siguiente *teorema de unicidad*:

TEOR. II-1. — Si un conjunto X puede considerarse de dos maneras distintas $X = \bigcup_{r=1}^{\infty} I_r = \bigcup_{s=1}^{\infty} I_s$ como la unión de una infinidad numerable de intervalos no-nampantes (posiblemente degenerados o vacíos), la suma de las medidas elementales de estos intervalos es la misma en ambos casos.

La demostración de este lema fundamental de Ch. J. de la VALLÉE POUSSIN la efectúa J. REY PASTOR (en sus "*Elementos de la Teoría de Funciones*", 3.^a ed., Ibero-Americana, Madrid-Buenos Aires, 1953), en forma ingeniosa, basándose en la teoría de las series dobles de términos positivos, pero es defectuosa y necesita ser perfeccionada, debiéndose aplicar en ella, como en la demostración de Ch. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, el lema de BOREL.

En efecto, sea la intersección $I_{rs} = I_r \cap I_s$, acaso intervalo degenerado o vacío. Para r fijo, es:

$$I_r = \bigcup_{s=1}^{\infty} I_{rs} \quad \text{con} \quad \tau_L(I_r) = \sum_{s=1}^{\infty} \tau_L(I_{rs}),$$

lo que *no es evidente* (como se supone en la obra citada), por no poder aceptar como fundamento el criterio de aditividad numerable, ya que precisamente estamos demostrando la no-contradicción del mismo. Por ejemplo, dicho criterio sería contradictorio en la recta racional, tomando I_r no degenerado, tal que $\tau_L(I_r) > 0$, con I_{rs} reducidos a puntos de $\tau_L(I_{rs}) = 0$. Precisamente, corolario inmediato de este teorema de unicidad será la no numerabilidad del continuo, pues el conjunto de puntos $[0, 1]$ tiene medida $1 > 0$, y por tanto no puede ser numerable; se comprende que esta propiedad *sustantiva* no debe depender solamente de una definición (siempre lógicamente *convencional*) como la de definir como *medida boreliana* de un conjunto compuesto de la unión de un número finito o infinito numerable de intervalos no-rampantes (posiblemente degenerados) a la suma de las medidas elementales de sus intervalos componentes (Ch. J. de la VALLÉE POUSSIN).

Completando la demostración empezada, se ve que desde luego, por ser no-rampantes los $I_{rs} \subseteq I_r$, las sumas parciales serán:

$$\sum_{s=1}^m \tau_L(I_{rs}) \leq \tau_L(I_r),$$

y por tanto, también:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \tau_L(I_{rs}) \leq \tau_L(I_r).$$

Por otra parte, para todo $\varepsilon > 0$, se podrá encerrar cada I_{rs} en un intervalo *abierto* J_s tal que su medida elemental sea:

$$\tau_L(J_s) < \tau_L(I_{rs}) + \varepsilon/2^s.$$

Entonces, cada punto de la *clausura* \bar{I}_r de I_r pertenecerá a un intervalo abierto J_s , bastando un número finito k de éstos, por el lema de BOREL, para cubrir I_r . Por las leyes de monotonía de las sumas *finitas* de números reales, será:

$$\sum_{s=1}^k \tau_L(J_s) \geq \tau_L(I_r),$$

y por tanto:

$$\tau_L(I_r) \leq \sum_{s=1}^{\infty} \tau_L(J_s) \leq \sum_{s=1}^{\infty} (\tau_L(I_{rs}) + \varepsilon/2^s) = \left(\sum_{s=1}^{\infty} \tau_L(I_{rs}) \right) + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, de ésta y la desigualdad de sentido contrario, resulta:

$$\tau_L(I_r) = \sum_{s=1}^{\infty} \tau_L(I_{rs}).$$

Entonces $\sum_{r=1}^{\infty} (I_r)$ es la suma por filas de la serie doble

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (I_{rs})$$

que ha de coincidir con $\sum_{s=1}^{\infty} (I_s)$, suma por columnas de dicha serie doble de términos no negativos, quedando así probado

$$\sum_{r=1}^{\infty} (I_r) = \sum_{s=1}^{\infty} (I_s).$$

Primitivamente LEBESGUE para un conjunto *acotado* $X \subseteq I$ finito de un espacio euclídeo R_m creó una teoría paralela a la de PEANO-JORDÁN definiendo la medida exterior $m_e(X) = |X|$ por la anteriormente considerada (I-14) y la *medida interior* $m_i(X)$ mediante

$$m_i(X) = |I| - |I - X|. \quad (\text{II-3})$$

Entonces, la *definición de LEBESGUE de conjunto medible* (L) dice:
Es $X \in (L)$ si y sólo si se cumple $m_e(X) = m_i(X)$, es decir:

$$|I| = |X| + |I - X|. \quad (\text{II-4})$$

Desde el punto de vista de CARATHÉODORY (& I-3), la condición (II-4) exige aparentemente menos que la (I-15), pues basta tomar en ésta $W = I$, probándose así la necesidad de (II-4). Luego se verá (& II-2, teor. II-5) que (II-4) es también suficiente para que se cumpla (I-15) en el caso de medida exterior (L) en R_m .

La *medida exterior* (L) de un conjunto X en el espacio euclídeo R_m puede darse como *extremo inferior de las medidas exteriores de todos los abiertos* G que contienen X , es decir:

$$m_e(X) = |X| = \inf_{G \supseteq X} |G|, \quad (\text{II-5})$$

equivalente a poner que para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $G_\varepsilon \supseteq X$ tal que:

$$|G_\varepsilon| \leq |X| + \varepsilon, \quad (\text{II-6})$$

donde puede ponerse $<$ en lugar de \leq , si y sólo si $|X|$ es finita. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, por (I-14) puede hallarse un cubrimiento numerable de intervalos I_n tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq |X| + \varepsilon$ ($<$ si $|X|$ es finita)

y basta tomar $G_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Mediante lo que se ha llamado medida boreliana de conjuntos compuestos de intervalos, aplicada previamente a los abiertos y cerrados de R_m (pues todo abierto de R_m es unión finita o numerable de intervalos cerrados no

rampantes con posibles fronteras comunes), se llega a una definición equivalente a la de LEBESGUE. Para ello se introduce $m_e(X) = |X|$ mediante (II-5), pero entendiendo $|G|$ en sentido de medida boreliana.

Correlativamente, se define la *medida interior* $m_i(X)$ mediante el extremo superior de las medidas borelianas de todos los cerrados F contenidos en X , es decir:

$$m_i(X) = \sup_{F \subseteq X} |F| \quad (\text{II-7})$$

para el caso de X acotado. Entonces (II-7) resulta de (II-5) y (II-3), pues es:

$$\begin{aligned} m_i(X) &= |I| - |I - X| = |I| - \inf_{G_1 \supseteq I - X} |G_1| = \sup_{G_1 \supseteq I - X} (|I| - |G_1|) = \\ &= \sup_{I - G_1 \subseteq X} |I - G_1| = \sup_{F \subseteq X} |F|, \end{aligned}$$

donde para $I - G_1 = F \subseteq X$, es borelianamente $|F| = |I| - |G_1|$.

La definición (II-7) no puede aplicarse a conjuntos de medida infinita por dar lugar a incongruencias, tal la de que podría sustraerse de un conjunto medible otro también medible, sin que la diferencia lo fuese.

Válida para conjuntos no acotados es la definición de Ch. J. de la VALLÉE POUSSIN de carácter constructivo (cfr. & II-3, teor. II-12):

Es $X \in (L)$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ se pueden construir efectivamente un conjunto continente abierto G_ε y un conjunto contenido cerrado F_ε , tales que cumplan:

$$F_\varepsilon \subseteq X \subseteq G_\varepsilon \quad \text{con} \quad |G_\varepsilon - F_\varepsilon| < \varepsilon. \quad (\text{II-8})$$

Evidentemente, para conjuntos acotados y, por tanto, de medida finita, donde es $|G_\varepsilon - F_\varepsilon| = |G_\varepsilon| - |F_\varepsilon|$, teniendo en cuenta (II-5) y (II-7), la (II-8) equivale a que se cumpla $m_e(X) = m_i(X)$.

También se verá (& II-3, teor. II-8) que la definición (II-8) equivale a decir:

Es $X \in (L)$ si y sólo si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un conjunto continente abierto $G_\varepsilon \supseteq X$ tal que:

$$|G_\varepsilon - X| < \varepsilon, \quad (\text{II-9})$$

definición empleada por S. RÍOS en su "Teoría de la Integral" (Rev. Academia de Ciencias, vol. 36, 1942, Madrid; resumida en "Conceptos de Integral", Monogr. Cnjo. Sup. Invest. Cient., Madrid, 1946).

Obsérvese que por (II-6) se sabe que para cualquier conjunto X de medida exterior finita existe un conjunto abierto $G_\varepsilon \supseteq X$ tal que:

$$|G_\varepsilon| - |X| < \varepsilon, \quad (\text{II-10})$$

por lo que (II-9) es más restrictivo que (II-10) al probarse (ejemplo de HAUSDORFF) que existen (idealmente, mediante el postulado de ZERMELO) conjuntos no medibles (L).

& II-2. — *Medida exterior regular. Medida interior de CARATHÉODORY.* — En un espacio topológico general (& I-2) una medida exterior μ (que cumpla los postulados M_1, M_2, M_3 del & I-3) se llama *regular* (CARATHÉODORY) si $\mu(X)$ es el extremo inferior de las medidas de todos los conjuntos medibles (& I-3) que contienen X , es decir:

$$\mu(X) = \inf_{X \subseteq A \in (\mu)} \mu(A) \quad (\text{II-11})$$

TEOR. II-2. — *La medida exterior (L) dada por (I-14) es regular, es decir:*

$$|X| = \inf_{X \subseteq A \in (L)} |A| \quad (\text{II-12})$$

Pues llamando $\eta(X)$ al segundo miembro de (II-12), si $X \subseteq A$, será $|X| \leq |A|$ (por la condición M_1 del & I-3), de donde resulta $|X| \leq \eta(X)$. Por otra parte, si $\{I_n\}$ es un cubrimiento por intervalos abiertos de X , y A es su unión, por la condición de M_2 del & I-3 será:

$$\eta(X) \leq |A| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|,$$

y aplicando (I-14) (donde $\tau_L(I_n) = |I_n|$), resulta $\eta(X) \leq |X|$. Ambas desigualdades de sentido contrario demuestran (II-12).

Obsérvese que (II-12) generaliza (II-5).

Para una medida exterior *regular* se define en un espacio topológico general la *medida interior* $\mu_1(X)$ (CARATHÉODORY) como el *extremo superior* de las *medidas de todos los conjuntos medibles contenidos en X* , es decir:

$$\mu_1(X) = \sup_{X \supseteq B \in (\mu)} \mu(B). \quad (\text{II-13})$$

TEOR. II-3. — *En el espacio euclídeo R_n y para conjuntos acotados $X \subseteq I$ finito, la definición de medida interior (II-13) aplicada a la medida (L) es equivalente a la (II-7) y por tanto (& II-1) a la de LEBESGUE (II-3), es decir*

$$\mu_1(X) = m_1(X) = \sup_{F \subseteq X} |F|. \quad (\text{II-14})$$

Pues siendo los conjuntos B y los abiertos G medibles y $|I|$ finita, por (II-12) y (II-5), es (& I-4, teor. I-1):

$$\begin{aligned} \sup_{X \supseteq B \in (L)} |B| &= \sup_{I-X \subseteq I-B} (|I| - |I-B|) = |I| - \inf_{I-X \subseteq I-B} |I-B| = \\ &= |I| - \inf_{I-X \subseteq G} |G| = \sup_{X \supseteq I-G} |I-G| = \sup_{F \subseteq X} |F|. \end{aligned}$$

Se verá ahora que el siguiente teorema fundamental de las medidas exteriores regulares asegura, para cualquier conjunto donde esté definida la medida exterior, la existencia de una *cápsula medible* isométrica exterior, y también la de un *núcleo medible* isométrico interior, lo que permite para

conjuntos de medida regular finita, dar el criterio de mensurabilidad mediante la igualdad de las medidas exterior e interior, como en la teoría clásica.

TEOR. II-4. — En un espacio topológico general, si una medida exterior $\mu(X)$ definida en una familia numerablemente aditiva H , es regular, se cumple:

- $\mu_1(X) \leq \mu(X)$. (En R_m para $\mu = L$, será $\mu_1(X) \leq |X|$);
- Para todo conjunto $X \in H$ existe un conjunto medible S conteniendo X tal que $\mu(S) = \mu(X)$; se llamará a un tal S cápsula isométrica exterior de X ; en particular, en R_m para $\mu = L$, puede tomarse como cápsula boreliana isométrica exterior un conjunto pseudo-abierto G_δ , intersección numerable de abiertos;
- Para todo conjunto $X \in H$ existe un conjunto medible N contenido en X tal que $\mu(N) = \mu_1(X)$; se llamará a un tal N núcleo isométrico interior de X ; en particular, en R_m para $\mu = L$, y conjuntos acotados $X \subseteq I$ finito, puede tomarse como núcleo boreliano isométrico interior un conjunto pseudo-cerrado F_σ , unión numerable de cerrados;
- Si es finita la medida exterior $\mu(X)$ y es S su cápsula isométrica exterior, entonces la medida interior viene dada por:

$$\mu_1(X) = \mu(S) - \mu(S - X). \quad (\text{II-15})$$

DEM. — a) Si $B \subseteq X \subseteq A$, por la condición M_1 del &I-3 y las definiciones (II-11) y (II-13) se deduce $\mu_1(X) \leq \mu(X)$.

b) Si es $\mu(X) = +\infty$, se toma $S = E$ total. Si es $\mu(X)$ finita, por ser regular, para todo número natural k existe un conjunto medible A_k conteniendo X tal que $\mu(A_k) \leq \mu(X) + 1/k$, y basta tomar como cápsula la intersección (&I-4, teor. I-7) de todos los A_k ($k = 1, 2, 3, \dots$). En el caso de medida exterior (L) en el espacio euclídeo R_m , por (II-5) puede tomarse para cada A_k un conjunto abierto G_k y así su intersección da como cápsula un pseudo-abierto G_δ .

c) Si $\mu_1(X) = 0$, puede tomarse como núcleo el conjunto vacío \emptyset . Si $\mu_1(X) > 0$, para todo número natural k , por (II-13) existe un conjunto medible B_k contenido en X , tal que $\mu(B_k) \geq \mu_1(X) - 1/k$ de último miembro positivo desde un cierto valor de k , y basta tomar como núcleo la unión (&I-4, teor. I-6) de los B_k ($k = 1, 2, 3, \dots$). En caso de medida (L) en el espacio euclídeo R_m y conjunto acotado $X \subseteq I$ finito, por (II-14) puede tomarse para cada B_k un conjunto F_k cerrado, y así su unión da como núcleo un pseudo-cerrado F_σ .

d) Si B es medible contenido en X , también $S - B$ es medible, pues $S - B = (E - B) \cap S$ (&I-4, teor. I-4), de donde (condición M_1 del &I-3 y &I-4, teor. I-1) es:

$$\mu(S - X) \leq \mu(S - B) = \mu(S) - \mu(B),$$

la que aplicada a la definición (II-13), por ser $\mu(X)$ finita, da

$$\mu_1(X) \leq \mu(S) - \mu(S - X).$$

Por otra parte, si T es la cápsula isométrica exterior de $S - X$, el conjunto medible $S - T$ está contenido en el X y por aplicación de la definición (II-13), de la condición M_1 del &I-3 y de &I-4, teor. I-1, al ser $\mu(S \cap T) \leq \mu(T) = \mu(S - X)$, resulta:

$$\mu_1(X) \geq \mu(S - T) = \mu(S) - \mu(S \cap T) \geq \mu(S) - \mu(S - X),$$

que con la desigualdad de sentido contrario antes obtenida, prueba en definitiva (II-15).

ESCOLIO. — Los autores H. HAHN y A. ROSENTHAL en su libro *Set Functions* antes citado (&I-I) usan terminología distinta a la más aceptada en general. Así, por ejemplo, HAHN y ROSENTHAL llaman “función de medida” o “medida” a lo que aquí se ha llamado “medida exterior”, llaman “medida exterior” y “medida interior” a los segundos miembros de (II-11) y (II-13) respectivamente, y “medida ordinaria” a lo que aquí se ha llamado “medida exterior métrica”. Además dan un concepto más restrictivo y complicado de “cápsula medible” y “núcleo medible” respecto a lo que aquí se ha llamado “cápsula isométrica exterior” y “núcleo isométrico interior” (donde se suprimen después las palabras “exterior” e “interior” cuando dichos conceptos se aplican a conjuntos medibles para los que valdrá el teor. II-5). Según HAHN y ROSENTHAL, “cápsula medible”, que para evitar confusiones se puede llamar *cápsula medible ajustada de X para la medida exterior μ* , es un conjunto medible S_a conteniendo X tal que para todo conjunto M medible (μ) (y no sólo para E) sea $\mu(S_a \cap M) = \mu(X \cap M)$, y correlativamente “núcleo medible”, que se puede llamar *núcleo medible ajustado*, es un conjunto medible N_a contenido en X tal que para todo conjunto M medible (μ) (y no sólo para E) sea $\mu(N_a \cap M) = \mu_1(X \cap M)$.

Claro está que un S_a es un S y un N_a es un N , siendo fácil probar que para $\mu(X)$ finita, una cápsula isométrica exterior es también cápsula medible ajustada, y un núcleo isométrico interior es también núcleo medible ajustado. Pero, en cambio, si $\mu(X) = +\infty$, puede una cápsula isométrica exterior no ser cápsula medible ajustada y un núcleo isométrico interior no ser núcleo medible ajustado. Por ejemplo, sean en la recta real R_1 el conjunto $A = \{x \text{ tal que } x \leq a\}$, el conjunto $B = \{x \text{ tal que } x \geq b\}$ con $a < b$, y el conjunto $C = A \cup B$. Entonces, el conjunto total E es cápsula isométrica exterior de B , pero no es cápsula medible ajustada de B , porque para $M = A$ es:

$$|B| = |E| = |E \cap A| = +\infty \neq |B \cap A| = |\emptyset| = 0,$$

mientras que B es núcleo isométrico interior de C , pero no es núcleo medible ajustado, porque para $M = A$ es:

$$|B| = m_1(C) = m_1(C \cap A) = |A| = +\infty \neq |B \cap A| = |\emptyset| = 0.$$

La condición $m_1(Q - P) = 0$ ($m_1(P - Q) = 0$) que es condición necesaria para que el conjunto medible $Q \supseteq P$ ($Q \subseteq P$) sea cápsula medible ajustada (núcleo medible ajustado) de P , ya no lo es para que sea cápsula isométrica exterior (núcleo isométrico interior) de P , pues basta tomar en el

ejemplo anterior $Q = E$, $P = B$ con $m_1(E - B) = +\infty \neq 0$ ($Q = B$, $P = C$ con $m_1(C - B) = m_1(A) = +\infty \neq 0$); dicha condición continúa siendo suficiente para que Q sea cápsula medible ajustada (núcleo medible ajustado) de P , y, por tanto, también cápsula isométrica exterior (núcleo isométrico interior) de P .

Puede probarse que en el espacio euclídeo R_m y $\mu = L$, un conjunto cualquiera X tiene un núcleo medible ajustado que es un pseudo-cerrado F_σ . En el teor. II-11 se prueba que si $X \in (L)$, aunque no esté acotado y sea de medida infinita, existe siempre un núcleo isométrico pseudo-cerrado F_σ .

TEOR. II-5. — Si una medida exterior es regular, la condición necesaria y suficiente para que un conjunto X de medida exterior finita sea medible, es que se cumpla:

$$\mu_1(X) = \mu(X). \quad (\text{II-16})$$

La condición es necesaria, pues si $X \in (\mu)$, de (II-15) y &I-4, se obtiene:

$$\mu_1(X) = \mu(S) - \mu(S - X) = \mu(S) - [\mu(S) - \mu(X)] = \mu(X).$$

La condición (II-16) es suficiente, pues de (II-15) y teor. II-4, b, se obtiene, entonces:

$$\mu(X) = \mu(S) - \mu(S - X) = \mu(X) - \mu(S - X),$$

es decir, $\mu(S - X) = 0$, con lo que $S - X$ es medible (&I-3) y también lo es (&I-4, teor. I-5) $E - X = (E - S) \cup (S - X)$, es decir, X .

Consecuencia inmediata de los teoremas II-5 y II-3 es la equivalencia de la definición de LEBESGUE $m_e(X) = m_1(X)$ en el sentido (II-4) con la definición general de CARATHÉODORY para el caso particular de medida (L) aplicada a conjuntos acotados $X \subseteq I$ del espacio euclídeo R_m .

&II-3. Caracterización de conjuntos medibles por continentes y contenidos medibles. — En la teoría general se van a obtener ahora los criterios de mensurabilidad correlativos a los (II-9) y (II-8), aplicables también en la teoría (L) a conjuntos no acotados.

TEOR. II-6. — Para una medida exterior cualquiera μ definida en una familia numerablemente aditiva H de un espacio topológico general E (&I-3), es suficiente que para todo número real $\varepsilon > 0$ exista un conjunto medible A_ε , continente de $X \in H$, cumpliendo:

$$\mu(A_\varepsilon - X) < \varepsilon, \quad (\text{II-17})$$

para que X sea medible (μ) . En particular, si la medida exterior μ es métrica, definida en un espacio métrico (&I-5), es suficiente exista un continente abierto G_ε de $X \in H$ cumpliendo (II-9) para que X sea medible (μ) .

En efecto, tomando $\varepsilon = 1/k$, con k número natural, existe por hipótesis una sucesión de conjuntos medibles $\{A_k\}$ tales que $A_k \supseteq X$ con $\mu(A_k - X) < 1/k$, ($k = 1, 2, 3, \dots$). Si se toma:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in (\mu),$$

se cumplirá $A \supseteq X$ con $\mu(A - X) \leq \mu(A_k - X) < 1/k$, que siendo válido para todo número natural k dará $\mu(A - X) = 0$, de donde $A - X$ es medible (μ) y siéndolo A , también lo será X , pues $E - X = (E - A) \cup (A - X) \in (\mu)$, (&I-4, teor. I-5). Si en (II-17) figurase G_ε en lugar de A_ε , podría repetirse el razonamiento para G_k en lugar de A_k , dando:

$$G_\delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \in (\mu),$$

(&I-4, teor. I-7), con $\mu(G_\delta - X) = 0$, y siendo $G_\delta - X$ y G_δ medibles, también lo será $E - X = (E - G_\delta) \cup (G_\delta - X)$, (&I-4, teor. I-5) y, por tanto, X .

Respecto del recíproco, en el espacio euclídeo R_m , si $X \in (L)$ se cumple (II-17) (y aún más (II-9), teor. II-8 posterior), pero esto ya no subsiste para una medida exterior cualquiera μ en un espacio topológico general. Sólo se puede afirmar más restringidamente:

TEOR. II-7. — *Para una medida exterior regular μ definida en una familia numerablemente aditiva H de un espacio topológico tal que el conjunto total E sea la unión de una infinidad numerable de conjuntos U_r de medida exterior finita, la condición necesaria y suficiente para que un conjunto $X \in H$ sea medible (μ) es que para que todo número real $\varepsilon > 0$ exista en conjunto medible (μ) continente $A_\varepsilon \supseteq X$ cumpliendo (II-17).*

Obsérvese que se cumplen las condiciones de hipótesis para el espacio euclídeo R_m , donde puede tomarse para U_r los conjuntos abiertos constituidos por las esferas de radio r y centro el origen, y para la medida (L) que es regular (&II-2, teor. II-2).

Con condiciones de hipótesis menos restrictivas, la suficiencia de (II-17) se ha demostrado en el teor. II-6. Véase ahora la necesidad. Por ser la medida exterior μ regular, por (II-11) existe para todo número real $\varepsilon > 0$ un conjunto $A_\varepsilon \in (\mu)$ continente del $X \in H$, tal que $\mu(A_\varepsilon) \leq \mu(X) + \varepsilon$, pudiéndose poner $<$ si $\mu(X)$ es finita. En este caso, si además $X \in (\mu)$, se cumple (&I-4):

$$\mu(A_\varepsilon - X) = \mu(A_\varepsilon) - \mu(X) < \varepsilon,$$

como se quería probar.

Si $\mu(X) = +\infty$ y es $X \in (\mu)$, entonces existe una infinidad numerable de conjuntos disjuntos $X_r \in (\mu)$ de medida finita, tales que:

$$X = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_r \quad (\text{II-18})$$

pues basta considerar (&II-2, teor. II-4, b) las cápsulas isométricas exteriores $S_r \supseteq U_r$ tales que $S_r \in (\mu)$ con medida finita $\mu(S_r) = \mu(U_r) < +\infty$, y tomar:

$$X_r = X \cap (S_r - \bigcup_{k=1}^{r-1} S_k) \in (\mu).$$

Por lo que se acaba de ver anteriormente, existirán conjuntos medibles $A_r \supseteq X$, tales que $\mu(A_r - X_r) < \varepsilon/2^{r+1}$ y entonces es:

$$X \subseteq \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r = A_\varepsilon \in (\mu),$$

según &I-4, teor. I-6. De esto, y ser:

$$A_\varepsilon - X \subseteq \bigcup_{r=1}^{\infty} (A_r - X_r),$$

se deduce (&I-3, condiciones M_1 y M_2):

$$\mu(A_\varepsilon - X) \leq \mu\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} (A_r - X_r)\right) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \mu(A_r - X_r) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

como se quería demostrar.

NOTA. — Si se quiere hacer intervenir en (II-17) abiertos G_ε en lugar de medibles A_ε , puede ocurrir que ni tan sólo los abiertos sean medibles (&I-5, ejemplo), pero aun para una medida exterior métrica definida en un espacio métrico, donde los abiertos son medibles, puede ocurrir no existan abiertos de medida finita, tal es el caso respecto de la medida unidimensional $\mu^{(1)}$ de HAUSDORFF respecto a los abiertos del plano euclideo R_2 .

Sin embargo, se cumple:

TEOR. II-8. — *En el espacio euclideo R_m , la condición necesaria y suficiente para que un conjunto X sea medible (L) es que para que todo número real $\varepsilon > 0$ exista un conjunto abierto continente*

$G_\varepsilon \supseteq X$ tal que:

$$|G_\varepsilon - X| < \varepsilon. \quad (\text{II-9})$$

Pues ya se ha demostrado en el teor. II-6 que (II-9) es suficiente para ser $X \in (L)$. Recíprocamente, si suponemos que $X \in (L)$, teniendo en cuenta (II-10), si además $|X| < +\infty$, por &I-3 será:

$$|G_\varepsilon - X| = |G_\varepsilon| - |X| < \varepsilon,$$

como se quería demostrar. En el caso de ser $|X| = +\infty$ y $X \in (L)$, se considera como en el teorema anterior la descomposición:

$$X = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_r \text{ con } X_r = X \cap (S_r - S_{r-1}) \in (L),$$

tomando para $S_r = U_r$ las esferas de radio r y centro el origen, y en lugar de A_r conjuntos abiertos $G_r \supseteq X$ tales que $|G_r - X_r| < \varepsilon/2^{r+1}$, siendo entonces:

$$X \subseteq \bigcup_{r=1}^{\infty} G_r = G_\varepsilon$$

abierto (&I-2), y como:

$$G_\varepsilon - X \subseteq \bigcup_{r=1}^{\infty} (G_r - X_r),$$

resulta (&I-3, condiciones M_1 y M_2):

$$|G_\varepsilon - X| \leq \left| \bigcup_{r=1}^{\infty} (G_r - X_r) \right| \leq \sum_{r=1}^{\infty} |G_r - X_r| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

como se quería demostrar.

TEOR. II-9. — En el espacio euclídeo R_m , la condición necesaria y suficiente para que un conjunto X sea medible (L) es que exista un pseudo-abierto G_δ conteniendo X tal que $|G_\delta - X| = 0$. Todo conjunto X medible (L) tiene una cápsula boreliana isométrica $G_\delta \supseteq X$ tal que $|G_\delta| = |X|$.

En efecto, si $X \in (L)$, en el teor. II-8 se ha visto que para todo k natural, según (II-9) existe $G_k \supseteq X$ tal que $|G_k - X| < 1/k$, ($k = 1, 2, 3, \dots$). Si se toma:

$$G_\delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \supseteq X,$$

se obtiene $|G_\delta - X| = 0$, como se quería demostrar.

Recíprocamente, esta condición es suficiente, pues entonces (&I-3) es $G_\delta - X$ medible y, por tanto, lo es también $E - X = (E - G_\delta) \cup (G_\delta - X)$, es decir, X . Si $|X| < +\infty$, de $|G_\delta - X| = 0$, se obtiene $|G_\delta| = |X|$, y si $|X| = +\infty$, se toma como cápsula boreliana isométrica el conjunto total E .

TEOR. II-10. — En el espacio euclídeo R_m , la condición necesaria y suficiente para que un conjunto X sea medible (L) es que para todo número real $\varepsilon > 0$ exista un conjunto cerrado contenido $F_\varepsilon \subseteq X$ tal que:

$$|X - F_\varepsilon| < \varepsilon. \quad (\text{II-19})$$

Pues $G_\varepsilon \supseteq E - X$ es equivalente a que $F_\varepsilon = E - G_\varepsilon \subseteq X$, siendo:

$$X - F_\varepsilon = X - (E - G_\varepsilon) = G_\varepsilon - (E - X) = G_\varepsilon \cap X.$$

Entonces la condición (II-19) es suficiente, pues ello implica que exista $G_\varepsilon \supseteq E - X$ tal que $|G_\varepsilon - (E - X)| = |X - F_\varepsilon| < \varepsilon$, de donde por el teorema II-8 es $E - X$ medible y, por tanto, lo es X . Recíprocamente, si $X \in (L)$, también es medible $E - X$ y por el teor. II-8 existe un abierto $G_\varepsilon \supseteq E - X$ tal que $|G_\varepsilon - (E - X)| = |X - F_\varepsilon| < \varepsilon$ con $F_\varepsilon = E - G_\varepsilon \subseteq X$, como se quería demostrar.

TEOR. II-11. — En el espacio euclídeo R_m , la condición necesaria y suficiente para que un conjunto X sea medible (L) es que exista un pseudo-cerrado F_σ contenido en X tal que $|X - F_\sigma| = 0$. Todo conjunto X medible (L) tiene un núcleo boreliano isométrico $F_\sigma \subseteq X$ tal que $|F_\sigma| = |X|$.

