REVISTA
DE LA

ACADEMIA DE CIENCIAS

Exactas
Físicas
Químicas y
Naturales
DE
ZARAGOZA

Serie 2.ª
Volumen 55

2000

ÍNDICE DE MATERIAS

Págs.

F. G. Asenjo. –*The present situation of Mathematics and the Mathematics of opposition* 5

Eladio Domínguez. –*Reflexiones fenomáticas* 23

Antonio Tricas Aizpun. –*La Energía Nuclear en Europa* 43

A. Elkinani, A. Najmi y M. Oudadess. –*Inegalite generalisee de Le Page et commutativite dans les algebres p-Banach* 51

A. Elkinani. –*Harmonic operator functions of a proper contraction* 59

Julio Rubio. –*Locally effective objects and Artificial Intelligence* 67

M. Ruiz Espejo y Housila P. Singh. –*Blasedness of the jacknife variance estimator of sample mean square* 79

M. Ruiz Espejo. –*Sobre la varianza y esquemas muestrales* 87

J. L. Brun and A. F. Pacheco. –*The Coulomb-harmonic oscilator and the virial theorem* 95

Yoël Lana-Renault. –*Exact zero-energy solution for new family of anharmonic potentials* 103

Yoël Lana-Renault. –*Analytic tomography of the mantle in a spherically Earth. The technique MZY* 111

J. Mandado, L. F. Auqué, Patricia Acero, M.ª José Gimeno y Javier Gómez. –*Quimismo de las aguas del Galacho de Juslibol (Zaragoza)* 129

Notas necrológicas 145

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000)

THE PRESENT SITUATION OF MATHEMATICS AND THE MATHEMATICS OF OPPOSITION

F. G. Asenjo
Department of Mathematics
University of Pittsburgh
Pittsburgh, Pennsylvania 15260

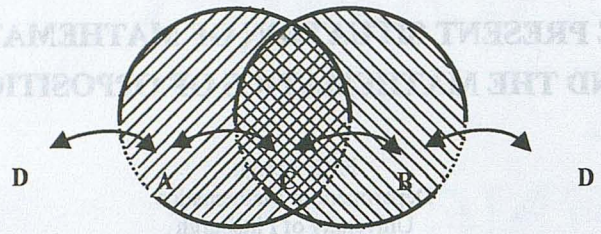
What follows is the text of lectures given in Spain and Portugal in June and July of 1999. I want to thank the universities of Sevilla, La Rioja, Zaragoza, Lisboa, and Évora for sponsoring these talks. I also want to thank Mr. Jorge Lloret for providing me with a transcript of the speeches, and Professors Augusto J. Franco de Oliveira, José Carlos Brandão Tiago de Oliveira, and Eladio Domínguez for their valuable comments. Professor Domínguez, in particular, has written an article titled "Phenomatic Reflexions" which follows and very nicely complements the present work. I like to think of his and my contributions as forming a unified whole.

I

GENERALITIES

Mathematics is going to be very different in the third millennium due to the widespread use of computers. We still cannot assess how great the impact of such use is going to be. There are nowadays highly contrasting opinions on this matter. Some classical mathematicians think that computer science is little more than a passing fad, in the absence of which the essence of mathematics would remain unaffected. On the other hand, the enthusiasts of computer methods assert that classical mathematics is finished; that proof, in effect, is dead. These two extreme positions, I submit, are both unrealistic. The proof of Fermat's Last Theorem is not going to be the final accomplishment of classical mathematics.

And computer-generated disciplines such as the development of Deterministic Chaos are going to multiply with increasing speed and usefulness. The present situation of mathematics can, then, be represented rather by the following diagram:



where the A-area represents classical mathematics, including, for example, the above-mentioned proof of Fermat's Last Theorem; the B-area represents computer-generated disciplines such as the development of Deterministic Chaos; the C-area – the intersection of A and B – represents that still mysterious zone where classical methods and computer disciplines are, and will continue to be, interacting with one another in profound ways that will radically change the way mathematics is thought about and developed. The D-area, in turn, represents "the outside world," where physical and concrete problems of any kind keep posing challenges to both mathematics and computer science. Note that the boundaries of all these four regions are not impassable. The topologist Karl Menger has already noted that absolute set-theoretic boundaries – as drawn in Venn diagrams, for example – are fine for broad intuitive purposes, but that the transition from a set to its complement is, concretely speaking, a gradual affair. He introduced the notion of "hazy sets," later widely developed in what is known today as "fuzzy set theory." The broken lines in the above diagram, then, appropriately point to the fact that a steady interaction from each region to all the others is constantly in effect. Many mathematical theories and many computing disciplines originate either in the "outside world" of the natural sciences, or in one another, or in both. For example, it was Celestial Mechanics (in the D-area of the diagram) that led Poincaré to concentrate on the study of non-linear differential equations, and then discover the anomalies now called chaotic bifurcations (in the A-area). This, in turn, with the help of computers, led to the theory of fractals (in the B-area), which provided a useful tool to understand better the geometry of nature (back in the D-area). Many additional examples can be given of this inevitable continuity across the broken boundaries of the diagram.

What is interesting and truly mysterious is what is going to happen in the realm of

interaction between classical mathematics and computer methods. What we really need is something similar to what Hilbert's Program did for mathematics at the beginning of the twentieth century. His desiderata included consistency (nowadays, though, there are extremely useful inconsistent theories and models), completeness (an unrealizable ideal for the basic systems of mathematics), categoricity (fortunately an impossibility for first-order theories, which is what opens the way to the rich and growing spectrum of non-standard analyses), and decidability (equally impossible for mathematics in general). Yet this flawed program (as we now know it to be) guided foundations of mathematics for many decades, and even today we do not have anything to take its place. However, we do need a new scheme of thinking to deal with both the A- and B-areas of our diagram together, and, most importantly, with their intersection – the C-area. Of course, not just one but a "committee of Hilberts" would now be necessary in order to succeed in creating a productive and lasting scheme: too much specialized knowledge is required to grasp the future with a minimally appropriate amount of comprehensiveness – fully keeping in mind, of course, that the future is always creative. The situation reminds me of the historian Johan Huizinga's attempt diffidently to forecast the future using his vast knowledge of the past in his 1936 work, *In the Shadow of Tomorrow*. His analyses and descriptions were generally correct for the time, in light of what happened later in the world. Yet he inevitably missed major unpredictable events, events that introduced novel directions of momentous change – both for the better and for the worse. The same is bound to happen to any new foundational program, no matter how successful.

Nonetheless, just as Huizinga was correct in many of his immediate projections, I feel confident that several items will have to be included in any new program. First is the acknowledgment that the role of deduction as classically conceived will be greatly narrowed. In the words of Keith Devlin, "Within the next 50 years the importance of proof in mathematics will diminish. You will see many more people doing mathematics without necessarily doing proofs."[1] At the same time, experimental mathematics will become more and more independent of classical approaches. Stephen Wolfram has already complained that "the obsession with proof has kept mathematicians from discovering the vast new realms of phenomena accessible to computers. Even the most intrepid mathematical experimentalists are for the most part 'not going far enough.' They are taking existing questions in mathematics and investigating those. They are adding a few little curlicues to the top of a gigantic structure."[2]

Second, semantics, which is nowadays considered an all-inclusive discipline of universal applicability, must branch into global and local semantics. Global semantics will

continue to produce lasting rules of general validity for the whole A-area, i.e., sweeping notions of meaning as well as comprehensive model theories. Local semantics, on the other hand, must deal with temporally circumscribed propositions, problems, and programs. This is the semantics that should cope with the constantly changing nature of the B-area. A computer program is devised, applied to solve a given problem, then set aside to produce another, radically different, unrelated program, destined to treat a totally independent situation, etc. Local semantics has necessarily to be ad hoc. But then a combination of both kinds of semantics must also be created to deal further with the problems of the C-area. Just as in a physical field of forces global and local actions interact and form a special synthesis that makes the field have the singular dynamics it exhibits, so then relatively lasting and relatively fleeting interpretations of meaning and truth must interact in a new operational way.

Third, and as a consequence of what has just been said, time must be taken as a fundamental variable of foundations. A number of classical mathematicians like to think of mathematics as immutable – they believe only in eternity. It would be very difficult, however, for a computer scientist to hold the same belief: time is of the essence in the application of every computer program, indeed, of any computation. Mathematics is constructed, not unveiled, and every construction is a process, that is, a function of time.

Fourth, the role of the subject in the construction of mathematics must also be acknowledged as inescapable. An axiom that has been taken as true for a long time may be declared false for newly acquired empirical reasons: this is the subject's choice. Local semantics lasts as long as the subject deems that a demonstration is still valid and applicable, or that a program is still useful. It is in the mathematician's mind that mathematics develops.

Fifth and last, foundations must incorporate antinomicity as a natural consequence of having to choose opposing assumptions in succession or even simultaneously. This should be obvious at a time when things are changing in mathematics at an increasing speed. In fact, it has already been shown beyond doubt that antinomicity has interesting and useful mathematical and physical applications which would be impossible to carry out without accepting that some propositions are true and false and must be taken as such without attempting to explain away their contradictions.

The five items just enumerated are not conjectures in the least: they merely reflect the reality of mathematics as we know it and practice it today. A couple of them, the need to include time and subject, have already been stressed by Brouwer and the followers of what is now known as constructivism. Brouwer's intuitionism is, of course, an excessively limiting approach to mathematics that must be substantially improved, as Errett Bishop has

unmistakably shown in his *Constructive Analysis*. Yet Brouwer's tenets on intuition itself are eminently valid today. He rejected a mathematics conceived as a "museum of immutable truths."[3] For him, Platonic essences are the cemetery of mathematical progress. "The fundamental parts of mathematics can be *built up* from units of perception,"[4] he wrote. The idea of multiplicity, for example, is itself one such unit of perception, a basic intuition, and since intuition develops as a process, one must then conclude that "the only a priori element of science is time."[5] In fact, there are "languageless constructions which arise from the self-unfolding of the basic intuition, [constructions which] are exact and true by virtue of their very presence in the memory."[6]

The impact of the observer on the structure itself of what is being observed is regularly taken into account in quantum mechanics. In addition, there is today a so-called "Anthropic Cosmological Principle" that in one of its forms asserts "that the observed structure of the Universe is restricted by the fact that we are observing this structure; by the fact that, so to speak, the Universe is observing itself,"[7] or, in other words, "Observers are necessary to bring the Universe into being."[8]

This is true of mathematics as well. There would be no mathematics without people ready and willing to think and make mathematics: the thinking mathematician is the one corner of the world to which the mathematical givens are given, the one agent of the world who takes the given and turns it into something else, that is to say, the source of mathematical transformations. This I call *The Anthropic Principle of Mathematics*.

Brouwer was not the first to point out the obvious fact that the subject is part and parcel of the mathematical endeavor, that axioms are not forced on us but that their choice is a free decision of the mind. Writing about Euclid's *Elements*, Proclus said, "Let us follow our head."[9] Imagination is prior to understanding.[10] In other words, mathematics is for Proclus a creation that follows the mathematical imagination according to the relatively arbitrary volitions of the mind, the active agency that takes objects, functions, predicates, and anything else in one or another transforming way.

As for antinomicity, there is the mistaken generalized idea that antinomies are essentially dependent on negation. In fact, many antinomies have nothing to do with negation but rather with some basic, more general notion of opposition relative to which negation is only a particular case. (Bishop goes so far as to claim that mathematics in general should be constructed altogether without negation.) If we take two predicates that can be considered in opposition of one another and feed them objects that satisfy both, we can then obtain antinomic statements. We can call this kind of antinomicity "vertical," because it is generated by going up from objects to sentences that then become true and false

simultaneously without any appeal to negation.

If instead of predicates that become antinomically opposed when fed the appropriate objects we now consider antinomically opposed ways of taking the same objects in one way or another, then we generate what we can call "horizontal" antinomicity, that is, antinomicity that remains at the level of objects independently of the predicates to which the objects may be fed, and hence independent of truth and falsity. Consider as an example Cantor's informal definition of set as "a multiplicity of objects taken as a unity." Let us take this definition seriously and consider the act of "taking as" as a fundamental logical and mathematical operation. We initially find some objects in the neutral state – what Charles Peirce called the "First," i.e., "objects that present themselves as immediate and undifferentiated."[11] Then we take them as either unities or multiplicities, thus changing the internal character of the objects. "To take as" is not an external function, not a correspondence that merely goes from one object to another; it is an effective internal transformation that changes the given object – either a first object or an object already transformed – into something else which, in a basic sense, is still the same original object despite its having been changed, just as a person remains the same person despite the changes that time generates. This fundamental antinomicity of identity-in-difference is of the essence of becoming, a concept that is meaningless without it.

Now, to take as a unity objects that already have been taken as a multiplicity generates an object intrinsically antinomic: a set is one such antinomic object, whose antinomicity has nothing to do with truth and falsity. We can also take an object as a whole, or as a part; or as a singularity, or as a representative; or as discrete, or as continuous, etc., pairs of opposing operations that can be performed in succession in any order, although their applications are not commutative: to take a unity as a multiplicity generates an object that is the opposite of a set – in a sense, its mirror image, what we can hence call a "tes."

The discovery of horizontal antinomicity makes it possible, in addition, to formalize the two basic kinds of multiplicity one constantly encounters: separable and inseparable. The elements of a set form a separable multiplicity, but objects distinguishable in a tes constitute an inseparable multiplicity – each such object remains indelibly attached to the tes. One concrete example of an inseparable multiplicity is space. Space is not an indifferent container into which things can be placed and from which each of them can be removed at any moment to be spread elsewhere. The truth is that space is a property of things. Relativity has taught us beyond question that each particle that moves with a given relative velocity has its own version of the overall structure of space and time. There are as many

spaces and times as particles that move in the cosmos. Space is not uniform but multiform: it is a property of each moving particle, a particle that functions as just one possible center of coordinates relative to which each of the rest of the moving objects relates differently. In his *Thing and Space* Husserl also talked about the inseparability of space from things. He said, "Space is an 'inner' constitutive determination of the thing and has indeed a determinate structure."[12] Moreover, "a given empty space is necessarily an empty space between things or phantoms of things. If nothing spatial at all is given, then neither is any space."[13] As for time, "duration is what it is only as the duration of a thing – of something real in general – and, in a somewhat different sense, as the duration of a process, which in turn presupposes a thing undergoing the process, and a thing is inconceivable without duration."[14] Endless instances of the inseparability of multiple aspects in the real world – that is, of identity-in-difference – could be added indefinitely. Logic must reflect this concrete situation.

In order to underline the essential difference that exists between the internal transformation that "taking as" produces and the mere external correspondence that defines a regular mathematical function, we can say that "taking as" is the mathematical counterpart of what Husserl called a "noesis," whereas the outcome of such transformation corresponds to what he called the "noema." The noesis is the animating apperception, the acting apprehending of the mind whose outcome is the noema, the objective correlate, except that some noeses act like mere photographs, grasping the object as given without interfering, whereas other noeses create the object anew. "Taking as" specifically effects an active internal transformation of the given object, keeping the latter as the same and different at the same time. That some given objects are neutral – not already taken in any particular way – can be exemplified by the attempt to build cosmology on a handful of dimensionless constants. A. S. Eddington, P. A. M. Dirac, and P. Jordan produced respective cosmological systems stemming from a few constant numbers without physical dimensions, that is, prior to being taken as representing any specific relations, constants that keep reappearing in many disparate contexts. The constant numbers are the same, but their meaning, their role and impact in each context, are radically transformed by their being taken as measuring concrete objects in terms of particular dimensions – mass, velocity, energy, etc.

II

FORMALISMS

Generalities without a formal apparatus to fix ideas remain vague and elusive. Formalisms without general discussions to motivate them remain skeletal and depthless. After having motivated the notion of opposition as a fundamental logical idea, we now outline the appropriate technicalities to set the ground on which to build a mathematics of opposition.

Let us begin with the key operator of "taking as." We shall distinguish between (i) taking objects in one way or another, and (ii) taking sentences as true, or as false, or as true and false, or as neither true nor false. We have already discussed (i) to some extent. Before we introduce symbols to deal with this case, let us refer first to those various ways in which a sentence can be taken – more or less at will. We now know that an axiom is not an eternal verity but a statement that we take as true for a longer period of time than one in which, for example, we take as true the opposite of what we want to prove in order to reach a contradiction in order hence to declare it to be false. The axioms of Euclidean Geometry are taken to be true until those of Non-Euclidean Geometry seem more suitable for a given present purpose. And just as some "first" objects are neutral – not being taken in any particular way – so some sentences are neutral in the sense that they are "mere *combinations of ideas* of which the writer does not state whether he acknowledges each of them to be true or false,"[15] in the words of Frege. Frege uses the symbol "$-A$" to indicate the neutral state of the sentence A, and the symbol "$\vdash A$" to indicate that A is taken as true. ("$\vdash$" is now used syntactically rather than semantically, but Frege, who introduced the symbol, had another idea in mind.) A systematic way of using this approach is effected by A. Robinson's notion of diagram: Given a structure, and introducing a logical constant for each individual of the structure's domain, the diagram is the collection of all the sentences true in the structure. There is no need to distinguish between axioms and theorems; deduction, in effect, becomes a secondary device. Truth is here a function of the primary universal-algebraic structure one takes to start with – in principle, arbitrarily.

Back to the case (i) above, let us now introduce as part of our logical alphabet the infinite sequence of constant symbols t_1, t_2, t_3, ... to represent the unlimited number of ways in which an object can be taken. Thus, t_1o stands for "the object o taken as a unity," t_2o for "o taken as a multiplicity," t_3o for "o taken as a term," t_4o for "o taken as an internal relation," t_5o for "o taken as a singularity," t_6o for "o taken as a specimen," t_7o for "o taken as

a whole," t_8o for "o taken as a part," etc. Notice that the transformation t with the odd index 2k-1 is in opposition with the one with even index 2k. As a consequence, the objects $t_{2k-1}t_{2k}o$ and $t_{2k}t_{2k-1}o$ are each intrinsically antinomic. Sets and teses are examples of such intrinsically antinomic objects. Transformations, however, can be applied in any order, and particular patterns of such linearly ordered applications can be fed to computers when there is a concrete reason to repeat such patterns.

These transformations not only serve to extend the usual notion of antinomy to include also the outcome of applying antinomically opposed operations to the same objects, but also put in evidence that antinomies are the outcome of a process. In both the horizontal and vertical kinds of antinomicity we begin with neutral objects or neutral propositions respectively and then apply opposing transformations – taking first the object as a unity and then as a multiplicity, or taking the proposition first as true and then as false, say. We now represent variable neutral, first objects by x, x_1, x_2, ..., and objects in general by o, o_1, o_2, ...; that is, o can be a first object, or one to which a finite number of transformations has already been applied: t_it_j ... t_1x. Constant objects we represent by a, a_1, a_2, ... To this alphabet we also add the usual symbols for external functions, each with a given arity: f, f_1, f_2, ...

The t-operators are unary. To go beyond this case, we use the comma as a transformation of dispersed objects into a multiplicity: o_1, o_2, o_3, ..., o_k. The comma here is not a linguistic symbol but indicates that the objects in the sequence are taken as a multiplicity. To indicate that one such multiplicity is in turn being taken as a unity we now write $\{o_1, o_2, ..., o_k\}$ – a set. However, the use of the brackets "{" and "}" has nothing to do with the predicate of membership, or with any form of the axiom of comprehension at this stage. It is merely a notational device at the level of objects. A tes, on the other hand, an inseparable multiplicity distinguishable in a first object x, will be represented by o_1xo_2x ... xo_k. This sequence of distinguishable objects may be infinite.

Now we introduce the predicates A, A_1, A_2, ... each with a fixed arity, i.e., to be fed a fixed number of arbitrary objects. No predicate is intrinsically antinomic, but any predicate can be taken as antinomic when fed suitable objects. In addition, similarly to what happens with transformations, some predicates of the same arity are in pairwise opposition – < ("less than") and > ("greater than"), for example. Opposed predicates being fed the same objects lead to antinomic sentences – $(a_1 < a_2) \wedge (a_1 > a_2)$ is one such antinomic sentence.

Antinomicity, therefore, is very flexible. It depends on our interpretation of the objects and on the way objects and sentences are taken – of the local semantics, in other words. Additional constant predicates necessary for our mathematics of opposition are =

(equality), $\in$ (membership), ∂ (distinguishability), and $\equiv$ (identity). Each of these predicates can be taken as antinomic at times, and $\in$ and ∂ are always opposing predicates: they are the formalization of the opposite mathematical acts of gathering and choosing, respectively. To make a record of this and other oppositions, we introduce the metamathematical marker "Opp": Opp ($\in$,∂), Opp ($<$, $>$), and Opp (t_1o, t_2o), for example. (Opp is not a predicate.)

The usual logical propositional operators and quantifiers are added, on top of which we now introduce a second existential quantifier with the new symbol $\mathbf{E}a$ that reads "there exists the specific constant a such that ...." The usual existential quantifier $\exists x$ means only that "there exists some object x such that ..." without specifying which such object is. In *Principia Mathematica* there is a distinction between "first truth," the sort of truth applicable to A(a) if a is a specific object that makes A(a) true, and "second truth," that is, the kind of truth $\exists x A(x)$ has when we take this expression to mean "the proposition A(x) sometimes."[16] The symbol $\mathbf{E}aA(a)$ corresponds to the "first truth," and $\exists xA(x)$ to the "second truth."

To the logical alphabet just succinctly described we now add the usual rules of formation for atomic and compound formulas, including compound formulas which incorporate an infinite number of propositional operators. Then we need axioms, since the mathematics of opposition uses nonconstructive statements that must be postulated. Several of these axioms are existential; others have existential consequences for their semantic interpretations – just as the continuum hypothesis, say, implies that there is only one hyperreal system regardless of the nonprincipal ultrafilter on the set of natural numbers used. That is to say, our temporary assumptions lead to the creation or elimination of objects and structures. Also, some of these existential axioms pose the existence of infinitely descending and infinitely ascending chains of membership and of distinguishability. Proclus has already called for a movement of "progression" in mathematics, complemented by a parallel process of "reversion" that unfolds the simple into its inherent complexities.[17] This "descent" into plurality "must not be cut off from its original state, for it would lose its definition."[18] This is nothing other than recognizing, again, the inseparability of aspects as it is present, for example, when we look at the piercing eyes in a portrait and realize that they are an inseparable part of the overall work of art. Infinite descents not cut off from the initial objects – as in the case of the inseparable multiplicities that we mentioned before – are mathematical formalizations of such regular, concrete observations. A local, minimalist semantics is all that is called for in order to make sense of these situations. Global, Tarski-like approaches tend to hide such elusive perceptions, valuable as such approaches can be when applied elsewhere. Instead, ad hoc, limited computer programs are more suitable for

producing finite approximations to those endless, seemingly fleeting processes. Creating these programs is a way to move intrepidly into the realm of the C-area – into future mathematics.

Let us now give a few examples of the axioms that we are referring to. (For a more thorough presentation, see my paper, "The Logic of Opposition," to appear in 2001.)

First, we should list the axioms for membership; any system for sets would do, even if it contains antinomies. Antinomies have to be suitably confined, of course, but there are many ways today to deal with this matter. One particular axiom has to do with the relationship between sets obtained through the predicate of membership and sets obtained by using antinomically opposed transformations functioning exclusively at the level of objects. In many instances, they are the same objects.

Second, we have to produce axioms for distinguishability to establish the existence of teses. Sets and teses coexist but they are different objects, even though a set can be taken as a tes and vice versa. Again, teses obtained purely at the level of objects applying opposing transformations in succession are to be related to teses obtained through the predicate of distinguishability ∂. In many instances, they are the same objects. Also, we have extensionality for sets and extensionality for teses; these can be combined in one single axiom, since no set is a tes, and no tes is a set. There are, of course, objects which are neither a set nor a tes; we use the identity predicate for them, and reserve equality for sets and teses.

$o_1 = o_2 \leftrightarrow (\forall o_3\ (o_3 \in o_1 \leftrightarrow o_3 \in o_2)\ \vee \forall o_4\ (o_4\ \partial\ o_1 \leftrightarrow o_4\ \partial\ o_2))$. This is extensionality for sets and teses.

$\mathbf{E}!a\ (\forall o\ (\neg o \partial a))$. There exists a unique empty object (in the sense of identity) exhibiting no distinguishable object including itself. It is different from the empty set; in fact, it is not a set, nor a tes, nor a unity, nor a multiplicity. Let us represent it by $\varnothing_\partial$.

$\forall o\ (\neg \varnothing_\partial \partial o)$. The empty object $\varnothing_\partial$ is not distinguishable in any object.

There is a unique universal tes in which every unity is distinguishable. Let us represent it by B. It parallels but is different from the universal class.

There are infinitely ascending ∂-chains as well as infinitely descending ∂-chains. Now, whereas $\in$ engenders separable multiplicities, ∂ produces instead inseparable ones. But induction on ∂-chains calls for a principle of continuous induction which simply reflects mathematically the fact that between any aspect distinguished in a given object and such overall object there is a continuous spectrum of distinguishable aspects linearly ordered by ∂. The piercing eyes in a portrait cannot be excised as though they were elements in a set; they are placed, instead, in a continuous spectrum that ends in the whole face. Khintchine

extended induction to the real numbers, and Sierpiński in turn generalized it to linearly ordered stretches without gaps. For our mathematics of opposition we add first an axiom stating the existence of stretches of objects linearly ordered without gaps by ∂, stretches which may or may not have initial or terminal objects, but which are, of course, dense.

Finally, we postulate a principle of continuous induction for ∂-chains which rephrases for teses Sierpiński's thesis.

III

APPLICATIONS

Without applications, formal systems, even if motivated in a general way, remain mental games. We want to talk now about applications of both horizontal and vertical antinomicities. Let us first take the ordinary integers as constant, fixed first objects; then let us take each integer alternatively as either a term or an internal relation, denoted respectively by ..., -1, 0, 1, 2, ... and $-\overline{1}, \overline{0}, -\overline{1}, \overline{2}$, ..., and in general by a, a_1, a_2, ..., and $\bar{a}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... Then $a_1\bar{a}_2a_3$ is a term-relation number, and so is $\bar{a}_1a_2\bar{a}_3$. Term-relation numbers are inseparable multiplicities, neither simply terms nor simply relations, although of course $t_4(a_1\bar{a}_2a_3)$ is a relation and $t_3(a_1\bar{a}_2a_3)$ is a term. In the spirit of Kleene's metaphors, wherein he called "ions" predicate expressions not yet but about to be fed objects, P(–,–), and "mesons" functional expressions not yet but also about to be fed objects, f(–,–,), let us give the name "gluons" to every integer taken as a term or as a relation not yet but about to be fed integers taken as relations or as terms. This is to emphasize that $-\overline{2}-$ and $-3-$ are about to tie together two integers, to glue them, in effect, into an inseparable multiplicity. Every term-relation of the form $a_1\,\overline{0}\,a_1$ is identical to $\bar{a}_1$. Compound term-relation numbers are formed as in the following examples: $(a_1\bar{a}_2a_3)(\bar{a}_4a_5\bar{a}_6)a_7$, $(\bar{a}_1a_2\bar{a}_3)a_4(\bar{a}_5(a_6\bar{a}_7a_8)\bar{a}_9)$, etc. The parentheses indicate the order of generation of the numbers; abstraction made of the parentheses, a term is followed by a relation, and a relation by a term, and any well-formed term-relation number begins and ends with a term or begins and ends with a relation. Let us represent a number that begins with a term by o_i and a number that begins with a relation by $\bar{o}_j$; then o_i0o_i is identical to o_i, and $\bar{o}_j0\bar{o}_j$ is identical to $\bar{o}_j$. Thus, $4 \equiv 4\,\overline{0}\,4 \equiv (4\,\overline{0}(4\,\overline{0}\,4))\,\overline{0}\,4 \equiv 4\,\overline{0}(4\,\overline{0}(4\,\overline{0}4))$, $\overline{4}\,0\,\overline{4} \equiv \overline{4}$, etc. In particular, $0\,\overline{0}\,0 \equiv 0$. Some differently expressed inseparable multiplicities are in this way identified.

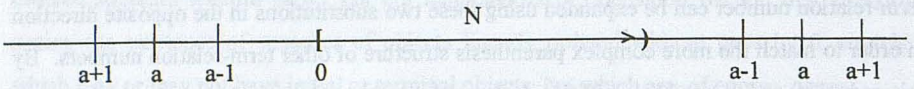
Term-relation numbers can then be written in *reduced form* by substituting any

expressions of the form $o_1 \bar{0} o_1$ or $\bar{o}_1 0 \bar{o}_1$ by o_1 and $\bar{o}_1$, respectively. On the other hand, any term-relation number can be expanded using these two substitutions in the opposite direction in order to match the more complex parenthesis structure of other term-relation numbers. By this reducing and expanding, addition and multiplication of term-relation numbers can be defined in general, as well as a partial ordering. As a consequence, term-relation numbers of the form $o_1 \bar{o}_2 o_3$ – and dually term-relation numbers of the form $\bar{o}_1 o_2 \bar{o}_3$ – constitute a ring Z* which is a nonstandard model of the integers, one that even contains finite infinitesimals.

Z* can be extended to a special nonstandard model R* made up of term-relation real numbers, and this, in turn, by adjoining the imaginary unit i to R*, can be extended to a nonstandard model C* of term-relation complex numbers. C* is a field, but it is not algebraically closed, nor is any finite extension of C*. This means that Weierstrass' so-called Final Theorem of Arithmetic to the effect that it is impossible to extend the number system beyond C into new fields by algebraic field extensions is circumvented if we start the extensions with the ring Z* of term-relation integers rather than with the standard ring Z.[19]

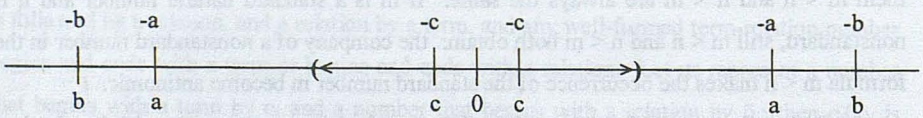
As an example of applications of vertical antinomicity to mathematical analysis, let us now refer to the use made in a previous paper of order as an antinomic predicate for the purpose of building a nonstandard antinomic model of the natural numbers.[20] In this model, for any two different standard natural numbers m and n either $m < n$ or $n < m$ but not both. This is to say that in the galaxy N of all the standard (finite) natural numbers the usual nonantinomic properties of order obtain. For all the nonstandard (infinite) natural numbers, however, both $m < n$ and $n < m$ hold, including $m < m$. The linear order is preserved, but the representation of this model on a straight line necessarily requires bilocation of these nonstandard numbers. As already mentioned, when, in general, objects fed to a predicate yield an antinomic sentence, then the predicate as well as the objects that cause the antinomicity become antinomic. In particular, the occurrence of infinite nonstandard natural numbers in expressions of the form $o_1 < o_2$ are all antinomic precisely because for any two of them $m < n$ and $n < m$ are always the same. If m is a standard natural number and n is nonstandard, still $m < n$ and $n < m$ both obtain: the company of a nonstandard number in the formula $m < n$ makes the occurrence of the standard number m become antinomic.

Each infinite natural number takes, then, two locations on an appropriately stretched line: one to the right of the entire galaxy N of standard natural numbers, and another to the left.



Every standard natural number has only one successor and one predecessor, with 0 having only one successor. Every nonstandard antinomic number has two successors and two predecessors: a+1 and a-1 are both successors and predecessors of a. Thus, a+1 is a successor of a to the right of N and a predecessor of a to the left of N. No standard number can be reached by adding any number to a nonstandard one, or by multiplying a nonstandard number by any factor different from zero, or by raising any nonstandard number to a power different from zero.

Let us now apply the same assumptions to a nonstandard model of the real numbers. In the galaxy R of standard real numbers we have $r_1 < r_2$ or $r_2 < r_1$ but not both, if r_1 and r_2 are different. For the nonstandard real numbers, on the other hand, we have both $r_1 < r_2$ and $r_2 < r_1$. Further, if r_1 is standard and r_2 is nonstandard and infinite, $r_1 < r_2$ and $r_2 < r_1$ both obtain also, making r_1 have an antinomic occurrence in $(r_1 < r_2) \wedge (r_2 < r_1)$. The same applies if r_1 is a standard real number and r_2 is a finite nonstandard real number greater in absolute value than r_1. Again, the antinomicity of order manifests itself in the bilocation of each nonstandard real number, but now, instead of having a blank stretch to the left of zero in which to place the second location of nonstandard numbers, we find that this second location falls in a place already occupied by their negatives. That is, each pair of nonstandard numbers r_1 and r_2 such that $r_1 < r_2$ will have a second location at r_1 and r_2, respectively, so that $r_2 < r_1$. This also includes the infinitesimals, of course. In other words, each nonstandard number occupies two positions, and each position is occupied by two nonstandard numbers, r and -r.



monad of infinitesimals

As with the antinomic model of the nonstandard natural numbers, using axioms paralleling those presented in the paper last referred to, the properties of arithmetic and order that obtain in a nonantinomic nonstandard model of the reals obtain also in the antinomic

model. For example, the fact that c in a+b = c has location in c and -c does not mean that addition becomes a double-valued correspondence in the sense that a+b = c and also a+b = -c. The bilocation of c does not imply that c is identical to -c. Further, while we have represented these antinomic models on a straight line, antinomicity can be extended to two, three, or n-dimensional spaces.

The constructions just described have definite clarifying applications to quantum mechanics, the most antinomic of all physical disciplines. Let us elaborate. According to Roger Penrose, to explain nonlocality, the instantaneous universality of some physical effects beyond the local space in which they can be observed is the most serious and difficult problem that quantum physics will be faced with in the next decades, much more so than indeterminism. Nonlocality can be simply and positively described as ubiquity, the antinomy of here and there, the presence everywhere of local dynamic effects. Penrose says that, as things stand now with the theory, in experiments in which the same electron appears to pass through two different holes at the same time "we must accept that the particle is in *two* places at once! On this view, the particle *has actually passed through both slits at once.*"[21] Particles spread out in discontinuous slots of space – just as nonstandard numbers have two locations in the antinomic model of the real numbers.

As for two different entities sharing the same position, the so-called Bose-Einstein's condensate implies precisely the occupancy of the same space by two different particles. This characteristic of matter, the fact that "two atoms occupy the same volume of space, move at identical speed, scatter light of the same color, and so on,"[22] has been recently verified experimentally; the situation parallels that of infinitesimals and infinites sharing the same position with their respective negatives in the antinomic nonstandard model described above.

IV

DISCUSSION

What follows is part of an exchange of opinions between Professor Eladio Domínguez and myself that took place in Zaragoza in June 1999. I was gratified and reassured to hear his agreement on several points because of his expertise on subjects that belong to the B-area of our first diagram. (I am essentially an A-area type.) Professor Domínguez's creative contributions as a pioneer of Digital Topology are well-known, and he is now involved in developing a new discipline that he labels "phenomatics," an effort to unify the very disparate current approaches to computerized information theories.

Professor Domínguez: In line with what was expressed by Professor Asenjo, an object cannot be separated from the perception of its states. The notion of object cannot even be programmed in isolation of such states. How could one feed the notion of object to a computer if each time that one attempts to do so there is the perception of only one state? We do so using "an object identifier" created and eventually eliminated in the machine's world along with the creation and elimination of the object itself, this done in such a way that the identifier, once eliminated, cannot be used again to identify any other object. Given an object, we program one of its states, the one we perceive, associating it with an object identifier. The object can change states but the identifier remains invariable. In this manner, by means of such identifier, we can recognize that two states pertain to one and the same object.

Phenomatic structures are antinomic. It is the way to understand the design of databases. We often pass from a multiplicity to a unity, and often from unities to multiplicities. As for truths, they are temporary in information sciences, whose semantics have always been local. Now, what is the relationship between "distinguishability" and "being a part of"?

Asenjo: "Being a part of" can be understood in two different ways in mathematics: as membership to a set, or as inclusion in a set. But distinguishability has nothing to do with membership or inclusion. It is related to "taking as," but in distinguishability's overall context "being a part of" can be anything else that makes sense independently of set-theoretic conceptions.

Domínguez: I still have problems, because I have defined distinguishability – as opposed to indistinguishability – more in relation with identities than with equalities. However, I do see distinguishability as very much related with infinitely descending processes. This happens in practical computer situations. The quantifier **E**a is very welcomed; it is a notion that we use very frequently because we are interested in distinguishing the fact that in a computer you have an individual of a given category, that you do have it and you give it as such, in contrast with having to talk hypothetically about such an individual.

Asenjo: But it has to be a totally defined fact.

Domínguez: Yes, versus the mathematical variable that refers to individuals of a category, individuals that one does not know whether they exist or not.

Asenjo: What happens is that the expression $\exists xA(x)$ is a syntactic one, independent in principle of any interpretation. As such, it is of no use. One needs structures. With a structure, supposedly a model of the expression, an individual object must satisfy the

expression. Yet the expression gives you no clue as to which one is that object. It is the same situation you have with the Axiom of Choice – it tells you that a Choice Set exists without specifying the set's elements. With Ea the element a is not a question of speculation.

Domínguez: This is the same thing we have been doing. Before you named it, I did not know it. We used the notion and we thought that it was a novelty in a different language. But I see that it is not a novelty. What you have described matches what we are using. Now as for certainty, it is different for us as compared to classical mathematics. We cannot prove that what we are doing is correct. This is a problem I have with students, because they are used to classical mathematics and statistics. They are accustomed to situations in which if you say that something is true, you can prove it in some way. Yet in design you cannot prove everything. In a scheme, I have the certainty that what I am doing is correct, but this means that later I can detect errors.

Asenjo: This is in line with taking something as true for the time one needs to do so. If it is for a brief time, then we say that the truth belongs to the local semantics of the situation, but if it is an assumption that we want to use repeatedly for some time, then we call it an axiom.

Domínguez: We use principles, not axioms in the mathematical sense, principles that are valid as long as they are interesting. They represent truth of a local type, and the truth we draw from these systems is more like a certainty, not demonstrable by deductive procedures.

NOTES

[1] Quoted in J. Horgan, "The Death of Proof," *Scientific American*, October 1993, p. 94.
[2] Ibid., p. 100.
[3] L. E. J. Brouwer, *Collected Works*, ed. by A. Heyting, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975, vol. 1, p. 475.
[4] Ibid., p. xiii.
[5] Ibid., p. 61.
[6] Ibid., p. 443.
[7] J. D. Barrow and F. J. Tipler, *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford University Press, Oxford, 1988, p. 4.
[8] Ibid., p. 22.
[9] Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, trans. by G. Morrow, Princeton University Press, Princeton, 1992, p. lvi.
[10] Ibid., p. 45.
[11] *Writings of Charles S. Peirce*, Indiana University Press, Bloomington, IN, 1993, vol. 5, pp. 294-295.
[12] E. Husserl, *Thing and Space*, trans. by R. Rojcewicz, Kluwer, Dordrecht, 1997, p. 297.
[13] Ibid., p. 323.
[14] Ibid., p. 298.

[15] *From Frege to Gödel*, ed. by J. van Heijenoort, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1967, p. 11.
[16] A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 1962, v. 1, p. 42.
[17] Proclus, ibid., p. lxii.
[18] L. Siorvanes, *Proclus*, Yale University Press, New Haven, CT, 1996, p. 105.
[19] Cf. F. G. Asenjo, "Relations Irreducible to Classes," "The Arithmetic of Term-Relation Number Theory," "Rings of Term-Relation Numbers as Non-Standard Models," and "Weierstrass' Final Theorem of Arithmetic is not Final" (this last written with J. M. McKean), all published in *The Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1963, vol. IV, pp. 193-200; 1965, vol. VI, pp. 223-228; 1967, vol. VIII, pp. 24-26; and 1972, vol. XIII, pp. 991-994, respectively.
[20] F. G. Asenjo, "Toward an Antinomic Mathematics," Chapter 15 in R. Routley, G. Priest, and J. Norman (eds.), *Paraconsistent Logic*, Philosophia Verlag, Munich, 1989, pp. 394-414.
[21] J. Gribbin, *Schrödinger's Kittens and the Search for Reality*, Little, Brown & Co., Boston, 1995, p. 172.
[22] E. A. Cornell and C. E. Wieman, "The Bose-Einstein Condensate," *Scientific American*, March 1998, p. 40.

ADDITIONAL REFERENCES

For a discussion of minimalist semantics, see P. Horwich's *Truth*, 2nd Ed., Oxford University Press, Oxford, 1998.

For a synthesis of global and local, see F. G. Asenjo, *In-Between: An Essay on Categories*, University Press of America, Washington, DC, 1988.

For a background on antinomic thinking, see F. G. Asenjo, "The General Concept of Antinomicity," *Foundations of Science*, Kluwer, Dordrecht, 1999, vol. 3, pp. 429-465.

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000)

REFLEXIONES FENOMÁTICAS

sobre la conferencia del Prof. Asenjo*

por

Eladio Domínguez**
Dept. Informática e Ingeniería de Sistemas
Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza
50008 Zaragoza (Spain)
e-mail: noesis@posta.unizar.es

Abstract. In this paper several reflection on truth, on infinite descents, on antinomicity,... are presented in the perspective of the phenomatic method. This method, considered as part of the general method of a phenomenological mathematics, intends to be of help in the development of a formal basis of the information sciences, just as current mathematics are a basis for physics.

1. Diseño y modelización. *En* las diferentes áreas de *la Informática se utilizan métodos muy variados* según sean sus campos de aplicación. Desde la Inteligencia Artificial al Análisis de Sistemas podemos encontrar métodos completamente formales, en ocasiones basados en la lógica, y métodos naturales sobre los que se desconoce cualquier tipo de formalismo. En esta selva de métodos, desde el más abstracto al más técnico, algo común se percibe. *Los más abstractos*, los que asumen un método formal matemático, son los que *orientan su campo de aplicación a la máquina*, mientras que *aquellos que adolecen de fundamento teórico* conocido son los que *dirigen su campo de aplicación al usuario de la máquina.* En ocasiones, en la llamada actitud aplicativa, es necesario que las dos orientaciones anteriores, en cierto sentido

* F. G. Asenjo, *La Matemática de la Oposición*, Universidad de Zaragoza, junio de 1999.

opuestas, convivan. Pero para estos casos no se ha desarrollado por el momento una metodología -con más precisión, un metamétodo- orientada a la integración de métodos con perspectivas tan opuestas, aparentemente. Ese es el caso de la gestión automatizada de la información. *Las aplicaciones informáticas* que hay que implementar en esas situaciones *deben tener una parte dirigida a cómo debe actuar la máquina y otra parte orientada a la gestión de la comunicación entre el usuario y la máquina* a través de la propia aplicación informática. *La primera* parte *proporciona a la máquina el 'conocimiento' necesario para la gestión, la segunda establece el canal de comunicación entre* esos dos mundos tan dispares en lo general y tan semejantes en lo particular: el de *la máquina y* el de *la persona.*

Por otra parte, está ampliamente aceptado por los expertos que antes de la implementación de una aplicación informática hay que realizar su diseño y especificación, sobre papel, con la intención de analizar previamente la aplicación, así detectar los posibles errores y establecer su adecuación a los objetivos que se persiguen. Con ello se consigue una mayor seguridad en la validez del producto que se implemente pero sobre todo se consigue un abaratamiento considerable de los costes de producción. A este campo de aplicación se dirige el área de *Diseño y Modelización*[1] de sistemas de información.

