

# Convexidad y la desigualdad de Brunn-Minkowski



**Alba Pardo Ortiz**

Trabajo de fin de grado en Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: David Alonso Gutiérrez  
Jesús Bastero Eleizalde  
Julio de 2016



# Prólogo

La convexidad es una noción situada entre la geometría, el análisis y la matemática discreta. Aunque algunos de los conocimientos de la geometría convexa ya eran conocidos por los filósofos griegos, se convirtió en una rama independiente en matemáticas al final del siglo XIX, fundamentalmente, debido al trabajo de Hermann Minkowski. A mediados del siglo XX aparecieron numerosas relaciones con diferentes áreas de las matemáticas así como con otras disciplinas, por ejemplo, en análisis funcional, teoría de la probabilidad, investigación operativa, teoría de control, teoría de códigos, cristalografía, etc. En particular, la convexidad aparece de forma natural en el análisis funcional ya que, como veremos, hay una relación biyectiva entre cuerpos convexos simétricos y normas en espacios de dimensión finita.

El objetivo principal del trabajo es estudiar la desigualdad de Brunn-Minkowski para conjuntos convexos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$ . Se trata de una desigualdad que relaciona medidas de Lebesgue de conjuntos convexos con la medida de su suma en el espacio euclídeo, cuya versión original fue dada a finales del siglo XIX. En las últimas décadas, la teoría de cuerpos convexos ha evolucionado considerablemente y la desigualdad de Brunn-Minkowski ha mantenido su interés debido a sus aplicaciones y conexiones con otros campos.

La historia de la desigualdad de Brunn-Minkowski comienza con los estudios de Brunn, quien la formuló para 2 y 3 dimensiones en 1887. A finales del siglo XIX y principios del XX la geometría se centraba en sólo 2 y 3 dimensiones. Pocos años más tarde, Minkowski la extendió al caso  $n$ -dimensional, manteniéndose válida la demostración dada por Brunn, y proporcionó las condiciones necesarias para las cuales se cumplía igualdad. Se han dado muchas otras demostraciones de la desigualdad, aquí se presentarán tres de ellas. Primero se estudiará la demostración original, basada en el principio de concavidad de Brunn y que se obtiene como consecuencia de un proceso de simetrizaciones de Steiner. La siguiente es por inducción en la dimensión del espacio y es debida a Kneser y Süss. La última será una consecuencia de la desigualdad de Prékopa-Leindler, una desigualdad funcional.

Una de las consecuencias más populares de la desigualdad de Brunn-Minkowski es la desigualdad isoperimétrica. El problema isoperimétrico clásico data de la antigüedad, aquí lo enunciaremos como: *'Entre todos los cuerpos de un volumen dado la bola euclídea es el de mínima superficie'*. También introduciremos, como otra aplicación, la desigualdad de Blaschke-Santaló, que sostiene que para todos los cuerpos convexos simétricos en  $\mathbb{R}^n$  el volumen producto, cantidad que definiremos más adelante, se maximiza cuando el cuerpo convexo considerado es la bola euclídea. Vemos así que la bola euclídea es extremal en distintos sentidos, por un lado es el cuerpo con mínima superficie de un volumen prefijado y por otro lado es el que maximiza el volumen producto entre todos los cuerpos convexos.



# Abstract

The aim of this paper is to introduce the Brunn-Minkowski inequality for convex sets, in its different ways. We will focus our study in  $\mathbb{R}^n$  and the euclidean metric. Three proofs will be shown, two for convex bodies and the other one, in general, for any pair of non-empty Borel sets. To do that, we will need to define some ideas like the support function for convex bodies, the Prékopa-Leindler's inequality or the Steiner symmetrization.

First, we are going to introduce some basic notions in convexity like convex sets, Minkowski functional, convex bodies, the support function or convex functions, and some interesting results. We will study under which conditions a convex set defines a norm in  $\mathbb{R}^n$  and the other way around, the existence of a minimal distance point in a convex set for every element in  $\mathbb{R}^n$  and the existence of a support hiperplane through each boundary point of a convex body.

Once we have defined this items, we will introduce the Brunn-Minkowski inequality as follows:

**Theorem. Brunn-Minkowski inequality.** *The following are equivalent:*

1.  $|A|^{1-\lambda}|B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|$ ,  $\forall A, B$  non-empty convex sets in  $\mathbb{R}^n$  and  $0 \leq \lambda \leq 1$ .
2.  $|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A + B|^{\frac{1}{n}}$ ,  $\forall A, B$  non-empty convex sets in  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $(1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}} \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}}$ ,  $\forall A, B$  non-empty convex sets in  $\mathbb{R}^n$  and  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Notice that the first expression does not depend on the dimension of the space.

After proving that the three expressions of Brunn-Minkowski inequality are equivalent we will show that they are true. The first proof given is the original one, which makes use of Brunn's concavity principle and it is proved by using sucesive Steiner symmetrizations. So, we introduce what a Steiner symmetrization is before.

**Definition.** Let  $K$  be a convex body in  $\mathbb{R}^n$  and  $e_n$  the last vector of the canonical basis of  $\mathbb{R}^n$ . The *Steiner symmetrization* of  $K$  in the direction of  $e_n$  is defined as:

$$S_{e_n}(K) = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n : x \in P_{e_n^\perp}(K), |t| \leq \frac{1}{2}|K \cap (x + \langle e_n \rangle)| \right\}$$

In general, the Steiner symmetrization is defined for every  $u \in S^{n-1}$  from the above as  $S_u(K) = U^\perp(S_{e_n}(UK))$  with  $U \in O(n)$  such that  $U(u) = e_n$ . Notice that  $S_u(K)$  does not depend on  $U \in O(n)$ .

We will make use of two previous results, which we will not prove, to give this proof of Brunn-Minkowski inequality, the fact that applying successive symmetrizations we approach the Euclidean ball and Brunn's concavity principle.

**Theorem.** *Let  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  be a convex body such that  $|K| = |\mathbb{B}_n|$ . Then, there exists a sequence of vectors  $\{u_j\}_{j=1}^\infty \in S^{n-1}$  such that, setting  $K_j = S_{u_j}(K_{j-1}) \Rightarrow K_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathbb{B}_n$  in the Hausdorff metric. Where  $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$  is the Euclidean ball of radius one centered at zero.*

**Theorem. Brunn's concavity principle.** Let  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  be a convex body and  $F$  be a  $k$ -dimensional subspace. Then, the function

$$\begin{aligned} f: F^\perp &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |K \cap (F+x)|^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

is concave on its support.

The theorem above helps us to prove Brunn's concavity principle and we use it to build an appropriate  $f$ , that brings us to

$$(1-\lambda)|K|^{\frac{1}{n}} + \lambda|T|^{\frac{1}{n}} \leq |(1-\lambda)K + \lambda T|^{\frac{1}{n}}$$

for every  $K, T \in \mathbb{R}^n$  convex bodies and  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

The next proof we will study is obtained by induction on the dimension of the space and is only valid for convex bodies. Moreover, we are going to characterize the equality case.

For the last one, we introduce the Prékopa-Leindler inequality. In this case, the inequality holds for two arbitrary non-empty compact Borel sets in  $\mathbb{R}^n$ .

**Theorem. Prékopa-Leindler's inequality** Let  $f, g, h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  be three non-negative measurable functions and let  $0 \leq \lambda \leq 1$  such that  $f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda \leq h(z)$  whenever  $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ . Then,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz.$$

Applying this inequality for  $f = \chi_A$ ,  $g = \chi_B$  and  $h = \chi_{(1-\lambda)A + \lambda B}$ , the characteristic functions of the non-empty Borel sets  $A, B, (1-\lambda)A + \lambda B \in \mathbb{R}^n$ , we obtain

$$|A|^{1-\lambda}|B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|.$$

To sum up, it is possible to apply the Brunn-Minkowski inequality to obtain other important geometric inequalities. We will study the isoperimetric and the Blaschke-Santaló inequalities. The first one, shows that among all convex bodies of a given volume the Euclidean ball is the one with minimal surface area. Blaschke-Santaló proves that the volume product,  $s(K)$ , of a symmetric convex body  $K \in \mathbb{R}^n$ , defined as follows:

$$s(K) = |K||K^o|$$

is maximized considering the Euclidean ball.