En efecto, si $X \in (L)$, en el teor. II-10 se ha visto que para todo k natural, según (II-19) existe $F_k \subseteq X$ tal que $|X - F_k| < 1/k$, ($k = 1, 2, 3, \dots$). Si se toma:

$$F_\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subseteq X,$$

se obtiene $|X - F_\sigma| = 0$ como se quería demostrar. Recíprocamente, esta condición es suficiente, pues entonces (&I-3) es $X - F_\sigma$ medible y, por tanto, lo es también $X = (X - F_\sigma) \cup F_\sigma$. Si $|X| < +\infty$, de $|X - F_\sigma| = 0$ se obtiene $|X - F_\sigma| = |X| - |F_\sigma| = 0$ y así $F_\sigma \subseteq X$ es el núcleo boreliano isométrico de X . En el caso de ser $|X| = +\infty$ y $X \in (L)$, se consideran como antes las esferas $U_r = S_r$ de radio r y centro de origen, para así determinar la descomposición:

$$X = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_r \text{ con } X_r = X \cap (S_r - S_{r-1}) \in (L),$$

siendo $|X_r| < +\infty$, por lo que existe un pseudo-cerrado $F_{\sigma_r} \subseteq X_r$ tal que $|F_{\sigma_r}| = |X_r|$; así resulta el núcleo boreliano isométrico:

$$\begin{aligned} F_\sigma = \bigcup_{r=1}^{\infty} F_{\sigma_r} &\subseteq X, \text{ pues es } |F_\sigma| = \left| \bigcup_{r=1}^{\infty} F_{\sigma_r} \right| = \sum_{r=1}^{\infty} |F_{\sigma_r}| = \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} |X_r| = |X| = +\infty. \end{aligned}$$

De los teoremas II-8 y II-10 se deduce inmediatamente la equivalencia de la definición (II-8) de CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN en los espacios euclídeos con la de CARATHÉODORY. Es decir:

TEOR. II-12. — Es $X \in (L)$ en el espacio euclídeo R_m , si y sólo si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un conjunto continente abierto G_ε y un conjunto contenido cerrado F_ε , tales que cumplan:

$$F_\varepsilon \subseteq X \subseteq G_\varepsilon \text{ con } |G_\varepsilon - F_\varepsilon| < \varepsilon. \quad (\text{II-8})$$

Pues si se cumple (II-8), con mayor razón se cumplen (II-9) ó (II-19) y por los teoremas II-8 ó II-10 será $X \in (L)$.

Recíprocamente, si $X \in (L)$, por los teoremas II-8 y II-10 existirán $G_\varepsilon \supseteq X$ y $F_\varepsilon \subseteq X$ tales que $|G_\varepsilon - X| < \varepsilon/2$ y $|X - F_\varepsilon| < \varepsilon/2$, de donde, por la condición M_2 del &I-3, será:

$$|G_\varepsilon - F_\varepsilon| \leq |G_\varepsilon - X| + |X - F_\varepsilon| < \varepsilon,$$

como se quería demostrar.

CAPÍTULO III

INTEGRAL DE LEBESGUE EN CONJUNTOS DE MEDIDA INFINITA

&III-1. *Introducción.* — En los “*Elementos de la Teoría de Funciones*” de J. REY PASTOR (3.^a ed., Ibero-Americana, Madrid, Buenos Aires, 1953) se da una definición de integral de LEBESGUE mediante la noción de integral de CAUCHY-RIEMANN, que se reduce a la clásica utilizando la integral de STIELTJES, definición que permite una gran simplificación en las demostraciones de los teoremas básicos de la teoría. Se intenta hacer ver aquí que dicha definición, aplicable al caso más general de función medible no acotada definida en conjunto medible cualquiera de medida finita o infinita, permite aun en el caso de conjuntos medibles de medida infinita, establecer dichos teoremas básicos en forma mucho más simplificada de como lo hacen los textos más acreditados de otras lenguas.

Aun cuando se dan las definiciones y teoremas para el caso particularmente interesante de función real finita o infinita medible (L) definida en un conjunto medible X , de medida de LEBESGUE $|X|$ finita o infinita, en el espacio euclídeo R_m , puede generalizarse fácilmente la exposición a una medida exterior cualquiera de CARATHÉODORY de un espacio topológico general, con la sola restricción (a veces, e indicada oportunamente), de la hipótesis del teor. II-7.

&III-2. *Definición y lema fundamental.* — Recordemos la definición de REY PASTOR de integral (L). Sea la función real medible $f(x)$, finita o infinita, definida en el conjunto medible X , de medida de LEBESGUE $|X|$ finita o infinita, en el espacio euclídeo R_m .

Sea la función de medida:

$$g(k) = \begin{cases} |\{x \in X \text{ tal que } f(x) \geq k\}| & \text{si } k \geq 0, \\ -|\{x \in X \text{ tal que } f(x) \leq k\}| & \text{si } k < 0, \end{cases}$$

y llámase X^+ al conjunto contenido en X donde $f(x) \geq 0$ y X^- al conjunto complementario donde $f(x) < 0$, tales que $X = X^+ \cup X^-$. Para $k=0$ resultan los valores límites $g(0) = |X^+|$, $g(0^-) = -|X^-|$.

Es $f(x)$ integrable (L) en X si existe finita la integral de CAUCHY-RIEMANN del segundo miembro de:

$$(L) \int_X f(x) dx = (CR) \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) dk, \quad (III-1)$$

y de esta definición se deduce inmediatamente que si $X = X_1 \cup X_2$, con X_1 y X_2 medibles disjuntos, la integral de $f(x)$ sobre X es la suma de las inte-

grales sobre los conjuntos medibles X_1 y X_2 , pues el integrando del segundo miembro de (III-1) es la suma $g(k) = g_1(k) + g_2(k)$ de los integrandos correspondientes a estas integrales en virtud de la aditiva finita de la medida de conjuntos (& I-4, teor. I-2). En particular es:

$$\begin{aligned} (L) \int_X f(x) dx &= (L) \int_{X^+} f dx + (L) \int_{X^-} f dx = \\ &= (L) \int_{X^+} |f| dx + (L) \int_{X^-} (-|f|) dx, \end{aligned} \quad (III-2)$$

y como esto hace ver que una función es integrable (L) si y sólo si es integrable (L) absolutamente, bastará estudiar la integración en X^+ y en X^- separadamente y aplicar (III-2).

Obsérvese ahora que si X medible es de medida infinita, por ejemplo es $|X^+| = +\infty$, subsiste la definición (III-1), pero entonces si existe la integral con valor finito, como $g(0) = |X^+| = +\infty$, la integral (CB) del segundo miembro de (III-1) será además impropia en $k=0$ y para $\varepsilon > 0$ arbitrario, existirá $\delta > 0$ tal que:

$$(CR) \int_0^\delta g(k) dk < \varepsilon$$

con $g(\delta)$ finito; por tanto se llega así al fundamental:

LEMA. — El conjunto X^+ de medida infinita, donde $f(x) \geq 0$ es integrable (L), podrá descomponerse en un conjunto medible X_a^+ de medida finita, donde $f(x) \geq \delta > 0$, es decir:

$$g(\delta) = |X_a^+| = |\{x \in X^+ \text{ tal que } f(x) \geq \delta\}|, \quad (III-3)$$

más un conjunto medible X_1^+ de medida infinita, donde $\delta_1 > f(x) \geq 0$, es decir:

$$|X_1^+| = |\{x \in X^+ \text{ tal que } \delta_1 > f(x) \geq 0\}| = +\infty, \quad (III-4)$$

tal que en él sea:

$$(L) \int_{X_1^+} f(x) dx < \varepsilon, \quad (III-5)$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario y $\delta = \delta(\varepsilon)$, cumpliéndose:

$$(L) \int_{X^+} f(x) dx = (L) \int_{X_a^+} f(x) dx + (L) \int_{X_1^+} f(x) dx, \quad (III-6)$$

con $X^+ = X_a^+ \cup X_1^+$.

Análogamente para X^- .

&III-3. Identificación con la integral de LEBESGUE-VALLÉE-POUSSIN. — Se va a recordar cómo REY PASTOR reduce esta noción de integral (L) a la

clásica de LEBESGUE, extendida por Ch. J. de la VALLÉE POUSSIN a función no acotada. Si en X^+ , donde es $f(x) \geq 0$, se considera la *función truncada* $f_k(x)$ que valga $f(x)$ si $0 \leq f(x) \leq K$ y valga K si $f(x) > K$, con función de medida $g_k(k)$ coincidente con $g(k)$ para $k \leq K$ y nula para $k > K$, entonces, por definición, es:

$$\begin{aligned} (L) \quad \int_{X^+} f \, dx &= (CR) \int_0^{+\infty} g(k) \, dk = \lim_{K \rightarrow +\infty} (CR) \int_0^K g(k) \, dk = \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} (CR) \int_0^{K+1} g_k(k) \, dk. \end{aligned} \quad (III-7)$$

Al integrar por partes la última integral, resulta la integral de STIELTJES:

$$\begin{aligned} (CR) \int_0^{K+1} g_k(k) \, dk &= \left[k \cdot g_k(k) \right]_0^{K+1} - (R-St) \int_0^{K+1} k \cdot dg_k(k) = \\ &= - (R-St) \int_0^{K+1} k \cdot dg_k(k), \end{aligned} \quad (III-8)$$

en el caso de $|X^+|$ finita, pues entonces $g_k(0)$ es finita y $g_k(K+1) = 0$. Las sumas inferiores y superiores de último miembro, como integral de STIELTJES, son las clásicas sumas de LEBESGUE para $f_k(x)$, pues es:

$$-\Delta g_k(k) = g(k_{r-1}) - g(k_r) = |\{x \in X^+ \text{ tal que } k_{r-1} \leq f(x) < k_r\}|. \quad (III-9)$$

Análogamente para el conjunto X^- . Por tanto, en el caso de $|X|$ finita, la definición de LEBESGUE - VALLÉE POUSSIN coincide con la definición (III-1), pero ésta es más general, pues incluye el caso donde $|X| = +\infty$.

&III-4. *Convergencia a cero de la integral con $|X_r|$.* — La noción de función truncada sirve también para demostrar fácilmente que si $f(x)$ es integrable (L) en X medible (L) y es $\{X_r\}$ una sucesión de conjuntos medibles (L) contenidos en X tales que $|X_r| \rightarrow 0$, entonces también es:

$$\lim_r \int_{X_r} f(x) \, dx = 0,$$

(escribiendo desde ahora las integrales (L) sin este distintivo).

Basta demostrarlo para X^+ donde $f(x) \geq 0$. Si $f_k(x)$ es la función truncada correspondiente a $f(x)$, por la definición (III-1), a todo $\varepsilon > 0$ corresponde un $K = K(\varepsilon)$ tal que:

$$\int_{X^+} f(x) \, dx - \int_{X^+} f_k(x) \, dx < \varepsilon \quad (III-10)$$

Para este K fijo, del teorema del valor medio para función acotada se

deduce que existe un $r_0 = r_0(\varepsilon, K(\varepsilon)) = r_0(\varepsilon)$, tal que para todo $r > r_0$, sea:

$$\int_{X_r^+} f_K(x) dx \leq K |X_r^+| < \varepsilon. \quad (\text{III-11})$$

De ser:

$$\int_{X^+ - X_r^+} f(x) dx \geq \int_{X^+ - X_r^+} f_K(x) dx$$

y de (III-10) y (III-11) se deduce:

$$\begin{aligned} \int_{X_r^+} f dx &\leq \int_{X_r^+} f_K dx + \int_{X_r^+} f dx - \int_{X_r^+} f_K dx + \\ &+ \left(\int_{X^+ - X_r^+} f dx - \int_{X^+ - X_r^+} f_K dx \right) = \\ &= \int_{X_r^+} f_K dx + \left(\int_{X^+} f dx - \int_{X^+} f_K dx \right) < 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{III-12})$$

como se quería demostrar.

&III-5.—*Aditividad numerable de la integral como función de conjunto.*— Se va a demostrar ahora que la integral (L) como función de su conjunto de definición es numerablemente aditiva, aun en el caso de ser $|X| = +\infty$. Es decir, si $f(x)$ es integrable en $X = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_r$ (unión finita o infinita numerable de X_r , medibles disjuntos dos a dos), entonces es:

$$\int_X f(x) dx = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{X_r} f(x) dx. \quad (\text{III-13})$$

Recordemos que para suma finita, la integral (III-1) tiene el integrando $g(k) = \sum_r g_r(k)$, dando así la descomposición en suma de integrales mediante la correspondiente a la integral (CR), aun en el caso de $|X|$ infinita.

Si la descomposición es infinita, con $|X|$ finita, se toma:

$$X = \left(\bigcup_{r=1}^n X_r \right) \cup X_0,$$

tal que $|X_0| < \varepsilon$, siendo:

$$\int_{X_0} f dx = \int_X f dx - \int_{\bigcup_{r=1}^n X_r} f dx = \int_X f dx - \sum_{r=1}^n \int_{X_r} f dx. \quad (\text{III-14})$$

De lo dicho en el &III-4 se deduce que el primer miembro se hace tan pequeño como se quiere con $|X_0|$, es decir, para $n \rightarrow +\infty$, de donde el último miembro tenderá a cero, que es lo afirmado en (III-13).

Finalmente, en el caso especialmente estudiado aquí, supóngase que $f(x)$ es integrable en el conjunto X de *medida infinita*, bastando estudiar el caso de ser $f(x) \geq 0$. Aplíquese la descomposición del lema del §III-2, donde $X = X_a \cup X_i$ y en relación a la descomposición de la hipótesis $X = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_r$, désignese $X_{r,a} = X_r \cap X_a$ y $X_{r,i} = X_r \cap X_i$. Para el caso de suma parcial, en virtud de lo demostrado al principio y de (III-5), es:

$$\sum_{r=1}^n \int_{X_{r,i}} f \, dx = \int_{\bigcup_{r=1}^n X_{r,i}} f \, dx \leq \int_{X_i} f \, dx < \varepsilon, \quad (\text{III-15})$$

y como al ser $|X_a|$ finita, ya se ha demostrado que es:

$$\int_{X_a} f \, dx = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{X_{r,a}} f \, dx, \quad (\text{III-16})$$

en definitiva, de (III-16) y (III-6) resultará:

$$\begin{aligned} \int_X f \, dx - \sum_{r=1}^n \int_{X_r} f \, dx &= \int_X f \, dx - \int_{X_a} f \, dx + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{X_{r,a}} f \, dx - \\ &\quad - \sum_{r=1}^n \int_{X_r} f \, dx \leq \int_{X_i} f \, dx + \sum_{r=n+1}^{\infty} \int_{X_{r,a}} f \, dx \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande, como se quería demostrar.

Obsérvese que si es infinita $|X| = +\infty$, como la medida (L) del espacio R_m cumple la hipótesis del teor. II-7, entonces podrá siempre descomponerse X en sumandos X_r disjuntos dos a dos, de medida $|X_r|$ finita según (II-18), y el teorema anterior asegura que la suma (convergente o no) de las integrales sobre los X_r será independiente de la descomposición de X ; entonces podrá tomarse dicha suma como generalización de la integral de LEBESGUE - VALLÉE POUSSIN para el caso donde también pueda ser $|X| = +\infty$, ya incluido en la definición (III-1) y que da así un concepto coincidente con el de esta generalización, la cual es el método empleado en muchos textos, tal el de E. C. TITCHMARSH: "The theory of functions" (2.^a ed., Oxford, 1939).

&III-6. *Teorema de convergencia acotada de LEBESGUE.* — Obsérvese primeramente que el lema de EGOROFF (que refiere la convergencia puntual de una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ a convergencia uniforme por exclusión de un conjunto X_0 de medida arbitrariamente pequeña) no es válido para el caso de que el conjunto dado X sea de medida $|X|$ infinita.

Sin embargo, el teorema de convergencia acotada de LEBESGUE continúa siendo válido para el caso de que el conjunto base X sea de medida $|X|$ infinita, y aun este teorema puede seguir demostrándose mediante el lema de EGOROFF. Es decir:

Si en una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ medibles, acotadas entre dos fun-

ciones integrables $h(x)$ y $H(x)$ sobre un conjunto X de medida finita o infinita, $h(x) \leq f_n(x) \leq H(x)$, y, por tanto, siendo las $f_n(x)$ integrables en X , se verifica $f_n(x) \rightarrow f(x)$ en casi todo X , entonces existe y es:

$$\lim_n \int_X f_n dx = \int_X f dx. \quad (\text{III-18})$$

Para el caso de ser $|X|$ finita, basta efectuar la descomposición del lema de EGOROFF:

$$\int_X (f_n - f) dx = \int_{X - X_\delta} (f_n - f) dx + \int_{X_\delta} f_n dx - \int_{X_\delta} f dx \quad (\text{III-19})$$

y aplicar al primer sumando el lema de EGOROFF y a los otros dos el &III-4, teniendo en cuenta la acotación $h(x) \leq f_n(x) \leq H(x)$.

Si es X de medida $|X|$ infinita, siendo $|H(x)|$ y $|h(x)|$ integrables en X , dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, según el &III-2, podrá descomponerse $X = X_a \cup X_1$ de modo que el conjunto medible X_a sea de medida $|X_a|$ finita y en X_1 medible valga:

$$\int_{X_1} (|H(x)| + |h(x)|) dx < \varepsilon.$$

Entonces, para todo n será también:

$$\left| \int_{X_1} (f_n - f) dx \right| \leq \int_{X_1} (|f_n| + |f|) dx \leq 2 \int_{X_1} (|H| + |h|) dx \leq 2\varepsilon; \quad (\text{III-20})$$

aplicándose para X_a el razonamiento expuesto en (III-19) para completar la demostración de (III-18).

&III-7. *El teorema de FATOÙ.* — Este teorema (enunciado corrientemente como "lema") subsiste también para el caso de que el conjunto X sea de medida $|X|$ infinita. Es decir:

Si las funciones no negativas $f_n(x) \geq 0$ son medibles en X de medida finita o infinita, donde $f(x)$ es también medible, cumpliendo:

$$0 \leq f(x) \leq \lim_n \inf f_n(x) \quad (\text{III-21})$$

en casi todo X , entonces, es:

$$\int_X f(x) dx \leq \lim_n \inf \int_X f_n(x) dx, \quad (\text{III-22})$$

en el sentido de que si el segundo miembro es finito, entonces $f(x)$ es finito en casi todo X e integrable, mientras que si $f(x)$ no es integrable en X , entonces es:

$$\lim_n \int_X f_n(x) dx = +\infty. \quad (\text{III-23})$$

Para $|X|$ finita, basta utilizar las respectivas funciones truncadas f_k de f y $f_{n,k}$ de f_n (&III-3) cumpliendo según (III-21), la acotación:

$$0 \leq f_k(x) \leq \liminf_n f_{n,k}(x). \quad (\text{III-24})$$

Entonces, para casi todo x es:

$$0 \leq y_n(x) = \inf_{m \geq n} f_{m,k}(x) \leq f_{n,k}(x) \leq K,$$

por lo que $y_n(x)$ será integrable, cumpliendo:

$$\liminf_n \int_X y_n dx \leq \liminf_n \int_X f_{n,k} dx;$$

como al mismo tiempo es $\{y_n(x)\}$ no decreciente para casi todo x fijo, existirá el

$$\lim_n y_n(x) = \liminf_n f_{n,k}(x) \geq f_k(x)$$

y basta aplicar el teorema de convergencia acotada de LEBESGUE (&III-6) con $h(x) \equiv 0$ y $H(x) \equiv K$, dando:

$$\begin{aligned} \int_X f_k dx &\leq \int_X (\lim_n y_n) dx = \lim_n \int_X y_n dx \leq \liminf_n \int_X f_{n,k} dx \leq \\ &\leq \liminf_n \int_X f_n dx. \end{aligned} \quad (\text{III-25})$$

Entonces, si $f(x)$ es finita en casi todo X , se deduce (III-22) de (III-25) haciendo $K \rightarrow +\infty$. Si es $f(x) = +\infty$ en un conjunto X_1 de medida positiva $|X_1| > 0$, entonces

$$\int_X f_k(x) dx \geq K \cdot |X_1|,$$

y se obtiene (III-23).

Sea ahora el caso que particularmente interesa de *medida* $|X|$ infinita. Si $f(x)$ no es integrable en X se obtiene (III-23), pues si fuese $\liminf_n \int_X f_n(x) dx$ finito, descompuesto X en una unión numerable de conjuntos medibles disjuntos X_r de medida finita (&III-5), por el caso anterior, existiría y sería:

$$\int_{X_r} f(x) dx \leq \liminf_n \int_{X_r} f_n(x) dx, \quad (\text{III-26})$$

y, por tanto, para cada suma parcial resultaría:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \int_{X_r} f dx &\leq \sum_{r=1}^m (\liminf_n \int_{X_r} f_n dx) \leq \liminf_n \left(\sum_{r=1}^m \int_{X_r} f_n dx \right) \leq \\ &\leq \liminf_n \int_X f_n dx \end{aligned} \quad (\text{III-27})$$

finito, es decir (&III-5), sería $f(x)$ integrable en X , contrariamente a lo supuesto.

Si $f(x)$ es integrable en X de medida $|X|$ infinita, se aplica la descomposición (III-6) y por ser $|X_a|$ finita, de lo anteriormente demostrado, se deduce:

$$\int_{X_a} f \, dx \leq \liminf_n \int_{X_a} f_n \, dx \leq \liminf_n \int_X f_n \, dx; \quad (\text{III-28})$$

si además tenemos en cuenta (III-5), resulta:

$$\int_X f \, dx = \int_{X_a} f \, dx + \int_{X_1} f \, dx \leq \liminf_n \int_X f_n \, dx + \varepsilon, \quad (\text{III-29})$$

que prueba (III-22) por la arbitrariedad de ε tan pequeño como se quiera.

CINEMATICA CUANTICA RELATIVISTA

por L. M. GARRIDO

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

INTRODUCCION

1. TEORIA DE LA RELATIVIDAD

Lord Rutherford llamaba “coleccionistas de sellos” a los científicos que se contentaban con reunir datos, aunque, en verdad, tal apelativo no es muy generoso ni aun con los filatélicos serios. La Física, solía decir, no es una colección de números; más bien consiste en formular unas leyes que se deducen de esos datos al intentar descubrir una unidad intelectual en el mundo material.

Es sorprendente la fe del hombre de ciencia en la inteligibilidad del cosmos, cuán arraigada tiene la creencia de que todos los fenómenos materiales están ordenados según unas leyes que él es capaz de encontrar. Para el científico, ningún fenómeno natural es un hecho aislado; responde a una ley que trata de esclarecer.

En el alma del investigador está inconscientemente grabado lo que pudiéramos llamar principio totalitario de la naturaleza: todo lo que no está prohibido es obligatorio. No afirma únicamente que puede tener lugar —el mundo material no tiene libre albedrío—, sino que de hecho ocurre.

La Física Matemática nace al querer satisfacer estos deseos innatos del hombre, ser inteligente.

La Teoría de la Relatividad de EINSTEIN es un ejemplo más de lo que acabamos de decir. Nuevas ideas, fruto de una imaginación e inteligencia poderosas, nos ayudan a adentrarnos en la estructura del cosmos. Son un paso hacia adelante. Una barrera que nos separaba de la verdad ha caído. Nuevos horizontes se han abierto; vislumbramos la existencia de regiones cuya presencia nos era totalmente desconocida.

Del espacio y del tiempo todos tenemos una idea “instintiva”, fruto de nuestra experiencia cotidiana. Espacio y tiempo son formas de existencia del mundo real; la materia es su substancia. Espacio, tiempo y materia están incluidos en la idea de movimiento, que necesita de todos ellos para ser. Pero indudablemente, una idea más o menos oscura de los mismos no nos permitiría dilucidar con claridad cómo entran cada uno de ellos en el movimiento. DESCARTES cifró el objetivo de las ciencias exactas en describir todos los fenómenos naturales por medio de estos tres conceptos fundamentales, y en reducir todos los procesos a movimiento.

Pero ¡cuán simple aparece a nuestros ojos el pensamiento de DESCARTES! Es cierto que desde que la mente humana despertó de su sueño, el espacio y el tiempo han sido objeto constante de sus esfuerzos. Continuamente nos hemos visto obligados a ampliar nuestros dogmas. Siempre ha sido misteriosa la forma cómo el tiempo transcurre, siempre será este devenir uno de estos últimos problemas metafísicos contra los cuales batallará la filosofía en cada época de su historia.

Los griegos hicieron de espacio el objeto de una ciencia de suprema simplicidad y certeza. Con ellos la geometría se convirtió en una de las más poderosas expresiones de la majestad de nuestro intelecto. Llegó a ser como uno de los más altos ideales de los humanos el pensar "more geometrico". Pero en el último siglo el matemático minó secretamente la creencia en la evidencia de una geometría euclídea.

De acuerdo con la ley de conservación de la materia, nos imaginábamos a la misma como algo general y necesario, que entraba en toda clase de cambio, parte de nuestro conocimiento "a priori". Pero también el fundamento objetivo del concepto de materia se ha tambaleado; físicos como FARADAY y MAWELL introdujeron la idea de un "campo electromagnético" como un ser real de diferente categoría que la materia. EINSTEIN fue, finalmente, quien provocó el mayor cataclismo al barrer los conceptos absolutos del espacio, tiempo y materia, que habían sido considerados hasta entonces como los cimientos de la "ciencia nueva".

No podemos batirnos en retirada y tímidamente tratar de buscar de nuevo una interpretación intuitiva de los nuevos hechos. Nuestra imaginación sólo dispone de las imágenes obtenidas por medio de los sentidos a partir del macrocosmos. ¿Por qué han de valer las imágenes del macrocosmos para representar el microcosmos? Debemos estar preparados, nos dice NIELS BOHR (1), a encontrar que cuanto más avancemos en el microcosmos más hemos de renunciar a nuestras concepciones habituales de espacio y tiempo.

La solución de los difíciles problemas de la unión del espacio y del tiempo, uno de los mayores éxitos de la inteligencia humana, está asociada principalmente a los nombres de COPÉRNICO y de EINSTEIN.

En esencia el descubrimiento de COPÉRNICO consistió en ver que las coordenadas de un cuerpo en movimiento como funciones del tiempo satisfacen una ley muy simple. De hecho COPÉRNICO estudió el movimiento planetario y afirmó que existe un sistema de coordenadas en el cual las leyes del movimiento planetario son mucho más sencillas que si las referimos a la tierra fija en el espacio. El trabajo de COPÉRNICO produjo una auténtica revolución en el pensamiento filosófico, ya que destruyó el dogma de la importancia absoluta de la tierra.

NEWTON coronó las reflexiones cinemáticas de COPÉRNICO y KLEPER, dando la ley fundamental de la dinámica.

(1) NIELS BOHR: *Atomic Theory and the Description of Nature*. Cambridge University Press. 1934.

El Principio de Inercia de GALILEO, que es la primera ley del movimiento de NEWTON, constituye los cimientos de la mecánica. "En ausencia de fuerzas externas, todo cuerpo ejecuta el movimiento uniforme de traslación". Todos los sistemas de referencia en que este principio puede expresarse diciendo que las coordenadas de un cuerpo no sometido a fuerzas externas son funciones lineales del tiempo se llaman sistemas inerciales.

El Principio de Relatividad de GALILEO estableció que todas las leyes de la mecánica tienen la misma forma cuando las expresamos con relación a uno de estos sistemas inerciales. Por consiguiente, para la mecánica todos los sistemas inerciales son equivalentes. Podemos saber si un cuerpo está acelerado comparando su movimiento con el de otro no sometido a fuerza externa alguna. Pero un cuerpo estará en reposo o en movimiento uniforme de traslación según el sistema inercial que utilicemos; tales conceptos, pues, no tienen un significado absoluto; he aquí el Principio de Relatividad. GALILEO dio unas leyes de transformación para expresar este principio.

La hipótesis de que los fenómenos naturales existen simultáneamente con su percepción fue definitivamente rechazada al saber que la luz, se propaga con una velocidad finita, medida en el año 1675 por Romer.

Las ecuaciones de MAXWELL para los fenómenos electromagnéticos eran aparentemente incompatibles con el Principio de Relatividad, ya que la velocidad de la luz no podía ser la misma en dos sistemas inerciales en movimiento relativo. El sistema de referencia con respecto al cual la velocidad de la radiación electromagnética fuera la misma en todas las direcciones, podía ser usado para definir el reposo absoluto. Todos los experimentos realizados para encontrar este sistema absoluto fueron vanos. H. A. LORENTZ propuso una teoría en la que se postulaba la existencia de un sistema inercial privilegiado que nunca podría ser detectado; pero evidentemente esta manera de pensar no tenía mucho sentido físico.

La propagación de la luz en esferas concéntricas que no son invariantes respecto a la transformación que GALILEO dio para pasar de un sistema inercial a otro, no podía ser considerada como una objeción seria al principio de relatividad, si suponemos la existencia de un medio material, el éter, en el que se realiza la propagación de la luz. Pero tampoco pudimos detectar este éter.

No solamente el experimento de MICHELSON MORLEY, sino también toda una serie de medidas, mostraron que no existía correlación alguna entre el movimiento de la tierra y los fenómenos mecánicos y electromagnéticos.

EINSTEIN aceptó el principio según el cual lo que no se podía medir no existía para la Física, y, basándose en los diversos experimentos, negó la existencia de un sistema inercial privilegiado y de un fluido, como el éter, en el que se verifique la propagación de la luz. Afirmó que el Principio de Relatividad era válido para la mecánica y para los fenómenos electromagnéticos. Sus esfuerzos se dirigieron hacia un análisis y modificación de las ecuaciones que nos dan la transformación de GALILEO que expresaba para la mecánica el Principio de Relatividad.

EINSTEIN llegó a la conclusión de que era imposible definir un tiempo

e longitud absolutos. Con estas premisas, evidentemente, podemos conseguir que la velocidad de la luz sea la misma en cualquier sistema inercial.

Un gran avance en la comprensión y presentación de la teoría de la relatividad fue dado por MINKOWSKI. Hasta entonces tal teoría consistía en una serie de reglas, coherentes, sí, pero muy complicadas, que nos permitían traducir los resultados de las medidas hechas por un observador a las que otros observadores obtendrían; pero era necesario unificarlas, deducirlas de un principio general, de idéntica forma a como el principio de relatividad galileano era equivalente a la invariancia de las leyes de la mecánica bajo el "Grupo" de transformaciones lineales del espacio en espacio-tiempo, y que conservaban el carácter absoluto del tiempo y la forma métrica euclídea fundamental. Guiado por esta idea, MINKOWSKI dota al universo de una estructura métrica, en forma fundamental indefinida, que caracteriza y determina a las transformaciones de LORENTZ, como aquellas transformaciones lineales del espacio-tiempo en sí mismo, que le dejan invariante. Una vez más, la realidad física se geometriza.

EINSTEIN nos dijo que debíamos olvidarnos de nuestra creencia en un significado objetivo de simultaneidad. Esta fue una de sus ideas geniales.

Los resultados de estos estudios fueron afirmar que el Principio de Relatividad, que hace equivalentes a todos los sistemas inerciales, es válido para todas las leyes físicas. Sin embargo, las leyes de transformación de un sistema a otro deben ser las de LORENTZ, expresadas en el espacio de MINKOWSKI, las cuales se convierten en las de GALILEO, cuando consideramos la velocidad de la luz como infinitamente grande. Estos hechos constituyeron lo que hoy se llama Teoría Restringida de la Relatividad.

