

ANEXOS

ANEXO A. Medios usados en la elaboración del proyecto

1 METODOLOGÍAS ACTUALES APLICADAS AL PROBLEMA

1.1 Resolución mediante el método matricial

Mediante este método se calculan los esfuerzos en estructuras formadas por barras, de las cuales es necesario conocer la longitud, el área de la sección y los momentos de inercia en cada una de las secciones y en el eje transversal a ellas.

La expresión que permite el cálculo de los desplazamientos de los nudos en coordenadas globales es la siguiente para cada una de las barras:

$$[P]_G = [K]_G \cdot [\delta]_G$$

donde $[P]_G$ representa la matriz de esfuerzos externos, $[K]_G$ es la matriz de rigidez de la estructura en coordenadas globales y $[\delta]_G$ es el vector de desplazamientos.

Por otro lado, la matriz de rigidez global se puede expresar en función de la matriz de rigidez local de la barra, premultiplicando y postmultiplicando ésta por una matriz de cambio de coordenadas, quedando la siguiente expresión:

$$[K]_g = [R]^t \cdot [K]_b \cdot [R]$$

Una vez obtenida la matriz de rigidez para cada uno de los elementos se debe proceder al ensamblaje de la estructura completa, calculando las solicitaciones de cada uno de los extremos de la barra. Éstas se obtienen de multiplicar la matriz de rigidez de la barra por cada uno de los desplazamientos nodales, quedando:

$$[P]_{nodal} = [P]_{exterior} + [K]_{barra} \cdot [\delta]_{barra}$$

La matriz de rigidez de la barra en coordenadas locales viene dada por la expresión:

Diseño y cálculo de ligamentos desechables.

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_1 \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_2 \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_2 \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \phi_1 \\ \zeta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \phi_2 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix}$$

Con esta metodología se pueden resolver sistemas matriciales de seis grados de libertad por nodo o unión entre barras. Aunque es posible la resolución de sistemas sencillos de forma manual, este método se introduce en herramientas informáticas de cálculo.

No es de aplicación este método en nuestro estudio ya que está destinado a la resolución de estructuras de barras y no permite la implementación de placas, de las que está compuesta prácticamente en su totalidad las estructuras que se analizan en este proyecto.

1.2 Resolución mediante el método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos (M.E.F.) es un procedimiento numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales. Su desarrollo desde los años cincuenta hasta la actualidad ha sido constante y ahora puede considerarse como el método numérico más extendido en los diversos campos de la ingeniería. Son muchas las facetas de la ingeniería en las que se precisa determinar la distribución de tensiones y deformaciones en un continuo elástico. Los casos particulares de dichos problemas pueden variar de sistemas bidimensionales de tensión y deformación plana, pasando por sólidos de revolución, flexión de placas y láminas, hasta el análisis más general de sólidos tridimensionales. También puede emplearse para el cálculo de transferencia de calor, fenómenos de ondas, etc.

El M.E.F. consiste en su formulación física en la distribución del dominio espacial, ya sea uni, bi o tridimensional, en una serie de dominios de geometría simple, a los cuales se denomina elementos. Estos elementos se encuentran definidos por una serie de puntos que definen su geometría y que se denominan nodos. En el interior de cada elemento se interpola una función de desplazamientos que se formula en función de los valores de éstos que existen en los nodos.

La forma de trabajo de estos elementos consiste en aplicar las ecuaciones de compatibilidad y comportamiento, obteniendo una relación entre la fuerza aplicada sobre los elementos y los desplazamientos de los nodos. Esta relación se expresa mediante la matriz elemental, la cual depende del número de nodos, situación de éstos, material utilizado, geometría de los elementos y tipo de problema que se analiza.

Dependiendo del tipo de formulación del problema se determina si el problema es lineal (elasticidad lineal) o si es no lineal (grandes desplazamientos o deformaciones, comportamiento del material complejo).

A continuación se detalla el proceso de cálculo con el MEF:

1. Planteamiento de continuidad de desplazamientos y equilibrio de fuerza entre elementos.
2. Sistema de ecuaciones globales de la estructura.
3. Tipo de formulación inicial (lineal o no lineal).
4. Resolución.

5. Obtención de desplazamientos nodales (incógnitas básicas).
6. Obtención de otras variables como tensiones y deformaciones.

La aproximación de elementos finitos no requiere la selección del tipo de ecuación que será usada para modelar la estructura. Los códigos disponibles en el mercado han definido previamente los elementos para los cuales la matriz de rigidez elemental ha sido resuelta, necesitando únicamente el conocimiento de las características concretas de los elementos y la utilización.

De esta forma el usuario necesita únicamente definir el tipo de elemento. Una vez que el elemento ha sido definido el procedimiento es el siguiente:

1. Decidir previamente la geometría requerida para modelar el problema:
 1. 1D: cables y vigas.
 2. 2D: tensión o deformación plana.
 3. 2D: axisimetría: láminas y sólidos de revolución.
 4. 3D: láminas y sólidos.
2. Seleccionar el tipo de elemento y formular la matriz de rigidez si se requiere.
3. Definir la matriz que relaciona las deformaciones del elemento con los desplazamientos nodales $\{B\}$.
4. Definir la matriz de la ley constitutiva $\{D\}$.
5. Aplicar una rutina numérica cuadrática para evaluar la rigidez del elemento sobre el volumen.

$$\int_V B^T \cdot D \cdot B \delta V$$

El M.E.F. consiste en dividir un medio continuo en un número finito de partes cuyo comportamiento se especifica en un número finito de parámetros. Se pasa de un sistema con infinitos grados de libertad a otro con un número finito de grados, con similares propiedades físicas y geométricas, en el que las ecuaciones de equilibrio se pueden expresar mediante un sistema algebraico de ecuaciones simultáneas con un determinado número de incógnitas, obteniéndose la solución del sistema completo mediante el ensamblaje de las soluciones para cada elemento finito. El proceso de modelización es el siguiente:

1. Discretizar la geometría de una malla.
2. Definir las localizaciones de los nodos de los elementos.

3. Refinar el mallado en las zonas de concentración de tensiones.
4. Definir las propiedades locales del elemento.
 1. Anisótropo
 2. Isótropo
 3. Ortótropo
5. Transformar la matriz de rigidez local del elemento en coordenadas globales.
6. Obtener el ensamblaje de la matriz de rigidez superponiendo las matrices de rigidez globales de los elementos.
7. Definir las condiciones de contorno aplicadas al sistema y definir el vector de fuerzas nodales $\{F\}$, así como definir desplazamientos, nodos fijos, contactos, carga, temperatura...
8. Resolver el conjunto de ecuaciones algebraicas lineales resultante usando los métodos apropiados.
9. Resolver tensiones y deformaciones locales de elementos. Calcular tensiones y deformaciones en lámina y comparar con el criterio de rotura.

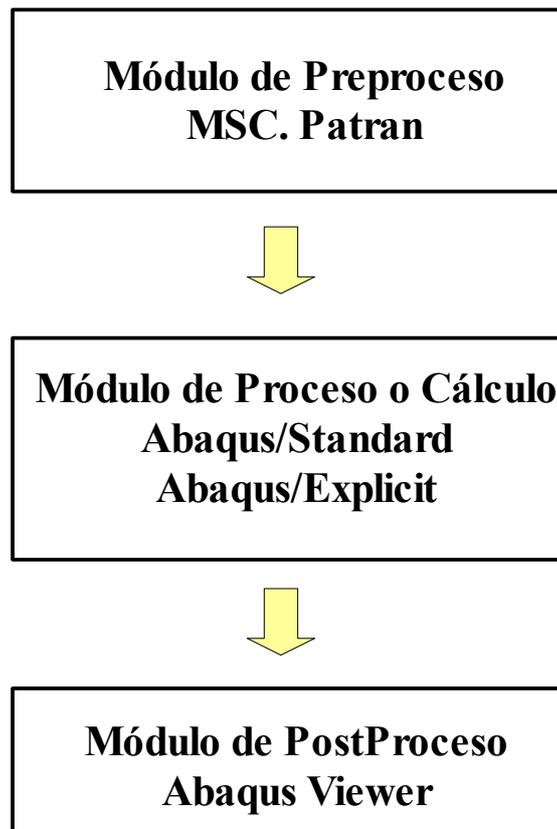
Una vez que se han establecido las características de los nodos o los elementos, las ecuaciones individuales deben ensamblarse para formar un sistema global de ecuaciones que describa la respuesta general del sistema. Este ensamblaje da lugar a un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales cuya forma básica es la siguiente:

$$[K] \cdot u = f$$

donde:

- $[K]$ es una matriz de rigidez del sistema (n x n).
- u es un vector (nx1) que habitualmente representa las deflexiones del sistema que normalmente son desconocidas.
- f es un vector (nx1) que normalmente son las cargas aplicadas, las cuales son conocidas.

En la siguiente gráfica se pueden observar los pasos que se siguen para simular la estructura.



2 MEDIOS MATERIALES Y PROGRAMAS EMPLEADOS

Los medios materiales utilizados son los disponibles en el Área de Ingeniería e Infraestructura de los Transportes del departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Zaragoza.

Las herramientas de trabajo son las siguientes:

- Herramientas Hardware: UNIX Workstations y PC's.
- Herramientas de Software
 - Módulo de geometría y mallado de Elementos Finitos: MSC PATRAN
 - Módulo de análisis y tratamiento de datos: ABAQUS.
 - Entorno de Office para edición: Microsoft office y Openoffice.

En los siguientes dos subapartados se explican las características principales de los dos programas comerciales con los que se ha realizado el proyecto: MSC Patran y ABAQUS.