Cuando los sistemas son mínimamente complejos el diseño debe realizarse en varias fases -*diseño conceptual, diseño lógico, diseño físico*- cada una de las cuales recoge aspectos de un nivel de abstracción determinado con independencia, en principio, de los niveles de abstracción inferiores. El diseño comienza por el nivel más abstracto -diseño conceptual- y termina con el más cercano a la máquina -diseño físico- El diseño conceptual se realiza tomando como base un *documento de requisitos,* que es proporcionado por el grupo de analistas del sistema de información, en el que se recogen, en lenguaje natural, los requisitos de la aplicación informática que se desea desarrollar. Cada fase del diseño concluye con la elaboración de un documento, llamado *documento de especificaciones*, en el que se recoge formalmente la representación del sistema -el *modelo* propuesto- en conformidad con los requisitos planteados y a los aspectos representados en la fase anterior. El documento final de la fase de diseño es el documento de especificaciones físicas, documento en el que directamente deben apoyarse los programadores para el desarrollo de la fase final -la *implementación* de la aplicación informática-. La experiencia que se requiere en cada una de las fases nombradas es diferente y, por ello, en los grandes proyectos es necesario que cada una de ellas se lleve a cabo por un grupo particular de expertos.

** Zaragoza, octubre de 1999.

[1] En diseño utilizamos este término en vez de 'modelado' para hacer énfasis en que se representa algo percibido, que no se representa una imagen física.

De las observaciones anteriores se pueden extraer tres aspectos que son esenciales y forman parte integrante del área que nos ocupa:

1. *Cada fase* -en el diseño- *se apoya en la interpretación* de un documento que representa un sistema en un cierto nivel de abstracción.
2. *El objetivo final de cada fase* -del análisis, diseño e implementación- *es la representación* de un sistema, representación que debe ser interpretada correctamente en la fase siguiente[2].
3. *Las personas o máquinas* que deben interpretar un determinado documento[3] normalmente *tendrán conocimientos y experiencias diferentes*, por lo que las funciones cognitivas[4] que ejecuten como análogas tendrán matices que las distinguirán; personas con niveles de conocimiento distintos claramente se distinguen en su expresar y en su significar.

Estos aspectos, entre otros, me conducen a pensar que el método o métodos que se desarrollan para las áreas de la Informática orientadas a los usuarios -entre ellas, el diseño- deberían fundamentarse sobre el *método fenomenológico*. Este método, el fenomenológico, bajo mi punto de vista es muy general y conviene, por lo tanto, restringir sus objetivos a un campo particular del conocimiento, el de la Información. Ello me conduce a considerar matices especiales y a desarrollar un método distinguido, método que fundado sobre el fenomenológico y conservando sus raíces he dado en llamar *método fenomático*.

En general el término diseño se utiliza sólo cuando se hace referencia a las actuaciones en actitud aplicativa. El proceso termina con una representación de los aspectos del universo del discurso que se desean recoger. Para dicho proceso, el del diseño, se dispone de lo que se denominan *modelos*[5] que son concepciones abstractas, teorías, que proporcionan mecanismos para realizar la representación con arreglo a unas directrices que faciliten la comunicación y el

---

[2] Presuponemos que la máquina está programada de modo que puede interpretar, y reaccionar según proceda, la implementación final que realice el grupo de programadores o, quizás dicho con más corrección, el grupo de implementadores.

[3] Utilizamos el término 'documento' en el sentido más amplio posible. Bajo nuestra perspectiva, percibimos un documento cuando percibimos una información materializada sobre un soporte accesible, cualquiera que sea la naturaleza física de éste; de este modo consideramos como documento el conjunto de ficheros que almacenan el código implementado.

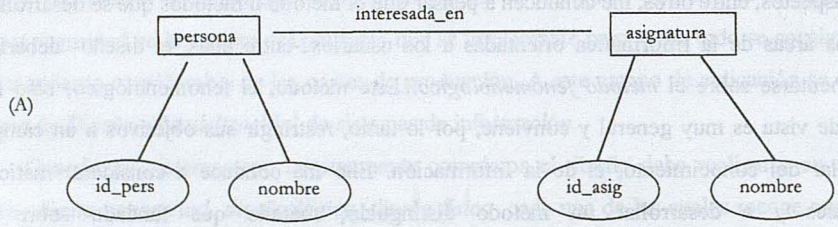
[4] No es éste el momento de reflexionar sobre si el conocimiento implementado en las máquinas es conocimiento o sobre si las funciones cognitivas que se simulan a través de una máquina -como el expresar, el interpretar, el reaccionar ante lo interpretado,....- pueden ser percibidas como funciones cognitivas propias de una máquina. Estas cuestiones de gran interés y que suscitan tanta polémica nos desviarían del objetivo principal de estas notas por lo que las dejamos para otra ocasión.

[5] En los sistemas de información se utiliza el término modelo con dos sentidos distinguidos: modelo como representación de un universo del discurso, modelo como representación de una forma de modelar. En metamodelización utilizamos el término metamodelo, en sustitución de modelo, cuando se utiliza con este último sentido.

análisis de lo representado. Para un mismo área, como las bases de datos, existen decenas de esos modelos que, en general, se pueden distinguir por el nivel -conceptual, lógico o físico- del diseño al que se dirigen.

Es difícil que un modelo previamente existente se adapte en su totalidad a las exigencias de un entorno de desarrollo concreto. Por ello los expertos suelen adaptar los modelos a sus entornos particulares, adaptaciones que posteriormente dificultan extraordinariamente la comunicación entre los diferentes entornos. Por ello surge lo que se denomina *Modelización*, que refiere a los procesos orientados a la construcción de nuevos modelos o a la adaptación de modelos previamente construidos.

2. Un caso. Supongamos que, tras el análisis de un sistema de información concreto, representamos los aspectos percibidos que interesan de la siguiente forma



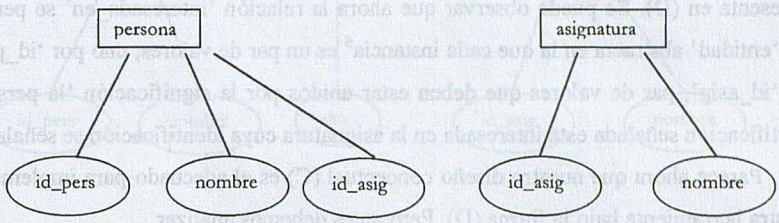
En ella se refleja intensionalmente que se distinguen dos 'entidades' referidas genéricamente por 'persona' y 'asignatura'. Sobre cada una de ellas se expresan genéricamente algunas propiedades o 'atributos': identificación y nombre para ambas. Entre dichas entidades también se refleja genéricamente la existencia de una relación bajo el sentido /persona\interesada_en/asignatura\.

En la anterior representación -llamada formalmente *esquema*- se ha utilizado un modelo de los llamados *entidad/relación*. Por las reglas que proporciona el modelo, además de lo expuesto se debe interpretar que una persona concreta se describirá sólo por su identificación y su nombre. Además entre cada persona y asignatura concreta podrá representarse el interés de la persona por la asignatura. Obsérvese que no se representa la forma en cómo debe establecerse el enlace anterior en los casos concretos; solamente se refleja intensionalmente su existencia. Del mismo modo tampoco se reflejan las formas sintácticas concretas en que se deben describir los valores de los atributos.

Una vez expuesto el anterior esquema nos debemos preguntar si recoge 'adecuadamente' el mundo percibido en relación a los objetivos que queremos conseguir. Supongamos que deseamos construir una base de datos para la gestión de la información

representada intensionalmente por el esquema anterior y supongamos que la herramienta informática que vamos a utilizar para su implementación es de las llamadas relacionales. Entonces, el esquema anterior que puede ser considerado en un nivel conceptual independiente de la herramienta que se utilice, debe ser transformado en un esquema que se perciba en el nivel lógico, nivel que estará adaptado al tipo de herramienta, en este caso relacional.

(B)

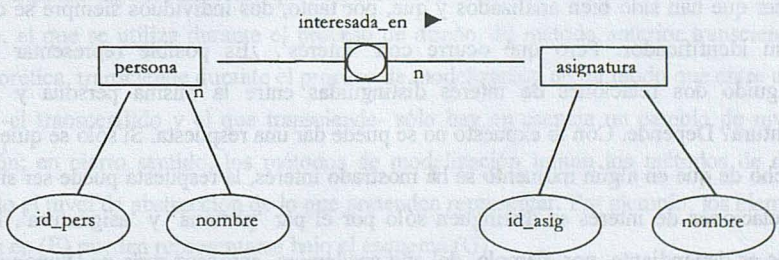


En las herramientas relacionales, el enlace 'interesada_en', dibujado en el esquema (A), sólo puede establecerse añadiendo un atributo, en cierto modo forzado, a una o ambas entidades que permita enlazar por igualdad de valor. Por ello, una posible solución sería transformar el anterior esquema (A) en el (B). Pero un experto en el diseño relacional debe saber que la solución propuesta puede ser muy incómoda, muy poco adecuada, en el caso en que una persona esté interesada en más de una asignatura. Ello es debido a que debemos representar el interés de una persona concreta, por las características propias del modelo, por una multiplicidad de 'tuplas', una por cada asignatura en la que esté interesada, repitiendo innecesariamente su nombre como en

'I10'	'Juan'	'BD'
'I10'	'Juan'	'SO'
'I10'	'Juan'	'IA'

De este análisis resulta que el esquema inicial (A) no es adecuado para nosotros; conviene cambiarlo por el esquema (C).

(C)



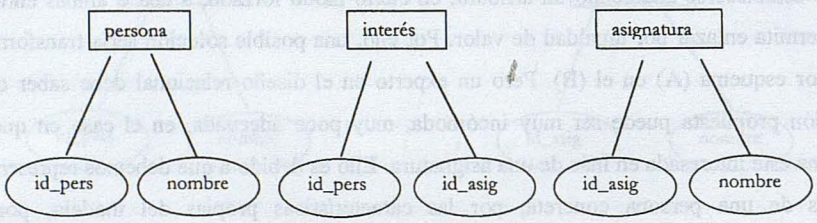
Este es un esquema confeccionado con otro tipo de modelo entidad/relación en el que podemos representar la relación 'interesada_en' bajo otra semántica. Se percibe como una

categoría de objetos, de un tipo que llamamos 'asociación', cada uno de los cuales es una relación, bajo el sentido que se percibe genéricamente en la frase. Además de esa relación explícita bajo la forma de asociación, existen otras dos que deben percibirse en este esquema, son las 'relaciones de participación' de las entidades 'persona' y 'asignatura' en la asociación 'interesada_en'.

Ahora, el anterior esquema puede transformarse en uno relacional tal como se representa en (D). Se puede observar que ahora la relación 'interesada_en' se percibe como una 'entidad' abstracta en la que cada instancia[6] es un par de valores, uno por 'id_pers' y otro por 'id_asig', par de valores que deben estar unidos por la significación 'la persona con la identificación señalada está interesada en la asignatura cuya identificación se señala'.

Parece ahora que nuestro diseño conceptual (C) es el adecuado para implementarlo con nuestra herramienta bajo la forma (D). Pero antes debemos analizar

(D)



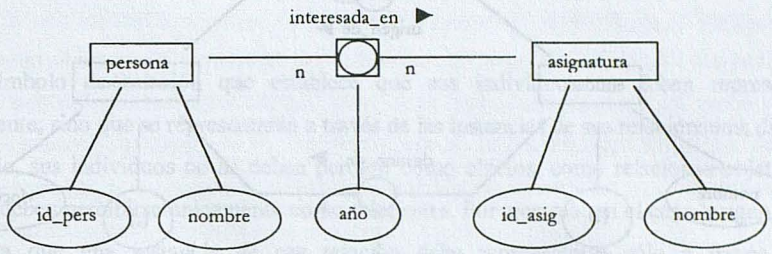
si se adecua al mundo o sistema que se ha percibido. Entre otras preguntas que uno se debe hacer hay una primaria: en lo relativo a las categorías representadas en el esquema (D) ¿se pueden representar sus individuos de forma biunívoca a través de los atributos fijados? Dicho de otro modo, ¿pueden existir individuos distinguidos en la misma categoría que tienen los mismos valores en los atributos fijados en el esquema?

Puesto que 'persona' y 'asignatura' tienen sus respectivos identificadores, podemos suponer que han sido bien analizados y que, por tanto, dos individuos siempre se distinguen por su identificador. Pero qué ocurre con 'interés'. ¿Es posible representar de modo distinguido dos relaciones de interés distinguidas entre la misma persona y la misma asignatura? Depende. Con lo expuesto no se puede dar una respuesta. Si sólo se quiere reflejar el hecho de que en algún momento se ha mostrado interés, la respuesta puede ser sí; es decir, dos relaciones de interés se distinguen sólo por el par 'persona' y 'asignatura'. Pero si el interés es dependiente, por ejemplo, del año académico, entonces sería no. Supongamos que

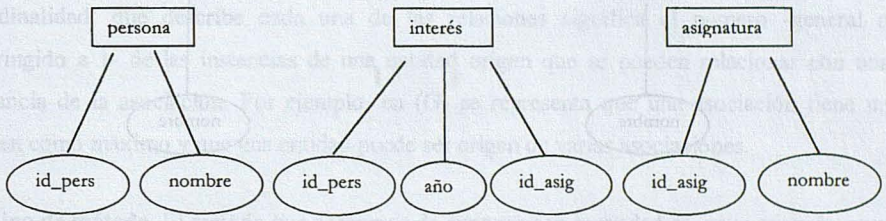
[6] *Instancia* es la representación de un individuo referido por la categoría.

dos relaciones de interés siempre se distinguen por la persona, la asignatura y el año. Entonces los dos diseños -conceptual y lógico- anteriores hay que modificarlos a los dibujados en (E) y (F).

(E)

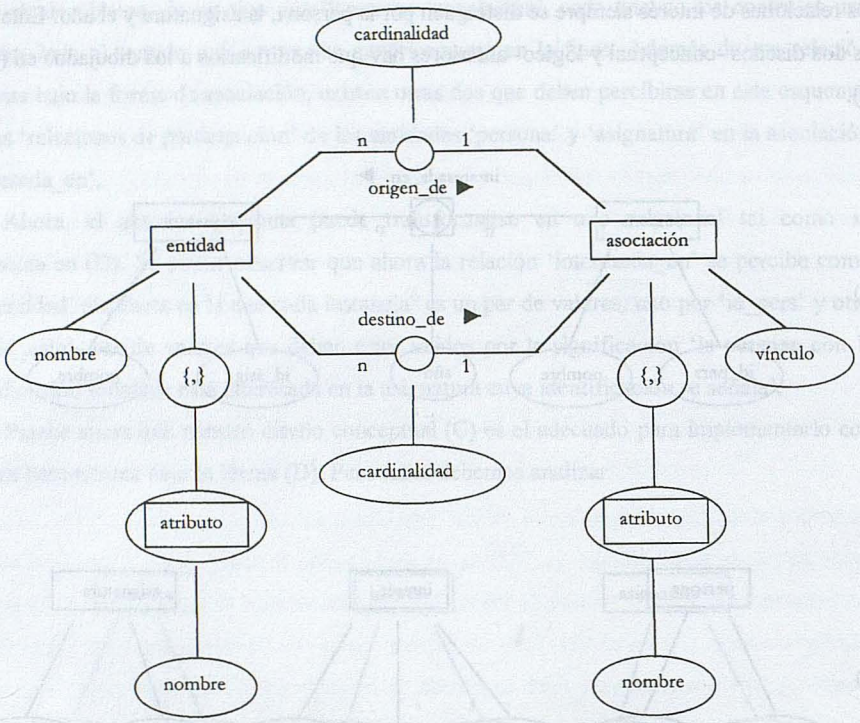


(F)

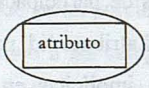


Sólo como observación: las relaciones de participación percibidas en (E) se perciben, por ejemplo, en (F) igualando los valores del atributo 'id_pers' de 'persona' a los de 'id_pers' de 'interés'. Las relaciones de asociación implícitas en (E) se perciben igualando, por ejemplo, el valor del atributo 'id_pers' de 'interés' al de 'id_pers' de 'persona'.

3. Sobre el método. Aunque el ejemplo que he presentado es muy simple, creo que me ha permitido exponer algunos aspectos que son esenciales en el método que se utiliza en actitud aplicativa, el que se utiliza durante el proceso de diseño. El método anterior transciende en actitud teorética, transciende durante el proceso de modelización de tal modo que entre ambos métodos -el transcendido y el que transciende- sólo hay en esencia un cambio de nivel de abstracción; en cierto sentido, los métodos de modelización imitan los métodos de diseño cambiando el nivel de abstracción de lo que pretenden representar. Por ejemplo, los elementos utilizados en (E) pueden representarse bajo el esquema (G).



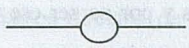
Notemos que aparece un tipo nuevo de 'entidad' -una 'metaentidad'- que representamos por



cuyo único papel es utilizar la categoría reflejada por el nombre como descriptiva -en este caso 'atributo' describe tanto a 'entidad' como a 'asociación'- y que en toda circunstancia sus individuos se deben representar mediante los atributos que la describan -en la anterior situación, por 'nombre' en ambos casos-. El símbolo

que se sitúa encima del segmento que une una categoría descriptiva a una descrita representa que los individuos de la categoría descrita se describen por un conjunto de instancias de la categoría descriptiva; en el ejemplo anterior, por ejemplo, se ha representado que una entidad

se describe por un nombre y por un conjunto de atributos de modo que cada uno de los atributos se describe mediante un nombre. El símbolo



es un símbolo de relación que establece que sus individuos no deben representarse directamente, sino que se representarán a través de las instancias de sus relacionados; dicho de otro modo, sus individuos no se deben percibir como objetos, como relaciones objetivadas, sino que deben percibirse únicamente como relaciones. Por ejemplo, en el caso 'origen_de' se representa que una instancia de esa relación debe representarse sólo a través de la representación de la entidad y la asociación de la que es origen; obsérvese cómo se ha representado en el caso del esquema (E), en el que la entidad 'persona' es origen de la asociación 'interesada_en'. Finalmente, el atributo -más apropiadamente, metaatributo- 'cardinalidad' que describe cada una de las relaciones significa el número -general o restringido a 1- de las instancias de una entidad origen que se pueden relacionar con una instancia de la asociación. Por ejemplo, en (G) se representa que una asociación tiene un origen como máximo y que una entidad puede ser origen de varias asociaciones.

4. Tipo de método. El método que acabamos de exponer con brevedad es, en apariencia, muy diferente al método matemático usual. Sin embargo algo tienen en común, como vamos a mostrar a continuación, que nos hace sentirlos como no tan distintos.

En el método deductivo tradicional se presenta algo como consecuencia de otra cosa utilizando unos mecanismos de razonamiento deductivos. Bajo dicho método entonces es necesario establecer qué cosas se aceptan como consecuencias de otras, para lo que es necesario fijar qué mecanismos de razonamiento son considerados como válidos.

En el caso que he expuesto anteriormente *se muestra* algo *-un esquema- como consecuencia de* otra cosa *-un universo percibido- utilizando mecanismos* particulares de significación llamados *de representación*. También en esta situación es necesario establecer qué representaciones se aceptan y, para ello, qué mecanismos de significación son considerados como válidos.

Además del paralelismo anterior se observa otro. Ambos métodos utilizan una primitiva para elaborar sus correspondientes estructuras; el símbolo, en el primer caso, la expresión en el segundo. *La matemática* usual *utiliza el símbolo como representación despojada de toda*

referencia a los objetos aplicativos; por el contrario, la teoría que pretendemos desarrollar los tiene presentes.

Por las razones expuestas y otras que no conviene mostrar en este momento por no alargar innecesariamente estas reflexiones y por no ser ese uno de los objetivos importantes de éstas, percibo el método expuesto anteriormente como un método muy cercano al matemático que sólo se distingue por los procesos primitivos que utilizamos. De este modo, si se puede hablar de una matemática deductiva, como la matemática construida con el método deductivo, considero oportuno hablar de una *matemática de la representación*, como aquella que sería desarrollada mediante el *método representativo*.

5. Sobre la verdad. *La verdad no se encuentra en la cosa sino en cómo se percibe*. Sujetos distintos o el mismo sujeto en distintos momentos pueden sentir la misma cosa como verdadera y como falsa. La verdad es completamente circunstacial, la verdad depende del sujeto y del tiempo. *La verdad de una cosa es el resultado de un proceso cognitivo*, es el resultado de una vivencia, es el resultado de un proceso de valorar.

En el caso mostrado anteriormente se puede observar sin duda la dependencia de la verdad, en el área del diseño y de la modelización, del sujeto, del tiempo y, particularmente, de los objetivos que se desean alcanzar. Pero quizás no está claro el sentido particular de verdad que adoptamos. Sobre ello vamos a presentar las siguientes reflexiones.

En primer lugar vamos a reflexionar sólo sobre la *verdad de la razón*, verdad que *se puede entender sobre algo al percibirlo como adecuadamente mostrado mediante el razonar*. Ese razonar puede establecerse en actitud natural, mediante lo que se llama razonamiento natural, o en actitud formal, mediante, por ejemplo, razonamiento matemático. *La verdad puede ser percibida directamente cuando el razonamiento es realizado por el propio sujeto o indirectamente cuando se acepta que otro sujeto la ha mostrado adecuadamente mediante razonamiento*. Es la diferencia entre la verdad del teorema demostrado por nosotros mismos o la verdad del teorema, cuya demostración nunca hemos comprobado, pero que aceptamos como adecuadamente demostrado.

En todo caso *la verdad siempre es subjetiva* no sólo porque el sujeto es el que realmente debe aceptarla, sino también por el hecho de que también debe aceptar los mecanismos de razonamiento que han sido utilizados. En ocasiones aceptamos un teorema como cierto aunque aún no hallamos encontrado una demostración y en ocasiones nos sentimos incrédulos ante un teorema sobre el que se nos afirma que alguien lo ha demostrado. Sobre estas cuestiones conviene que pongamos como ejemplo el famoso 'Teorema de la Curva de Jordan'. Mediante este teorema se afirma que 'toda curva continua, dibujada en el plano sin

autointersecciones, divide al plano en exactamente dos regiones'. El enunciado que se afirma se nos da tan intuitivamente como cierto que resulta prácticamente imposible dudar de él. A pesar de la simplicidad de su enunciado, la demostración de dicho teorema es realmente muy compleja si se realiza con mecanismos directos de la topología del plano real. Tal es su complejidad que la literatura especializada está plagada de demostraciones pretendiendo presentar una adecuada demostración; sin embargo en la mayoría de ellas, aunque en su momento fueron aceptadas como válidas, se han encontrado argumentos que las invalidan como demostraciones correctas.

La aceptación de los mecanismos de razonamiento para la demostración ha sido y sigue siendo uno de los puntos más delicados en relación a la aceptación de la verdad matemática. De los numerosos ejemplos que tenemos en la historia quiero traer a colación, no sólo por su actualidad sino por la relación con el tema que nos ocupa, las verdades mostradas mediante los lenguajes de programación. Si nos remitimos a los programas que ejecutan un proceso, dichos objetos -los programas- han sido construidos por un programador representando, en ocasiones mediante cientos de líneas de programa, cómo debe realizar el proceso la máquina. Posteriormente, una vez confeccionado el programa e implementado en una máquina, ésta lo procesará y obtendrá unos resultados concretos. En lo que acabamos de describir hay dos procesos de razonamiento distinguidos: el que puede establecer que el programa es correcto y que, sin ninguna duda, ha sido seguido por el programador o grupo de programadores, y el que establece que la máquina ha funcionado correctamente para obtener, a partir del programa, el resultado, proceso que habrá sido implementado previamente en la máquina, en general, por otros programadores.

Los razonamientos que emplea un programador, aunque sean sobre objetos matemáticos, son diferentes de los razonamientos usuales matemáticos. Los razonamientos en programación son incluso dependientes del lenguaje de programación que se utilice. Por ello es comprensible que en ocasiones no sean aceptadas como pruebas matemáticas si a la prueba matemática se le da un sentido restringido a un cierto tipo de razonamientos. Bajo mi punto de vista, dicha postura es errónea y no conforme a lo que la propia historia de las matemáticas nos muestra. En todo caso conviene y es obligado realizar un esfuerzo en hacer ver que *esas verdades mostradas mediante la programación de la máquina se apoyan en unos procesos tan formales*, o puede que más, *como los que son usuales en la matemática que se representa en papel.*

Además de estas verdades están otras como la *verdad del expresar*, verdad que *se puede entender sobre algo al percibirlo como adecuadamente mostrado mediante el expresar*, adecuadamente mostrada en su sintaxis y en su semántica o significado. Algo como

blanco

se puede percibir como adecuado en el expresar, como verdad en el expresar, al sentir que está correctamente escrita y sentimos que se quiere expresar un tipo de color. Otro sujeto puede llegar también a la misma conclusión pero sintiendo, en su caso, que el significado expresado es objeto sobre el que una persona está tirando piedras. Sobre

vlanco

podemos sentir que aunque está adecuadamente expresado el significado es incorrecta la sintaxis y, finalmente, sobre

lanco

pudiera ser que *percibiéramos su falsedad* como resultado de un expresar, *como objeto que no muestra adecuadamente una expresión.*

Otra *verdad* es la *del representar*, verdad que *se puede entender sobre algo al percibirlo como adecuadamente mostrado mediante el representar* y, en relación a nuestro interés particular, de forma similar consideramos *la verdad del interpretar.* Así de este modo se puede entender que *siento la verdad* como asociada a un proceso cognitivo percibiendo algo como adecuadamente concluido por un proceso concreto, percibiendo algo como nóema de un proceso, *percibiendo algo como nóema de una nóesis.*

Como hemos hecho notar se puede sentir el valorar bajo vivencias con el mismo modo dóxico pero matizadas de forma distinguida a través de sus respectivos modos atencionales[7]. Pero también se puede sentir el valorar bajo vivencias sentidas con modos atencionales esencialmente distinguidos.

Además de las señaladas hay otro tipo de verdades que son las *verdades de hecho*, *verdades* que se nos dan en sí *sin* que ningún *proceso* sea necesario establecer *para concluir la verdad.*

En relación al significar, como proceso que se desencadena en el lenguaje cotidiano, utilizamos términos que sentimos como adecuadamente significados sin que sobre ellos reflexionemos para establecer que es así, que han sido utilizados adecuadamente. En general, las frases fluyen oralmente sin que reflexionemos, sin que pensemos, sobre si cada una de las palabras o frases que estamos utilizando están adecuadamente utilizadas según nuestra intención en el significar. Cada una de ellas es una verdad de hecho, cada una se siente adecuada, en un sentir no reflexivo, en un sentir que se siente, que no se refiere, que está presente con una relación de presencia que puede ser utilizada, si es necesario, para

[7] E. Domínguez, *Un paseo fenomático*, Academia de Ciencias de Zaragoza, 1999; pág. 46.

reflexionar sobre la adecuada significación de la palabra. Ese es el caso en que se nos plantea alguna duda sobre la significación de una palabra utilizada; quizás volvamos sobre ella, reflexionemos y concluyamos que realmente es falsa; o quizás sea necesario razonar, establecer mediante algún proceso que se trata de una verdad de la razón.

Por el contrario, como parte de nuestra forma natural de adquisición de conocimiento, *verdades de la razón pueden sentirse posteriormente como hechos*. El 'Teorema de la Curva de Jordan', en las condiciones usuales de su enunciado, generalmente es considerado por todo especialista en Topología como un hecho; lo utiliza sin más, no duda sobre su verdad, pero además, y esto es lo importante, no es objeto de una vivencia -de un proceso- cuyo modo atencional se dirija a establecer su verdad salvo, claro está, que pretenda mostrar que es una verdad de la razón.

Aunque sea volver hacia algo ya mencionado es importante en este punto hacer notar que cuando se dice 'mostrar que es una verdad de la razón' no nos estamos refiriendo a que la verdad mostrada es absoluta, inamovible, sino que *la verdad mostrada se percibe como tal, como verdad de la razón, mientras no se nos muestre lo contrario*.

En un sentido semejante al expresado antes, *verdades de hecho pueden necesitar que se establezcan como verdades de la razón* para que, quizás, posteriormente vuelvan a ser sentidas como verdades de hecho.

Bajo nuestra perspectiva, *todo esquema* -intensión- de una base de datos *se da como una verdad del representar*; cada diseñador se habrá probado a sí mismo que el esquema está adecuadamente mostrado mediante el representar. *Pero* es esencial *también* que lo perciban *como adecuadamente mostrado mediante el interpretar*; es decir, deben percibir que toda persona a la que se comunica el esquema interpretará el documento en conformidad con la intencionalidad expresada. Es obligado que las dos verdades se den como se ha indicado, como verdades de la razón con objeto de que los grupos de trabajo, en su actividad ordinaria, puedan percibir posibles anomalías y así establecer un control de calidad.

En otro tipo de fases, como la *explotación*, cuando la base de datos sea utilizada según sus fines, existirá una primera época en la que quizás los usuarios finales deberán familiarizarse con ella, deberán pasar por una época de aprendizaje en la que percibirán parte de los elementos intensionales como verdades del interpretar; es decir, una época en la que tendrán que realizar procesos cognitivos dirigidos a comprender cosas sobre las que no sienten un significado inmediato, sobre aquellas que no las perciben como verdades de hecho. Pero, en general, si la base de datos ha sido adecuadamente construida para el interpretar, pasada esa primera época de aprendizaje debe llegar un momento en que todas las partes del esquema se deberían convertir en verdades de hecho para los usuarios cotidianos.

Considero que lo dicho sirve como muestra de mi sentir sobre la verdad fenomática. Quizás sería obligado detallar más algunos de los aspectos que he esbozado pero ello alargaría de modo inapropiado estas notas. Tan sólo quiero mencionar un último aspecto que está relacionado con lo expresado por el Prof. Asenjo en sus conferencias.

Como ya hemos mencionado, en una base de datos se deben distinguir dos partes: la intensión -es decir, el esquema- y la extensión -o sea , los datos-. Al contrario que en el caso del esquema, se pretende que los datos sean verdades de hecho[8]. Por otra parte, con objeto de que la *base de datos* que se tenga en la fase de explotación sea *fiel* -sea conforme con la realidad representada- conviene imponer lo que se llaman *restricciones de integridad*, condiciones que limitan la libertad sintáctica de las expresiones que se pueden utilizar como datos. Por ejemplo, en el caso de los diseños (E) y (F) podríamos imponer que los datos de 'año' fueran cadenas de cuatro dígitos en los que el primero siempre fuera '1'.

Para la comunicación de las restricciones de integridad, entre otras cosas, necesitamos referir, en actitud hipotética, a hechos concretos determinados, a hechos concretos sin determinar y a hechos sin concretar. Por ejemplo, a un dato del atributo 'año' antes mencionado nos podemos referir, hipotéticamente, de tres formas distintas:

1. Como un *hecho concreto determinado*, como cuando nos referimos al año de la primera tupla de la tabla 'persona', en el que nos referimos a algo que no podemos percibir directamente en el momento en que se refiere, debido a nuestra actitud hipotética, pero que se habla de él *como un hecho concreto mediante una referencia que determina su percepción.*
2. Como un *hecho concreto indeterminado*, *como* cuando nos referimos que si en una tupla de la tabla 'persona' se percibe un año representado por '1900' debemos cambiarlo a '2000'; obsérvese que se trata de *un hecho concreto referido hipotéticamente sin que la referencia determine su percepción.*
3. Como un *hecho sin concretar*, como una variable informática, *como un símbolo que en todo instante refiere* a un hecho, *hecho que no se puede concretar*, símbolo que será utilizado en la expresión de un proceso de modo que en su ejecución deberá tomar un valor concreto, deberá sustituirse por un hecho concreto. Ese es el caso de año en

'en año eliminar los dos primeros dígitos'

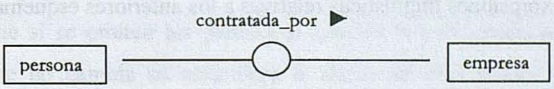
[8] Me estoy refiriendo a las bases de datos relacionales en las que los datos se deben percibir, salvo excepciones, como elementos de información primitivos. En otro tipo de bases de datos, como las bases de datos relacionales anidadas, lo dicho debe aplicarse siempre a los datos que son considerados como primitivos.

No debe confundirse la variable informática con la variable matemática utilizada con la semántica ordinaria, variable que, en general, no refiere a un hecho. Cuando decimos 'sea x un elemento del conjunto P', la variable x suele referir hipotéticamente a un elemento indeterminado del conjunto P, elemento sobre el que no se afirma ni se niega su existencia; en particular se admite que el conjunto P puede ser vacío. Sin embargo, cuando se refiere como un hecho sin concretar -como variable informática- el conjunto P debe ser no vacío pues en la propia expresión se supone la percepción -se refiere como un hecho- del elemento x. El referir a través de x a un elemento de P que se percibe como un hecho sin concretar está íntimamente relacionado con la matemática constructiva. Pero eso será motivo de otras notas.

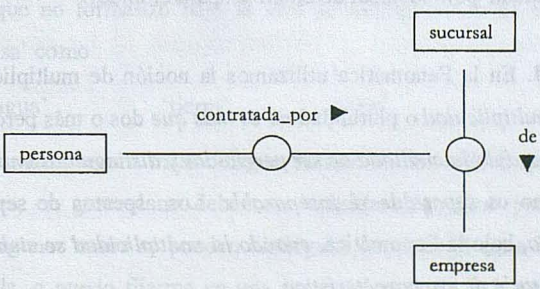
6. Sobre el descenso infinito. Con frecuencia es admitido implícitamente por los autores dedicados a la teoría de la modelización, aunque posiblemente no lo hagan con el conocimiento de causa que sería propio. En nuestra idea, y al amparo de la Fenomática, *es considerado como uno de los principios básicos*: Cualquier cosa puede percibirse como una multiplicidad de partes, el límite es dependiente de la potencia perceptiva, del conocimiento y deseos (o intenciones) del sujeto y, sobre todo, de la actualidad.

Podemos percibir algo representado mediante la entidad

Podríamos profundizar en su conocimiento y expresar la entidad ahora como el esquema

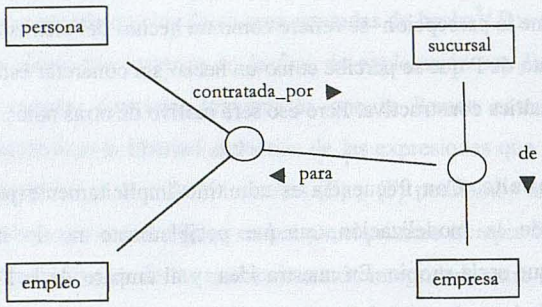


Y seguir, modificando la percepción de una de las partes



que corresponde a que una persona siempre es contratada, cuando lo es, por una sucursal determinada.

Lo anterior es un ejemplo típico d*el* descenso infinito, *descenso infinito potencial*, que *debe ser admitido en toda teoría de modelización.* Nótese la diferencia con la percepción de nuevos rasgos como en el caso



donde no se ha producido descenso ni ascenso, ha sido una expansión en el conocimiento expresado, mediante una relación ternaria que expresa para qué es una persona contratada.

Compárense las expresiones lingüísticas relativas a los anteriores esquemas

contrato
/persona\contratada_por/empresa\
/persona\contratada_por//sucursal\de/empresa\\
/persona\contratada_por//sucursal\de/empresa\\para/empleo\

7. Sobre la multiplicidad. En la Fenomática utilizamos la noción de multiplicidad bajo el término pluralidad. *Una multiplicidad* o pluralidad *no es más que* dos o más perceptibles, *dos o más cosas a las que se les dota la cualidad de ser percibidas y distinguidas entre sí.*

Esta multiplicidad no es *separable* ni *inseparable*. Los aspectos de separabilidad o inseparabilidad *se dan sólo*, bajo la Fenomática, *cuando la multiplicidad se siente con algún otro aspecto que puede dotarle de esa característica.*

Cuando percibimos una categoría como 'persona' que refiere a la multiplicidad de las personas, en este caso se percibe como multiplicidad sin ninguna característica de

separabilidad pues dicha multiplicidad está en el terreno de lo exclusivamente referencial.

Cuando percibimos dos o más personas, estamos ante una multiplicidad concreta determinada. Cuando referimos a un estado de percepción de los individuos de la categoría 'persona' estamos ante una multiplicidad concreta sin determinar; es una referencia hipotética a un hecho concreto sin determinar. En ambas situaciones la multiplicidad es separable. Si prescindimos de una persona concreta -determinada o indeterminada, según sea el caso- no cambia la naturaleza de la multiplicidad -de su rasgo particular- que en un caso -en el último- es el estado hipotético de percepción de los individuos de 'persona' y en el otro un estado concreto determinado.

Las multiplicidades separables sólo las percibo en actitud aplicativa. Por el contrario *las inseparables sólo las siento en actitud teorética.* Casos de este último tipo son todos los que forman parte de una definición formal. Por ejemplo, en un esquema no se puede omitir una entidad que forma parte de una asociación pues lo que quedaría no se admite como esquema por principio que se impone en actitud teorética.

Si en una persona percibo partes -como cabeza, tronco, brazos, piernas- y omito una de ellas -por ejemplo, piernas- lo que nos queda sigue siendo partes de una persona, independiente de la causa de la omisión: sea porque la persona que estamos percibiendo no tiene piernas, sea porque no nos queremos fijar en dicha parte. Todo ello es correcto, bajo mi punto de vista, salvo en el caso que definamos formalmente que las partes de toda persona son las señaladas. Pero este mecanismo no debe ser utilizado en modelización por los problemas de inconsistencia con el mundo representado a que dan lugar. En cualquier caso, lo que es admitido es que si se omiten las piernas se cambia la percepción de persona pero, lo que importa, es que no cambia su naturaleza o, dicho de otro modo, es adecuado decir que seguimos percibiendo partes de una persona.

Todo ello sin menoscabo de otra separabilidad que sí percibo en ciertas familias de partes pero que no formalizo bajo la idea de multiplicidad. Es el que viene dado por los términos 'masa' como

'agua' 'tierra' 'aire'

Si percibimos partes en una masa de agua, aunque podamos decir que esa es una parte de agua y aquella otra, en general no deben ser consideradas como partes distinguidas entre sí. Aunque en algunos casos se pueden distinguir, como es el agua de este vaso y el agua de aquella botella, o puedo fijarme en una parte del agua de la botella, la situada en la mitad inferior, y en otra parte, la situada en la mitad superior. Pero en este caso las partes son ficticias; los elementos propios del agua se están moviendo constantemente y, cuando

percibimos la mitad superior, una vez percibida la mitad inferior, no podemos asegurar que algún átomo de la parte superior no sea alguno de los que constituían la masa de agua percibida anteriormente como mitad inferior de la botella. El problema de los términos 'masa' es que no toda percepción de 'agua', por ejemplo, puede ser considerada como individuo referido por 'agua' en el sentido formal que he establecido en la Fenomática. Sólo pueden ser admitidos aquellos individuos que son separables del resto de individuos de la categoría -*dos individuos de una categoría son dos perceptibles que puedan ser distinguidos entre sí*-.

8. Sobre las antinomias. *En los procesos de diseño y especificación se admiten inconsistencias, incompletitudes y operaciones opuestas con objeto de que el proceso sea más operativo*. Cuando el sujeto determina que el proceso ha concluido, entonces es cuando no se admiten antinomias, ni ninguna inconsistencia con el objetivo propuesto.

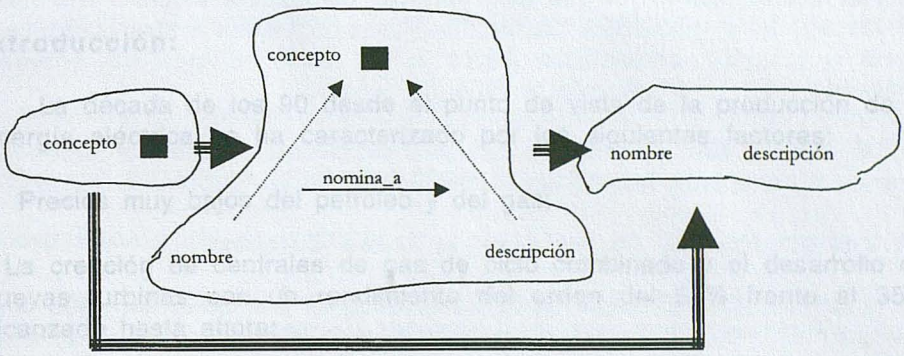
Quizás nuestro objetivo sea crear una antinomia pero, en este caso, lo creado no es antinómico; la descripción no es antinomia, la antinomia se percibe en lo que refiere la descripción. Dicho de otro modo, la antinomia no es la expresión sino que es aquello que posiblemente refiera la expresión, lo que posiblemente describa, lo que se interprete al percibirla.