Ahora bien, también la Teoría de la Relatividad Restringida ha partido de una premisa cuyo valor positivista es nulo, a saber: la posibilidad de definir los sistemas inerciales. ¿Cómo es posible aislar un cuerpo de prueba de la acción del resto del universo, con el fin de asegurarnos sus movimientos uniformes? A todas luces, esto es imposible, y, por lo tanto, adoptar tal premisa restringe la validez de los resultados a pequeñas regiones del cosmos, en las que, prácticamente, las acciones de éste se compensan. La ideal genial de EINSTEIN frente a esta situación, tuvo sus raíces en la observación de la igualdad de las masas pesantes y de inercia, que hacía imposible el distinguir físicamente los sistemas no inerciales, de aquellos que, siendo inerciales, se sumergían en un campo gravitatorio. Ayudado por estas consideraciones, y teniendo a mano el poderoso instrumento de las geometrías de RIEMANN, formula la Teoría General de la Relatividad, dotando al Universo de una métrica y topología riemannianas, cuya estructura local está determinada por la distribución de materia. La física del fenómeno gravitatorio sigue siendo geometría, no ya euclídea (GALILEO) ni pseudoeuclídea (LORENTZ), sino riemanniana. La generalización a todos los aspectos fenomenológicos es evidente. Todas las leyes físicas deben ser invariantes frente a cualquier cambio de coordenadas curvilíneas, que conserven la signatura de la métrica.

Esto que EINSTEIN formula explícitamente, había ya pasado por las mentes

de los otros hombres de ciencia. Recordemos que NEWTON, en su correspondencia epistolar con BENTLEY y BOYLE, expresa su repugnancia a admitir la acción gravitacional a distancia, así como su idea de sustituir ésta por una "presión del medio"; idea que no elabora en vista de la imposibilidad de hacerla manifiesta experimentalmente. También CLIFFORD y RIEMANN meditaron sobre estos problemas, y la idea de relacionar la curvatura del espacio-tiempo con la materia les pertenece a ellos.

Introduciendo la métrica de Riemann podemos formular leyes físicas que sean invariantes para una transformación arbitraria. Pero esta propiedad de invariación es un hecho meramente matemático, que nada dice de la esencia física de tales leyes. Un nuevo concepto físico aparece únicamente cuando suponemos que la estructura métrica del mundo no nos ha sido dada "a priori", sino que está relacionada con el mundo físico por medio de leyes generales. Solamente con esta concepción podemos hablar de la Teoría General de la Relatividad, y, como nos dice WEYL (2), solamente así podemos considerar que el campo gravitatorio es un modo de expresión del campo métrico.

2. MECANICA CUANTICA.

Con el nacimiento del siglo tuvo su origen la teoría cuántica. Las ideas de PLANK (3) empezaron a germinar en la Física simultáneamente con los trabajos de EINSTEIN (4) sobre la luz en 1905. Los veinte años que siguieron no clarificaron en absoluto los principios que iban a constituir la Mecánica Cuántica.

El sistema mental de aquellos estudiosos contenía muchas ideas, abstracciones de la realidad sensible, que aplicaban descuidadamente al microcosmos. Los científicos aprendieron lentamente difíciles lecciones sobre la naturaleza, sobre lo objetivo y lo subjetivo; purificaron sus conceptos de espacio y tiempo, llegando a eliminar de sus razonamientos el lastre que creaban en su entendimiento las imágenes de los fenómenos que tenían lugar en su experiencia cotidiana en el macrocosmos.

En 1924 BOHR, KRAMERS y SLATER (5) introdujeron la hipótesis de que las ondas luminosas —que presentaban la dualidad onda corpúsculo— debían ser interpretadas como ondas de probabilidad; que no representan una realidad objetiva, sino más bien la posibilidad de tal realidad. Medimos átomos por medio de átomos, y así el concepto de realidad objetiva desaparece de un modo curioso. No se transforma en la neblina de un nuevo concepto, oscuro y no bien entendido, de la realidad objetiva, sino en la claridad transparente de las matemáticas, que representan nuestro conocimiento del mi-

(2) H. WEYL: *Space. Time Matter.*

(3) M. PLANCK: *Verhandl. Deutsch Phys. Ges* 2, 237, 1900.

(4) A. EINSTEIN: *Ann. Physik.* (4) 17, 132, 1905.

(5) N. BOHR, H. KRAMERS, J. C. SLATER: *Z. Phys.* 24 69, 1924

crocosmos pero no tal microcosmos. La clasificación familiar del mundo en objeto y sujeto no puede ser aplicada aquí, puesto que, en verdad, nos lleva a contradicciones. El objeto de la investigación científica no es la naturaleza en sí, sino la naturaleza como se presenta al estudio del hombre, y, por consiguiente, de nuevo aquí el hombre se encuentra consigo mismo.

El resultado más importante fue la introducción del concepto de probabilidad como una nueva clase de realidad objetiva. Esta probabilidad está íntimamente relacionada con cierta posibilidad, la "potencia" de la filosofía natural de los filósofos de la antigüedad clásica tales como ARISTÓTELES; es, en cierto aspecto, la transformación de tal "potencia" de un punto de vista cualitativo a su formulación cuantitativa.

Una vez el concepto de probabilidad hubo sido introducido, el de causalidad fue sometido a severa crítica. La idea de determinismo, o sea, la idea de que el microcosmos estaba regido por leyes causales, fue considerada inmediatamente como una extrapolación del macrocosmos. "No olvidemos que el principio de causalidad y su necesidad ha nacido exclusivamente de experiencias o fenómenos macrocósmicos y que la transferencia de este principio a los fenómenos microcósmicos, el supuesto de que todo suceso está estrictamente determinado causalmente, no tiene justificación alguna basada en la experiencia" (6). La validez de esta extrapolación fue puesta en duda tan pronto como aprendimos que las leyes causales del macrocosmos podían ser obtenidas aunque causalidad no rigiera en el microcosmos, puesto que la ley de los grandes números convertiría el carácter probabilístico de los fenómenos elementales en la certeza de las leyes estadísticas. Tal hecho, sin embargo, no hace de la Mecánica Cuántica un saber fortuito o arbitrario; sigue siendo Ciencia, ya que probabilidad es el conocimiento cierto de algo incierto.

Decimos que una ley es causal cuando con ella podemos predecir el futuro con cierta probabilidad y podemos empujar esta probabilidad tan cerca de la unidad como queremos, si nuestros métodos de analizar el fenómeno son suficientemente exactos. Cuando formulamos causalidad en este sentido, vemos su significado, no como principio admitido "a priori", sino como principio que puede ser comprobado experimentalmente. Con esta interpretación de causalidad y, como consecuencia del principio de indeterminación de HEISENBERG, determinismo causal aparece como incompatible con la Mecánica Cuántica.

No se crea que todos los científicos aceptaron este punto de vista. EINSTEIN (7), SCHRÖDINGER (8), VON LAUE (9) lo han criticado dura y constantemente. Existen otros, como son los rusos, cuyas críticas a esta interpretación son más bien un acto de fe comunista. Todos los oponentes de esta inter-

(6) EXNER: *Vorlesungen über die physikalischen Grundlagen der Naturwissenschaften*. Vienna 1919, pg. 691.

(7) A. EINSTEIN: *Albert Einstein, Philosopher. Scientist The Library of Living Philosophers*. Vol. 7, pg. 665. Evanston 1949.

(8) E. SCHRÖDINGER. *Brit. J. Phil. Sci.* 3, 109, 233 (52).

(9) M. VON LAUE: *Naturwissenschaften* 38, 60 (51).

pretación, llamada de Copenhague, comúnmente aceptada como la ortodoxa, desean volver al concepto de realidad de la Física Clásica, o sea, a la ontología del materialismo; propugnan un mundo real objetivo, cuyo microcosmos también nos sea conocido objetivamente. Lo único que no nos dicen es cómo podemos alcanzar tal panacea. La interpretación, que nació en Copenhague en 1927, tiene muchas ventajas sobre las críticas de sus adversarios. Tal filosofía de los fenómenos elementales nos indicó claramente cómo reproducir los datos experimentales por medio del formulismo matemático, y, ésto, de hecho, es enorme ventaja, ya que ha venido confirmada con el éxito.

En la primavera de 1926 SCHRÖDINGER dedujo su ecuación de ondas, y en el otoño fue a Copenhague. Largas charlas tuvieron lugar entre BOHR, SCHRÖDINGER y HEISENBERG, en las que si bien el primero mantenía la concepción cuántica, a saltos, del microcosmos, el segundo sostenía la ondulatoria.

Al final de una de estas charlas SCHRÖDINGER, llevado por la tensión de la discusión, dijo: "Si hemos de seguir manteniendo estos saltos cuánticos, lo siento, pero yo no quiero seguir trabajando en esta materia". A lo cual BOHR contestó: "Le estamos muy agradecidos por lo que ya hizo".

Los meses que siguieron fueron de intenso trabajo en Copenhague. De ellos surgió la "Interpretación de Copenhague de la Mecánica Cuántica". HEISENBERG recuerda con placer tan largas discusiones que muchas veces se prolongaron hasta bien entrada la noche y en las cuales se estudiaron casi todos los posibles caminos de interpretación de los fenómenos del microcosmos.

Por aquel entonces HEISENBERG estudió la forma matricial de la Mecánica Cuántica y dedujo toda la teoría de matrices de transformación.

La Mecánica Cuántica no relativista establece una correspondencia en el sentido de que una cierta aplicación formal de las reglas de cuantificación al formulismo correspondiente de la Mecánica Clásica es casi inambiguo (10) y nos da los resultados apetecidos. Este principio de complementaridad fue desarrollado por HEISENBERG en el invierno de 1927 durante unas vacaciones en Noruega. Mientras BOHR se hallaba esquiando en esta última nación, HEISENBERG estudió el problema de cómo representar matemáticamente una situación experimental utilizando únicamente el espacio de HILBERT. La consecuencia inmediata fue su principio de incertidumbre (11).

Sólo quedaba un paso que dar, y era la unificación de los puntos de vista cuántico-corpuscular y del ondulatorio. JORDAN, KLEIN y WIGNER (12)

(10) Existe una ambigüedad en la elección de las coordenadas del hamiltoniano y, además, para el caso de partículas idénticas, en las soluciones simétricas o antisimétricas.

(11) W. HEISENBERG: Z. Phys 43, 172, 1927.

(12) P. JORDAN y C. KLEIN. Z. Phys 45, 751, 1927.

P. JORDAN y E. WIGNER. Z. Phys 47, 631, 1928.

mostraron que comenzando de la teoría de SCHRÖDINGER podíamos obtener el espacio de HILBERT al realizar la cuantificación.

En el otoño de 1927 tuvo lugar la conferencia de SOLVAY, en Bruselas, donde todos estos trabajos fueron hechos públicos. Enemigo decidido de las ideas de la Escuela de Copenhague fue EINSTEIN. Sabemos cuán ingeniosamente EINSTEIN defendía su punto de vista según el cual la Mecánica Cuántica que se le presentaba no podía esencialmente describir de una forma completa los fenómenos naturales. Sin embargo, BOHR volvía la mayoría de los argumentos de EINSTEIN en su contra. EINSTEIN confesaba sus derrotas, pero no cambió de opinión a la que permaneció aferrado hasta el fin de sus días; creyó que la Teoría General de la Relatividad debía formar parte importante de los estudios del microcosmos. A partir de esta conferencia de Solvay, la "Interpretación de Solvay" de los fenómenos cuánticos, fue la aceptada corrientemente y ha sido la base para todas las aplicaciones prácticas de la teoría. Llegó a ser la teoría "ortodoxa".

Siguieron veinte años, interrumpidos por la última conflagración mundial, en que se recogió los frutos de lo sembrado.

Históricamente ha quedado bien probado la necesidad de fundir en uno sola síntesis Relatividad y Mecánica Cuántica. Tal unión ha sido siempre seguida de grandes adelantos; citemos la teoría del electrón de DIRAC (1927) y las del efecto LAMB (1947), entre otros, conseguido mediante las ideas de SCHWINGER.

Si, pues, la mecánica del microcosmos debe ser simultáneamente relativista y cuántica hemos de introducir tales estudios mediante un Algebra de la Medida que sea compatible con tal armonía preestablecida y hemos de presentar un principio dinámico lo suficientemente general para ser válido en cualquier sistema de LORENTZ. La Mecánica Cuántica no relativística aparece, de una forma natural, del mismo formalismo al establecer una disimetría entre espacio y tiempo, es decir, al fijar el sistema de LORENTZ. Este es el punto de vista seguido en nuestro programa.

Una de las críticas serias que se puede hacer a la formulación de BOHR del principio de complementariedad, es el haber ignorado sistemáticamente la Teoría de la Relatividad restringida y la Teoría Cuántica de Campos que nació en aquella época. Y así, aunque fenomenológicamente tal formulación es exacta, epistemológicamente es muy discutible por las dificultades que puede presentar al físico en su trabajo y por las peligrosas interpretaciones que ha suscitado entre los filósofos.

Sin embargo, tal unión no fue conseguida hasta hace una docena de años. La motivación principal para esta síntesis fue, evidentemente, la presión de los datos experimentales, además de una cierta necesidad de presentar todo el formulismo de la Mecánica Cuántica de una forma coherente y rigurosa que no era satisfecha por la presentación imperfecta, llena de oscuridad y contradicciones que se nos ofrecía hasta entonces.

TOMONAGA (13) y SCHWINGER (14) fueron eminentemente guiados por un

(13) S. TOMONAGA: Progr. Theor. Phys 1, 27 (46).

(14) J. SCHWINGER: Phys Rev. 74, 1439 (48).

deseo de coherencia interna. Su pensamiento, aislado durante la última guerra mundial, se hizo más profundo. Sus resultados han sido sorprendentes; entre ellos está la imagen de interacción de la Mecánica Cuántica, que es totalmente covariante relativista.

De nuevo han surgido serias discusiones sobre la interpretación objetiva o subjetiva del concepto de probabilidad (15). Entre los que se oponen a la interpretación de Copenhague hay que citar a DAVID BOHM, quien comenzó su interpretación de la Mecánica Cuántica a partir de las ideas originales de L. DE BROGLIE.

En las páginas que siguen trataremos de exponer la Cinemática Cuántica de una forma compatible con la Teoría Restringida de la Relatividad. Muy recientemente han aparecido algunos trabajos que tratan de conseguir una nueva síntesis para presentar la Mecánica Cuántica de acuerdo con el Principio de Relatividad General, pero, por ser extraordinariamente pocos, no constituyen aún un cuerpo de doctrina.

(15) O. COSTA DE BEAUREGARD: *Théorie Synthétique de la Relativité. Restreinte et Des Quanta*. — 1957.

CAPITULO I

PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE EINSTEIN

1. NECESIDAD DE UNA NUEVA ALGEBRA DE LA MEDIDA

Las características peculiares de los resultados experimentales en sistemas físicos del microcosmos son:

- 1) Atomicidad (de partículas, carga, acción, energía, etc.).
- 2) Naturaleza estadística de los fenómenos.
- 3) Dualidad partícula-onda.

La teoría clásica de la medida se basa en el siguiente supuesto: la interferencia del aparato de medida con el sistema físico a estudiar puede ser hecha despreciablemente pequeña, y de este modo no modifica la evolución futura del sistema. Y así, el sistema queda en el mismo estado en que se encontraría si no se hubiese realizado la medición, o si la medida interfiere, la interferencia es tal que podemos calcular sus efectos.

Los sistemas físicos son, desde el punto de vista clásico, completamente deterministas, en el sentido de que el estado del sistema en cualquier instante determina completamente el curso pasado y futuro de la historia del sistema. La teoría de medida de los sistemas del macrocosmos era enteramente trivial.

Las características del microcosmos enunciadas antes, que, en cierto grado, son propiedades de todos los sistemas físicos, son incompatibles con los supuestos hechos en la Física Clásica, y requieren una nueva formulación de la teoría de la medida. En efecto, es fácil comprender que:

1. El supuesto de la teoría clásica que admite la posibilidad de hacer despreciablemente pequeña la interacción del aparato de medida con el sistema medido es imposible, puesto que la energía y la acción... aparecen en el microcosmos a "saltos" finitos e indivisibles.

2. La interacción entre el sistema físico a estudiar y el aparato de medida no puede ser prevista y, por consiguiente, no podemos hacer las correcciones oportunas.

La interacción entre sistemas es de carácter estadístico, y, por lo tanto, nada se puede predecir en los casos individuales. Los sistemas físicos del microcosmos no son deterministas en el sentido clásico.

3. La tercera propiedad nos dice que los conceptos de partícula y de onda son dos casos límites del comportamiento de los "objetos" físicos, y que la situación verdadera se halla en medio de estos dos casos extremos.

Así, pues, procederemos a construir una nueva teoría de la medida compatible con los tres hechos experimentales señalados.

Antes de empezar a estudiar los resultados de nuestros experimentos en el microcosmos y criticarlos de manera que, al conocer sus características y forma peculiar de comportarse, podamos construir una teoría consistente, hemos de presentar los sistemas de referencia en los que los experimentos pueden realizarse, y los principios por los cuales podamos establecer que los resultados obtenidos en los mismos no sean peculiares del sistema particular de referencia elegido, sino que representen relaciones intrínsecas entre los fenómenos físicos.

2. SISTEMAS DE REFERENCIA

Llamamos sistema de referencia al sistema de coordenadas que sirve para fijar físicamente —en espacio y en tiempo— el fenómeno a estudiar.

Empezamos a edificar nuestra teoría a partir de los sistemas de referencia llamados inerciales, aquellos en que un cuerpo no sometido a fuerzas externas se mueve con velocidad constante. Todo otro sistema de referencia que se mueva con una velocidad constante relativa a un sistema inercial es, a su vez, un sistema inercial. Tenemos, pues, un método general para obtener sistemas inerciales a partir de uno dado.

Experimentalmente se demuestra que la naturaleza satisface el llamado “Principio de Relatividad”, según el cual las leyes físicas tienen la misma forma cualquiera que sea el sistema inercial que usamos como sistema de referencia para describir los fenómenos físicos. Más adelante estudiaremos cuidadosamente el alcance de este principio.

Los experimentos muestran también que la interacción entre dos puntos materiales no se realiza instantáneamente. Llamamos “señales” a las interacciones propagándose desde un punto material a otro. Una señal es emitida por un punto material y es recibida por otro. La velocidad de propagación de la interacción es la velocidad de la señal correspondiente.

La interpretación del Principio de Relatividad dado por EINSTEIN se diferencia de la de GALILEO en que el primero amplió el principio y lo aplicó a la velocidad de propagación de las señales, llegando a la conclusión de que existe una velocidad máxima, igual en todos los sistemas inerciales. El valor de tal invariante universal coincide con la velocidad de la luz en el vacío, o sea, es

$$c = 2,99776 \times 10^{10} \text{ cm/seg}$$

La invariancia de la velocidad de la luz respecto a los diferentes sistemas inerciales fue comprobada por los experimentos de MICHELSON en 1881.

Como consecuencia de esto, EINSTEIN dio una ley de transformación de los valores de los datos experimentales expresados en un sistema inercial a los correspondientes en otro sistema inercial, distinta de la presentada por GALILEO para expresar el Principio de Relatividad.

Todas las mecánicas son, pues, relativistas, ya que verifican el Principio de Relatividad. Pero aquélla construida según la interpretación de ENS-

TEIN se llama Mecánica Relativista, y la que utiliza las ideas de Galileo, Mecánica Clásica.

GALILEO consideró que las señales podían propagarse con una velocidad infinita, y así, nuestra percepción de un fenómeno era simultánea con su verificación. Para él, el tiempo era absoluto; si dos fenómenos eran simultáneos en un sistema inercial, lo serían en todo otro sistema inercial.

Pero, según veremos, la interpretación de EINSTEIN nos obliga a admitir que el tiempo no es absoluto, no es una cantidad invariante respecto a las transformaciones que nos lleven de un sistema inercial a otro. El tiempo transcurre de diferente forma en los distintos sistemas inerciales. Por consiguiente, afirmar que un fenómeno dura un cierto intervalo de tiempo sólo tendrá sentido cuando demos el sistema inercial en que hemos medido esa duración. En particular, dos fenómenos que son simultáneos en un sistema inercial pueden no serlo en otro.

El principio de relatividad de EINSTEIN introduce cambios fundamentales en nuestros conceptos intuitivos de espacio y tiempo. Tales nociones las hemos obtenido de nuestra experiencia cotidiana, y han de ser válidas, al menos aproximadamente, dentro del grado de precisión con que nuestros sentidos pueden percibir los fenómenos físicos. Hemos de exigir que de la Mecánica Relativista podamos obtener la Mecánica Clásica cuando ciertas condiciones, relacionadas con nuestra incapacidad natural de precisión, sean impuestas. Este principio de correspondencia entre ambas ramas de la Mecánica nos serviría como guía para construir la Mecánica Relativista.

3. INVARIANTE FUNDAMENTAL

Llamaremos suceso al fenómeno que es descrito conociendo dónde y cuándo tiene lugar. Es conveniente utilizar un espacio ficticio tetradimensional, llamado espacio de MINKOWSKI, cuyos cuatro ejes, normales entre sí dos a dos, son:

$$x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad x_4 = ict \quad (1.1)$$

donde x, y, z , nos dan la posición del suceso, y t el instante en que se verifica. Las cuatro coordenadas serán representadas por x_μ , entendiendo que los subíndices griegos van de uno a cuatro mientras que llamaremos x_i a las tres primeras coordenadas suponiendo que los subíndices latinos van de uno a tres. En este espacio de MINKOWSKI los sucesos son puntos del mismo llamados puntos universo. La línea ficticia tetradimensional que corresponde a la trayectoria física de un suceso se llama línea universo.

Utilizamos también la convención de EINSTEIN, según la cual dos subíndices iguales implican sumación respecto al dominio de definición de los mismos. Así, pues,

$$A_\mu B_\mu = \sum_{n=1}^4 A_n B_n \quad A_i B_i = \sum_{n=1}^{n=3} A_n B_n$$

Supongamos la existencia de un foco puntual luminoso en el origen de

coordenadas del espacio de MINKOWSKI. La ecuación de propagación de la luz en esferas concéntricas, en un sistema inercial, es

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 t^2$$

que utilizando la notación de EINSTEIN se escribe así: $x_\mu^2 = 0$. Si la luz hubiera salido del punto X_μ la ecuación de la onda sería:

$$(x_\mu - X_\mu)^2 = 0 \quad (1.2)$$

Si en lugar de la luz, hubiéramos considerado la propagación de otra señal con velocidad menor que la de la luz

$$(x_\mu - X_\mu)^2 > 0$$

A la cantidad

$$S_{xx} = \sqrt{-(x_\mu - X_\mu)^2} \quad (1.3)$$

se le llama intervalo S entre los puntos universo x_μ y X_μ . Como puede verse fácilmente $-S_{xx}^2$ puede ser interpretado como el cuadrado de la distancia entre los sucesos x_μ y X_μ en el espacio de MINKOWSKI.

Si los dos puntos universo están infinitesimalmente próximos

$$(ds)^2 = -(dx_\mu)^2 \quad (1.4)$$

Consideremos ahora otro sistema de referencia que se mueve con relación al anterior con una velocidad constante. Los puntos anteriores estarán determinados por las nuevas coordenadas x'_μ y X'_μ en el nuevo sistema. El intervalo entre ellos en este segundo sistema inercial será

$$S'^2_{xx} = -(x'_\mu - X'_\mu)^2 \quad (1.5)$$

De acuerdo con el principio de invariancia de la velocidad de la luz, si la señal que unía x y X era la luz, teníamos $S_{xx} = 0$ y, por consiguiente, $S'_{xx} = 0$, o sea, escrito infinitesimalmente siempre que $ds = 0$ se tendrá $ds' = 0$. Pero por ser infinitesimales de primer orden

$$ds = a ds' \quad (1.6)$$

donde el coeficiente "a" depende solamente del valor absoluto de la velocidad relativa de los dos sistemas inerciales.

$$a = a(|\vec{v}|) = a(v); \quad v = |\vec{v}| \quad (1.7)$$

Por homogeneidad de espacio-tiempo a no puede depender ni de las coordenadas ni del tiempo; por isotropía del espacio no puede depender del sentido de la velocidad relativa. Entonces también

$$ds' = a ds \quad (1.8)$$

lo cual dice que

$$a^2 = +1 = a^2(v)$$

Por continuidad ha de ser siempre $+1$ ó -1 . Puesto que si $a(v)$ fuera $+1$ para ciertas velocidades y -1 para otras, existirían algunas velocidades para las cuales tendría valores intermedios entre $+1$ y -1 , lo cual es imposible.

Cuando $v=0$, es decir, cuando ambos sistemas sean idénticos, $ds' = ds$. Luego $a = 1$.

Y, por consiguiente, siempre $ds' = ds$

o sea, por integración $S' = S$ (1.9)

El intervalo entre dos puntos universo es un invariante respecto del sistema inercial que se utilice para expresarlos. Es un invariante relativista; es el invariante fundamental de la Mecánica Relativística.

Tal invariancia no es más que una expresión matemática de la invariancia de la velocidad de la luz para todo sistema inercial. La ley de transformación que nos lleve de un sistema inercial a otro, no es la de Galileo, sino la que deja invariante el intervalo.

Respondamos ahora las siguientes preguntas: ¿Existe un sistema de referencia en el que los sucesos x_μ y X_μ tengan lugar en el mismo punto, $x'_1 = X'_1$, $x'_2 = X'_2$, $x'_3 = X'_3$? La invariancia del intervalo da

$$(x_\mu - X_\mu)^2 = (x'_\mu - X'_\mu)^2 < 0 \quad (1.10)$$

Tal sistema inercial existe si $(x_\mu - X_\mu)^2$ es negativo. El intervalo correspondiente se llama intervalo temporal. Tales sucesos pueden ser unidos por una señal, y, por consiguiente, no son en general dinámicamente independientes, ya que la acción de uno puede alcanzar al segundo. Si nos referimos a dos posiciones diferentes de un mismo cuerpo material en movimiento, el intervalo entre los mismos es siempre temporal, ya que su velocidad es menor que la de la luz.

¿Existe un sistema de coordenadas en el que dos sucesos x_μ y X_μ tengan lugar simultáneamente, $x'_4 = X'_4$? Entonces se ha de verificar

$$(x_\mu - X_\mu)^2 = (x'_1 - X'_1)^2 > 0 \quad (1.11)$$

Tal sistema existe si $(x_\mu - X_\mu)^2$ es positivo. El intervalo se llama entonces intervalo espacial. Sucesos separados por un intervalo espacial no pueden ser unidos por señal alguna; son dinámicamente independientes.

Podemos medir las propiedades de un suceso sin interferir jamás en los sucesos separados del primero por intervalos espaciales.

Los conceptos de intervalo espacial y temporal son invariantes respecto a cualquier sistema inercial, es decir, son invariantes relativistas, de acuerdo con (1.9).

La evolución dinámica de un sistema físico tiene lugar a lo largo de intervalos temporales. La medida de las propiedades de un sistema físico debe verificarse entre puntos separados espacialmente, ya que así los dis-

tintos procesos de medida son independientes y, por consiguiente, no interfieren entre sí.

A las superficies cuatridimensionales tales que todos sus puntos están separados por un intervalo espacial se llama superficie espacial; un ejemplo es $t = \text{constante}$. Toda medición del conjunto de propiedades de un sistema debe hacerse sobre superficies espaciales; la medición simultánea no es más que un caso particular, no el más general, y, tal hecho, medir todas las propiedades simultáneamente, no es un concepto invariante relativista. Observemos que por un punto universo x_4 pasan muchas superficies espaciales que llamaremos $\sigma(x)$.

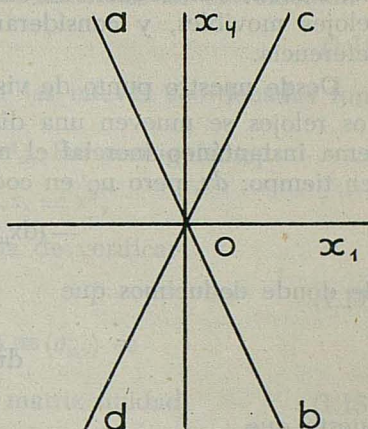
Consideremos un suceso que tenga lugar en el origen coordenadas, 0, del espacio de MINKOWSKI. Estudiemos la relación entre este suceso y cualquier otro. Para mejor comprender lo que sigue imaginemos el espacio de MINKOWSKI reducido al plano $x_2 = x_3 = 0$. Los movimientos rectilíneos uniformes de un punto material pasando por el origen, se representan por una recta pasando por 0 e inclinada respecto al eje x_4 un ángulo cuya tangente es proporcional a la velocidad del punto material. Puesto que la máxima velocidad es c , hay un ángulo máximo que esta recta puede hacer con el eje x_4 .

Representemos con ab y cd las trayectorias de dos señales luminosas que, propagándose en direcciones opuestas, pasan por 0. Todas las líneas universo representando el movimiento de señales deben estar en las regiones $a0c$ y $d0b$.

Es muy fácil ver que para todo punto de $a0c$ se verifica $S^2 > 0$, o sea, el intervalo entre los puntos de $a0c$ y el origen es temporal; pero, como en $a0c$ el tiempo es $t > 0$, tal región representa sucesos que tienen lugar después del suceso 0. Ahora bien, sucesos separados por un intervalo temporal no pueden ocurrir simultáneamente en ningún sistema inercial. Por consiguiente, la región $a0c$ representa el futuro absoluto respecto al suceso 0. De la misma forma se puede ver que $d0b$ es el pasado absoluto de 0.

El intervalo entre los puntos de las regiones $c0b$ y $a0d$ y el origen es espacial. Los sucesos correspondientes tendrán lugar en puntos distintos del espacio en cualquier sistema inercial. Estas regiones pueden ser llamadas absolutamente remotas del suceso 0; en ellas los conceptos de simultáneo, anterior y posterior son relativos.

Dos fenómenos pueden estar relacionados entre sí como causa y efecto si el intervalo entre ellos es temporal. Precisamente para estos intervalos los conceptos de pasado y futuro tienen un significado absoluto, condición necesaria para poder hablar de causa y efecto. Por consiguiente, la Mecánica Relativista, a pesar de hacer del tiempo algo relativo, no destruye la sucesión temporal entre causa y efecto. De hecho uno de los criterios que he-



mos de utilizar estudiando el microcosmos es el de causalidad; con su ayuda podemos eliminar caminos falsos.

Si hubiéramos considerado todo el espacio de MINKOWSKI en lugar del plano $x_3 = x_3 = 0$ estas regiones estarían separadas por el cono

$$x^2_{\mu} = 0 \quad (1.12)$$

que se llama cono de luz.

4. TIEMPO PROPIO

Supongamos que desde un sistema inercial arbitrario de referencia observamos relojes que se mueven respecto a nosotros de una forma arbitraria. Podemos introducir un sistema de coordenadas ligado rígidamente a los relojes movibles, y considerarlos como sistemas inerciales instantáneos de referencia.