2.1 MSC Patran

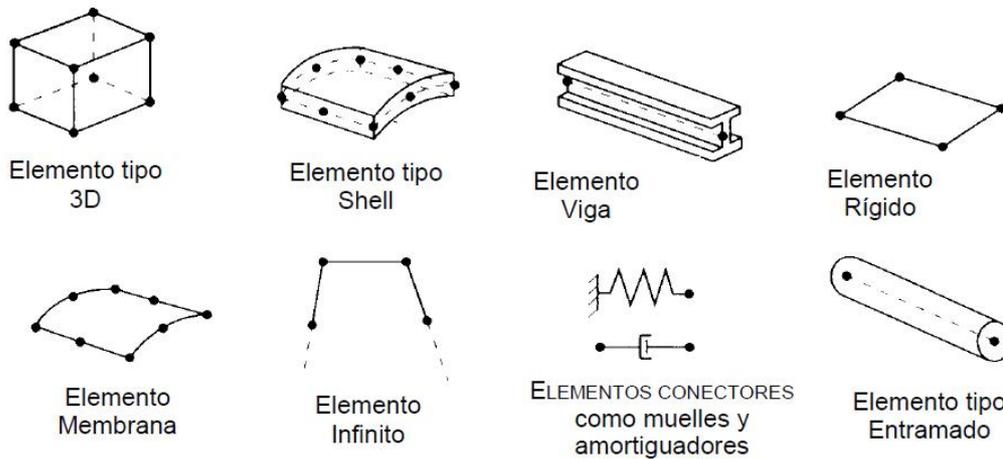
Patran es el módulo que se utiliza para el preproceso del modelo. En este caso el archivo de salida que se genera como resultado es un INPUT para el programa Abaqus. Durante el preproceso lo que se hace es definir el elemento a estudiar y la discretización deseada para la resolución del problema. Se siguen los siguientes pasos:

1. Geometría: La estructura u objeto que se va a estudiar se define mediante rectas, superficies, sólidos, y demás elementos geométricos.
2. Discretización: Las estructuras que se van a analizar se dividen en nodos y en elementos que compondrán la malla de elementos finitos. En los nodos se considerarán los grados de libertad del objeto que se estudia. Es un apartado fundamental ya que en el se escoge el tipo de elemento con el cual discretizaremos la estructura estudiada. Una vez escogido éste, existen diversas formas de realizar la malla completa, dependiendo de las necesidades. Se podrá generar de forma automática, regulando ciertos parámetros o bien elemento a elemento. El tamaño de los elementos se escogerá en función de la precisión que se le quiera dar al modelo y las capacidades de cálculo de las que se dispone.

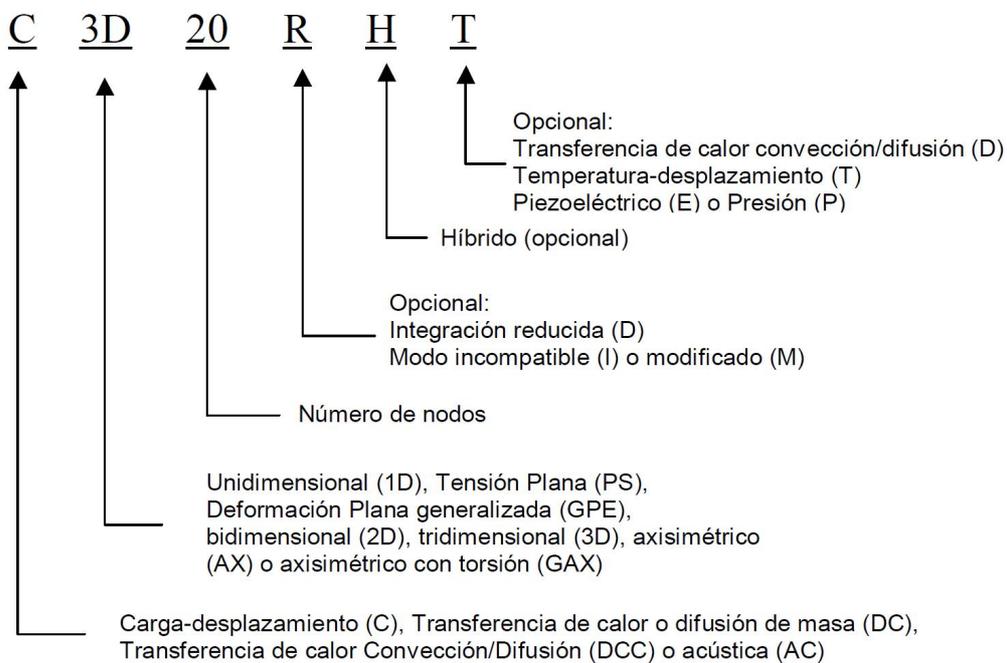
Abaqus dispone de una amplia variedad de tipos de elementos con los que

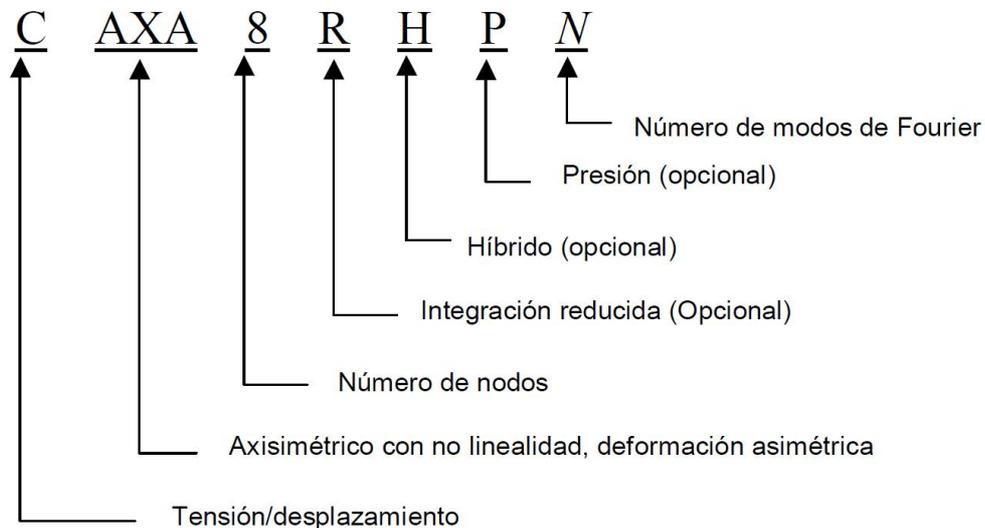
Diseño y cálculo de ligamentos desechables.

realizar el modelo, dependiendo de la geometría de partida y de la precisión de cálculo requerida. La Figura siguiente nos muestra un ejemplo de los tipos de elementos más comunes.



Abaqus tiene un criterio para nombrar a los distintos tipos de elementos, que se indica a continuación.





3. Materiales: Se definen las propiedades de los materiales con los que está construido nuestro objeto de estudio (Módulo Elástico, densidad, coeficiente de dilatación, coeficiente de Poisson, etc.). Patran nos permite introducir la curva del material (pares de valores tensión-deformación) con la precisión deseada, es decir, tantos pares de valores como se precise.
4. Cargas y condiciones de contorno: En último lugar se definen las cargas a las que está sometido el vehículo, condiciones de apoyo en desplazamientos y contactos existentes entre las distintas superficies.

Una vez realizados todos estos pasos, lo único que resta por hacer antes de finalizar con Patran es preparar toda la información que va a ser enviada a la siguiente etapa, la del procesado o programa principal. Patran imprime o dibuja por pantalla de forma interactiva la geometría inicial y las condiciones para que sean verificadas por el usuario.

Como resultado final de Patran se obtiene un fichero de texto (INPUT), que contiene todos los parámetros que describen el modelo y que es la base para llevar a cabo el cálculo. La información contenida en dicho archivo está estructurada en diferentes apartados que se detallan a continuación.

Fichero input

En primer lugar aparece un listado con todos los nodos que hemos definido para

Diseño y cálculo de ligamentos desechables.

nuestro modelo. Para cada uno de ellos se especifican las coordenadas espaciales según el sistema de coordenadas utilizado.

A continuación aparecen los distintos grupos de elementos existentes, definidos de la siguiente manera. Primero aparece un listado con los nodos contenidos en dicho grupo (NSET). Después de este listado de nodos viene el listado de elementos que forman el grupo indicando los nodos que componen cada elemento (ELSET).

En el siguiente apartado se repartirá a los elementos en diferentes grupos en función de sus propiedades, entre las que se encuentra el material. Además, en función del tipo de elemento, barra, lámina, sólido, aparecerán apartados específicos. Por ejemplo, para un elemento SHELL, será necesario definir el espesor, el número de puntos de integración, y el sistema de orientación de cada uno de los elementos.

Después de indicar las propiedades para cada elemento del modelo se define la lista de materiales utilizados. Para cada material se especificará el nombre que lo identifica y las propiedades con las que queremos trabajar (densidad, Módulo de Young, Límite elástico, etc.).

Cuando tenemos todos los elementos integrantes perfectamente definidos hay que especificar el tipo de cálculo que se quiere realizar, estático, dinámico, etc.

Por último, queda definir las cargas y las condiciones de contorno que se aplicarán al modelo y su ubicación. Aparece de nuevo un listado con los nodos en los que se aplican las condiciones de contorno y para cada uno de ellos las restricciones a imponer. De la misma forma aparece un listado con los nodos sometidos a cargas exteriores y de éstas se indica el valor y la dirección de aplicación.

Este fichero es de gran utilidad pues permite modificar gran número de parámetros directamente, sin tener que volver a utilizar Patran. Interesa especialmente si se quiere comprobar cómo afecta la variación de algún parámetro al resultado global. Comprobado éste, se pasa al proceso de cálculo del modelo, para el cual se emplea el software Abaqus, cuyo funcionamiento se detalla a continuación.

2.2 Abaqus

Es el programa que aplica el método de los elementos finitos al cálculo del modelo interpretando los datos de geometría, tipo de malla, materiales, cargas, condiciones de contorno etc., que obtiene del INPUT generado mediante Patran.

Abaqus no precisa de interacción con el usuario, pues todos los datos y especificaciones relativas al cálculo han debido quedar perfectamente definidas en el archivo de entrada. Desde interfaz MS-DOS se requiere la ejecución del programa Abaqus. Antes de proceder al cálculo, el programa revisa el fichero de entrada en busca de posibles fallos en la estructura de datos. Si se concluye la revisión sin errores, se pasa a la etapa de cálculo.

Abaqus puede efectuar dos tipos diferenciados de cálculos que son los siguientes:

- Abaqus/Standard: Es el método general del programa para cálculo estático. Es el más extendido en el cálculo de estructuras y permite calcular su comportamiento mecánico, obteniendo valores de tensiones, deformaciones, desplazamientos, etc. Con este módulo de cálculo se aplica la teoría de los elementos finitos mediante integración implícita, lo que conlleva un mayor gasto computacional pero mayor precisión en los resultados.
- Abaqus/Explicit: Es el otro módulo de cálculo convencional de Abaqus para estructuras vectorizadas y orientado a su empleo en supercomputadores. El análisis dinámico con Explicit está basado en la implementación de unas reglas de integración explícita junto con el uso de unas matrices masa diagonales o agrupadas. Permite el cálculo de cualquier estructura sometida a cargas dinámicas en el tiempo.

2.3 Abaqus Viewer

Una vez el cálculo se ha llevado a cabo con éxito, la información que devuelve Abaqus es recogida en unos ficheros de texto, para los elementos y nodos integrantes de la estructura. El Abaqus Viewer permite conocer los resultados de desplazamientos nodales, mapas de tensiones y deformaciones, configuración deformada, etc.