# Índice general

|  |            |
|--|------------|
| <b>Prólogo</b>   | <b>iii</b> |
| <b>Abstract</b>  | <b>v</b>   |
| <b>1 Introducción a la convexidad</b>  | <b>1</b>   |
| 1.1 Conjuntos convexos . . . . .   | 1          |
| 1.2 Funciones convexas . . . . .   | 6          |
| 1.3 Proyección métrica . . . . .   | 7          |
| 1.4 Soporte y separación . . . . .   | 10         |
| 1.4.1 Soporte . . . . .  | 10         |
| 1.4.2 Separación . . . . .   | 11         |
| 1.5 Métrica de Hausdorff . . . . .   | 12         |
| <b>2 Desigualdad de Brunn-Minkowski</b>  | <b>13</b>  |
| 2.1 Desigualdad de Brunn-Minkowski . . . . .   | 13         |
| 2.2 Simetrización de Steiner . . . . .   | 14         |
| 2.3 Demostración de la desigualdad de Brunn-Minkowski con simetrizaciones de Steiner . | 16         |
| 2.4 Demostración por inducción sobre la dimensión . . . . .                            | 18         |
| 2.5 Desigualdad de Prékopa-Leindler . . . . .  | 20         |
| <b>3 Aplicaciones de la desigualdad de Brunn-Minkowski</b>                             | <b>23</b>  |
| 3.1 Desigualdad isoperimétrica . . . . .   | 23         |
| 3.2 Desigualdad de Blaschke-Santaló . . . . .  | 24         |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>27</b>  |





# Capítulo 1

## Introducción a la convexidad

Vamos a centrar nuestro estudio en  $\mathbb{R}^n$ . Denotaremos por  $\mathbb{B}_n$  a la bola euclídea centrada en el cero y de radio unidad, es decir,  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ , y por  $S^{n-1}$  a la esfera centrada en el cero y de radio unidad,  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ . Habitualmente utilizaremos  $\|\cdot\|$  para referirnos a la norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ , en lugar de  $\|\cdot\|_2$ .

Presentamos en este capítulo los conceptos básicos necesarios para abordar la desigualdad de Brunn-Minkowski en conjuntos convexos, que será el objetivo principal. Introducimos los conjuntos, funciones y cuerpos convexos y normas y funciones definidas a partir de estos que nos serán útiles después.

### 1.1 Conjuntos convexos

**Definición.** Un conjunto  $A$  en  $\mathbb{R}^n$  es *convexo* si  $\forall x, y \in A$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ , se tiene que  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$ .

**Observación 1.1.1.** *Las intersecciones de conjuntos convexos son convexas. Esto se debe a que si tomamos  $A, B$  convexas con  $x, y \in A \cap B$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , en particular,  $x, y \in A$  y como  $A$  es convexo se tiene que  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$ . Del mismo modo  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in B$ . Por tanto,  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A \cap B$ .*

**Definición.** La *suma de Minkowski* de dos conjuntos  $A, B$  en  $\mathbb{R}^n$  se define como  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  y el producto por un escalar  $\mu \in \mathbb{R}$  como  $\mu A = \{\mu a : a \in A\}$ .

**Observación 1.1.2.** *Si  $A, B$  son dos conjuntos convexos, entonces  $A + B$  y  $\mu A$  son convexas.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in A + B$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Existen  $a, a' \in A, b, b' \in B$  tal que  $x = a + b, y = a' + b'$ . Entonces,  $(1 - \lambda)x + \lambda y = (1 - \lambda)(a + b) + \lambda(a' + b') = (1 - \lambda)a + \lambda a' + (1 - \lambda)b + \lambda b' \in A + B$ . Ya que, como  $A$  y  $B$  son convexas  $(1 - \lambda)a + \lambda a' \in A$  y  $(1 - \lambda)b + \lambda b' \in B$ .

Sean ahora  $x, y \in \mu A$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Entonces,  $x = \mu a, y = \mu a'$  para algunos  $a, a' \in A$ , así  $(1 - \lambda)x + \lambda y = (1 - \lambda)\mu a + \lambda \mu a' = \mu[(1 - \lambda)a + \lambda a']$  y como  $A$  es convexo,  $(1 - \lambda)a + \lambda a' \in A$  por lo que  $\mu[(1 - \lambda)a + \lambda a'] \in \mu A$ .  $\square$

**Observación 1.1.3.** *Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  un conjunto cualquiera y  $\lambda, \mu > 0$ . Entonces,  $(\lambda + \mu)A \subseteq \lambda A + \mu A$ . Ya que si  $x \in (\lambda + \mu)A$ , entonces existe  $a \in A$  tal que  $x = (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \in \lambda A + \mu A$ .*

La siguiente proposición muestra que la convexidad es una propiedad que garantiza la igualdad en la relación anterior.

**Proposición 1.1.4.** *Sea  $A$  un conjunto convexo en  $\mathbb{R}^n$  y  $\lambda, \mu > 0$ . Entonces,  $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$ .*

*Demostración.* Un contenido es trivial por la observación anterior. Para el otro contenido, sea  $A$  convexo,  $x \in \lambda A + \mu A$ , entonces existen  $a, b \in A$  tal que  $x = \lambda a + \mu b$  y

$$x = (\lambda + \mu) \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} a + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b \right)$$

Como  $\lambda, \mu > 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda + \mu} > 0$  y  $\lambda < \lambda + \mu \Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda + \mu} < 1$ ,  $1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ . Entonces  $\left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} a + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b \right) \in A$  por ser  $A$  convexo y así  $x \in (\lambda + \mu)A$ .  $\square$

A continuación vamos a relacionar las normas con los conjuntos convexos.

**Definición.** Una *norma* en  $\mathbb{R}^n$  es una aplicación  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  cumpliendo :

1.  $\|x\| \geq 0$  y  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Definición.** Toda norma en  $\mathbb{R}^n$  define una distancia como  $d(x, y) = \|x - y\|$ . De la estructura de la norma se deduce:

1.  $d(x, y) \geq 0$  y  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
2.  $d$  es simétrica, es decir,  $d(x, y) = d(y, x)$ .
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Vamos a ver que las normas en  $\mathbb{R}^n$  están determinadas por los conjuntos convexos compactos y simétricos con 0 en su interior. Es decir, dada una norma queda definido un conjunto de esta forma y viceversa, todo convexo compacto y simétrico con 0 en su interior define una norma en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición.** Decimos que  $A$  es un conjunto *simétrico* si  $x \in A$  implica  $-x \in A$ .

**Proposición 1.1.5.** Sea  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$  y su bola unidad  $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ . Entonces,  $\mathbb{B}$  es convexa y simétrica. Además,  $\mathbb{B}$  es cerrada y 0 es un punto interior respecto a la topología de la norma  $\|\cdot\|$ .

*Demostración.* Para demostrar la convexidad tomamos  $x, y \in \mathbb{B}$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Entonces  $\|x\| \leq 1$  y  $\|y\| \leq 1$ ,

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| \leq (1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \leq (1 - \lambda) + \lambda = 1$$

Así,  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \mathbb{B}$  y  $\mathbb{B}$  es convexo.

La simetría de  $\mathbb{B}$  se sigue de la propiedad de la norma  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  para  $\alpha = -1$ . Entonces si  $x \in \mathbb{B}$  se tiene que  $-x \in \mathbb{B}$ .

Observamos que  $\|\cdot\|$  es continua, es decir,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \left| \|x\| - \|y\| \right| < \varepsilon$ . Por la desigualdad triangular,  $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$ , tomando  $\delta = \varepsilon$  vemos que la norma  $\|\cdot\|$  es continua. Como  $\mathbb{B} = \|\cdot\|^{-1}\{[0, 1]\}$  entonces,  $\mathbb{B}$  es cerrado por ser la preimagen de un cerrado por una función continua.

Como  $0 \in \{x : \|x\| < 1\}$ , conjunto abierto en  $\mathbb{B}$ , tenemos que 0 es un punto interior de  $\mathbb{B}$ .  $\square$

Veamos que si  $A$  es un conjunto convexo compacto y simétrico en  $\mathbb{R}^n$  con 0 punto interior, entonces existe, paralelo a cualquier vector  $u \in S^{n-1}$ , un segmento cerrado y acotado de longitud no nula desde el cero hasta la frontera de  $A$ , así podemos definir un funcional  $\|\cdot\|_A$  en  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente manera:

$$\|x\|_A := \inf\{\xi \in \mathbb{R}^+ : x \in \xi A\}.$$

**Definición.** El funcional  $\|\cdot\|_A$  se denomina *funcional de Minkowski* de  $A$ .

La siguiente proposición nos da un resultado recíproco a la proposición 1.1.5.

**Proposición 1.1.6.** Si  $A$  es un conjunto convexo compacto y simétrico de  $\mathbb{R}^n$  con  $0$  en el interior de  $A$ , entonces  $\|\cdot\|_A$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Veamos que es norma a través de la definición.