Desde nuestro punto de vista, en un intervalo infinitésimo de tiempo, dt , los relojes se mueven una distancia $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dx_j^2}$. En el sistema instantáneo inercial el mismo fenómeno será indicado por un cambio en tiempo, $d\tau$, pero no en coordenadas.

$$-(dx_{\mu})^2 = + c^2 d\tau^2 = (ds)^2$$

de donde deducimos que

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} \quad (1.13)$$

puesto que

$$\frac{\sqrt{dx_i^2}}{dt} = v_i = \sqrt{v_i^2}$$

Para todo el intervalo temporal tendremos

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} \quad (1.14)$$

El tiempo τ medido en el sistema en movimiento con un objeto se llama tiempo propio del mismo. Según vemos, los relojes en movimiento van más lentamente que los que están en reposo.

Si el reloj está en reposo su línea universo es claramente una línea paralela al eje x_4 ; si, el reloj describe una trayectoria cerrada, su línea universo será una curva cortando la línea universo del reloj en reposo en dos puntos correspondientes al origen y fin del movimiento. Pero el reloj en reposo nos da mayor intervalo de tiempo; luego la integral $\tau_2 - \tau_1$, tomada entre dos puntos universo, tiene su valor máximo a lo largo de la línea recta que los une.

5. TRANSFORMACION DE LORENTZ

La transformación que traduzca las coordenadas de un suceso respecto a un sistema inercial en coordenadas con relación a otro sistema es la que deja invariante todos los intervalos, o sea, toda distancia en el espacio de MINKOWSKI. Tales transformaciones, llamadas de LORENTZ, son traslaciones y rotaciones en el espacio universo. Las traslaciones no suponen más que un cambio del origen de coordenadas; nada físico implican. La transformación de LORENTZ que estudiamos es en una rotación en el espacio de MINKOWSKI, que, en general, escribiremos así:

$$x'_{\mu} = a_{\mu\nu} x_{\nu} \quad (1.15)$$

donde $a_{\mu\nu}$ es un tensor cuyos componentes son funciones de la velocidad

$$a_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}(v) \quad (1.16)$$

y será la expresión matemática de la rotación: las nuevas coordenadas funciones lineales de las antiguas.

El intervalo cuya invariencia exigimos es x^2_{μ} . Por consiguiente,

$$x'^2_{\mu} = a_{\mu\nu} x_{\nu} a_{\mu\lambda} x_{\lambda} = a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} x_{\nu} x_{\lambda} = x^2_{\nu}$$

para cualquier punto universo x_{ν} . Luego se ha de verificar

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \quad (1.17)$$

lo cual escrito matricialmente con la matriz $A \equiv (a_{\mu\nu})$ es

$$\tilde{A} A = I \quad (I \text{ es la matriz unidad}) \quad (1.18)$$

condición necesaria para expresar toda rotación (\tilde{A} es la matriz traspuesta de A). Físicamente hemos de exigir que exista una transformación recíproca

$$x_{\mu} = \alpha_{\mu\nu} x'_{\nu} \quad (1.19)$$

esto nos obliga a admitir la existencia de la matriz recíproca A^{-1} y así

$$\tilde{A} = A^{-1} \quad (1.20)$$

Por consiguiente,

$$\alpha_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (1.21)$$

y a partir (1.20) se deduce $A \tilde{A} = I$ equivalente a

$$a_{\nu\mu} a_{\lambda\mu} = \delta_{\nu\lambda} \quad (1.22)$$

Podemos también obtener ciertas condiciones sobre los coeficientes $a_{\mu\nu}$ al exigir que las coordenadas x'_{μ} tengan el mismo carácter real o imaginario que tenían x_{μ} . Y así a_{14} , a_{24} , a_{34} y a_{41} , a_{42} , a_{43} , son imaginarios puros mientras que todos los demás son reales.

La ecuación (1.15) puede escribirse en forma matricial al representar el punto universo x_μ por una matriz de una columna

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Entonces la transformación de LORENTZ se escribe

$$x' = Ax \quad (1.24)$$

El producto de dos transformaciones de LORENTZ A y B

$$x' = Ax \quad x'' = Bx' \quad (1.25)$$

es otra transformación de LORENTZ C tal que

$$x'' = Cx = BAx \quad C = BA \quad (1.26)$$

pues, como es fácil de ver, C satisface (1.20) si B y A la cumplen. Obsérvese que en general

$$BA \neq AB$$

El producto matricial no es conmutativo; sin embargo, la multiplicación de matrices es asociativa

$$C(BA) = (CB)A$$

Puesto que la transformación identidad $x' = x$ también es una transformación de LORENTZ, de todo lo anterior deducimos que las transformaciones de LORENTZ, forman grupo.

El producto de las transformaciones (1.25) puede ser considerado desde otro punto de vista. En efecto podemos escribir $x' = Ax$ así:

$$Bx' = BAB^{-1}Bx \quad (1.28)$$

y considerar que la matriz $A' = BAB^{-1}$ es la forma que adquiere la matriz A cuando se la representa en un nuevo sistema de ejes. Es decir, A' representa la misma transformación de LORENTZ A , pero vista desde otro sistema. Las transformaciones de las matrices de la forma

$$A' = BAB^{-1} \quad (1.29)$$

se llaman transformaciones de semejanza.

Puesto que el determinante de una matriz no varía al intercambiar filas y columnas, de (1.18) deducimos $\det A = |A| = \pm 1$.

Todas las transformaciones del grupo de LORENTZ pueden clasificarse en dos grandes apartados. Llamaremos transformaciones propias de LORENTZ

aquellas tales que el determinante $|A|$ de su matriz de transformación sea positivo; de hecho

$$|A| = 1 \quad (1.30)$$

e impropias serán aquéllas en que

$$|A| = -1 \quad (1.31)$$

Entre las transformaciones impropias hay que citar particularmente la inversión de los tres ejes x_i

$$x'_1 = -x_1 \quad x_4 = x_4 \quad (1.32)$$

llamada inversión espacial, P , íntimamente relacionada con la paridad del mundo físico. Y además debemos considerar la inversión temporal, T ,

$$x'_1 = x_1 \quad x_4 = -x_4 \quad (1.32)$$

cuyo significado físico es el intercambio de futuro y pasado. Si hemos de evitar este intercambio es preciso exigir que $a_{44} > 0$. La condición $a_{44} < 0$ implicara inversión temporal.

El producto sucesivo de un número indefinido de transformaciones propias de LORENTZ es otra transformación propia de LORENTZ. Cuando las transformaciones de LORENTZ formen grupo continuo, para estudiar las propiedades de un sistema físico bajo esa clase de transformaciones es suficiente estudiar su conducta bajo las transformaciones infinitesimales de la misma clase.

Las transformaciones impropias de LORENTZ no forman grupo porque el producto de dos cualesquiera de sus matrices es una matriz de determinante $+1$.

Con ayuda de (1.17) se obtiene

$$a_{44}^2 = 1 - (a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2)$$

y puesto que la expresión en el paréntesis es negativa

$$a_{44}^2 \geq 1 \quad \text{o también} \quad |a_{44}| \geq 1$$

Tal relación muestra que entre las transformaciones con $a_{44} > 0$ y las que tienen $a_{44} < 0$ hay un salto de dos unidades como mínimo que no puede ser cubierto continuamente. Se sigue que el grupo total de LORENTZ puede ser subdividido en cuatro clases de transformaciones, cada una de ellas continuas, pero que exigen un salto discontinuo para obtener cualquiera de las otras tres.

Tenemos en primer lugar el grupo restringido de LORENTZ caracterizado por $|A| = 1$, $a_{44} > 0$. La segunda clase está formada por las inversiones espaciales $|A| = -1$, $a_{44} > 0$, y no forman grupo; pero unido a la anterior, es decir, todas las transformaciones para las que $a_{44} > 0$, forman el grupo ortocrono de LORENTZ, pues no incluyen inversión temporal. En tercer lugar consideramos las transformaciones que sólo tienen inversión temporal $|A| =$

$= -1$, $a_{44} < 0$, y como cuarta clase las que, además, tienen inversión espacial $|A| = 1$, $a_{44} < 0$.

6. ESCALARES, VECTORES, TENSORES... UNIVERSO.

Una cantidad es un escalar universo cuando tiene el mismo valor en cualquier sistema inercial de referencia. Podemos definir también el concepto de campo de escalares, al hacer corresponder un escalar a cada punto universo. Su ley de transformación es

$$S(x') = S(x) \quad (1.33)$$

donde $x' = Ax$. Un ejemplo de campo escalar es el intervalo $\sqrt{-x_\mu^2}$.

Un conjunto de cuatro cantidades A_1, A_2, A_3, A_4 , que al cambiar de sistema de referencia, bajo una transformación de Lorentz se transforman de acuerdo con la ley

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu \quad (1.34)$$

es un vector universo. Tales vectores tienen propiedades semejantes a los vectores ordinarios. Así es muy fácil demostrar que si B_μ es otro vector universo el producto escalar $A_\mu B_\mu$ es un escalar universo. Podemos introducir también el concepto de campo vectorial haciendo corresponder un vector $A_\mu(x)$ a cada punto universo x . La ley de transformación es

$$A'_\mu(x') = a_{\mu\nu} A_\nu(x) \quad (1.35)$$

Llamaremos tensor universo de segundo orden al conjunto de 16 cantidades $A_{\mu\nu}$ que, bajo la transformación de LORENTZ, se comportan así

$$A'_{\mu\nu} = a_{\mu\rho} a_{\nu\pi} A_{\rho\pi} \quad (1.36)$$

y definimos los tensores de orden superior de una forma semejante.

Traza de un tensor es la suma de sus elementos diagonales

$$\text{tr } A_{\mu\nu} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} \quad (1.37)$$

Un tensor es simétrico si $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ y antisimétrico si $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$. Este último tiene sus elementos diagonales nulos.

El tensor unidad $I = (\delta_{\mu\nu})$ tiene sus componentes definidas así

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu \end{cases} \quad (1.38)$$

en cualquier sistema de referencia. En efecto

$$\delta'_{\mu\nu} = a_{\mu\rho} a_{\nu\eta} \delta_{\rho\eta} = a_{\mu\rho} a_{\nu\rho} = \delta_{\mu\nu}$$

El tensor unidad de cuarto orden totalmente antisimétrico es $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ cuyas componentes cambian de signo al intercambiar dos índices cualesquiera, de forma que las componentes no nulas son ± 1 .

De la condición de antisimetría deducimos inmediatamente que son nulos todos los componentes de $e_{\mu\nu\lambda\rho}$ que tengan dos índices iguales.

Podemos también definir otras cantidades llamadas pseudoescalares, pseudovectores, pseudotensores que, bajo las transformaciones propias de LORENTZ, se comportan como escalares, vectores y tensores, pero cambian el signo que les correspondería bajo la transformación de la paridad P .

Un pseudoescalar $R(x)$ se comporta de la siguiente forma bajo la inversión especial P y temporal T

$$R(TPx) = -R(x) \quad (1.39)$$

Y un pseudovector C_μ

$$C' = TPC = C$$

mientras que un vector $C' = TPC = -C$. El pseudovector suele llamarse también vector axial para distinguirlo del vector propiamente dicho al que llamaremos vector polar.

La cantidad $e_{\mu\nu\lambda\rho}$ es un pseudotensor.

Si $A_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, llamamos dual del anterior al pseudo tensor $1/2 e_{\mu\nu\lambda\rho} A_{\lambda\rho}$. De forma semejante $e_{\mu\nu\lambda\rho} A_\rho$ es un pseudotensor antisimétrico de tercer orden dual del vector A_ρ . El producto $1/2 e_{\mu\nu\lambda\rho} A_{\mu\nu} A_{\lambda\rho}$ formado con un tensor de segundo orden y su dual es un pseudoescalar.

Diremos también que un vector y un tensor se transforman covariantemente con las expresiones (1.34 y 1.36) respectivamente, mientras que un escalar al transformarse covariantemente es un invariante, es decir, no se transforma cuando cambiamos el sistema de referencia.

7. EL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD.

El Principio de Relatividad se expresa diciendo que todas las ecuaciones de la física han de ser covariantes en relación a las transformaciones de LORENTZ, que no incluyan P .

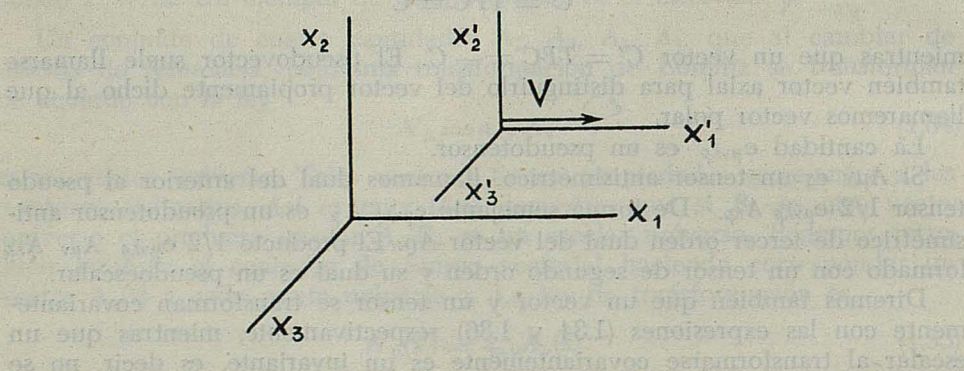
Hasta 1957 se creía que las leyes físicas debían ser covariantes respecto a toda transformación de LORENTZ. Pero en tal año los doctores T. D. LEE y C. N. YANG, demostraron que ciertas interacciones extraordinariamente débiles, causas de las desintegraciones β , no eran covariantes respecto a la paridad P . Inmediatamente se empezó a estudiar detalladamente la conducta de las leyes físicas respecto a la inversión temporal T . Pero los experimentos no han dado aún una conclusión definitiva.

Lo anterior quiere decir que hay dos mundos físicos, uno dextrogiro y otro levogiro. Estos mundos físicos son casi iguales si exceptuamos ciertas fuerzas, muy débiles, que aparecen de forma distinta en los mismos; precisamente porque la diferencia entre estos mundos físicos es tan pequeña se ha tardado tanto tiempo en descubrirlos. Por razones que aquí no podemos examinar, si el mundo en que vivimos está formado por materia, el mundo de distinta paridad está formado por antimateria. Esta tesis ha sido confir-

mada experimentalmente; y así, el Premio Nobel de 1959 se otorgó a quienes descubrieron experimentalmente el antiprotón, aunque su existencia fue postulada teóricamente mucho antes.

8. EJEMPLO DE TRANSFORMACION DE LORENTZ.

Limitémonos al caso particular en que el nuevo sistema inercial de referencia se mueva con una velocidad V a lo largo del eje x_1 respecto al sistema inicial primitivo, y que ambos tengan sus ejes x_1, x_2, x_3 paralelos. Por la homogeneidad del espacio físico hemos de admitir que en este caso



lo que ocurra a lo largo del eje x'_1 , será válido para cualquier recta paralela al mismo; es decir, que en tal caso sólo los ejes x_1 y x_4 pueden sufrir variación alguna en la transformación.

Por consiguiente, se ha de verificar

$$x'_2 = x_2 \quad x'_3 = x_3$$

lo que equivale a

$$a_{2\mu} = \delta_{2\mu} \quad a_{3\mu} = \delta_{3\mu} \quad (1.39)$$

y además, por la misma homogeneidad

$$a_{13} = a_{12} = 0 \quad a_{42} = a_{43} = 0 \quad (1.40)$$

ya que x'_1 no puede depender, en este caso, de x_2 , por ejemplo.

La transformación de LORENTZ queda así reducida a una rotación en el plano $x_1 x_4$. Podremos escribir entonces:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\varphi & a_{14} &= -\sin\varphi & \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_1 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi \\ x'_4 = x_1 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi \end{array} \right. \\ a_{41} &= \sin\varphi & a_{44} &= \cos\varphi \end{aligned} \quad (1.41)$$

elegidas de forma que se verifiquen todas las propiedades de ortonormalización.

Consideremos el movimiento en el nuevo sistema del origen del primitivo $x_1 = 0$

$$x'_1 = -x_4 \operatorname{sen} \varphi \quad x'_4 = x_4 \operatorname{cos} \varphi \quad (1.42)$$

expresiones cuyo cociente da

$$\frac{x'_1}{x'_4} = -\operatorname{tg} \varphi \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{x'_1}{i c t} = -i \frac{V}{c}$$

Entonces

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{-i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \operatorname{cos} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (1.43)$$

O sea que, en este caso particular, la transformación de LORENTZ es

$$x'_1 = \frac{x_1 + i \frac{V}{c} x_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = \frac{x_4 - i \frac{V}{c} x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (1.44)$$

Esta es la transformación que originariamente encontró LORENTZ, antes de que la Teoría de la Relatividad de EINSTEIN apareciera, al estudiar la variación de las ecuaciones de MAXWELL al cambiar el sistema inercial de referencia. La transformación (1.44) recibe el nombre de transformación especial de LORENTZ.

Las fórmulas recíprocas, que dan x_μ en función de x'_μ se obtienen con sólo cambiar V por $-V$ en las anteriores. Cuando $V > c$ las fórmulas de transformación nos dan x'_1 y t' imaginarios, lo cual expresa que no podemos tener un movimiento con velocidad mayor que la de la luz; ni siquiera es posible usar un sistema de referencia que se mueva con la velocidad de la luz, ya que en tal caso los denominadores serían nulos.

Cuando V es pequeña respecto a la velocidad de la luz la transformación especial de LORENTZ que hemos estudiado se convierte en la conocida de GALILEO

$$x'_1 = x_1 - Vt \quad x'_2 = x_2 \quad x'_3 = x_3 \quad t' = t \quad (1.45)$$

en la que el tiempo conserva su carácter absoluto.

Consideremos un cierto objeto una de cuyas dimensiones, l , sea paralela al eje x_1 . Si las coordenadas de estos extremos son x_1 y X_1 , la longitud de la misma será

$$l = X_1 - x_1$$

Calculemos ahora la longitud de l medida en el nuevo sistema. Los extremos tendrán unas coordenadas

$$x_1 = \frac{x'_1 - i \frac{V}{c} x'_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad X_1 = \frac{X'_1 - i \frac{V}{c} X'_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

y la misma longitud medida en el sistema prima será: $l' = X'_1 - x'_1$ cuando nos refiramos al mismo instante de tiempo: $x'_4 = X'_4$.

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Longitud propia de una distancia es su longitud medida en el sistema en que tal objeto está en reposo. Si la llamamos l_0 se verifica

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (1.46)$$

donde l es su longitud medida en el sistema que se mueve con una velocidad V . Los objetos tienen su máxima longitud vistos desde el sistema en que están en reposo. La disminución de longitud que aparece cuando se les observa desde otro sistema se llama contracción de LORENTZ.

Puesto que las dimensiones transversas no cambian en esta transformación especial de LORENTZ el volumen Ω de un cuerpo disminuye de acuerdo con la fórmula

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (1.47)$$

donde Ω_0 es el volumen propio del cuerpo.

Para esta transformación de LORENTZ la matriz $A \equiv (a_{\mu\nu})$ será:

$$A = (a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \frac{V}{c} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i \frac{V}{c} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

cuyo determinante es positivo. Luego es una transformación propia de LORENTZ.

9. VECTORES UNIVERSO VELOCIDAD Y ACELERACION

La velocidad en el espacio de MINKOWSKI es un vector universo que definimos así:

$$U_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{ds} \quad (1.49)$$

donde x_{μ} es la posición del punto material y ds es el elemento de intervalo cuyo valor es

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}$$

aquí v_i es la velocidad ordinaria del punto material en el espacio tridimensional. Por consiguiente, obtenemos

$$U_1 = \frac{v_1}{c \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \quad U_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \quad (1.50)$$

Observemos que el vector velocidad universo es una cantidad sin dimensiones que satisface la relación

$$U_{\mu}^2 = -1 \quad (1.51)$$

Podemos ver que U_{μ} es un vector universo al considerar que es el cociente de un vector universo, dx_{μ} , por un escalar. La velocidad universo de esta partícula vista desde un nuevo sistema inercial será

$$U'_{\mu} = a_{\mu\nu} U_{\nu}$$

utilizando los coeficientes $a_{\mu\nu}$ de la transformación especial de LORENTZ, obtenemos, como se ve la velocidad ordinaria v_i de un punto material desde un sistema en movimiento con una velocidad relativa ordinaria $V\hat{x}_1$ respecto al sistema en que habíamos medido v_i . Esto nos da, esencialmente, la fórmula para sumar velocidades en la teoría de la relatividad restringida

$$v'_1 = \frac{v_1 - V}{1 - \frac{v_1 V}{c^2}} \quad v'_2 = \frac{v_2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_1 V}{c^2}} \quad v'_3 = \frac{v_3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_1 V}{c^2}} \quad (1.52)$$

de donde claramente se deduce que ni aun sumando velocidades relativas podemos conseguir una mayor que la de la luz. En el caso en que nuestros cuerpos y sistemas se muevan con velocidades ordinarias muy pequeñas respecto a la velocidad de la luz, las fórmulas anteriores se convierten en

$$v'_1 = v_1 - V \quad v'_2 = v_2 \quad v'_3 = v_3 \quad (1.53)$$

conocidas en la Mecánica Clásica.

Cuando la velocidad V es más pequeña que la velocidad de la luz las fórmulas anteriores, desarrolladas en potencias de $\frac{V}{c}$ son aproximadamente iguales a

$$v'_1 = v - V \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \quad v'_2 = v_2 + v_1 v_2 \frac{V}{c^2} \quad v'_3 = v_3 + v_1 v_3 \frac{V}{c^2} \quad (1.54)$$

Escojamos un sistema de coordenadas cuyos ejes sean tales que la velocidad de la partícula esté en un cierto instante en el plano $X_1 X_2$. Entonces la velocidad de la partícula será

$$v_1 = v \cos \theta \quad v_2 = v \sin \theta \quad v_3 = 0$$

y en el otro sistema será

$$v'_1 = v' \cos \theta' \quad v'_2 = v' \sin \theta' \quad v'_3 = 0$$

Con ayuda de las fórmulas anteriores para transformar el vector velocidad ordinaria se obtiene

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta}{v \cos \theta - V} \quad (1.55)$$

fórmula que da el cambio de dirección de la velocidad al cambiar el sistema de referencia. Como un caso particular estudiemos la aberración de la luz, o sea, su cambio de dirección al observarla desde otro sistema inercial. En este caso $v = v' = c$, y, por consiguiente,

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta}{-\frac{V}{c} + \cos \theta} \quad (1.56)$$

A partir de las fórmulas de transformación se obtienen los siguientes valores para $\sin \theta'$ y $\cos \theta'$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta' &= \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} \operatorname{sen} \theta & \cos \theta' &= \frac{\cos \theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} \end{aligned}$$

En el caso en que $V \ll c$ esta fórmula se convierte en

$$\operatorname{sen} \theta' - \operatorname{sen} \theta = \frac{V}{c} \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

y llamando $\Delta\theta = \theta' - \theta$ el ángulo de aberración se tiene

$$\Delta\theta = \frac{-V}{c} \operatorname{sen} \theta \quad (1.57)$$

expresión muy conocida para la aberración de la luz.

El vector aceleración universo de una partícula es definido así:

$$\omega_\mu = \frac{dU_\mu}{ds} \quad (1.58)$$

lo cual da

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) \\ \omega_4 &= \frac{i}{c \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) \end{aligned} \quad (1.59)$$

Diferenciando la expresión $U_\mu^2 = -1$ respecto al intervalo S se tiene:

$$\omega_\mu U_\mu = 0 \quad (1.60)$$

La aceleración y velocidad universo son perpendiculares.

10. VECTORES UNIVERSO, MOMENTO LINEAL Y FUERZA

Generalizando los conceptos de la Mecánica Clásica atribuiremos a un punto material cuya masa medida en el sistema en que está en reposo es m_0 , el siguiente momento lineal universo.

$$P_\mu = m_0 c U_\mu \quad (1.61)$$

cuyas tres primeras componentes serán

$$P_i = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} v_i$$

Si aceptamos la hipótesis según la cual la masa de un cuerpo varía con su velocidad de acuerdo con la fórmula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \quad (1.62)$$

se tendrá para estos tres componentes del momento lineal

$$P_i = m v_i \quad (1.63)$$

que son totalmente equivalentes a los de la Mecánica Clásica, y, por consiguiente, P_i son las variables canónicas conjugadas de las x_i . Puesto que la energía E es la variable canónica conjugada del tiempo, P_4 será, salvo el coeficiente $\frac{i}{c}$, la energía del punto material. De hecho

$$P_4 = \frac{iE}{c} \quad (1.64)$$

Ahora bien, se obtuvo antes $U_\mu^2 = -1$; por consiguiente,

$$P_\mu^2 = -m_0^2 c^2 \quad (1.65)$$

y de aquí se llega a

$$E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + P_i^2} \quad (1.66)$$

como la energía de un punto material de masa en reposo m_0 y cuyo momento lineal ordinario (de tres componentes) es P_i .

Para velocidades v_i pequeñas en relación a la de la luz $P_j \ll m_0 c$ y entonces

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{P_i^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 + \frac{P_i^2}{2m_0} + \dots \quad (1.67)$$

que es, salvedad hecha del término $m_0 c^2$, la expresión de la Mecánica Clásica para la energía cinética de un cuerpo de masa m_0 y momento lineal P_i .

El primer término del desarrollo

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (1.68)$$

es la energía de reposo del cuerpo material e implica que, por el mero hecho de existir y tener masa, tal cuerpo contiene almacenada en su interior la energía E_0 . Esta fórmula ha sido comprobada experimentalmente con toda

exactitud por medio de las reacciones nucleares; no se puede dudar su validez; es el fundamento de las aplicaciones de la energía nuclear.

Las leyes de transformación de momento universo serán las correspondientes a un vector.

$$P'_\mu = a_{\mu\nu} P_\nu$$

Observemos que se verifica

$$P_1 = E \frac{v_1}{c^2}$$

Introduzcamos finalmente la fuerza universo definiéndola como sigue:

$$F_\mu = \frac{dP_\mu}{ds} = m_0 mc \frac{dU_\mu}{ds} = m_0 mc \omega_\mu \quad (1.69)$$

por lo que se tiene

$$F_\mu U_\mu = 0 \quad (1.70)$$

Las tres primeras componentes son

$$F_1 = \frac{\frac{dP_1}{dt}}{c \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{f_1}{c \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad (1.71)$$

donde $f_1 = \frac{dP_1}{dt}$ es la fuerza ordinaria. La cuarta componente es

$$F_4 = \frac{i}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} f_1 v_1 \quad (1.72)$$

y está relacionado con la potencia $f_1 v_1$ de la fuerza ordinaria f_1 .

Hay que hacer constar que las ecuaciones de movimiento de la Mecánica Clásica $f_1 = \frac{dP_1}{dt}$ tienen aquí una interpretación distinta, ya que hay que considerar la variación del momento ordinario p_1 debido al aumento de la velocidad de la partícula, según la fórmula

$$f_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) \quad (1.73)$$

Supongamos que la velocidad de la partícula cambia únicamente en di-

rección —es decir, que f_i sea normal a v_i , o sea que $f_i v_i = 0$ —. Entonces se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \frac{dv_i}{dt} \quad (1.74)$$

Pero si la velocidad cambia sólo en magnitud —es decir, si f_i y v_i son paralelos— un simple cálculo da

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv_i}{dt} \quad (1.75)$$

Por consiguiente, el cociente de la fuerza ordinaria f_i a la aceleración ordinaria $\frac{dv_i}{dt}$ es distinto en ambos casos.

11. PARTICULAS ELEMENTALES.

En la Mecánica Clásica, que es covariante respecto a la transformación de Galileo, era posible manejar el concepto de cuerpo rígido ya que, al cambiar de sistema de referencia según la transformación de Galileo, las dimensiones del cuerpo rígido eran invariantes. Pero, según hemos visto, las transformaciones de LORENTZ, bajo las cuales la Mecánica Relativista es covariante, implican la contracción de LORENTZ y, por consiguiente, las dimensiones de un cuerpo rígido no serán las mismas si las medimos desde un sistema en movimiento o desde el sistema en que el cuerpo esté en reposo. Por consiguiente, la Mecánica Relativista no es compatible con el concepto de cuerpo rígido.

La imposibilidad de existencia de cuerpos rígidos puede ser demostrada de otra forma. Supongamos que a un cuerpo rígido se le aplica una fuerza externa que le mueve: si el cuerpo fuera realmente rígido, todos sus puntos empezarían a moverse simultáneamente en el momento en que aplicamos la fuerza externa; si así no ocurriera el cuerpo no sería rígido, sino que se habría deformado. Ahora bien, el hecho de que todos los puntos del cuerpo rígido empiecen a moverse simultáneamente es incompatible con los principios de la Mecánica Relativista, ya que una señal —la acción de la fuerza externa— se habría propagado con una velocidad mayor que la de la luz, de hecho, con una velocidad infinita.

Por consiguiente, no existen cuerpos rígidos en la naturaleza, aunque tal concepto es una aproximación muy económica en el caso de pequeñas velocidades. Todo cuerpo ha de ser deformable, una distribución de materia en el espacio; de aquí que en el fondo para estudiar los cuerpos hemos de considerarlos como campos.

Podemos aplicar estas ideas a las partículas elementales. Si llamamos

así a las que no tienen partes, de forma que en cualquier experimento entren como un todo, puesto que han de ser cuerpos rígidos, llegamos a la conclusión de que las partículas elementales han de tener radio nulo. Ahora bien, de hecho los cuerpos que consideramos partículas elementales ocupan cierto volumen; por consiguiente, han de ser una distribución de materia en el espacio y, por lo tanto, tienen partes. Así, pues, el concepto de partícula elemental es relativo respecto de los experimentos que con ella realizamos; y no es sino una hipótesis apta para estudiar el microcosmos con nuestros medios actuales.

Como consecuencia general de este apartado, diremos que la Mecánica Cuántica Relativista nos lleva necesariamente a la Teoría de Campos Cuánticos.

12. ENERGIA DE ENLACE.

Si nos limitamos a estudiar los fenómenos dinámicos, las fórmulas obtenidas para el movimiento del punto material son aplicables a un cuerpo formado por muchas partículas. En este caso la energía total del cuerpo es la suma de las energías de sus componentes.

Si M_0 es la masa en reposo del mismo, su energía total es

$$\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$$

donde v_1 es la velocidad del movimiento del cuerpo como un todo. Por consiguiente, llegamos a la conclusión de que en Mecánica Relativista la energía de un sistema cerrado es positiva siempre, mientras que en Mecánica Clásica la energía total puede ser positiva o negativa.