Los resultados del cálculo son representados con el postprocesador de una forma

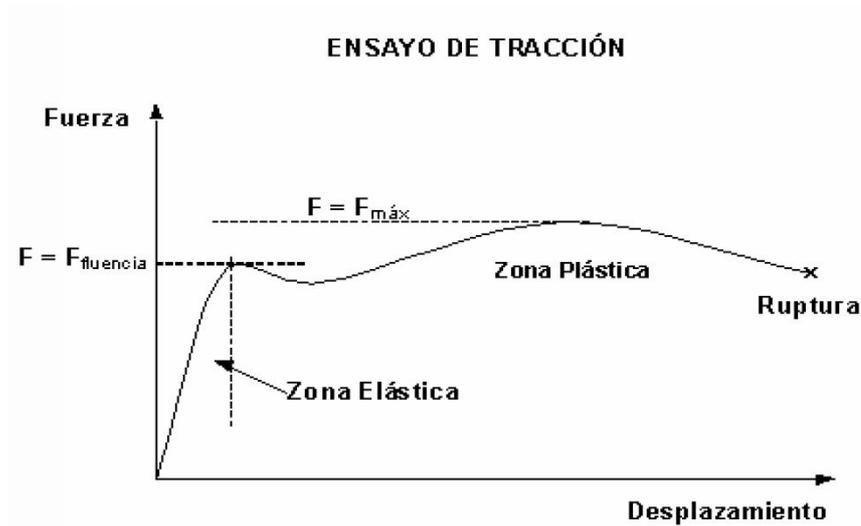
Diseño y cálculo de ligamentos desechables.

gráfica. Mediante distintos colores y tonalidades se puede distinguir qué piezas están más solicitadas. También ofrece la posibilidad de seleccionar diferentes vistas, sacar por pantalla sólo los elementos que cumplan un determinado criterio impuesto por el usuario, e incluso de realizar animaciones en las que se ve la evolución de los resultados mientras se introduce la carga.

ANEXO B. Materiales

Para caracterizar el comportamiento plástico de los materiales, se recurre a la curva tensión-deformación ($\sigma - \epsilon$), incluyendo el punto de rotura. Estas curvas se obtienen a partir de ensayos normalizados de tracción.

En la siguiente figura, se puede observar el aspecto de una curva característica tensión-deformación para acero.



Las curvas poseen una primera región, llamada zona elástica, donde la probeta se comporta como un muelle elástico, de forma que, al retirar la carga, la probeta regresa a su posición inicial. Para esta región se cumple que:

Cuando la curva se desvía de la recta inicial, el material está llegando a su límite de fluencia o límite elástico, y empieza a deformarse de forma permanente. No se cumple ya la relación anterior.

Tras el límite de fluencia empieza una región inestable que es distinta para cada acero o aluminio. En esa región está el punto en el que se alcanza la fuerza máxima, instante en el cual se forma un cuello en la probeta.

$$\sigma_{yp} = \frac{F_{yp}}{A_o}$$

En este caso se define la resistencia a fluencia como:

donde A_o es el área transversal inicial.

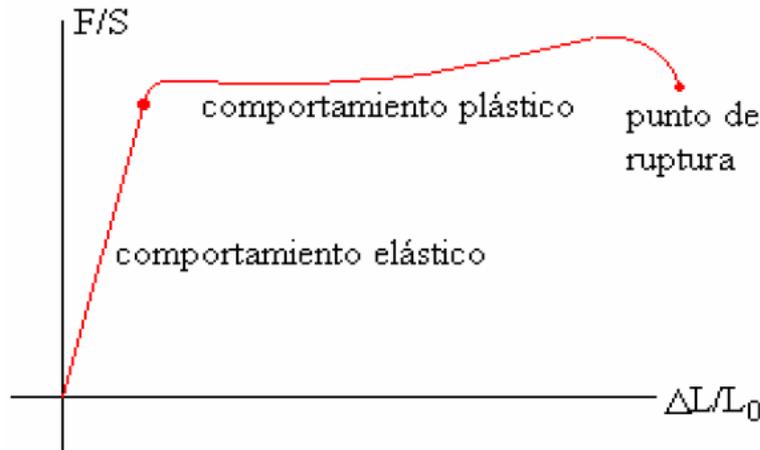
La resistencia a tracción se define:

$$\sigma_{ult} = \frac{F_{max}}{A_o}$$

La deformación unidimensional se define como:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$

Con esto y a partir de las curvas Fuerza-Desplazamiento se obtienen las curvas Esfuerzo-Deformación, parecidas a la siguiente:



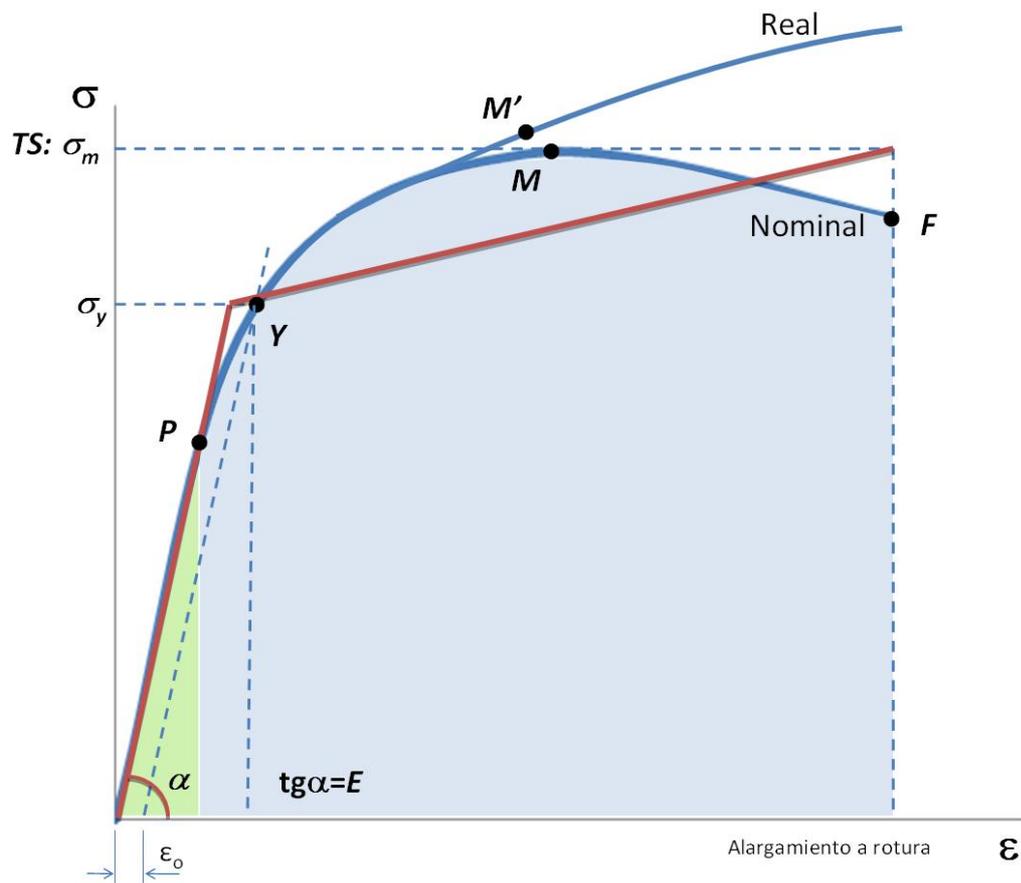
En la región elástica de la curva se cumplirá que:

A partir de esta ecuación se obtendrán los puntos de plastificación y de rotura del material.

Estas curvas no se pueden introducir en Abaqus tal cual las hemos descrito, con lo que habrá que realizar algunas simplificaciones.

Si se quiere hacer un análisis elástico-plástico con deformaciones finitas, ABAQUS asume que la deformación plástica es la que predomina y que las deformaciones elásticas son pequeñas. Esta restricción está impuesta por los modelos de elasticidad que usa ABAQUS. Se justifica porque la mayoría de los materiales tienen un punto de fluencia bien definido que es un porcentaje muy pequeño de su módulo de Young; por ejemplo, el límite de fluencia de los metales es normalmente menor que un 1% del módulo de Young del material. Por tanto, las deformaciones elásticas serán también menores que este porcentaje, y la respuesta elástica del material se puede modelar con bastante precisión como lineal.

Así pues, la curva se reducirá a dos pendientes, una de las cuales corresponde al módulo de Young, y dos puntos, que son el límite de fluencia del material y el límite de rotura.



La deformación plástica a la tensión de ruptura se calcula como:

donde ϵ_p es la deformación plástica, ϵ_t es la deformación total, E es el módulo de Young y R_p es la carga de rotura.

ANEXO C. Cálculo de los coeficientes de amortiguación Rayleigh

Como se ha comentado anteriormente en la memoria, para compensar el amortiguamiento en un tipo de análisis como el que se ha realizado, lo más sencillo es tratar el amortiguamiento como un Amortiguamiento Equivalente de Rayleigh de la forma

$$[C] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K]$$

donde $[C]$ es la matriz de amortiguamiento del sistema, $[M]$ es la matriz de masa del sistema, $[K]$ es la matriz de rigidez y α y β son coeficientes de amortiguación que multiplican a las matrices anteriores.

La mayor ventaja que se obtiene de convertir la matriz de amortiguamiento en un Equivalente de Rayleigh yace en que se puede convertir un sistema de n grados de libertad en un sistema de n ecuaciones.

Es un hecho conocido que la participación de masa decrece conforme aumentan los modos de frecuencia, por ejemplo, para el primer modo puede participar un 45% de la masa, para el segundo un 20%, para el tercero un 10% y así sucesivamente hasta completar el 100%. Este hecho se demuestra con que $\omega = \sqrt{k/m}$ siendo ω la frecuencia natural y k la rigidez del sistema. Definiendo el amortiguamiento crítico como $C_c = 2\sqrt{k \cdot m}$ podemos concluir que con la reducción en la masa para los sucesivos modos, C_c disminuirá con el aumento de los modos. En un sistema amortiguado el ratio de amortiguación ζ se define como $\zeta = C/C_c$ el cual aumentará conforme lo hagan los modos de frecuencia.