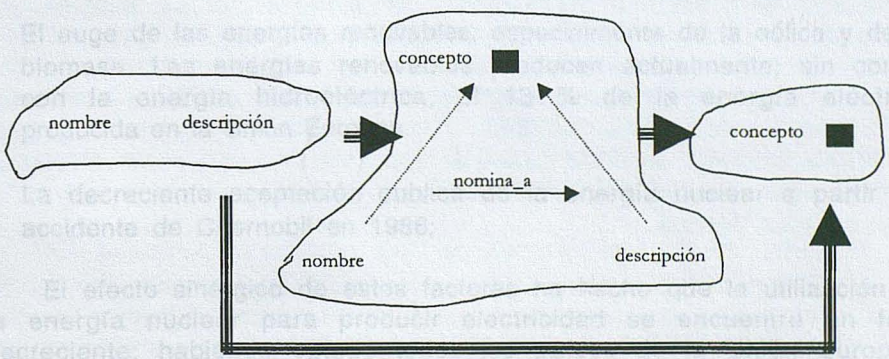
En todos los procesos que solemos utilizar siempre presentamos de modo más o menos explícito los procesos opuestos -los opuestos antinómicos-. En el campo de la modelización, en general, no se dedica atención a los procesos. Los procesos son de interés en el análisis de la dinámica de los sistemas pero, aunque se entiende que su conocimiento es esencial, la mayor parte de los esfuerzos se han orientado al análisis de los aspectos estáticos. Aunque existen importantes contribuciones en el estudio de los sistemas dinámicos, poco se ha realizado desde la perspectiva de la modelización. Alguna contribución estamos intentando, formalizando la noción de transformación entre modelos; en esta noción admitimos transformaciones primitivas que se presenta por pares, cada una opuesta a la otra.

Las transformaciones opuestas son necesarias para que en los procesos podamos realizar reconsideraciones, *podamos volver sobre nuestros pasos*. También es necesario debido a que los procesos no siempre son lineales, no siempre es la mejor forma la de la abstracción constante, ni la de la singularización constante, ni la de la expansión constante, ni la de la contracción constante. Lo natural es que en los procesos de diseño se realice en una parte una contracción y después, quizás en otra, una dilatación.

Una estructura fenomática es en sí antinómica, aunque se percibe de modo estático. En la siguiente. Obsérvese que en ambos casos existe una estructura intermedia que se percibe como la misma; ello se debe a que la estructura fenomática dada recoge estáticamente las dos

perspectivas antinómicas. Por ello, en ella se pueden percibir los dos procesos si se dan las reglas convenientes. La percepción como multiplicidad se inicia en la percepción del cuadrado negro, el cual nos conduce, por referencia, a la percepción de sus partes. La percepción como unidad se inicia percibiendo inicialmente la multiplicidad, tras lo cual tenemos la posibilidad, si percibimos las presencias, de percibir la unidad, de percibir la multiplicidad como unidad.





Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000)

La Energía Nuclear en Europa

Antonio Tricas Aizpun
Licenciado en Ciencias Físicas-Universidad de Zaragoza.
Diploma en Ingeniería Nuclear-Instituto de Estudios Nucleares.
Universidad Complutense de Madrid.

Introducción:

La década de los 90 desde el punto de vista de la producción de la energía eléctrica se ha caracterizado por los siguientes factores:

- Precios muy bajos del petróleo y del gas;

- La creación de centrales de gas de ciclo combinado y el desarrollo de nuevas turbinas con un rendimiento del orden del 55% frente al 35% alcanzado hasta ahora;

- Una gran competitivad entre los fabricantes/constructores de centrales térmicas de combustibles sólidos que ha disminuido su precio en el mercado;

- El auge de las energías renovables, especialmente de la eólica y de la biomasa. Las energías renovables producen actualmente, sin contar con la energía hidroeléctrica, el 13 % de la energía eléctrica producida en la Unión Europea.

- La decreciente aceptación publica de la energía nuclear a partir del accidente de Chernobil en 1986;

El efecto sinérgico de estos factores ha hecho que la utilización de la energía nuclear para producir electricidad se encuentre en fase decreciente; habiendo optado todos los países de la Unión Europea, excepto Francia, por la construcción de centrales de gas. La construcción de centrales de gas supone una menor inversión en capital y tiempo, además, el bajo precio del gas durante los 90 ha dado lugar a que el precio del Kw-h producido en este tipo de centrales tenga un menor coste que el producido en las centrales nucleares.

La presente crisis petrolífera, la inestabilidad política permanente en la mayoría de los países productores de petróleo o de gas y en los

países por donde pasan las redes de suministro hacia la Unión Europea, unido a la necesidad de reducir las emisiones[1] de los gases que producen el efecto invernadero[2] en un 8% en el periodo 2008–2012, respecto al nivel de las emisiones de estos gases en 1990[3], ha hecho reflexionar a determinados sectores industriales, económicos y políticos sobre la utilización de la energía nuclear para la producción de energía eléctrica.

Como resultado de esta reflexión, la energía nuclear es considerada por estos sectores como una fuente de energía válida para producir energía eléctrica en un futuro a medio plazo, hasta que los problemas fundamentalmente tecnológicos que presenta actualmente la fusión nuclear sean resueltos, o que la generación de energía eléctrica a través de las energías renovables pudiera realizarse de forma intensiva con un coste económico competitivo frente a las otras fuentes de energía utilizadas para la producción de energía eléctrica.

El fin de este artículo es dar una visión del estado actual de la energía nuclear para la producción de electricidad en la Unión Europea.

La Energía Nuclear de fisión en la Unión Europea:

Las centrales nucleares de la Unión Europea produjeron en 1998 una energía de 800 Twh que corresponde al 15% de la energía total demandada en la Unión y al 34% de la energía eléctrica consumida.

Para producir esta misma cantidad de energía eléctrica con centrales térmicas utilizando carbón, gas o petróleo, como combustible, serían necesarias 68,8 millones de toneladas de petróleo, ó 105,6 millones de toneladas de carbón ó 75.680 millones de metros cúbicos de gas.

La producción de esta energía eléctrica en las centrales nucleares evita una emisión anual de 800 millones de toneladas de CO_2 a la atmósfera, además de otros gases contaminantes[4], como sería el caso si esta energía eléctrica fuera generada por centrales térmicas utilizando combustibles fósiles.

En la actualidad existen 145 reactores nucleares funcionando en la Unión Europea, y únicamente se está construyendo un nuevo reactor nuclear en toda la Unión Europea (Francia) con una potencia eléctrica de 1.45 Gwe.

---

[1] Medidas en toneladas equivalentes de CO_2
[2] CO_2, SO_2, N_2O, CH_4
[3] Compromiso adquirido por la Unión Europea en el Acuerdo de Kioto sobre Cambio Climático (1997)
[4] SO_2,CH_4,N_2O

Sin embargo se están realizando trabajos con el fin de aumentar la potencia de las centrales nucleares existentes y de alargar su periodo de funcionamiento a 50 años e incluso a 60 años.

Acciones sobre el parque nuclear existente:

Aumento de potencia de los reactores nucleares:

Los aumentos de potencia se están consiguiendo a través de:

- Una optimización del ciclo termodinámico del circuito secundario;

- Mejorando el rendimiento térmico de los generadores de vapor, de las turbinas y del condensador;

- Aumentando la potencia térmica generada en el combustible (potencia nominal), aunque esta opción conlleva el cambio de ciertos parámetros de diseño del núcleo del reactor nuclear;

Alargamiento de la vida útil:

Los reactores nucleares, en sus dos primeras generaciones, fueron diseñados para mantener su capacidad de operación durante 40[5] años bajo determinadas hipótesis de funcionamiento, incluidos los transitorios por operaciones anómalas.

Hoy en día la revisión de los criterios de diseño utilizados para la construcción de los reactores nucleares en los años 70 y 80 demuestra que los criterios seguidos fueron muy conservadores, tanto por los transitorios postulados, como por los métodos de cálculo utilizados, constatándose que existe un margen en la capacidad de funcionamiento superior al previsto para una gran parte de los equipos y sistemas de los reactores nucleares que podría alargar su tiempo de operación hasta 60 años.

El beneficio producido por el alargamiento de la vida de los reactores nucleares es triple:

- Una mayor rentabilidad de los costes de inversión realizados en la construcción de la central nuclear[6]. Estos costes deben de ser imputados a un periodo de operación de 60 años y no a un periodo de 30 ó 40 años, como se hacía hasta ahora, lo que debe redundar en una reducción del coste del Kw-h producido en las centrales nucleares;

[5] Tiempo máximo admitido hasta ahora de funcionamiento de un reactor nuclear.
[6] El periodo de amortización de una central nuclear es de 25 años.

- Los desarrollos tecnológicos de monitorización y evaluación de los materiales que se están llevando a cabo con el fin de alargar la vida de las centrales nucleares, que redundan en un aumento de su seguridad;

- Permite escalonar el desmantelamiento de los reactores nucleares, ya que un alto número de ellos finalizaba su vida útil en los primeros años del nuevo milenio;

El estado de la tecnología:

- **Reactores de agua ligera:**

La filosofía de diseño tecnológico de los nuevos reactores nucleares se basa en un incremento de la fiabilidad y de la seguridad en unas condiciones que permitan la competitividad económica respecto a otras formas de generación de energía eléctrica. Esto se consigue a través de la simplificación de los sistemas activos y mediante la introducción de medidas pasivas de seguridad, fundamentalmente dirigidas a la parada de la reacción de fisión y a la evacuación de la potencia residual.

Basándose en estos conceptos se han diseñado tres nuevos modelos de reactores de agua a presión.

-Reactor Presurizado Europeo (EPR) diseñado por Framatone y Siemens:

Este modelo de reactor, que podría alcanzar una potencia eléctrica de 1700 Mw, tiene como novedad de diseño la posibilidad de confinar las emisiones, en caso de fusión del núcleo, en el interior de la instalación a través del denominado" cenicero". Asimismo, permitiría minimizar las consecuencias de posibles accidentes nucleares sin que fuese necesario recurrir en un principio a la evacuación de la población que resida en las proximidades de la central nuclear.

-APR-600:

Diseñado por Westinghouse–BNFL, es un reactor de agua a presión en el que se combinan sistemas activos simplificados convencionales con sistemas pasivos.

Podemos citar como novedades específicas de diseño, el circuito de refrigeración del edificio de contención que es completamente pasivo, consiguiéndose un perfecto control de la temperatura y de la presión del edificio de contención en caso de accidente. También es un sistema pasivo el circuito de evacuación de calor residual del núcleo, que

permitiría un mayor tiempo de reacción al operador en caso de accidente.

Otra característica de este reactor es su construcción por módulos en fábrica utilizando las técnicas de construcción naval.

El reactor EP 1000:

Diseñado por Westinghouse–BNFL constituye una evolución del APR 600, su potencia eléctrica será del orden de 1060 Mw, su capacidad de utilización de combustible MOX (oxido Uranio-Plutonio) sería del 50% y por supuesto adopta todas las medidas de seguridad pasiva del AP 600.

- **Reactores rápidos:**

Los reactores rápidos, sin moderación neutrónica, tienen la ventaja que se puede extraer de ellos del orden de 60 veces más energía que los reactores térmicos.

El combustible de un reactor rápido consta de una parte fisionable, Uranio–235 o Plutonio 239 y en torno de ella una parte fértil de Uranio-238 que por absorción neutrónica se transforma en Plutonio-239.

La refrigeración se realiza con sodio líquido ya que el sodio no es moderador neutrónico. Hoy en día, afín de evitar el sodio cómo refrigerante por los problemas que conlleva[7], se están desarrollando sistemas de refrigeración gaseosos CO_2 y Helio o la utilización del plomo como refrigerante.

El interés de los reactores rápidos se basa en el mayor aprovechamiento de las reservas de Uranio y en la utilización del plutonio producido en las centrales térmicas como combustible.

En la Unión Europea no existe actualmente ningún reactor rápido utilizado para la producción de energía eléctrica, el único existente es el Phoenix (233 Mw eléctricos), ubicado en Francia y utilizado para estudios de transmutación de actínidos con el fin de eliminar los residuos de alta actividad.

El programa para el desarrollo de un reactor rápido europeo **E.F.R.** tiene por objeto aprovechar la experiencia del Superphenix(1200 Mw eléctricos y en situación de decommissionig desde 1998) con objeto de

[7] Riesgo de reacción agua-sodio produciendo hidrógeno que puede dar origen a una explosión en contacto con el aire.

desarrollar un reactor rápido europeo competitivo económicamente ante los reactores de agua ligera.

- **Reactores a alta temperatura a gas HTGR:**

El concepto de reactores de alta temperatura ha sido desarrollado en los años 60 y 70, son refrigerados por gas y moderados por grafito.

Durante estos años fueron construidos distintos prototipos, pero nunca se llegó a su desarrollo industrial. Hoy en día el avance en la tecnología de turbinas de gas, que ha permitido alcanzar un rendimiento del 55%, ha relanzado el posible desarrollo industrial de estos reactores.

Estos reactores HTGR poseerán una potencia eléctrica del orden de 280 Mw y un nivel de seguridad tal que la posibilidad de accidente con fusión del núcleo es prácticamente nula. Ademas, sería viable en ellos la cogeneración (electricidad y calor) y su uso sería optimo para desalinizar el agua de mar (alternativa mucho más ecológica que el transvase de aguas entre cuencas).

Este tipo de reactores son también validos para quemar plutonio y se ha desarrollado un prototipo por los Estados Unidos y Rusia para ser utilizado para la destrucción del plutonio proveniente de las armas nucleares.

El problema de los Residuos radioactivos:

La definición de residuo aceptada internacionalmente aparece en la Guía de Seguridad 111-G-1.1 de la OIEA, publicada en 1994. En ella los residuos se clasifican en tres categorías: exentos de tratamiento, residuos de baja y media actividad y residuos de alta actividad. La inclusión en una categoría u otra dependería de la potencia residual generada en su desintegración interna.

Los residuos radioactivos suponen aproximadamente el 1% de los residuos tóxicos y peligrosos generados en la Unión Europea, siendo el volumen de residuos radioactivos anualmente 50.000 m^3 de los cuales el 1% son de alta actividad.

Una central nuclear de 1000 Mw eléctricos produce anualmente del orden de 200 m^3 de residuos de baja actividad, 70 m^3 de residuos de media actividad y 10 m^3 de residuos de alta actividad (combustible irradiado) o 2,5 m^3 de residuos de alta actividad vitrificados en caso de que se opte por el reprocesamiento.

El 90 % de estos residuos de baja y media actividad, se someten a un proceso de compactación y solidificación tras el cual se introducen en bidones de aproximadamente 200 litros, que son almacenados en repositorios geológicos de baja y media actividad, hasta que su radiactividad decaiga al nivel natural. Por ello el periodo de almacenamiento oscilará entre 200 y 300 años.

El problema de la industria nuclear radica fundamentalmente en que se puede hacer con los residuos de alta actividad. La construcción de almacenamientos geológicos no es aceptada por las poblaciones de los territorios donde técnicamente sería adecuado contruirlos.

Para el tratamiento de estos residuos, una vez que el combustible irradiado haya estado durante un periodo de 10 a 15 años en las piscinas de combustible gastado de los reactores, se contemplan dos caminos:

Ciclo abierto:

El elemento de combustible irradiado es considerado residuo final y destinado a su almacenamiento definitivo. Esta opción es la adoptada por Estados Unidos y España, y se considera que es la mejor opción para la no-proliferación.

Ciclo cerrado:

En el ciclo cerrado el combustible gastado se reprocesa para obtener el plutonio (1% del combustible) y el uranio no quemado (96 % del combustible), que se utiliza para la fabricación de nuevos elementos combustibles –MOX-, las pastillas de combustible son de óxidos mixtos uranio-plutonio (actualmente 35 reactores en la Unión Europea utilizan combustible MOX y de ellos ninguno en España) El reprocesamiento del combustible se realiza en las plantas de Marcoule y La Hague (Francia), Sellafield y Thorp (Reino Unido).

El residuo restante (sólo el 3% del combustible se convierte en residuo) se vitrifica, siendo los actínidos los elementos químicos más radioactivos presentes en el residuo.

Actualmente con el fin de reducir la larga vida de los residuos de alta actividad se están realizando investigaciones en dos líneas fundamentales:

- "partioning" (separación de los actínidos, que son los elementos de vida más larga del residuo de alta actividad, del resto del residuo);

- transmutación de los actínidos en otros elementos de periodo de semidesintegración más corto.

En la línea de la transmutación de los actínidos, se encuentra el proyecto de amplificador de Energía del Prof.Rubbia, bien conocido entre los miembros de la Academia de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, al igual que el proyecto de investigación que se realiza en el Phoenix-Francia, pero este último está centrado en la transmutación del plutonio.

En mi opinión, el mayor problema para conseguir la transmutación de los actínidos, no es de índole técnico sino económico. La transmutación supone una nueva fase en la parte final del ciclo de combustible, con un coste que debería ser cargado al precio del Kw.h y que no evitaría la construcción de un repositorio geológico de almacenamiento final, ya que la desaparición total del residuo radiactivo es una quimera.

Con la aplicación de la Directiva sobre la Liberalización del Mercado Eléctrico de 1996, éste mercado está sufriendo un proceso de desregularización y la competitividad entre las diferentes empresas productoras de energía eléctrica exige la producción eléctrica al menor coste posible, por ello la única viabilidad económica que tendría la transmutación sería la aplicación de una fiscalidad en función de la naturaleza del residuo producido por cada industria productora de energía eléctrica. En el caso de la industria nuclear el residuo radioactivo de alta actividad debería tener lógicamente una imposición más elevada y sólo en este caso la transmutación sería rentable para la industria nuclear.

Mientras esto no ocurra la transmutación será un apasionante reto para los científicos, pero no para la industria nuclear. Creo que el Prof. Rubbia también debería haber pensado en ello.

Distribución de los reactores nucleares en los diferentes estados de la Unión Europea:

Estado Miembro	Número de reactores	Potencia eléctrica generada	% de energía eléct. de origen nuclear
Suecia	12	10 Gw	45 %
Alemania	20	22 Gw	30 %
Belgica	7	5.7 Gw	55 %
Francia	59	62 Gw	76 %
Holanda	1	0.5 Gw	2.5 %
Reino Unido	35	13 Gw	25.4 %
Finlandia	4	2.5 Gw	30 %
España	9	7.4 Gw	33 %

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000)

INEGALITE GENERALISEE DE LE PAGE ET COMMUTATIVITE DANS LES ALGEBRES p-BANACH

A. EL KINANI, A. NAJMI, M. OUDADESS

Abstract: We provide a generalized inequality of Le Page type which applies to both involutive and non involutive p-Banach algebras. We consider, for that, bilinear and bi-semi-linear mappings and use Liouville theorem for harmonic functions. As a consequence, some commutativity results are obtained.

1991 AMS Subject Classification: 46J40, 46H20.
Key words: Commutativité, involution , inégalité de Le Page, fonction harmonique.

Introduction

L'inégalité de Le Page ([4]) (C): $\|xy\| \leq \alpha \|yx\|$, pour tous x, y dans A, où A est une algèbre de Banach, a été généralisée dans beaucoup de directions. Dans [1], J. W. Baker, J. S. Pym, a considéré dans (C) une application bilinéaire à gauche. Le premier et le dernier auteurs ont considéré, dans [3], une application bi-semi-linéaire. Dans [2], ils ont donné un énoncé qui recouvre tous les cas et qui fait appel aux applications bilinéaires et bi-semi-linéaires. A chaque fois, on reprend l'idée de Le Page qui consiste à utiliser les théorèmes de Liouville et de Hahn Banach. Dans cet article, nous considérons les algèbres p-Banach. La technique utilisée, pour le cas Banach, ne permet pas de conclure vu que le théorème de Hahn Banach ne reste plus valide en général. Nous reconsidérons, dans les algèbres p-Banach, le critère généralisé de Le Page étudié par le premier et le dernier auteurs dans [2]. Notre approche consiste à se ramener à la semi-norme support introduite dans [5]. Puis, on applique le théorème de Liouville pour les fonctions harmoniques. Les résultats que nous obtenons recouvrent tous les cas et sont de deux types. Le premier contient des résultats de commutativité analogues à ceux connus dans le cas Banach. Quant au deuxième, c'est des résultats analogues à ceux obtenus dans [3]. Dans toute la suite, on notera par $C(A)$ le centre de A et par ρ le rayon spectral.

Voici le résultat principal de cet article

Théorème 1: Soient $\left(A, \| \ \|_p\right)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach complexe, M un espace vectoriel topologique séparé qui est un A-module à gauche topologique, $|\ |: M \to R^+$ une application quelconque, X un espace p-Banach, $h: A \times M \to X$ une application bilinéaire continue, $k: A \times M \to X$ une application bi-semi-linéaire

continue, $\left(B,\|\ \|_q\right)$ une Q-algèbre q-normée, $0<q\le 1$, S et T deux applications linéaires continues de X dans B. Si pour tout $a\in A$ et tout $m\in M$,

$$\left\|S(h(a,m))+T(k(a,m))\right\|_q \le |am| \qquad (1)$$

alors

1) **(i)** $S(h(b,am))-S(h(ba,m))\in RadB$; pour tous $a,b\in A$ et $m\in M$.

(ii) $T(k(b,am))-T(k(ba,m))\in RadB$, pour tous $a,b\in A$ et $m\in M$.

2) Si **(1)** est vérifiée pour tout $a\in A^1=A\oplus C$ et tout $m\in M$, alors

(i) $S(h(e,am))-S(h(a,m))\in RadB$, pour tout $a\in A$ et $m\in M$,

(ii) $T(k(e,am))-T(k(a,m))\in RadB$, pour tout $a\in A$ et $m\in M$,

où e est l'unité de A^1.

Preuve. Pour tout $x\in B$, posons $\|x\|=\inf\sum_{k=1}^{n}\|x_i\|_q^{\frac{1}{q}}$, où l'inf est pris sur toutes les décompositions $x=\sum_{k=1}^{n}x_k$, où $x_1,\dots,x_n\in B$. Comme dans [5], on vérifie que $\|\ \|$ est une semi-norme d'algèbre telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|x^n\right\|_q^{\frac{1}{nq}}\le\|x\|\le\|x\|_q^{\frac{1}{q}}$. Par ailleurs $\left(B,\|\ \|_q\right)$ est une Q-algèbre q-normée. Donc $\rho(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|x^n\right\|_q^{\frac{1}{nq}}$, pour tout $x\in B$. D'où

$$\rho(x)\le\|x\|\le\|x\|_q^{\frac{1}{q}},\ \text{pour tout } x\in B. \qquad (2)$$

En combinant avec **(1)**, on obtient

$$\left\|S(h(a,m))+T(k(a,m))\right\|\le|am|^{\frac{1}{q}} \qquad (3)$$

Montrons maintenant **1)** du théorème **1.** Tout d'abord, si A est non unitaire, alors on travaille dans $A^1=A\oplus C$. Dans ce cas, M est aussi un A^1-module topologique à gauche. Pour a et b dans A et m dans M, on considère l'application f, de C dans B, définie par

$$f(\lambda)=S\left(h\left(be^{-\lambda a},e^{\lambda a}m\right)\right)+T\left(k\left(be^{-\lambda a},e^{\lambda a}m\right)\right).$$

On vérifie que, pour tout φ dans le dual topologique de $\left(B,\|\ \|\right)$, $\varphi\circ f$ est harmonique. De plus, par **(3)**, on a $|\varphi(f(\lambda))|\le\|\varphi\|\ |bm|^{\frac{1}{q}}$ pour tout $\lambda\in C$. Elle est donc bornée. Par le théorème de Liouville, elle est constante. En dérivant par rapport à la partie réelle et la partie imaginaire de λ, on obtient

$$\varphi\left[S(h(b,am))-S(h(ba,m))+T(k(b,am))-T(k(ba,m))\right]=0$$
$$\varphi\left[S(h(b,am))-S(h(ba,m))+T(k(ba,m))-T(k(b,am))\right]=0.$$

D'où **1)** par le théorème de Hahn-Banach et **(2).**

2) Pour $a \in A$ et $m \in M$, on considère la fonction g, de C dans B, définie par

$$g(\lambda) = S\big(h(e^{-\lambda a}, e^{\lambda a} m)\big) + T\big(k(e^{-\lambda a}, e^{\lambda a} m)\big),$$

et on procède comme dans **1).**

Remarque 2: Si A admet une unité approchée à gauche $(e_i)_i$, alors

(i) $\lim_i S\big(h(e_i, am)\big) - S(h(a,m)) \in RadB$, pour tout $a \in A$ et $m \in M$.

(ii) $\lim_i T\big(k(e_i, am)\big) - T(k(a,m)) \in RadB$, pour tout $a \in A$ et $m \in M$.

En effet, ceci découle de **1)** de théorème 1 vu que S, T, h et k sont continues et $RadB$ est fermé.

Remarque 3: Si M est un A- module à droite, on obtient des conclusions analogues avec la condition

$$\big\|S(h(a,m)) + T(k(a,m))\big\|_q \le |ma|.$$

Comme conséquence du théorème 1, on obtient ce qui suit.

A) Si on prend $M = A$, $X = B$ une Q-algèbre semi-simple q-normée, $0 < q \le 1$, pour deux produits Δ et $\blacklozenge$, $h(a,b) = \varphi_1(a) \Delta \psi_1(b)$, $k(a,b) = \varphi_2(a) \blacklozenge \psi_2(b)$, où φ_1, ψ_1 (resp. φ_2, ψ_2) sont deux applications linéaires (resp. semi-linéaires) continues de, A dans B, alors **(1)** devient

$$\big\|S(\varphi_1(a) \Delta \psi_1(b)) + T(\varphi_2(a) \blacklozenge \psi_2(b))\big\|_q \le |ab| \qquad \textbf{(4)}$$

La conclusion du théorème 1 s'écrit:

1) (i) $S[\varphi_1(b) \Delta \psi_1(ac)] = S[\varphi_1(ba) \Delta \psi_1(c]$, pour tous $a,b,c \in A$,

(ii) $T[\varphi_2(b) \blacklozenge \psi_2(ac)] = T[\varphi_2(ba) \blacklozenge \psi_2(c)]$, pour tous $a,b,c \in A$,

2) Si **(4)** est vérifiée pour tout $a \in A^1 = A \oplus C$ et tout $b \in A$, alors

(i) $S[\varphi_1(e) \Delta \psi_1(ab)] = S[\varphi_1(a) \Delta \psi_1(b)]$, pour tous $a,b \in A$,

(ii) $T[\varphi_2(e) \blacklozenge \psi_2(ab)] = T[\varphi_2(a) \blacklozenge \psi_2(b)]$, pour tous $a,b \in A$, où e est l'unité de A^1.

Remarque 4: Si A admet une unité approchée à gauche $(e_i)_i$, alors à partir de **1),** on obtient

(i) $S[\varphi_1(a) \Delta \psi_1(b)] = \lim_i S[\varphi_1(e_i) \Delta \psi_1(ab]$, pour tous $a,b \in A$,

(ii) $T[\varphi_2(a) \blacklozenge \psi_2(b)] = \lim_i T[\varphi_2(e_i) \blacklozenge \psi_2(ab)]$, pour tous $a,b \in A$.

B) Si de plus $S = Id$ et $T = Id$, alors **(4)** s'écrit

$$\big\|\varphi_1(a) \Delta \psi_1(b) + \varphi_2(a) \blacklozenge \psi_2(b)\big\|_q \le |ab| \qquad \textbf{(5)}$$

et les conclusions de **A)** deviennent

1) **(i)** $\varphi_1(b)\Delta\psi_1(ac)=\varphi_1(ba)\Delta\psi_1(c)$, pour tous $a,b,c\in A$

(ii) $\varphi_2(b)\blacklozenge\psi_2(ac)=\varphi_2(ba)\blacklozenge\psi_2(c)$, pour tous $a,b,c\in A$

2) Si **(5)** est vérifiée pour tout $a\in A^1=A\oplus C$ et tout $b\in A$, alors

(i) $\varphi_1(e)\Delta\psi_1(ab))=\varphi_1(a)\Delta\psi_1(b)$, pour tous $a,b\in A$,

(ii) $\varphi_2(e)\blacklozenge\psi_2(ab)=\varphi_2(a)\blacklozenge\psi_2(b)$, pour tous $a,b\in A$, où e est l'unité de A^1.

Remarque 5:

1) Si A admet une unité approchée à gauche $(e_i)_i$ telle que $(\varphi_1(e_i))_i$ et $(\psi_1(e_i))_i$ sont des unités approchées de B pour le produit Δ, alors, par **(i)** de **1)**, on obtient $\varphi_1=\psi_1$ et $\varphi_1(xy)=\varphi_1(x)\Delta\varphi_1(y)$ pour tous $x,y\in A$. Si de plus $A=B$ et $\varphi_1=Id$, alors $x\Delta y=xy$, pour tous $x,y\in A$.

2) Si A admet une unité approchée à gauche $(f_i)_i$ telle que $(\varphi_2(f_i))_i$ et $(\psi_2(f_i))_i$ sont des unités approchées de B pour le produit $\blacklozenge$, alors, par **(i)** de **(1)**, on obtient $\varphi_2=\psi_2$ et $\varphi_2(xy)=\varphi_2(x)\blacklozenge\varphi_2(y)$, pour tous $x,y\in A$. Si de plus $A=B$ et φ_2 est bijective telle que $\varphi_2(x\blacklozenge y)=\varphi_2(x)\blacklozenge\varphi_2(y)$, alors $x\blacklozenge y=xy$, pour tous $x,y\in A$.

C) Si $A=M=X=B$ est une algèbre p-normée, $0<p\le 1$, de p-norme $\|\ \|_p$, $|\ |=\alpha\|\ \|_p$, où $\alpha>0$, Δ et $\blacklozenge$ deux produits continus sur A, $\psi:A\to A$ une application linéaire continue, $h(a,b)=x\Delta\psi(b)$, $*$ et $\#$ deux involutions continues d'espaces vectoriels, $k(a,b)=a^*\blacklozenge b^{\#}$, $S=Id$ et $T=Id$, alors **(1)** devient

$$\left\|a\Delta\psi(b)+a^*\blacklozenge b^{\#}\right\|_p\le\alpha\|ab\|_p. \qquad (6)$$

Remarquons que l'inégalité **(6)** se prolonge à la complété $\hat{A}$ de A. On peut donc supposer que l'algèbre A est complète. Par suite, la conclusion du théorème 1 s'écrit:

1) **(i)** $b\Delta\psi(ac)-ba\Delta\psi(c)\in RadA$, pour tous $a,b,c\in A$,

(ii) $b^*\blacklozenge(ac)^{\#}-(ba)^*\blacklozenge c^{\#}\in RadA$, pour tous $a,b,c\in A$

2) Si **(6)** est vérifiée pour tout $a\in A^1=A\oplus C$ et tout $b\in A$, alors

(i) $e\Delta\psi(ab)-a\Delta\psi(b)\in RadA$, pour tous $a,b\in A$,

(ii) $e^*\blacklozenge(ab)^{\#}-a^*\blacklozenge b^{\#}\in RadA$, pour tous $a,b\in A$, où e est l'unité de A^1.

Remarque 6:

1) Si A admet une unité approchée $(e_i)_i$ telle que $(e_i)_i$ et $\psi((e_i)_i)$ sont des identités approchées dans A, pour Δ, alors, par **(i)** de **1)**, on obtient $\psi(a)-a\in RadA$, pour tout

$a \in A$. De plus $a\Delta\psi(b) - ab \in RadA$, pour tous $a,b \in A$. En particulier ψ est l'application identité et $a\Delta b = ab$, pour tous $a,b \in A$, si A est semi-simple.

2) Si A admet une unité approchée $(f_i)_i$ telle que $(f_i^*)_i$ et $\left(f_i^{\#}\right)_i$ sont des identités approchées dans A, pour $\blacklozenge$, alors, par **(ii)** de **1)**, on obtient $a^{\#} - a^* \in RadA$, pour tout $a \in A$. De plus $b^* \blacklozenge a^{\#} - (ba)^* \in RadA$, pour tous $a,b \in A$. Ainsi si $RadA$ est $*$-auto-adjoint et si l'involution $*$ est telle que $(xy)^* = y^* \blacklozenge x^{\#}$, pour tous $x,y \in A$, alors $A/RadA$ est commutative. En particulier, si A est semi-simple, alors les deux involutions $*$ et $\#$ coïncident, l'algèbre A est commutative et $ab = a \blacklozenge b$, pour tous $a,b \in A$.

Remarque 7:

1) Si dans **C)**, on prend $\left(A, \|\ \|_p\right)$, $0 < p \leq 1$, une algèbre p-Banach, alors on a les mêmes conclusions avec la condition

$$\left\|a\Delta\psi(b) + a^* \blacklozenge b^{\#}\right\|_p \leq |ab| \qquad (7)$$

où $|\ |: A \to R_+$ est une application quelconque. En particulier, si A est munie d'une involution d'algèbre $x \mapsto x^*$ telle que $\left\|a + a^*\right\|_p \leq \alpha\rho(a)^p$, pour tout $a \in A$, alors on a $\left\|xy + y^* x^*\right\|_p \leq \alpha\rho(yx)^p$, pour tout $x \in A^1 = A \oplus C$ et tout $y \in A$. D'où, par **(i)** de **2)** de **C)**, on a $A/RadA$ est commutative.

D) Si dans **C)**, on prend Δ et $\blacklozenge$ le produit opposé de A i.e., $a\Delta b = a \blacklozenge b = ba$, pour tous $a,b \in A$, $\psi = Id$ et les deux involutions $*$ et $\#$ égales, alors **(6)** devient

$$\left\|yx + y^* x^*\right\|_p \leq \alpha \|xy\|_p \qquad (8)$$

La conclusion de **C)** s'écrit:

1) **(i)** $acb - cba \in RadA$, pour tous $a,b,c \in A$. En particulier $A^2 \subset C(A)$, si A est semi-simple.

(ii) $(ac)^* b^* - c^*(ba)^* \in RadA$, pour tous $a,b,c \in A$

2) Si **(8)** est vérifiée pour tout $a \in A^1 = A \oplus C$ et tout $b \in A$, alors

(i) $ab - ba \in RadA$, pour tous $a,b \in A$. i.e., $A/RadA$ est commutative.

(ii) $(ab)^* - b^* a^* \in RadA$, pour tous $a,b \in A$. i.e., $*$ est une involution d'algèbre sur $A/RadA$.

E) Si dans le théorème 1, on prend $k = 0$, $T = 0$, alors **(1)** devient

$$\|S(h(a,m))\|_q \le |am|, \qquad (9)$$

La conclusion du théorème **1** devient:

1) $S(h(b,am)) - S(h(ba,m)) \in RadB$, pour tous $a,b \in A$ et tout $m \in M$.

2) Si **(9)** est vérifiée pour tout $a \in A^1 = A \oplus C$ et tout $m \in M$, alors

$S(h(e,am)) - S(h(a,m)) \in RadB$, pour tout $a \in A$ et tout $m \in M$, où e est l'unité de A^1.

Remarque 8: Si A admet une unité approchée à gauche $(e_i)_i$, alors par **1)**, on obtient $\lim_i S(h(e_i,am)) - S(h(a,m)) \in RadB$, pour tout $a \in A$ et $m \in M$.

Remarque 9:

i) Si prend dans **E)**, $A = M = X$, $\blacklozenge$ un autre produit sur A et $h(a,b) = S(a \blacklozenge b)$, alors **(9)** s'écrit:

$$\|S(a \blacklozenge b)\|_q \le |ab| \qquad (10)$$

La conclusion de **E)** devient:

1) $S(x \blacklozenge (yz)) - S((xy) \blacklozenge z) \in RadB$, pour tous $x,y,z \in A$. En particulier, si A admet une unité approchée $(e_i)_i$ pour les deux produits, alors on obtient

$$S(xy) - S(x \blacklozenge y) \in RadB, \text{ pour tous } x,y \in A.$$

2) If **(10)** est vérifiée pour tout $a \in A^1 = A \oplus C$ et tout $b \in A$, alors

$$S(xy) - S(x \blacklozenge y) \in RadB, \text{ pour tous } x,y \in A.$$

En particulier, deux produits $(a,b) \mapsto ab$ et $(a,b) \mapsto a \blacklozenge b$, sur A, telles que

$$\|a \blacklozenge b\|_p \le \alpha \|ab\|_p, \text{ pour tout } a \text{ dans } A^1 \text{ et } b \text{ dans } A,$$

coïncident sur $A/RadA$.

ii) Si dans **E)**, on prend $A = M = X = B$ une algèbre p-Banach, $0 < p \le 1$, de p-norme $\|\ \|_p$ et $|\ | = \alpha \|\ \|_p$, où $\alpha > 0$, alors **(9)** s'écrit

$$\|S(h(a,b))\|_p \le \alpha \|a\,b\|_p, \text{ pour tout } a \in A^1 \text{ et } b \in A. \qquad (11)$$

La conclusion **2)** de **E)** devient:

$$S(h(e,a\,b)) - S(h(a,b)) \in RadA, \text{ pour tous } a,b \in A.$$

iii) Si dans **i)**, on prend Si $A = M = X = B$ est une algèbre p-normée, $0 < p \le 1$, de p-norme $\|\ \|_p$, $|\ | = \alpha \|\ \|_p$, où $\alpha > 0$, $\blacklozenge$ le produit opposé i.e., $(a,b) \mapsto ba$ et S l'application identité, alors **(10)** s'écrit:

$$\|ab\|_p \le \alpha \|ba\|_p, \text{ pour tous } a,b \in A. \qquad (12)$$

La conclusion de **E)** devient:

1) Le commutateur $[x,yz]=xyz-yzx$ est $RadA$, pour tous $x,y,z\in A$. En particulier $A^2\subset C(A)$ si A est semi-simple. Si A admet une unité approchée $(e_i)_i$, alors on obtient $[x,y]\in RadA$, pour tous $x,y\in A$.

2) Si **(11)** est vérifiée pour tout $a\in A^1$ et tout $b\in A$, alors $A/_{RadA}$ est commutative.

(iv) Si $\|x\|_p\leq\alpha\rho(x)^p$, pour tout $x\in A$, alors $\|ab\|_p\leq\alpha\rho(ba)^p$, pour tout $a\in A^1$ et tout $b\in A$. On est donc ramener à **(10)** avec $S=Id$, $\blacklozenge$ le produit opposé de A et $|\ |=\alpha\rho$. Ainsi la condition

$$\|x\|_p\leq\alpha\rho(x)^p, \text{ pour tout } x\in A \qquad (13)$$

entraîne la commutativité de $A/_{RadA}$.

F) Si dans le théorème 1, on prend $h=0$, $S=0$, on obtient pour les applications bi-semi-linéaires des résultats analogues à ceux obtenus, dans **E)**, pour les applications bilinéaires.

Références

[1] J. W. Baker, J. S. Pym: Remark on continuous bilinear mappings. Proc. Edinburgh. Math. Soc. (2) 17, (1970-1971), 245-248.

[2] A. El Kinani, M. Oudadess: Unified inequality and commutativity in Banach algebras with or without involution. Functional analysis with current applications in science, technology and industry. Proceedings of the conference on functional analysis and applications, Aligarh, India, December 16-19, 1996. Harlow: Longman Pitman Res. Notes Math. Ser.377. 49-55(1998).

[3] A. El Kinani, M. Oudadess: Applications bi-semi-lineaires et commutativité dans les algèbres de Banach involutives. Ann. Math. Blaise Pascal, Vol.6, N° 2, 1999, pp15-20.

[4] C. Le Page: Sur quelques conditions impliquant la commutativité dans les algèbres de Banach . C. R. A. S. Paris, Ser. A-B; 265, (1967), A 235-A 237.

[5] Xia Dao-Xing (Hsia.Tao-Hsing): On locally bounded topological algebras. Acta Math. Sinica 14 N° 2 (1964). Engl. Ubers. Chinese-Math. 5 N° 2, pp. 261-276. (1964).

Ecole Normale Supérieure de Takaddoum. B.P : 5118, 10 105 Rabat (MAROC)

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000).

HARMONIC OPERATOR FUNCTIONS OF A PROPER CONTRACTION

A. ELKINANI

Abstract: Using harmonic functional calculus, we give a version of the von Neumann inequality for harmonic operator functions. This generalizes and improves a theorem of Tao Zhiguang on analytic operator functons. We also prove two results on maximum principle for harmonic oprator functions. Furthermore, we obtain an extension for most of results of Shih and Tan on analytic functions of topological proper contractions.[1]

INTRODUCTION AND NOTATIONS

Let H be a complex Hilbert space and $L(H)$ the complex Banach algebra of all bounded linear operators on H. The real part $\frac{1}{2}(T+T^*)$ of an operator T on H is denoted by $\mathrm{Re}\,T$. If $T \in L(H)$, the symbols $\sigma(T)$ and $\rho(T)$ denote the spectrum of T and the spectral radius of T, respectively. Let Ω be an open subset of C. By an operator function f on Ω, we mean that $f(z) \in L(H)$ for every $z \in \Omega$. The set of all analytic operator functions on Ω into $L(H)$ is denoted by $A(\Omega, L(H))$. Let $f: \Omega \to L(H)$ a $C^{(2)}$ function of two real variables x and y. We say that f is harmonic if it satisfies the differential equation: $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$ on Ω. The set of all harmonic operator functions on Ω into $L(H)$ is denoted by $h(\Omega, L(H))$. Let E be the spectral resolution of the identity for a normal operator T in $L(H)$. For a continuous operator function f on a domain Ω containing $\sigma(T)$ such that $Tf(z) = f(z)T$ for every $z \in \Omega$, $\hat{f}(T)$ will denote the operator of $L(H)$ defined by the integral $\hat{f}(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, dE_\lambda$ ([12, p. 314]).

Throughout the paper, the letter I stands for the identity operator on H and for a complex z we often write simply z for the element zI of $L(H)$. The open unit disk and closed unit disk are denoted by D and $\overline{D}$ respectively.

---

[1] Keywords. Harmonic operator function, Spectral resolution, Harmonic functional calculus, Maximum principal, Proper contraction, topological proper contraction.
1991 Mathematics subject classifications: Primary: 47 A 60 ; Secondary: 46 H 30.

In [12], T. Zhiguang generalize some results of K. Fan, on analytic functions of a proper contractions ([7]), to analytic operator functions. His main result is the following:

Theorem (T. Zhiguang). Let H be a complex Hilbert space. Suppose $f \in N_H(D)$ with $\|f(z)\| < 1$ for $z \in D$. If $T \in L(H)$ is a proper contraction suth that $Tf(z) = f(z)T$ for every z in D, then $\|f(T)\| < 1$.

Here $f(T)$ denotes the operator defined by Riesz - Dunford integral ([1, p. 568])

$$f(T) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} f(z)(z-T)^{-1} dz,$$

where Γ is any contour that surrounds $\sigma(T)$ in D; and $N_H(D)$ the set of all those $f \in A(D, L(H))$ such that $f(z)f(w) = f(w)f(z)$ and $f(z)f(z)^* = f(z)^* f(z)$ for all $z, w \in D$.