1. Por definición  $\|x\|_A \geq 0$ , ya que  $\xi \in \mathbb{R}^+$ . Si  $x \neq 0$ , entonces el rayo que une  $0$  con  $x$  interseca a  $A$  en un segmento  $[0, \alpha x]$  con  $0 < \alpha < +\infty$ . Por tanto,  $\|x\|_A = \alpha^{-1}$  y así  $\|x\|_A > 0$ . Si  $x = 0$ , entonces  $\|x\|_A = \inf\{\xi \in \mathbb{R}^+ : 0 \in \xi A\} = 0$ .

2. La propiedad  $\|\beta x\|_A = |\beta| \|x\|_A \ \forall \beta \in \mathbb{R}$  se sigue de la definición y simetría de  $A$ . Sea  $\beta \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|\beta x\|_A &= \inf\{\xi \in \mathbb{R}^+ : \beta x \in \xi A\} = \inf\left\{\xi \in \mathbb{R}^+ : x \in \frac{\xi}{\beta} A\right\} \\ &= \inf\{|\beta|\xi \in \mathbb{R}^+ : x \in \xi A\} = |\beta| \inf\{\xi \in \mathbb{R}^+ : x \in \xi A\} = |\beta| \|x\|_A \end{aligned}$$

Si  $\beta = 0$ , trivial.

3. Queda por ver que se cumple  $\|x+y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ . Si  $x = 0$  ó  $y = 0$  se cumple la igualdad. Para  $x, y \neq 0$  tomamos

$$x' = \frac{x}{\|x\|_A}, \quad y' = \frac{y}{\|y\|_A}$$

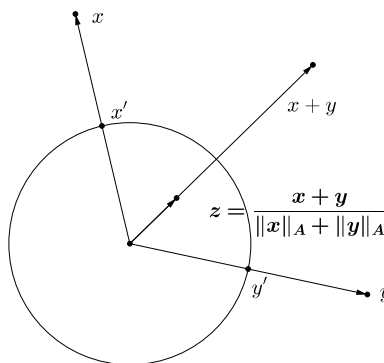
puntos de la frontera de  $A$  y como  $A$  es cerrado, están en  $A$ . Entonces, definimos

$$z := \frac{\|x\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} x' + \frac{\|y\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} y'$$

y como  $A$  es convexo  $z \in \frac{\|x\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} A + \frac{\|y\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} A$ .

Por la Proposición 1.1.4, se tiene que  $z \in A$  y así  $\|z\|_A \leq 1$ . Como,

$$z = \frac{\|x\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} x' + \frac{\|y\|_A}{\|x\|_A + \|y\|_A} y' = \frac{x+y}{\|x\|_A + \|y\|_A}$$



tomando normas obtenemos la desigualdad  $\left\| \frac{x+y}{\|x\|_A + \|y\|_A} \right\|_A \leq 1 \Rightarrow \|x+y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A$ .

□

De las proposiciones 1.1.5 y 1.1.6 se sigue que hay una correspondencia biyectiva entre las normas en  $\mathbb{R}^n$  y los conjuntos en  $\mathbb{R}^n$  convexos compactos y simétricos con 0 punto interior.

Notar que el funcional de Minkowski sigue un orden inverso, si  $A \subseteq B$  entonces,  $\|\cdot\|_A \geq \|\cdot\|_B$ . Además,  $\|\cdot\|_{\alpha A} = \alpha^{-1} \|\cdot\|_A \forall \alpha > 0$ .

**Definición.** Un *cuerpo convexo* es un conjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  que es compacto y de interior no vacío. Denotamos por  $\mathcal{K}_n$  al conjunto de los cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$ .

A partir de ahora, vamos a centrar nuestro estudio en los cuerpos convexos.

**Definición.** Decimos que  $K \in \mathcal{K}_n$  es *centrado* si el baricentro dado por

$$\text{bar}(K) = \frac{1}{|K|} \int_K x dx$$

de  $K$  está en el origen. Esta integral vectorial es la integral componente a componente de  $x$ . Si el baricentro de  $K$  es 0, se cumple que  $\int_K \langle x, \theta \rangle dx = 0$  para  $\theta \in S^{n-1}$ .

**Definición.** Definimos la *función soporte* de un cuerpo convexo  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  por

$$h_K(x) = \sup\{\langle x, y \rangle : y \in K\}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Notar que  $h_K$  es positivamente homogénea  $h_K(\lambda x) = \lambda h_K(x), \forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Además es convexa. Más adelante, cuando hablemos de funciones convexas, se dará una demostración, en la proposición 1.2.1.

**Observación 1.1.7.** Si  $K$  y  $T$  son dos cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $K \subseteq T \Rightarrow h_K \leq h_T$ . Ya que,  $h_K(x) = \sup\{\langle x, y \rangle : y \in K \subseteq T\} \leq \sup\{\langle x, y \rangle : y \in T\} = h_T(x)$ .

El recíproco también es cierto, es decir, si  $h_K(x) \leq h_T(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $K \subseteq T$ . Para probarlo es necesario introducir conceptos de separación, la demostración se dará en la proposición 1.4.4.

**Observación 1.1.8.** Sean  $K$  y  $T$  dos cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $h_{K+T}(x) = h_K(x) + h_T(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ . En efecto, para  $y \in K+T$  existen  $y_1 \in K, y_2 \in T$  tales que  $y = y_1 + y_2$ .

$$\begin{aligned} h_{K+T}(x) &= \sup\{\langle x, y \rangle : y \in K+T\} = \sup\{\langle x, y_1 + y_2 \rangle : y_1 \in K, y_2 \in T\} = \\ &= \sup\{\langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle : y_1 \in K, y_2 \in T\} = \\ &= \sup\{\langle x, y_1 \rangle : y_1 \in K\} + \sup\{\langle x, y_2 \rangle : y_2 \in T\} = h_K(x) + h_T(x) \end{aligned}$$

**Definición.** Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$  con 0 punto interior de  $K$ . Denotaremos *función radial* a  $\rho_K(x) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda x \in K\}, \forall x \neq 0$ .

**Observación 1.1.9.** Notar que la función radial y el funcional de Minkowski de un cuerpo convexo  $K$  quedan inversamente relacionados  $\rho_K(x) = \frac{1}{\|x\|_K} \forall x \neq 0$ , ya que

$$\begin{aligned} \rho_K(x) &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda x \in K\} = \sup\left\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : x \in \frac{1}{\lambda} K\right\} = \\ &= \sup\left\{\frac{1}{\xi} \in \mathbb{R}^+ : x \in \xi K\right\} = \frac{1}{\inf\{\xi \in \mathbb{R}^+ : x \in \xi K\}} = \frac{1}{\|x\|_K}. \end{aligned}$$

Ahora vamos a introducir el concepto de polar de un cuerpo convexo, un conjunto muy importante en convexidad que está relacionado con la dualidad. Aparecerá también más adelante cuando hablemos de la desigualdad de Blaschke-Santaló.

**Definición.** Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$  con 0 punto interior de  $K$ . El *polar* de  $K$  es el conjunto

$$K^o = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq 1 \right\}.$$

Observar que para  $\lambda > 0$  se tiene que  $(\lambda K)^o = \frac{1}{\lambda} K^o$  y que si  $K \subseteq T$ , entonces  $T^o \subseteq K^o$  para todo par de cuerpos convexos con 0 punto interior.

**Observación 1.1.10.** Notar que  $(T(K))^o = (T^t)^{-1}(K^o)$  para todo  $T \in GL(n)$  isomorfismo. Puesto que,

$$\begin{aligned} (T(K))^o &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall y \in T(K)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, T(y) \rangle \leq 1 \ \forall y \in K\} = \\ &= \{(T^t)^{-1}T^t(x) \in \mathbb{R}^n : \langle T^t(x), y \rangle \leq 1 \ \forall y \in K\} \\ &= \{(T^t)^{-1}(x_1) \in \mathbb{R}^n : \langle x_1, y \rangle \leq 1 \ \forall y \in K\} = (T^t)^{-1}(K^o) \end{aligned}$$

**Observación 1.1.11.** Si  $K$  es un cuerpo convexo simétrico entonces  $K^o$  es la bola unidad de la norma dual de  $\|x\|_K$ . Además, el dual de la bola euclídea es la bola euclídea,  $\mathbb{B}_n^o = \mathbb{B}_n$ .

**Observación 1.1.12.** La función soporte de  $K$  coincide con el funcional de Minkowski de su polar, es decir,  $\|x\|_{K^o} = h_K(x)$ .