Formulación básica en Amortiguación de Rayleigh

En un sistema con múltiples grados de libertad, la ecuación de movimiento bajo una fuerza externa dependiente del tiempo es:

$$[M] \cdot \ddot{x} + [C] \cdot \dot{x} + [K] \cdot x = P(t)$$

Mediante una transformación ortogonal, obtenemos

$$\phi^T \cdot [M] \cdot \phi \cdot \ddot{\xi} + \phi^T \cdot [C] \cdot \phi \cdot \dot{\xi} + \phi^T \cdot [K] \cdot \phi \cdot \xi = \phi^T \cdot P(t)$$

que se puede reducir a

$$\ddot{\xi}_j + 2\zeta_j \omega_j \dot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = P_j(t)$$

siendo ξ = desplazamiento de la estructura en la transformada, ϕ = vector propio normalizado del sistema, ζ = ratio de amortiguación y ω = frecuencia natural del sistema.

La matriz de amortiguación, gracias a la transformación la podemos poner de la

forma:

$$\phi^T [C] \phi = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha + \beta \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene que

$$2 \zeta_1 \omega_1 = \alpha + \beta \omega_1^2$$

$$2 \zeta_2 \omega_2 = \alpha + \beta \omega_2^2$$

...

De la ecuación general $2 \zeta_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2$, se puede despejar el ratio de amortiguación en función de los coeficientes α y β : $\zeta_i = \frac{\alpha}{2 \omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2}$

Al evaluar esta expresión se obtiene un comportamiento lineal entre la frecuencia natural del sistema y el ratio de amortiguación a partir de una frecuencia de 8,5 rad/s. Dado que la zona no lineal, entre 0,5 y 8,5 rad/s, es muy pequeña en comparación con la lineal, se puede asumir un comportamiento totalmente lineal entre el ratio de amortiguación y la frecuencia lineal del sistema. De este modo se puede obtener el ratio de amortiguación para cualquier modo de vibración en función de los valores de frecuencia natural del primer y último modo de vibración y los ratios de amortiguación asociados.

$$\zeta_i = \frac{\zeta_m - \zeta_1}{\omega_m - \omega_1} \cdot (\omega_i - \omega_1) + \zeta_1$$

Donde ζ_i es el ratio de amortiguación que se quiere obtener (para $i \leq m$), ζ_1 es el ratio de amortiguación del primer modo, ζ_m es el ratio de amortiguación del último modo considerado en el análisis, y ω_i , ω_1 y ω_m es la frecuencia natural del sistema asociada a dichos modos de vibración. Y mediante esta expresión se puede obtener el valor de β dependiente únicamente de estos valores, como muestra la siguiente expresión:

Cálculo de los coeficientes de amortiguación Rayleigh.

$$\beta = \frac{2\zeta_1 \omega_1 - 2\zeta_m \omega_m}{\omega_1^2 - \omega_m^2}$$

Sustituyendo el valor de β en la ecuación general se obtiene el valor de α :

$$\alpha = 2\zeta_1 \omega_1 - \beta \omega_1^2$$

Método para obtener los valores de los coeficientes α y β de Amortiguación de Rayleigh.

- Realizar un análisis frecuencial para obtener los modos de vibración, la frecuencia natural y la masa generalizada asociada a cada modo.
- Para cada modo de vibración se obtiene la constante de rigidez k .

$$k_i = m_i \cdot \omega_i^2$$

- Y el amortiguamiento con la rigidez y la masa de cada modos de vibración.

$$C_i = 2\sqrt{k_i \cdot m_i}$$

- El amortiguamiento crítico se obtiene con la rigidez del primer modo y la masa total del sistema, en este caso los ligamentos.

$$C_c = 2\sqrt{k_1 \cdot M}$$

- Se divide el amortiguamiento de cada modo por el amortiguamiento crítico, para obtener el ratio de amortiguación.

$$\zeta_i = C / C_c$$

- Por último se hallan los valores de alfa y beta.

$$\beta = \frac{2\zeta_1 \omega_1 - 2\zeta_m \omega_m}{\omega_1^2 - \omega_m^2} \quad \alpha = 2\zeta_1 \omega_1 - \beta \omega_1^2$$

(El subíndice m representa el último modo de vibración calculado)

En la siguiente tabla se muestra el cálculo de los coeficientes para la geometría final de los ligamentos para el ensayo de cortadura.

Diseño y cálculo de ligamentos desechables.

Modos de vibración	Frecuencia		Masa generalizada (Kg)	k	C	$\zeta=C/Cc$	beta (β)	alpha (α)
	rad/tiempo	ciclos/tiempo						
1	3.927	624,9	2,85E-02	4,39E+05	2,23E+02	6,61E-01	1,02E-05	5.035,44
2	18.627	2.964,5	1,16E-02	4,04E+06	4,34E+02	1,28E+00		
3	21.331	3.395,0	1,16E-02	5,27E+06	4,94E+02	1,46E+00		
4	30.337	4.828,2	2,93E-02	2,70E+07	1,78E+03	5,26E+00		
5	44.282	7.047,7	2,53E-03	4,96E+06	2,24E+02	6,63E-01		
6	44.282	7.047,7	2,53E-03	4,96E+06	2,24E+02	6,63E-01		
7	50.667	8.063,9	1,51E-02	3,87E+07	1,53E+03	4,52E+00		
8	54.075	8.606,3	1,47E-02	4,29E+07	1,59E+03	4,69E+00		
9	64.718	10.300,0	3,38E-03	1,41E+07	4,37E+02	1,29E+00		
10	64.718	10.300,0	3,38E-03	1,41E+07	4,37E+02	1,29E+00		
...		
40	308.750	49.139,0	1,89E-03	1,80E+08	1,17E+03	3,45E+00		
41	311.866	49.635,0	1,52E-03	1,48E+08	9,48E+02	2,80E+00		
42	311.866	49.635,0	1,52E-03	1,48E+08	9,48E+02	2,80E+00		
43	326.516	51.967,0	9,90E-04	1,06E+08	6,46E+02	1,91E+00		
44	326.516	51.967,0	1,04E-03	1,11E+08	6,81E+02	2,02E+00		
45	326.516	51.967,0	9,77E-04	1,04E+08	6,38E+02	1,89E+00		
46	326.516	51.967,0	1,05E-03	1,12E+08	6,88E+02	2,04E+00		
47	330.063	52.531,0	1,38E-02	1,51E+09	9,14E+03	2,70E+01		
48	333.098	53.014,0	4,49E-03	4,98E+08	2,99E+03	8,84E+00		
49	334.030	53.162,0	4,45E-03	4,96E+08	2,97E+03	8,79E+00		
50	343.032	54.595,0	8,67E-04	1,02E+08	5,95E+02	1,76E+00		
					$Cc=$	3,38E+02		
					Masa total (Kg)=	6,51E-02		

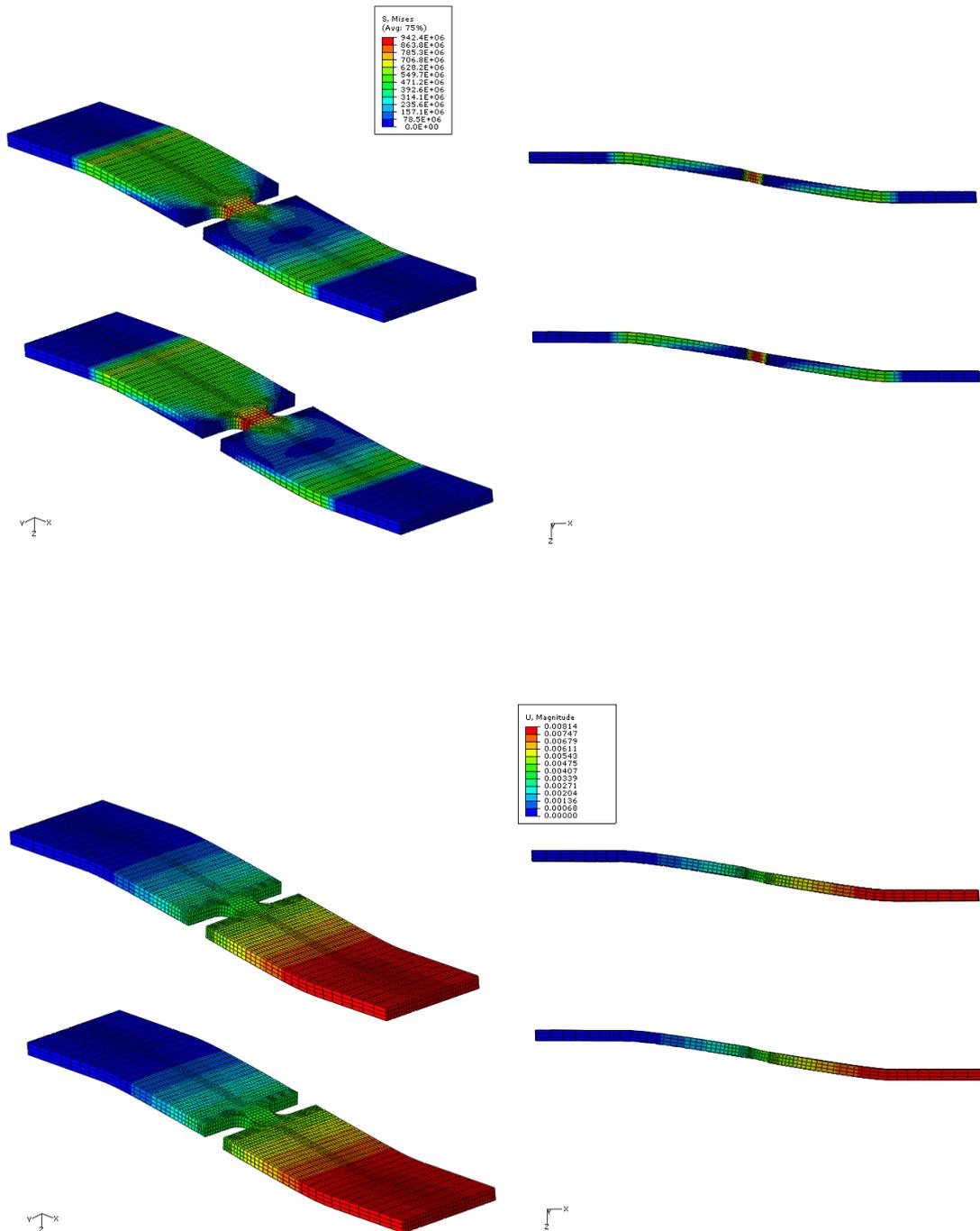
Tabla 5: Cálculo de los valores de alfa y beta