In [3] and [5], we have extended this theorem of T. Zhiguang to analytic vector valued functions in hermitian Banach algebras. Generalizations of the results of Shih and Tan [10] to analytic vector valued functions in hermitian algebras are obtained in [4] and [5]. In our recent paper [6], some theorems of K. Fan [7], Shih and Tan [10] are extended to harmonic functions in hermitian algebras.

In this paper, we generalize T. Zhiguang 's theorem to harmonic operator functions and we replace the condition $f \in N_H(D)$ by $f(z)T^* = T^* f(z)$ for $z \in D$ (Theorem II.3). Two theorems on the maximum principle for harmonic operator functions and an extension of von Neumann's theorem are also obtained. Furthermore, we generalize the results of Shih and Tan [10] to harmonic operator functions.

I. DEFINITION AND LEMMAS

In [3], [4] and [5], we have defined the functional calculus for harmonic vector functions. Let us recall the following definition.

Definition I.1. Let Ω be an open subset of C, $z_0 \in \Omega$ such that $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$, $(R > 0)$, $T \in L(H)$ with $\sigma(T) \subset D(z_0, R)$ and $f \in h(\Omega, L(H))$, define

$$f(T) = (2\pi)^{-1} \int_{|z-z_0|=R} f(z)\, Re\left[(z + T - 2z_0)(z-T)^{-1}\right] \frac{|dz|}{R}.$$

Suppose f is a function on Ω into $L(H)$, and $T \in L(H)$. Then we say that T and f are commuting if $Tf(z) = f(z)T$ for all z in Ω.

We need the following simple lemma. The proof is nearly obvious.

Lemma I. 2. **1)** Let Ω and T be as described in definition I.1 and let $f \in h(\Omega, L(H))$. Suppose T normal commuting with f and let E be its spectral resolution, then $f(T) = \hat{f}(T)$.

2) Let $\Omega = \{z : |z| < R\}$, $(R > 0)$, $T \in L(H)$ be as described in definition I.1 and let $f \in A(\Omega, L(H))$. Then $f(T) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} f(z)(z - T)^{-1} dz$; where Γ is any contour such that $\sigma(T)$ is contained in the inside domain Ω_0 of Γ and $\Omega_0 \cup \Gamma \subset \Omega$.

As in lemma 2.2 of [6], we prove the:

Lemma I. 3. Let $f \in h(\Omega_1, L(H))$, $g \in A(\Omega_2, L(H))$ satisfying the condition that for each compact set K_2 in Ω_2, there exists a disk $\overline{D(w_0, R)} \subset \Omega_1$, $(R > 0)$, such that $\sigma(g(z)) \subset D(w_0, R)$ for every z in K_2. Then the "composite function " $h = f \circ g$ " defined by $h(z) = f(g(z))$ for $z \in \Omega_2$ is an element of $h(\Omega_2, L(H))$.

Let S be a subset of $L(H)$ and let $co(S)$ denote the convex hull of S. Let $T \in L(H)$ be a proper contraction. The Möbius transformation Φ_T is defined by

$$\Phi_T(\lambda) = (I - TT^*)^{-\frac{1}{2}}(\lambda + T)(I + \lambda T^*)^{-1}(I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$$

for $\lambda \in C$ satisfying $|\lambda| \rho(T) < 1$. It is clear that Φ_T is analytic in a neighborhood of the closed unit disk of the complex plane, $\Phi_T(0) = T$, and maps the unit circle into $U(I)$, where $U(I)$ denotes the identity component of the set of all unitary elements of $L(H)$.

We now prove the following version of the maximum principle which extends the lemma 2.3 of [6] to harmonic operator functions.

Lemma I. 4. Let H be a complex Hilbert space, Ω an open subset of C containing $\overline{D}$ and $f \in h(\Omega, L(H))$. Suppose $T \in L(H)$ is a proper contraction. If f commutes with both T and T^*, then

$$\|f(T)\| \le Sup\{\|f(A)\| : A \in U(I)\} \le +\infty,$$

where A runs through the set of all operators of $U(I)$ commuting with f.

Proof: By [11], $\rho(\Phi_T(\lambda))$ is a subharmonic function of λ in a neighborhood of $\overline{D}$. Since $\|\Phi_T(\lambda)\| = 1$ for all $|\lambda| = 1$, it follows from the maximum principle for subharmonic functions that $\sigma(\Phi_T(\lambda)) \subset \overline{D}$ for all $|\lambda| \le 1$. Thus $f(\Phi_T(\lambda))$ is defined for $|\lambda| \le 1$. Let φ be a linear function on $L(H)$, and define

$$F(z) = Re(\varphi(f(\Phi_T(\lambda)))) \text{ for } |\lambda| \le 1.$$

Suppose K is a compact subset of D. Arguing as above, we see that $Sup\{\rho(\Phi_T(\lambda)):\lambda\in K\}=r<1$. Whence $\sigma(\Phi_T(\lambda))$ is contained in $\overline{D(0,r)}$ for all $\lambda\in K$. Thus, by 1) of lemma. I. 2, F is an element of $h(D,C)$. Furthermore F is continuous in $\overline{D}$. By the classical maximum principle, $F(0)\le Sup\{F(\lambda):|\lambda|=1\}$ and therefore

$$\mathrm{Re}\,\varphi\,(f(T))\le Sup\{Re\varphi\,(f(\Phi_T(\lambda))):\ |\lambda|=1\}.$$

Since f commutes with both T and T^*, it follows that $\Phi_T(\lambda)$commutes with f for $|\lambda|=1$ and hence $Re\varphi(f(T))\le SupRe\varphi(f(U'(I))$, where $U'(I)=\{A\in U(I):A$ commutes with $f\}$. Now, by a separation theorem [1, p 417], $f(T)\in\overline{co}f(U'(I))$. The desirated conclusion is a simple consequence of the latter. ♦

II. VON NEUMANN INEQUALITY FOR HARMONIC OPERATOR FUNCTIONS

Now we are ready to generalize von Neumann's theorem (i.e., [12] , theorem 3.2]) to harmonic operator functions.

Theorem II.1. Let $\delta>0$ and $\Omega=\{z:|z|<1+2\delta\}$. Suppose $T\in L(H)$ is a contraction (i.e., $\|T\|\le 1$). If $f\in h(\Omega,L(H))$ is such that $\|f(z)\|\le 1$ for all $|z|\le 1$ and commutes with both T and T^*, then $\|f(T)\|\le 1$.

Proof: Let f and T satisfying the hypotheses of theorem II.1. If $0\le\varepsilon<1$, then εT is a proper contraction. We first prove that $\|f(\varepsilon T)\|\le 1$. By Lemma I. 4, it suffices to show that the number $r=Sup\{\|f(T)\|:A\in U(I)$ and f commutes with $A\}$ satisfies $r\le 1$. Let $A\in U(I)$ and $f\in h(\Omega,L(H))$ such that $Af(z)=f(z)A$ for all $z\in\Omega$. Then, by 1) of lemma I. 2, $f(A)=\hat{f}(A)$; and we deduce from lemma 6.1 of [12] that

$$\|f(A)\|\le Sup\{\|f(z)\|:z\in\sigma(A)\}\le 1.$$

Thus $\|f(\varepsilon T)\|\le 1$. Now when ε increases to 1, $f(\varepsilon z)$ converges to $f(z)$ uniformly on the neighborhood $|z|\le 1+\delta$ of $\sigma(T)$. Therefore, by the continuity in definition I.1, $f(\varepsilon T)$ converges to $f(T)$ in the norm topology, so $\|f(T)\|\le 1$. ♦

A consequence of theorem II.1 is the following

Theorem II.2. Let $f\in h(D,L(H))$. For $0\le r<1$, put

$$M(r)=Max\{\|f(z)\|:|z|=r\}.$$

Then

$$M(r)=Max\{\|f(T)\|:\|T\|\le r\},$$

where the maximum is taken over all operators T on H such that $\|T\| \le r$, f commuting with both T and T^*.

Proof: Proof of [7 , theorem 3.2] applies to this setting.

An immediate consequence of theorem II.2 is the following generalization of Zhiguang's theorem ([12] , theorem 3.1).

Theorem II.3. Let H be a complex Hilbert space. Suppose $T \in L(H)$ is a contraction (i.e., $\|T\| < 1$). Suppose $f \in h(D, L(H))$ with $\|f(z)\| < 1$ for all $|z| < 1$ such that f commuting with both T and T^*, then $\|f(T)\| < 1$.

III. HARMONIC OPERATOR FUNCTIONS OF TOPOLOGICAL CONTRACTIONS

M. H.Shih and K. K Tan [10] have introduced a new Hilbert norm equivalent to the original one and have proved the analog of Ky Fan's theorem (i.e, [7, theorem 1]) for commuting topological proper contractions. In [4] and [5], we have extended their result to analytic vector valued functions in hermitian Banach algebras. In this section we extend Shih and Tan's theorem to harmonic operator functions (Theorem 4.1).

Let Δ denote the class of all operators T on H with $\rho(T) < 1$ and $\overline{\Delta}$ the class of all operators T on H with $\rho(T) \le 1$. We denote by $SG[T_1,...,T_N]$ the semi group (under composition) gererated by $\{T_1,...,T_N\}$, where $T_1,...,T_N$ are operators on H. Using theorem 2.1 of [10] and theorem II.3, we now prove:

Theorem III.1. Let $T_1,...,T_N \in \Delta$ be pairwise commutative. Suppose $A \in SG[T_1,...,T_N]$. Then there exists a Hilbert norm $\| \|_\#$ on H equivalent to $\| \|$ such that $\|f(A)\|_\# < 1$ for every $f \in h(D, L(H))$ provided that $\|f(z)\| < 1$ for all $|z| < 1$, f commuting with both A and $A^\#$.

Proof: Let $A \in SG[T_1,...,T_N]$. Then $A = T_1^{j_1}...T_N^{j_N}$ where $j_1,...,j_N \in \{0,1,...\}$ such that $j_1 + j_2 + ... + j_N \ge 1$. By theorem 2.1 of [10], there exists a Hilbert norm $\| \|_\#$ on H equivalent to $\| \|$ such that $\|T_i\|_\# < 1$ for all $i = 1,..., N$. Thus

$$\|A\|_\# = \|T_1^{j_1} T_2^{j_2} ... T_N^{j_N}\|_\# \le \|T_1^{j_1}\|_\# \|T_2^{j_2}\|_\# ... \|T_N^{j_N}\|_\# < 1.$$

By theorem II.3, $\|f(A)\|_\# < 1$, and the proof is complete. ♦

A consequence of theorem III.1 is the following

Theorem III.2. Let $f \in h(D, L(H))$. For $0 < r < 1$, put

$$M(r) = Max\{\|f(z)\| : |z| = r\}.$$

Then

$$M(r) = \max_{\rho(T) \le r} \rho(f(T)),$$

where the maximum is taken over all opertors T on H such that $\rho(T) \le r$, f commuting with both T and $T^{\#}$.

Proof: First, assume $M(r) = 0$. Then $f(z) = 0$ for $|z| \le r$, by the maximum modulus principle. The function g defned by $g(z) = f(rz)$ is harmonic on $|z| < r^{-1}$. Furthermore $g(z) = 0$ for all $|z| \le 1$. Let $T \in L(H)$ with $\rho(T) \le r$ and f commutes with both T and T^*. If $0 < \varepsilon < 1$, then $\rho(\varepsilon T/r) = 0$ i.e. $f(\varepsilon T) = 0$. Choose r_1 suth that $r < r_1 < 1$. From definition 1.1, we have

$$\|f(\varepsilon T) - f(T\| \le M \; Sup\{\|f(\varepsilon z) - f(z)\| : |z| \le r_1\}$$

where $M = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r_1} \left\| Re\left[(z+T)(z-T)^{-1}\right]\right\| \frac{|dz|}{r_1}$. When ε increases to 1, $f(\varepsilon z)$ converges to $f(z)$ unifomly on the neighborhood $|z| \le r_1$ of $\sigma(T)$. Therefore $f(\varepsilon T)$ converges to $f(T)$, so $f(T) = 0$. Now, if $M(r) > 0$, the proof of ([7] , theorem 3) applies to this case as well and we are done. ♦

Appealing to theorem III.1, we obtain an analog of von Neumann's theorem for commuting topological contractions which is intimately related to theorem III.1.

Theorem III.3. Let δ be a positive fixed number and $\Omega = \{z : |z| < 1 + 2\delta\}$. Let $T_1, T_2, ..., T_N \in \overline{\Delta}$ be pairwise commutative. Suppose $A \in SG[T_1, T_2, ..., T_N]$. Then there exists a Hilbert norm $\| \|_{\#}$ on H equivalent to $\| \|$ such that $\|f(A)\|_{\#} \le 1$ for every $f \in h(\Omega, L(H))$ provided that $\|f(z)\|_{\#} \le 1$ for all $z \in \Omega$ and f commutes with both T and $T^{\#}$.

Proof: Let $A \in SG[T_1, T_2, ..., T_N]$. Then $A = T_1^{j_1}, T_2^{j_2}, ..., T_N^{j_N}$, where $j_1, j_2, ..., j_N \in \{0,1,2,...\}$ such that $p = j_1 + j_2 + ... + j_N \ge 1$. Choose $\alpha > 1$ such that $0 < (1+\alpha)^p < 1 + \delta$. Then the operators $(1+\alpha)^{-1}T_1$, $(1+\alpha)^{-1}T_2$, ..., $(1+\alpha)^{-1}T_N$ of $\overline{\Delta}$ are pairwise commmutative, so an application of theorem III.1 shows that there exists a Hilbert norm $\| \|_{\#}$ equivalent to $\| \|$ such that $\|f((1+\alpha)^{-p}A)\|_{\#} < 1$ for every $f \in h(D, L(H))$ provided that $\|f(z)\|_{\#} < 1$ for all $|z| < 1$, f commuting with both T_i and $T_i^{\#}$ for all $i = 1, 2, ..., N$. Let now $f \in h(\Omega, L(H))$ satisfying hypothesis of theorem III.3. Consider a fixed $0 < \gamma < 1$. Then the funtion g defined by $g(z) = \gamma \; f((1+\alpha)^p z))$ is harmonic on D with $\|g(z)\|_{\#} < 1$ for all $z \in D$ and g commutes with both T_i and $T_i^{\#}$

for all $i = 1,2,...,N$. Arguig as abose, we obtain $\|g((1+\alpha)^{-p}A)\|_{\#} < 1$ i.e., $\gamma\|f(A)\|_{\#} < 1$. Letting γ increase to 1, we see that $\|f(A)\|_{\#} \leq 1$ which completes the proof. ♦

REFERENCES

[1] **N. Dunford, J.T. Schwartz,** *"Linear operators", Interscience, New york, p. I, 1953; p. II, 1963.*

[2] **A. El Kinani,** *Holomorphic functions operating in hermitian Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc, 111(1991), 931-939.*

[3] **--------,** *Fonctions harmoniques opérant sur les algèbres de Banach involutives, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 41, 2(1991), 493-509.*

[4] **-------,** *Fonctions analytiques de contractions topologiques dans les algébres hermitiennes, Collect. Math. 41, 3 (1990), 197-216.*

[5] **-------,** *Calcul harmoniques dans les algébres de Banach hermitiennes. Rendiconti del circolo Matematico di Palermo . Serie II, Tomo XLII (1993), pp. 257-272.*

[6] **-------,** *Harmonic functions operating in hermitian Banach algebras, Publicacions Matemàtiques, Vol 41 (1997), 403-409.*

[7] **K. Fan**, *Analytic functions of a proper contraction. Math . Z . 160 (1978), 275-290.*

[8] **C. Gong -Ning,** *On simplified proofs of theorems of von Neumann, Heinz, and Ky Fan, and their extended versions, (Bor- Luch Lin and Steve Simons, eds), lecture notes in pure and Appl. 107, Marcel Dekker, New york, 1987, 15-21.*

[9] **E. Hille and R.S, Philips,** *Functional analysis and semi groups. Rv. Ed. Amer. Math. Soc. Providence R. I. 1957.*

[10] **M-H. Shih and K-K. Tan,** *Analytic functions of topological proper contractions, Math. Z. 187 (1984), 317-323.*

[11] **Vesentini,** *On the subharmonicity of the spectral radius , Boll, Un, Mat, Ital. 1 (1968), 427- 429.*

[12] **T. Zhiguang,** *Analytic operator functions. J. Math. Anal. Appl. 103 (1984), 293- 320.*

Ecole Normale Supérireure, B.P: 5118, Takaddoum, 10105 Rabat (Morocco)

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000)

Locally effective objects and Artificial Intelligence *†

Julio Rubio

Departamento de Matemáticas y Computación. Universidad de La Rioja. 26004 Logroño

Abstract

The concept of *locally effective objects* was introduced by Sergeraert in the field of Effective Algebraic Topology, where this tool was used to represent potentially infinite data structures. This notion, borrowed from symbolic computation, was later used to produce code implementing, in an innovative way, the well-known search algorithms in Artificial Intelligence. In this paper, we show how these implementations can be appropriately reinterpreted and specified, by using some recent advances in the algebraic specification setting. As a by-product, the concept of locally effective graphs provides a framework in which the *Production Systems* and the *State Space* programming *metaphors* can be formally integrated.

1. Introduction

In his very general proposal to deal with the problem of computability in Algebraic Topology [17], Sergeraert introduced the notion of *locally effective objects* [14]. This concept allows the programmer to work with *potentially* infinite data structures. This idea was put into practice by Sergeraert and the author to develop a Common Lisp symbolic computation system, called EAT (Effective Algebraic Topology). EAT computes homology groups of iterated loop spaces ([15], [16]), leading to results which had not previously been calculated (either by hand or by computer).

The relevance of locally effective matters was subsequently explored by the author and coworkers, following two different lines. In the first, algebraic specification tools (and more precisely, a recent approach known as *hidden specifications* [5], [6]) were used to analyze the mathematical properties of locally effective objects, in a Category Theory setting (see [8], [9]). In the second, the notion of locally effective graphs was used to develop Common Lisp programs which implement, in an innovative and very generic way, the well-known algorithms for searching in state-spaces (see [13]).

*Partially supported by DGES, projectPB98-1621-C02-01.

†A shorter version of this work appeared in [12].

This paper stems from the confluence of these two lines. The results relating to algebraic specifications obtained in [8] and [9] are applied to the particular case of locally effective graphs. These theoretical results lead to some interesting consequences for interpreting the Common Lisp code developed in [13]. Our approach shows how some high-level mathematical tools (such as Category Theory) produce important (and natural) consequences in the design of very concrete software systems (such as, in our case, generic search procedures in Artificial Intelligence).

The paper is organized as follows. In Section 2, the difference between effective and locally effective objects is introduced by means of elementary examples. In addition, a brief description of the role played by these concepts in Symbolic Computation is provided. Section 3 is devoted to the formal specification of locally effective graphs and proving some Category-Theory properties of this specification. These theoretical results are applied in Section 4 to the field of Artificial Intelligence, specifically to search algorithms and production systems. The paper ends with a section of conclusions and open problems.

2. Effective and locally effective objects in Symbolic Computation

According to Sergeraert's terminology [14] an *effective object* is the representation in computer memory of a usual finite datum, such as a list or a tree. For instance, if lists are specified over the following *signature*, called *eList*, each datum representing an element of the *sort lst* would be called an *effective list*. (See [10], for example, for elementary definitions of algebraic specifications.)

$$
\begin{array}{lcll}
nil & : & & \rightarrow lst \\
cons & : & vrt\ lst & \rightarrow lst \\
void? & : & lst & \rightarrow bool \\
first & : & lst & \rightarrow vrt \\
rest & : & lst & \rightarrow lst
\end{array}
$$

(In this well-known signature, the sort of the list elements is named *vrt*, because in the sequel we are going to work with lists of *vertices*.)

Thus *effective objects* are related to the usual data types in which initial semantics (see [10]), or some variant, is enough to deal with the corresponding abstract data type.

Let us say a few words about the case of *trees*. We can spare the reader the detailed specification of (rooted) trees, but let us stress that, independently of the constructors chosen in the specification, four operations are enough to recover the structure of a tree:

$$\begin{array}{rcccccc} vrt-eql & : & tree & vrt & vrt & \rightarrow & bool \\ root? & : & tree & vrt & & \rightarrow & bool \\ father & : & tree & vrt & & \rightarrow & vrt \\ leaves & : & tree & & & \rightarrow & lst \end{array}$$

Here, *vrt-eql* is one equality test between vertices, and the *leaves* operation returns the leaves of the tree. By using *father* and *root?*, the path from the root to any vertex can be reconstructed. Then, using *leaves*, a family of paths decomposing the tree can be obtained. Finally, by using *vrt-eql*, one can paste together these paths to reconstruct the complete tree.

Let us consider a signature containing these four operations and some complete family of constructors and call it *eTree*.

Obviously, infinite trees cannot be specified by means of *eTree* as we are not able to design any family of constructors capable of defining such a tree in a finite and "step-by-step" manner. Also, the operation *leaves* would have to be left out, since the number of leaves could be infinite.

So, let us call *leTree* the signature formed only by *vrt-eql*, *root?* and *father*. Such a signature has several remarkable properties. Initial semantic is no longer useful, because there is no constructor. But, even if the signature does not allow constructing instances of *tree*, the signature can be *implemented* (see [8]) and we are able to work with *leTrees* in a computer. For instance, the (infinite) binary tree where each natural number $n > 1$ has as sons the numbers $2n$ and $2n + 1$ can be implemented. More generally, one can implement the signature *leTree* by defining I in the following way:

$I(vrt) := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$I(tree) := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$I(vrt - eql)(k, n_1, n_2) := (n_1 = n_2)$

$I(root?)(k, n) := (n = 1)$

$I(father)(k, n) := 1$ if $(n \, div \, k) = 0$

$I(father)(k, n) := (n \, div \, k)$ if $(n \, div \, k) > 0$

Evidently, such trees can be used in an algorithmic way but the kind of information which is accessible from them is very different and much poorer than that of effective objects. Only *local* information is available. If a vertex is given, one can determine whether it is the root, one can compute its father and so on. If two vertices are given, one can ask whether they are equal or whether one is a descendant of the other. But no *global* information is available. This is the reason why Sergeraert named these kinds of

representations as *locally effective objects*. For instance, the set of leaves is not computable and it is undecidable whether the tree is empty. To understand the meaning of this last claim, let us remark that the example covers *infinite* trees (thus, they are trivially non-empty), but, in fact, the main characteristic of locally effective objects is that any information about *cardinality* is missing. To emphasize this point, note that any *eTree* can be considered a *leTree* by simply forgetting the operation *leaves* (and the constructors, of course). In general, locally effective objects will be used when the underlying space is infinite but also when it is so huge that no explicit storing would be sensible (this situation appears in a natural way in the field of Symbolic Computation in Algebraic Topology, but also, as is well-known, in the field of Artificial Intelligence).

Sergeraert's aim was not, obviously, to cover *artificial* examples such as the infinite trees mentioned above. The notion of locally effective objects was introduced because in the field of Symbolic Computation in Algebraic Topology it is necessary to deal with *infinite* topological spaces in order to obtain algebraic information about *finite* topological spaces. One of the most important cases in which this situation occurs is that of *loop spaces*, which are functional spaces (and therefore infinite spaces). By implementing loop spaces as locally effective objects, Sergeraert and the author were able to develop a symbolic computation system, called EAT (Effective Algebraic Topology), which computes homology groups of iterated loop spaces (see [15], [16]).

This problem of having to work with some *potentially* infinite data structure as an intermediary in order to compute interesting (therefore finite) information is present in other Computer Science fields, apart from Effective Algebraic Topology. It occurs in the case of searching in state-spaces, a key (and elementary) topic in Artificial Intelligence.

The next section is devoted to the formal specification of the data structure we consider to be the right one to use in connection with searching in state-spaces: locally effective graphs.

3. Hidden specification of locally effective graphs

In the last section we have pointed out that the standard perspective in algebraic specifications (that is to say, the *initial semantics* approach) is not convenient for studying locally effective objects. The suitable context in which locally effective matters can be dealt with is a recently discovered setting known as *hidden specifications*. We introduce briefly the basic notions of hidden specifications and refer to [6] for more detailed work on this topic (and we refer again to [10] for fundamentals of algebraic specifications).

Let $V\Sigma = (VS, V\Omega)$ be a signature. The elements of VS are called *visible sorts* and those of $V\Omega$ *visible operations*. Let us fix a $V\Sigma$-algebra D and include in $V\Omega$, as constants,

the elements of the carrier sets of D which do not correspond with constants already in $V\Omega$. The $V\Sigma$-algebra D is called *data domain*. Then a *hidden signature* on $V\Sigma$ and D is a signature $H\Sigma = (S, \Omega)$ such that:

- $S = HS \sqcup VS$; the elements of HS are called *hidden sorts* of $H\Sigma$.
- $\Omega = H\Omega \sqcup V\Omega$ and for each operation $\omega : s_1 \ldots s_n \rightarrow s$ in $H\Omega$ the following property holds: in $s_1, \ldots, s_n$ there is one and only one hidden sort and it is assumed this hidden sort appears in the first position (i. e. it is s_1).

(This definition only covers one particular case of the notion introduced in [6], but it is enough for the purposes of this paper.)

A *hidden algebra* A for a hidden signature $H\Sigma$, on $V\Sigma$ and D, is a $H\Sigma$-algebra such that $A_{V\Sigma} = D$ (in other words, the restriction of A to the visible part is equal to the data domain D). A *hidden morphism* between two hidden algebras is a $H\Sigma$-homomorphism f such that f_D is the identity on D.

The hidden algebras for $H\Sigma$ on $V\Sigma$ and D together with the hidden morphisms define a category which will be denoted by $HAlg^D(H\Sigma)$. The next result can be found in [6].

Theorem 3..1 *If $H\Sigma$ is a hidden signature, then the category $HAlg^D(H\Sigma)$ has a final object.*

We can now specify locally effective graphs in a hidden manner. As a signature for locally effective graphs, we have chosen for the visible part the signature *eList* for effective lists, introduced in section 2, and for the hidden part:

$$\begin{array}{rcllll} vrt-eql & : & grp & vrt & vrt & \rightarrow & bool \\ adj-lst & : & grp & vrt & & \rightarrow & lst \\ vrt-goal & : & grp & vrt & & \rightarrow & bool \\ heuristics & : & grp & vrt & & \rightarrow & nat \\ edge-cost & : & grp & vrt & vrt & \rightarrow & nat \end{array}$$

The first two operations encode the graph itself. The relevant information on the *vertices set* is the equality test *vrt-eql*, while the knowledge of the *edges set* is represented by *adj-lst*, in the form of adjacency lists. The last three operations store information for the search process: *vrt-goal* is the termination test, *heuristics* estimates the relevance of each vertex and *edge-cost* is intended to evaluate the cost of each edge, assuming that if no edge exists between the two vertices, *edge-cost* returns 0 (note that the existence of one edge can be computed through *vrt-eql* and *adj-lst*: this is *local* information).

In order to complete the definition of a hidden signature, we must determine the data domain D. However, in our particular case, it is not necessary to include as constant

every datum in D. We proceed in the following way. Firstly, a data domain (just a set) D_{vrt} is fixed for *vrt*. Secondly, the elements of D_{vrt} are included as constants in the visible signature *eList*. Thirdly, we consider as D_{lst} the initial model of this enriched signature *eList*. That is to say that D_{lst} contains all the list constructed from elements of D_{vrt}. It is not then necessary to adjoin the elements of D_{lst} as visible constants (this would be quite unnatural), because they are simply *generated* by the constructors. This completes the definition of the hidden signature (on *eList* and D) for locally effective graphs, called *leGraph*.

The hidden signature *leGraph* is of a very particular kind, since there are no constructors for the hidden sort *grp*. As a consequence, the final object announced in the previous theorem admits an easy description (see [8], [9] for general results relating to this class of hidden signatures):

Theorem 3..2 *There exists a final object I in $HAlg^D(leGraph)$ with:*

$$I(grp) := \{[f_{vrt-eql}, f_{adj-lst}, f_{vrt-goal}, f_{heuristics}, f_{edge-cost}]\},$$

where each element in $I(grp)$ is a tuple of functions such that:

$$f_{vrt-eql} : D_{vrt} \times D_{vrt} \to D_{bool},$$

$$f_{adj-lst} : D_{vrt} \to D_{lst},$$

$$f_{vrt-goal} : D_{vrt} \to D_{bool},$$

$$f_{heuristics} : D_{vrt} \to \mathbb{N},$$

$$f_{edge-cost} : D_{vrt} \times D_{vrt} \to \mathbb{N}.$$

The definition of the operations in I is the natural one. For instance,

$$I(vrt - eql)([f_{vrt-eql}, \ldots], v_1, v_2) := f_{vrt-eql}(v_1, v_2).$$

Let us note that there are objects in $I(grp)$ which do not encode a (locally effective) graph, because some axioms should be held (for example, $f_{vrt-eql}$ must be an equivalence relation), but our result also extends naturally to the axiomatic specification setting (see [8]).

¿From the programming point of view, this final object can be directly implemented, if functional programming is available. This has been the case in the symbolic computation systems for Algebraic Topology [15] which have been developed in Common Lisp. This same direct implementation as a tuple of functions has also been applied in Artificial Intelligence [13]. In [13] the final object of the theorem is stored in a Common Lisp record (`struct`) similar to:

```
(defstruct legraph vrt-eql adj-lst vrt-goal ...)
```

The object described in the last theorem is very close to certain formalisms for modeling object-oriented programming, based on Cardelli's metaphor of "objects as records of functions" (see [1]). This relationship is not surprising because one of the explicit goals of hidden specifications is also to find formal models for object-oriented concepts (see [5], [6]).

Finally, let us state that if functional programming is available, the unique morphism F which exists from one object of $HAlg^D(leGraph)$ to I is computable: this is deduced from the *exponential map* (see [8]). For instance, if J is an object in $HAlg^D(leGraph)$, then given $x \in J(grp)$ the tuple $F(x) = [f_{vrt-eql}, \ldots] \in I(grp)$ is defined by:

$$f_{vrt-eql}(v_1, v_2) := J(vrt - eql)(x, v_1, v_2),$$

and so on. In addition, the object J is *behaviourally equivalent* (see [6], [8]) to the subobject $F(J)$ of I. Roughly speaking, this implies that the code associated with J can be replaced by $F(J)$ without changing the meaning of the client programs.

These theoretical results will be used in the next section to reinterpret, in a formal way, the Common Lisp programs for the state-space search described in [13].

4. Locally effective graphs and Production Systems

We claim that locally effective graphs are the natural structure within which search processes can be designed, in cases where the vertices set is infinite or so huge that explicit storing in computer memory is not convenient.

This is the case, for instance, with the *reachability graph* of a Petri Net (see [11], for example) or for the state-space programming metaphor (see [7]) in Artificial Intelligence. In this last case, a search algorithm can be interpreted as a mapping:

$$search : HAlg^D(leGraph) \to (D_{vrt} \rightharpoonup Alg(eTree))$$

The map *search* will be defined by any of the well-known search algorithms (depth-first search, best-first search, and so on). This algorithm works on a locally effective graph producing an algorithm which, from an *initial vertex* in D_{vrt}, tries to construct a *search tree*. A search tree is a usual, effective tree (based on the *eTree* signature from Section 2), which may contain a *solution path* (one path from the initial vertex to a goal vertex). Even if the *search* map is total, the result map, on a locally effective graph G, $search(G) : D_{vrt} \rightharpoonup Alg(eTree)$ could be partial (this is denoted by the arrow $\rightharpoonup$), because

the search process might not be able to finish for a given initial vertex (for instance, if a directed cycle is reached and no list of *closed* vertices was foreseen in the search algorithm).

Now, from the results of the previous section we can infer that the search algorithms can be designed directly on the final object I of Theorem 2, because any other implementation of locally effective graphs can be canonically (and algorithmically) translated to I. That is to say, algorithms such as *search* could benefit from the internal structure of a locally effective graph as a record of functions. This was the programming strategy used in [13], where search algorithms were implemented in a very generic way. The results in this paper show how the programs of [13] can be directly *reused* for any other representation of locally effective graphs.

Let us explain these features with a very simple example. Consider the well-known 8-puzzle. First, we determine a representation for the states. We identify, for example, a state with a (3×3)-matrix encoding a permutation of the natural numbers between 0 and 8. The family of such matrices defines the vertices set D_{vrt}. This set is finite but there is no interest in explicitly storing it in computer memory (*combinatorial explosion*). The moves in the 8-puzzle are then represented by means of some operations (or actions) which can be applied under certain conditions. The standard way of implementing a solution for the 8-puzzle is to design an *ad-hoc* search program which explicitly applies the operations to states (see [7] for example). From our point of view, the data associated with the 8-puzzle implement a *locally effective graph* (or a *family* of locally effective graphs, if we consider that goal-states, heuristics, etc. can vary), essentially by gathering, in an adjacency list, the effects of all valid actions on one state. The program realizing the unique morphism (introduced in the previous section) from this implementation of *leGraph* to the final object I then automatically transforms the representation and, finally, the generic search program designed in [13] is applied in order to solve the initial problem.

In [13] we suggest that the concept of locally effective graphs could be used to integrate the techniques of production (or rule-based) systems and the state-space search which are usually considered to be different *programming metaphors* [7]. In particular, as a consequence of this separation between the two techniques, the control strategies incorporated in rule-based systems are quite poor (see [3]) and do not take advantage of the know-how acquired in the state-space field (this point is explicitly and clearly stated in page 79 of [2], for example). In order to carry out our proposal, in [13] we rest on the approach introduced by Forbus-de Kleer in [4]. These authors encapsulate the information about state-space problems in a data structure called `problem` (a Common Lisp `struct`) and they show how different applications can be represented as instances of `problem`. In [13] we prove how one `problem` can be transformed into one tuple of functions implementing a

locally effective graph, after which our generic search function is applied. This approach illustrates the power of functional programming and of the locally effective object notion, because we are able in [13] to directly *reuse* Forbus-de Kleer's programs without worrying about specific examples or application fields.

The results described in the previous section throw new light on the work in [13], because we can now explain how the program called `problem->legraph` in [13], which transforms a `problem` into a `legraph` (the Common Lisp `struct` evoked in Section 3) is, in fact, the composite of two more elementary functions: one which deals with a `problem` as an implementation of the signature *leGraph* and the other (universal) function translating this implementation to the final object I of Theorem 2.

Thus, the conclusion of this analysis is that any production (or ruled-based) system *is* a (representation of a) locally effective graph and therefore that, thanks to the final property of I, the generic search procedures of [13] can be applied to it. ¿From this point of view, any production system interpreter or rule-based inference engine (based on pattern-matching, see [4], or on some kind of unification algorithm) can be considered, in particular, as an implementation of the signature *leGraph*, achieving in this way the formal integration of the Production Systems and State-Space programming metaphors.

5. Conclusions

In this paper an unusual aspect of the relation between Artificial Intelligence and Symbolic Computation has been explored. We are not dealing here with an application of Symbolic Computation algorithms to Artificial Intelligence nor an attempt to endow a Symbolic Computation system with deduction or heuristic capabilities. The relationship treated in this paper is rather a conceptual one. To be precise, a concept appearing in Symbolic Computation in Algebraic Topology (namely, the *locally effective object* notion [14]) has been used to give a clean and formal interpretation of some well-known topics in Artificial Intelligence: production systems and state-space search.

The main tool used in the paper is the hidden specification formalism [6], which allows us to characterize a very special implementation of locally effective graphs by means of a universal property of Category Theory; specifically, the implementation is associated to a final object in a hidden category. Functional programming is then essentially used to put this final object into practice, leading to a new interpretation of a Common Lisp program, developed in [13] for interoperating between production systems and a generic search function.

Some subjects related to this paper require further work. The *functorial* nature of search algorithms need to be clarified (here, we have only considered the map *search* as

defined on *objects*, that is on *leGraph*-algebras), analyzing how the search processes are affected by the transformations between representations.

In this same vein, the application of locally effective graphs to the field of heterogeneous systems should be studied. In an ideal script, two different production systems (one procedure-based and the other rule-based, for example) have been designed for tackling an identical problem. Since each production system defines a locally effective graph, if the two graphs can be merged (probably through some categorical construction of graphs), then the two heterogeneous systems could cooperate in the search process for finding a solution.

Finally, the relationship with object-oriented programming, merely mentioned in the paper, should be developed in order to achieve even greater reuse from the software components, namely for factorizing and classifying the different control strategies covered in [13].

References

[1] M. Abadi, L. Cardelli, *A Theory of Objects*, Springer, 1996.

[2] I. Aleksander, H. Farreny, M. Ghallab, *Decision and Intelligence*, Kogan Page, 1986.

[3] L. Browston, R. Farrell, E. Kant, N. Martin, *Programming Expert Systems in* OPS5*: An Introduction to Rule-Based Programming*, Addison–Wesley, 1985.

[4] K. D. Forbus, J. de Kleer, *Building Problem Solvers*, MIT Press, 1993.

[5] J. Goguen, R. Diaconescu, *Towards an algebraic semantics for the object paradigm*, Lecture Notes in Computer Science **785** (1994) 1–29.

[6] J. Goguen, G. Malcolm, *A Hidden Agenda*, Theoretical Computer Science **245** (2000) 55–101.

[7] W. Kreutzer, B. McKenzie, *Programming for Artificial Intelligence*, Addison–Wesley, 1991.

[8] L. Lambán, V. Pascual, J. Rubio, *Specifying implementations*, in Proceedings ISSAC'99, ACM Press (1999) 245–251.

[9] L. Lambán, V. Pascual, J. Rubio, *An object-oriented interpretation of the EAT system.* Preprint.

[10] J. Loeckx, H. D. Ehrich, M. Wolf, *Specification of Abstract Data Types*, Wiley-Teubner, 1996.

[11] T. Murata, *Petri Nets: Properties, Analysis and Applications*, Proceedings of the IEEE **16** (1990) 39–50.

[12] J. Rubio, *Locally effective objects and Artificial Intelligence*, Lecture Notes in Artificial Intelligence **1930** (2000).

[13] J. Rubio, J. A. Bañares, P. R. Muro, *A functional approach to the implementation of search algorithms* (in Spanish), in Proceedings CAEPIA'99, vol. I, Murcia University (1999) 88–97.

[14] J. Rubio, F. Sergeraert, *Locally effective objects and Algebraic Topology*, in Computational Algebraic Geometry, Birkhäuser (1993) 235–251.

[15] J. Rubio, F. Sergeraert, Y. Siret, *EAT: Symbolic Software for Effective Homology Computation*, `ftp://fourier.ujf-grenoble.fr/pub/EAT`, Institut Fourier, Grenoble, 1997.

[16] J. Rubio, F. Sergeraert, Y. Siret, *An overview of EAT*, Symbolic and Algebraic Computation Newsletter **3** (1998) 69–79.

[17] F. Sergeraert, *The computability problem in Algebraic Topology*, Advances in Mathematics **104** (1994) 1–29.

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000)

BIASEDNESS OF THE JACKKNIFE VARIANCE ESTIMATOR OF SAMPLE MEAN SQUARE

M. Ruiz Espejo

Facultad de Ciencias Económicas, UNED, Apartado 19207,

28080 Madrid, Spain

Housila P. Singh

School of Studies in Statistics, Vikram University,

Ujjain 456010, M.P., India

Summary. It could be thought that the jackknife variance estimator is always unbiased. In this paper we have proved (in an original methodologic way) that the jackknife variance estimator of sample mean square (s_n^2) is not unbiased while it is optimal and unbiased for sample mean ($\bar{x}_n$) as it is well known under distribution-free setting.

Key words: Biasedness, jackknife variance estimator, optimal unbiased estimator, sample mean, sample mean square.

AMS Classification: 62D05.

1. Introduction

Let t_n be a sample statistic based on the simpel random sample $x_1, x_2, ..., x_n$ of size n drawn with replacement from a population. Let $t_{n-1,i}$ be the ith sample statistic computed from the sample after omitting the ith sample value x_i (i.e. based on $n-1$ sample values). Further let

$$t_n' = nt_n - (n-1)\,\bar{t}_{n-1}$$

be the jackknife estimator associated to t_n, where

$$\bar{t}_{n-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_{n-1,i}$$

for instance, see Stuart and Ord (1994, p. 365).

Tuckey (1958) introduces the following jackknife estimator of the variance $V(t_n)$, namely

$$\widehat{V}_J(t_n) = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_{n-1,i} - \bar{t}_{n-1})^2 .$$

Stuart and Ord (1994) indicates that for

$$t_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}_n \text{ (say)},$$

$$\Rightarrow t'_n = \bar{x}_n \text{ and } \widehat{V}_J(t_n) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 .$$

Thus it follows from Ruiz Espejo and Singh (2000) the jackknife variance estimator of the sample mean $\bar{x}_n$, $\widehat{V}_J(\bar{x}_n)$, is the optimal unbiased estimator for a distribution-free setting.

Since the jackknife variance estimator for $V(\bar{x}_n)$ is optimal and unbiased, it could be thought that the jackknife is always optimal and unbiased.

In the subsequent sections we shall prove that the unbiasedness is not always true for the jackknife variance estimator, with a counterexample.

2. Unbiasedness

We assume that the sample statistic t_n satisfies the following set of conditions:

$$E(t_n) = T \text{ (which does not depend on } n). \quad \text{(c.1)}$$

$$V(t_{n-1,i}) = V(t_{n-1}) \text{ (which does not depend on } i). \quad \text{(c.2)}$$

$$\text{If } i \neq j,\ Cov(t_{n-1,i}, t_{n-1,j}) = c_{n-1} \text{ (which does not depend on } i \text{ and } j). \quad \text{(c.3)}$$

Proposition 2.1. *If t_n is symmetric for all permutation $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$ of the sample $(x_1, x_2, ..., x_n)$, i.e.*

$$t_n(x_1, x_2, ..., x_n) = t_n(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}),$$

then the conditions (c.2) *and* (c.3) *are verified.* □

This is the case of the 'sample mean square', which satisfies (c.1), (c.2) and (c.3).