Ya que si  $\xi_0 = \|x\|_{K^o}$ , entonces  $x \in \xi_0 K^o$ , equivalentemente  $\frac{x}{\xi_0} \in K^o$ , es decir,  $\sup_{y \in K} \langle y, \frac{x}{\xi_0} \rangle \leq 1$ , o lo que es lo mismo  $h_K(x) = \sup_{y \in K} \langle x, y \rangle \leq \xi_0 = \|x\|_{K^o}$ . Por otro lado, si  $\xi_1 = h_K(x) = \sup_{y \in K} \langle x, y \rangle \Rightarrow \sup_{y \in K} \langle y, \frac{x}{\xi_1} \rangle = 1$ , en particular  $\frac{x}{\xi_1} \in K^o$ , es decir,  $x \in \xi_1 K^o$ . Entonces,  $h_K(x) = \xi_1 \geq \inf\{\xi \in \mathbb{R}^+ : x \in \xi K^o\} = \|x\|_{K^o}$ .

**Definición.** Denotaremos por  $\partial A$  a la frontera de  $A$ .

**Definición.** Llamaremos *volumen* de un conjunto  $A \in \mathbb{R}^n$  a su medida de Lebesgue y lo denotaremos por  $|A|$  ó  $Vol_n(A)$ .

**Observación 1.1.13.** Sea  $A$  un conjunto en  $\mathbb{R}^n$ , algunas de las propiedades de la medida de Lebesgue son:

- $|\lambda A| = \lambda^n |A| \ \forall \lambda > 0$ .
- $|x + A| = |A|, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- $|T(A)| = |\det T| |A|, \ \forall T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineal.

La integración en coordenadas polares es un método muy utilizado que nos permite expresar el volumen de un conjunto en términos de la función radial. Si  $f$  es una función integrable en  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = n |\mathbb{B}_n| \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} f(r\theta) dr d\sigma(\theta)$$

donde  $\sigma$  es la probabilidad uniforme en la esfera, definida por  $\sigma(A) = \frac{|C_A|}{|\mathbb{B}_n|}$ , con  $C_A = \left\{ x \in \mathbb{B}_n : \frac{x}{\|x\|_2} \in A \right\}$ . Esta es la única probabilidad en la esfera tal que  $\sigma(A) = \sigma(U(A)), \ \forall A \in S^{n-1}, \ \forall U \in O(n)$ . En particular, para  $f = \chi_K$ , función característica de un cuerpo convexo  $K$ ,

$$\begin{aligned} |K| &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x) dx = n |\mathbb{B}_n| \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} \chi_K(r\theta) dr d\sigma(\theta) = n |\mathbb{B}_n| \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_K} r^{n-1} dr d\sigma(\theta) \\ &= n |\mathbb{B}_n| \int_{S^{n-1}} \frac{1}{n} \rho_K^n d\sigma(\theta) = |\mathbb{B}_n| \int_{S^{n-1}} \rho_K^n d\sigma(\theta) \end{aligned}$$

y tenemos el siguiente resultado:

**Definición.** El *volumen* de un cuerpo convexo  $K$  con función radial continua, se expresa en coordenadas polares de la siguiente manera:

$$|K| = |\mathbb{B}_n| \int_{S^{n-1}} \rho_K^n(\theta) d\sigma(\theta)$$

donde  $\mathbb{B}_n$  es la bola unidad en  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.2 Funciones convexas

**Definición.** Sea  $f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Decimos que  $f$  es *convexa* si

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = -\infty\} = \emptyset, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\} \neq \mathbb{R}^n$$

y  $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Además decimos que una función  $f$  es *cóncava* si  $-f$  es convexa.

Como dejamos pendiente, veamos que la función soporte es convexa.

**Proposición 1.2.1.** La función soporte de un conjunto convexo  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ , definida por  $h_K(x) = \sup\{\langle x, y \rangle : y \in K\}$   $\forall x \in \mathbb{R}^n$  es convexa.

*Demostración.* Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ , por definición de función soporte:

$$\begin{aligned} h_K((1-\lambda)x + \lambda y) &= \sup\{\langle (1-\lambda)x + \lambda y, z \rangle : z \in K\} = \sup\{(1-\lambda)\langle x, z \rangle + \lambda\langle y, z \rangle : z \in K\} \leq \\ &\leq \sup\{(1-\lambda)\langle x, z \rangle : z \in K\} + \sup\{\lambda\langle y, z \rangle : z \in K\} = \\ &= (1-\lambda) \sup\{\langle x, z \rangle : z \in K\} + \lambda \sup\{\langle y, z \rangle : z \in K\} = (1-\lambda)h_K(x) + \lambda h_K(y). \end{aligned}$$

□

**Definición.** Dado un conjunto finito  $A = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $x$  es una *combinación convexa* de  $\{x_1, \dots, x_n\}$  si existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$  cumpliendo  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  tales que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ .

**Definición.** La *envoltura convexa* de un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es el conjunto de todas las combinaciones convexas de subconjuntos finitos de elementos de  $A$ .

**Definición.** Un conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice *simplex* si es envoltura convexa de  $n+1$  puntos afínmente independientes, denominaremos a estos puntos vértices. Es decir,  $S = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} : \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq n+1 \text{ y } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$ , con  $x_1, \dots, x_{n+1}$  afínmente independientes.

**Teorema 1.2.2.** Toda función convexa  $f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el interior del dominio de  $f$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in \text{int dom} f$  y  $S$  simplex tal que  $x_0 \in \text{int } S \subseteq S \subseteq \text{int dom} f$  y  $\rho > 0$  con  $B(x_0, \rho) \subseteq S$ , donde  $B(x_0, \rho)$  denota la bola euclídea cerrada centrada en  $x_0$  y de radio  $\rho$ . Veamos que  $f$  es continua en  $x_0$ , es decir,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $|y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Para todo  $x \in S$  hay una representación  $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$  con  $\lambda_i \geq 0$  tales que  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ , donde  $x_1, \dots, x_{n+1}$  son los vértices de  $S$ . Como  $f$  es convexa, se deduce que para todo  $x \in S$ ,

$$f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leq c := \max\{f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\} \quad (1.1)$$

Tomamos  $y = x_0 + \alpha u$  con  $0 \leq \alpha \leq 1$  y  $|u| = \rho$ , entonces  $y \in B(x_0, \rho)$ . En particular,  $y = (1-\alpha)x_0 + \alpha(x_0 + u)$ , y como  $f$  es convexa,  $f(y) \leq (1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x_0 + u)$ . Entonces,

$$f(y) - f(x_0) \leq -\alpha f(x_0) + \alpha f(x_0 + u) = \alpha(f(x_0 + u) - f(x_0)) \leq \alpha(c - f(x_0))$$

por (1.1) ya que  $x_0 + u \in S$ .

Por otro lado,  $(1+\alpha)x_0 = y - \alpha u + \alpha x_0 = y + \alpha(x_0 - u) \Leftrightarrow x_0 = \frac{y}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{1+\alpha}(x_0 - u)$ . Entonces por convexidad de  $f$ ,  $f(x_0) \leq \frac{1}{1+\alpha}f(y) + \frac{\alpha}{1+\alpha}f(x_0 - u)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (1+\alpha)f(x_0) &\leq f(y) + \alpha f(x_0 - u) \\ f(x_0) - f(y) &\leq -\alpha f(x_0) + \alpha f(x_0 - u) = \alpha(f(x_0 - u) - f(x_0)) \stackrel{(1.1)}{\leq} \alpha(c - f(x_0)) \end{aligned}$$

Si  $c = f(x_0)$  se tiene que  $0 \leq |f(y) - f(x_0)| \leq 0 \forall y \in B(x_0, \rho)$ , entonces  $f(y) = f(x_0)$ , es decir,  $f$  es una función constante en un entorno de  $x_0$  y por tanto continua. Si  $c \neq f(x_0)$ , tomamos  $\delta = \frac{\rho}{|c - f(x_0)|} \varepsilon$ . Así,  $|f(y) - f(x_0)| \leq |\alpha(c - f(x_0))| = \frac{|y - x_0|}{|u|} |c - f(x_0)| = \frac{|y - x_0|}{\rho} |c - f(x_0)| < \frac{\delta}{\rho} |c - f(x_0)| = \varepsilon, \forall y \in B(x_0, \rho)$ . Por lo que queda demostrada la continuidad de  $f$  en  $\text{int dom } f$ .  $\square$

### 1.3 Proyección métrica

En esta sección vamos a definir para todo punto de  $\mathbb{R}^n$  el punto a mínima distancia en un conjunto convexo y cerrado de  $\mathbb{R}^n$ . Veremos la aplicación continua que define y cómo caracteriza los conjuntos convexos.