ANEXO D. Imágenes

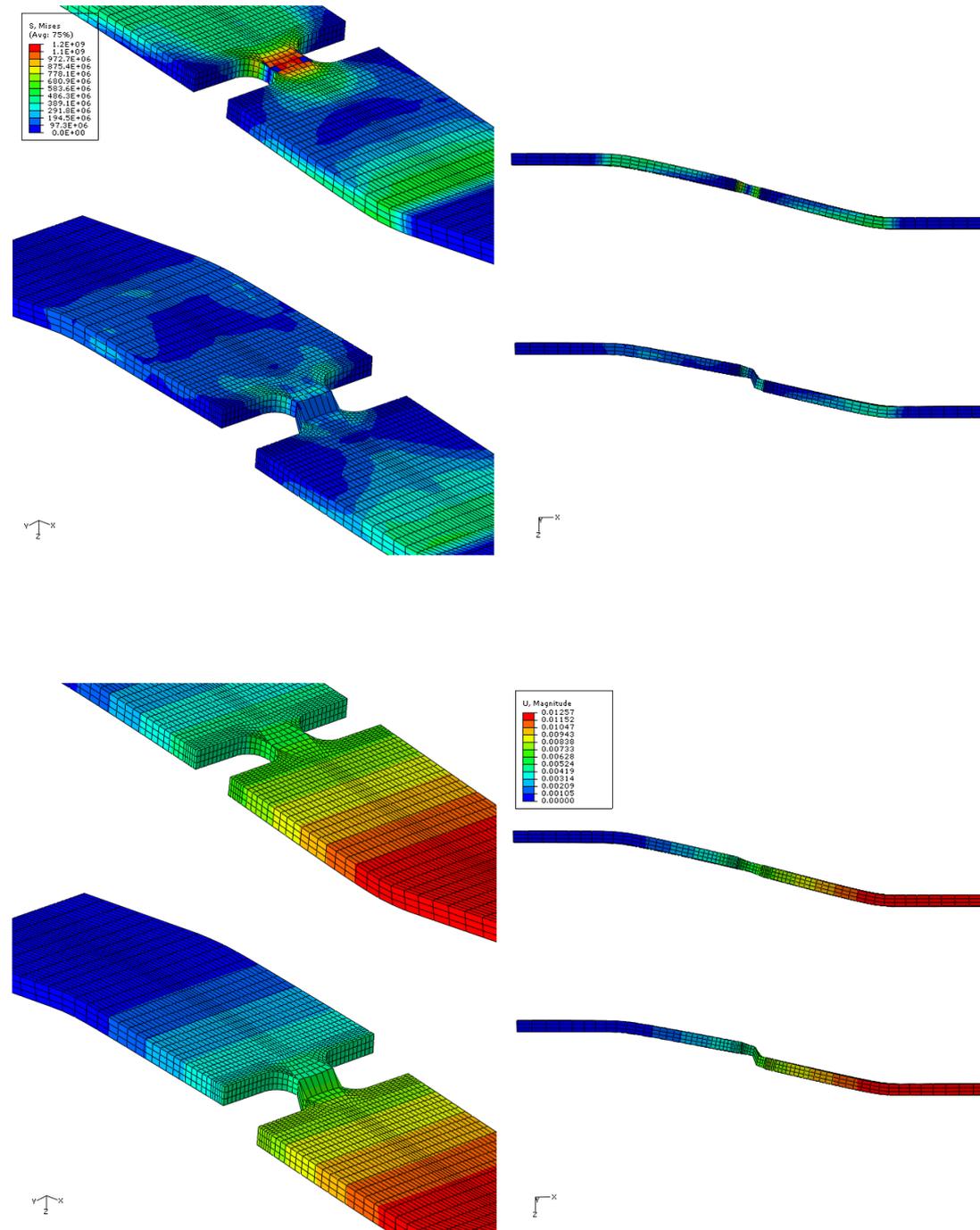
1 ENSAYO DE CORTADURA

A continuación se muestra el mapa de tensiones y el mapa de desplazamientos verticales para distintos instantes de tiempo.

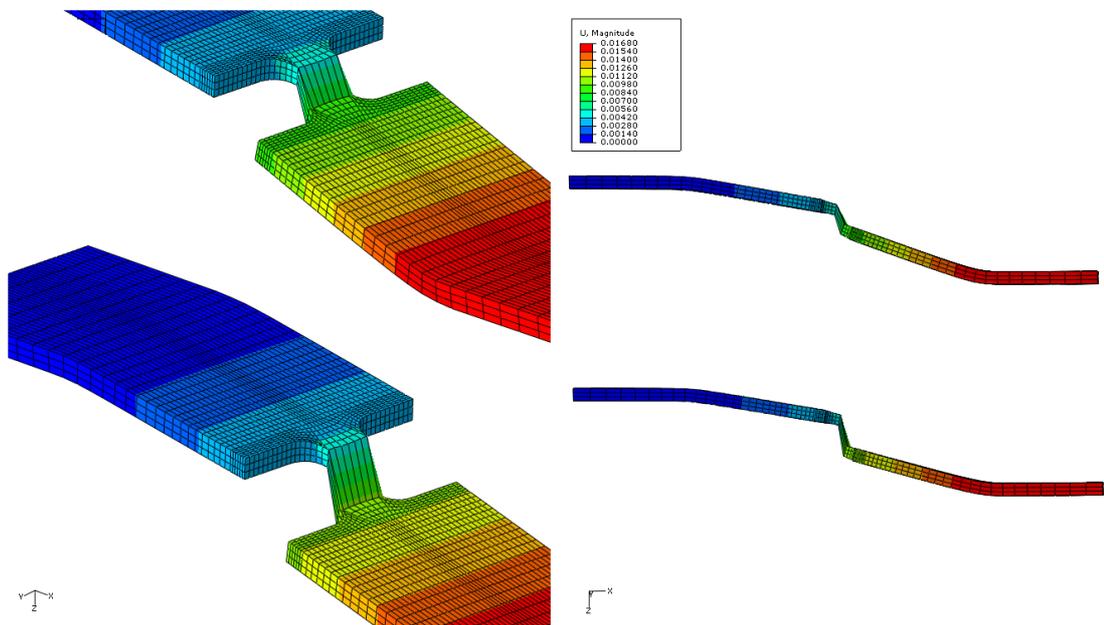
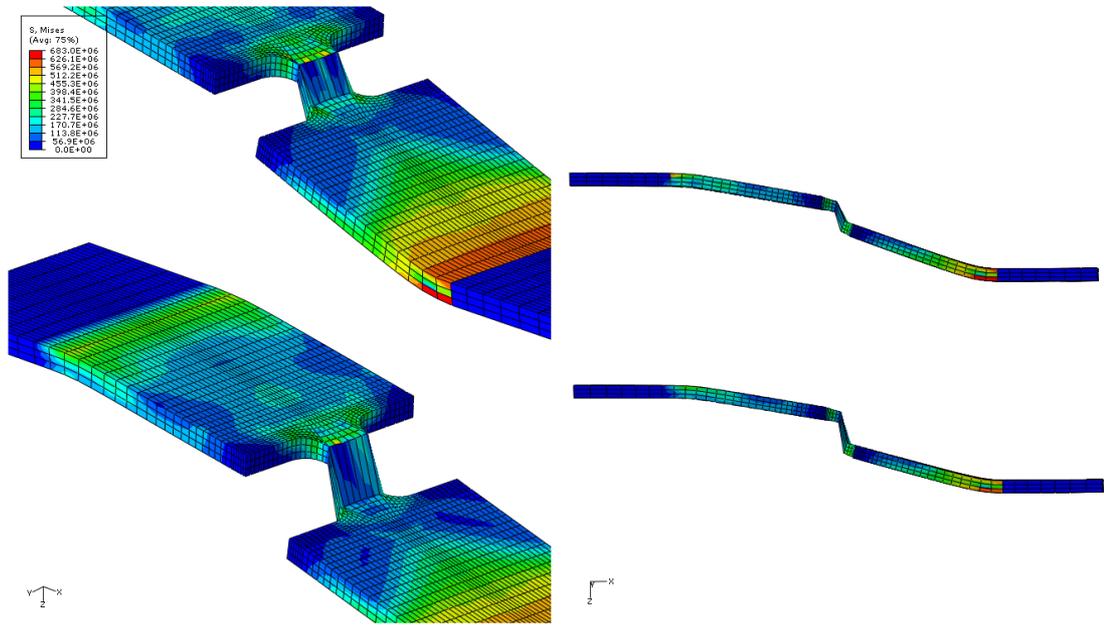
Desplazamiento de cortadura igual a 8 mm. Límite del ensayo.



Desplazamiento de cortadura igual a 12,5 mm. Rotura del segundo ligamento.



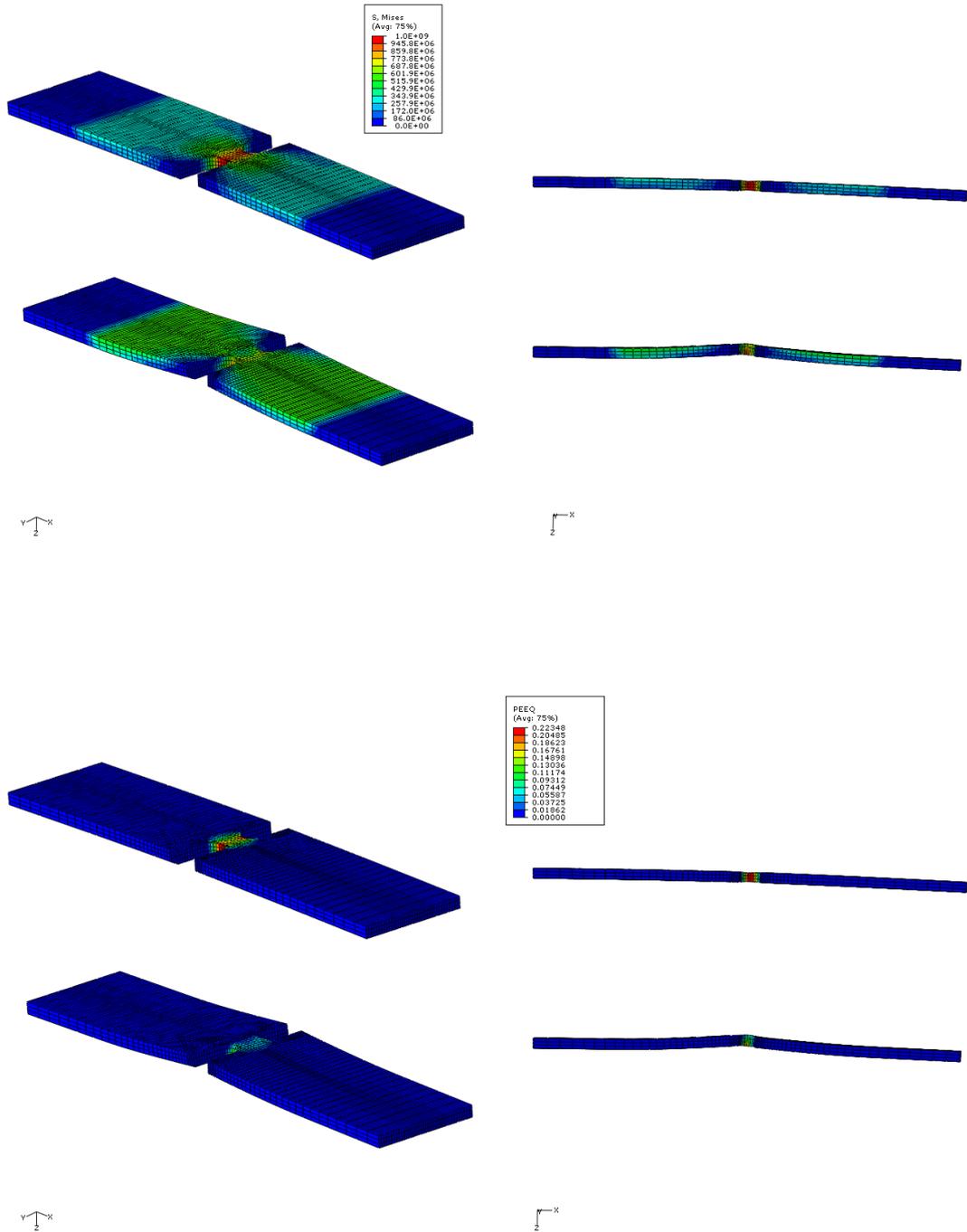
Desplazamiento de cortadura igual a 16,8 mm. Ambos ligamentos han roto.