La energía interna de un cuerpo, $M_0 c^2$ contiene, además de la energía en reposo de cada una de sus partes $m_{0A} c^2$, la energía de enlace entre las distintas partes. En otras palabras, M_0 no es $\sum m_{0A}$. Por consiguiente, en la Mecánica Relativista, la Ley de conservación de la masa no es válida; la masa de un cuerpo compuesto no es igual a la suma de las masas de sus constituyentes. Sin embargo, la ley de conservación de la energía total, en la que se incluye la energía en reposo, es verdadera.

La cantidad $\Delta M_0 c^2 = (M_0 - \sum m_{0A}) c^2$, es la energía de enlace del cuerpo.

13. CONSECUENCIAS DEL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD.

Si la Mecánica Cuántica que construyamos ha de estar de acuerdo con el Principio de la Relatividad antes enunciado, hemos de utilizar exclusivamente en su fundamentación cantidades físicas cuyas leyes de transformación bajo las transformaciones de LORENTZ sean bien conocidas; es decir, han de intervenir únicamente escalares, vectores, tensores... universo.

En particular hemos de tener en cuenta que las operaciones de medida de las propiedades físicas de un sistema han de hacerse en puntos universo todos ellos situados en una superficie espacial σ . Por consiguiente, exigir la medición simultánea de todas las propiedades de un sistema no será aceptable sino que más bien hemos de construir el Algebra de la Medida considerando superficies espaciales en las que realizamos todos los experimentos. Muchos resultados, tales como la probabilidad de que una partícula que estaba en x_μ llegue a X_μ , han de ser independientes de la superficie espacial $\sigma = \sigma(x)$ que, conteniendo al punto x_μ , hayamos utilizado para realizar las medidas de las cualidades de la partícula. Es, pues, necesario demostrar en estos casos que tal resultado (la probabilidad) es independiente de la superficie $\sigma = \sigma(x)$ elegida. Una vez hecho esto, podemos utilizar en particular la superficie espacial $x_4 = \text{constante}$, que es la que generalmente se emplea en la Física.

Semejantemente en la Dinámica Cuántica no toda ecuación del movimiento será físicamente aceptable, sino exclusivamente aquellas que sean covariantes. Es interesante ver cómo han de ser estas ecuaciones.

Introducimos el operador $\frac{\delta}{\delta x_\mu}$, derivada parcial respecto a x_μ , y para simplificar la notación escribimos

$$\delta_\mu \equiv \frac{\delta}{\delta x_\mu} \quad (1.76)$$

En general las ecuaciones del movimiento serán ecuaciones en derivadas parciales, δ_μ , aplicadas a la cantidad cuyo movimiento estudiamos. Veamos como tal operador se transforma

$$\begin{aligned} x'_\mu &= a_{\mu\nu} x_\nu & a_{\mu\nu} x'_\mu &= x_\nu \\ \delta'_\mu &\equiv \frac{\delta}{\delta x'_\mu} = \frac{\delta x_\nu}{\delta x'_\mu} \frac{\delta}{\delta x_\nu} = a_{\mu\nu} \delta_\nu \end{aligned} \quad (1.77)$$

Luego δ_μ se transforma como un vector, y, consiguientemente, las cuatro derivadas δ_μ han de aparecer de forma simétrica en las ecuaciones del movimiento. Si A_μ es un vector universo, dos ecuaciones aceptables serán

$$\begin{aligned} (A_\mu \delta_\mu + m) \psi(x) &= 0 \\ (\delta_\mu^2 + m) \varphi(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.78)$$

donde ψ y φ son las cantidades cuyo movimiento estudiamos. Se suele utilizar la notación siguiente:

$$\delta_1^2 \equiv \nabla^2 \quad \delta_\mu^2 \equiv \square^2 \quad (1.79)$$

En las anteriores ecuaciones, m ha de ser un escalar. De hecho, la segunda se llama ecuación de KLEIN-GORDON.

En otro sistema inercial, las ecuaciones (1.78) según el Principio de Relatividad dado deberán ser

$$(A'_{\mu} \delta'_{\mu} + m) \psi'(x') = 0$$

$$(\delta'^2_{\mu} + m) \varphi'(x') = 0$$

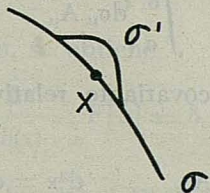
donde, por ejemplo,

$$A'_{\mu} = a_{\mu\nu} A_{\nu}$$

Las ecuaciones hamiltonianas del movimiento no son covariantes relativistas, pues dan a la derivada respecto al tiempo, δ_4 , cierta preponderancia sobre las otras tres, δ_i . Sin embargo, estas ecuaciones hamiltonianas serán aceptables cuando los efectos meramente relativistas no sean importantes.

En general, una cantidad física será expresada como una funcional $F[\sigma]$ sobre una superficie espacial. Definamos otra clase de derivadas muy interesante para establecer las ecuaciones del movimiento:

$$\frac{\delta F[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \lim_{\sigma' \rightarrow \sigma} \frac{F[\sigma'] - F[\sigma]}{\int_{\sigma}^{\sigma'} d^4x} \quad (1.80)$$



donde x es un punto sobre σ , la superficie espacial σ' es una superficie que difiere muy poco de σ alrededor del punto x y $\int_{\sigma}^{\sigma'} d^4x$ es el volumen del dominio tetradimensional entre σ' y σ .

Puesto que en la definición de esta derivada funcional (16) todos los elementos que entran son invariantes, tal concepto será apropiado para establecer las ecuaciones del movimiento.

En el espacio tetradimensional de MINKOWSKI podemos considerar las siguientes clases de integrales:

a) Integrales a lo largo de una curva universo Γ . El elemento de integración es dx_{μ} que se comporta como un vector

$$\int_{\Gamma} f(x) dx_{\mu}$$

donde entendemos que $f(x) \equiv f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

(16) TOMONAGA, S.: Prog. Theor. Phys 1, 27 (1946).

b) Integrales sobre una superficie bidimensional, S . El elemento infinitesimal de superficie está determinado por un tensor antisimétrico de segundo rango, $dS_{\mu\nu}$, cuyos componentes son iguales a las proyecciones del área del elemento de superficie sobre los planos de coordenadas. Podemos construir el tensor dual $dS^*_{\mu\nu}$

$$dS^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} dS_{\lambda\rho} \quad (1.81)$$

que geoméricamente describe un elemento de superficie, igual y normal al elemento $dS_{\mu\nu}$, de forma que todas las líneas en $dS^*_{\mu\nu}$ son perpendiculares a toda línea en $dS_{\mu\nu}$.

Esta clase de integrales casi no se usa.

c) Integrales sobre una superficie tridimensional, σ , hipersuperficie. El elemento de integración es el vector universo

$$d\sigma_\mu = (dx_2 dx_3 dx_4, dx_1 dx_3 dx_4, dx_1 dx_2 dx_4, dx_1 dx_2 dx_3) \quad (1.82)$$

que geoméricamente define el vector-universo normal a la superficie σ de longitud igual al área del elemento de superficie. Si σ es una superficie espacial, $d\sigma_\mu$ es un vector temporal.

La integral que resulta

$$\int_\sigma d\sigma_\mu A_\mu$$

no es sino la generalización covariante relativista de la integral sobre el volumen ordinario

$$\int_V d^3x A_\mu \quad d^3x = d\sigma_4$$

que se obtiene cuando tomamos como superficie σ la $x_4 = \text{constante}$ propia de la Mecánica Clásica. V es el volumen ordinario.

d) Integrales sobre un volumen tetradimensional, τ . El elemento de integración es

$$d\tau \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = d^4x \quad (1.83)$$

que cumple la relación

$$d\tau = \frac{1}{4} d\sigma_\mu dx_\mu$$

Es conveniente introducir aquí una generalización del teorema de GAUSS que convierte integrales sobre una superficie tridimensional (hipersuperficie) en integrales sobre un volumen tetradimensional encerrado por la misma. Para ello necesitamos hacer la sustitución

$$d\sigma_\mu \rightarrow d^4x \delta_\mu$$

y así, por ejemplo, para la integral del vector A_μ se tiene

$$\oint d\sigma_\mu A_\mu = \int d^4x \delta_\mu A_\mu \quad (1.84)$$

Intentamos dar ahora unos teoremas importantes sobre las derivadas funcionales presentadas en (1.80) cuando la funcional $F[\sigma]$ pueda ser escrita como una integral sobre la superficie σ

$$F_\mu[\sigma] \equiv \int_\sigma d\sigma'_\mu F(x') \quad (1.85)$$

de la función $F(x)$ diferenciable en los puntos de σ . Por medio del teorema de GREEN deducimos la siguiente relación

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} F_\mu[\sigma] = \lim_{\sigma' \rightarrow \sigma} \left[\int_{\sigma'} - \int_\sigma \right] d\sigma' F(x') / \int_{\sigma'} d^4x = \delta_\mu F(x) \quad (1.86)$$

De forma semejante, en el caso de la funcional

$$F[\sigma] \equiv \int_\sigma d\sigma'_\mu F_\mu(x') \quad (1.87)$$

si $F_\mu(x)$ es diferenciable en σ , se obtiene

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} F[\sigma] = \delta_\mu F_\mu(x) \quad (1.88)$$

de donde deducimos que la funcional $F[\sigma]$ es independiente de la superficie σ cuando $F_\mu(x)$ satisface la ecuación de continuidad

$$\delta_\mu F_\mu(x) = 0 \quad (1.89)$$

Este teorema es la expresión covariante relativista del caso bien conocido en que en lugar de una superficie espacial σ cualquiera tomamos la superficie espacial $x_4 = \text{constante}$; entonces

$$F[x_4] = \int_V d^3x F_4(x)$$

integral extendida a todo el volumen tridimensional V ocupado por el sistema en el instante $x_4 = \text{constante}$. Así, $F[x_4]$ es independiente del tiempo si se verifica

$$\bar{\nabla} F_4(x) = \frac{i}{c} \frac{\delta}{\delta t} F_4(x)$$

que es la ecuación de continuidad.

Si $F[x, \sigma]$ depende explícitamente de σ podemos generalizar los conceptos anteriores

$$F_{\mu}[\sigma] \equiv \int_{\sigma} d\sigma'_{\mu} F[x', \sigma] \quad (1.90)$$

Entonces

$$-\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} F_{\mu}[\sigma] = \delta_{\mu} F[x, \sigma] + \int d\sigma'_{\mu} -\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} F[x', \sigma] \quad (1.91)$$

donde $-\frac{\delta}{\delta \sigma(x)}$ significa derivación respecto a los argumentos que dependen explícitamente de σ y $\frac{\delta}{\delta \sigma(x)}$ quiere decir derivada total obtenida al calcular la variación total resultante de deformar la superficie σ .

En algunos cálculos hemos de trabajar con integrales sobre el "espacio de momentos". Es interesante conocer la conducta de $dp_1 dp_2 dp_3$ bajo la transformación de LORENTZ. Si introducimos un espacio tetradimensional, cuyos ejes de coordenadas corresponden a las cuatro componentes del momento de un punto material, $dp_1 dp_2 dp_3$, puede ser considerado como el cuarto componente de un elemento de superficie tridimensional determinada por la ecuación

$$p_{\mu}^2 = -m_0^2 c^2$$

que es una esfera. (Véase 1.82).

El elemento de superficie, $d\pi_{\mu}$, es un vector universo, construido de forma semejante a $d\sigma_{\mu}$ en (1.82) y normal a tal superficie; pero en nuestro caso la dirección de la normal coincide con la dirección del vector p_{μ} . Por consiguiente, el cociente

$$\frac{dp_1 dp_2 dp_3}{E} \quad (1.92)$$

es una cantidad invariante, puesto que es el cociente de los cuartos componentes de dos vectores, $d\pi_{\mu}$ y p_{μ} , constantemente paralelos.

Si introducimos coordenadas esféricas en este espacio de momentos se tiene

$$d\pi_{\mu} = dp_1 dp_2 dp_3 = p^2 dp d\omega \quad p = \sqrt{p_i^2}$$

donde $d\omega$ es el elemento de ángulo sólido alrededor de la dirección del vector ordinario p_i . Pero puesto que

$$p dp = \frac{1}{c^2} E dE \quad (1.94)$$

llegamos a la conclusión de que la cantidad

$$p dE d\omega \quad (1.95)$$

es también un invariante relativista.

Preciso es advertir que la exposición covariante del Principio de Relatividad que hemos hecho no es la única posible (17). Cabe una interpretación invariante en la que por ejemplo los coeficientes γ_μ de la ecuación

$$(\gamma_\mu \delta_\mu + m) \psi(x) = 0 \quad (1.96)$$

fueran considerados como invariantes numéricos a las transformaciones de LORENTZ. Tal es de hecho el punto de vista adoptado inicialmente por EINSTEIN. La ecuación anterior en otro sistema sería

$$(\gamma_\mu \delta'_\mu + m) \psi'(x') = 0 \quad (1.97)$$

Esta es la ecuación de DIRAC, quien utilizó el mismo punto de vista de EINSTEIN para estudiar el electrón.

La disputa entre los puntos de vista covariante e invariante, no puede ser decidida en el momento actual. Cuatro tipos diferentes de ecuaciones han sido profundamente estudiados hasta la fecha: las de MAXWELL, las de KLEIN-GORDON, las del electrón de DIRAC y las de la gravitación de EINSTEIN. Las dos primeras presentan la misma formulación bajo ambas interpretaciones —covariante e invariante— del Principio de Relatividad. La ecuación de DIRAC ha sido estudiada según la interpretación invariante, pero la de la gravitación requiere la interpretación covariante. De hecho esta interpretación covariante es la utilizada por la relatividad general, que es una teoría intrínsecamente geométrica y, como consecuencia, han pasado de moda las ideas originales de EINSTEIN a favor de la interpretación covariante de MINKOWSKI. Quizá ambas interpretaciones sean solamente proyecciones parciales de un principio básico aún desconocido. En el estado actual de la investigación científica parece que el punto de vista de la covariancia es el más fructífero.

(17) HANS FREISTADT: *Revista Mexicana de Física*. V, 43 (1956).

CAPÍTULO II

PRINCIPIO DE CUANTIFICACION DE PLANCK

1. SISTEMAS EN LA MECÁNICA CUÁNTICA

La Mecánica Cuántica estudia los sistemas físicos del microcosmos, es decir, aquellos cuyos tamaños son del orden de magnitud atómico o nuclear (18).

Según las ideas de la Física Clásica, debemos explicar las propiedades de un cuerpo material atribuyendo a las distintas partes que forman su estructura ciertas cualidades. Así, por ejemplo, explicamos el concepto de temperatura de un gas por medio de la teoría cinética suponiendo que sus moléculas se mueven como esferas elásticas cuya interacción mutua es despreciable; un segundo paso consiste en comprender por qué esas moléculas, al considerar su estructura atómica, se comportan como esferas dotadas de esas cualidades.

De esta forma vamos construyendo "modelos" con cuya ayuda podemos continuar el estudio de las propiedades físicas de los cuerpos. No se crea que obtener estos "modelos" es tarea fácil; mucho se escribió durante el pasado siglo acerca de la relación entre temperatura y calor, pero todo era parcialmente falso hasta que se descubrió el modelo apropiado: la teoría cinética.

Mientras los conceptos de grande y pequeño sean relativos, esta cadena no puede romperse. La Ciencia tenía que estudiar un nivel material por medio de otro más pequeño. Sin embargo, los sistemas de la Mecánica Cuántica introducen un cambio en esta cadena, aunque no la rompen; su tamaño es pequeño respecto al observador, y, como no podemos hablar de Ciencia sin observación, su tamaño es pequeño absolutamente. La Mecánica Clásica no es válida para estos sistemas, ya que las ideas que la construyeron, las cuales imaginan despreciable la perturbación producida por el proceso de observación en el cuerpo físico, no son ciertas en estos casos. Quizá hayamos de seguir explicando un nivel material por medio de un modelo construido con cuerpos más pequeños; pero el significado de experimento habrá variado, ya que el observador ha de entrar en nuestra teoría.

La palabra sistema utilizada en este trabajo significará sistema de la Mecánica Cuántica, o sea, aquel que por su pequeño tamaño sufra una per-

(18) La teoría de la superconductividad es una excepción. Conceptos mecanicocuánticos han de ser aplicados a un superconductor globalmente, aunque por sus dimensiones pertenece al dominio de la Mecánica Clásica.

turbación no despreciable al ser observado. Sin embargo, de hecho, en los experimentos llevados a cabo en laboratorios, no podemos manejar sistemas individuales sino que utilizamos un "conjunto" de sistemas idénticos, al que llamamos macrosistema. Y así pretendemos estudiar las propiedades del fotón individual —sistema—, aunque para hacerlo, en realidad siempre estudiamos las propiedades de un haz de fotones —macrosistema.

Se desprende de aquí que la Mecánica Cuántica ha de tener cierto carácter estadístico que presentaremos a lo largo de estas lecciones.

2. ESTADOS DEL SISTEMA

Los conceptos de la Física evolucionan continuamente para incluir cada vez más sintéticamente el elenco de conocimientos que van surgiendo de los nuevos experimentos que cada día nos presentan aspectos desconocidos y no imaginados de la conducta del mundo material.

Las poderosas máquinas de acelerar partículas han mostrado que mediante experimentos somos capaces de crear y de aniquilar sistemas. La interacción del hombre con la Naturaleza puede ser tan fuerte que, no sólo la modifica al estudiarla, sino que incluso llega a hacerla desaparecer o es capaz de sacarla de donde no estaba. No hemos podido aún crear todos los sistemas físicos mediante experimentos, pero sí hemos creado todos los sistemas, partículas, que la potencia de nuestros aparatos eran capaces de crear. Y tan pronto como hemos construido mejores máquinas aceleradoras han aparecido nuevas partículas creadas artificialmente.

Suponemos, pues, que, en principio, somos capaces de crear o aniquilar cualquier sistema.

Esta forma de no existir de un sistema, el estado físico que solamente tiene la capacidad de que de él, mediante experimentos, podemos crear un sistema, se llama estado vacío del sistema. No puede definirse más que por la negación de lo que observamos en el sistema ya creado. El estado vacío es el estado en que el sistema existe en potencia; es el estado al que nuestro sistema va cuando lo aniquilamos.

No podemos decir que un sistema tenga varios estados de vacío, puesto que si así fuere, habríamos de considerarlos el mismo estado ya que nada podríamos medir que los distinguiera.

Hemos de concluir que el estado vacío de un sistema físico es independiente del tiempo, pues no es posible medir el tiempo donde nada hay; por la misma razón el estado de vacío es independiente de cualquier otra coordenada.

Con el sistema ya creado podemos realizar muchos experimentos que midan sus propiedades. Así, los estados físicos de un sistema son el estado vacío y los estados observables, que expresan las diversas formas de ser de un sistema cuando al medir sus atributos no modificamos su existir.

Para construir la Mecánica Cuántica hemos de estudiar primero los estados observables de los cuales, por negación, podemos definir el estado vacío.

CAPÍTULO II

PRINCIPIO DE CUANTIFICACION DE PLANCK

1. SISTEMAS EN LA MECÁNICA CUÁNTICA

La Mecánica Cuántica estudia los sistemas físicos del microcosmos, es decir, aquellos cuyos tamaños son del orden de magnitud atómico o nuclear (18).

Según las ideas de la Física Clásica, debemos explicar las propiedades de un cuerpo material atribuyendo a las distintas partes que forman su estructura ciertas cualidades. Así, por ejemplo, explicamos el concepto de temperatura de un gas por medio de la teoría cinética suponiendo que sus moléculas se mueven como esferas elásticas cuya interacción mutua es despreciable; un segundo paso consiste en comprender por qué esas moléculas, al considerar su estructura atómica, se comportan como esferas dotadas de esas cualidades.

De esta forma vamos construyendo "modelos" con cuya ayuda podemos continuar el estudio de las propiedades físicas de los cuerpos. No se crea que obtener estos "modelos" es tarea fácil; mucho se escribió durante el pasado siglo acerca de la relación entre temperatura y calor, pero todo era parcialmente falso hasta que se descubrió el modelo apropiado: la teoría cinética.

Mientras los conceptos de grande y pequeño sean relativos, esta cadena no puede romperse. La Ciencia tenía que estudiar un nivel material por medio de otro más pequeño. Sin embargo, los sistemas de la Mecánica Cuántica introducen un cambio en esta cadena, aunque no la rompen; su tamaño es pequeño respecto al observador, y, como no podemos hablar de Ciencia sin observación, su tamaño es pequeño absolutamente. La Mecánica Clásica no es válida para estos sistemas, ya que las ideas que la construyeron, las cuales imaginan despreciable la perturbación producida por el proceso de observación en el cuerpo físico, no son ciertas en estos casos. Quizá hayamos de seguir explicando un nivel material por medio de un modelo construido con cuerpos más pequeños; pero el significado de experimento habrá variado, ya que el observador ha de entrar en nuestra teoría.

La palabra sistema utilizada en este trabajo significará sistema de la Mecánica Cuántica, o sea, aquel que por su pequeño tamaño sufra una per-

(18) La teoría de la superconductividad es una excepción. Conceptos mecanicocuánticos han de ser aplicados a un superconductor globalmente, aunque por sus dimensiones pertenece al dominio de la Mecánica Clásica.

turbación no despreciable al ser observado. Sin embargo, de hecho, en los experimentos llevados a cabo en laboratorios, no podemos manejar sistemas individuales sino que utilizamos un "conjunto" de sistemas idénticos, al que llamamos macrosistema. Y así pretendemos estudiar las propiedades del fotón individual —sistema—, aunque para hacerlo, en realidad siempre estudiamos las propiedades de un haz de fotones —macrosistema.

Se desprende de aquí que la Mecánica Cuántica ha de tener cierto carácter estadístico que presentaremos a lo largo de estas lecciones.

2. ESTADOS DEL SISTEMA

Los conceptos de la Física evolucionan continuamente para incluir cada vez más sintéticamente el elenco de conocimientos que van surgiendo de los nuevos experimentos que cada día nos presentan aspectos desconocidos y no imaginados de la conducta del mundo material.

Las poderosas máquinas de acelerar partículas han mostrado que mediante experimentos somos capaces de crear y de aniquilar sistemas. La interacción del hombre con la Naturaleza puede ser tan fuerte que, no sólo la modifica al estudiarla, sino que incluso llega a hacerla desaparecer o es capaz de sacarla de donde no estaba. No hemos podido aún crear todos los sistemas físicos mediante experimentos, pero sí hemos creado todos los sistemas, partículas, que la potencia de nuestros aparatos eran capaces de crear. Y tan pronto como hemos construido mejores máquinas aceleradoras han aparecido nuevas partículas creadas artificialmente.

Suponemos, pues, que, en principio, somos capaces de crear o aniquilar cualquier sistema.

Esta forma de no existir de un sistema, el estado físico que solamente tiene la capacidad de que de él, mediante experimentos, podemos crear un sistema, se llama estado vacío del sistema. No puede definirse más que por la negación de lo que observamos en el sistema ya creado. El estado vacío es el estado en que el sistema existe en potencia; es el estado al que nuestro sistema va cuando lo aniquilamos.

No podemos decir que un sistema tenga varios estados de vacío, puesto que si así fuere, habríamos de considerarlos el mismo estado ya que nada podríamos medir que los distinguiera.

Hemos de concluir que el estado vacío de un sistema físico es independiente del tiempo, pues no es posible medir el tiempo donde nada hay; por la misma razón el estado de vacío es independiente de cualquier otra coordenada.

Con el sistema ya creado podemos realizar muchos experimentos que midan sus propiedades. Así, los estados físicos de un sistema son el estado vacío y los estados observables, que expresan las diversas formas de ser de un sistema cuando al medir sus atributos no modificamos su existir.

Para construir la Mecánica Cuántica hemos de estudiar primero los estados observables de los cuales, por negación, podemos definir el estado vacío.

La transición que un sistema realiza cuando pasa de su estado vacío a un estado observable, es decir, cuando es creado, requiere una gran cantidad de energía. En la Mecánica Cuántica Relativista, tal como la presentamos aquí, es absolutamente necesario introducir el concepto de estado vacío; pero si quisiéramos construir una Mecánica Cuántica no Relativista, la cual no incluyera fenómenos de muy alta energía, sólo tendríamos que considerar los estados observables.

3. ESPECTRO DE VALORES PROPIOS

Según NEUMANN por "magnitud hay que entender propiamente el cómo debe ser medida y cómo hay que leer su valor en las posiciones de los índices de los aparatos de medición o calcularlo a partir de ellos" (19).

Supongamos que medimos una cierta magnitud, A_1 , del sistema objeto de nuestro estudio. Esta propiedad A_1 puede ser, por ejemplo, la posición del sistema o su spin. Observamos que *siempre* el resultado de medir A_1 en cualquier sistema de un conjunto de sistemas idénticos nos da un valor contenido en un conjunto de valores.

$$a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_1^{(\alpha)}, a_1^{(\beta)}, \dots, a_1^{(n)}. \quad (2.1)$$

Este conjunto de valores se llama espectro de valores propios de la propiedad A_1 . Y la propiedad A_1 recibe el nombre genérico de observable. Lo anterior es la expresión del Principio de Cuantificación de PLANCK: al medir el valor de una propiedad en un sistema (no en un conjunto de sistemas) obtenemos un valor del espectro discreto correspondiente.

Para justificar nuestra afirmación no es preciso que, de hecho, hayamos obtenido todo el conjunto de valores propios de A_1 mediante experimentos sucesivos. Es evidente que si el espectro contiene infinitos elementos no podemos haber realizado un número infinito de experimentos, pero sabemos que, al menos, tenemos capacidad suficiente para ir continuamente repitiendo experimentos y así obtener cualquier valor del espectro.

Sin embargo, nunca debemos incluir en nuestra teoría hipótesis alguna que no podamos comprobar experimentalmente.

Cuando realizamos una observación en un sistema dado, el sistema es modificado por el observador que recibe la información. No afirmamos que la propiedad A_1 se dé en la Naturaleza únicamente con los valores de su espectro; no nos referimos a una realidad objetiva independiente del observador. Aceptamos como un hecho algo que viene de nuestros experimentos: al medir A_1 en cualquier sistema físico siempre obtenemos uno de los valores contenidos en el conjunto de valores que llamamos su espectro.

(19) J. VON NEUMANN: *Fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica*.

Si hubiéramos medido otro observable A_2 también tendríamos uno de los

$$a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \dots, a_2^{(\alpha)}, a_2^{(\beta)}, \dots, a_2^{(n)}$$

De este hecho recibe esta Mecánica el apelativo de Cuántica. Al medir los atributos de los sistemas físicos obtenemos ciertos valores que expresan que la energía, la acción... tienen un espectro discreto, se dan en Naturaleza "a saltos", o sea, en "cuantos" de energía o de acción que no podemos dividir.

Estudiemos ahora el espectro de un observable tal como la abscisa de la posición de una partícula que, según hemos visto en la Mecánica Clásica, parece tener un espectro continuo. Para llegar a esta conclusión suponíamos que tenía sentido hablar en Física del punto matemático situado sobre una recta.

Una forma de definir el punto matemático sobre una recta es considerar en la misma una sucesión infinita de intervalos decrecientes, todos ellos contenidos en los anteriores, y cuya longitud, a partir de uno dado, es tan pequeña como se quiera. Esta sucesión define un punto que es común a todos esos intervalos.

Evidentemente podemos suponer la existencia de máquinas, cada vez más perfectas, que sean capaces de medir la longitud de cualquiera de esos intervalos.

En verdad este supuesto no será válido para una máquina real, pues todo aparato tendrá un límite de precisión y no será capaz de medir distancias menores que él. Pero aunque esto es cierto creemos que, en principio, podemos construir aparatos capaces de medir distancias tan pequeñas como se quiera, y así parece que somos capaces de medir la longitud de los infinitos intervalos que constituyen la sucesión matemática.

Aunque admitamos lo anterior no podemos llegar a la conclusión de que el concepto de punto matemático tenga sentido en Física. Pues siempre esas máquinas medirán intervalos, distancias finitas, aunque tan pequeñas como se quiera. Las máquinas no son capaces de dar el salto al límite, operación con la cual definimos el punto matemático; este salto es una abstracción que realiza nuestra mente y que está muy por encima del poder de la máquina.

No tendremos, sin embargo, inconveniente alguno manejando el concepto de punto matemático en Física siempre que de hecho al introducirlo no lleguemos a contradicción alguna en nuestros cálculos. Y, de esta forma, podemos utilizar herramientas, tales como el concepto de derivada, ya muy estudiados por los matemáticos.

En otros casos hemos de ir con más cuidado. Si aceptamos que todos los puntos matemáticos de una recta pueden ser considerados como posibles posiciones de una partícula en la misma, el espectro de valores propios del observable abscisa X es continuo y, por consiguiente, no numerable, lo cual le hace esencialmente distinto del espectro (2.1), que es numerable, ya que a cada valor $a_1^{(\alpha)}$ de (2.1) le podemos hacer corresponder un número α_1 del conjunto de números naturales.

Parece ser que el observable que debemos considerar es X_δ que mida exactamente si la partícula está o no dentro de un cierto intervalo de longitud δ tan pequeño como se quiera. Entonces medir la posición de una partícula consistirá en dividir los ejes de coordenadas en un conjunto —numerable— de intervalos de longitud δ y decir en cuál de ellos se encuentra. Advirtamos que el observable X_δ no lleva implícito en su definición el concepto de error en la medida; δ no es el error que hacemos al conocer la posición de una partícula.

Más tarde veremos cómo podemos manejar operadores de espectro continuo sin perder el sentido físico de los cálculos que con ellos hagamos.

4. OPERADOR SELECTOR

Consideremos un rayo de luz no polarizada. Tal haz luminoso estará constituido por un conjunto de fotones. Supongamos que este rayo incide en un aparato que sólo deja pasar luz polarizada en un cierto plano; la intensidad de la luz que atraviesa nuestro aparato será menor que la que incide en él.

Queremos interpretar este fenómeno estudiando la conducta de los fotones que forman el haz luminoso, que en nuestro caso es el macrosistema. Podemos pensar que la cualidad “polarización” es algo propio de cada uno de los fotones: luz no polarizada estará formada por fotones polarizados en todas las direcciones. Nuestro aparato selecciona los fotones que están polarizados en un cierto plano: deja pasar éstos y rechaza todos los demás.

Y así introducimos el símbolo

$$S_\sigma(a_1(z)) \quad (2.2)$$

que corresponde al proceso físico que selecciona entre todos los sistemas del conjunto aquéllos que tienen el valor $a_1(z)$ del observable A_1 . Le llamaremos operador selector.

Para que el álgebra que vamos a construir tenga sentido físico es preciso que los operadores selectores correspondan biunívocamente a experimentos de selección que pueden ser llevados a cabo en un laboratorio. Tal experimento no tiene que darnos el número de sistemas que tienen el valor $a_1(z)$ de la cualidad A_1 ; únicamente ha de ser capaz de separarlos del resto. Como resultado de esta clase de experimentos ningún número resulta; solamente varía el número de sistemas que constituyen nuestro macrosistema, el haz luminoso que atraviesa el selector.