**Proposición 1.3.1.** *Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo cerrado y no vacío. Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  existe un único punto  $p(A, x) \in A$  cumpliendo:*

$$|x - p(A, x)| \leq |x - y|, \quad \forall y \in A.$$

La función definida por  $y \mapsto |x - y| \forall y \in A$  es continua y alcanza su mínimo absoluto en  $y_0 \in A$ . La función alcanza mínimo por ser continua en el conjunto  $A \cap \{y : |x - y| \leq |x - z|\}$  con  $z \in A$  fijo, que es compacto ya que  $A$  es cerrado. Veamos que este punto,  $y_0$ , donde se alcanza el mínimo, es único. Si no lo fuera, existe  $y_1 \in A$  con  $y_1 \neq y_0$  cumpliendo  $|x - y_1| \leq |x - y|, \forall y \in A$ . En particular,  $|x - y_1| \leq |x - y_0|$  y como  $y_0$  es mínimo también tenemos que  $|x - y_0| \leq |x - y_1|$ . Por lo tanto,  $|x - y_1| = |x - y_0|$ . Si  $x - y_1 = \lambda(x - y_0)$  con  $\lambda > 0$ , entonces  $\lambda = 1$  y se tiene que  $y_1 = y_0$  contradiciendo la hipótesis. Así,  $x - y_1, x - y_0$  no son paralelos y la desigualdad triangular es estricta:

$$\left| x - \frac{y_0 + y_1}{2} \right| = \left| \frac{x - y_0}{2} + \frac{x - y_1}{2} \right| < \left| \frac{x - y_0}{2} \right| + \left| \frac{x - y_1}{2} \right| \leq \left| \frac{x - y_0}{2} \right| + \left| \frac{x - y_0}{2} \right| = |x - y_0|.$$

Lo anterior contradice que  $y_0$  sea mínimo, ya que  $\frac{y_0 + y_1}{2} \in A$ . Entonces, debe ser  $y_1 = y_0$ . Por tanto,  $y_0 = p(A, x)$  es único.

**Definición.** La aplicación  $p(A, \cdot) : x \in \mathbb{R}^n \mapsto p(A, x) \in A$  se denomina *proyección métrica* o *aplicación al punto más próximo* de  $A$ .

Denotamos  $d(A, x) = |x - p(A, x)|$ , así  $d(A, x)$  es la distancia (mínima) desde el punto  $x$  al conjunto  $A$ . Además,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A$  definimos

$$u(A, x) = \frac{x - p(A, x)}{d(A, x)}$$

el vector unitario apuntando desde el punto más próximo a  $x$  en  $A$ ,  $p(A, x)$ , hasta  $x$ , y denotamos por

$$R(A, x) = \{p(A, x) + \lambda u(A, x) : \lambda \geq 0\}$$

el rayo que pasa por  $x$  con punto final  $p(A, x)$ .

**Lema 1.3.2.** *Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo cerrado y no vacío. Sea  $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ , si  $y \in R(A, x)$  entonces,  $p(A, x) = p(A, y)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $p(A, x) \neq p(A, y)$  entonces, o bien

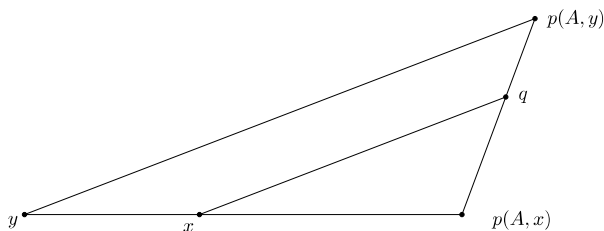
- $y \in [x, p(A, x)]$ . Entonces, por definición de  $p(A, y)$  se cumple  $|y - p(A, y)| \leq |y - z| \forall z \in A$ , en particular para  $z = p(A, x)$  y queda:

$$|x - p(A, y)| \leq |x - y| + |y - p(A, y)| < |x - y| + |y - p(A, x)| = |x - p(A, x)|$$

lo cual contradice la definición de  $p(A, x)$ .

o bien,

- $x \in [y, p(A, x)]$ . Tomamos  $q \in [p(A, x), p(A, y)]$ , el punto tal que el segmento  $[x, q]$  es paralelo con  $[y, p(A, y)]$ , como podemos ver en la siguiente figura:



Entonces, por semejanza de triángulos y por definición de  $p(A, y)$ ,

$$\frac{|x - q|}{|x - p(A, x)|} = \frac{|y - p(A, y)|}{|y - p(A, x)|} \leq 1$$

tenemos  $|x - q| \leq |x - p(A, x)|$  contradice la definición de  $p(A, x)$ , ya que  $q \in A$  por ser  $A$  convexo.

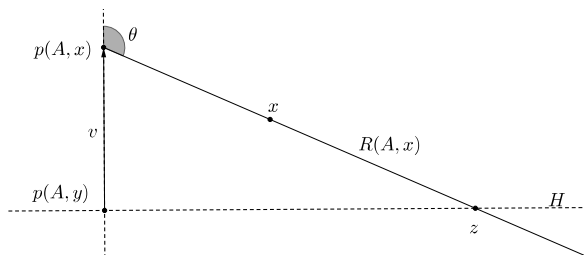
Por tanto  $p(A, x) = p(A, y)$ . □

**Teorema 1.3.3.** *La proyección métrica es contractiva. Es decir,*

$$|p(A, x) - p(A, y)| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Sea  $v = p(A, x) - p(A, y) \neq 0$ . Si  $v = 0$  la desigualdad es trivial.

Veamos que  $\langle x - p(A, x), v \rangle \geq 0$ . Si fuera  $\langle x - p(A, x), v \rangle < 0$ , es decir,  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , siendo  $\theta$  el ángulo entre  $v$  y  $x - p(A, x)$ . Entonces, el rayo  $R(A, x)$  interseca al hiperplano  $H$ , definido por contener a  $p(A, y)$  y ser ortogonal a  $v$ , en un punto  $z$ .

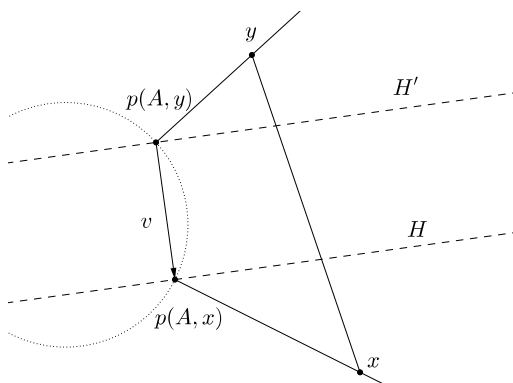


Como el triángulo que generan estos puntos es rectángulo tenemos, usando el lema 1.3.2 que:

$$|z - p(A, y)| < |z - p(A, x)| = |z - p(A, z)|,$$

lo cual es una contradicción con la definición de  $p(A, z)$ . Análogamente, tenemos  $\langle y - p(A, y), v \rangle \leq 0$ .

Entonces, el segmento  $[x, y]$  interseca los dos hiperplanos que son ortogonales a  $v$  y pasan por  $p(A, x)$  y  $p(A, y)$  respectivamente,





y  $|p(A, x) - p(A, y)| \leq |x - y|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Lema 1.3.4.** Sea  $S$  una esfera conteniendo a  $A \in \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo. Entonces,  $p(A, S) = \partial A$ .

*Demostración.* Es obvio que  $p(A, S) \subseteq \partial A$ . Para el otro contenido,  $\partial A \subseteq p(A, S)$  tomamos  $x \in \partial A$ . Para cada  $i \in \mathbb{N}$  tomamos  $x_i$  en el interior de  $S$ , es decir, en la bola de la cual  $S$  es frontera, de modo que  $x_i \notin A$  y  $|x - x_i| < \frac{1}{i}$ . Como  $x \in \partial A$  y por el Teorema 1.3.3 tenemos que  $|x - p(A, x_i)| = |p(A, x) - p(A, x_i)| \leq |x - x_i| < \frac{1}{i}$ .

Por otro lado, el rayo  $R(A, x_i)$  interseca a  $S$  en un punto  $y_i$  con  $p(A, y_i) = p(A, x_i)$ , ya que  $y_i \in R(A, x_i)$ . Entonces,  $|x - p(A, y_i)| < \frac{1}{i}$  y así  $\lim p(A, y_i) = x$ . Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente, sea  $(\tilde{y}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dicha subsucesión de  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , que converge a  $y \in S$ . Como  $\lim p(A, \tilde{y}_i) = \lim p(A, y_i) = x$  y la proyección métrica es continua, por el Teorema 1.3.3, tenemos que  $x = p(A, y)$  con  $y \in S$  y así  $x \in p(A, S)$   $\square$

Que exista una aplicación que lleve al único punto de mínima distancia a un conjunto caracteriza los conjuntos convexos:

**Teorema 1.3.5.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado tal que para todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$  existe un único punto a mínima distancia en  $A$ . Entonces,  $A$  es convexo.