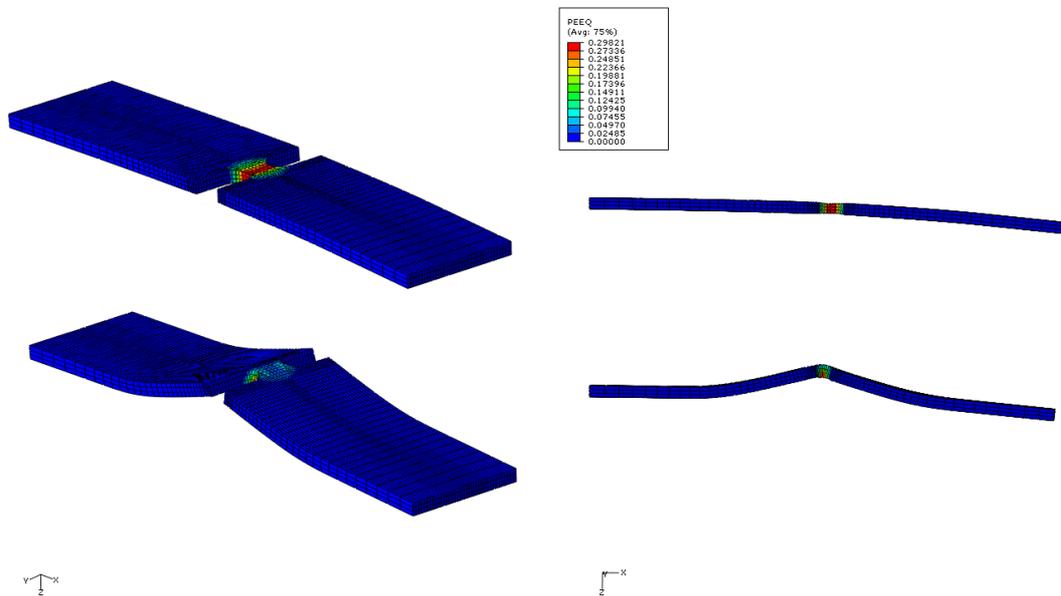
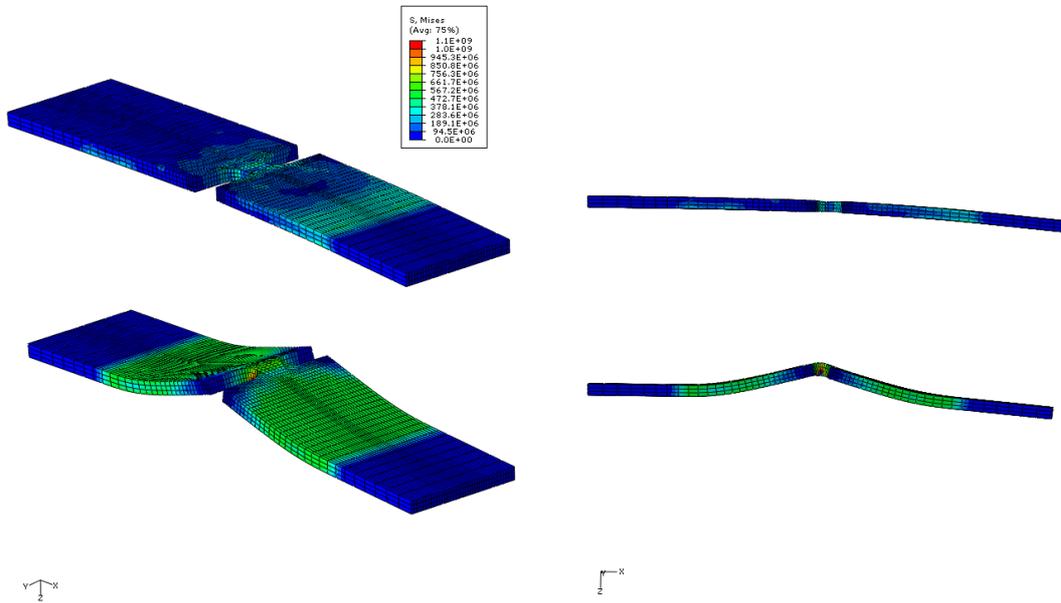
2 ENSAYO DE FLEXIÓN

Las imágenes muestran el mapa de tensiones y la deformación plástica equivalente para distintos ángulos de flexión.

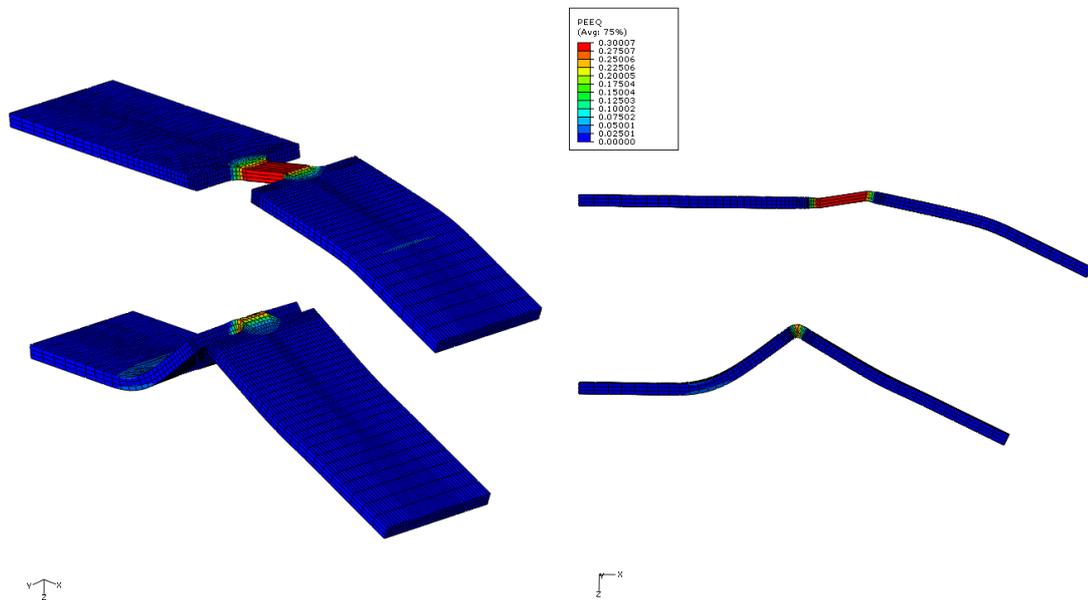
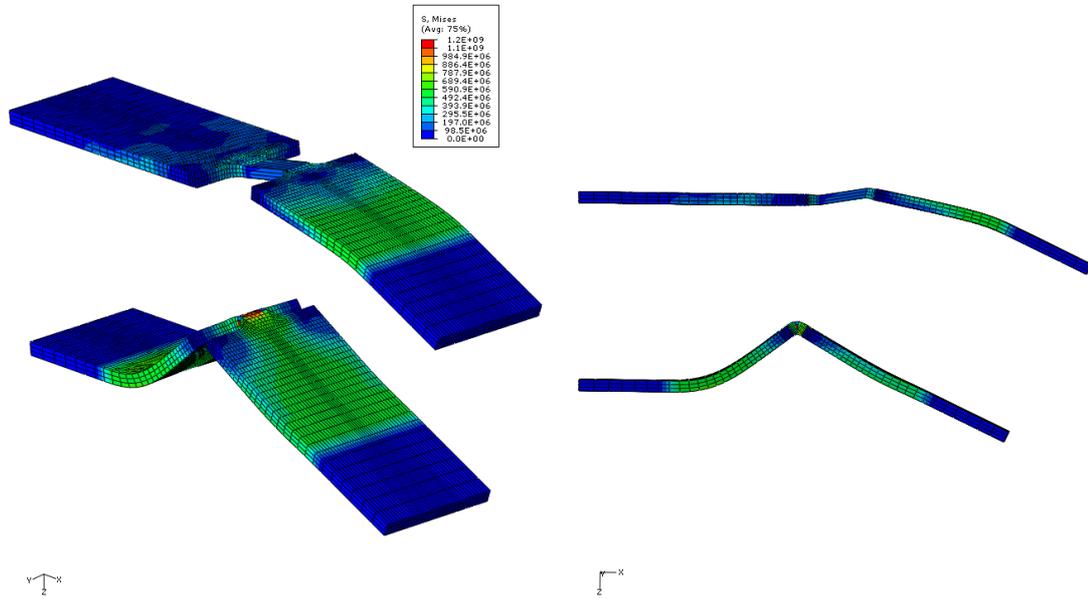
Ángulo de flexión igual a 2 grados.