Además, hemos de especificar en qué instante de tiempo tiene lugar el experimento, o, hablando relativísticamente, en qué superficie espacial σ lo realizamos. Sin embargo, para no complicar la notación, puesto que con esta Álgebra de la Medida, no hablamos más que de cómo describir adecuadamente los sistemas, sin pensar en su movimiento, escribimos

$$S_\sigma(a_1(z)) \equiv S(a_1(z)) \quad (2.3)$$

entendiendo que todas las operaciones cinemáticas tienen lugar en una superficie espacial σ .

Con ayuda de nuestra intuición física queremos definir operaciones algebraicas con estos símbolos. Y así convenimos que el producto de dos de ellos

$$S(a_1^{(\alpha)}) S(a_1^{(\alpha)})$$

corresponde al experimento formado por dos experimentos realizados consecutivamente: primero realizamos lo que significa el operador de la extrema derecha y luego, sobre los sistemas que pasan esta primera selección, la que corresponde al segundo selector. Por consiguiente,

$$S(a_1^{(\alpha)}) S(a_1^{(\alpha)}) = S(a_1^{(\alpha)}) \quad (2.4)$$

pues todos los sistemas que pasan el primer selector han de pasar el segundo (20). Este hecho es fundamental; implica que si por un primer experimento sabemos que ciertos sistemas tienen todos el valor $a_1^{(\alpha)}$ de la cualidad A_1 , y seleccionamos aquéllos entre éstos que tienen tal valor $a_1^{(\alpha)}$ de A_1 ha de resultar que todos lo tienen. En cierto sentido implica causalidad: si los sistemas no son perturbados con acciones exteriores nada cambia en ellos; si así no fuera no podríamos hablar de Ciencia.

En general se ha de verificar, si definimos la potencia de un selector como el producto sucesivo del mismo por sí mismo, que

$$[S(a_1^{(\alpha)})]^n = S(a_1^{(\alpha)})$$

para un número n entero positivo cualquiera.

La suma de dos selectores

$$S(a_1^{(\beta)}) + S(a_1^{(\alpha)}) = S(a_1^{(\alpha)}) + S(a_1^{(\beta)}) \quad (2.5)$$

será el selector que corresponde al experimento que selecciona el conjunto de sistemas formado por los sistemas seleccionados por cada uno de los sumandos. Y así podemos generalizar este proceso para un número indeterminado de selectores. Esta definición de suma evidentemente la hace conmutativa.

Para completar nuestra álgebra hemos de definir un selector nulo, que designaremos \bigcirc_{A_1} , que no acepta sistema alguno. Corresponde, en el caso del haz luminoso, al experimento consistente en colocar una placa totalmente opaca en la trayectoria del haz. Evidentemente se tiene

$$S(a_1^{(\alpha)}) \cdot \bigcirc_{A_1} = \bigcirc_{A_1} \quad \bigcirc_{A_1} S(a_1^{(\alpha)}) = \bigcirc_{A_1}$$

$$\bigcirc_{A_1} + S(a_1^{(\alpha)}) = S(a_1^{(\alpha)}) \quad (2.6)$$

(20) En la realidad física es difícil comprobar (2.4), ya que las mediciones han de realizarse en superficies espaciales muy próximas para que el estado no varíe; pero siempre tardamos un corto intervalo de tiempo en realizar una medición.

De forma análoga introduciremos el selector unidad, que designamos I_{A_1} que selecciona todos los sistemas que a él llegan cualquiera que sea el valor de A_1 . Corresponde a la placa totalmente transparente. Y así, por consideraciones físicas se ha de verificar

$$I_{A_1} S(a_1^{(\alpha)}) = S(a_1^{(\alpha)}) \quad S(a_1^{(\alpha)}) I_{A_1} = S(a_1^{(\alpha)}) \quad (2.7)$$

Tratemos de interpretar ahora el siguiente producto

$$S(a_1^{(\alpha)}) S(a_1^{(\beta)}) \quad \beta \neq \alpha$$

El primer operador corresponde a un experimento que selecciona los sistemas que tienen el valor $a_1^{(\beta)}$ de la propiedad A_1 y luego, seleccionamos de éstos los que tengan el valor $a_1^{(\alpha)}$ de la misma propiedad. Por consiguiente, el experimento producto no acepta ningún sistema y se tiene

$$S(a_1^{(\alpha)}) S(a_1^{(\beta)}) = O_{A_1} \quad (2.8)$$

Combinando (2.4) con (2.8) se tiene

$$S(a_1^{(\alpha)}) S(a_1^{(\beta)}) = S(a_1^{(\beta)}) \delta_{\alpha, \beta}^{A_1} \quad (2.9)$$

donde $\delta_{\alpha, \beta}^{A_1}$ es la delta de KRONECKER cuya definición

$$\delta_{\alpha, \beta}^{A_1} = \begin{cases} = I_{A_1} & \text{si } \alpha = \beta \\ = O_{A_1} & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

La relación (2.9) expresa la ortogonalidad de los experimentos de selección.

Siempre que medimos el valor del observable A_1 en un sistema obtenemos un valor de su espectro (2.1). Este hecho se expresa algebraicamente mediante la relación

$$\sum_{\alpha} S(a_1^{(\alpha)}) = I_{A_1} \quad (2.10)$$

donde la suma se extiende a todo valor del espectro de A_1 . La relación (2.10) tiene un claro sentido físico, pues evidentemente el operador de la izquierda selecciona todos los sistemas, cualquiera que sea el valor observable A_1 de los mismos, y, por consiguiente, es, por definición, el operador unidad.

5. OBSERVABLES COMPATIBLES

Diremos que dos atributos A_1 y A_2 son compatibles cuando la medida del valor de A_1 en un sistema no modifica el valor de A_2 en el mismo. Para comprobar esto hemos de medir el observable A_1 , primero, y luego el A_2 , y obtener el mismo resultado que si invirtiésemos el orden con que realizamos estas mediciones. Se deduce inmediatamente que si dos observables

A_1 y A_2 son compatibles los operadores selectores correspondientes conmutan

$$S(a_1^{(\alpha)}) S(a_2^{(\beta)}) = S(a_2^{(\beta)}) S(a_1^{(\alpha)}) \quad (2.11)$$

para cualquier par de superíndices α y β .

Diremos que A es un conjunto completo de observables compatibles

$$A \equiv \{ A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_k \} \quad (2.12)$$

cuando estos observables son compatibles entre sí dos a dos y ningún otro observable, que no sea función de los anteriores, existe que sea compatible con todos los del conjunto. El conocimiento de los valores propios de cada uno de los observables A_j del conjunto completo A nos da la máxima información de datos no contradictorios que podemos tener acerca de un sistema físico. Este conjunto de valores propios determinan completamente el estado observable del sistema. Es decir, conociendo el conjunto de valores

$$a^\alpha \equiv \{ a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}, \dots, a_j^{(\alpha)}, \dots, a_k^{(\alpha)} \}$$

hemos agotado toda la información que podemos tener acerca del sistema.

El conjunto de valores propios a^α determinan un estado físico al cual haremos corresponder el símbolo siguiente

$$|a^\alpha, \sigma\rangle \quad (2.13)$$

cuyo significado matemático desconocemos por ahora.

No afirmamos que un sistema tenga necesariamente que estar en uno de los estados (2.13). Decimos que siempre que determinemos el estado del sistema por medio de experimentos que miden los valores de los observables A tendremos uno de los estados $|a^\alpha, \sigma\rangle$, donde σ indica la superficie espacial en que esos experimentos tienen lugar. Por consiguiente, en relación a estos experimentos los estados (2.13) son los únicos que existen. Y así, de nuevo encontramos la premisa fundamental de la Mecánica Cuántica: no podemos despreciar la interferencia entre el observador y lo observado.

El índice α indica únicamente que de cada uno de los observables A hemos elegido uno cualquiera entre sus valores propios. Los diferentes α nos dan los estados observables del sistema. Queremos incluir entre los a^α otro, que llamaremos a^0 , que corresponde a la negación de todas las cualidades A ; serán, por decirlo así, los valores propios del conjunto de observables del estado vacío del sistema. Tal estado vacío lo describiremos por el símbolo

$$|a^0\rangle \quad (2.14)$$

Cuando, a partir de ahora, utilicemos la expresión "para todo α " nos referimos a todos los estados físicos, o sea, a los estados observables y al vacío del sistema.

Observemos que el estado vacío es independiente de la superficie espacial σ la cual no tiene sentido en el vacío.

Los estados físicos $|a^\alpha, \sigma\rangle$ para todo α son llamados estados unidad del conjunto de observables A .

Simplificaremos la notación escribiendo

$$|a^\alpha, \sigma\rangle \equiv |a^\alpha\rangle \quad (2.15)$$

aunque solamente el estado vacío es independiente de σ .

6. SELECTORES COMPLETOS. — OPERADORES COMPUESTOS

Hagamos corresponder al experimento de selección de los sistemas que están en un cierto estado $|a^\alpha, \sigma\rangle$ un operador selector completo llamaremos $S_\sigma(a^\alpha)$.

Evidentemente se debe verificar

$$S_\sigma(a^\alpha) = S_\sigma(a_1^{\alpha_1}) S_\sigma(a_2^{\alpha_2}) \dots S_\sigma(a_j^{\alpha_j}) \dots S_\sigma(a_k^{\alpha_k}) = \prod_{j=1}^K S_\sigma(a_j^{\alpha_j}) \quad (2.16)$$

donde el conjunto de índices $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_k\}$ lo hemos designado genéricamente por una letra griega α que los contiene

$$\alpha_j \in \alpha$$

El signo \in indica que α_j pertenece a α . Como antes, tampoco indicaremos expresamente la superficie σ del selector completo y así escribiremos

$$S_\sigma(a^\alpha) \equiv S(a^\alpha) \quad (2.17)$$

pero entendiendo que en nuestros cálculos habrá que indicar explícitamente en qué superficie espacial estamos realizando los experimentos.

Definiremos las operaciones producto y suma de selectores completos de idéntica forma como lo hicimos para selectores simples. Y así, por ejemplo, se tiene

$$\begin{aligned} S(a^\alpha) S(a^\beta) &= \prod_{j=1}^K S(a_j^{\alpha_j}) S(a_j^{\beta_j}) = \prod_{j=1}^K \delta_{\alpha_j, \beta_j} S(a_j^{\alpha_j}) = \\ &= \prod_{j=1}^K \delta_{\alpha_j, \beta_j} \prod_{j=1}^K S(a_j^{\alpha_j}) = \delta_{\alpha, \beta} S(a^\alpha) \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde hemos introducido una nueva delta de Kronecker de la siguiente forma:

$$\delta_{\alpha, \beta} = \prod_{j=1}^K \delta_{\alpha_j, \beta_j} \quad (2.19)$$

cuyo valor es uno cuando $\alpha_j = \beta_j$ para todo j , y cero en todo otro caso.

También estos operadores selectores completos tienen la propiedad de ser completos en el sentido de seleccionar todos los estados físicos que pueden ser descritos con el conjunto completo de observables A . Se verifica

$$\sum_{\alpha} S(a^{\alpha}) = I_A \quad I_A = I_{A_1} + \dots + I_{A_k} \quad (2.20)$$

cuando α se extienda a todo estado físico.

Preciso es hacer aquí una observación respecto al rigor matemático de estos productos y sumas que pueden contener infinitos términos cuando un observable tenga infinitos valores propios. La relación (2.20) es consecuencia del sentido físico de la teoría que estamos construyendo; podría demostrarse algebraicamente a partir de las (2.10) como hemos hecho para introducir la ortogonalidad (2.18) de los selectores completos, aunque también esta última es una consecuencia del sentido físico de la teoría. Y habríamos manejado productos infinitos o series como si fueran productos finitos o sumas, lo cual matemáticamente no es riguroso. El algoritmo matemático en el que vamos a fijar nuestra Algebra de la Medida tiene que ser tal que nos permita hacer rigurosamente estas operaciones para estos casos, ya que de lo contrario tal algoritmo no sería apropiado para representar los procesos físicos y habríamos de rechazarlo.

Los físicos, en su laboratorio, no están limitados a realizar únicamente experimentos de selección que elijan los sistemas en un cierto estado físico $|a^{\alpha}\rangle$. Ya hemos hablado de alguna otra clase de experimentos, tal como la creación artificial de sistemas mediante aceleradores.

Nos conviene introducir nuevos operadores representados por los símbolos

$$S(a^{\beta}, a^{\alpha}) \quad (2.21)$$

que representen el experimento que seleccione sistemas en el estado físico $|a^{\alpha}\rangle$, modifique el estado de esos sistemas mediante fuerzas externas, y nos los presente luego en el estado físico $|a^{\beta}\rangle$. Y así, por ejemplo, el experimento de creación de un sistema puede ser interpretado como el experimento que seleccione el estado vacío del sistema y lo convierta en un estado observable. Vendrá representado por el operador

$$S(a^{\beta}, a^0) \quad (2.22)$$

cuando creamos un sistema en el estado observable $|a^{\beta}\rangle$.

Con esta notación, selector completo será aquel que selecciona sistemas en el estado físico $|a^{\alpha}\rangle$, y no los modifica. Por consiguiente, se verifica

$$S(a^{\alpha}) = S(a^{\alpha}, a^{\alpha}) \quad (2.23)$$

El operador (2.21) no es un selector cuando $\alpha \neq \beta$; y, en general, no verifica las propiedades (2.4) de los selectores.

Así, por ejemplo, se tiene:

$$S(a^{\beta}, a^{\alpha}) \neq S(a^{\alpha}, a^{\beta}) \quad \text{si } \alpha \neq \beta \quad (2.24)$$

Todos los selectores que hemos manejado hasta ahora conmutaban entre sí. Con los nuevos operadores, a los que llamaremos compuestos, no ocurre así. En efecto, el producto $S(a^\delta, a^\gamma) S(a^\beta, a^\alpha)$ representa el experimento que selecciona sistemas en el estado $|a^\alpha\rangle$ los deja luego en el estado $|a^\beta\rangle$, de estos últimos seleccionamos los que estén en el estado $|a^\gamma\rangle$ y recibimos finalmente sistemas en estado $|a^\delta\rangle$. Por consiguiente, se tiene

$$S(a^\delta, a^\gamma) S(a^\beta, a^\alpha) = \delta_{\gamma\beta} S(a^\delta, a^\alpha) \quad (2.25)$$

Sin embargo, discuriendo idénticamente, se tiene

$$S(a^\beta, a^\alpha) S(a^\delta, a^\gamma) = \delta_{\alpha\gamma} S(a^\beta, a^\gamma) \quad (2.26)$$

Y, por consiguiente, en general los operadores compuestos no conmutan. El Algebra de la Medida es no conmutativa.

Pero observamos que el producto de varios operadores compuestos es otro operador compuesto, lo cual nos dice que el Algebra de la Medida es lineal, de acuerdo con el sentido físico de la teoría, pues siempre una sucesión de experimentos puede ser interpretada como un único experimento más complicado. Obsérvese que según esta manera de pensar, dos experimentos son equivalentes cuando en idénticos sistemas producen idénticas modificaciones; nada decimos de cómo estas transformaciones tienen lugar.

Hasta ahora sólo hemos definido los algoritmos de suma y multiplicación de operadores. ¿Cuál será el sentido físico de multiplicar un operador por un número? Para adivinarlo hemos de pensar en el posible significado de multiplicar un experimento por un número complejo λ ; no puede ser la repetición sucesiva de un experimento un número de veces igual a λ , ya que hemos convenido que al proceso de repetición de experimentos le corresponda la multiplicación ordenada de operadores.

En el símbolo $\lambda S(a^\beta, a^\alpha)$, el número completo λ sólo puede ser interpretado como relacionado de una forma aun desconocida con la probabilidad que ha de figurar en esta teoría; su interpretación la veremos más adelante.

Según esta interpretación del producto de un número complejo por un operador se ha de verificar que un número complejo cualquiera conmuta con todos los operadores.

De las tres características esenciales que atribuímos a los sistemas del microcosmos hemos podido incluir en el Algebra de la Medida el aspecto cuántico al definir el espectro de valores propios de un observable, y, además, el estadístico, al considerar el producto de un número complejo λ por un selector. La dualidad partícula-onda aparece cuando tratamos el movimiento.

7. REPRESENTACIONES

Al efectuar la medida de los valores del conjunto completo de observables compatibles, A , los sistemas físicos aparecen en un estado $|a^\alpha\rangle$ para

cierto α . Ahora bien, esto no quiere decir que no podamos utilizar otro conjunto completo

$$B \equiv \{ B_1, B_2, \dots, B_j, B_k \} \quad (2.27)$$

de observables todos compatibles entre sí dos a dos, pero tales que, desde luego, algunos sean incompatibles con los del conjunto completo A . Necesariamente el experimento que mida los observables del conjunto A perturba el valor que tendríamos de la medición de los observables B , exceptuado el caso trivial en que todos los observables de B sean funciones de los observables A , caso que excluimos:

$$B \neq f(A)$$

pues de lo contrario todos los observables B conmutarían con todos los A (21). Cada uno de los observables B tendrá un conjunto de valores propios. Así, sean los de B_j

$$b_j^\alpha \equiv \{ b_j^{(1)}, b_j^{(2)}, \dots, b_j^{(\alpha)}, \dots, b_j^{(\beta)}, \dots, b_j^{(n_j)} \}$$

y al determinar el valor de los observables B en un sistema cualquiera tendremos uno de los estados $|b^\beta\rangle$, para cierto β . Los estados $|a^\alpha\rangle$ y $|b^\beta\rangle$ serán diferentes; pero no pueden ser, totalmente independientes, ya que ambos expresan la máxima información que podemos tener de un mismo sistema físico. Decimos que los experimentos que miden el valor de los observables del conjunto A y los experimentos que miden el valor del conjunto B son dos formas equivalentes, dos "representaciones", del mismo hecho: obtener la máxima información posible acerca de un sistema físico. De forma semejante podemos considerar otros conjuntos completos C, D, \dots de observables compatibles.

Definamos ahora un tipo más general de experimento que representamos por el símbolo

$$S(b^\beta, a^\alpha) \quad (2.28)$$

el cual selecciona los sistemas en el estado $|a^\alpha\rangle$, los modifica, y nos los presenta en el estado $|b^\beta\rangle$ con los cuales podemos definir las operaciones suma y multiplicación con el mismo sentido físico que les dimos antes.

Evidentemente según esto se tendrá que

$$S(d^\delta, b^\gamma) S(b^\beta, a^\alpha) = \delta_{\beta\gamma} S(d^\delta, a^\alpha) \quad (2.29)$$

pues representa el experimento que acepta sistemas en el estado $|a^\alpha\rangle$ y los presenta en el estado $|b^\beta\rangle$; de éstos seleccionamos luego los que están en el estado $|b^\gamma\rangle$, lo cual nos da cero si $\gamma \neq \beta$ o nos da unidad si $\gamma = \beta$; y al final los deja en el estado $|d^\delta\rangle$.

(21) Véase más adelante el sentido físico de función de un observable.

Para el caso general en que utilizamos cuatro representaciones el producto

$$S(c\gamma, d\delta) S(b^\beta, a^\alpha) \quad (2.30)$$

dependerá de la relación entre los estados $|b^\beta\rangle$ y $|d^\delta\rangle$, que como hemos visto antes no son completamente independientes; es decir, este producto contendrá el experimento $S(c\gamma, a^\alpha)$ y un cierto número $\langle d^\delta | b^\beta \rangle$ que llamaremos función de transformación, relacionado con la probabilidad de que los estados $|b^\beta\rangle$ contengan los estados $|d^\delta\rangle$. Y así escribimos

$$S(c\gamma, d\delta) S(b^\beta, a^\alpha) = \langle d^\delta | b^\beta \rangle S(c\gamma, a^\alpha) \quad (2.31)$$

Los números $\langle d^\delta | b^\beta \rangle$ son complejos en general y, por su naturaleza, conmutan con todos los operadores. No podemos calcular aún el valor de estos números, pero en un caso particular ya lo conocemos: para dos estados de la misma representación, deducimos a partir de (2.24) que

$$\langle a^\alpha | a^\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta} \quad (2.32)$$

Estudiemos además el caso en que el estado unidad en una representación sea el vacío del sistema $|a^0\rangle$. Nos conviene imponer que un estado observable $|b^\beta\rangle$, $\beta \neq 0$ sea, en cualquier representación, totalmente independiente del estado de vacío. Y así escribimos

$$\langle b^\beta | a^0 \rangle = 0 \quad \beta \neq 0 \quad (2.33)$$

con lo cual expresamos que un sistema no puede existir y no existir al mismo tiempo.

Queremos dar a los operadores cero y unidad un significado muy amplio. El primero rechaza y el segundo acepta cualquier sistema independientemente del conjunto completo de observables que utilicemos para representarlos. Por consiguiente,

$$O_A = O \quad I_A = I \quad (2.33)$$

Esta definición nos permite hallar relaciones entre los operadores compuestos (2.28) con ayuda de la ecuación (2.10). Por ejemplo, consideremos

$$\begin{aligned} S(c\gamma, d\delta) &= \sum_{\alpha} S(a^\alpha, a^\alpha), \quad S(c\gamma, d\delta) \sum_{\beta} S(b^\beta, b^\beta) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} S(a^\alpha, a^\alpha) S(c\gamma, d\delta) S(b^\beta, b^\beta) = \sum_{\alpha, \beta} \langle a^\alpha | c\gamma \rangle \langle d\delta | b^\beta \rangle S(a^\alpha, b^\beta) \end{aligned} \quad (2.34)$$

que nos da una expresión de $S(c\gamma, d\delta)$ como una combinación lineal de $S(a^\alpha, b^\beta)$ y de los números $\langle a^\alpha | c\gamma \rangle \langle d\delta | b^\beta \rangle$ cuyo significado físico veremos más adelante.

8. TRAZA

Intentemos obtener información sobre las funciones de transformación $\langle b^\beta | a^\alpha \rangle$ que aparecen al cambiar de representación. Para ello consideramos la expresión

$$\sum_{\beta} S(a^\alpha a^\alpha) S(b^\beta b^\beta) S(c^\gamma c^\gamma) = S(a^\alpha a^\alpha) \left[\sum_{\beta} S(b^\beta b^\beta) \right] S(c^\gamma c^\gamma)$$

válida puesto que nuestra Algebra es asociativa. Utilizando las relaciones (2.10) y (2.31) la igualdad anterior se convierte en

$$\sum_{\beta} \langle a^\alpha | b^\beta \rangle \langle b^\beta | c^\gamma \rangle S(a^\alpha c^\gamma) = \langle a^\alpha | c^\gamma \rangle S(a^\alpha c^\gamma)$$

de donde se deduce que

$$\langle a^\alpha | c^\gamma \rangle = \sum_{\beta} \langle a^\alpha | b^\beta \rangle \langle b^\beta | c^\gamma \rangle \quad (2.35)$$

Evidentemente esta ecuación será válida cualquiera que sea el conjunto completo B de observables sobre cuyos estados unidad se extiende la sumación.

De forma semejante llegaríamos a probar que

$$\langle d^\delta | c^\gamma \rangle = \sum_{\alpha} \langle d^\delta | b^\beta \rangle \langle b^\beta | a^\alpha \rangle \langle a^\alpha | c^\gamma \rangle \quad (2.36)$$

Comparemos ahora la relación (2.34) entre los operadores compuestos y la (2.36) entre las funciones de transformación. Vemos que a cada relación lineal entre los operadores compuestos le corresponde otra de la misma forma, también lineal, entre los coeficientes.

Por consiguiente, existe una cierta dependencia entre los operadores compuestos y las funciones de transformación. Esta dependencia la expresamos por medio de una operación, llamada traza, que, por definición, ha de ser lineal, y se escribe así:

$$\langle d^\delta | c^\gamma \rangle = \text{tr } S(c^\gamma, d^\delta) \quad (2.37)$$

diciendo que $\langle d^\delta | c^\gamma \rangle$ es la traza de $S(c^\gamma d^\delta)$.

El concepto de traza permite simplificar nuestra Algebra de la Medida, ya que toda ecuación del tipo (2.35) ó (2.36) puede ser obtenida a partir de la correspondiente entre operadores (2.34) con sólo tomar la traza.

Si X e Y son dos operadores compuestos cualesquiera, y λ_1 y λ_2 son dos números complejos puesto que la operación traza es lineal se verifica

$$\text{tr}(\lambda_1 X + \lambda_2 Y) = \lambda_1 \text{tr } X + \lambda_2 \text{tr } Y \quad (2.38)$$

Calculemos la traza de un producto de dos operadores de selección compuestos

$$\begin{aligned} \text{tr}[S(a^\alpha, b^\beta) S(c^\gamma, d^\delta)] &= \text{tr} \langle b^\beta | c^\gamma \rangle S(a^\alpha, d^\delta) = \langle b^\beta | c^\gamma \rangle \langle d^\delta | a^\alpha \rangle = \\ &= \text{tr}[S(c^\gamma, d^\delta) S(a^\alpha, b^\beta)] \end{aligned} \quad (2.39)$$

La traza del producto de dos operadores compuestos X e Y es independiente del orden en que los operadores entran en el producto

$$\text{tr } XY = \text{tr } YX \quad (2.40)$$

Observemos que la relación (2.40) es válida para la traza del producto de dos operadores de selección de nuestra Álgebra; pero no podemos conmutar los operadores de cualquier manera cuando hemos de hallar la traza del producto de más de dos operadores. Puesto que el producto de varios operadores compuestos es según (2.31) otro operador compuesto siempre podemos hacer uso de (2.40) considerando el producto de varios operadores como otro operador. Así, por ejemplo,

$$\text{tr } XYZ = \text{tr } [XY] Z = \text{tr } ZXY \quad (2.41)$$

Combinando (2.37) con (2.32) se tiene

$$\text{tr } S(a^\alpha, a^\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.42)$$

Si calculamos la traza de ambos miembros de la relación (2.10) se tiene

$$\sum_{\alpha} \text{tr } S(a^\alpha) = \text{tr } I$$

donde hemos utilizado la definición general (2.33) del operador identidad I . Ahora bien, $\text{tr } S(a^\alpha) = 1$ y, por consiguiente, el primer miembro de la relación anterior es el número de sumandos, o sea, el número de estados unidad N_A de la representación A

$$\text{tr } I = N_A \quad (2.43)$$

Pero puesto que el primer miembro de (2.43) es independiente de la representación elegida, el segundo ha de serlo también

$$N_A = N_B = \dots = N \quad (2.44)$$

$$\text{tr } I = N$$

de donde deducimos que el número de estados unidad de cualquier conjunto completo de observables es siempre el mismo. El número N es infinito en general.

9. OPERADOR HERMITICO CONJUGADO

Atribuimos al símbolo $S(a^\alpha, b^\beta)$ el significado de corresponder al proceso que acepta sistemas en el estado $|b^\beta\rangle$ y los deja en el estado $|a^\alpha\rangle$. Diremos que el operador $S(b^\beta, a^\alpha)$, que representa el proceso inverso de aceptar sistemas en el estado $|a^\alpha\rangle$ y dejarlos en el estado $|b^\beta\rangle$, es el hermítico conjugado del proceso representado por $S(a^\alpha, b^\beta)$.

La operación de hallar el hermítico conjugado de un experimento se designa por una daga de la forma siguiente:

$$[S(b^\beta, a^\alpha)]^+ = S(a^\alpha, b^\beta) \quad (2.45)$$

Evidentemente el operador hermítico conjugado del hermítico conjugado de un operador es el operador inicial.

Un operador es autohermítico cuando es igual a su hermítico conjugado. Por ejemplo, el operador selector simple es autohermítico

$$[S(a^\alpha)]^+ = [S(a^\alpha a^\alpha)]^+ = S(a^\alpha) \quad (2.46)$$

Calculemos ahora, de acuerdo con la definición de operador hermítico conjugado dada, el hermítico conjugado del producto de dos operadores compuestos. El símbolo $S(a^\alpha b^\beta) S(c^\gamma d^\delta)$ acepta los sistemas en el estado $|d^\delta\rangle$, los deja en el estado $|c^\gamma\rangle$; de estos selecciona los que están en el $|b^\beta\rangle$ y luego nos los da en el estado $|a^\alpha\rangle$. El hermítico conjugado ha de representar la operación inversa. Por consiguiente,

$$[S(a^\alpha, b^\beta) S(c^\gamma, d^\delta)]^+ = S(d^\delta, c^\gamma) S(b^\beta, a^\alpha) = [S(c^\gamma d^\delta)]^+ [S(a^\alpha b^\beta)]^+ \quad (2.47)$$

de donde deducimos que el hermítico conjugado de un producto de operadores es el producto, en orden inverso, de los hermíticos conjugados de los operadores.

Queremos extender esta propiedad al producto de un número λ por un operador X de nuestra Algebra

$$[\lambda X]^+ = X^+ \lambda^+ = \lambda^+ X^+ \quad (2.48)$$

ya que un operador y un número conmutan. Para que (2.48) sea válida en el caso en que consideremos el producto de dos operadores compuestos como el producto de la función de transformación por otro operador compuesto necesitamos que

$$\langle b^\beta | c^\gamma \rangle^+ = \langle c^\gamma | b^\beta \rangle \quad (2.49)$$

que constituye un nuevo requisito que ha de satisfacer la función de transformación.

10. PROBABILIDAD

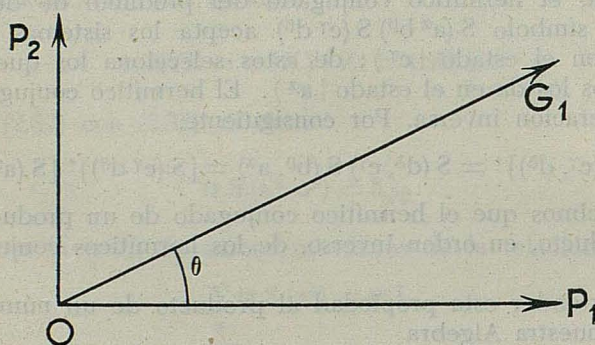
Hemos supuesto en los apartados anteriores que un conjunto de sistemas idénticos llegaban al aparato selector; para establecer las propiedades de los distintos operadores introducidos hasta ahora manejamos un macrosistema. Sin embargo, la Mecánica Cuántica estudia los sistemas que componen el macrosistema; da información sobre un sistema particular. Hay, pues, que relacionar al macrosistema con el sistema, de forma que, aunque nuestros experimentos tengan lugar con macrosistemas, podamos deducir de ellos propiedades del sistema.

Para conseguir este propósito utilizamos el concepto de probabilidad que es un juicio cierto sobre cosas inciertas, y, por consiguiente, la Mecánica Cuántica no deja de ser Ciencia a pesar de su carácter probabilístico.

Nos interesa ante todo hallar la probabilidad $P(a^\alpha, b^\beta)$ de que el estado $|b^\beta\rangle$ esté contenido en el $|a^\alpha\rangle$, concepto que hemos usado al hablar de la función de transformación.