*Demostración.* Supongamos que  $A$  no es convexo. Entonces hay dos puntos  $x, y$  con  $[x, y] \cap A = \{x, y\}$ . Tomamos  $\rho > 0$  tal que la bola  $B(\frac{x+y}{2}, \rho) \cap A = \emptyset$ , con  $B(\frac{x+y}{2}, \rho)$  la bola euclídea cerrada de centro  $\frac{x+y}{2}$  y radio  $\rho$ .

Sea  $\mathcal{B}$  la familia de bolas cerradas,  $B$ , conteniendo a  $B(\frac{x+y}{2}, \rho)$  tales que  $\text{int}(B) \cap A = \emptyset$ . Sea  $B' = B(z, r) \in \mathcal{B}$  de radio máximo. Veamos que  $\mathcal{B}$  tiene elemento de radio máximo. Sea

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z, r) &\longmapsto r \end{aligned}$$

función continua en el conjunto  $C = \{(z, r) : B(\frac{x+y}{2}, \rho) \subseteq B(z, r) \wedge \text{int}(B(z, r)) \cap A = \emptyset\}$ . Como  $C$  es compacto  $f$  tiene máximo en  $C$ , veámoslo:

- Veamos que  $C$  está acotado, si tomamos el plano que contiene a los puntos  $x, y, z$  trasladamos el problema a dimensión 2. Podemos considerar, tomando las coordenadas apropiadas, que  $x = (-a, 0), y = (a, 0)$ , así  $\frac{x+y}{2} = (0, 0)$ . Para ver que  $|z|$  y  $r$  están acotados basta ver que  $r$  lo está ya que como  $B(0, \rho) \subseteq B(z, r)$  se tiene que  $|z| < r - \rho$ . En particular,  $|z+a|^2 + |z-a|^2 = 2|z|^2 + 2|a|^2 \leq 2(r-\rho)^2 + 2|a|^2 = 2r^2 \left[ \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2 + \frac{|a|^2}{r^2} \right]$ , o equivalentemente  $\frac{|z+a|^2 + |z-a|^2}{2r^2} \leq \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2 + \frac{|a|^2}{r^2} = g(r)$ . Como  $g'(r) = \frac{2\rho r - 2(\rho + |a|^2)}{r^3}$  entonces,  $g(r)$  es una función decreciente cuando  $r < \frac{\rho + |a|^2}{\rho}$  y creciente cuando  $r > \frac{\rho + |a|^2}{\rho}$  y como además  $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 1$  la función está acotada por 1 para  $r > \frac{\rho + |a|^2}{\rho}$ . Supongamos que  $r$  no está acotado, entonces podemos tomar un  $r$  suficientemente grande tal que  $\frac{|z+a|^2 + |z-a|^2}{2r^2} \leq 1$ , o equivalentemente  $\frac{|z+a|^2 + |z-a|^2}{2} \leq r^2$ . Además,  $\min\{|z+a|^2, |z-a|^2\} \leq \frac{|z+a|^2 + |z-a|^2}{2}$ , por lo que  $|z+a|^2 \leq r^2$  ó  $|z-a|^2 \leq r^2$ , es decir,  $a$  ó  $-a$  está en  $B(z, r)$ . Lo que contradice que  $(z, r)$  esté en  $C$ , entonces  $r$  está acotado y se tiene que  $C$  es acotado.
- Para ver que  $C$  es cerrado, veamos que  $C^c$  es abierto en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Si  $(z, r) \in C^c$  entonces, o bien  $B(\frac{x+y}{2}, \rho) \not\subseteq B(z, r)$  o bien  $\text{int}(B(z, r)) \cap A \neq \emptyset$ . Si  $B(\frac{x+y}{2}, \rho) \not\subseteq B(z, r)$  existe  $x_0 \in B(\frac{x+y}{2}, \rho)$  tal que  $x_0 \notin B(z, r)$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|z - x_0| > r + \varepsilon$ . Veamos que para todo par  $(\bar{z}, \bar{r})$  tal que  $\bar{z} \in B(z, \frac{\varepsilon}{2})$  y  $|r - \bar{r}| < \frac{\varepsilon}{2}$  se tiene que  $B(\frac{x+y}{2}, \rho) \not\subseteq B(\bar{z}, \bar{r})$ . Por la desigualdad triangular inversa  $|\bar{z} - x_0| = |\bar{z} - z + z - x_0| \geq |z - x_0| - |\bar{z} - z| > r + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = r + \frac{\varepsilon}{2} > \bar{r}$ , es decir,  $x_0 \notin B(\bar{z}, \bar{r})$ .

Si  $\text{int}(B(z, r)) \cap A \neq \emptyset$  existe  $x_0 \in A$  tal que  $x_0 \in \text{int}(B(z, r))$ , entonces existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x_0, \varepsilon) \subseteq \text{int}B(z, r)$ , es decir,  $|z - x_0| < r - \varepsilon$ . Veamos que para todo par  $(\bar{z}, \bar{r})$  tal que  $\bar{z} \in B(z, \frac{\varepsilon}{2})$  y  $|r - \bar{r}| < \frac{\varepsilon}{2}$  se tiene que  $\text{int}(B(\bar{z}, \bar{r})) \cap A \neq \emptyset$ . Por la desigualdad triangular,  $|\bar{z} - x_0| < |\bar{z} - z| + |z - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + r - \varepsilon = r - \frac{\varepsilon}{2} < \bar{r}$ , es decir,  $x_0 \in \text{int}(B(\bar{z}, \bar{r}))$ .

Por hipótesis, existe un único punto,  $p$ , a mínima distancia de  $z$ , el centro de  $B'$ , en  $A$ , en particular,  $p \in B' \cap A$ . Si  $\partial B(\frac{x+y}{2}, \rho)$  y  $\partial B'$  tienen un punto común, sea  $q = \partial B(\frac{x+y}{2}, \rho) \cap \partial B'$ , si no, sea  $q = \frac{x+y}{2}$ . Para un  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, la bola  $B' + \varepsilon(q - p)$  contiene a  $B(\frac{x+y}{2}, \rho)$  y su intersección con  $A$  es nula. Es decir, hemos trasladado la bola para que no toque a  $A$  y ahora podemos tomar una bola de radio mayor en  $\mathcal{B}$ . Con esta construcción, la familia  $\mathcal{B}$  tiene un elemento con radio mayor que el de  $B'$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $A$  es convexo.  $\square$

## 1.4 Soporte y separación

### 1.4.1 Soporte

Vamos a introducir los hiperplanos soporte y veremos su relación con los conjuntos convexos, es decir, en qué condiciones la existencia de un hiperplano soporte para cualquier punto de la frontera caracteriza los conjuntos convexos.

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un subconjunto, dados  $u \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  definimos el hiperplano  $H_{u,\alpha} = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u \rangle = \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , y  $H^-$ ,  $H^+$  los dos semiespacios cerrados acotados por  $H$ , es decir  $H_{u,\alpha}^- = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u \rangle \leq \alpha\}$ ,  $H_{u,\alpha}^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u \rangle \geq \alpha\}$ .

**Definición.** Decimos que  $H$  es soporte de  $A$  en  $x$  si  $x \in A \cap H$  y, o bien  $A \subseteq H^-$  o bien  $A \subseteq H^+$ . Observar que  $H$  es un hiperplano soporte de  $A$  o es soporte de  $A$  si  $H$  es soporte de  $A$  en un punto  $x \in \partial A$ .

**Definición.** Si  $H_{u,\alpha}$  es soporte de  $A$  y  $A \subseteq H_{u,\alpha}^- = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u \rangle \leq \alpha\}$  entonces,  $H_{u,\alpha}^-$  se denota semiespacio soporte de  $A$  y  $u$  es el vector exterior normal de  $H_{u,\alpha}$  y  $H_{u,\alpha}^-$ . Si además,  $H_{u,\alpha}$  es soporte de  $A$  en  $x$  entonces,  $u$  es el vector exterior normal de  $A$  en  $x$ .

**Lema 1.4.1.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo cerrado y no vacío,  $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$  y  $p(A, x)$  su proyección métrica sobre  $A$ . Entonces, el hiperplano  $H$  que pasa por  $p(A, x)$  y es ortogonal a  $u(A, x) = \frac{x - p(A, x)}{d(A, x)}$  es soporte de  $A$ .