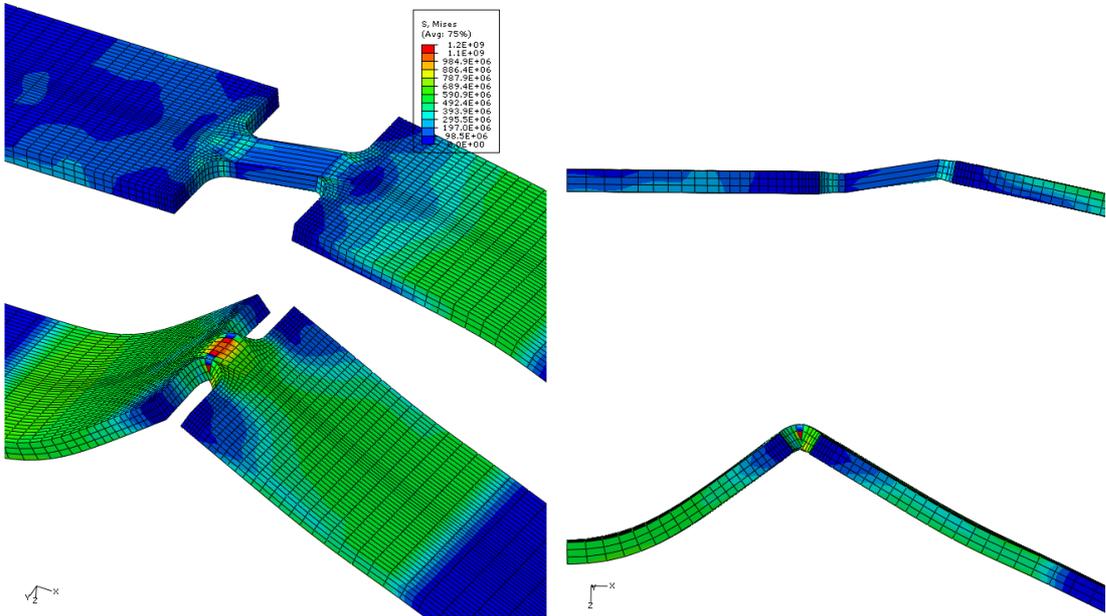


Ángulo de flexión igual a 5 grados.



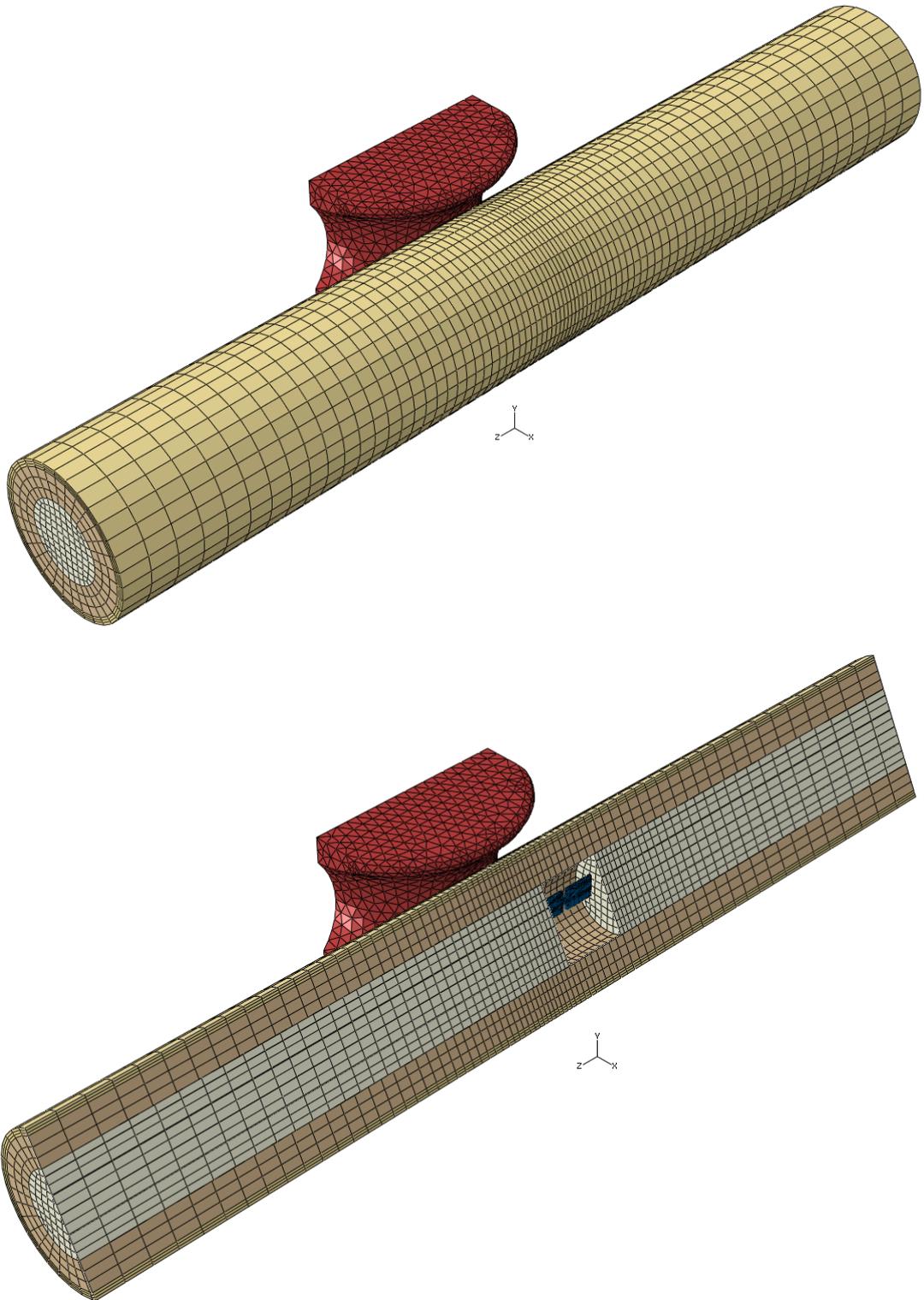
Ángulo de flexión igual a 23 grados. Rotura de ambos ligamentos.

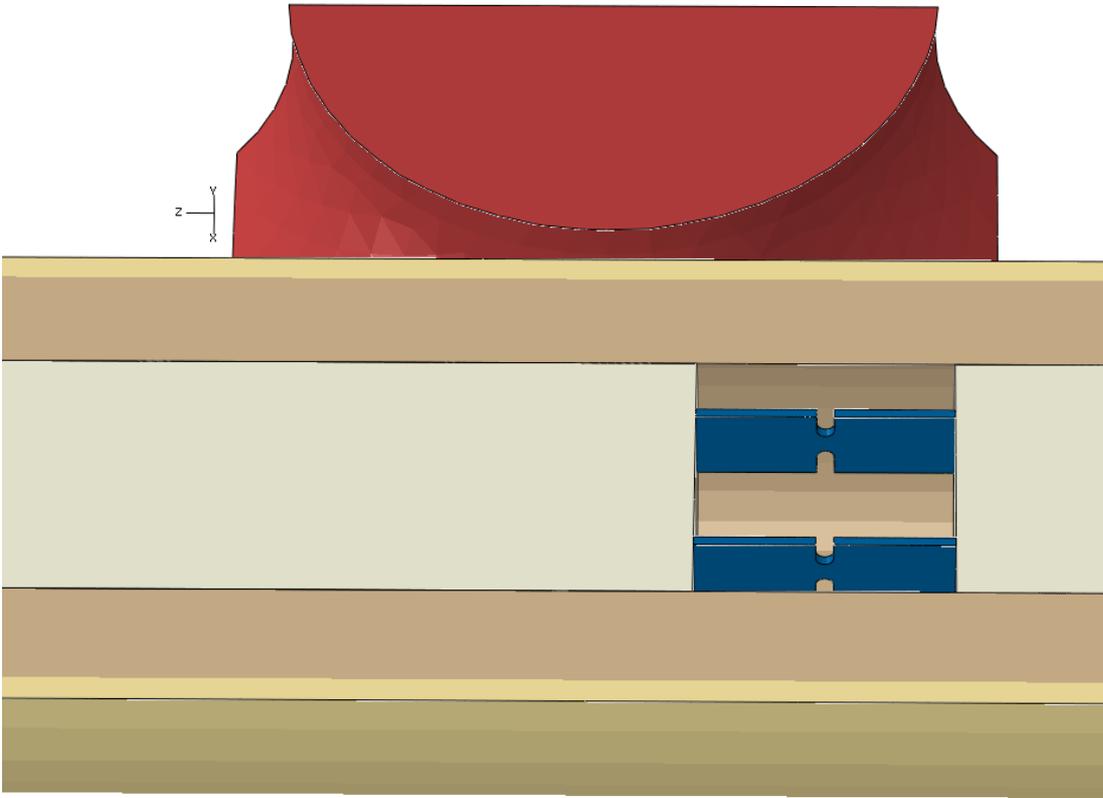
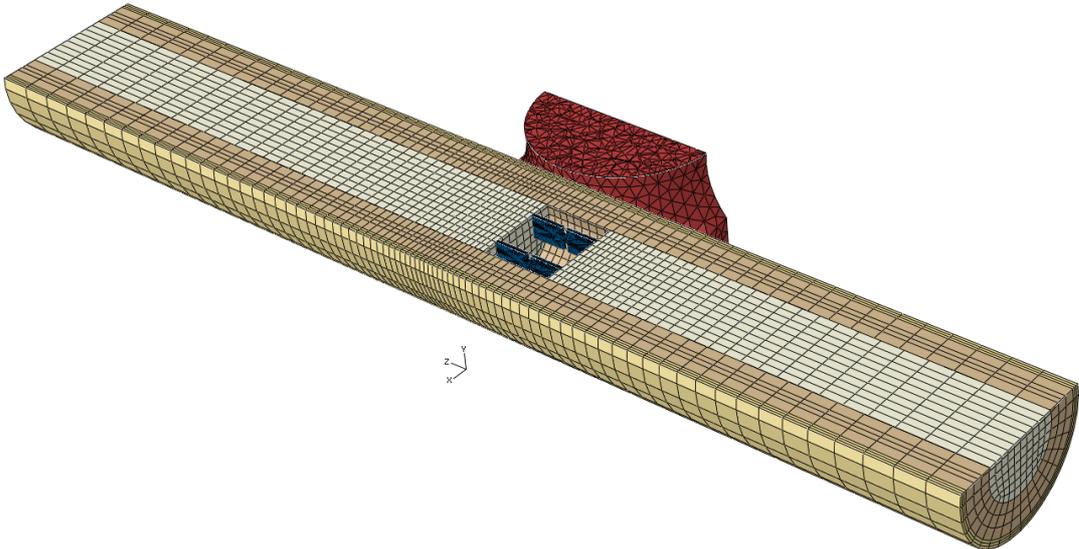