A fin de entender mejor el contenido físico de lo que sigue consideremos, como ejemplo, un haz de luz formado por fotones. Supongamos que la única propiedad de esos fotones que interesa conocer es su polarización A_1 de forma que conocida ésta, ya tenemos totalmente determinado el estado físico de los mismos.

Sea $a_1^{(1)}$ un valor propio de la polarización que corresponde a fotones polarizados en un plano perpendicular al papel y que contenga la dirección OP_1 . Según hemos visto, cualquier otro valor propio de la polarización, $a_1^{(2)}$, re-



presenta fotones ninguno de los cuales es aceptado, o sea, atraviesa el polarizador $S(a_1^{(1)})$ que selecciona los fotones cuya polarización es $a_1^{(1)}$. Físicamente sabemos que esto es así si $a_1^{(2)}$ representa fotones polarizados en un plano normal al papel y que contenga la dirección \vec{OP}_2 perpendicular a \vec{OP}_1 .

Consideremos ahora otro observable, B , al que llamaremos polarización girada, el cual también determina completamente los estados físicos de los fotones. Si $b_1^{(1)}$ es un valor propio de la polarización girada que representa fotones polarizados en un plano que ahora contenga la dirección \vec{OG}_1 , la cual forma un ángulo $\theta \neq \pi/2$ con \vec{OP}_1 , algunos de los fotones aceptados por $S(b_1^{(1)})$ pasarán también el selector $S(a_1^{(1)})$. La probabilidad que buscamos $p(a_1^{(1)}, b_1^{(1)})$ es la que tiene un fotón en el estado $|b_1^{(1)}\rangle$ de atravesar el selector $S(a_1^{(1)})$. Igualmente también tendrá un cierto valor la probabilidad $p(a_1^{(2)}, b_1^{(1)})$ de que los fotones en estado $|b_1^{(1)}\rangle$ atraviesen el selector $S(a_1^{(2)})$, mientras que habrá de ser nula la probabilidad de que los fotones en estado $|a_1^{(1)}\rangle$ atraviesen el selector $S(a_1^{(2)})$ e igual a uno de la probabilidad de que los fotones en estado $|a_1^{(1)}\rangle$ atraviesen el selector $S(a_1^{(1)})$.

Veamos ahora, según esto, cuáles son las propiedades que hemos de imponer a la expresión que tomemos como probabilidad en nuestra Álgebra. En primer lugar

$$P(a^\beta, a^\alpha) = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.50)$$

Puesto que todos los conjuntos completos de observables A, B, C, \dots son igualmente equivalentes para representar las propiedades de los sistemas físicos hemos de imponer la siguiente simetría:

$$P(a^\alpha, b^\beta) = P(b^\beta, a^\alpha) \quad (2.51)$$

y, finalmente, la probabilidad ha de ser un número no negativo

$$P(a^\alpha, b^\beta) \geq 0 \quad (2.52)$$

De acuerdo con lo anterior definimos la probabilidad de la siguiente forma

$$P(a^\alpha, b^\beta) \equiv \langle b^\beta | a^\alpha \rangle \langle a^\alpha | b^\beta \rangle \quad (2.53)$$

que automáticamente satisface las condiciones (2.50) y (2.51). Para que la última relación (2.52) sea verificada hemos de exigir que $\langle a^\alpha | b^\beta \rangle$ sea el complejo conjugado de $\langle b^\beta | a^\alpha \rangle$. Si la operación de hallar el complejo conjugado la designamos por un asterisco * exigimos que

$$\langle a^\alpha | b^\beta \rangle = \langle b^\beta | a^\alpha \rangle^* \quad (2.54)$$

que comparada con (2.49) nos dice que en nuestra Algebra el hermítico conjugado de un número ha de ser igual a su complejo conjugado. De (2.33) deducimos que la probabilidad de que un estado observable esté vacío es nula como era de esperar.

Podemos interpretar ahora los siguientes experimentos:

$$S(a^\alpha, a^\alpha) \quad S(b^\beta, b^\beta) \quad S(a^\alpha, a^\alpha) \quad (2.55)$$

como el experimento $S(a^\alpha, a^\alpha)$ multiplicado por la probabilidad $P(b^\beta, a^\alpha)$ mientras que no podemos dar un significado físico claro a

$$S(b^\beta, b^\beta) \quad S(a^\alpha, a^\alpha) = \langle b^\beta | a^\alpha \rangle \quad S(b^\beta, a^\alpha) \quad (2.56)$$

La relación (2.56) no puede ser interpretada porque la medida de b^β causa una perturbación cuyos efectos no podemos predecir en el estado $|a^\alpha\rangle$. Esta arbitrariedad en la medida corresponde al valor de la fase del número complejo $\langle a^\alpha | b^\beta \rangle$, fase que no modifica en absoluto el valor de la probabilidad (2.53), ya que queda anulada con la de $\langle b^\beta | a^\alpha \rangle$ de acuerdo con la relación (2.54). Si fuera posible conocer esta fase no tendríamos que introducir un formalismo probabilístico. La perturbación impredecible que acompaña todo experimento de medida implica su indivisibilidad. Cualquier intento de estudiar la historia del sistema durante el proceso de medida cambia la naturaleza de la medición que se lleva a cabo.

Y así vemos que hemos construido un Algebra e interpretado su carácter estadístico de acuerdo con las propiedades mencionadas al principio de este capítulo y sin que, en momento alguno, perdiéramos la interpretación física de lo que representábamos con símbolos matemáticos. Sin embargo,

su validez será únicamente comprobada cuando esta teoría dé resultados de acuerdo con los datos experimentales.

Finalmente, mostremos que la probabilidad (2.53) está correctamente normalizada, pues se tiene

$$\left[\sum_{\alpha} P(a^{\alpha}, b^{\beta}) \right] S(b^{\beta}) = \sum_{\alpha} P(a^{\alpha}, b^{\beta}) S(b^{\beta}) = \sum_{\alpha} S(b^{\beta}) S(a^{\alpha}) S(b^{\beta}) = S(b^{\beta}) \left[\sum_{\alpha} S(a^{\alpha}) \right] S(b^{\beta}) = S(b^{\beta})$$

y, por consiguiente,

$$\sum_{\alpha} P(a^{\alpha}, b^{\beta}) = 1 \quad (2.57)$$

que nos dice que el valor de la probabilidad está entre 0 y 1 como era de esperar.

11. OPERADORES OBSERVABLES.—VALOR ESPERADO

Sea A_i un cierto observable de un conjunto completo A . Supongamos que un selector, $S(b^{\beta})$, ha preparado sistemas en el estado $|b^{\beta}\rangle$ y que intentamos hallar el valor del observable A_i en los sistemas que sabemos están en el estado $|b^{\beta}\rangle$. Tal valor lo llamaremos valor esperado de A_i en el estado $|b^{\beta}\rangle$ y lo escribiremos así:

$$\langle A_i \rangle_{b^{\beta}} \quad (2.58)$$

Evidentemente, el valor esperado (2.58) es igual a la suma de los valores a_i^{α} que A_i tiene en los sistemas cuyo estado es $|a^{\alpha}\rangle$ por la probabilidad $P(a^{\alpha}, b^{\beta})$.

$$\langle A_i \rangle_{b^{\beta}} = \sum_{\alpha} a_i^{\alpha} P(a^{\alpha}, b^{\beta}) \quad (2.59)$$

Si conocemos el espectro de valores propios de A_i y los valores de las probabilidades $P(a^{\alpha}, b^{\beta})$ para todo α el valor esperado (2.59) nos permite establecer la relación entre Mecánica Cuántica y los datos experimentales.

Pero evidentemente se verifica que:

$$\text{tr } S(a^{\alpha}) S(b^{\beta}) = \langle a^{\alpha} | b^{\beta} \rangle \text{tr } S(a^{\alpha}, b^{\beta}) = P(a^{\alpha}, b^{\beta}) \quad (2.60)$$

y puesto que la traza es una operación lineal

$$\langle A_i \rangle_{b^{\beta}} = \text{tr} \left\{ \sum_{\alpha} a_i^{\alpha} S(a^{\alpha}) S(b^{\beta}) \right\} = \text{tr } A_i S(b^{\beta}) \quad (2.61)$$

donde hemos definido el operador observable A_i , que hasta ahora carecía de símbolo matemático, mediante la expresión

$$A_i \equiv \sum_{\alpha} a_i^{\alpha} S(a^{\alpha}) \quad (2.62)$$

combinación lineal de selectores. La relación (2.62) implica que la cualidad A_i está totalmente determinada por los experimentos que miden sus valores propios y por su espectro.

Ahora bien, si A_i es un observable, su espectro $a_i^{(\alpha)}$ ha de estar formado por números reales, pues éstos son los únicos números que pueden resultar de medir el valor de un atributo en un sistema

Si calculamos el hermítico conjugado de un observable A_i se tiene

$$A_i^+ = \left[\sum_{\alpha} a_i^{(\alpha)} S(a^{\alpha}) \right]^+ = \sum_{\alpha} a_i^{(\alpha)*} S(a^{\alpha})^+ = \sum_{\alpha} a_i^{(\alpha)} S(a^{\alpha}) = A_i \quad (2.63)$$

puesto que $a_i^{(\alpha)*} = a_i^{(\alpha)*} = a_i^{(\alpha)}$. Por consiguiente, un operador observable es siempre autohermítico. Introducimos las distintas operaciones algebraicas en los operadores observables utilizando su definición (2.62), con la cual damos sentido a expresiones como

$$A_i^2, \quad A_i + A_j, \quad A_i B_j, \dots$$

Definiremos una función $f(A_i)$ de un observable exigiendo que su valor esperado sea

$$\langle f(A_i) \rangle_{b\beta} = \sum_{\alpha} f(a_i^{(\alpha)}) P(a^{\alpha}, b^{\beta}) \quad (2.64)$$

donde $f(a_i^{(\alpha)})$ es la función cuyo argumento es el valor propio $a_i^{(\alpha)}$ del operador A_i . Para que se verifique una relación como (2.61) definimos el operador función de otro operador observable de la siguiente forma:

$$f(A_i) = \sum_{\alpha} f(a_i^{(\alpha)}) S(a^{\alpha}) \quad (2.65)$$

Consideremos concretamente el caso del operador recíproco de A_i , que será:

$$A_i^{-1} \equiv \sum_{\alpha} \frac{1}{a_i^{(\alpha)}} S(a^{\alpha}) \quad (2.66)$$

Evidentemente, tal operador existe cuando ninguno de los valores propios de A_i es nulo, ya que de lo contrario los números $\frac{1}{a_i^{(\alpha)}}$ no estarían todos definidos.

El operador recíproco A_i^{-1} satisface las siguientes relaciones:

$$A_i^{-1} A_i = A_i A_i^{-1} = \sum_{\alpha} a_i^{(\alpha)} \frac{1}{a_i^{(\alpha)}} S(a^{\alpha}) = \sum_{\alpha} S(a^{\alpha}) = I \quad (2.67)$$

y, por consiguiente, si existe, su producto por la derecha o por la izquierda con A_i es el operador unidad.

Si X e Y son dos operadores observables cualesquiera se ha de verifi-

car, para que se cumpla (2.67), que el recíproco del producto de los mismos $(XY)^{-1}$ es el producto de los recíprocos en orden inverso

$$(XY)^{-1} = Y^{-1} X^{-1} \quad (2.68)$$

Tratemos, siguiendo a NEUMANN, de dar sentido físico a la función de un observable. Si A_i es un atributo, y $f(\lambda)$ una función cualquiera, la magnitud $f(A_i)$ se obtiene midiendo el valor de A_i , y si $a_i^{(z)}$ es tal valor, $f(A_i)$ tiene el valor $f(a_i^{(z)})$. Estas dos cantidades A_i y $f(A_i)$ son medibles simultáneamente porque existe un aparato que los mide a la vez, pero sus respectivos valores hay que calcularlos de la lectura en el aparato de forma distinta. De manera semejante podemos construir a partir de una función de dos parámetros $f(\lambda, \mu)$ una función de dos observables compatibles $f(A_i, A_j)$ o, en general, una función $f(A)$ de todos los observables del conjunto completo A . Sin embargo, parece no tener sentido físico querer formar funciones de observables no compatibles, es decir, no está nada claro su significado físico.

12. CONMUTADORES

Se llama conmutador de dos operadores X e Y cualesquiera a la diferencia $XY - YX$. Utilizamos un paréntesis cuadrado para designarlo:

$$[X, Y] \equiv XY - YX \quad (2.69)$$

Ahora bien, los operadores de selección de un conjunto completo de observables compatibles conmutan, es decir, su conmutador es nulo, y, por consiguiente, también conmutarán los operadores observables definidos por (2.61).

$$[A_i, A_j] = 0$$

para todo i y j del conjunto de observables compatibles. Diremos entonces que los operadores A_i y A_j son cinemáticamente independientes, puesto que al medir sus valores en un sistema sobre una misma superficie espacial σ tales observables son compatibles.

Sin embargo, si los operadores son de distinto conjunto completo de observables sus conmutadores no son nulos en general, aunque todos estén particularizados en una misma superficie espacial σ .

$$[A_i, B_j] \neq 0$$

Tales operadores son cinemáticamente dependientes. La compatibilidad de dos operadores observables se expresa algebraicamente por medio de su conmutador. Si éste es nulo, los observables son compatibles; de lo contrario, no lo son. Definiremos el anticonmutador de X e Y por $XY + YX$, y lo designaremos por medio de un paréntesis curvo:

$$\{X, Y\} \equiv XY + YX \quad (2.70)$$

13. REPRESENTACION MATRICIAL DE OPERADORES

El Algebra de la Medida presentada en los párrafos anteriores es formalmente equivalente a un álgebra de matrices infinitas. En efecto, según vamos a ver, podemos hacer corresponder a cada operador una matriz; a las operaciones algebraicas —suma, multiplicación— entre operadores las mismas operaciones entre matrices. Y así decimos que estas matrices son representaciones de los operadores, de forma que en todos nuestros cálculos podemos manejar matrices en lugar de operadores abstractos.

De acuerdo con la definición de operador observable se tiene:

$$B_i = \sum_{\alpha} b_i^{(\alpha)} S(b^{\alpha}, b^{\alpha}) \quad (2.71)$$

Ahora bien, el selector $S(b^{\alpha}, b^{\alpha})$ puede ser escrito como una combinación lineal de los $S(a^{\beta}, a^{\gamma})$ de la siguiente forma:

$$S(b^{\alpha}, b^{\alpha}) = \sum_{\beta, \gamma} \langle a^{\beta} | b^{\alpha} \rangle \langle b^{\alpha} | a^{\gamma} \rangle S(a^{\beta}, a^{\gamma})$$

Si llamamos elemento de matriz del operador B_i entre los estados $|a^{\beta}\rangle$ y $|a^{\gamma}\rangle$ de la representación A al número complejo $\langle a^{\beta} | B_i | a^{\gamma} \rangle$ definido así:

$$\langle a^{\beta} | B_i | a^{\gamma} \rangle \equiv \sum_{\alpha} \langle a^{\beta} | b^{\alpha} \rangle b_i^{(\alpha)} \langle b^{\alpha} | a^{\gamma} \rangle \quad (2.72)$$

el operador observable B_i adquiere la siguiente forma:

$$B_i = \sum_{\beta, \gamma} \langle a^{\beta} | B_i | a^{\gamma} \rangle S(a^{\beta}, a^{\gamma}) \quad (2.73)$$

El operador B_i que respecto a los selectores $S(b^{\alpha})$ está caracterizado por el conjunto de sus valores propios, en relación a los selectores $S(a^{\beta}, a^{\gamma})$ viene determinado por un conjunto “cuadrado” de números $\langle a^{\beta} | B_i | a^{\gamma} \rangle$ los cuales, debidamente ordenados, forman la matriz que lo representan.

$$\left(\begin{array}{cccc} \langle a^1 | B_i | a^1 \rangle & \langle a^1 | B_i | a^2 \rangle & \dots & \dots \\ \langle a^2 | B_i | a^1 \rangle & \langle a^2 | B_i | a^2 \rangle & \dots & \dots \\ \langle a^3 | B_i | a^1 \rangle & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \quad (2.74)$$

la cual tiene, en general, infinitas filas y columnas.

En primer lugar observemos que en la representación B la matriz que representa el observable B_i es diagonal ya que

$$\langle b^{\beta} | B_i | b^{\gamma} \rangle = b_i^{(\beta)} \delta_{\beta\gamma} \quad (2.75)$$

y sus elementos diagonales son los valores propios de B_i . Es evidente que si hubiéramos aceptado observables con espectro continuo éstos no tendrían representación matricial, ya que no podríamos numerar sus valores propios para formar la matriz diagonal que los represente.

Es muy fácil ver que el operador $X + Y$ suma de dos operadores X e Y le corresponde la matriz suma de las matrices que representan a esos operadores, puesto que si

$$X = \sum_{\beta, \gamma} \langle a^\beta | X | a^\gamma \rangle S(a^\beta, a^\gamma)$$

$$Y = \sum_{\beta, \gamma} \langle a^\beta | Y | a^\gamma \rangle S(a^\beta, a^\gamma)$$

se tiene

$$X + Y = \sum_{\beta, \gamma} \{ \langle a^\beta | X | a^\gamma \rangle + \langle a^\beta | Y | a^\gamma \rangle \} S(a^\beta, a^\gamma) =$$

$$= \sum_{\beta, \gamma} \langle a^\beta | X + Y | a^\gamma \rangle S(a^\beta, a^\gamma)$$

y, por consiguiente, dada la ortogonalidad de los selectores,

$$\langle a^\beta | X + Y | a^\gamma \rangle = \langle a^\beta | X | a^\gamma \rangle + \langle a^\beta | Y | a^\gamma \rangle \quad (2.76)$$

De idéntica forma veríamos que la matriz correspondiente al producto de dos operadores es el producto de las matrices que los representan

$$\langle a^\beta | XY | a^\gamma \rangle = \sum_{\alpha} \langle a^\beta | X | a^\alpha \rangle \langle a^\alpha | Y | a^\gamma \rangle \quad (2.77)$$

Estudiemos el significado de operador hermítico X^+ de uno dado X en esta representación matricial.

$$X^+ = \sum_{\beta, \gamma} \langle a^\beta | X | a^\gamma \rangle^+ S(a^\beta, a^\gamma) = \sum_{\beta, \gamma} \langle a^\gamma | X | a^\beta \rangle^* S(a^\beta, a^\gamma)$$

y, por consiguiente,

$$\langle a^\beta | X^+ | a^\gamma \rangle = \langle a^\gamma | X | a^\beta \rangle^* \quad (2.78)$$

El operador hermítico de X está representado por una matriz compleja conjugada y transpuesta de la que representa el operador X . Si designamos con \sim la operación de transposición, se tiene:

$$X^+ = \tilde{X}^* \quad (2.79)$$

cuando utilizamos la representación matricial de los operadores.

Finalmente, investiguemos el contenido de la traza en esta representación

$$\text{tr } X = \sum_{\beta, \gamma} \langle a^\beta | X | a^\gamma \rangle \text{tr } S(a^\beta, a^\gamma) = \sum_{\beta} \langle a^\beta | X | a^\beta \rangle \quad (2.80)$$

La traza de un operador es la suma de sus elementos diagonales. Puesto que $\text{tr } X$ fue definida independientemente de la representación elegida, la

suma de los elementos diagonales de la matriz que representa un operador es la misma en cualquier representación; su valor es la suma de los valores propios del operador. Se tiene, además,

$$\text{tr } X^* = (\text{tr } X)^* \quad (2.81)$$

Al operador nulo le corresponde una matriz cuyos elementos son todos nulos; el operador unidad está representado por una matriz diagonal cuyos elementos no nulos son iguales a uno.

Los elementos diagonales de la representación matricial de un observable tienen un claro significado físico, pues, como se desprende (2.72), son iguales al valor esperado del observable

$$\langle a^{\beta} | B_i | a^{\beta} \rangle = \langle B_i \rangle a^{\beta} \quad (2.82)$$

Hemos visto cómo un operador observable es representado por una matriz cuando fijamos la representación, es decir, cuando fijamos los estados unidad $|a^{\alpha}\rangle$ de la representación. Estudiemos ahora cómo se transforma tal matriz cuando cambiamos de representación,

$$X = \sum_{\beta, \gamma} \langle a^{\beta} | X | a^{\gamma} \rangle S(a^{\beta}, a^{\gamma}) = \sum_{\beta, \gamma} \langle b^{\beta} | X | b^{\gamma} \rangle S(b^{\beta}, b^{\gamma})$$

Si expresamos el operador $S(b^{\beta}, b^{\gamma})$ en función de los $S(a^{\beta}, a^{\gamma})$ se verifica

$$\langle a^{\beta} | X | a^{\gamma} \rangle = \sum_{\alpha, \delta} \langle a^{\beta} | b^{\alpha} \rangle \langle b^{\alpha} | X | b^{\delta} \rangle \langle b^{\delta} | a^{\gamma} \rangle \quad (2.83)$$

Las funciones de transformación $\langle a^{\beta} | b^{\alpha} \rangle$ son los coeficientes que nos llevan de una representación a otra.

Ha quedado establecida una relación entre observables y matrices: a cada observable le podemos hacer corresponder una matriz que tiene, bajo todas las operaciones algebraicas, las mismas propiedades que los operadores. Establecemos también la relación recíproca y ampliamos el Algebra de la Medida para decir que a cada matriz de esta clase le corresponde un operador. Con las funciones de transformación $\langle a^{\beta} | b^{\alpha} \rangle$ podemos formar una matriz

$$\begin{pmatrix} \langle a^1 | b^1 \rangle & \langle a^1 | b^2 \rangle & \dots & \dots & \dots \\ \langle a^2 | b^1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

que diremos representa un operador U_{BA} de transformación cuyos elementos de matriz son $\langle a^{\alpha} | b^{\beta} \rangle$

$$\langle a^{\alpha} | U_{BA} | a^{\beta} \rangle = \langle a^{\alpha} | b^{\beta} \rangle \quad (2.85)$$

El operador representado por la matriz formada con las funciones de transformación $\langle b^\alpha | a^\beta \rangle$ es el operador recíproco U_{BA}^{-1}

$$\langle a^\alpha | U_{BA}^{-1} | a^\beta \rangle = \langle b^\alpha | a^\beta \rangle \quad (2.86)$$

como puede verse fácilmente con ayuda de (2.83) y (2.85).

Si llamamos X^B la matriz de X en la representación B , la ecuación (2.83) se convierte en

$$X^A = U_{BA} X^B U_{BA}^{-1} \quad (2.87)$$

de donde deducimos que la transformación que nos lleva de una representación X^B a otra X^A de un mismo operador es una transformación de semejanza.

Únicamente nos queda generalizar esta representación matricial y hacerla válida para otros operadores que no son observables. Siempre que podamos escribir el operador de la forma (2.73) diremos que los coeficientes de los selectores son los elementos de matriz de la que representa al operador. Así, para un selector se tiene:

$$S(a^\alpha, a^\delta) = \sum_{\beta, \gamma} \delta_{\alpha, \beta} \delta_{\gamma, \delta} S(a^\beta, a^\gamma)$$

y, por consiguiente,

$$\langle a^\beta | S(a^\alpha, a^\delta) | a^\gamma \rangle = \delta_{\alpha, \beta} \delta_{\gamma, \delta} \quad (2.88)$$

14. GEOMETRÍA DE LOS ESTADOS

El operador compuesto $S(a^\beta, a^\alpha)$, según ya vimos en (2.22), podía ser interpretado como el operador que creaba el sistema en el estado observable $|a^\beta\rangle$ cuando hacíamos actuar en el estado vacío del sistema. Y así establecemos la relación fundamental que da la geometría de los estados $|a^\beta\rangle$, símbolos que hasta ahora no tenían carácter matemático alguno.

$$|a^\beta\rangle = S(a^\beta, a^\alpha) |a^\alpha\rangle \quad (2.89)$$

Al operador compuesto $S(a^\beta, a^\alpha)$ lo llamaremos operador de creación, y a partir de ahora lo designaremos por

$$\chi^+(a^\beta) \equiv S(a^\beta, a^\alpha) \quad (2.90)$$

Si recordamos la definición de hermítico conjugado, el operador compuesto $S(a^\alpha, a^\beta)$ debe ser el operador que aniquila el sistema en el estado $|a^\beta\rangle$ para darnos el vacío. El operador de aniquilación

$$\chi(a^\beta) \equiv S(a^\alpha, a^\beta) \quad (2.91)$$

define los mismos estados de una forma dual a la (2.89) mediante la relación

$$\langle a^\beta | \equiv \langle a^\alpha | \chi(a^\beta) \quad (2.92)$$

Evidentemente, la realidad física que tratamos de representar con nuestra Algebra de la Medida no nos obliga a definir la relación entre los estados de esta forma, ni a dar un significado matemático al símbolo $|a^\beta\rangle$, ni a definir los símbolos duales (2.92). Pero si lo hacemos, toda el Algebra de la Medida obtenida hasta ahora puede ser reproducida mediante reglas muy sencillas; para conseguirlo es preciso introducir únicamente dos clases de productos entre estos estados.

Definiremos el producto escalar de un estado $|a^\beta\rangle$ por otro $\langle b^\alpha|$ haciéndolo igual a la función de transformación $\langle b^\alpha | a^\beta \rangle$.

$$\langle b^\alpha | \cdot | a^\beta \rangle \equiv \langle b^\alpha | a^\beta \rangle \quad (2.93)$$

Definiremos el producto operacional de un estado $|a^\beta\rangle$ por otro $\langle b^\alpha|$ de forma que sea igual al operador compuesto $S(a^\beta, b^\alpha)$ y lo escribimos así:

$$|a^\beta\rangle \langle b^\alpha| \equiv S(a^\beta b^\alpha) \quad (2.94)$$

Toda el Algebra de la Medida es ahora una consecuencia inmediata de estas definiciones. Por ejemplo, la relación fundamental (2.31) se obtiene utilizando (2.93)

$$\begin{aligned} (|c^\gamma\rangle \langle d^\delta|) (|b^\beta\rangle \langle a^\alpha|) &= |c^\gamma\rangle \langle d^\delta | b^\beta \rangle \langle a^\alpha| = \\ &= \langle d^\delta | b^\beta \rangle |c^\gamma\rangle \langle a^\alpha| \end{aligned} \quad (2.95)$$

Investiguemos el significado del operador observable A_1 actuando sobre $|a^\alpha\rangle$. Con la expresión (2.62) se obtiene

$$A_1 |a^\beta\rangle = \left(\sum_{\alpha} a_1^{(\alpha)} |a^\alpha\rangle \langle a^\alpha| \right) |a^\beta\rangle = \sum_{\alpha} a_1^{(\alpha)} |a^\alpha\rangle \delta_{\alpha\beta} = a_1^{(\beta)} |a^\beta\rangle$$

es decir, el espectro de un observable está formado por los valores propios de la ecuación

$$A_1 |a^\beta\rangle = a_1^{(\beta)} |a^\beta\rangle \quad (2.96)$$

para cualquier observable A_1 del conjunto completo de observables compatibles A . Por consiguiente, los estados unidad de la representación A son los estados propios de *todos* los observables del conjunto completo A . Decimos que el valor propio $a_1^{(\beta)}$ pertenece al estado $|a^\beta\rangle$.

Se verifica igualmente la relación hermítica conjugada de la anterior

$$\langle a^\beta | A_1 = \langle a^\beta | a_1^{(\beta)} \quad (2.97)$$

Comparando (2.62) con (2.20) y teniendo en cuenta (2.33) vemos que el operador unidad I es el operador cuyo espectro está formado por unos. Y así siempre se tiene:

$$I |c^\gamma\rangle = |c^\gamma\rangle \quad (2.98)$$

para cualquier representación, puesto que

$$I = \sum_{\beta} |b^{\beta}\rangle \langle b^{\beta}| = \sum_{\gamma} |c^{\gamma}\rangle \langle c^{\gamma}| = \dots \quad (2.99)$$

Ecuaciones como (2.35) son ahora muy fáciles de obtener

$$\begin{aligned} \langle a^{\alpha} | c^{\gamma} \rangle &= \langle a^{\alpha} | \cdot | c^{\gamma} \rangle = \langle a^{\alpha} | \cdot I | c^{\gamma} \rangle = \\ &= \langle a^{\alpha} | \left(\sum_{\beta} |b^{\beta}\rangle \langle b^{\beta}| \right) | c^{\gamma} \rangle = \sum_{\beta} \langle a^{\alpha} | b^{\beta} \rangle \langle b^{\beta} | c^{\gamma} \rangle \end{aligned}$$

Tratemos de expresar los estados unidad de una representación $|a^{\alpha}\rangle$ por medio de los estados unidad de otra $|b^{\beta}\rangle$

$$|a^{\alpha}\rangle = I |a^{\alpha}\rangle = \left(\sum_{\beta} |b^{\beta}\rangle \langle b^{\beta}| \right) |a^{\alpha}\rangle = \sum_{\beta} \langle b^{\beta} | a^{\alpha} \rangle |b^{\beta}\rangle \quad (2.100)$$

Al cambiar de representación los estados unidad $|a^{\alpha}\rangle$ se transforman como vectores contravariantes en un espacio en que los estados unidad $|b^{\beta}\rangle$ son vectores unidad. Las funciones de transformación $\langle b^{\beta} | a^{\alpha} \rangle$ son las componentes del vector $|a^{\alpha}\rangle$ sobre los vectores $|b^{\beta}\rangle$.

Los estados duales $\langle a^{\alpha} |$ se transforman al cambiar de representación como vectores covariantes, mientras que el producto escalar de dos vectores se transforma como un escalar y el producto operacional de dos vectores se transforma como una matriz, lo cual era de esperar, ya que los operadores admiten, en general, una representación matricial.

Al tratar de cambiar de representación para el estado vacío, de acuerdo con (2.33) llegamos a que el estado vacío es el mismo en cualquier representación

$$|a^0\rangle = |b^0\rangle \quad (2.101)$$

lo cual, evidentemente, corresponde a lo que nuestra intuición predecía, ya que en el vacío los observables no tienen nada que distinguir. No tendremos ya que expresar la representación cuando nos referimos al vacío y, por consiguiente, tal estado será designado por el símbolo

$$|0\rangle \quad (2.102)$$

De acuerdo con (2.32) decimos que los vectores unidad de una misma representación son ortogonales entre sí dos a dos.

15. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Los estados unidad $|a^{\alpha}\rangle$, correspondientes a los estados físicos en que puede aparecer nuestro sistema cuando medimos el conjunto completo de observables compatibles A, son vectores de un cierto espacio y cumplen la relación

$$\langle a^{\alpha} | a^{\alpha} \rangle = 1$$

Diremos, pues, que los estados físicos están representados por vectores de longitud unidad o también por vectores normalizados a la unidad.

Si en lugar de medir los observables A hubiéramos intentado medir el valor de los observables B, los estados en que nuestro sistema aparecería son los $|b^\alpha\rangle$ para cualquier α , y también estarán normalizados a la unidad de acuerdo con $\langle b^\alpha | b^\alpha \rangle = 1$.