Theorem 2.1. *For a sample statistic t_n which verifies* (c.1), (c.2) *and* (c.3),

$$E\left[\widehat{V}_J(t_n)\right] = V(t_n)$$

is true if and only if

$$V(t_n) = \frac{(n-1)^2}{n}\left[V(t_{n-1}) - c_{n-1}\right]$$

where

$$c_{n-1} = Cov\left(t_{n-1,i}, t_{n-1,j}\right) \text{ for } i \neq j. \square$$

Proof. We have

$$\widehat{V}_J(t_n) = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_{n-1,i} - \bar{t}_{n-1}\right)^2.$$

Taking expectation,

$$E\left[\widehat{V}_J(t_n)\right] = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[\left(t_{n-1,i} - \bar{t}_{n-1}\right)^2\right].$$

Noting that (c.1) holds,

$$E\left[\left(t_{n-1,i} - \bar{t}_{n-1}\right)^2\right] = V(t_{n-1,i}) + V(\bar{t}_{n-1}) - 2Cov\left(t_{n-1,i}, \bar{t}_{n-1}\right).$$

It follows from (c.2) and (c.3) that

$$V(\bar{t}_{n-1}) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} V(t_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k}^{n} Cov\left(t_{n-1,k}, t_{n-1,j}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}V(t_{n-1}) + \frac{n-1}{n}c_{n-1},$$

and

$$Cov\left(t_{n-1,i}, \bar{t}_{n-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Cov\left(t_{n-1,i}, t_{n-1,j}\right) = \frac{1}{n}V(t_{n-1}) + \frac{n-1}{n}c_{n-1}.$$

Then, substituting $V(\bar{t}_{n-1})$ and $Cov\left(t_{n-1,i}, \bar{t}_{n-1}\right)$ with $V(t_{n-1,i}) = V(t_{n-1})$ in $E\left(t_{n-1,i} - \bar{t}_{n-1}\right)^2$ we get

$$E\left[\left(t_{n-1,i} - \bar{t}_{n-1}\right)^2\right] = V(t_{n-1})\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right) + c_{n-1}\left(\frac{n-1}{n} - 2\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= \frac{n-1}{n}\left[V(t_{n-1}) - c_{n-1}\right],$$

and hence

$$E\left[\widehat{V}_J(t_n)\right] = \frac{(n-1)^2}{n}\left[V(t_{n-1}) - c_{n-1}\right].$$

Thus $\widehat{V}_J(t_n)$ is unbiased for $V(t_n)$ if and only if

$$V(t_n) = \frac{(n-1)^2}{n}\left[V(t_{n-1}) - c_{n-1}\right]. \square$$

3. Application

If $i \neq j$, for $t_n = \bar{x}_n$ the conditions (c.1), (c.2) and (c.3) are satisfied, then

$$Cov\left(t_{n-1,i}, t_{n-1,j}\right) = \frac{n-2}{(n-1)^2}\sigma^2 = c_{n-1},$$

and

$$V(t_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(n-1)^2}{n}\left[\frac{\sigma^2}{n-1} - \frac{(n-2)\sigma^2}{(n-1)^2}\right] = \frac{(n-1)^2}{n}\left[V(t_{n-1}) - c_{n-1}\right], \quad (1)$$

which proves that the jackknife variance estimator of $\bar{x}_n$, is unbiased and optimal for distribution-free setting.

Further, the sample mean square

$$t_n = s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2,$$

is an unbiased estimator of the population variance σ^2. We note from Stuart and Ord (1994, p. 418) that

$$V\left(s_{n-1,i}^2\right) = \frac{\mu_4}{n-1} - \frac{(n-4)\sigma^4}{(n-1)(n-2)} = V\left(s_{n-1}^2\right)$$

and the value of c_{n-1} is obtained in (7). Thus s_n^2 satisfies the conditions (c.1), (c.2) and (c.3). Also,

$$c_{n-1} = \rho_{n-1} V(t_{n-1})$$

and then from (1) we have

$$\rho_{n-1} = 1 - \frac{nV(t_n)}{(n-1)^2 V(t_{n-1})}.$$

Thus for $t_n = s_n^2$,

$$\rho_{n-1} = 1 - \frac{nV(s_n^2)}{(n-1)^2 V(s_{n-1}^2)}. \quad (2)$$

Using the formula given by Stuart and Ord (1994, p. 418) for $V(s_n^2)$ and the result (2), we have the necessary condition for unbiasedness of $\widehat{V}_J(s_n^2)$:

$$\rho_{n-1} = 1 - \frac{(n-1)(n-2)\mu_4 - (n-2)(n-3)\sigma^4}{(n-1)^2(n-2)\mu_4 - (n-1)^2(n-4)\sigma^4} \to 1 \text{ as } n \to \infty. \quad (3)$$

However,

$$\rho_{n-1} = \frac{c_{n-1}}{V(t_{n-1})}$$

does not converges always to 1 as $n \to \infty$. As the necessary condition (3) for unbiasedness of $\widehat{V}_J(s_n^2)$, is not verified, therefore we conclude that the jackknife variance estimator of $V(s_n^2)$ is biased. The proof of this result is given below:

If $i \neq j$,

$$c_{n-1} = Cov\left(s^2_{n-1,i}, s^2_{n-1,j}\right) = \frac{n^2}{(n-1)^2} Cov\left(\widehat{\alpha}_{2,i} - \widehat{\alpha}^2_{1,i}, \widehat{\alpha}_{2,j} - \widehat{\alpha}^2_{1,j}\right) =$$

$$= \frac{n^2}{(n-1)^2}\left[Cov\left(\widehat{\alpha}_{2,i}, \widehat{\alpha}_{2,j}\right) - Cov\left(\widehat{\alpha}^2_{1,i}, \widehat{\alpha}_{2,j}\right) - Cov\left(\widehat{\alpha}_{2,i}, \widehat{\alpha}^2_{1,j}\right) + Cov\left(\widehat{\alpha}^2_{1,i}, \widehat{\alpha}^2_{1,j}\right)\right]$$

where

$$Cov\left(\widehat{\alpha}_{2,i}, \widehat{\alpha}_{2,j}\right) = Cov\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k\neq i}^{n} x_k^2, \frac{1}{n-1}\sum_{h\neq j}^{n} x_h^2\right) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{k\neq i}^{n}\sum_{\substack{h\neq j \\ h=k}} Cov\left(x_k^2, x_h^2\right) = \frac{n-2}{(n-1)^2} V\left(x^2\right) = \frac{n-2}{(n-1)^2}\left(\alpha_4 - \alpha_2^2\right), \quad (4)$$

with α_k the kth noncentral population moment,

$$Cov\left(\widehat{\alpha}_{2,i}, \widehat{\alpha}^2_{1,j}\right) = Cov\left(\widehat{\alpha}^2_{1,i}, \widehat{\alpha}_{2,j}\right) =$$

$$= Cov\left[\frac{1}{n-1}\sum_{k\neq i}^{n} x_k^2, \left(\frac{1}{n-1}\sum_{h\neq j}^{n} x_h\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^3}\sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h\neq j}^{n}\sum_{l\neq j}^{n} Cov\left(x_k^2, x_h x_l\right) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^3}\left[\sum_{k\neq i}^{n}\sum_{\substack{h\neq j,i \\ l=h}}^{n} Cov\left(x_k^2, x_h^2\right) + \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{\substack{h\neq j \\ h=i}}\sum_{l\neq j,h}^{n} Cov\left(x_k^2, x_i x_l\right)\right],$$

since

$$\sum_{k\neq i}^{n}\sum_{\substack{h\neq j \\ h=i=l}} Cov\left(x_k^2, x_h x_l\right) = 0,$$

and then

$$Cov\left(\widehat{\alpha}_{2,i}, \widehat{\alpha}^2_{1,j}\right) = \frac{1}{(n-1)^3}\left[(n-1)\left(\alpha_4 - \alpha_2^2\right) + (n-1)(n-2)\,\alpha_1\left(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\left[\left(\alpha_4 - \alpha_2^2\right) + (n-2)\,\alpha_1\left(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2\right)\right], \quad (5)$$

and

$$Cov\left(\widehat{\alpha}^2_{1,i}, \widehat{\alpha}^2_{1,j}\right) = Cov\left[\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h\neq i}^{n} x_k x_h, \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{l\neq j}^{n}\sum_{m\neq j}^{n} x_l x_m\right] =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^4}\sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h\neq i}^{n}\sum_{l\neq j}^{n}\sum_{m\neq j}^{n} Cov\left(x_k x_h, x_l x_m\right) = \frac{1}{(n-1)^4}(A+B), \quad (6)$$

where

$$A = \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h=k}^{n}\sum_{l\neq j}^{n}\sum_{m\neq j}^{n} Cov\left(x_k^2, x_l x_m\right) =$$

$$= \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{\substack{l\neq j\\ l=k}}\sum_{\substack{m\neq j\\ m=k}} V\left(x_k^2\right) + \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{l\neq j,k}^{n}\sum_{\substack{m\neq j\\ m=k}} Cov\left(x_k^2, x_l x_k\right) + \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{\substack{l\neq j\\ l=k}}\sum_{m\neq j,k}^{n} Cov\left(x_k^2, x_k x_m\right) =$$

$$= (n-2)\left(\alpha_4 - \alpha_2^2\right) + 2(n-2)(n-3)\alpha_1(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2)$$

and

$$B = \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h\neq i,k}^{n}\sum_{l\neq j}^{n}\sum_{m\neq j}^{n} Cov\left(x_k x_h, x_l x_m\right) =$$

$$= \sum_{k\neq i,j}^{n}\sum_{h\neq i,k}^{n}\sum_{\substack{l\neq j\\ l=k}}\sum_{\substack{m\neq j\\ m=k}} Cov\left(x_k x_h, x_k^2\right) + \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h\neq i,j,k}^{n}\sum_{\substack{l\neq j\\ l=h}}\sum_{\substack{m\neq j\\ m=h}} Cov\left(x_k x_h, x_h^2\right) +$$

$$+ \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h\neq i,j,k}^{n}\sum_{\substack{l\neq j\\ l=h}}\sum_{m\neq j,h,k}^{n} Cov\left(x_k x_h, x_h x_m\right) + \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h\neq i,j,k}^{n}\sum_{l\neq j,k,h}^{n}\sum_{\substack{m\neq j\\ m=h}} Cov\left(x_k x_h, x_l x_h\right) +$$

$$+ \sum_{k\neq i,j}^{n}\sum_{h\neq i,k}^{n}\sum_{l\neq j,k,h}^{n}\sum_{\substack{m\neq j\\ m=k}} Cov\left(x_k x_h, x_l x_k\right) + \sum_{k\neq i,j}^{n}\sum_{h\neq i,k}^{n}\sum_{\substack{l\neq j,h\\ l=k}}\sum_{m\neq j,k,h}^{n} Cov\left(x_k x_h, x_k x_m\right) +$$

$$+ \sum_{k\neq i,j}^{n}\sum_{h\neq i,j,k}^{n}\sum_{\substack{l\neq j\\ l=h}}\sum_{\substack{m\neq j,h\\ m=k}} Cov\left(x_k x_h, x_h x_k\right) + \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h\neq i,j,k}^{n}\sum_{\substack{l\neq j,h\\ l=k}}\sum_{\substack{m\neq j\\ m=h}} Cov\left(x_k x_h, x_k x_h\right),$$

since

$$\sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h\neq i,k}^{n}\sum_{l\neq j,k,h}^{n}\sum_{\substack{m\neq j,k,h\\ m=l}} Cov\left(x_k x_h, x_l^2\right) = \sum_{k\neq i}^{n}\sum_{h\neq i,k}^{n}\sum_{l\neq j,k,h}^{n}\sum_{m\neq j,k,h,l}^{n} Cov\left(x_k x_h, x_l x_m\right) = 0,$$

and then

$$B = 2(n-2)^2\alpha_1(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) + 4(n-2)^2(n-3)\alpha_1^2\left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right) +$$

$$+2(n-2)(n-3)\left(\alpha_2^2 - \alpha_1^4\right).$$

Putting the values of A and B in (6) we obtain

$$Cov\left(\widehat{\alpha}_{1,i}^2, \widehat{\alpha}_{1,j}^2\right) = \frac{1}{(n-1)^4}(A+B) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^4}\left[(n-2)\left(\alpha_4 - \alpha_2^2\right) + 2(n-2)(n-3)\alpha_1(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) +\right.$$

$$+2(n-2)^2\alpha_1(\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) + 4(n-2)^2(n-3)\alpha_1^2\left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right) +$$

$$\left. + 2(n-2)(n-3)\left(\alpha_2^2 - \alpha_1^4\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^4}\left[(n-2)\left(\alpha_4-\alpha_2^2\right)+2(n-2)(2n-5)\alpha_1(\alpha_3-\alpha_1\alpha_2)+\right.$$

$$\left.+4(n-2)^2(n-3)\alpha_1^2\left(\alpha_2-\alpha_1^2\right)+2(n-2)(n-3)\left(\alpha_2^2-\alpha_1^4\right)\right].$$

Thus, for $i \neq j$, we get

$$c_{n-1} = Cov\left(s_{n-1,i}^2, s_{n-1,j}^2\right) = \frac{n^2}{(n-1)^2}\left\{\frac{n-2}{(n-1)^2}\left(\alpha_4-\alpha_2^2\right)\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(n-1)^2}\left[\left(\alpha_4-\alpha_2^2\right)+(n-2)\alpha_1(\alpha_3-\alpha_1\alpha_2)\right]+\frac{1}{(n-1)^4}(A+B)\right\} =$$

$$= \frac{n^2}{(n-1)^6}\left\{\alpha_4\left[(n-1)^2(n-4)+n-2\right]+\right.$$

$$+\alpha_3\alpha_1\left[-2(n-2)(n-1)^2+2(n-2)(2n-5)\right]+$$

$$+\alpha_2^2\left[-(n-4)(n-1)^2+(n-2)(2n-7)\right]+$$

$$+\alpha_2\alpha_1^2\left[2(n-1)^2(n-2)-2(n-2)(2n-5)+4(n-2)^2(n-3)\right]+$$

$$\left.+\alpha_1^4\left[-2(n-2)(n-3)(2n-3)\right]\right\} =$$

$$= \frac{n^2}{(n-1)^6}\left[\alpha_4\left(n^3-6n^2+9n-4\right)+2\alpha_3\alpha_1\left(-n^3+6n^2-14n+12\right)+\right.$$

$$+\alpha_2^2\left(-n^3+8n^2-20n+18\right)+\alpha_2\alpha_1^2\left(6n^3-16n^2-20n+72\right)+$$

$$\left.+\alpha_1^4\left(-4n^3+26n^2-54n+36\right)\right] = c_{n-1} = C \text{ (say)}. \qquad (7)$$

But

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 \text{ and } \sigma^4 = \alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_1^2 + \alpha_1^4,$$

and hence

$$V\left(s_{n-1}^2\right) = \frac{(n-2)\mu_4-(n-4)\sigma^4}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}\times$$

$$\times\left[n\left(\alpha_4-4\alpha_3\alpha_1-\alpha_2^2+8\alpha_2\alpha_1^2-4\alpha_1^4\right)-2\alpha_4+8\alpha_3\alpha_1+4\alpha_2^2-20\alpha_2\alpha_1^2+10\alpha_1^4\right] =$$

$$= \frac{1}{(n-1)(n-2)}\left[\alpha_4(n-2)+\alpha_3\alpha_1(-4n+8)+\right.$$

$$\left.+\alpha_2^2(-n+4)+\alpha_2\alpha_1^2(8n-20)+\alpha_1^4(-4n+10)\right] = D \text{ (say)}.$$

Then, in contrast with (3), now when $n \to \infty$

$$\rho_{n-1} = \frac{C}{D} \to \frac{\alpha_4-2\alpha_3\alpha_1-\alpha_2^2+6\alpha_2\alpha_1^2-4\alpha_1^4}{\alpha_4-4\alpha_3\alpha_1-\alpha_2^2+8\alpha_2\alpha_1^2-4\alpha_1^4} = L,$$

and "$L = 1$" if and only if "$\alpha_1 = 0$ or $\alpha_3 = \alpha_2\alpha_1$", which may not be true for many statistical populations. With this counterexample, the necessary condition (3) does not hold good in case of the sample mean square s_n^2 (i.e. $t_n = s_n^2$). Thus we proved that the jackknife variance estimator is biased for the variance of s_n^2 (i.e. $V(s_n^2)$) and hence we conclude that unbiasedness is not always true with the jackknife variance estimator. Asymptotic expressions of the bias of $\widehat{V}_J(s_n^2)$ can be obtained from Shao and Tu (1995) and Shao (1988). The optimal unbiased variance estimator of $V(s_n^2)$ is presented by Ruiz Espejo and Singh (2000).

References

[1] **Efron, B.** (1981). Nonparametric estimates of standard error: the jackknife, the bootstrap and other methods. *Biometrika*, **68**, 589-599.

[2] **Ruiz Espejo, M.** and **Singh, H.P.** (2000). Optimal unbiased estimator of the fourth population central moment (Abstract). *5th World Congress of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability* and *63rd Annual Meeting of the Institute of Mathematical Statistics*, 115. Guanajuato, Mexico.

[3] **Shao, J.** (1988). On resampling methods for variance and bias estimation in linear models. *The Annals of Statistics*, **16**, 986-1008.

[4] **Shao, J.** and **Tu, D.** (1995). *The Jackknife and Bootstrap*. Springer-Verlag. New York.

[5] **Stuart, A.** and **Ord, K.** (1994). *Kendall's Advanced Theory of Statistics*. Volume I, 6th edition. Edward Arnold. London.

[6] **Tuckey, J.W.** (1958). Bias and confidence in not-quite large samples (Abstract). *The Annals of Mathematical Statistics*, **29**, 614.

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000)

SOBRE LA VARIANZA Y ESQUEMAS MUESTRALES

M. Ruiz Espejo

Facultad de Ciencias Económicas, UNED, Apartado 19207,

28080 Madrid, Spain

Summary. In the present methological paper we provide a justification of five alternative expressions of the variance of a discrete uniform variable. As a consequence we obtain sampling schemes for finite populations.

Resumen. En el presente trabajo metodológico proporcionamos una justificación de cinco expresiones alternativas de la varianza de una variable uniforme discreta. Como consecuencia obtenemos esquemas de muestreo para poblaciones finitas.

Palabras clave: Esquemas de muestreo, variable uniforme discreta, varianza.
Clasificación AMS: 62D05.

1. Introducción

Las medidas de dispersión pueden referirse, o no, a una medida de tendencia central. En este sentido es usual leer en algunos textos que la varianza, de una distribución uniforme discreta, es una medida de dispersión referida a una medida de tendencia central como es la media aritmética o la media de la *distribución uniforme discreta* (Casas Sánchez y Santos Peñas, 1996).

En este trabajo proporcionamos la metodología necesaria para obtener la varianza citada sin referirse a la media.

Una conclusión inmediata, de la justificación teórica, es que la varianza no pertenece solo a las medidas de dispersión referidas a la media, sino que también puede considerarse perteneciente a las medidas no referidas a la media. Por ello, el hecho de referirse o no a la media explícitamente, no clasifica, en dos clases (disjuntas) al conjunto de medidas de dispersión, en referidas o no referidas a una medida de tendencia central.

Presentamos también una aplicación de estos resultados a esquemas de muestreo para poblaciones finitas.

2. Algunas expresiones de la varianza

La expresión más conocida de la varianza de una variable uniforme discreta sobre los puntos $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es, por definición el momento central o respecto a

la media de orden 2,

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{1}$$

donde

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

es la media aritmética, o simplemente, la media de la variable.

Otra expresión de S^2 no referida a la media $\bar{x}$, puede deducirse como consecuencia de De Vries (1986, p. 8).

$$nS^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j\right) = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j,$$

de donde

$$S^2 = \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j \tag{2}$$

es otra expresión de la varianza no referida explícitamente a la media $\bar{x}$.

Otra expresión más sencilla de S^2 es la siguiente

$$S^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_i - x_j)^2, \tag{3}$$

ya que ésta puede reescribirse así:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_i - x_j)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j\right) =$$

$$= \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j,$$

por lo que (3) y (2) coinciden, ya que en la segunda igualdad del último desarrollo,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(x_i^2 + x_j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(n-i)\,x_i^2 + \sum_{j=1}^{n}(j-1)\,x_j^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Otra demostración menos directa, puede proporcionarse por el método de inducción en n (ver Ruiz Espejo, 1999).

3. Aplicación

La fórmula (3) obtenida en este trabajo tiene utilidad en la metodología de

esquemas de muestreo en poblaciones finitas. Veamos algunos ejemplos.

Sea una población finita U de tamaño N, cuyas unidades están numeradas

$$U = \{1, 2, ..., i, ..., N\}.$$

Además x es una variable auxiliar conocida para todas las unidades de U. Así el valor de la variable auxiliar en la unidad i-ésima de U, lo representamos por x_i.

Por una muestra ordenada, s, se entiende una secuencia ordenada o vector de unidades de U. Si la muestra es de tamaño n, podemos denotar por j_k a la k-ésima unidad de la secuencia $\mathbf{s} = (j_1, j_2, ..., j_k, ..., j_n)$. Es decir, $\mathbf{s} \in U^n$ o producto cartesiano de U por sí mismo n veces, y por ello el conjunto de posible muestras ordenadas de tamaño n lo denotamos por $\mathbf{S} = \{\mathbf{s}\colon\ \mathbf{s} \in U^n\}$, conjunto de cardinal N^n.

Por esquema de muestreo entendemos un método de selección ordenada de unidades de U, de modo que queden determinadas a priori las probabilidades de selección, en primer lugar de la primera unidad j_1, y dada una secuencia ordenada de $k-1$ unidades $(j_1, j_2, ..., j_{k-1})$ quede determinada también a priori la probabilidad de seleccionar otra unidad, digamos $j_k \in U$, con $2 \leq k \leq n$.

Sea entonces el esquema muestral ordenado que para dos unidades distintas $j_1 \neq j_2$ de U, la probabilidad de ser incluidas en los dos primeros lugares de la muestra ordenada es

$$p(j_1, j_2) = \frac{(x_{j_1} - x_{j_2})^2}{2N^2S^2},$$

donde en este apartado 3 denotamos por S^2 a la varianza de x en la población finita de tamaño N. Si además, las $n-2$ restantes unidades de la secuencia se obtienen por muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento de tamaño $n-2$ de la población $U - \{j_1, j_2\}$, entonces tenemos el esquema de muestreo sin reemplazamiento debido a Singh y Srivastava (1980) que proporciona estimadores de regresión lineal insesgados de la media poblacional para la variable de interés.

Para una secuencia de unidades distintas, $\mathbf{s} = (j_1, j_2, ..., j_n)$, la probabilidad de ser seleccionada por este esquema muestral es

$$p(\mathbf{s}) = \frac{(x_{j_1} - x_{j_2})^2}{2N^2S^2} \frac{1}{\binom{N-2}{n-2}(n-2)!}, \tag{4}$$

ya que para $k = 3, 4, ..., n$, la probabilidad de seleccionar la unidad distinta j_k, habiéndose seleccionado previamente las unidades distintas entre sí $(j_1, j_2, ..., j_{k-1})$, es

$$p(j_k | j_1, j_2, ..., j_{k-1}) = \frac{1}{N-k+1}, \quad \text{si } 3 \leq k \leq n,$$

y usando el teorema o la regla del producto para sucesos dependientes.

La fórmula (4) asigna probabilidades no negativas y cuya suma es la unidad; denotando por $\mathcal{S}$ al conjunto de secuencias de tamaño n con unidades distintas, y razonando de modo similar al desarrollado en Ruiz Espejo (1996),

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} p(s) = \frac{1}{2N^2S^2\binom{N-2}{n-2}(n-2)!}\sum_{s\in\mathcal{S}}(x_{j_1}-x_{j_2})^2 =$$

$$= \frac{1}{2N^2S^2\binom{N-2}{n-2}(n-2)!}\times$$

$$\times \sum_{j_1\in U}\sum_{j_2\in U-\{j_1\}}(x_{j_1}-x_{j_2})^2\, card\,\{s\in\mathcal{S}:\ j_1,j_2\in s\} =$$

$$= \frac{1}{2N^2S^2}2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}(x_i-x_j)^2 = 1,$$

aplicando los resultados vistos en la sección 2, y haciendo uso de las propiedades combinatorias.

El diseño muestral no ordenado asociado al anterior diseño ordenado, puede obtenerse del modo siguiente; para cada muestra conjunto o no ordenada s de tamaño n, la probabilidad de ser seleccionada es:

$$p(s) = \sum_{s\in\mathcal{S}:\ r(s)=s} p(s) =$$

$$= \sum_{s\in\mathcal{S}:\ r(s)=s}\frac{(x_{j_1}-x_{j_2})^2}{2N^2S^2\binom{N-2}{n-2}(n-2)!} =$$

$$= \frac{1}{2N^2S^2\binom{N-2}{n-2}(n-2)!}\sum_{j_1\in s}\sum_{j_2\in s-\{j_1\}}(x_{j_1}-x_{j_2})^2(n-2)! =$$

$$= \frac{1}{2N^2S^2\binom{N-2}{n-2}}2n^2S_s^2 = \frac{n^2S_s^2}{N^2S^2\binom{N-2}{n-2}}, \tag{5}$$

donde $r(s) = \{i\in U:\ i\in s\}$ es la función de reducción de la muestra ordenada s a su asociada no ordenada s (eliminando el orden de las unidades), y

$$S_s^2 = \frac{1}{2n^2}\sum_{j_1\in s}\sum_{j_2\in s-\{j_1\}}(x_{j_1}-x_{j_2})^2$$

es la varianza de la variable auxiliar en las unidades de la muestra no ordenada s de tamaño n.

Es fácil comprobar que las probabilidades dadas en (5) constituyen un diseño muestral al variar las muestras no ordenadas s en el conjunto

$$\mathcal{M} = \{s:\ \phi\neq s\subset U,\ card(s)=n\}.$$

En efecto, son no negativas y suman la unidad

$$\sum_{s\in\mathcal{M}} p(s) = \sum_{s\in\mathcal{M}} \frac{n^2 S_s^2}{N^2 S^2 \binom{N-2}{n-2}} =$$

$$= \frac{n^2}{N^2 S^2 \binom{N-2}{n-2}} \sum_{s\in\mathcal{M}} \frac{1}{2n^2} \sum_{i\in s} \sum_{j\in s-\{i\}} (x_i - x_j)^2 =$$

$$= \frac{1}{2N^2 S^2 \binom{N-2}{n-2}} \sum_{i\in U} \sum_{j\in U-\{i\}} (x_i - x_j)^2 \, card\{s \in \mathcal{M}\colon i, j \in s\} =$$

$$= \frac{1}{2N^2 S^2 \binom{N-2}{n-2}} 2N^2 S^2 \binom{N-2}{n-2} = 1.$$

Además del estimador insesgado de regresión asociado a este diseño, podríamos obtener estimadores insesgados para cualquier parámetro T que admita un estimador insesgado t para el diseño de muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento de tamaño n (mas), haciendo uso de la información auxiliar x. En efecto,

$$t'(s) = t(s) \frac{N^2 S^2 \binom{N-2}{n-2}}{n^2 S_s^2 \binom{N}{n}} \tag{6}$$

es insesgado para T, con el diseño muestral dado en (5). Para demostrarlo, tenemos que por hipótesis

$$T = E(\text{mas}, t) = \sum_{s\in\mathcal{M}} t(s) \frac{1}{\binom{N}{n}},$$

de donde

$$E(p, t') = \sum_{s\in\mathcal{M}} t'(s)\, p(s) =$$

$$= \sum_{s\in\mathcal{M}} t(s) \frac{N^2 S^2 \binom{N-2}{n-2}}{n^2 S_s^2 \binom{N}{n}} \frac{n^2 S_s^2}{N^2 S^2 \binom{N-2}{n-2}} = \sum_{s\in\mathcal{M}} t(s) \frac{1}{\binom{N}{n}} = T.$$

Un ejemplo de este tipo de estimadores insesgados que usan información auxiliar y el diseño no ordenado (5) pueden ser los siguientes, sustituyendo t dado a continuación en la fórmula (6):

a) Para la media poblacional

$$t(s) = \bar{y}_s = \frac{1}{n}\sum_{i\in s} y_i,$$

donde $\bar{y}_s$ es la media muestral de la variable de interés (y).

b) Para la varianza poblacional

$$t(s) = \frac{N-1}{N}\frac{1}{n-1}\sum_{i\in s}(y_i - \bar{y}_s)^2,$$

que es la cuasivarianza muestral de la variable de interés, por $(N-1)/N$ que es una constante.

Las fórmulas de $p(s)$ dada en (5) y de $t'(s)$ en (6) se reducen sensiblemente utilizando en lugar de varianzas, las correspondientes cuasivarianzas. En efecto, podrían reescribirse de modo más compacto así:

$$p(s) = \frac{n^2 S_s^2}{N^2 S^2 \binom{N-2}{n-2}} = \frac{n(n-1)s_x^2}{N(N-1)S_x^2\binom{N-2}{n-2}} = \frac{s_x^2}{S_x^2}\frac{1}{\binom{N}{n}}$$

y

$$t'(s) = t(s)\frac{N(N-1)S_x^2\binom{N-2}{n-2}}{n(n-1)s_x^2\binom{N}{n}} = t(s)\frac{S_x^2}{s_x^2},$$

siendo

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i\in U}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{con} \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i\in U} x_i;$$

y

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i\in s}(x_i - \bar{x}_s)^2 \quad \text{con} \quad \bar{x}_s = \frac{1}{n}\sum_{i\in s} x_i.$$

4. Conclusiones

Hemos obtenido tres representaciones de la varianza de una distribución uniforme discreta. La primera es su definición convencional en función de la media aritmética o esperanza de la distribución. La segunda se basa en un desarrollo algebraico de De Vries (1986), y en la que no aparece en su expresión la media. En tercer lugar hemos obtenido otra expresión como suma de desviaciones cuadráticas entre valores de la variable aleatoria uniforme discreta aludida.

De la tercera expresión puede obtenerse a su vez una cuarta, concretamente la siguiente

$$S^2 = \frac{1}{2m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\neq i}^{m}(x_i - x_j)^2,$$

e incluso la análoga

$$S^2 = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2 ,$$

ya que de la anterior, $(x_i - x_i)^2 = 0$ y al sumarse quedan estos términos neutralizados o simplificados en la suma para $i = 1, 2, ..., n$, con $j = i$.

Estas relaciones explícitas nos han permitido detallar el esquema muestral de Singh y Srivastava (1980) para el que el estimador de regresión lineal de la media poblacional en el muestreo de poblaciones finitas, resulta ser insesgado.

Deducimos también que para cualquier estimador insesgado de cierto parámetro, usando muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento de tamaño fijo n, puede construirse otro estimador también insesgado para el mismo parámetro y que utiliza información auxiliar, con el diseño muestral no ordenado asociado al esquema muestral de Singh *et al.* (1980).

Agradecimientos

Se reconocen y agradecen las sugerencias del Professor L.N. Sahoo (Utkal University, India).

Referencias

[1] **Casas Sánchez, J.M. y Santos Peñas, J.** (1995). *Introducción a la Estadística para Economía y Administración de Empresas.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid.

[2] **De Vries, P.J.** (1986). *Sampling Theory for Forest Inventory.* Springer-Verlag. Berlín.

[3] **Ruiz Espejo, M.** (1996). *Muestreo Básico para Ciencias Aplicadas.* Academia de Ciencias. Zaragoza.

[4] **Ruiz Espejo, M.** (1999). Problema 74. *Qüestiió*, **23**, 196, 397-400.

[5] **Singh, P. y Srivastava, A.K.** (1980). Sampling schemes providing unbiased regression estimators. *Biometrika*, **67**, 205-209.

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55(2000)

THE COULOMB-HARMONIC OSCILATOR AND THE VIRIAL THEOREM

J.L. Brun and A.F. Pacheco

Departamento de Física Aplicada. Facultad de Ciencias.
Universidad de Zaragoza. 50009 ZARAGOZA. Spain.

ABSTRACT

A Coulomb-harmonic oscillator model is proposed and solved to illustrate the fulfilment, in a non trivial case,of the virial theorem in Classical Mechanics.

I- INTRODUCTION

As is well known [1] to establish the Virial Theorem in Classical Mechanics for a single particle under the influence of a force $\vec{F}$, we define the quantity

$$A = m\vec{v}.\vec{r} \tag{1.1}$$

where $m, \vec{v}$ and $\vec{r}$ stand for the mass,velocity and position of the particle respectively. From Newton´s equations we have

$$\frac{dA}{dt} = \vec{F}.\vec{r} + 2E_{kin} \tag{1.2}$$

E_{kin} being the kinetic energy of the particle. It follows that

$$\frac{A(t) - A(0)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \left(\vec{F}.\vec{r} + 2E_{kin}\right)dt' = \left\langle \vec{F}.\vec{r} \right\rangle + 2\left\langle E_{kin} \right\rangle \tag{1.3}$$

For a periodic system the left-hand side obviously vanishes if t is chosen equal to the period, or if $t \to \infty$. In either case, we have

$$\left\langle \vec{F}.\vec{r} \right\rangle = -2\left\langle E_{kin} \right\rangle \tag{1.4}$$

where the averages are taken respect to time. This has to be fulfiled in general, as $t \to \infty$,for any system in which all the coordinates and velocities remain finite.

Now let us define the function $R(t)$ as

$$R(t) \equiv -\frac{\langle E_{kin} \rangle(t)}{\langle E_{pot} \rangle(t)} = 1 - \frac{E}{\langle E_{pot} \rangle(t)} \tag{1.5}$$

where E stands for the total energy and $\langle E_{pot} \rangle (t)$ indicates the time average value of the potential energy in the time interval $0 \to t$. This function depends on the force $\vec{F}$ acting on the particle and for bounded garvitational orbits it can be seen [2] that as a consequence of the virial theorem $R(t) \to 1/2$ when t tends to infinity.

In this paper we will consider the zero angular momentum trajectories of a point like particle of mass m under the gravitational influence of a fixed homogeneous sphere of radius L and mass M wchich can be penetrated by the particle.So outside the sphere we have an inverse square law force and inside the sphere we have a restoring force proportional to the distance from the center.

We will show that the asymptotic values of $\langle R \rangle$ depend on the total energy, unlike the case with the pure inverse square-law force. This is a consequence of having a force which is continuous with r, but whose dependence on r is not the same for $r \langle L$ as for $r \rangle L$. In this sense we present an explicit example of the V.T. implication in a richer situation than the conventional examples presented in texts, where ,as the law of force is unique, the asymptotic value of $\langle R \rangle$ is independent of the trajectory chosen.

In section II, after solving the correspondimg equation of motion, we will numerically compute $R(t)$ for any t and show how it tends to some specific asymptotic values depending on the energy. Then these asymptotic values will be analytically calculated in section III by using the V.T.

II COMPUTATION OF $R(t)$

In Fig.1 the physical problem is graphically stated. At $t = 0$, the particle is shot off from the surface into outer space with a speed v_0 and zero angular momentum.

Depending on v_0 the trajectory will be closed or open. In the first case T_p will stand for the real orbital period and t_M indicate the instant in which the particle reaches, for the first time, the maximum departure from the center. In general,the force acting on the particle is:

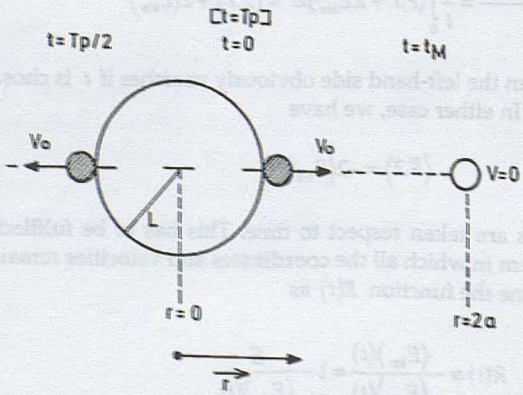


Fig.1 Scheme of the problem under consideration.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \quad (r \rangle L) \qquad \vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{L^3}\vec{r} \quad (r \langle L) \tag{2.1}$$

and the corresponding potential energy:

$$E_{pot} = -\frac{GMm}{r} \quad (r \rangle L) \qquad E_{pot} = \frac{GMm}{2L^3}r^2 - \frac{3GMm}{2L} (r \langle L) \tag{2.2}$$

For the sake of simplicity in the final results it is convenient to define an auxiliary scale T and an auxiliary scale a, both being functions of E, as well as a dimensionless parameter ξ_0, defined as:

$$a \equiv \frac{GMm}{2|E|} \qquad T \equiv \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \qquad \varepsilon_o \equiv -\frac{E_{kin}(t=0)}{E_{pot}(t=0)} \tag{2.3}$$

As shown in Fig.1, 2a corresponds to the maximum value of r in closed trajectories. T would be (apart from a constant) the period of the pure Kepler problem and ε_0 characterises the type of orbit. It is obvious that the calculation of $R(t)$ requires the knowledge of the functional form $r(t)$ which cannot be obtained analytically. Numerical computation cannot be avoided and so we will consider three possible cases:

1) $\varepsilon_0 \langle 1 \; (E \langle 0)$ closed trajectory
2) $\varepsilon_0 = 1 (E = 0)$ trivially $R(t) = 1$ for any t
3) $\varepsilon_0 \rangle 1 (E \rangle 0)$ open trajectory

1) <u>case $\varepsilon_0 \langle 1$</u>

Given any time t, we can always write

$$t = n\frac{T_p}{2} + \Delta t \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \; 0 \langle \Delta t \langle \frac{T_p}{2}$$

and it can be seen that

$$R(t) = 1 - \frac{t}{n\frac{T_p}{2}\left(1 - R\left(\frac{T_p}{2}\right)\right) + \frac{\Delta t}{1 - R(\Delta t)}} \tag{2.4}$$

for any t. So we only need to calculate $R(t)$ in the time interval

$$0 < t < \frac{T_p}{2}$$

and in this time interval $0 < t < 2t_M$ and $2t_M < t < \frac{T_p}{2}$ must be distinguised but firstly, we calculate t_M and T_p

The relation between the radial distance r of the particle and the time t (relative to some starting point) is given by [1]

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E - E_{pot}(r)}} \tag{2.5}$$

and therefore

$$t_M = \int_{L}^{2a} \frac{r dr}{\sqrt{GMm - |E| r^2}} \tag{2.6}$$

This integral can be analytically caculated and taking into account the definitions of the auxiliary scale T and the ε_0 parameter, we obtain

$$\frac{t_M}{T} = 2\sqrt{\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)} + \pi - \cos^{-1}(2\varepsilon_0 - 1) \tag{2.7}$$

The time interval the particle is inside the sphere, is given according to (2.5) by

$$\frac{T_p}{2} - 2t_M = \sqrt{\frac{L}{GM}} \int_{L}^{-L} \frac{dr}{\sqrt{3(1-\varepsilon_0) - \left(\frac{r}{L}\right)^2}} \tag{2.8}$$

where we have taken $E_{pot}(r)$ from (2.2) and calculating this integral we obtain for the orbital period

$$\frac{T_p}{T} = 4\left[\frac{t_M}{t} + 2\sqrt{2}(1-\varepsilon_0)^{\frac{3}{2}} \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}}\right] \tag{2.9}$$

Now we go back to the calculus of $R(t)$.

i) In the time interval $0 < t < 2t_M$, we have to solve the Kepler problem.With the introduction [3] of

$$r = a(1 - \cos z) \tag{2.10}$$

we can integrate the equation of motion to obtain

$$\frac{t}{T} = z - sinz - (z_0 - sinz_0) \tag{2.11}$$

where z_0, the value of z for $t = 0$ $(r = L)$ as a function of ε_0 is given by

$$z_0 = \cos^{-1}(2\varepsilon_0 - 1) \tag{2.12}$$

The mean value of the potential energy is given by

$$\langle E_{pot} \rangle(t) = -GMm\frac{1}{t}\int_0^t \frac{dt'}{r} \tag{2.13}$$

and by using (2.10) and (2.11) we obtain

$$\langle E_{pot} \rangle(t) = \frac{GMmT}{a}\frac{1}{t}(z - z_0) \tag{2.14}$$

and consequently from (1.5)

$$R(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{sinz - sinz_0}{z - z_0}\right] \tag{2.15}$$

.ii) In the time interval $2t_M \langle t \langle \frac{T_p}{2}$

$$\langle E_{pot} \rangle(t) = \frac{1}{t}\int_0^t V(t')dt' = \frac{1}{t}\left[\int_0^{2t_M} V(t')dt' + \int_{2t_M}^t V(t')dt'\right] \tag{2.16}$$

The first term on the right was obtained from

$$\langle E_{pot} \rangle(2t_M) = \frac{E}{1 - R(2t_M)} \tag{2.17}$$

where t_M is given by (2.7) and $R(2t_M)$ was evaluated by using (2.15) The last integral was easily evaluated by noting that in the $2t_M \to t$ interval we have harmonic motion in which the phase was adjusted with the conditions $\frac{dr}{dt}(2t_M) = -v_0$ and $r(2t_M) = L$. Finally the substitution of (2.16) in (1.5) gives $R(t)$.

2) case $\varepsilon_0 = 1$. Trivially $R(t) = 1$ *for any* t

3) case $\varepsilon_0 > 1$

With the introduction [3] of

$$r = a(\cosh\beta - 1) \tag{2.18}$$

we can integrate the equation of motion and obtain

$$\frac{t}{T} = \sinh\beta - \beta - (\sinh\beta_0 - \beta_0) \tag{2.19}$$

where β_0, the value of β for $t = 0$ $(r = L)$, is

$$\beta_0 = \cosh^{-1}(2\varepsilon_0 - 1) \tag{2.20}$$

The mean value of the potential energy for any t is given by (2.13), and using (2.18) and (2.19) we obtain

$$\langle E_{pot} \rangle(t) = -\frac{GMm}{a}\frac{T}{t}(\beta - \beta_0) \tag{2.21}$$

and finally from (1.5)

$$R(t) = \frac{1}{2} + \left[1 + \frac{\sinh\beta - \sinh\beta_0}{\beta - \beta_0}\right] \tag{2.22}$$

for any t .In Fig.2, $R(t)$ is plotted for several values of ε_0. (A pocket computer has been used to solve the transcendental equations (2.11) and (2.19)

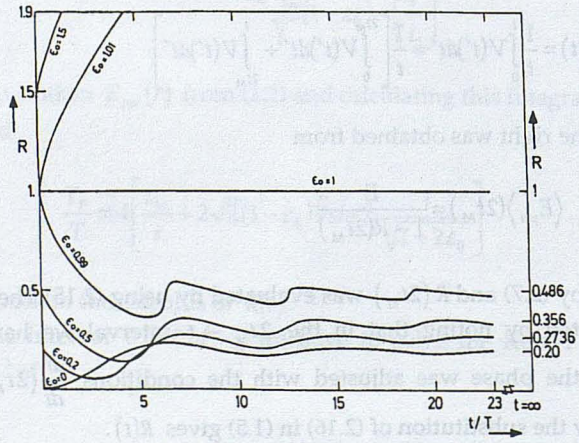


Fig.2 Plot of $R(t)$ for different values of ξ_0 . The time scale T is defined in the test.