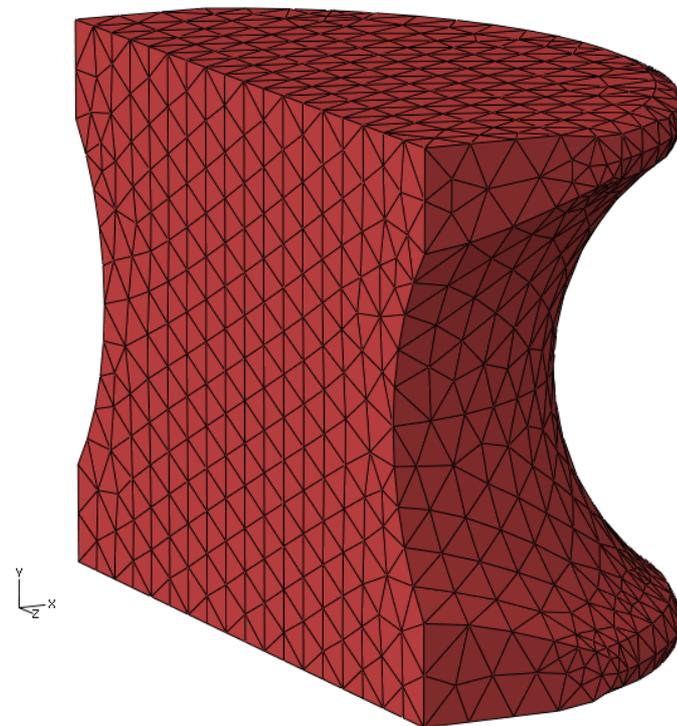
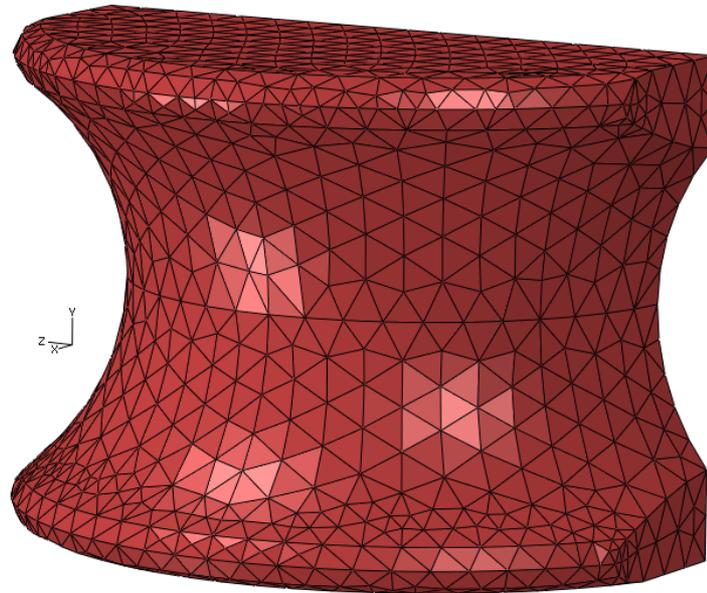
3 ENSAYO DINÁMICO

3.1 Modelo FEM del Impactador



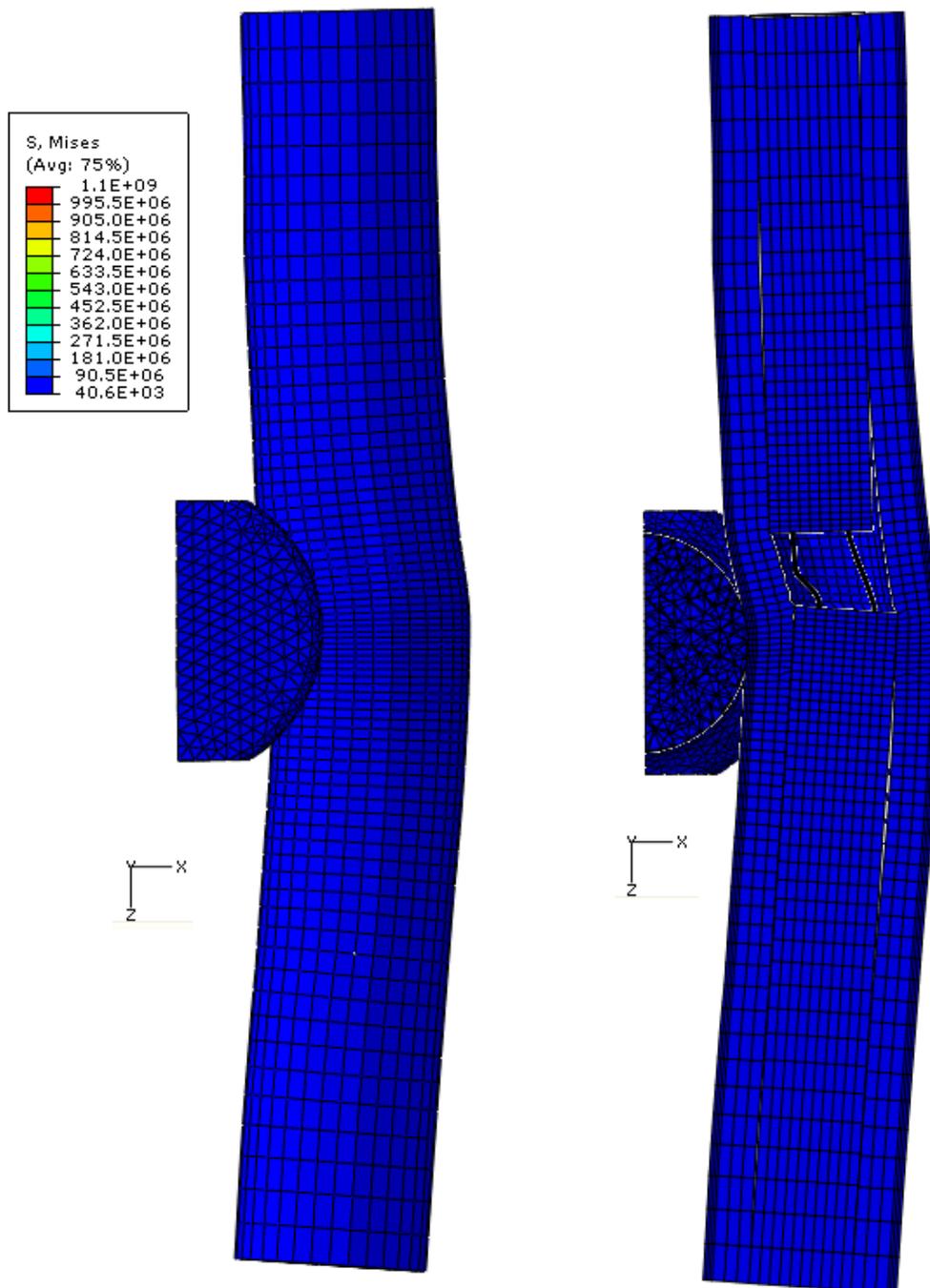


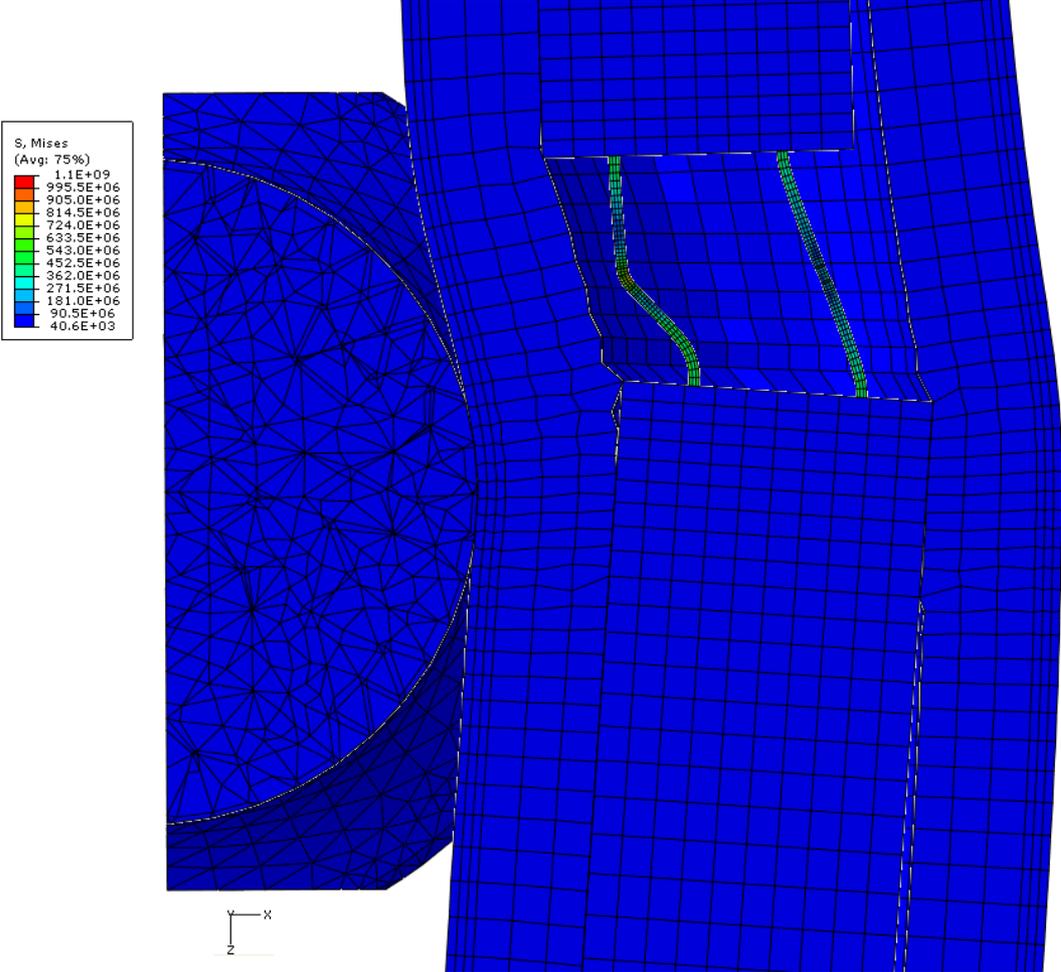
3.2 Modelo FEM del impactador de certificación



3.3 Resultados

Ángulo de flexión total igual a 6 grados.





Ángulo de flexión mayor a 8 grados. Los ligamentos han roto.