¿En qué estado está nuestro sistema si aún no hemos hecho ninguna medición? No lo sabemos; llamémosle $|\varphi\rangle$. El principio de superposición nos dice que $|\varphi\rangle$ es un vector combinación lineal de los vectores unidad $|a^\alpha\rangle$ de cualquier representación

$$|\varphi\rangle = \sum_{\alpha} \varphi(a^\alpha) |a^\alpha\rangle \quad (2.103)$$

Los estados $|\varphi\rangle$ deben ser también considerados como vectores unidad de una representación que desconocemos; y, por consiguiente, han de tener las mismas propiedades que los $|a^\alpha\rangle$. Concretamente, han de tener longitud unidad. Este principio de superposición que aparece en la Mecánica Cuántica es de una naturaleza totalmente distinta del que se encuentra en la Mecánica Clásica donde también podemos hablar, por ejemplo, de superposición de ondas. Las analogías pueden ocasionar graves errores.

El número $\varphi(a^\alpha)$ se llama función de onda del estado $|\varphi\rangle$ en la representación A y evidentemente se verifica

$$\varphi(a^\alpha) = \langle a^\alpha | \varphi \rangle \quad (2.104)$$

como puede verse multiplicando $|\varphi\rangle$ por I (2.99). Esto indica que

$$|\langle a^\alpha | \varphi \rangle|^2 = \varphi^*(a^\alpha) \varphi(a^\alpha)$$

es la probabilidad de que nuestro sistema aparezca en el estado $|a^\alpha\rangle$ cuando medimos los observables A. Experimentalmente podemos obtener el valor de esta probabilidad, pero nunca $\varphi(a^\alpha)$ cuya fase quedará totalmente desconocida.

Las funciones de onda determinan completamente el estado físico del sistema. Pero mientras podemos hablar de estado vector sin fijar las coordenadas, el concepto de función de onda lleva implícito haber fijado la representación. La manera de proceder con independencia de las coordenadas, es decir, con carácter invariante, fuertemente orientada hacia lo geométrico, trae consigo importantes ventajas formales.

Las funciones de onda $\varphi(a^\alpha)$ son las componentes del vector estado $|\varphi\rangle$ en los vectores unidad $|a^\alpha\rangle$ de la representación A, y, por consiguiente, representan el estado físico del sistema. Podemos representar el vector $|\varphi\rangle$ por medio de una matriz de una columna.

$$\begin{pmatrix} \varphi(a^1) \\ \varphi(a^2) \\ \vdots \\ \varphi(a^\alpha) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

De esta forma el vector dual $\langle \varphi |$ está representado por la matriz hermítica conjugada de la anterior

$$(\varphi^*(a^1) \varphi^*(a^2) \dots \varphi^*(a^\alpha) \dots) \quad (2.106)$$

Estos vectores pueden ser manejados como matrices, con lo cual hallamos fácilmente representaciones de los productos escalar y operacional de los estados.

En particular la función de ondas del estado $|a^\beta\rangle$ en la representación A es $\delta_{\beta\alpha}$. Las funciones de transformación también son funciones de onda que representan los vectores unidad de una representación en otra representación.

La normalización a la unidad del vector estado $|\varphi\rangle$ implica que su función de onda en cualquier representación satisface la siguiente relación

$$1 = \langle \varphi | \varphi \rangle = \sum_{\alpha} \varphi(a^\alpha) \varphi^*(a^\alpha) \quad (2.107)$$

Estudiemos el significado físico de la superposición de estados. Decimos que un fotón está en cierto estado de polarización cuando se le ha hecho pasar por ciertos polarizadores apropiados; hemos tomado la forma de preparar el estado del sistema como la definición del estado considerado. Pero al introducir el carácter estadístico en esta Álgebra, consideramos que el fotón en estado $|b^{(1)}\rangle$ (véase apartado 10) tenía cierta probabilidad de pasar el selector que preparaba fotones en estado $|a^{(1)}\rangle$. Existe una cierta relación, que es el principio de superposición (2.103) y (2.104), por la que un sistema que se encuentra en un estado determinado puede también ser considerado como teniendo una cierta probabilidad de estar en muchos estados. Inversamente un número cualquiera de estados pueden ser superpuestos para dar un nuevo estado provisto que se verifique la relación de normalización; el nuevo estado está totalmente determinado cuando se conoce en su función de onda; las propiedades de un estado formado mediante superposición son, en cierto sentido, intermedias de las que tenían los estados componentes.

Los mismos estados unidad pueden ser considerados como un caso límite de superposición. Advirtamos que siguiendo la notación introducida en (2.103) los estados unidad $|a^\beta\rangle$ debieran ser representados por $|\delta_\beta\rangle$, puesto que su función de ondas es $\delta_{\beta\alpha}$.

Dos vectores estado $|\varphi_1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle$ serán paralelos cuando, en cualquier representación, sus componentes, es decir, las funciones de onda, sean proporcionales. Se verifica entonces

$$\varphi_1(a^\alpha) = \mu \varphi_2(a^\alpha) \quad (2.108)$$

Si $|\varphi_1\rangle$ está normalizado a uno, se tiene:

$$1 = \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = \mu \mu^* \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle \quad (2.109)$$

El vector $|\varphi_2\rangle$ es normalizable si $|\mu|^2$ es finito; pero sólo presenta el estado físico cuando ha sido normalizado a la unidad. Un vector cuyo producto escalar por sí mismo es infinito, no es susceptible de ser normalizado a la unidad y, por consiguiente, no corresponde a ninguna situación física.

¿Cómo podemos saber si un macrosistema está formado por un conjunto

de sistemas todos en el mismo estado? La respuesta está contenida en la interpretación de la ecuación (2.89), o, también, en el significado de los operadores compuestos (2.21). Para obtener conjuntos de sistemas todos en el mismo estado es suficiente producirlos por medio de idénticos experimentos.

Cuando se efectúa una medición de un observable A_1 en un sistema, éste es perturbado, y su estado después de la medición difiere del estado inicial. No hay más que un caso en que la observación no modifica el estado de un sistema, y es cuando el estado del mismo es un estado propio del observable; entonces existe una probabilidad unidad, es decir, estamos totalmente seguros de obtener como resultado de la medición un cierto valor propio del observable.

Por consiguiente, una medición modifica el estado del sistema. Para realizar otra medición en las mismas circunstancias hemos de volver a preparar el sistema en el mismo estado inicial, o sea, debemos hacerle pasar a través de las mismas máquinas que la prepararon inicialmente, ya que, por definición, esto es preparar un sistema en el mismo estado. De hecho, en un laboratorio producimos, por ejemplo, un haz de electrones —todos ellos en el mismo estado $|\varphi\rangle$, pues han salido de una misma máquina— en los cuales se llevan a cabo las mediciones sucesivas. Puesto que por el principio de superposición $|\varphi\rangle$ puede ser considerado como combinación de estados propios de A_1 , al hacer sucesivas mediciones de A_1 en los sistemas del haz no obtendremos siempre el mismo valor propio de A_1 , pero existirá una cierta probabilidad de obtener cada uno de los valores del espectro de A_1 . Y así, repitiendo indefinidamente el proceso de medir A_1 en sistemas en estado $|\varphi\rangle$, se obtendrá el valor esperado, $\langle A_1 \rangle_\varphi$, como resultado de tales mediciones.

Recordando el significado de función de onda y su relación con probabilidad deducimos

$$\langle A_1 \rangle_\varphi = \sum_a a_1 \langle \varphi | a^1 | \varphi \rangle^2 = \langle \varphi | A_1 | \varphi \rangle \quad (2.110)$$

por lo que el valor esperado de una cantidad en un estado es el elemento de matriz del operador correspondiente en tal estado. La conexión entre la teoría y el experimento se establece al considerar que tal valor esperado es el valor medio de sucesivas mediciones del observable en el conjunto de sistemas idénticos preparados mediante los mismos experimentos.

Consideremos ahora el problema recíproco. En un laboratorio producimos un conjunto de sistemas idénticos: ¿en qué estado se hallan? Mediremos en ese conjunto el valor medio —igual al esperado— de un conjunto completo de observables A cuyos espectros conocemos. Mediante (2.110) calculamos la función de onda $\varphi(a^2)$ a partir de esos datos (su fase no estará determinada), y de ella con (2.103) deducimos el estado de los sistemas producidos en el laboratorio.

Así, pues, en la Cinemática Cuántica encontramos dos clases de cantidades: los observables A y los estados $|\varphi\rangle$. En los capítulos siguientes estudiaremos algunas propiedades generales de los mismos.

PREPARACION Y PROPIEDADES DEL TETRATIONATO TALIOSO

por LUIS LOSTAO CAMON

I. — INTENTO DE PREPARACION DE TETRATIONATO TALICO

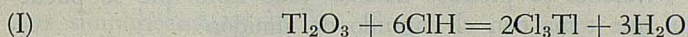
En un trabajo previo (1), al describir nuestros intentos para la preparación del tetrionato férrico, decíamos que siempre que se encontraban en presencia iones hierro trivalentes, y iones tetrionato, se produce una reducción del hierro férrico a ferroso con la consiguiente oxidación del tetrionato a sulfato. El hecho de que el potencial normal de oxidación de la reacción: $Tl^{+++} + 2e = Tl + sea$ superior al de la reacción $Fe^{+++} + 1e = Fe^{++}$, nos indica que el talio trivalente es más oxidante que el hierro trivalente y que, por lo tanto, la preparación del tetrionato tálico no será posible, puesto que en este caso también se producirá la oxidación de los iones tetrionato a sulfato.

Sin embargo, para comprobarlo experimentalmente, planteamos una experiencia de preparación de tetrionato tálico.

Como producto de partida, disponemos de óxido tálico Tl_2O_3 , y con él preparamos primeramente una sal tálica que posteriormente trataremos con tetrionato de bario.

Las sales tálicas son todas muy inestables. El sulfato se descompone en solución acuosa (2). Los haluros, debido a la gran tendencia del talio trivalente, a pasar al estado talioso son relativamente inestables. El cloruro es estable en solución acuosa, perdiendo cloro a $40^\circ C$ (3), y por ello lo emplearemos como producto de partida.

Para su preparación empleamos la reacción:



que realizamos con las siguientes cantidades de partida: 0,45 gramos de Tl_2O_3 y 0,219 gramos de ClH . Los 0,219 gramos de ClH corresponden a 0,51 mls. de clorhídrico concentrado de 36 % en peso de ClH y densidad 1,18. Con estas cantidades de partida se obtendrán 0,62 gramos de cloruro tálico.

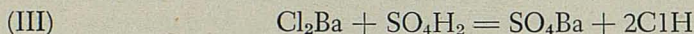
Sobre los 0,45 gramos de óxido tálico, colocados en un tubo de ensayo, agregamos los 0,51 mls. de ácido clorhídrico. La disolución es rápida y, cuando se ha logrado, agregamos agua destilada para aumentar el volumen. Queda, entonces, una solución transparente de ligero color amarillo y que da, como es lógico, reacción de iones Tl^{+++} .

Con objeto de no disminuir el rendimiento, a la vez que se evitan operaciones, no procedemos a la cristalización del cloruro tálico, sino que empleamos su disolución así obtenida, para intentar la preparación del tetrionato tálico.

La preparación de éste la haremos análogamente a la del tetratiónato de aluminio (4), según la reacción:



con tratamiento posterior de sulfúrico para eliminar el bario, quedando entonces ClH en libertad:

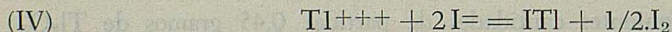


Como suponemos, por otra parte, que el tetratiónato reducirá el talio trivalente a monovalente, y éste precipitará al estado de cloruro talioso insoluble, entorpeciendo la marcha de la experiencia, hacemos la reacción a la inversa, es decir, tratando la solución de cloruro tálico con ácido tetratiónico, lo que equivale a tratar primeramente el tetratiónato de bario con sulfúrico para eliminar el bario y obtener así la disolución acuosa de ácido tetratiónico.

La solución del cloruro tálico que tenemos es de 0,62 gramos: para reacción con la misma se necesitan 1,19 gramos de tetratiónato de bario y, por lo tanto, los 0,411 gramos de bario que hay en él, se precipitarán con 0,294 gramos de sulfúrico, que equivalen a 0,16 mls. de sulfúrico 36 N.

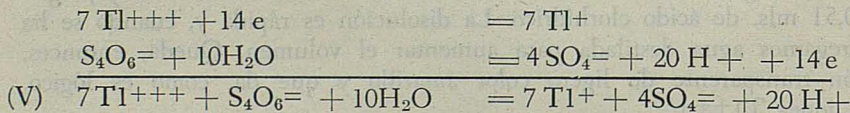
Preparamos solución saturada en agua de los 1,19 gramos de tetratiónato de bario y sobre ella agregamos los 0,16 mls. de sulfúrico concentrado; centrifugamos para separar el precipitado de sulfato de bario formado y el líquido que sobrenada lo filtramos sobre la disolución de los 0,62 gramos de cloruro tálico. En seguida se forma un precipitado blanco, que se deposita en el fondo del tubo de ensayo en que se realiza la operación, y sobre él queda un líquido incoloro y transparente.

Este líquido da reacción positiva de iones $S_4O_6=$ y Tl^+ , y no da reacción de Tl^{+++} . La reducción ha sido, pues, completa y muy rápida, ya que si quedase algo de ion Tl^{+++} , al añadir yoduro potásico quedaría yodo en libertad y, sin embargo, éste no se reconoce con engrudo de almidón. La identificación cualitativa de los iones Tl^{+++} y Tl^+ , se realiza tratando la solución, que se estudia con yoduro potásico. En ambos casos se produce un precipitado amarillo de yoduro talioso, pero si hay talio trivalente se produce además yodo libre que se puede reconocer por el color azul que toma con el engrudo de almidón:

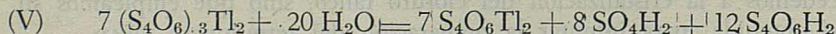


El hecho de que la solución dé positiva la reacción de Tl^+ al tratar con IK, se debe a que el yoduro talioso es todavía más insoluble que el cloruro.

La reacción Redox de este proceso habrá sido:



o bien:



según la cual, y análogamente a lo que ocurre con el hierro férrico, de 21 moles de $S_4O_6^{=}$ solamente dos son oxidados por 14 átomos gramos de talio trivalente, quedando también ácido tetratiónico en libertad.

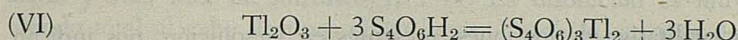
De esta experiencia deducimos la imposibilidad de preparación del tetratationato tálico.

II. — EXPERIENCIA PARA LA PREPARACION DEL TATRATATIONATO TALIOSO

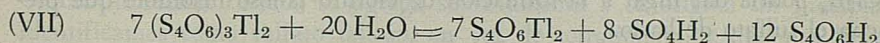
Puesto que en producto de partida, Tl_2O_3 , tenemos el talio en estado trivalente y hemos de preparar el tetratationato talioso, emplearemos el mismo ion tetratationato para reducir el talio de partida.

PRIMERA EXPERIENCIA

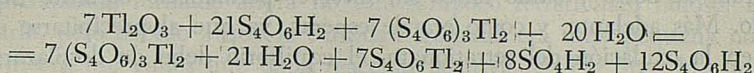
Tratamos de disolver directamente el Tl_2O_3 en ácido tetratiónico. La reacción será:



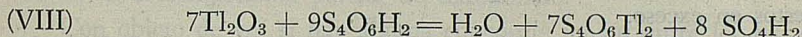
y como hemos visto, se producirá seguidamente la reducción del talio trivalente a monovalente, con la correspondiente oxidación de los iones de tetratationato a sulfato:



Sumando (VI) y (VII), teniendo en cuenta que como todo el tetratationato tálico producido en (VI) se descompone (VII), tendremos que multiplicar la primera (VI) por 7 y tendremos el proceso total.

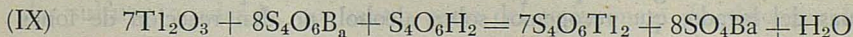


que simplificando quedará:



Según esta reacción (VIII), al disolver óxido tálico en ácido tetratiónico nos quedará una solución acuosa de tetratationato talioso acidulada con sulfúrico. Este sulfúrico lo podríamos eliminar con iones Ba^{++} , pero con objeto de no introducir otros iones en la solución, y teniendo en cuenta que el tetratationato de bario es el punto de partida para la preparación del ácido tetratiónico, lo que haremos será tratar el óxido tálico en una mezcla de ácido tetratiónico y tetratationato de bario en la cantidad necesaria para que todo el sulfúrico producido se precipite en forma de sulfato de bario.

La reacción será:



y de esta manera, partiendo en vez de con nueve moles de ácido tetratiónico, con ocho moles de tetrationato de bario y un mol de ácido tetratiónico, conseguiremos eliminar todo el sulfúrico producido en forma de sulfato de bario.

Esta reacción la realizamos, pues, tratando el óxido tálico con la cantidad necesaria de tetrationato de bario del cual se ha eliminado la $1/9$ parte del bario con ácido sulfúrico y filtrando el sulfato de bario formado.

Operamos como sigue:

Sobre 0,35 gramos de tetrationato de bario disuelto en agua, agregamos 0,11 mls. de ácido sulfúrico 1,75 N. y filtramos para separar el sulfato de bario formado. El filtrado mezcla de tetrationato de bario y ácido tetratiónico en la proporción de 8:1, se agrega sobre 0,31 gramos de óxido tálico en suspensión acuosa. Se agita fuertemente, y se observa al dejar en reposo cómo el líquido que sobrenada se va poniendo turbio, lo que indica que se precipita sulfato de bario y que la reacción marcha. Poco a poco se va decolorando la mancha parda formada por el sulfato de bario y el Tl_2O_3 sin atacar y, finalmente, al cabo de unas cinco horas, tenemos en el fondo del tubo de ensayo en que se realiza la reacción una masa parda de óxido tálico sin atacar y, sobre ella, un precipitado blanco de sulfato bárico. La solución acuosa que queda deberá ser, por tanto, únicamente de tetrationato talioso.

La determinación cualitativa de los iones, presentes en la solución, nos indican la ausencia de iones Tl^{+++} , lo que nos confirma la reducción total del talio, y la presencia de iones Tl^+ y $S_4O_6^{=}$; además de pequeña cantidad de iones $SO_4^{=}$. La determinación de sulfatos la realizamos agregando hidróxido de bario, pues la adición de Cl_2B_a podría dar lugar a la formación de cloruro talioso insoluble que precipitaría con el sulfato de bario.

El hecho de no haber iones bario en solución nos indica que la reacción ha terminado y, por tanto, de todo el tetrationato de bario ha reaccionado. La velocidad de disolución del óxido tálico fue en principio pequeña, puesto que la mezcla de sulfato de bario y óxido tálico sin disolver permaneció bastante tiempo de color pardo. Más adelante, y como era de esperar, ya que al precipitarse el $SO_4^{=}$ originado en la oxidación del tetrationato, el equilibrio debe de desplazarse hacia la formación de sulfato, aumento de la velocidad de reacción y rápidamente el precipitado quedó de color blanco, excepto la pequeña cantidad de cristales de óxido tálico puestos en exceso.

Separamos por filtración el líquido del precipitado y estudiamos por separado ambas partes.

PRECIPITADO

En un principio pensamos que el precipitado de color blanco era únicamente sulfato bárico. El hecho de que al agitarlo con agua tomase un aspecto análogo al de las sales de plata insolubles, nos llevó a pensar que, junto con el sulfato de bario formado, tuvimos también tetrationato talioso, según esto, poco soluble en agua.

Por ello, lavamos con agua el precipitado colocado en una placa filtrante hasta que las aguas del lavado, que recogemos sobre alcohol, no den reacción de iones

talio monovalente. Al caer sobre el alcohol se origina un precipitado que supusimos era tetratonato talioso.

FILTRADO

Al filtrado le agregamos alcohol, formándose también un precipitado que, como el anterior, supusimos era de tetratonato talioso.

De esta experiencia deducimos que el tetratonato talioso era poco soluble en agua e insoluble en alcohol. Esto nos llevó a realizar una experiencia según reacción (VIII), es decir, haciendo reaccionar ácido tetratiónico con Tl_2O_3 , pues de esta manera obtendríamos un único precipitado de tetratonato talioso, del que se podría eliminar el sulfúrico entrapado por lavados con alcohol.

SEGUNDA EXPERIENCIA

La realizamos disolviendo 1 gramo de óxido tálico, colocando en un tubo de ensayo, en ácido tetratiónico, obtenido a partir de 1,12 gramos de tetratonato de bario y 3,23 mls. de sulfúrico 1,75 N. La disolución es muy lenta al principio, siendo total al cabo de unas cinco horas. Entonces, además de una disolución que da reacción positiva de $S_4O_6^{=}$, $SO_4^{=}$ y Tl^+ nos queda el precipitado de color blanco y aspecto análogo al de las sales de plata insoluble y que suponíamos tetratonato talioso.

La disolución filtrada se agrega sobre alcohol y se origina un precipitado, que identificamos como sulfato talioso, en vez de tetratonato, y que nos llevó a estudiar los precipitados formados por adición de alcohol en la experiencia primera y que igualmente son sulfato talioso; mientras que los líquidos acuo-alcohólicos de las dos experiencias daban reacción positiva de tetratonatos. De aquí deducimos que el precipitado formado ahora no será tampoco tetratonato talioso. Intentamos investigarlo, pero debido a que la cantidad formada era muy pequeña no pudo hacerse. Únicamente vimos que daba reacción positiva de Tl^+ , por lo que pensamos que podría tratarse, por analogía con las sales de plata, de sulfuro talioso, originado en la descomposición parcial de tetratonato.

Con objeto de ver si hay alguna concordia mayor entre los tetratonatos de plata y talioso, hacemos algunas experiencias.

En primer lugar, si sobre disoluciones de ácido tetratiónico o de tetratonatos solubles agregamos sulfato talioso en solución acuosa, no se produce ningún precipitado, de donde deducimos la solubilidad en agua del tetratonato talioso. Esto no ocurre cuando se agrega nitrato de plata, pues entonces se forma un precipitado blanco que se descompone, dando lugar a la formación, finalmente, de sulfuro de plata.

Pensamos que podría ocurrir, en el caso de la plata de manera análoga o cuando trabajamos con Tl^+ , solamente la descomposición parcial del tetratonato para dar sulfuro, quedando, por tanto, parte del tetratonato de plata sin descomponer

en solución. Para comprobarlo, agregamos nitrato de plata sobre solución de tetratiónato de bario e inversamente agregamos disolución de tetratiónato de bario sobre nitrato de plata. En el primer caso, en el que tenemos exceso de tetratiónatos, se confirma nuestra hipótesis con la presencia de iones plata en la solución, mientras que en segundo hecho en exceso, de plata, la presencia de tetratiónatos nos serviría de confirmación. Sin embargo, no sucede esto, y en el primer caso toda la plata ha precipitado, quedando sólo exceso de tetratiónatos, mientras que en el segundo caso todo el tetratiónato ha precipitado, quedando únicamente exceso de iones de plata.

De todas estas experiencias llegamos a la conclusión del distinto comportamiento de los tetratiónatos de plata y de talio monovalente. El primero insoluble en agua y soluble el segundo. El tetratiónato de talio monovalente es también soluble en alcohol, puesto que la adición de éste sobre su solución acuosa, no ejerce sobre él acción precipitante (vimos que al agregar alcohol era sulfato talioso lo que en principio creíamos sería tetratiónato talioso) y, además, se descompone parcialmente al formarse para dar lo que creemos se trata de sulfuro talioso.

TERCERA EXPERIENCIA

Los resultados de la experiencia anterior nos llevaron a realizar ésta como la primera, es decir, a partir de la reacción (IX). Operamos exactamente igual que en ésta con la única variación de agregar la mezcla de ácido tetratiónico y tetratiónato de bario sobre Tl_2O_3 sin ponerlo en suspensión acuosa.

Una vez que la reacción ha terminado tenemos: Un líquido que da reacción positiva de iones $S_4O_6^{=}$ y Tl^+ y no de Ba^{++} ni $SO_4^{=}$. Al no dar reacción de bario se deduce que la reacción ha terminado y que, por tanto, todo el tetratiónato de bario ha reaccionado.

Un sólido constituido por Tl_2O_3 colocado en exceso y que ya no se podrá disolver, por no hacer en el medio tetratiónato de bario para reducirlo y disolverlo, y un precipitado de color blanco mezcla de sulfato de bario y de los que creemos es sulfuro talioso.

Centrifugamos para separar el sólido del líquido y filtramos para separar las últimas trazas de sólido. El filtrado constituido únicamente por disolución de tetratiónato talioso se coloca a cristalizar en desecador a vacío sobre hidróxido sódico.

Una vez formados los cristales, éstos se presentan de color amarillo débil y son fácilmente solubles en agua. No son higroscópicos y parece que son muy estables, puesto que no presentan olor a SO_2 . El hecho de que en su disolución acuosa no dé reacción de sulfatos nos indica que en su cristalización no hay, como en los otros tetratiónatos preparados, ningún proceso de descomposición.

El rendimiento de la preparación es del orden del 52 %.

III. — ANALISIS DE LOS CRISTALES

La determinación cuantitativa del talio se realiza precipitando el talio en forma de Tl_2O_3 siguiendo las indicaciones de Browning y Palmer (5), y la del azufre en forma de sulfato de bario.

Los resultados vienen expresados en la Tabla I y coinciden con los % de talio y azufre calculados para un tetrionato

TABLA I

% Talio	% Azufre	Promedio Talio	Promedio S
62,45	19,60	62,63 %	19,70 %
82,82	19,81		

talioso cristalizado con una molécula de agua: 19,68 % de azufre y 62,81 % de talio. De aquí deducimos, para el tetrionato preparado por nosotros, la siguiente fórmula: $S_4O_6Tl_2 \cdot 1H_2O$.

CONCLUSIONES

1. Hemos preparado por primera vez tetrionato de talio monovalente en forma de un producto blanco, soluble en agua y alcohol e insoluble en éter, al que corresponde la siguiente fórmula: $S_4O_6Tl_2 \cdot H_2O$.
2. No es posible la preparación de tetrionato de talio trivalente, puesto que los iones tálicos oxidan a los iones tetrionato a sulfato.

LABORATORIO DE QUÍMICA INORGÁNICA
FACULTAD DE CIENCIAS

BIBLIOGRAFIA

- (1) L. LOSTAO CAMÓN: *Preparación de tetrionato ferroso*. Sin publicar.
- (2) HODGMAN: *Handbook of Chem*, pág. 591.
- (3) SIDWICK: *Los elementos químicos y sus componentes*. Ed. esp. Tomo 1, pág. 470.
- (4) LUIS LOSTAO CAMÓN: *Preparación de tetrionato de aluminio*. Sin publicar.
- (5) TREADWEL-HALL: Ed. esp. Tomo II, pág. 61.

NECROLOGIA

El Excmo. Sr. D. Manuel Aulló y Castilla, Inspector general jubilado, del Cuerpo Nacional de Ingenieros de Montes y miembro correspondiente de esta Academia de Ciencias Exactas, Físico - Químicas y Naturales de Zaragoza, falleció en Madrid, confortado con los más altos consuelos de la religión católica, el día 19 de enero de 1959.

Su óbito constituyó una sensible pérdida para la Entomología española, para otros sectores, también interesantísimos de la investigación y para el Cuerpo Nacional de Ingenieros de Montes al que pertenecía desde el año 1906.

La afición y competencia en Entomología, así como su enorme capacidad de trabajo, dieron lugar a que se distinguiera bien pronto en el cultivo de tan importante rama de las Ciencias Naturales y a que se le confiara la misión de establecer el primer Insectarium Forestal de España, en terrenos del Real Patrimonio, especialmente cedidos, para tal finalidad, por S. M. el Rey Don Alfonso XIII.

Los estudios en él realizados alcanzaron bien pronto gran resonancia: además de repercutir en los trabajos del mismo tipo que se venían realizando en el extranjero, dieron base para combatir con éxito, empleando los medios más modernos, entre los que figuraba la lucha biológica con especies exóticas, importantes plagas que azotaban la riqueza forestal de extensas zonas españolas, y para pautar las campañas de extinción de otras varias, también muy importantes, que venían mermando los rendimientos económicos de varios montes españoles.

Estos trabajos y otros varios relacionados con la Fauna Forestal española dieron lugar a que el señor Aulló y Castilla fuera designado para desempeñar, entre otros varios, también muy destacados, los importantes cargos científicos siguientes:

Presidente de la Real Sociedad Española de Historia Natural; Presidente de la Sociedad de Entomología Española; Presidente de la Sociedad Española de Ornitología, de la que era socio fundador.

Consejero de la Asociación de Agricultores de España; Miembro de honor de la American Association of Economic Entomologists de los Estados Unidos de América; Miembro del Comité de la Unión Internacional de Ciencias Biológicas de Bruselas; Miembro del Consejo Permanente Internacional para

la explotación del mar, de Copenhague; Miembro de la Comisión Franco Española para el estudio de la biología del Salmón; Miembro de la Real Academia Española de Antropología y Prehistoria; Académico correspondiente de la Real de Ciencias y Artes de Barcelona, etc.

Se destacó, también, llevado de su competencia y aficiones como cultivador de la investigación en otras ramas del saber humano. Realizó excavaciones arqueológicas en las provincias de Segovia y Córdoba. Formuló un Catálogo completísimo de las Plaquetas y bronceos religiosos de los siglos xvi y xvii. Estudió, a fondo, el "Tesoro de monedas de La Algara" (Coruña). Redactó un interesante trabajo sobre los "Cornados de Sancho IV" y otro sobre los "Cornados y Novenes de Alfonso XI", y, no alargando más, se ocupó con éxito, de temas heráldicos.

Actuando como miembro del Cuerpo Nacional de Ingenieros de Montes, en el que prestó servicio activo desde octubre de 1906, hasta su jubilación, en abril de 1953, realizó importantes repoblaciones forestales de la región levantina; dirigió la lucha contra las plagas que invadían la Dehesa de la Albufera, las masas arbóreas de Albacete, de los encinares del Valle de los Pedroches, etc.

Fue profesor de diversas asignaturas de la Escuela Especial de Ingenieros de Montes, y, además de realizar los trabajos entomológicos derivados de la creación del primer Insectorio español de Entomología Forestal, fundó y dirigió las revistas de Fitopatología y de Biología Forestal y Limnología.

Por último, desempeñó con acierto el importante puesto de Presidente del Consejo Superior de Montes desde el 14 de mayo de 1952 hasta abril de 1953 en que fue jubilado.

Sus indiscutibles méritos dieron lugar a que se le otorgara la Encomienda de la Orden Civil del Mérito Agrícola.

Descanse en paz el sabio naturalista y competente ingeniero y reciba su respetable familia un sentido pésame por tan sensible pérdida, que lamenta profundamente esta Academia de Ciencias de Zaragoza al elevar a Dios una fervorosa plegaria por el alma de tan distinguido miembro de la misma.