III- ANALYTICAL CALCULATION OF $R_{t\to\infty}$ IN CLOSED ORBITS

In accordance with (1.4) and (1.5) we can write,

$$R_{t\to\infty} = \frac{1}{1-\dfrac{2|E|}{\langle \vec{F}.\vec{r} \rangle}} \tag{3.1}$$

and so we have to calculate $\langle \vec{F}.\vec{r} \rangle$ where the time average is taken for T_P (the orbital period). We have

$$\langle \vec{F}.\vec{r} \rangle = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} \vec{F}.\vec{r}\,dt = \frac{1}{T_P}\left[4\int_0^{t_M} \vec{F}.\vec{r}\,dt + 2\int_{2t_M}^{\frac{T_P}{2}} \vec{F}.\vec{r}\,dt \right] \tag{3.2}$$

where in the rigth side, $\vec{F}$ is given by (2.1) and t_M and T_P by (2.7), (2.8) respectively. From (3.1),we finally obtain

$$R_{t\to\infty} = \frac{-\left(\dfrac{\varepsilon_0}{2}+\dfrac{1}{4}\right)f_2 - f_1}{(\varepsilon_0 - 1)f_3 - \left(\dfrac{\varepsilon_0}{2}+\dfrac{1}{4}\right)f_2 - f_1} \tag{3.3}$$

where

$$f_1 = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{(1-\varepsilon_0)}}\left[\frac{\pi}{2} + sin^{-1}(2\varepsilon_0 - 1)\right]$$

$$f_2 = sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}} - \frac{\sqrt{2\varepsilon_0}}{1+2\varepsilon_0} \tag{3.4}$$

$$f_3 = sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_0}} + \left[\frac{1}{2(1-\varepsilon_0)}\right]^{\frac{3}{2}}\frac{t_M}{T}$$

Note that in contrast with the calculation presented in section II where one is forced to solve a transcendental equation to get r as a function of t, the calculation presented here is completely analytical. In Fig.3 we present the result of equation (3.3) which reproduces exactly,as it should, the asymptotic values obtained in Fig.2; $R_{t\to\infty}$ interpolates continously between the pure harmonic case, ($\varepsilon_0 = 0$, $R_{t\to\infty} = 0.2$) to the almost pure Coulomb ($\varepsilon_0 = 0.99\ldots$, $R_{t\to\infty} = 0.5$)

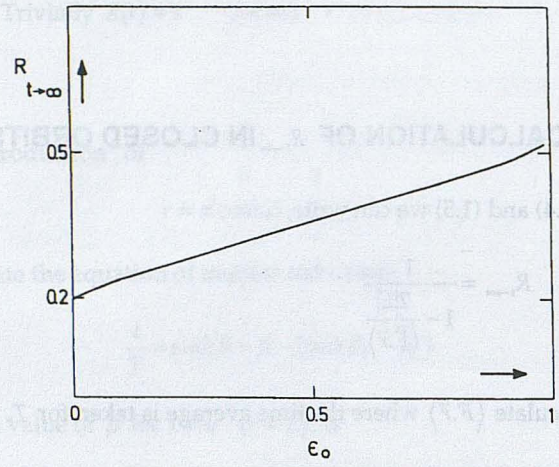


Fig.3 Virial Theorem prediction for tha asymptotic limit of $R_{t\to\infty}$ as a function of ξ_0

IV - FINAL COMMENTS

The Coulomb harmonic-oscillator constitutes a useful model where V.T. can be tested in a richer situation than the conventional ones . The time limit of the ratio of mean values $R \equiv -\dfrac{\langle E_{kin} \rangle}{\langle E_{pot} \rangle}$ is an energy-dependent constant which can be calculated analytically and constrasted with the result derived from the numerical solution of the equation of motion. As usual, V.T. makes a prediction for the asymptotic value of $R(t)$ only in the case of closed trajectories, there being a finite gap (Fig.2) between this set of orbits and the first open one, i.e. that with zero energy.

In our presentation, the use of a and T as a length and time scales has proved to be useful because all the possible trajectories are characterized by the dimensionless parameter ε_0 only, and consequently our results are independent of the radius of the sphere L

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported in part by the Spanish DGICYT (Project PB98-1594)

REFERENCES

1. See for example: H.Goldstein, Classical Mechanics (Addison Wesley, Reading, Mass., 1980)

2. J.L.Brun and A.F.Pacheco. Celestial Mech. 45:395-400,1988.

3. See for example:H.Meirovitch,Metyhods of Analytycal Dynamics.(Mc.Graw Hill, New York, 1970).

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000)

EXACT ZERO-ENERGY SOLUTION FOR A NEW FAMILY OF ANHARMONIC POTENTIALS

Yoël Lana-Renault

Departamento de Física Teórica

Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza. Spain

e-mail: *yoel@kepler.unizar.es*

Abstract. An explicit, oscillatory solution of the type $r = [r_o + A_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_o)]^a$ is found for the zero-energy one-dimensional motion of a particle under a specific family of anharmonic potentials.

Key words: Anharmonic Potentials. Oscillatory Motion.

I. The Potential

In classical mechanics there are very few non-trivial potentials that admit an explicit analytical solution. Our aim in this paper is to present a new family of one-dimensional anharmonic potentials represented by the function:

$$V(r) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a^2 \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot \left[1 - 2 \cdot r_o \cdot r^{-\frac{1}{a}} + \left(r_o^2 - A_o^2 \right) \cdot r^{-\frac{2}{a}} \right] \qquad (1)$$

for which one is able to find an analytical solution.

In (1), r is the position of a point-like particle of mass m; r_o and A_o are two independent parameters, fulfilling $r_o > A_o$. As usual, ω will represent the angular frequency of the oscillatory solutions; -a- is a free non-null parameter, and we will study the equation of the oscillation of zero-energy around the minimum of the potential.

For a large enough r, V(r) is always confining. If $a < 0$, the third term within the brackets is the leader. If $a > 0$, then, the first term in the bracket produces a "parabolic" confinement. Our study will be devoted to the analysis of the oscillations generated around the potential minimum, which has at its right the confining wall just mentioned.

At the origin, $r = 0$, V(r) can exhibit different behaviours, but they are of no interest here.

Beyond the origin, V(r) has, in general, a minimum, at $r = R_1$, and a maximum, at $r = R_2$. These values are

$$R_1 = \left[r_o + \frac{-r_o + \sqrt{r_o^2 + 4 \cdot a \cdot (a - 1) \cdot A_o^2}}{2 \cdot a} \right]^a \qquad (2)$$

$$R_2 = \left[r_o + \frac{-r_o - \sqrt{r_o^2 + 4 \cdot a \cdot (a - 1) \cdot A_o^2}}{2 \cdot a} \right]^a \qquad (3)$$

Note that R_1 always exists. R_2 , on the contrary, is not real for $0 < a < 1$.

The oscillatory motion is confined to the region where $V(r) < E$. Thus, for oscillations of $E = 0$, imposing the condition $V(r) = 0$ we find:

If $a>0$, $R_M = (r_o + A_o)^a$ and $R_m = (r_o - A_o)^a$ (4)

If $a<0$, $R_M = (r_o - A_o)^a$ and $R_m = (r_o + A_o)^a$ (5)

where R_M and R_m are the maximum and minimum limiting distances, respectively. In all cases, $R_2 < R_m < R_1 < R_M$.

II. Several Examples

In the five cases depicted in Sections II and III, we will assume that $m = 1$, $\omega = 10$, $r_o = 2$ and $A_o = 1$.

The purpose of these drawings is to give an idea of the several types of geometries included in Eq. (1). In all cases the continuous line represents the potential, whilst the dotted straight line represents the $E = 0$ level.

Let us consider first a = -1.1 (a < 0) . This is illustrated in Fig. 1 . Some of the results are:

$R_2 = 0.188$, $R_m = 0.299$, $R_1 = 0.779$, $R_M = 1$

Here $V(R_2) = 0.574$ and $V(R_1) = -10.37$

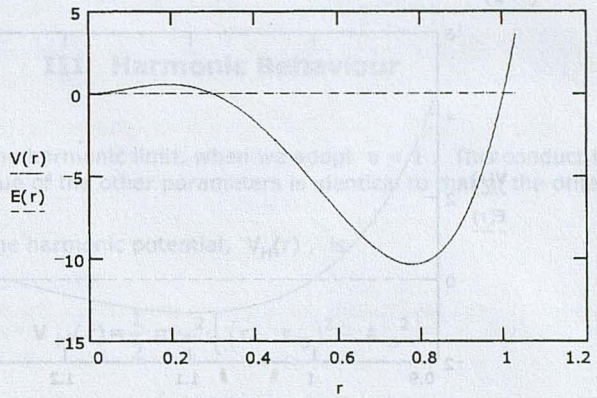


Fig. 1

In the second example, a = -0.1 (a < 0) . The result appears in Fig. 2.

Here $R_2 = 0.732$, $R_m = 0.896$, $R_1 = 0.963$, $R_M = 1$

and $V(R_2) = 0.222$, $V(R_1) = -0.154$

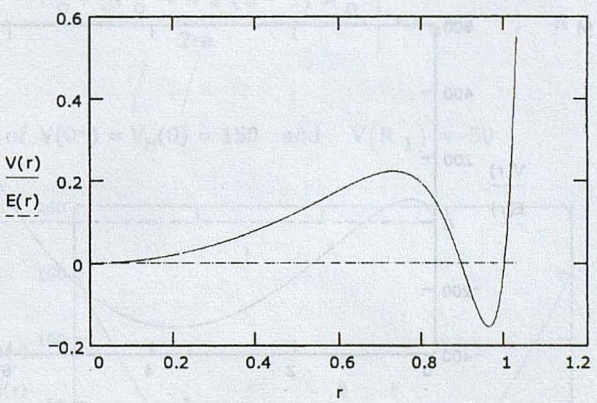


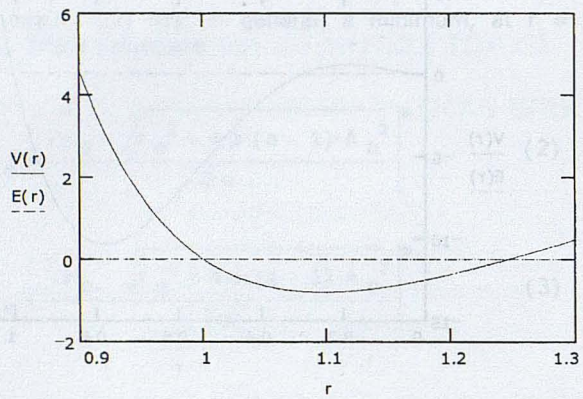
Fig. 2

In the third example, a = 0.2 ($0 < a < 1$) . This is plotted in Fig. 3 . In this case, there is no maximum because R_2 in (3) is complex. Besides, we observe that the limit of $V(0^+)$ is infinite.

Here $R_m = 1$, $R_1 = 1.096$, $R_M = 1.246$

and $V(R_1) = -0.792$

Fig. 3

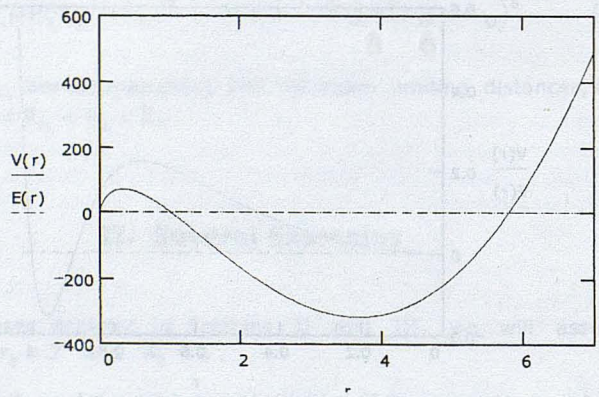


In the fourth example, a = 1.6 ($a > 1$) . The values are (see Fig. 4):

$R_2 = 0.33$, $R_m = 1$, $R_1 = 3.66$, $R_M = 5.8$

and $V(R_2) = 69.644$, $V(R_1) = -317.541$

Fig. 4



III. Harmonic Behaviour

We arrive at the harmonic limit, when we adopt a = 1 . This conduct is illustrated in Fig. 5 . The value of the other parameters is identical to that of the other figures.

The form of the harmonic potential, $V_H(r)$, is

$$V_H(r) = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\omega^2\cdot\left[\left(r - r_o\right)^2 - A_o^2\right]$$

and the values are:

$$R_2 = \left[r_o + \frac{-r_o - \sqrt{r_o^2 + 4\cdot a\cdot(a-1)\cdot A_o^2}}{2\cdot a} \right]^a = 0 \quad , \quad R_m = 1$$

$$R_1 = \left[r_o + \frac{-r_o + \sqrt{r_o^2 + 4\cdot a\cdot(a-1)\cdot A_o^2}}{2\cdot a} \right]^a = r_o = 2 \quad , \quad R_M = 3$$

Here the limit of $V(0^+) = V_H(0) = 150$ and $V(R_1) = -50$

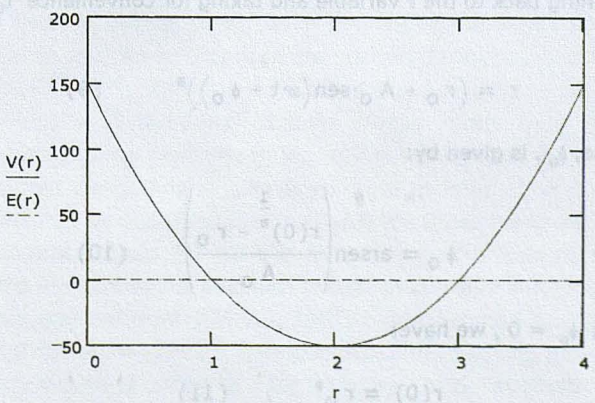


Fig. 5

IV. Oscillatory Solution

To find the general solution of the oscillatory motion, of energy $E = 0$, in the interval between R_m and R_M, we proceed, in the usual way[1], departing from the energy equation:

$$t - t_o = \int_{r(t_o)}^{r(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\cdot(0 - V(r))}}\, dr = I \qquad (6)$$

The function I, can be worked out easily by performing the following change of variable

$$r = \left(r_o + A_o \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot s)\right)^a \qquad (7)$$

In terms of s, -I- adopts the form:

$$I = \frac{1}{a\cdot\omega}\cdot \int_{s(t_o)}^{s(t)} \frac{a\cdot\omega\cdot A_o\cdot\cos(\omega\cdot s)}{\left(r_o + A_o\cdot\operatorname{sen}(\omega\cdot s)\right)^{a-a+1}\cdot\frac{A_o\cdot\cos(\omega\cdot s)}{r_o + A_o\cdot\operatorname{sen}(\omega\cdot s)}}\, ds =$$

$$= \int_{s(t_o)}^{s(t)} 1\, ds = s(t) - s(t_o) \qquad (8)$$

Thus, coming back to the r variable and taking for convenience $t_o = 0$, we easily find

$$r = \left(r_o + A_o\cdot\operatorname{sen}\left(\omega\cdot t + \phi_o\right)\right)^a \qquad (9)$$

The phase, ϕ_o, is given by:

$$\phi_o = \operatorname{arsen}\left(\frac{r(0)^{\frac{1}{a}} - r_o}{A_o}\right) \qquad (10)$$

Adopting $\phi_o = 0$, we have:

$$r(0) = r_o^a \qquad (11)$$

V. Final Comments

We have presented a new parametric family of anharmonic potentials for which one is able to obtain closed analytical solutions for the trajectories of zero-energy.

The degree of anharmonicity is expressed by the departure of the exponent -a- from the value 1 . Several illustrative examples have been provided.

Acknowledgements

The author wishes to express his gratitude to Dr. Amalio F. Pacheco, who provided invaluable help in the writing of the manuscript.

REFERENCES

[1] See, for example, T. B. Kibble, "Classical Mechanics". Mc. Graw Hill (1966)

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000)

Analytic tomography of the mantle in a spherically Earth. The technique MZY

Yoël Lana-Renault

Geophysics. Department of Theoretical Physics.
University of Zaragoza. 50009 Zaragoza. Spain
e-mail: *yoel@kepler.unizar.es*

Abstract. An explicit expression for P-wave velocity is proposed to develop a novel tomographic technique in a spherically symmetric model of the Earth (MZY). The distribution of the P velocity structure in the mantle is determined using only 34 P- and 2 PcP- observed traveltimes. By applying a non-linear inversion, the P-residuals in the range between 0° and 100° are minimised up to a maximum value of 0.015 s. Furthermore, from the high quality computation of PcP traveltimes, with residuals much better than 0.13 s., it is possible to infer the existence of a brief low velocity layer in the D" region. This is then followed by a gradual increasing in the velocity profile towards the core, which begins at a depth of 2893.9 km.

Key words: D" shell, Earth's mantle, P-wave velocity, tomography, traveltimes.

Introduction

To date, numerous studies use the arrival times of seismic waves to explore the Earth structure. Seismic arrival times have provided a fundamental constraint on the radial and lateral velocity structure of our planet. Sengupta and Toksoz (1976), Clayton and Comer (1983), Dziewonski (1984) among others, studied the variation of the P-wave velocity in the lower mantle. These works have been extended rapidly to the whole mantle (Pulliam et al., 1993) from many different viewpoints and perspectives, but concluding in almost all cases in interesting correlations with the structure predicted by the plate tectonics. On the other hand, reference models constitute the common basis for all the different studies concerning the Earth. Some of them are fairly relevant and well known in the seismological literature, as PREM (Dziewonski and Anderson, 1981), IASP91 (Kennet and Engdahl, 1991) and SP6 (Morelli and Dziewonski, 1993). They constitute the starting point for a number of applications, including seismic tomography and synthetic seismogram calculations. The strategy of finding an agreement between physical meaningful and

achieving observations is of crucial importance. A decreasing of the relative error between the reproduced and measured data becomes in an increasing knowledge of the main features concerning the Earth structure. In this sense, any effort made to improve the available reference models, will benefit on the current seismological knowledge, especially those concerning local deviations in boundary interfaces in the Earth's interior.

From this viewpoint, in this preliminary work we pretend to improve the fitting of reference traveltime tables (JB: Jeffreys and Bullen, 1958; BSSA: Herrin et al., 1968) to observed traveltimes and, as consequence of that, to infer the slight deviations of the whole structure with respect to the average models. We have focused our attention on the tomography of the mantle, using and developing a non-linear inversion technique based on the analytical solution of the elliptical integrals involved in the theory of wave propagation. In this sense the approach described in this paper cannot be viewed like an empirical model. We demonstrate that the range of the achievement is large enough and, therefore, the real interpretation is to be an improvement for the reference model derived from the Herrin et al. traveltime tables, used in this work. Eventually, this sort of agreement to respect the *observed* data (errors not larger than a particular threshold) has been imposed as a first objective of this study, but it is not unique. The use of an analytical function avoids the common strategy of deriving spherical averages from seismological observations via an inversion procedure (i.e., the least-square approach). An interesting comment of this performing can be found in Morelli and Dziewonski (1993). In our scheme, the inherent biased data distribution is largely overcome since only traveltime tables are taking into account. This absence of real data is a major lack in the model we present in this paper, and we agree. However, we keep the opinion that the results should be interpreted in a different way as those derived from a reference model, because they maintain internal consistency and do not pretend to be an alternative to PREM, ISAP91 or SP6 models.

The use of analytical functions to derive a model that globally reproduces the observed traveltimes by acting locally on a multilayer and spherical mantle does not prescribe the meaning, from a physical viewpoint, of the new model. Indeed, the analytical tomography results in an improved understanding of some particular areas, for example the D" layer at the base of the mantle. These features are the most relevant conclusions of our work as they provide some slight differences to the current knowledge of the mantle.

Methodology

The trial P-wave velocity function used in this work to analyse the structure of the mantle can be summarised by the expression

$$v(r) = r \cdot (B - A \cdot ln(r)) \quad , \qquad (1)$$

where r is the radius, and (A,B) two independent parameters to be determined. This formula can be simplified by defining the function

$$w(r) = (B - A \cdot ln(r)) \quad , \qquad (2)$$

and then:

$$v(r) = r \cdot w(r) \quad . \qquad (3)$$

The P-wave velocity function expressed in Eq. (1) has been used (Lana-Renault and Cid, 1991; Lana-Renault, 1998) to obtain different Earth models by varying the different parameters. The smoothness of this function makes it adequate to tomographic studies of the Earth's mantle, once a proper parameterisation is applied, i.e. a division in many spherical layers, which is the one followed in this work. Another useful property of the function described in Eq. (1) is that converts the elliptical integrals arisen during the hamiltonian formulation of ray propagation, into analytical functions. For example, for a ray crossing the first layer (i = 1) of the mantle, who radius of the top surface is R_1 (Earth's radius), the epicentral distance Δ can be expressed as

$$\Delta = \frac{2 \cdot w_1}{A_1} \cdot senh\left(\frac{A_1 \cdot T}{2}\right) \quad , \qquad (4)$$

where:

$$w_1 = w_1(R_1) = B_1 - A_1 \cdot ln(R_1) \quad .$$

The general analytical expressions for Δ and T can be obtained using the classical integral expressions (Bullen and Bolt, 1985)

$$\Delta = p \cdot \int_{r_p}^{r_o} r^{-1} \cdot \sqrt{\eta^2 - p^2}\, dr \quad ,$$

$$T = \int_{r_p}^{r_o} \eta^2 \cdot r^{-1} \cdot \sqrt{\eta^2 - p^2}\, dr \quad . \qquad (5)$$

Denoting the angle of incidence at the top surface of the i^{th} layer by I_i and its radius by R_i , and similarly for the variables at the bottom (I'_i and R'_i), see figure 1, it is always possible to write

$$w_i = w_i(R_i) = B_i - A_i \cdot ln(R_i) = \frac{sen(I_i)}{p} \quad , \qquad (6)$$

and

$$w'_i = w'_i(R'_i) = B_i - A_i \cdot ln(R'_i) = \frac{sen(I'_i)}{p} \quad . \qquad (7)$$

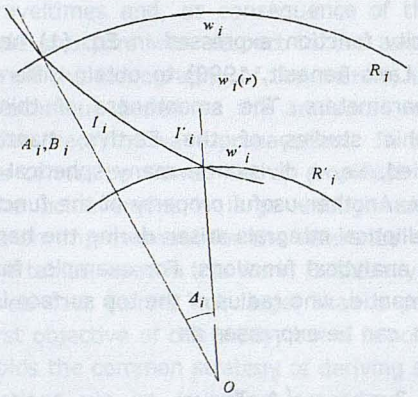


Fig. 1. P-trajectory traveling through a layer *i*

In general, for a point *P(r)* we have

$$w_i(r) = B_i - A_i \cdot ln(r) = \frac{sen(I)}{p} \quad . \qquad (8)$$

Hence, through its derivative,

$$\frac{dr}{r \cdot cos(I)} = -\frac{dI}{p \cdot A_i} \qquad (9)$$

we can calculate the expressions (5) for a P-trajectory which travels from R_i to R'_i

$$\Delta_i = \frac{cos(I_i) - cos(I'_i)}{p \cdot A_i} \quad , \qquad (10)$$

$$T_i = \frac{1}{A_i} \cdot ln \left[\frac{tg\left(\frac{I'_i}{2}\right)}{tg\left(\frac{I_i}{2}\right)} \right] \quad . \qquad (11)$$

Therefore, the observables at the Earth surface can be computed as a result of several additions of these computed values at each layer. That is, if one ray travels along *k* layers, the final epicentral distance and traveltime are calculated through of the following *2k+1* equations:

$$\Delta = \frac{2}{p} \cdot \left(\sum_i \frac{\cos(I_i) - \cos(I'_i)}{A_i} + \frac{\cos(I_k)}{A_k} \right) , \quad (12)$$

$$T = 2 \cdot \left[\sum_i \frac{1}{A_i} \cdot ln \left[\frac{tg\left(\frac{I'_i}{2}\right)}{tg\left(\frac{I_i}{2}\right)} \right] - \frac{1}{A_k} \cdot ln\left(tg\left(\frac{I_k}{2}\right)\right) \right] \quad (13)$$

and these *2k-1* auxiliary equations

$$p = \frac{sen(I_i)}{w_i(R_i)} = \frac{sen(I'_i)}{w_i(R'_i)} = \frac{sen(I_k)}{w_k(R_k)} , \quad (14)$$

where: *i = 1, 2, ..., k-1* .

On the other hand, the observables for a PcP-trajectory are calculated by the following *2(k+1)* equations:

$$\Delta = \frac{2}{p} \cdot \left(\sum_i \frac{\cos(I_i) - \cos(I'_i)}{A_i} \right) , \quad (15)$$

$$T = 2 \cdot \left[\sum_i \frac{1}{A_i} \cdot ln \left[\frac{tg\left(\frac{I'_i}{2}\right)}{tg\left(\frac{I_i}{2}\right)} \right] \right] \quad (16)$$

and these *2k* auxiliary equations

$$p = \frac{sen(I_i)}{w_i(R_i)} = \frac{sen(I'_i)}{w_i(R'_i)} . \quad (17)$$

where: *i = 1, 2, ..., k* .

Finally, by integrating Eq. (9) between $P(R_i)$ and $P(r)$, it is easy to calculate the radius of any single point $P(r)$ along the trajectory:

$$r = R_i \cdot exp\left(\frac{sen(I_i) - sen(I)}{p \cdot A_i} \right) = R_i \cdot exp\left(\frac{w_i - w_i(r)}{A_i} \right) . \quad (18)$$

Results

With a single collection of observed traveltimes, it is possible to reproduce the observations on the Earth's surface for any event. For the sake of simplicity, as an example of the versatility and functionality of the proposed methodology, we have selected the datasets reproduced in *Herrin et al.* (1968). The sequence of calculations consists of determining the specific constants A_i , w_i and w'_i (i = 1,...,N), for each layer, N being the number of layers.

(Note that w'_i is a measure of the thickness of the i^{th} layer and that we don't use B_i. The parameter B_i is calculated after using the Eq. (6))

Let suppose these quantities are already known for the first k-1 layers, except w'_{k-1}, the starting point for the k^{th} layer. The inverse problem can be posed as a system of non-linear equations (12-14) that will provide the parameters A_k and w_k of the layer k. We must use three P-observed trajectories reproducing three fixed points (Δ_i , T_{oi} ; i = 1,2,3) as boundary conditions for the system of $3(2k+1)$ non linear equations with $3(2k+1)$ unknowns (p_i , I_{ii} , I'_{ii} , I_{ki} , w'_{k-1} , w_k , A_k). The solution is then iterated till assure a convergence criterion, in our case, a threshold for the computed residuals less than a certain value (10^{-15}).

Known the values w'_{k-1} , w_k , y A_k , we prove that the residual times T_o-T_c (observed minus computed time) of the all the others P-trajectories which also return to the surface-focus from the k^{th} layer are smaller than a determined ε. If it is not so, we begin again taking others three observables (Δ_i , T_{oi}) nearer among them.

It is to be noted that the algebra applied in our methodology permits a discontinuity of the 1st kind ($w'_{k-1} \neq w_k$) in the velocity function.

This last property can be analysed through the study of the derivative ($dT/d\Delta$) (*Herrin et al.*, 1968), in order to detect jumps in the selected velocity pattern. If we have the security that only a discontinuity of the 2nd kind ($w'_{k-1} = w_k$) is present, then it is possible to work with only 2 observables (Δ , T_o) or fixed boundary conditions, thus eliminating $2k+1$ redundant equations from the global system.

In this case, the experience tells us that is much better to work with one observable (Δ , T_o) and, thus, fixing the final of the k-1th layer by a value for w'_{k-1}. and insuring that the residual times of all the P-trajectories which return from the k-1th layer to the surface-focus are less than our ε . Thereby, we resolve a non linear system with only $2k+1$ equations.

We have performed a complete description of the Mantle using a maximum residual time ε = 0.015 s. and only 34 P-observed traveltimes. The total number of layers used in this description is 28. The last one finishes at a depth of 2810.1 km., maximum for the last P-observed trajectory at $\Delta = 100^o$ according to *Herrin et al.* (1968), with T_o = *826.7303 s.* Once known the problematic of the lack of information for $\Delta > 100^o$ and the special case of the D" shell, we have worked with

data available from $\Delta > 88^o$ and maximum residuals of *0.002 s*. See Table 1 and Residuals of P-travel times (Figure 2) for a graphic representation and further details.

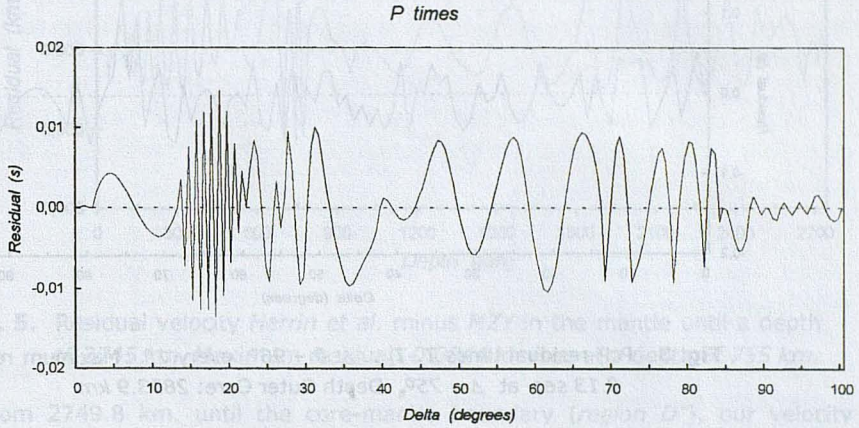


Fig. 2. P-residual times T_o-T_c . Δ: *0 – 100º* every *0.5º*. Maximum residual *0.015 sec.* at $\Delta = 18.5^o$.

The 29th layer. Since the derivative associated with the surface-focus travel time ($dT/d\Delta$) is effectively constant (*Herrin et al.*, 1968) beyond 99.0º, and that our residuals are practically zero for those points, we consider the boundary condition $w'_{28} = 1/p(100^o) = w_{29}$ produces the best results. Thus, our problem is reduced to calculate the parameters w'_{29} (final layer) and A_{29}. For this purpose, we pose a non linear system with two PcP observables. One of these fixed points should always be the axial trajectory ($\Delta = 0^o$; $T_o = 511.3$ *sec.*) that allows us to use only one equation:

$$T = 2 \cdot \sum_i \frac{1}{A_i} \cdot ln\left(\frac{w'_i}{w_i}\right) \qquad (19)$$

We have considered that the other observable should be very separated from the first, and thus, selected $\Delta = 93^o$; $T_o = 795.2$ *s* as second observable. Once obtained the values w'_{29} and A_{29}, all the PcP residuals were balanced with an error less than 0.13 s. (Figure 3, Table 2 of PcP-travel times). By applying Eq. (18) we found the outer core at 2893.9 km. Further details can be seen in Figures 4, 5, 6 and Table 3 of P-wave velocity.

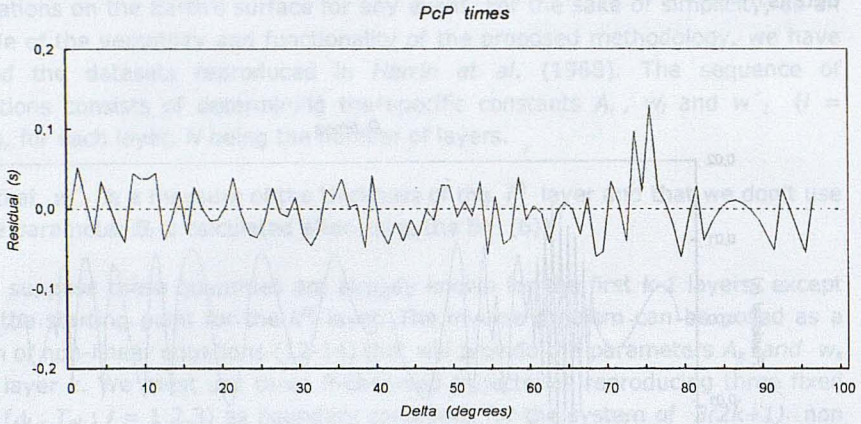


Fig. 3. PcP-residual times T_o-T_c . Δ: *0 – 96º* every *1º*. Maximum residual *0.13 sec.* at Δ = *75º*. Depth Outer Core: *2893.9 km.*

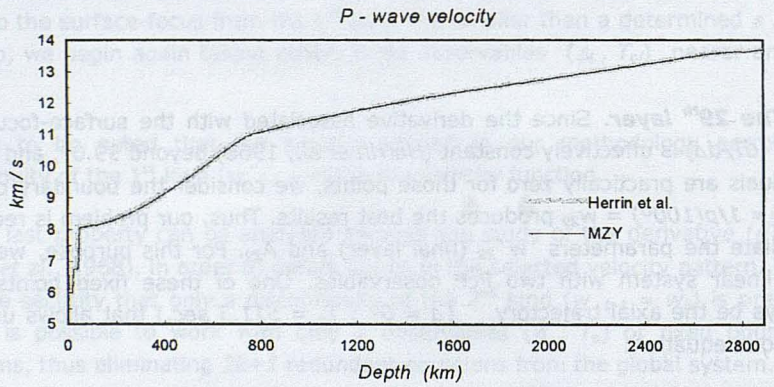


Fig. 4. P-wave velocity in the mantle. *Herrin et al.* versus *MZY*.

Fig. 4 shows a comparison between our velocity distribution and the one provided by *Herrin et al.* (1968). The most conspicuous difference is observed at *2749.8 km.*, final of the *25th* layer, where the last trajectory returns to the surface at Δ = *92º* and the corresponding residual is null. Figure 5 exhibits residuals of computed velocity *Herrin et al.* minus *MZY*. Let us note how the maximum residual is *0.0044 km/s* at a depth of *755 km.*

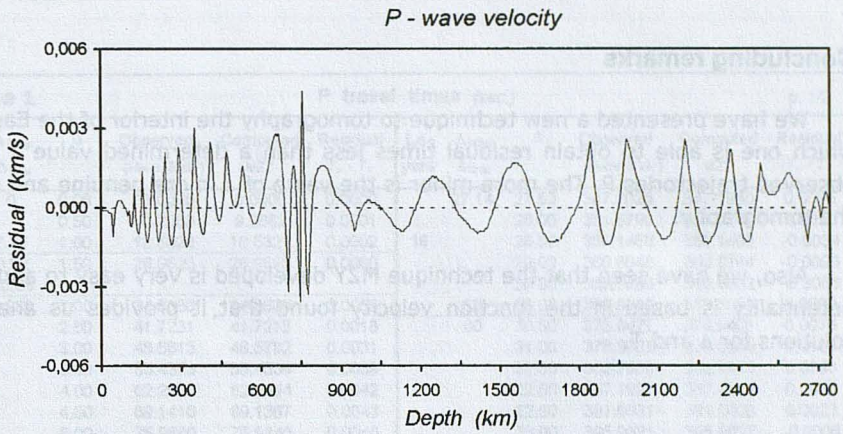


Fig. 5. Residual velocity *Herrin et al.* minus *MZY* in the mantle until a depth of *2745 km.* Maximum residual: *0.0044 km/sec* at a depth of *755 km.*

From 2749.8 km. until the core-mantle boundary (*region D"*), our velocity distribution begins to be completely different to *Herrin et al.* (1968), as can be seen in Fig. 6. This is due that *Herrin et al.* adopted a special smooth velocity distribution to the region D" to explain the last results from *Taggart and Engdahl,* (1968), which indicated a slow increase of velocity towards the core. Morelli and Dziewonski (1993), in their SP6 model, obtained a continuous decrease from 2741 km. In our MZY model, we propose that D" region begins at 2780.7 km. with a brief (29.4 km.) negative gradient (layers number 27 and 28) followed by a slow increase until the core. With this profile we insure the residuals of all the observables P and PcP from *Herrin et al.* (1968) are minima, and reproduce accurately the observed times.

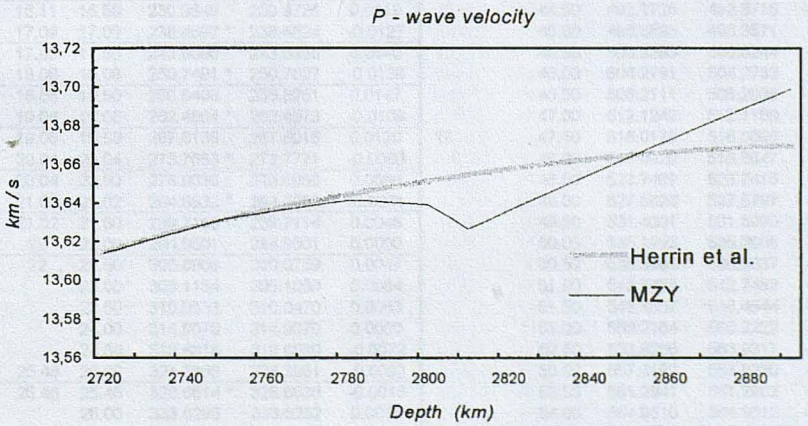


Fig. 6. P-wave velocity in D" region. *Herrin et al.* versus *MZY*

Concluding remarks

We have presented a new technique to tomography the interior of the Earth for which one is able to obtain residual times less than a determined value ε for all observed trajectories P. The more minor is the value of ε, more genuine and real is the tomography.

Also, we have seen that the technique MZY developed is very easy to apply. Its potentiality is based in the function velocity found that it provides us analytical solutions for Δ and T.

Acknowledgements

The author is grateful to Dr. Javier Sabadell by the comments and suggestions made during the writing of the manuscript.