*Demostración.* Para que  $H$  sea soporte de  $A$ , por definición,  $A \cap H \neq \emptyset$  y, o bien  $A \subseteq H^-$  o bien  $A \subseteq H^+$ . Como  $p(A, x) \in H \cap A$  entonces,  $H \cap A \neq \emptyset$ . Sea  $H^-$  el semiespacio cerrado acotado por  $H$  que no contiene a  $x$ . Supongamos que  $A \not\subseteq H^-$ , entonces existe  $y \in A$  con  $y \notin H^-$ . Sea  $z \in [p(A, x), y] \subseteq A$  el punto de mínima distancia con  $x$ , entonces  $|x - z| < |x - p(A, x)|$  lo cual es una contradicción con la definición de  $p(A, x)$  ya que  $z \in A$ . Por tanto,  $A \subseteq H^-$  y  $H$  es soporte de  $A$ .  $\square$

**Teorema 1.4.2.** Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  convexo y cerrado. Entonces, para cada punto de  $\partial A$  existe un hiperplano soporte de  $A$ . Si  $A \neq \emptyset$  está acotado, entonces para cada vector  $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  hay un hiperplano soporte de  $A$  con  $u$  vector exterior normal.

*Demostración.* Sea  $x \in \partial A$ . Veamos primero que existe un hiperplano soporte de  $A$ :

- Si  $A$  es acotado. Por el lema 1.3.4 existe un punto  $y \in \mathbb{R}^n \setminus A$  tal que  $x = p(A, y)$ . Por el lema 1.4.1 el hiperplano a través de  $p(A, y) = x$  ortogonal a  $y - x$  es soporte de  $A$  en  $x$ .
- Si  $A$  no está acotado, existe un hiperplano soporte  $H$  de  $A \cap B(x, 1)$  en  $x$ . Sea  $H^-$  el semiespacio soporte correspondiente de  $A \cap B(x, 1)$ .

Veamos que  $H$  es hiperplano soporte de  $A$ , para ello comprobemos que  $A \subseteq H^-$ . Si existe un punto  $z \in A \setminus H^-$  entonces,  $[z, x] \subseteq A$ , pero  $[z, x] \cap B(x, 1) \not\subseteq H^-$  lo cual es una contradicción. Por lo que  $H$  es soporte de  $A$ .

Veamos ahora que, cuando  $A$  está acotado, cada  $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  es vector exterior normal de  $A$  para algún  $x \in \partial A$ . Como  $A$  es compacto, existe un punto  $x \in A$  cumpliendo  $\alpha = \langle x, u \rangle = \sup\{\langle y, u \rangle : y \in A\}$ . Es trivial que, por definición,  $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u \rangle = \langle x, u \rangle = \alpha\}$  es un hiperplano soporte de  $A$  con vector exterior normal  $u$  tal que  $A \subseteq H^-$ .  $\square$

La existencia de hiperplanos soporte a través de un punto cualquiera de la frontera caracteriza a los conjuntos convexos en el siguiente sentido:

**Teorema 1.4.3.** *Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado de interior no vacío tal que para cada punto de su frontera existe un hiperplano soporte de  $A$ . Entonces,  $A$  es convexo.*

*Demostración.* Supongamos que con esas hipótesis  $A$  no es convexo y  $n \geq 2$ . Entonces existen dos puntos  $x, y \in A$  y  $z \in [x, y]$  con  $z \notin A$ . Como  $\text{int}(A) \neq \emptyset$  podemos tomar  $a \in \text{int}(A)$  tal que  $x, y, a$  son afínmente independientes. Sea  $b$  el punto en  $[a, z]$  que está en la frontera de  $A$ .

Por hipótesis, pasando por  $b$  existe un hiperplano soporte  $H$  de  $A$  y  $a \notin H$ , porque  $a \in \text{int}(A)$ . Entonces,  $H$  interseca el plano generado por  $\{x, y, a\}$  en una recta. Como  $H$  es soporte de  $A$  entonces  $x, y, a$  yacen en el mismo semiespacio de la separación que define dicha recta, supongamos que es  $H^-$ . Como  $x, y, a$  son afínmente independientes  $b = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 a$  con  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ . Sea  $u \in \mathbb{R}^n$  vector exterior normal de  $H$ , por definición de hiperplano soporte  $\langle b, u \rangle = \lambda_1 \langle x, u \rangle + \lambda_2 \langle y, u \rangle + \lambda_3 \langle a, u \rangle \leq \lambda_1 \langle b, u \rangle + \lambda_2 \langle b, u \rangle + \lambda_3 \langle b, u \rangle = \langle b, u \rangle$ , por lo que todo son igualdades y esto ocurre si  $\langle x, u \rangle, \langle y, u \rangle, \langle a, u \rangle, \langle b, u \rangle$  están en la misma recta. Lo cual contradice que  $x, y, a$  sean afínmente independientes. Por lo tanto,  $A$  es convexo.  $\square$

## 1.4.2 Separación

Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  subconjuntos y  $H_{u, \alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$  un hiperplano.

**Definición.** El hiperplano  $H_{u, \alpha}$  separa  $A$  y  $B$  si  $A \subseteq H_{u, \alpha}^-$  y  $B \subseteq H_{u, \alpha}^+$  o viceversa.  $A$  separado de un punto  $x$  es la separación entre  $A$  y el conjunto  $\{x\}$ . Decimos que la separación es *propia* si  $A$  y  $B$  no yacen al mismo tiempo en  $H_{u, \alpha}$ .

**Definición.** Los conjuntos  $A$  y  $B$  están *estrictamente separados* por  $H_{u, \alpha}$  si  $A \subseteq \text{int}(H_{u, \alpha}^-)$  y  $B \subseteq \text{int}(H_{u, \alpha}^+)$  o viceversa. Decimos que están *fuertemente separados* por  $H_{u, \alpha}$  si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $H_{u, \alpha - \varepsilon}$  y  $H_{u, \alpha + \varepsilon}$  separan  $A$  y  $B$ .

Ahora que hemos introducido algunos conceptos básicos de separación podemos demostrar el recíproco de la observación 1.1.7.

**Proposición 1.4.4.** *Sean  $K, T \in \mathcal{K}_n$ . Si  $h_K(x) \leq h_T(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $K \subseteq T$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $K \not\subseteq T$ , entonces existe un punto  $x \in K$  tal que  $x \notin T$ . Tomamos  $u \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , podemos definir, por el lema 1.4.1, un hiperplano  $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u \rangle = \alpha\}$  que separa  $T$  y  $x$  tal que  $x \in H^+$ , es decir,  $\langle x, u \rangle \geq \alpha$ . Por lo tanto,  $T \in H^-$  y así:

$$h_T(u) = \sup\{\langle y, u \rangle : y \in T\} \leq \alpha \leq \langle x, u \rangle \leq \sup\{\langle y, u \rangle : y \in K\} = h_K(u)$$

Lo cual contradice que  $h_K(x) \leq h_T(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ , por lo que  $K \subseteq T$ .  $\square$

## 1.5 Métrica de Hausdorff

En esta sección definimos la distancia de Hausdorff de dos conjuntos compactos y veremos cómo se puede expresar para cuerpos convexos a partir de sus funciones soporte.

**Definición.** Sean  $K$  y  $T$  dos conjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ . Definimos la *distancia de Hausdorff* mediante:

$$\delta(K, T) = \min\{\lambda \geq 0 : K \subseteq T + \lambda\mathbb{B}_n, T \subseteq K + \lambda\mathbb{B}_n\}$$

Observar que la distancia de Hausdorff de dos cuerpos convexos  $K, T$  de  $\mathbb{R}^n$  se puede expresar en términos de sus funciones soporte, de la siguiente manera:

$$\delta(K, T) = \sup\{|h_K(\theta) - h_T(\theta)| : \theta \in S^{n-1}\}.$$

Ya que, si  $\delta(K, T) \leq \alpha$ , entonces  $K \subseteq T + \alpha\mathbb{B}_n$  y se tiene que  $h_K(\theta) \leq h_{T+\alpha\mathbb{B}_n}(\theta) = h_T(\theta) + h_{\alpha\mathbb{B}_n}(\theta) = h_T(\theta) + \alpha \forall \theta \in S^{n-1}$ . Análogamente  $T \subseteq K + \alpha\mathbb{B}_n$  y  $h_T(\theta) \leq h_K(\theta) + \alpha \forall \theta \in S^{n-1}$ . Por lo tanto  $|h_K(\theta) - h_T(\theta)| \leq \alpha$  para todo  $\theta \in S^{n-1}$ .

**Lema 1.5.1.** Sean  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_n$  y  $K_2 \subseteq \text{int}K_1$ . Entonces, existe  $\alpha > 0$  tal que todo cuerpo convexo  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  con  $\delta(K_1, K) < \alpha$  cumple  $K_2 \subseteq K$ .