Table 1 P travel times *(sec.)* p. 1/2

Layers	$\Delta_{initial}$ / Δ_{final}	Δ	Observed (Herrin & al.)	Computed MZY	Residual $T_o - T_c$
	0	0.00	0.0000	0.0000	0.0000
1		0.50	9.2663	9.2662	0.0001
	7.85	1.00	18.5323	18.5321	0.0002
2	0.52	1.50	26.9525	26.9525	0.0000
	10.66				
	0.989	2.00	34.8630	34.8630	0.0000
		2.50	41.7231	41.7213	0.0018
		3.00	48.5813	48.5782	0.0031
		3.50	55.4373	55.4334	0.0039
		4.00	62.2906	62.2864	0.0042
		4.50	69.1410	69.1367	0.0043
		5.00	75.9880	75.9840	0.0040
		5.50	82.8312	82.8278	0.0034
		6.00	89.6703	89.6676	0.0027
		6.50	96.5049	96.5030	0.0019
		7.00	103.3346	103.3337	0.0009
3		7.50	110.1591	110.1591	0.0000
		8.00	116.9779	116.9789	-0.0010
		8.50	123.7908	123.7926	-0.0018
		9.00	130.5973	130.5998	-0.0025
		9.50	137.3970	137.4000	-0.0030
		10.00	144.1896	144.1930	-0.0034
		10.50	150.9747	150.9783	-0.0036
		11.00	157.7519	157.7554	-0.0035
		11.50	164.5209	164.5240	-0.0031
		12.00	171.2813	171.2836	-0.0023
		12.50	178.0326	178.0340	-0.0014
	13.15	13.00	184.7746	184.7746	0.0000
4	13.15	13.50	191.4964	191.4929	0.0035
	14.14	14.14	200.0582 *	200.0655	-0.0073
5	14.14	14.50	204.8555	204.8480	0.0075
	15.13	15.13	213.1831 *	213.1946	-0.0115
6	15.13	15.50	218.0429	218.0320	0.0109
	16.11	16.11	225.9644 *	225.9771	-0.0127
7	16.11	16.50	230.9845	230.9726	0.0119
	17.09	17.09	238.4697 *	238.4824	-0.0127
8	17.09	17.50	243.6096	243.5956	0.0140
	18.08	18.08	250.7491 *	250.7627	-0.0136
9	18.08	18.50	255.8408	255.8261	0.0147
	19.06	19.06	262.4864 *	262.4973	-0.0109
10	19.06	19.50	267.6136	267.6016	0.0120
	20.04	20.04	273.7653 *	273.7721	-0.0068
11	20.04	20.50	278.9036	278.8956	0.0080
	21.02	21.02	284.5832 *	284.5863	-0.0031
12	21.02	21.50	289.7160	289.7114	0.0046
	22	22.00	294.9501	294.9501	0.0000
	22	22.50	300.0806	300.0759	0.0047
		23.00	305.1134	305.1050	0.0084
13		23.50	310.0533	310.0470	0.0063
		24.00	314.9070	314.9070	0.0000
		24.50	319.6818	319.6890	-0.0072
	25.46	25.00	324.3869	324.3961	-0.0092
	25.46	25.46	328.6614 *	328.6630	-0.0016
14		26.00	333.6295	333.6262	0.0033
		26.50	338.1848	338.1873	-0.0025
	27.14	27.14	343.9656 *	343.9643	0.0013
	27.14	27.50	347.2025	347.1930	0.0095
		28.00	351.6796	351.6743	0.0053
15		28.50	356.1456	356.1490	-0.0034
		29.00	360.6048	360.6144	-0.0096
		29.50	365.0596	365.0682	-0.0086
	30	30.00	369.5086	369.5086	0.0000
	30	30.50	373.9477	373.9401	0.0076
		31.00	378.3751	378.3650	0.0101
		31.50	382.7900	382.7810	0.0090
		32.00	387.1923	387.1867	0.0056
		32.50	391.5831	391.5808	0.0023
		33.00	395.9621	395.9627	-0.0006
		33.50	400.3281	400.3315	-0.0034
		34.00	404.6807	404.6864	-0.0057
16		34.50	409.0193	409.0270	-0.0077
		35.00	413.3435	413.3527	-0.0092
		35.50	417.6532	417.6629	-0.0097
		36.00	421.9479	421.9573	-0.0094
		36.50	426.2269	426.2353	-0.0084
		37.00	430.4894	430.4967	-0.0073
		37.50	434.7347	434.7411	-0.0064
		38.00	438.9626	438.9681	-0.0055
		38.50	443.1730	443.1775	-0.0045
		39.00	447.3662	447.3690	-0.0028
	39.5	39.50	451.5425	451.5425	0.0000
	39.5	40.00	455.7020	455.7008	0.0012
		40.50	459.8449	459.8440	0.0009
		41.00	463.9710	463.9709	0.0001
		41.50	468.0802	468.0808	-0.0006
		42.00	472.1723	472.1736	-0.0013
		42.50	476.2473	476.2488	-0.0015
		43.00	480.3051	480.3064	-0.0013
		43.50	484.3454	484.3462	-0.0008
		44.00	488.3680	488.3680	0.0000
		44.50	492.3728	492.3716	0.0012
		45.00	496.3596	496.3571	0.0025
		45.50	500.3285	500.3244	0.0041
		46.00	504.2791	504.2733	0.0058
		46.50	508.2111	508.2038	0.0073
		47.00	512.1242	512.1159	0.0083
17		47.50	516.0178	516.0096	0.0082
		48.00	519.8920	519.8847	0.0073
		48.50	523.7469	523.7415	0.0054
		49.00	527.5828	527.5797	0.0031
		49.50	531.4001	531.3995	0.0006
		50.00	535.1992	535.2008	-0.0016
		50.50	538.9802	538.9837	-0.0035
		51.00	542.7433	542.7482	-0.0049
		51.50	546.4887	546.4944	-0.0057
		52.00	550.2164	550.2222	-0.0058
		52.50	553.9266	553.9317	-0.0051
		53.00	557.6192	557.6230	-0.0038
		53.50	561.2941	561.2962	-0.0021
		54.00	564.9510	564.9512	-0.0002
		54.50	568.5899	568.5882	0.0017
		55.00	572.2107	572.2072	0.0035

Table 1 P travel times *(sec.)* p. 2/2

La-yers	$\Delta_{initial}$ Δ_{final}	Δ	Observed (Herrin & al.)	Computed MZY	Residual $T_o - T_c$
		55.50	575.8137	575.8082	0.0055
		56.00	579.3986	579.3915	0.0071
		56.50	582.9653	582.9569	0.0084
17		57.00	586.5135	586.5047	0.0088
		57.50	590.0430	590.0348	0.0082
		58.00	593.5538	593.5475	0.0063
		58.50	597.0462	597.0427	0.0035
	59	59.00	600.5205	600.5205	0.0000
	59	59.50	603.9770	603.9803	-0.0033
		60.00	607.4162	607.4225	-0.0063
		60.50	610.8385	610.8471	-0.0086
		61.00	614.2444	614.2545	-0.0101
		61.50	617.6343	617.6447	-0.0104
		62.00	621.0084	621.0179	-0.0095
		62.50	624.3668	624.3743	-0.0075
		63.00	627.7094	627.7138	-0.0044
		63.50	631.0356	631.0367	-0.0011
18		64.00	634.3452	634.3430	0.0022
		64.50	637.6379	637.6329	0.0050
		65.00	640.9137	640.9064	0.0073
		65.50	644.1724	644.1637	0.0087
		66.00	647.4142	647.4049	0.0093
		66.50	650.6392	650.6301	0.0091
		67.00	653.8477	653.8395	0.0082
		67.50	657.0398	657.0330	0.0068
		68.00	660.2151	660.2108	0.0043
		68.50	663.3731	663.3731	0.0000
	69.08	69.08	667.0129 *	667.0220	-0.0091
	69.08	69.50	669.6355	669.6387	-0.0032
		70.00	672.7383	672.7354	0.0029
19		70.50	675.8202	675.8127	0.0075
		71.00	678.8805	678.8716	0.0089
		71.50	681.9193	681.9128	0.0065
	72.35	72.00	684.9366	684.9366	0.0000
	72.35	72.35	687.0340 *	687.0432	-0.0092
		73.00	690.9092	690.9170	-0.0078
		73.50	693.8665	693.8729	-0.0064
		74.00	696.8054	696.8096	-0.0042
		74.50	699.7264	699.7279	-0.0015
20		75.00	702.6299	702.6283	0.0016
		75.50	705.5159	705.5115	0.0044
		76.00	708.3843	708.3776	0.0067
		76.50	711.2346	711.2272	0.0074
		77.00	714.0661	714.0604	0.0057
	77.9	77.50	716.8776	716.8776	0.0000
	77.9	77.90	719.1107 *	719.1200	-0.0093
		78.50	722.4405	722.4426	-0.0021
		79.00	725.1920	725.1893	0.0027
21		79.50	727.9234	727.9171	0.0063
		80.00	730.6349	730.6267	0.0082
		80.50	733.3270	733.3190	0.0080
		81.00	735.9998	735.9944	0.0054
	81.8	81.50	738.6533	738.6533	0.0000
	81.8	81.80	740.2336 *	740.2409	-0.0073
		82.50	743.9007	743.8974	0.0033
22		83.00	746.4926	746.4852	0.0074
		83.50	749.0611	749.0544	0.0067
	84.04	84.04	751.8075 *	751.8092	-0.0017
	84.04	84.50	754.1271	754.1271	0.0000
		85.00	756.6260	756.6263	-0.0003
		85.50	759.1042	759.1061	-0.0019
23		86.00	761.5636	761.5676	-0.0040
		86.50	764.0064	764.0117	-0.0053
		87.00	766.4338	766.4390	-0.0052
		87.50	768.8465	768.8502	-0.0037
	88	88.00	771.2455	771.2455	0.0000
	88	88.50	773.6315	773.6301	0.0014
24		89.00	776.0056	776.0053	0.0003
		89.50	778.3687	778.3695	-0.0008
	90	90.00	780.7222	780.7222	0.0000
	90	90.50	783.0673	783.0673	0.0000
25		91.00	785.4049	785.4061	-0.0012
		91.50	787.7356	787.7371	-0.0015
	92	92.00	790.0597	790.0597	0.0000
	92	92.50	792.3774	792.3767	0.0007
26		93.00	794.6891	794.6892	-0.0001
		93.50	796.9953	796.9961	-0.0008
	94.03	94.03	799.4344 *	799.4344	0.0000
	94.03	94.50	801.5937	801.5930	0.0007
27		95.00	803.8872	803.8873	-0.0001
		95.50	806.1777	806.1784	-0.0007
	96.123	96.123	809.0282 *	809.0279	0.0003
	96.123	96.50	810.7518	810.7503	0.0015
		97.00	813.0361	813.0345	0.0016
		97.50	815.3192	815.3185	0.0007
28		98.00	817.6016	817.6021	-0.0005
		98.50	819.8838	819.8851	-0.0013
		99.00	822.1660	822.1676	-0.0016
		99.50	824.4481	824.4494	-0.0013
	100	100.00	826.7303	826.7303	0.0000
	100	99.5	824.4481	824.4498	-0.0017
		99.0	822.1660	822.1694	-0.0034
		98.5	819.8838	819.8892	-0.0054
		98.0	817.6016	817.6094	-0.0078
29		97.5	815.3192	815.3302	-0.0110
		97.0	813.0361	813.0520	-0.0159
		96.5	810.7518	810.7757	-0.0239
		96.0	808.4658	808.5028	-0.0370
		95.618	806.7177 *	806.7715	-0.0538
		96.0	808.4658	808.4805	-0.0147
	96.289	96.289	809.7871 *	809.7642	0.0229

interpolated *

Table 2 **PcP travel times** *(sec.)*

Δ	Observed (Herrin & al.)	Computed MZY	Residual $T_o - T_c$	Δ	Observed (Herrin & al.)	Computed MZY	Residual $T_o - T_c$
0	511.3	511.300	0.00	49	611.9	611.870	0.03
1	511.4	511.348	0.05	50	615.5	615.511	-0.01
2	511.5	511.492	0.01	51	619.2	619.191	0.01
3	511.7	511.731	-0.03	52	622.9	622.910	-0.01
4	512.1	512.066	0.03	53	626.7	626.666	0.03
5	512.5	512.497	0.00	54	630.4	630.458	-0.06
6	513.0	513.022	-0.02	55	634.3	634.284	0.02
7	513.6	513.641	-0.04	56	638.1	638.144	-0.04
8	514.4	514.355	0.04	57	642.0	642.037	-0.04
9	515.2	515.163	0.04	58	646.0	645.961	0.04
10	516.1	516.063	0.04	59	649.9	649.914	-0.01
11	517.1	517.055	0.04	60	653.9	653.896	0.00
12	518.1	518.139	-0.04	61	657.9	657.906	-0.01
13	519.3	519.314	-0.01	62	661.9	661.943	-0.04
14	520.6	520.578	0.02	63	666.0	666.005	0.00
15	521.9	521.932	-0.03	64	670.1	670.091	0.01
16	523.4	523.373	0.03	65	674.2	674.201	0.00
17	524.9	524.901	0.00	66	678.3	678.333	-0.03
18	526.5	526.515	-0.01	67	682.5	682.486	0.01
19	528.2	528.214	-0.01	68	686.6	686.660	-0.06
20	530.0	529.996	0.00	69	690.8	690.853	-0.05
21	531.9	531.861	0.04	70	695.1	695.065	0.04
22	533.8	533.806	-0.01	71	699.3	699.294	0.01
23	535.8	535.832	-0.03	72	703.5	703.540	-0.04
24	537.9	537.936	-0.04	73	707.9	707.802	0.10
25	540.1	540.117	-0.02	74	712.1	712.079	0.02
26	542.4	542.374	0.03	75	716.5	716.370	0.13
27	544.7	544.705	-0.01	76	720.7	720.675	0.03
28	547.1	547.110	-0.01	77	725.0	724.992	0.01
29	549.6	549.586	0.01	78	729.3	729.320	-0.02
30	552.1	552.132	-0.03	79	733.6	733.660	-0.06
31	554.7	554.747	-0.05	80	738.0	738.010	-0.01
32	557.4	557.428	-0.03	81	742.4	742.370	0.03
33	560.2	560.176	0.02	82	746.7	746.739	-0.04
34	563.0	562.988	0.01	83	751.1	751.116	-0.02
35	565.9	565.863	0.04	84	755.5	755.500	0.00
36	568.8	568.798	0.00	85	759.9	759.892	0.01
37	571.8	571.794	0.01	86	764.3	764.290	0.01
38	574.8	574.848	-0.05	87	768.7	768.693	0.01
39	578.0	577.959	0.04	88	773.1	773.102	0.00
40	581.1	581.125	-0.02	89	777.5	777.515	-0.01
41	584.3	584.345	-0.04	90	781.9	781.932	-0.03
42	587.6	587.617	-0.02	91	786.3	786.352	-0.05
43	590.9	590.940	-0.04	92	790.8	790.775	0.03
44	594.3	594.313	-0.01	93	795.2	795.200	0.00
45	597.7	597.734	-0.03	94	799.6	799.627	-0.03
46	601.2	601.202	0.00	95	804.0	804.055	-0.05
47	604.7	604.714	-0.01	96	808.5	808.484	0.02
48	608.3	608.271	0.03	96.289		809.764	

Table 3

Data MZY			P-wave velocity (km/s)			Data MZY		p. 1/4	P-wave velocity (km/s)		
Radius (km)	v_i (km/s)		Radius of surface-focus = 6371.028			Radius (km)	v_i (km/s)				
Layers	B_i ($x\,10^{-2}$)	Depth				Layers	B_i ($x\,10^{-2}$)	Depth			
	A_i ($x\,10^{-3}$)	(km)	Herrin & al.	MZY	Residual		A_i ($x\,10^{-3}$)	(km)	Herrin & al.	MZY	Residual
Depth (km)	v'_i (km/s)				H. & al. - MZY	Depth (km)	v'_i (km/s)				H. & al. - MZY
6371.028	6.0000	0	6.0000	6.0001	-0.0001	6021.290062	8.8862	350	8.8905	8.8875	0.0030
1	0.92341045	5	6.0000	6.0001	-0.0001			355	8.9131	8.9114	0.0017
	0.94666548	10	6.0000	6.0001	-0.0001			360	8.9360	8.9352	0.0008
15.001533	6.0001	15	6.0000	6.0001	-0.0001			365	8.9590	8.9591	-0.0001
6356.026467	6.7500	20	6.7500	6.7501	-0.0001			370	8.9823	8.9829	-0.0006
2	1.04491768	25	6.7500	6.7501	-0.0001	10	5.59329351	375	9.0058	9.0067	-0.0009
	1.07194400	30	6.7500	6.7502	-0.0002		6.25724227	380	9.0294	9.0304	-0.0010
		35	6.7500	6.7502	-0.0002			385	9.0532	9.0542	-0.0010
40.053935	6.7502	40	6.7500	6.7502	-0.0002			390	9.0773	9.0779	-0.0006
6330.974065	8.0540	45	8.0582	8.0593	-0.0011			395	9.1015	9.1016	-0.0001
		50	8.0642	8.0645	-0.0003			400	9.1258	9.1252	0.0006
		55	8.0698	8.0698	0.0000			405	9.1503	9.1489	0.0014
		60	8.0753	8.0751	0.0002	411.322422	9.1787	410	9.1750	9.1725	0.0025
		65	8.0806	8.0803	0.0003	5959.705578	9.1787	415	9.1999	9.1977	0.0022
3	2.16670136	70	8.0859	8.0856	0.0003			420	9.2248	9.2236	0.0012
	2.32998530	75	8.0911	8.0908	0.0003			425	9.2499	9.2494	0.0005
		80	8.0962	8.0960	0.0002			430	9.2752	9.2752	0.0000
		85	8.1013	8.1012	0.0001			435	9.3007	9.3010	-0.0003
		90	8.1064	8.1064	0.0000	11	5.99325871	440	9.3262	9.3267	-0.0005
		95	8.1115	8.1116	-0.0001		6.71735442	445	9.3519	9.3524	-0.0005
104.957687	8.1219	100	8.1165	8.1168	-0.0003			450	9.3778	9.3781	-0.0003
6266.070313	8.1219	105	8.1219	8.1220	-0.0001			455	9.4038	9.4038	0.0000
4	2.51841026	110	8.1285	8.1292	-0.0007			460	9.4299	9.4294	0.0005
	2.73226453	115	8.1356	8.1363	-0.0007			465	9.4562	9.4550	0.0012
		120	8.1432	8.1435	-0.0003	472.071820	9.4911	470	9.4826	9.4805	0.0021
125.320	8.1511	125	8.1513	8.1506	0.0007	5898.956180	9.4911	475	9.5091	9.5072	0.0019
6245.707939	8.1511	130	8.1599	8.1602	-0.0003			480	9.5358	9.5345	0.0013
		135	8.1690	8.1699	-0.0009			485	9.5626	9.5618	0.0008
5	2.97405843	140	8.1786	8.1796	-0.0010			490	9.5895	9.5891	0.0004
	3.25362200	145	8.1886	8.1893	-0.0007			495	9.6165	9.6164	0.0001
		150	8.1991	8.1990	0.0001	12	6.31396167	500	9.6437	9.6436	0.0001
155.027311	8.2087	155	8.2101	8.2087	0.0014		7.08672019	505	9.6709	9.6709	0.0000
6216.000689	8.2087	160	8.2214	8.2213	0.0001			510	9.6981	9.6980	0.0001
		165	8.2332	8.2340	-0.0008			515	9.7255	9.7252	0.0003
6	3.50244082	170	8.2454	8.2467	-0.0013			520	9.7530	9.7523	0.0007
	3.85853274	175	8.2580	8.2593	-0.0013			525	9.7805	9.7794	0.0011
		180	8.2710	8.2719	-0.0009	531.559687	9.8149	530	9.8080	9.8064	0.0016
		185	8.2843	8.2845	-0.0002	5839.468313	9.8149	535	9.8356	9.8342	0.0014
193.795314	8.3067	190	8.2980	8.2971	0.0009			540	9.8632	9.8623	0.0009
6177.232686	8.3067	195	8.3120	8.3104	0.0016			545	9.8908	9.8903	0.0005
		200	8.3264	8.3260	0.0004			550	9.9185	9.9184	0.0001
		205	8.3410	8.3415	-0.0005			555	9.9462	9.9464	-0.0002
7	4.03019188	210	8.3560	8.3571	-0.0011			560	9.9740	9.9743	-0.0003
	4.46315376	215	8.3713	8.3726	-0.0013			565	10.0018	10.0023	-0.0005
		220	8.3870	8.3881	-0.0011			570	10.0296	10.0302	-0.0006
		225	8.4029	8.4036	-0.0007			575	10.0574	10.0580	-0.0006
		230	8.4191	8.4191	0.0000			580	10.0853	10.0859	-0.0006
239.227039	8.4476	235	8.4357	8.4345	0.0012			585	10.1132	10.1137	-0.0005
6131.800961	8.4476	240	8.4525	8.4504	0.0021			590	10.1411	10.1414	-0.0003
		245	8.4696	8.4689	0.0007			595	10.1690	10.1692	-0.0002
		250	8.4870	8.4873	-0.0003			600	10.1970	10.1969	0.0001
		255	8.5047	8.5057	-0.0010			605	10.2249	10.2246	0.0003
8	4.55770255	260	8.5227	8.5241	-0.0014	13	6.50401417	610	10.2528	10.2522	0.0006
	5.06801092	265	8.5410	8.5424	-0.0014		7.30586668	615	10.2807	10.2798	0.0009
		270	8.5595	8.5607	-0.0012			620	10.3086	10.3074	0.0012
		275	8.5783	8.5791	-0.0008			625	10.3364	10.3350	0.0014
		280	8.5973	8.5974	-0.0001			630	10.3642	10.3625	0.0017
		285	8.6167	8.6156	0.0011			635	10.3920	10.3900	0.0020
291.392218	8.6390	290	8.6362	8.6339	0.0023			640	10.4197	10.4174	0.0023
6079.635782	8.6390	295	8.6561	8.6543	0.0018			645	10.4474	10.4449	0.0025
		300	8.6762	8.6756	0.0006			650	10.4750	10.4723	0.0027
		305	8.6966	8.6969	-0.0003			655	10.5024	10.4996	0.0028
		310	8.7172	8.7182	-0.0010			660	10.5297	10.5270	0.0027
9	5.09632938	315	8.7380	8.7394	-0.0014			665	10.5570	10.5542	0.0028
	5.68621977	320	8.7591	8.7606	-0.0015			670	10.5840	10.5815	0.0025
		325	8.7804	8.7818	-0.0014			675	10.6109	10.6087	0.0022
		330	8.8020	8.8029	-0.0009			680	10.6375	10.6359	0.0016
		335	8.8238	8.8241	-0.0003			685	10.6638	10.6631	0.0007
		340	8.8458	8.8452	0.0006			690	10.6899	10.6903	-0.0004
349.737938	8.8862	345	8.8680	8.8663	0.0017			695	10.7157	10.7174	-0.0017
						700.177664	10.7454	700	10.7412	10.7444	-0.0032

Table 3

Data MZY			P-wave velocity (km/s)		
Radius (km)	V_i (km/s)		Radius of surface-focus = 6371.028		
Layers	B_i ($\times 10^{-2}$)	Depth			
	A_i ($\times 10^{-3}$)	(km)	Herrin & al.	MZY	Residual
Depth (km)	V'_i (km/s)				H. & al. - MZY
5670.850336	10.7454	705	10.7664	10.7679	-0.0015
		710	10.7911	10.7912	-0.0001
		715	10.8154	10.8144	0.0010
14	5.85891401	720	10.8392	10.8376	0.0016
	6.55949029	725	10.8624	10.8608	0.0016
		730	10.8850	10.8840	0.0010
		735	10.9068	10.9071	-0.0003
744.109784	10.9492	740	10.9279	10.9302	-0.0023
5626.918216	10.9492	745	10.9479	10.9515	-0.0036
		750	10.9663	10.9645	0.0018
15	4.12047826	755	10.9819	10.9775	0.0044
	4.54632080	760	10.9933	10.9904	0.0029
		765	11.0029	11.0033	-0.0004
772.052042	11.0215	770	11.0134	11.0163	-0.0029
5598.975958	11.0215	775	11.0240	11.0273	-0.0033
		780	11.0348	11.0370	-0.0022
		785	11.0455	11.0467	-0.0012
		790	11.0561	11.0564	-0.0003
		795	11.0666	11.0660	0.0006
		800	11.0766	11.0757	0.0009
		805	11.0865	11.0853	0.0012
		810	11.0962	11.0949	0.0013
		815	11.1060	11.1045	0.0015
		820	11.1156	11.1141	0.0015
		825	11.1252	11.1236	0.0016
		830	11.1348	11.1332	0.0016
		835	11.1443	11.1427	0.0016
		840	11.1538	11.1522	0.0016
		845	11.1632	11.1617	0.0015
		850	11.1726	11.1711	0.0015
16	3.57557893	855	11.1819	11.1806	0.0013
	3.91494425	860	11.1912	11.1900	0.0012
		865	11.2004	11.1994	0.0010
		870	11.2096	11.2088	0.0008
		875	11.2189	11.2182	0.0007
		880	11.2281	11.2276	0.0005
		885	11.2373	11.2369	0.0004
		890	11.2466	11.2462	0.0004
		895	11.2558	11.2555	0.0003
		900	11.2651	11.2648	0.0003
		905	11.2743	11.2741	0.0002
		910	11.2835	11.2833	0.0002
		915	11.2927	11.2926	0.0001
		920	11.3019	11.3018	0.0001
		925	11.3110	11.3110	0.0000
		930	11.3201	11.3202	-0.0001
		935	11.3291	11.3293	-0.0002
		940	11.3381	11.3385	-0.0004
		945	11.3470	11.3476	-0.0006
950.864911	11.3583	950	11.3558	11.3567	-0.0009
5420.163089	11.3583	955	11.3646	11.3654	-0.0008
		960	11.3734	11.3739	-0.0005
		965	11.3820	11.3824	-0.0004
		970	11.3907	11.3909	-0.0002
		975	11.3993	11.3994	-0.0001
		980	11.4079	11.4079	0.0000
		985	11.4164	11.4163	0.0001
		990	11.4249	11.4247	0.0002
		995	11.4333	11.4331	0.0002
		1000	11.4418	11.4415	0.0003
		1005	11.4502	11.4499	0.0003
		1010	11.4585	11.4582	0.0003
		1015	11.4668	11.4666	0.0002
		1020	11.4751	11.4749	0.0002
		1025	11.4834	11.4832	0.0002
		1030	11.4917	11.4915	0.0002
		1035	11.4999	11.4998	0.0001
17	3.48245516	1040	11.5081	11.5080	0.0001
	3.80663410	1045	11.5163	11.5162	0.0001
		1050	11.5244	11.5245	-0.0001
		1055	11.5326	11.5326	0.0000
		1060	11.5407	11.5408	-0.0001
		1065	11.5488	11.5490	-0.0002
		1070	11.5569	11.5571	-0.0002
		1075	11.5649	11.5652	-0.0003
		1080	11.5730	11.5734	-0.0004
		1085	11.5810	11.5814	-0.0004
		1090	11.5890	11.5895	-0.0005
		1095	11.5970	11.5976	-0.0006
		1100	11.6049	11.6056	-0.0007
		1105	11.6129	11.6136	-0.0007
		1110	11.6208	11.6216	-0.0008

Data MZY		p. 2/4	P-wave velocity (km/s)		
Radius (km)	V_i (km/s)				
Layers	B_i ($\times 10^{-2}$)	Depth			
	A_i ($\times 10^{-3}$)	(km)	Herrin & al.	MZY	Residual
Depth (km)	V'_i (km/s)				H. & al. - MZY
		1115	11.6288	11.6296	-0.0008
		1120	11.6367	11.6375	-0.0008
		1125	11.6446	11.6455	-0.0009
		1130	11.6525	11.6534	-0.0009
		1135	11.6604	11.6613	-0.0009
		1140	11.6684	11.6692	-0.0008
		1145	11.6763	11.6771	-0.0008
		1150	11.6842	11.6849	-0.0007
		1155	11.6921	11.6928	-0.0007
		1160	11.7000	11.7006	-0.0006
		1165	11.7080	11.7084	-0.0004
		1170	11.7159	11.7162	-0.0003
		1175	11.7238	11.7239	-0.0001
		1180	11.7316	11.7317	-0.0001
		1185	11.7395	11.7394	0.0001
		1190	11.7473	11.7471	0.0002
		1195	11.7551	11.7548	0.0003
		1200	11.7629	11.7624	0.0005
		1205	11.7707	11.7701	0.0006
		1210	11.7785	11.7777	0.0008
		1215	11.7862	11.7853	0.0009
		1220	11.7938	11.7929	0.0009
		1225	11.8015	11.8005	0.0010
		1230	11.8091	11.8081	0.0010
		1235	11.8167	11.8156	0.0011
		1240	11.8242	11.8231	0.0011
		1245	11.8318	11.8306	0.0012
		1250	11.8393	11.8381	0.0012
		1255	11.8467	11.8456	0.0011
		1260	11.8542	11.8530	0.0012
		1265	11.8616	11.8605	0.0011
		1270	11.8689	11.8679	0.0010
		1275	11.8763	11.8753	0.0010
		1280	11.8836	11.8826	0.0010
		1285	11.8909	11.8900	0.0009
		1290	11.8982	11.8973	0.0009
		1295	11.9054	11.9046	0.0008
17	3.48245516	1300	11.9126	11.9119	0.0007
	3.80663410	1305	11.9198	11.9192	0.0006
		1310	11.9269	11.9265	0.0004
		1315	11.9341	11.9337	0.0004
		1320	11.9412	11.9409	0.0003
		1325	11.9483	11.9481	0.0002
		1330	11.9554	11.9553	0.0001
		1335	11.9624	11.9625	-0.0001
		1340	11.9695	11.9696	-0.0001
		1345	11.9765	11.9768	-0.0003
		1350	11.9836	11.9839	-0.0003
		1355	11.9906	11.9910	-0.0004
		1360	11.9976	11.9980	-0.0004
		1365	12.0046	12.0051	-0.0005
		1370	12.0116	12.0121	-0.0005
		1375	12.0185	12.0191	-0.0006
		1380	12.0255	12.0261	-0.0006
		1385	12.0324	12.0331	-0.0007
		1390	12.0393	12.0401	-0.0008
		1395	12.0462	12.0470	-0.0008
		1400	12.0531	12.0539	-0.0008
		1405	12.0599	12.0608	-0.0009
		1410	12.0668	12.0677	-0.0009
		1415	12.0736	12.0746	-0.0010
		1420	12.0805	12.0814	-0.0009
		1425	12.0873	12.0882	-0.0009
		1430	12.0941	12.0950	-0.0009
		1435	12.1009	12.1018	-0.0009
		1440	12.1077	12.1086	-0.0009
		1445	12.1145	12.1153	-0.0008
		1450	12.1213	12.1221	-0.0008
		1455	12.1281	12.1288	-0.0007
		1460	12.1349	12.1354	-0.0005
		1465	12.1417	12.1421	-0.0004
		1470	12.1485	12.1488	-0.0003
		1475	12.1553	12.1554	-0.0001
		1480	12.1620	12.1620	0.0000
		1485	12.1688	12.1686	0.0002
		1490	12.1755	12.1752	0.0003
		1495	12.1822	12.1817	0.0005
		1500	12.1889	12.1882	0.0007
		1505	12.1956	12.1948	0.0008
		1510	12.2023	12.2013	0.0010
1516.957451	12.2103	1515	12.2089	12.2077	0.0012

Table 3

Data MZY			P-wave velocity (km/s)		
Radius (km)	V_i (km/s)		Radius of surface-focus = 6371.028		
Layers	B_i ($\times 10^{-2}$)	Depth			
	A_i ($\times 10^{-3}$)	(km)	Herrin & al.	MZY	Residual
Depth (km)	V'_i (km/s)				H. & al. - MZY
4854.070549	12.2103	1520	12.2155	12.2142	0.0013
		1525	12.2221	12.2207	0.0014
		1530	12.2287	12.2272	0.0015
		1535	12.2352	12.2337	0.0015
		1540	12.2417	12.2402	0.0015
		1545	12.2482	12.2466	0.0016
		1550	12.2547	12.2530	0.0017
		1555	12.2611	12.2594	0.0017
		1560	12.2675	12.2658	0.0017
		1565	12.2738	12.2721	0.0017
		1570	12.2801	12.2784	0.0017
		1575	12.2864	12.2848	0.0016
		1580	12.2926	12.2910	0.0016
		1585	12.2988	12.2973	0.0015
		1590	12.3050	12.3036	0.0014
		1595	12.3111	12.3098	0.0013
		1600	12.3172	12.3160	0.0012
		1605	12.3232	12.3222	0.0010
		1610	12.3292	12.3284	0.0008
		1615	12.3352	12.3345	0.0007
		1620	12.3411	12.3407	0.0004
		1625	12.3471	12.3468	0.0003
		1630	12.3530	12.3529	0.0001
		1635	12.3589	12.3589	0.0000
		1640	12.3648	12.3650	-0.0002
		1645	12.3706	12.3710	-0.0004
		1650	12.3765	12.3770	-0.0005
		1655	12.3823	12.3830	-0.0007
		1660	12.3882	12.3890	-0.0008
		1665	12.3940	12.3950	-0.0010
18	3.49547729	1670	12.3999	12.4009	-0.0010
	3.82197670	1675	12.4057	12.4068	-0.0011
		1680	12.4115	12.4127	-0.0012
		1685	12.4173	12.4186	-0.0013
		1690	12.4231	12.4244	-0.0013
		1695	12.4289	12.4302	-0.0013
		1700	12.4347	12.4360	-0.0013
		1705	12.4405	12.4418	-0.0013
		1710	12.4463	12.4476	-0.0013
		1715	12.4521	12.4533	-0.0012
		1720	12.4578	12.4591	-0.0013
		1725	12.4636	12.4648	-0.0012
		1730	12.4693	12.4705	-0.0012
		1735	12.4751	12.4761	-0.0010
		1740	12.4808	12.4818	-0.0010
		1745	12.4865	12.4874	-0.0009
		1750	12.4922	12.4930	-0.0008
		1755	12.4978	12.4986	-0.0008
		1760	12.5035	12.5041	-0.0006
		1765	12.5091	12.5097	-0.0006
		1770	12.5148	12.5152	-0.0004
		1775	12.5204	12.5207	-0.0003
		1780	12.5259	12.5262	-0.0003
		1785	12.5315	12.5316	-0.0001
		1790	12.5371	12.5371	0.0000
		1795	12.5426	12.5425	0.0001
		1800	12.5481	12.5479	0.0002
		1805	12.5537	12.5533	0.0004
		1810	12.5592	12.5586	0.0006
		1815	12.5648	12.5639	0.0009
		1820	12.5703	12.5693	0.0010
		1825	12.5759	12.5745	0.0014
		1830	12.5814	12.5798	0.0016
		1835	12.5870	12.5851	0.0019
1844.100891	12.5946	1840	12.5926	12.5903	0.0023

Data MZY		p. 3/4	P-wave velocity (km/s)		
Radius (km)	V_i (km/s)				
Layers	B_i ($\times 10^{-2}$)	Depth			
	A_i ($\times 10^{-3}$)	(km)	Herrin & al.	MZY	Residual
Depth (km)	V'_i (km/s)				H. & al. - MZY
4526.927109	12.5946	1845	12.5982	12.5957	0.0025
		1850	12.6037	12.6018	0.0019
		1855	12.6093	12.6079	0.0014
		1860	12.6149	12.6141	0.0008
		1865	12.6205	12.6201	0.0004
		1870	12.6262	12.6262	0.0000
		1875	12.6319	12.6322	-0.0003
		1880	12.6376	12.6383	-0.0007
		1885	12.6433	12.6443	-0.0010
		1890	12.6491	12.6502	-0.0011
		1895	12.6549	12.6562	-0.0013
		1900	12.6607	12.6621	-0.0014
19	3.65834366	1905	12.6666	12.6680	-0.0014
	4.01545527	1910	12.6725	12.6739	-0.0014
		1915	12.6784	12.6798	-0.0014
		1920	12.6843	12.6856	-0.0013
		1925	12.6902	12.6914	-0.0012
		1930	12.6962	12.6972	-0.0010
		1935	12.7022	12.7030	-0.0008
		1940	12.7082	12.7087	-0.0005
		1945	12.7142	12.7144	-0.0002
		1950	12.7202	12.7202	0.0000
		1955	12.7262	12.7258	0.0004
		1960	12.7323	12.7315	0.0008
		1965	12.7383	12.7371	0.0012
		1970	12.7444	12.7427	0.0017
		1975	12.7505	12.7483	0.0022
1981.009473	12.7550	1980	12.7565	12.7539	0.0026
4390.018527	12.7550	1985	12.7626	12.7601	0.0025
		1990	12.7687	12.7664	0.0023
		1995	12.7747	12.7726	0.0021
		2000	12.7808	12.7789	0.0019
		2005	12.7868	12.7851	0.0017
		2010	12.7928	12.7913	0.0015
		2015	12.7988	12.7975	0.0013
		2020	12.8048	12.8037	0.0011
		2025	12.8108	12.8098	0.0010
		2030	12.8167	12.8159	0.0008
		2035	12.8227	12.8220	0.0007
		2040	12.8286	12.8280	0.0006
		2045	12.8345	12.8341	0.0004
		2050	12.8403	12.8401	0.0002
		2055	12.8462	12.8461	0.0001
		2060	12.8520	12.8520	0.0000
		2065	12.8578	12.8580	-0.0002
		2070	12.8636	12.8639	-0.0003
		2075	12.8693	12.8698	-0.0005
20	3.78936074	2080	12.8751	12.8757	-0.0006
	4.17166810	2085	12.8808	12.8815	-0.0007
		2090	12.8865	12.8873	-0.0008
		2095	12.8922	12.8931	-0.0009
		2100	12.8979	12.8989	-0.0010
		2105	12.9036	12.9046	-0.0010
		2110	12.9092	12.9104	-0.0012
		2115	12.9149	12.9161	-0.0012
		2120	12.9205	12.9217	-0.0012
		2125	12.9262	12.9274	-0.0012
		2130	12.9318	12.9330	-0.0012
		2135	12.9375	12.9386	-0.0011
		2140	12.9431	12.9442	-0.0011
		2145	12.9487	12.9497	-0.0010
		2150	12.9544	12.9552	-0.0008
		2155	12.9601	12.9607	-0.0006
		2160	12.9657	12.9662	-0.0005
		2165	12.9714	12.9717	-0.0003
		2170	12.9771	12.9771	0.0000
		2175	12.9829	12.9825	0.0004
		2180	12.9886	12.9879	0.0007
		2185	12.9944	12.9932	0.0012
		2190	13.0002	12.9985	0.0017
		2195	13.0059	13.0038	0.0021
2201.417284	13.0106	2200	13.0117	13.0091	0.0026

Table 3

Data MZY			P-wave velocity (km/s)			Data MZY		p. 4/4	P-wave velocity (km/s)		
Radius (km)	v_i (km/s)		Radius of surface-focus = 6371.029			Radius (km)	v_i (km/s)				
Layers	B_i ($x\,10^{-2}$)	Depth				Layers	B_i ($x\,10^{-2}$)	Depth			
	A_i ($x\,10^{-3}$)	(km)	Herrin & al.	MZY	Residual		A_i ($x\,10^{-3}$)	(km)	Herrin & al.	MZY	Residual
Depth (km)	v'_i (km/s)				H. & al. - MZY	Depth (km)	v'_i (km/s)				H. & al. - MZY
4169.610716	13.0106	2205	13.0175	13.0151	0.0024	3887.018610	13.3469	2485	13.3499	13.3482	0.0017
		2210	13.0234	13.0214	0.0020			2490	13.3562	13.3549	0.0013
		2215	13.0292	13.0277	0.0015			2495	13.3626	13.3615	0.0011
		2220	13.0350	13.0339	0.0011			2500	13.3690	13.3680	0.0010
		2225	13.0408	13.0401	0.0007			2505	13.3753	13.3746	0.0007
		2230	13.0466	13.0462	0.0004			2510	13.3817	13.3811	0.0006
		2235	13.0525	13.0524	0.0001			2515	13.3881	13.3876	0.0005
		2240	13.0583	13.0585	-0.0002			2520	13.3945	13.3940	0.0005
		2245	13.0641	13.0646	-0.0005			2525	13.4009	13.4004	0.0005
		2250	13.0700	13.0707	-0.0007			2530	13.4073	13.4068	0.0005
		2255	13.0758	13.0767	-0.0009			2535	13.4137	13.4132	0.0005
		2260	13.0817	13.0827	-0.0010			2540	13.4200	13.4195	0.0005
		2265	13.0876	13.0887	-0.0011			2545	13.4264	13.4258	0.0006
		2270	13.0934	13.0947	-0.0013			2550	13.4327	13.4321	0.0006
		2275	13.0993	13.1006	-0.0013			2555	13.4391	13.4383	0.0008
21	3.96471462	2280	13.1052	13.1065	-0.0013			2560	13.4454	13.4445	0.0009
	4.38203609	2285	13.1110	13.1124	-0.0014	**23**	4.28150596	2565	13.4516	13.4507	0.0009
		2290	13.1169	13.1182	-0.0013		4.76460375	2570	13.4578	13.4568	0.0010
		2295	13.1228	13.1241	-0.0013			2575	13.4640	13.4629	0.0011
		2300	13.1287	13.1298	-0.0011			2580	13.4702	13.4690	0.0012
		2305	13.1345	13.1356	-0.0011			2585	13.4763	13.4750	0.0013
		2310	13.1404	13.1414	-0.0010			2590	13.4823	13.4810	0.0013
		2315	13.1462	13.1471	-0.0009			2595	13.4883	13.4870	0.0013
		2320	13.1521	13.1528	-0.0007			2600	13.4942	13.4930	0.0012
		2325	13.1579	13.1584	-0.0005			2605	13.5000	13.4989	0.0011
		2330	13.1637	13.1641	-0.0004			2610	13.5058	13.5048	0.0010
		2335	13.1696	13.1697	-0.0001			2615	13.5116	13.5106	0.0010
		2340	13.1754	13.1753	0.0001			2620	13.5172	13.5164	0.0008
		2345	13.1812	13.1808	0.0004			2625	13.5229	13.5222	0.0007
		2350	13.1871	13.1863	0.0008			2630	13.5285	13.5280	0.0005
		2355	13.1929	13.1918	0.0011			2635	13.5340	13.5337	0.0003
		2360	13.1987	13.1973	0.0014			2640	13.5394	13.5394	0.0000
		2365	13.2046	13.2028	0.0018			2645	13.5448	13.5451	-0.0003
2372.501241	13.2109	2370	13.2104	13.2082	0.0022			2650	13.5501	13.5507	-0.0006
3998.526759	13.2109	2375	13.2163	13.2141	0.0022			2655	13.5554	13.5563	-0.0009
		2380	13.2221	13.2205	0.0016	2660.414706	13.5623	2660	13.5606	13.5619	-0.0013
		2385	13.2280	13.2268	0.0012	3710.613294	13.5623	2665	13.5657	13.5666	-0.0009
		2390	13.2339	13.2332	0.0007			2670	13.5707	13.5712	-0.0005
		2395	13.2397	13.2395	0.0002			2675	13.5756	13.5758	-0.0002
		2400	13.2456	13.2458	-0.0002			2680	13.5804	13.5804	0.0000
		2405	13.2516	13.2520	-0.0004	**24**	4.13634936	2685	13.5851	13.5849	0.0002
		2410	13.2575	13.2582	-0.0007		4.58799171	2690	13.5898	13.5894	0.0004
		2415	13.2635	13.2644	-0.0009			2695	13.5942	13.5938	0.0004
22	4.13594750	2420	13.2694	13.2706	-0.0012			2700	13.5986	13.5983	0.0003
	4.58849794	2425	13.2755	13.2767	-0.0012			2705	13.6027	13.6027	0.0000
		2430	13.2815	13.2828	-0.0013	2711.399520	13.6083	2710	13.6067	13.6071	-0.0004
		2435	13.2876	13.2889	-0.0013	3659.628480	13.6083	2715	13.6105	13.6106	-0.0001
		2440	13.2937	13.2950	-0.0013			2720	13.6140	13.6137	0.0003
		2445	13.2998	13.3010	-0.0012	**25**	3.94351119	2725	13.6173	13.6168	0.0005
		2450	13.3060	13.3070	-0.0010		4.35296986	2730	13.6205	13.6199	0.0006
		2455	13.3122	13.3129	-0.0007			2735	13.6234	13.6229	0.0005
		2460	13.3184	13.3188	-0.0004			2740	13.6261	13.6259	0.0002
		2465	13.3247	13.3247	0.0000	2749.829382	13.6318	2745	13.6287	13.6289	-0.0002
		2470	13.3310	13.3306	0.0004	3621.198618	13.6318	2750	13.6312	13.6318	-0.0006
		2475	13.3372	13.3365	0.0007			2755	13.6336	13.6335	0.0001
2484.009390	13.3469	2480	13.3436	13.3423	0.0013	**26**	3.72963470	2760	13.6359	13.6350	0.0009
							4.09197173	2765	13.6381	13.6366	0.0015
								2770	13.6402	13.6382	0.0020
								2775	13.6422	13.6397	0.0025
						2780.705225	13.6413	2780	13.6441	13.6411	0.0030
						3590.322775	13.6413	2785	13.6460	13.6409	0.0051
						27	3.40172802	2790	13.6478	13.6403	0.0075
							3.69140151	2795	13.6495	13.6397	0.0098
						2800.782857	13.6390	2800	13.6512	13.6391	0.0121
						3570.245143	13.6390	2805	13.6528	13.6332	0.0196
						28	2.39586620				
							2.46180014				
						2810.096720	13.6263	2810	13.6544	13.6264	0.0280
						3560.931280	13.6263	2815	13.6559	13.6310	0.0249
								2820	13.6574	13.6358	0.0216
								2825	13.6588	13.6405	0.0183
								2830	13.6601	13.6452	0.0149
								2835	13.6613	13.6499	0.0114
								2840	13.6625	13.6545	0.0080
								2845	13.6636	13.6592	0.0044
								2850	13.6646	13.6637	0.0009
						29	4.30127189	2855	13.6655	13.6683	-0.0028
							4.79178003	2860	13.6663	13.6728	-0.0065
								2865	13.6670	13.6772	-0.0102
								2870	13.6677	13.6817	-0.0140
								2875	13.6683	13.6861	-0.0178
								2880	13.6689	13.6904	-0.0215
								2885	13.6694	13.6948	-0.0254
								2890	13.6698	13.6991	-0.0293
			Radius outer core = 3477,114454			2893.913546	13.7024	2894	13.6700		

REFERENCES

Bullen K. E. & Bolt Bruce A., 1985, *An introduction to the theory of seismology*, Cambridge University Press, Cambridge, 499 pp.

Clayton, R. W. & Comer, R. P., 1983, A tomographic analysis of mantle heterogeneities from body wave travel times, *Eos Trans. AGU*, 776.

Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L., 1981, Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth. planet. Interiors*, **25**, 297-356.

Dziewonski, A. M., 1984, Mapping the lower mantle: Determination of lateral heterogeneity in P velocity up to degree and order 6, *J. Geophys. Res.*, **89**, 5929-5952.

Herrin et al., 1968, 1968 seismological tables for P phases, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 58, No 4, pp. 1193-1235.

Jeffreys, H. & Bullen, K. E., 1958, *Seismological Tables*, British Association for the Advancement of Science, London.

Kennett, B. L. N. & Engdahl, E. R., 1991, Traveltimes for global earthquake location and phase identification, *Geophys. J. Int.*, **105**, 429-465.

Lana-Renault, Yoël & Cid Palacios, Rafael, 1991, *On the problem of the internal constitution of the Earth*, Academia de Ciencias de Zaragoza, Univ. Zaragoza, Vol. 4, 158 pp.

Lana-Renault, Yoël, 1998, *Modelo de constitución interna de la Tierra*, Doctoral Dissertation, Departamento de Física Teórica, Univ. Zaragoza, 146 pp.

Morelli, A. & Dziewonski, A. M., 1993, Body wave traveltimes and a spherically symmetric P- and S-wave velocity model, *Geophys. J. Int.* **112**, 178-194.

Pulliam, R. J., Vasco, D. W. & Johnson L. R., 1993, Tomographic inversions for mantle P wave velocity structure based on the minimisation of l^2 and l^1 norms of International Seismological Centre travel time residuals, *J. Geophys. Res.*, **98**, 699-734.

Sengupta, M.K. & Toksoz, M. N., 1976, Three-dimensional model of seismic velocity variation in the Earth's mantle, *Geophys. Res. Lett.*, **3**, 84-86.

Taggart, J. N. & Engdahl, E. R., 1968, Estimation of PcP travel times and the depth to the core, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**, 1243-1260.

Rev. Academia de Ciencias. Zaragoza. 55 (2000).

QUIMISMO DE LAS AGUAS DEL GALACHO DE JUSLIBOL (ZARAGOZA)

J. Mandado, L. F. Auqué, Patricia Acero, Mª José Gimeno y Javier Gómez*

* Área de Petrología y Geoquímica. Departamento de Ciencias de la Tierra. Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA.

ABSTRACT

The "Galacho de Juslibol" is an open space placed close to the Ebro river´s bank in which some semi-permanent bodies of water, with a varied and complex ecosystem, have been developed.

The basic chemical analysis of the different bodies of water and of the contributions to the system has allowed us to characterize the hydrogeochemical parameters and to evaluate the factors influencing its stability.

The observed chemical variations in the "Galacho" are due to the physical effects induced by the precipitation and filtering of ions as well as to the biochemical depuration of the system itself.

1. INTRODUCCIÓN

El Galacho de Juslibol es un espacio natural situado a orillas del Ebro, en el que se ha desarrollado un ecosistema muy variado y complejo, que ha sido objeto de numerosos estudios (García Anquela *et al.*, 1984; Pellicer y Yetano, 1984; Regato, 1988; Andrés *et al.*, 1990; Pellicer, 1990; Ollero y Pellicer, 1991; Conde y Pérez, 1993; Andrés *et al.*, 1994; Ibarra, 1995 y Ochoa, 1995).

En esta zona se conservan cuerpos de agua de tipología muy variada, desde los emplazados en los meandros abandonados del Ebro a un buen número de lagunas que se generaron por la explotación de gravas hasta alcanzar el nivel freático en la década de los setenta. Estos cuerpos de agua han ido evolucionando para convertirse en ecosistemas muy complejos. El quimismo de las aguas del Galacho se ve modificado tanto por los procesos

bioquímicos como por los estrictamente químicos derivados de la filtración de aguas naturales del Ebro, aportes de las acequias de riegos y escorrentías de los materiales evaporíticos del escarpe de yesos de la Formación Zaragoza, con esporádicas inundaciones durante las crecidas del Ebro, configurando un sistema hidroquímico variado y frágil. En este trabajo se ha procedido a su caracterización química, estudiando su diversidad y los factores que influyen en el mismo.

2. METODOLOGÍA ANALÍTICA

La metodología de trabajo de campo para el muestreo de las aguas del Galacho de Juslibol ha sido la siguiente: las muestras se recogieron en frascos de polietileno, con dos submuestras para cada punto de muestreo. Una de 100 ml, filtrada *in situ* a 2 Å (siendo imposible ultrafiltrar a 0'45 Å por el taponamiento de los filtros debido a la elevada carga en suspensión de tamaño superior que presentaban las aguas), sin acidificar debido a los problemas de filtración, preparada para el análisis de cationes; y una segunda submuestra de 1000 ml tomada directamente, previo lavado del recipiente en la misma agua, para efectuar en ella la determinación del contenido de aniones. Los recipientes, cerrados herméticamente eliminando en lo posible la presencia de aire, se trasladaron al Laboratorio de Geoquímica para efectuar los análisis químicos en un plazo de 24 horas para aniones y de menos de 72 horas para los cationes. Simultáneamente se efectuaron en campo las siguientes medidas físicas: temperatura, pH, Eh, conductividad y oxígeno disuelto. En el laboratorio, y siempre antes de 24 horas desde la recogida de la muestra, se analizaron:

- Alcalinidad total por alcalimetría, con determinación potenciométrica del punto final. Simultáneamente se midió el pH de laboratorio y la temperatura de la muestra.
- Nitratos, con analizador de iones selectivos Orión, mod. EA 920, electrodo de nitrato 93-07 y electrodo de referencia 90-02. Medida directa sin supresión de interferencias dados los valores de concentración de los posibles iones interferentes.
- Cloruros, con el mismo equipo analizador de iones y electrodo de cloruro Orión 94-17B. La determinación se hizo mediante medida directa, usando CISA como supresor de interferencias.
- Fosfato, por colorimetría con vanadomolibdato amónico.
- Sulfato, por colorimetría según el método de Nemeth.
- Sodio y potasio, por fotometría de llama.

- Calcio, magnesio, hierro, cobre y manganeso se determinaron antes de las 48 horas desde la recogida de la muestra por absorción atómica, en un aparato Perkin-Elmer mod. 2380.

- El material en suspensión se determinó gravimétricamente tras calcinación del residuo recogido con el filtro de 2 Å en la filtración *in situ* de las muestras.

Los resultados analíticos se recogen en la tabla 1 y la situación de las muestras en el mapa de la figura 1.

TABLA 1: Resultados analíticos de las muestras de aguas recogidas en la fase de campo

N°	Cl^- mgr/l	$SO_4^=$ mgr/l	NO_3^- mgr/l	PO_4^{-3} mgr/l	Na^+ mgr/l	K^+ mgr/l	Ca^{+2} mgr/l	Mg^{+2} mgr/l	Cond. mS/cm	TDS mgr/l
1	285	409	31.9	4.14	240	8.0	154	31.2	1865	1354.8
2	268	775	3.3	7.24	246	15.3	270	21.7	2230	1731.0
3	269	770	2.9	6.71	249	10.0	277	21.8	2240	1735.2
4	270	767	2.7	6.10	247	9.6	271	21.7	2290	1723.2
5	350	572	4.1	5.58	302	5.3	204	44.6	2400	1710.3
6	315	494	3.2	4.32	274	9.7	154	35.5	1950	1454.5
7	396	593	6.4	5.70	309	4.7	204	47.4	2270	1773.7
8	319	488	3.3	4.78	270	4.7	169	36.1	1880	1493.1
9	265	387	3.1	5.52	251	6.8	124	23.3	1620	1250.0
10	281	366	3.6	4.48	246	5.5	106	26.4	1512	1155.5
11	275	395	2.7	6.38	252	6.7	144	24.0	1710	1299.2
12	352	506	4.1	6.26	289	4.6	200	37.3	2180	1629.3
13	383	557	4.3	4.72	294	4.3	214	42.7	2260	1726.1
14	410	414	57.2	9.14	330	5.7	170	47.7	2300	1726.3
15	411	394	59.5	12.85	329	5.7	180	45.3	2220	1731.4
16	411	400	58.0	10.52	330	5.7	175	46.0	2250	1730.0
17	407	308	59.0	8.49	332	5.3	158	33.1	2170	1605.6
18	324	434	4.5	14.69	271	6.3	140	27.0	1905	1349.6
19	319	420	3.6	13.24	267	6.2	134	28.0	1825	1295.0

3. CARACTERIZACIÓN MORFOLÓGICA DE LOS DISTINTOS CUERPOS DE AGUA DEL GALACHO DE JUSLIBOL

En el entorno del Galacho de Juslibol se pueden diferenciar cinco tipos de aguas, atendiendo a las características geológicas del encajante del vaso y a las propiedades organolépticas de las soluciones, correspondientes a tres zonas claramente diferenciadas: el antiguo meandro abandonado del Ebro, las depresiones generadas por los procesos de extracción de gravas y el medio afectado directamente por el río Ebro y sus crecidas. Los cinco tipos indicados se pueden concretar en los siguientes:

- Aguas de Tipo 1: Corresponden a la zona nordeste del área del Galacho, en el antiguo brazo del Ebro que se sitúa en contacto directo con el escarpe yesífero de los Montes de Juslibol. Es una zona de aguas profundas y estables, con elevada turbidez, ya que su vaso se encaja en los materiales finos de aluvión, y recibe la mayoría de sus aportes externos al sistema Galacho-río Ebro procedentes de la zona norte. Entre éstos hay que destacar los aportes de la acequia que colecta las aguas residuales de los riegos de Alfamén, con la consiguiente carga de abonos y sales, y la acequia de Juslibol; los aportes naturales externos consisten en las avenidas periódicas de las barranqueras del Acampo de San Gregorio y la escorrentía superficial del escarpe yesífero, en ambos casos con una importante tasa de sales solubles disueltas, con predominio de sulfatos.

- Aguas de Tipo 2: Son las que se ubican en el resto del antiguo cauce abandonado del Ebro, en la periferia de la zona del Galacho. El encajante son materiales aluvionares finos y las aguas presentan una turbidez muy marcada, lo que unido a que se trata de cuerpos de agua muy someros y con una intensa vegetación desarrollada sobre ellos, convierte esta zona en cenagales.

Estas dos primeras zonas presentan la importante función de actuar como barrera a la penetración hacia el interior del Galacho de aguas externas al sistema, protegiéndolo. Este efecto se ve especialmente resaltado en la zona con aguas de tipo 1, intensamente contaminadas por las sales.

- Aguas de Tipo 3: Incluimos en este grupo a los numerosos lagos, de dimensiones variables, que se han formado en el interior del Galacho, en las depresiones producidas por las antiguas explotaciones de gravas. Son, por lo general, lagos de aguas limpias, muy homogéneas, en las que se ha desarrollado una importante población piscícola. La litología del vaso (gravas groseras muy lavadas, con muy pocos finos) y la escasez de aportes externos, sea por crecidas del Ebro, por desagüe de acequias o por escorrentía superficial

de tipo torrencial, confieren a las aguas de esta zona sus características de relativa buena calidad.

- Aguas de Tipo 4: Corresponden al sector suroeste del Galacho, la zona afectada por las crecidas del Ebro. En esta zona se desarrollan, en función de las épocas de avenida, unas charcas poco profundas de aguas muy turbias y con rápida evaporación. La composición, cantidad y calidad de esta agua oscilará mucho en función de la época del año.

- Aguas de Tipo 5: El río Ebro y las acequias procedentes más o menos directamente del mismo constituyen este grupo, que marca siempre uno de los extremos composicionales de las aguas del Galacho.

La figura 1 recoge la ubicación aproximada de cada uno de estos tipos de aguas.

4. VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS

La interpretación de los resultados obtenidos, con los correspondientes mapas de dispersión, se recoge en los apartados siguientes, mediante un estudio de valoración elemento a elemento.

4.1. Dispersión del sulfato.

El análisis del contenido en sulfato de las aguas del Galacho marca una amplia dispersión de valores, desde un máximo en el entorno de 770 mgr/l (muestras 2, 3 y 4) al mínimo de 265 mgr/l (muestra 16). El mapa de isocontenidos (figura 2) refleja con nitidez una evolución N-S, desde los valores más elevados en las inmediaciones del escarpe yesífero (aguas de tipo 1), hasta el río Ebro y sus acequias (aguas de tipo 5), que marcan los mínimos contenidos (el mínimo absoluto lo da la muestra 16, no representada en el mapa y que corresponde a una acequia de la margen derecha del Ebro).

Los aportes de sulfato proceden por tanto y de forma clara de los materiales yesíferos del Terciario de la Formación Zaragoza, que limitan el margen septentrional del Galacho. Estos aportes son esencialmente de tipo torrencial estacional o de escorrentía superficial tranquila, penetrando en su mayoría casi exclusivamente en el brazo más septentrional del Galacho, la referida zona con aguas de tipo 1, con contenidos en sulfato como mínimo un 25% superiores a las del resto. A partir de ellas es previsible una difusión más lenta, por infiltración, al resto de las zonas y de ahí el claro gradiente y

homogénea dispersión de valores manifestada en los análisis. Como dato singular hay que destacar de nuevo el efecto barrera a la penetración de sulfato que efectúa esta zona.

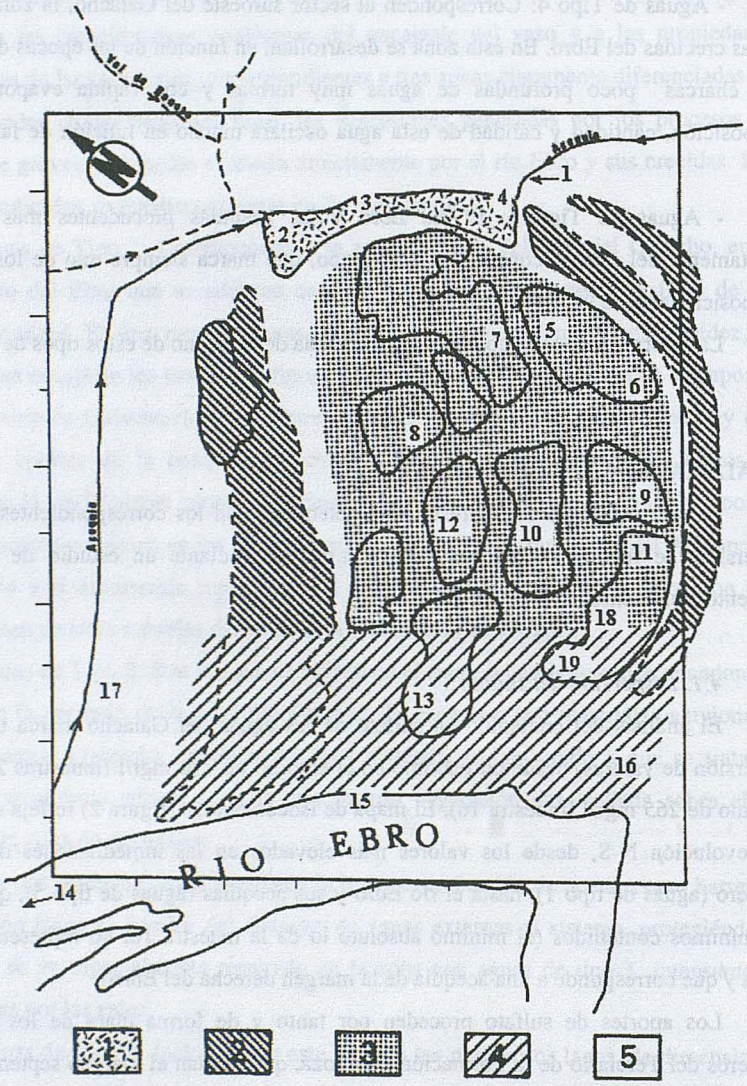


Figura 1. Esquema de los cuerpos de agua del Galacho de Juslibol, con situación de los puntos de muestreo e identificación de los diferentes cuerpos de agua (para la caracterización de los tipos de agua 1 a 5 véase el texto). El rectángulo marcado es el de referencia para los esquemas de distribución de iones de las figuras 2 a 5.

En cuanto a la calidad de estas aguas respecto a este ión, la reglamentación francesa y la OMS recomiendan un máximo de 250 mgr/l en aguas de uso doméstico, mientras que para la norma americana el máximo aceptable se sitúa en 200 mgr/l y el máximo admisible en 400 mgr/l de $SO_4^=$; además, un contenido superior a 480 mgr/l hace que este agua sea impropia para usos agrícolas. Contenidos superiores a 360 mgr/l de $SO_4^=$ en el agua pueden provocar en ciertas condiciones un ataque del hormigón y acelerar la corrosión del hierro, por lo que sería necesario tener en cuenta este dato para la ejecución de las obras que se planifiquen en la zona. Atendiendo a estos datos, debe señalarse la impotabilidad de una parte importante de las aguas muestreadas, que incluso llegan a ser inadecuadas para el riego.

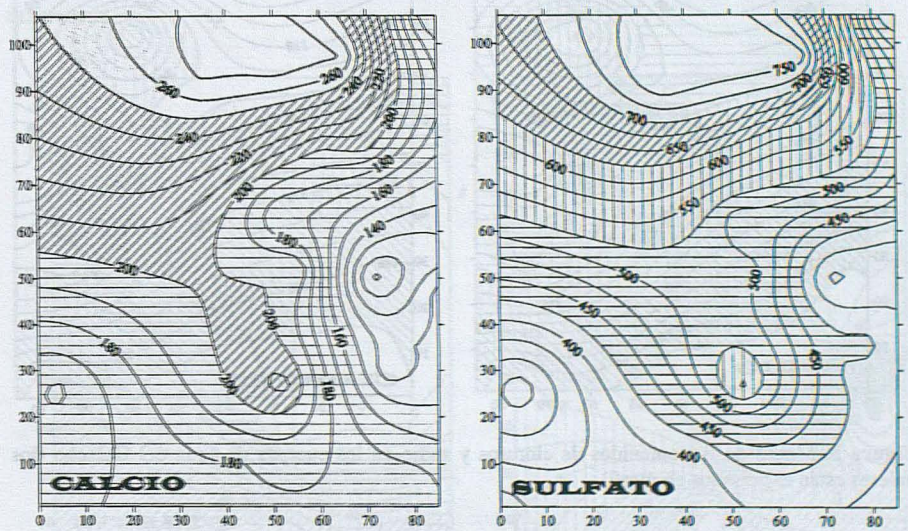


Figura 2. Mapa de isocontenidos de la distribución de los contenidos de Ca y sulfato en las aguas del Galacho (los valores están expresados en mgr/l). Las coordenadas de situación de los ejes vertical y horizontal de los gráficos son las indicadas en el recuadro del mapa de situación de la figura 1.

4.2. Dispersión del cloruro.

Los datos analíticos del contenido en cloruros de las aguas del Galacho marcan dos grupos de muestras: por una parte las aguas del Ebro y sus afluentes, con valores superiores a las 400 mgr/l de cloruro (la muestra 1 llega hasta 658 mgr/l); y las aguas del interior del Galacho, cuyos valores oscilan entre 265 y 396 mgr/l, con un valor medio en torno a los 310 mgr/l.

El elevado contenido en cloruro de las aguas del Ebro se justifica si tenemos en cuenta que aguas arriba el Ebro circula por una zona, la región comprendida entre Tauste y Torres de Berrellén, en la que abundan las sales solubles, fundamentalmente cloruro sódico, de ahí la elevada carga de éste en el agua. Arealmente, en la zona estudiada se aprecia que a partir del Ebro (véase el mapa de distribución de cloruros de la figura 3) hay una progresiva disminución del contenido en este anión hacia la zona septentrional del Galacho, con la única excepción de las muestras 5 y 7 que marcan unos máximos relativos.

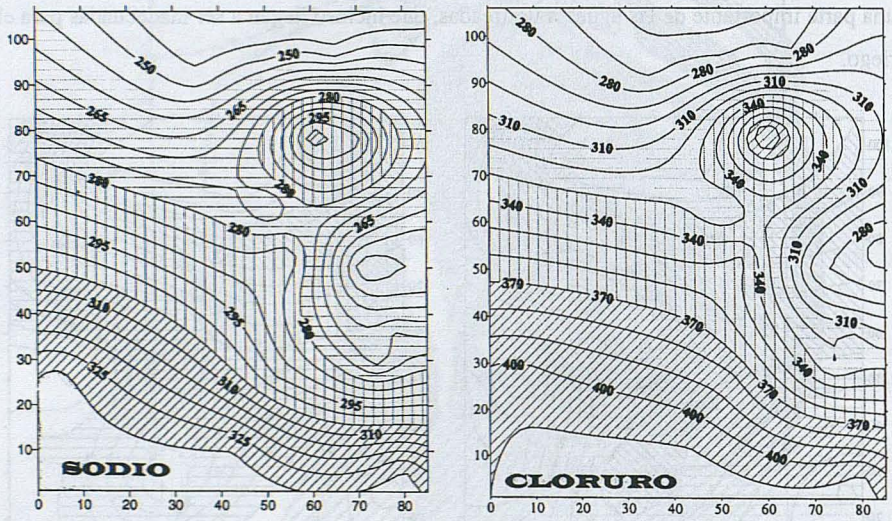


Figura 3. Mapas de isocontenidos de cloruros y sodio en los cuerpos de agua del Galacho (los valores están expresados en mgr/l).

La valoración de la calidad del agua para este anión es difícil, con proporciones aconsejables según las distintas normativas internacionales, que varían el contenido de cloruro entre los 250 y 350 mgr/l como máximo, y siempre pensando en el consumo humano; por otra parte, cantidades superiores a 50 mgr/l suponen riesgo de corrosión en las canalizaciones y en los depósitos, especialmente para los elementos de acero inoxidable, por lo que éste es un factor que habrá que tener en cuenta. Además, para uso agrícola hay un cierto número de cultivos que se ven limitados por el contenido en cloruro.

En resumen, podemos afirmar que la mayoría de las aguas analizadas sobrepasan los límites máximos recomendados para este anión.

4.3. Dispersión de los nitratos

Atendiendo a la concentración de nitratos, las muestras de aguas analizadas pueden agruparse netamente en dos grandes grupos claramente diferenciados: por un lado las aguas externas al Galacho, río Ebro y acequias, que presentan valores de nitrato elevados aunque aceptables según la mayoría de las normas de calidad, y que oscilan entre 10.5 mgr/l y 59.5 mgr/l (no hay que olvidar que las normas internacionales de calidad sitúan en 45 mgr/l el límite superior recomendado, y en 100 mgr/l el límite superior de aguas aceptables). Por otra parte, las aguas del interior del Galacho muestran valores sensiblemente más bajos, entre 6.4 y 2.7 mgr/l, apreciándose (figura 4) una tendencia de descenso desde las inmediaciones del Ebro hacia el NE conforme se alejan de su zona de influencia.

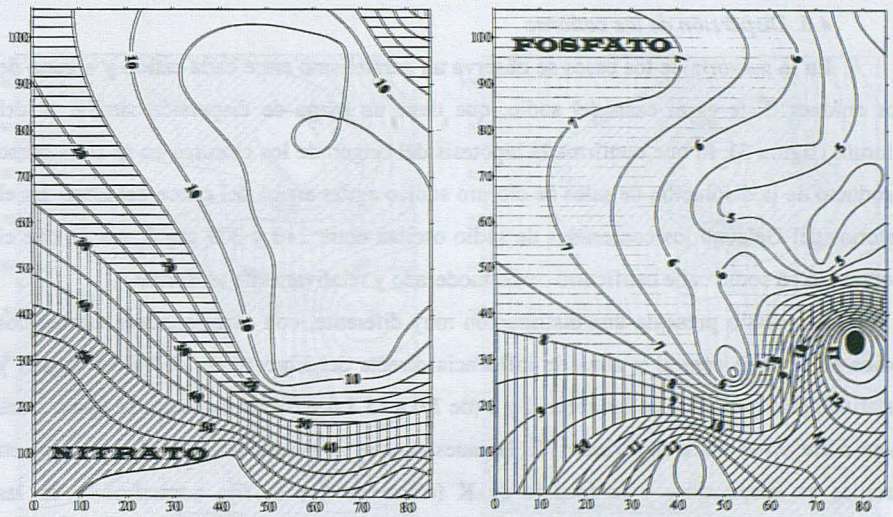


Figura 4. Mapa de isocontenidos de nitratos y fosfatos en los cuerpos de agua del Galacho (valores expresados en mgr/l).

Parece razonable sugerir algún proceso biológico en el interior de las lagunas (desnitrificación bacteriana, asimilación por las plantas, oxidación total) para justificar tan drástico descenso desde los valores de las aguas circulantes a los reducidos contenidos de las aguas embalsadas.

Es importante, pues, destacar que este parámetro químico, buen indicador de la calidad biológica de las aguas, presenta excelentes valores en la zona del Galacho cuyas

aguas mantienen un elevado grado de calidad pese a aportes externos moderadamente elevados.

4.5. Dispersión del fosfato

Las pautas de dispersión de este anión son similares a las indicadas para el nitrato (figura 4), pero con rangos de variación menores. Los valores determinados oscilan desde 9.14 a 12.85 mgr/l en aguas del Ebro y acequias, a valores comprendidos entre 4.32 y 7.24 en el interior del Galacho, con la única excepción de las aguas recogidas en los puntos 18 y 19 (aguas de tipo 4) que presentan los valores más altos, 14.69 y 13.24 mgr/l respectivamente (valores en todos los casos superiores a 1 mgr/l que es el límite admitido en la mayoría de las normativas internacionales para aguas destinadas a la alimentación).

4.6. Dispersión de los cationes

En la mayoría de los casos se observa un paralelismo entre cada catión y alguno de los aniones. Éste es el caso del sodio, que tiene un mapa de dispersión similar al del cloruro (figura 3), lo que confirma la hipótesis del origen de los cloruros en la zona como producto de la disolución de sales de cloruro sódico aguas arriba del cauce del Ebro. En el interior del Galacho los contenidos de sodio oscilan entre 240 y 309 mgr/l, por lo que el contenido en sodio cabe calificarlo como moderado y relativamente uniforme.

El potasio presenta una distribución muy diferente, con característicos contenidos bajos en la zona central y zona de influencia directa del Ebro (entre 4.7 y 5.7 mgr/l) y relativamente más altos en las zonas 1 y 2 (de 7.0 a 15.3 mgr/l). En este caso se aprecia una neta correlación entre la turbidez de la muestra, que se puede asimilar al contenido en arcillas en suspensión, y la medida de K (elemento que se fija normalmente en las superficies de cambio de los minerales arcillosos).

El calcio presenta a su vez un mapa de dispersión (figura 2) similar al del sulfato, que indica que es ésta la fase a la que se asocia y que los aportes de calcio están también directamente relacionados con la disolución del yeso. En contenidos absolutos y en relación con la calidad del agua, podemos hablar de una zona con aguas de buena calidad correspondiente a las aguas de tipo 2, 3 y 4, con valores por debajo de los 200 mgr/l, que es valor límite de calcio para la mayoría de las normativas internacionales para aguas de uso alimenticio e industrial; y las aguas de tipo 1, de mala calidad, con valores superiores a 270

mgr/l, siendo estas aguas las que reciben directamente los aportes directos de la disolución de los yesos.

El mapa de dispersión del magnesio sigue la pauta del de cloruro, por lo que habría que inferir que, al igual que el sodio, está asociado a este anión. Sus contenidos, que oscilan entre 21.7 y 47.7 mgr/l, indican para este catión aguas de calidad aceptable, si bien la valoración de la calidad del agua respecto al Mg hay que hacerla conjuntamente con la del sulfato, pero las normas de la O.M.S. sugieren como concentración máxima admisible 150 mgr/l de Mg, sin que el contenido de sulfatos exceda de 1000 mgr/l.

Finalmente, como síntesis de todos los parámetros analíticos composicionales de medida directa, se presentan los mapas de distribución de la conductividad y el de distribución del total de sólidos disueltos (figura 5).

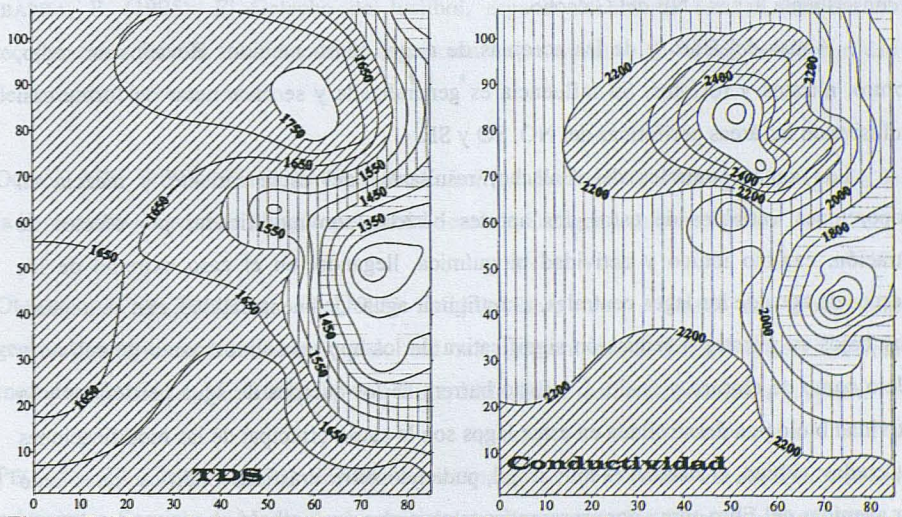


Figura 5. Mapas de isocontenidos de conductividad (expresada en mS/cm) y total de sólidos disueltos (TDS, en mgr/l) de los cuerpos de aguas del Galacho.

Los parámetros valorados en estos mapas tienen un significado muy aproximado, que queda reflejado por la similitud de resultados de ambos. La tendencia de distribución está controlada por los dos aniones (y los correspondientes cationes asociados) de mayor concentración, el sulfato y el cloruro. La suma de los efectos de ambos se materializa en la tendencia de distribución NO-SE. En valores absolutos, y usando el parámetro de T.D.S. como una medida de mineralización global, los valores obtenidos, comprendidos entre 1.156 mgr/l y 1.774 mgr/l marcan para la zona una mineralización alta de las aguas y, en

consecuencia, una calidad global mediocre, con unos marcados controles de los aportes externos y la modificación posterior por los seres vivos de las aguas primarias, de procedencia esencialmente fluvial, aunque los aportes esporádicos de la zona norte del Galacho ejercen un importante influjo por su elevado contenido en sales sulfatadas.

CONCLUSIONES

En el reducido espacio del Galacho de Juslibol se diferencian cuatro cuerpos de agua, como consecuencia del sustrato en el que se encajan y de las fuentes específicas de aportes a cada uno de ellos.

Los aportes diferenciados son:

- Aguas de escorrentía superficial sobre materiales evaporíticos del Mioceno, ricos en yesos, por lo que los iones dominantes en estas aguas son el sulfato y el calcio. Se circunscriben a la zona NE del Galacho.

- Aguas del Ebro y de las acequias de riego, con contenidos elevados en sodio, cloruro, nitratos y fosfatos. Su influencia es generalizada y se hace notar de forma casi exclusiva en las áreas periféricas del NO, SO y SE.

Las aguas centrales del Galacho, resultantes del estancamiento y mezcla en proporciones variables de estos dos aportes básicos, son modificadas por efectos de filtración, cambio iónico y actividad bioquímica, llegando, en el caso extremo de los cuerpos de agua de los lagos centrales, a configurar aguas de buena calidad, con contenidos muy bajos en nitratos y reducción significativa de los aportes salinos, tanto de sulfato y calcio como de cloruro y sodio. El efecto barrera de los cuerpos de agua periféricos y la actividad biológica desarrollada en estos lagos son la causa principal de las modificaciones detectadas; si bien, el sistema es muy frágil, pudiendo sufrir drásticas modificaciones tanto por avenidas del Ebro como por escorrentías torrenciales.

BIBLIOGRAFÍA

ANDRÉS, T.; DÍEZ, C.; PÉREZ COLLADOS, C.E.; RIVAS, J.L. Y SAMPIETRO, J (1990): *Estudio de la avifauna del Galacho de Juslibol*. Delegación de Medio Ambiente del Ayuntamiento de Zaragoza, informe inédito.

ANDRÉS, T.; PÉREZ COLLADOS, C.E. Y SAMPIETRO, J (1994): *Estudio de la avifauna del Galacho de Juslibol*. Delegación de Medio Ambiente del Ayuntamiento de Zaragoza, informe inédito.

CONDE, O. Y PÉREZ COLLADOS, C.E. (1993): *La vegetación del Galacho de Juslibol*. Curso sobre "El Galacho de Juslibol: aproximación interdisciplinar". Servicio de Medio Ambiente del Ayuntamiento de Zaragoza.

GARCÍA ANQUELA, J.A.; TENA, J.M. Y MANDADO, J. (1984): Las explotaciones de áridos como factor modificador de los cauces fluviales naturales. *Cuad. Inv. Geogr.*, Tomo XI, fasc. 1-2, 83-89.

IBARRA, P. (1995): El Galacho de Juslibol, espacio de interés natural. Estudio de recuperación. Fase II. Análisis de la vegetación. Ayuntamiento de Zaragoza-Universidad de Zaragoza. Informe inédito.

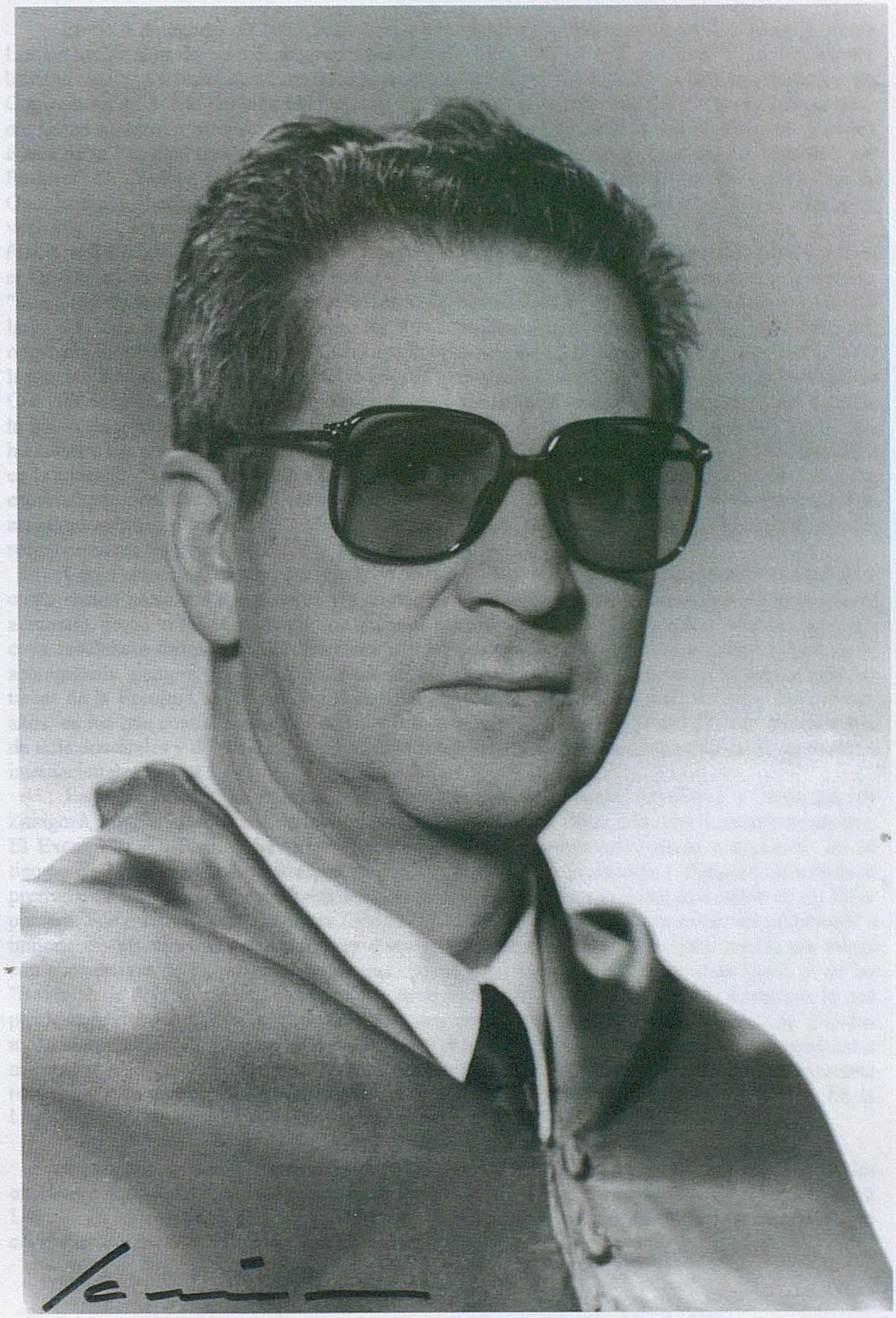
OCHOA, Mª J. (1995): *Flora del Galacho de Juslibol*. Servicio de Investigación Agraria de la Diputación General de Aragón y Ayuntamiento de Zaragoza. Informe inédito.

OLLERO, A. Y PELLICER, F. (1991): Middle Ebro river channel and foodplain: geomorphology, recent changes, risk and management on a fluvial system of free meanders. In: SALA, M.; RUBIO, J.M. & RUIZ, J.M. (Eds.): *Soil erosion studies in Spain.*

PELLICER, F. (Coord.) (1990): *Estudio de recuperación del Galacho de Juslibol y áreas adyacentes*. Servicio de Medio Ambiente del Ayuntamiento de Zaragoza, informe inédito.

PELLICER, F. Y YETANO, L.M. (1984): El Galacho de Juslibol: un ejemplo de meandro abandonado. *Cuad. Inv. Geogr.*, Tomo XI, fasc. 1-2, 72-82.

REGATO, P. (1989): Contribución al estudio de la flora y la vegetación del Galacho de la Alfranca en relación con la evolución del sistema fluvial. *Naturaleza en Aragón*, 3. Diputación General de Aragón.



Notas necrológicas

El día 4 de agosto de 2000 fallecía en León nuestro querido compañero D. Celso Gutiérrez Losa, a los 79 años de edad. Había nacido en Puente-Almahuey, el 1 de agosto de 1921, y realizado brillantemente su licenciatura en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Compostela, en donde también obtuvo el grado de doctor en octubre de 1949. En este mismo año, comienza su carrera profesional ganando por oposición la plaza de Profesor Adjunto de Química Física de la Facultad de Ciencias de la universidad compostelana, trabajando bajo la dirección del Profesor D. Tomás Batuecas, gran figura de prestigio internacional en el campo de la Químicofísica, hechos que marcarían definitivamente su orientación y especialización. La gran vocación investigadora del Profesor Gutiérrez Losa le llevó a trasladarse al Instituto de Química Física de Zurich, donde trabajaría bajo la tutela del eminente científico K. Clausius. Como señalara el Dr. Bernal en el discurso de contestación al de ingreso del Dr. Gutiérrez Losa en la Academia, "éste inició su andadura investigadora bebiendo de buenas fuentes". Esto y el tesón que mostró a lo largo de toda su existencia, hicieron fructificar pronto sus esfuerzos, ganando en 1954, por oposición, la plaza de Colaborador Científico del Consejo Superior de Investigaciones Científicas y luego, también en reñida oposición, la cátedra de Química Física y Electroquímica de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza en la que permanecería hasta su jubilación en 1989 y desde la que realizó una intensa y concienzuda labor docente y de investigación. Sus grandes cualidades humanas y extraordinaria capacidad de trabajo fructificaron en una extensa serie de publicaciones y en la consolidación de un potente grupo investigador, por él dirigido, en la Universidad de Zaragoza especialmente centrado en los estudios de Termodinámica, un grupo del que derivarían los que actualmente dirigen los doctores Urieta, Gracia y Otín y que alcanzó ya por los años 70 un alto reconocimiento internacional.

Como profesor, representa un modelo de competencia y sencillez, buenos modales y comprensión hacia sus compañeros y alumnos de clase por los que fue siempre muy apreciado y admirado, como lo fue también por los alumnos del Colegio Mayor Universitario "Pedro Cerbuna", cuya residencia dirigió durante bastantes años, hasta que, hacia 1970, una dolencia que ya le acompañaría siempre, le indujo a abandonar esa dirección para centrarse exclusivamente en las tareas de la Facultad, de la que fue Decano en los años 79 y 80 y Profesor Emérito durante tres años, en los que continuó su labor docente con ánimo incansable. Dirigió un número considerable de tesis doctorales y de proyectos de investigación y participó en numerosos congresos nacionales e internacionales.

En relación con la Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza, hizo su ingreso el 2 de febrero de 1964, ocupando el sillón que dejó vacante a su muerte, El Excmo. Sr. D. Paulino Savirón y Caravantes, de inteligencia privilegiada e impulsor en su tiempo de la industria química española y que junto con los profesores Calamita y Rocasolano prestigiaron los estudios de Química en la Universidad de Zaragoza hasta colocarlos en un lugar puntero. Fue tesorero de la Academia desde 1966 hasta 1974, publicando en su revista numerosos e importantes artículos especializados. Su discurso de ingreso, que revela su gran interés por temas con perspectivas de futuro, versó sobre una cuestión que sigue planteada con todo vigor, el de las "Reservas de nuestro planeta en materias primas y energía". Merece ser también destacada la que puede considerarse como su obra póstuma, una monografía sobre "Termodinámica de mezclas moleculares" dedicada a su esposa fallecida poco antes y dirigida especialmente a los postgraduados orientados a la investigación en Fisicoquímica, publicación en la que proporciona un excelente resumen de la tarea investigadora desarrollada en el Departamento de Química Física de la Universidad de Zaragoza, que él dirigió con tanto acierto.

Deseamos que este breve resumen haya servido para plasmar en alguna medida las excelentes cualidades humanas y científicas que durante toda su vida acompañaron al Dr. Gutiérrez Losa y su extraordinaria labor de maestro. Descanse en la paz del Señor nuestro querido compañero.

J.S. Urieta