*Demostración.* Como  $K_2 \subseteq \text{int}K_1 \subseteq K_1$  entonces,  $h_{K_2} < h_{K_1}$ , es decir,  $h_{K_1} - h_{K_2} > 0$  en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y por ser continua tiene mínimo,  $\alpha > 0$ , en  $S^{n-1}$ . Tenemos,  $h_{K_1} - h_{K_2} \geq \alpha \Rightarrow h_{K_2} \leq h_{K_1} - \alpha$  en  $S^{n-1}$ . Sea  $K \in \mathcal{K}_n$  con  $\delta(K_1, K) < \alpha$ , entonces  $|h_{K_1}(x) - h_K(x)| < \alpha$ , en particular  $h_{K_1} - \alpha < h_K$ . Por tanto,  $h_{K_2}(x) \leq h_{K_1}(x) - \alpha < h_K(x)$ , para  $x \in S^{n-1}$ . Luego,  $K_2 \subseteq K$ .  $\square$

**Teorema 1.5.2.** El volumen  $|\cdot|$  es continuo sobre  $\mathcal{K}_n$ .

*Demostración.* Sean  $K, T$  cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$ . Ver que el volumen es continuo es comprobar que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$  tal que si  $\delta(K, T) < \alpha$ , entonces  $||K| - |T|| < \varepsilon$ .

Como  $|K| > 0$ , supongamos que  $0 \in \text{int}K$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\lambda > 1$  tal que  $(\lambda^n - 1)\lambda^n|K| < \varepsilon$  y  $\rho > 0$  con  $\rho\mathbb{B}_n \subseteq \text{int}K$ . Entonces, por el lema 1.5.1, existe un  $\alpha > 0$  tal que  $\rho\mathbb{B}_n \subseteq T \forall T \in \mathcal{K}_n$  cumpliendo  $\delta(K, T) < \alpha$ . Tomamos  $\alpha \leq (\lambda - 1)\rho$ . Entonces,  $K \subseteq T + \alpha\mathbb{B}_n \subseteq T + (\lambda - 1)\rho\mathbb{B}_n \subseteq T + (\lambda - 1)T = \lambda T$ . De forma análoga,  $T \subseteq \lambda K, T \subseteq K + \alpha\mathbb{B}_n \subseteq K + (\lambda - 1)\rho\mathbb{B}_n \subseteq K + (\lambda - 1)\text{int}K \subseteq K + (\lambda - 1)K = K$ . Se sigue que  $|K| \leq |\lambda T| = \lambda^n|T|$  y análogamente  $|T| \leq |\lambda K| = \lambda^n|K|$ . Por lo que

$$|K| - |T| \leq (\lambda^n - 1)|T| \leq (\lambda^n - 1)\lambda^n|K|$$

$$|T| - |K| \leq (\lambda^n - 1)|K| \leq (\lambda^n - 1)\lambda^n|K|$$

Por lo tanto,

$$||K| - |T|| \leq (\lambda^n - 1)\lambda^n|K| < \varepsilon.$$

$\square$

**Observación 1.5.3.** El conjunto de cuerpos convexos es un subconjunto cerrado de los conjuntos compactos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, el límite de cuerpos convexos es convexo. Se puede ver una demostración en [2, Theorem 1.8.6].

## Capítulo 2

# Desigualdad de Brunn-Minkowski

### 2.1 Desigualdad de Brunn-Minkowski

En este capítulo vamos a introducir una de las desigualdades más importantes en convexidad, la desigualdad de Brunn-Minkowski. Esta desigualdad relaciona el volumen de la suma de Minkowski de dos conjuntos convexos con los volúmenes de dichos conjuntos. Daremos varias demostraciones y veremos que es válida para compactos no vacíos cualesquiera de  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora, vamos a enunciar la desigualdad de Brunn-Minkowski y veremos que, como consecuencia de la desigualdad aritmético-geométrica, podemos enunciarla de varias formas equivalentes.

**Teorema 2.1.1. Desigualdad de Brunn-Minkowski.** *Las siguientes expresiones son equivalentes:*

1.  $|A|^{1-\lambda}|B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|$ ,  $\forall A, B$  conjuntos convexos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ .
2.  $|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A + B|^{\frac{1}{n}}$ ,  $\forall A, B$  conjuntos convexos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$
3.  $(1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}} \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}}$ ,  $\forall A, B$  conjuntos convexos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Observar que la primera desigualdad no depende de la dimensión del espacio.

*Demostración.* (1  $\Rightarrow$  2) Sean  $A, B$  dos conjuntos convexos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$ . Tomamos  $A' = \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}}$ ,  $B' = \frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}}$  y  $\lambda = \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}} \in [0, 1]$ . Observar que  $A'$  y  $B'$  son convexos no vacíos de volumen 1,  $|A'| = \left| \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}} \right| = \frac{|A|}{(|A|^{\frac{1}{n}})^n} = 1$ . Entonces,  $|(1-\lambda)A' + \lambda B'| \geq |A'|^{1-\lambda}|B'|^\lambda = 1$ .

Por otro lado,

$$(1-\lambda)A' + \lambda B' = \frac{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} - |B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}} \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}} + \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}} \frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}} = \frac{A + B}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}$$

Por tanto,  $1 \leq |(1-\lambda)A' + \lambda B'| = \left| \frac{A+B}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}} \right| = \frac{|A+B|}{(|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}})^n} \Rightarrow |A+B| \geq (|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}})^n$ , tomando la raíz  $n$ -ésima en ambos lados de la desigualdad concluimos  $|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A+B|^{\frac{1}{n}}$ .

(2  $\Rightarrow$  3) Sean  $A, B$  dos conjuntos convexos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$ . Para  $0 \leq \lambda \leq 1$  tomamos  $A' = (1-\lambda)A$ ,  $B' = \lambda B$  convexos.

$$\begin{aligned} |(1-\lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}} &= |A' + B'|^{\frac{1}{n}} \geq |A'|^{\frac{1}{n}} + |B'|^{\frac{1}{n}} = |(1-\lambda)A|^{\frac{1}{n}} + |\lambda B|^{\frac{1}{n}} \\ &= ((1-\lambda)^n)^{\frac{1}{n}} |A|^{\frac{1}{n}} + ((\lambda)^n)^{\frac{1}{n}} |B|^{\frac{1}{n}} = (1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

(3  $\Rightarrow$  1) Sean  $A, B$  dos conjuntos convexos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Tenemos:

$$|(1 - \lambda)A + \lambda B|^{\frac{1}{n}} \geq (1 - \lambda)|A|^{\frac{1}{n}} + \lambda|B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1-\lambda}{n}}|B|^{\frac{\lambda}{n}}$$

La última desigualdad se debe a la desigualdad aritmético-geométrica:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \geq \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i},$$

para todo  $a_i \in \mathbb{R}^+$  y  $\lambda_i \geq 0$  tales que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . La igualdad se cumple si y solo si todos los términos  $a_i$  son iguales.

Entonces,  $|A|^{1-\lambda}|B|^\lambda \leq |(1 - \lambda)A + \lambda B|$ . □

## 2.2 Simetrización de Steiner

La primera demostración que vamos a trabajar es la demostración original de Brunn que se basa en el principio de concavidad que lleva su nombre. Este principio es consecuencia de las propiedades de un proceso de simetrizaciones de Steiner.

Por lo tanto, antes de demostrarla introduciremos la simetrización de Steiner y algunos resultados.

**Definición.** Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$  y  $e_n$  el  $n$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . La *simetrización de Steiner* de  $K$  en la dirección  $e_n$  se define como:

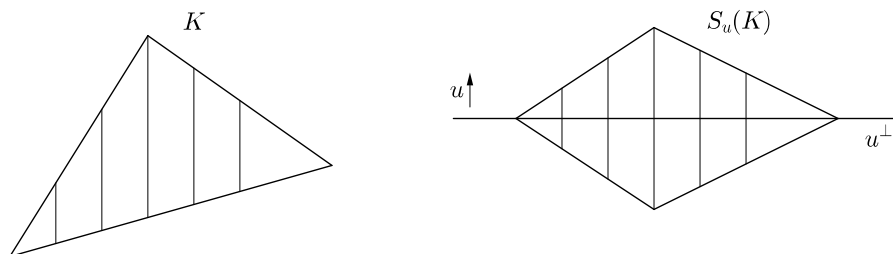
$$S_{e_n}(K) = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n : x \in P_{e_n^\perp}(K), |t| \leq \frac{1}{2}|K \cap (x + \langle e_n \rangle)| \right\}.$$

En general, definimos la simetrización de Steiner para cualquier  $u \in S^{n-1}$  a partir de la anterior como  $S_u(K) = U^\perp(S_{e_n}(UK))$  con  $U \in O(n)$  tal que  $U(u) = e_n$ . Notar que  $S_u(K)$  no depende de  $U \in O(n)$ .

Equivalentemente, para  $x \in u^\perp$  podemos expresarlo como el conjunto tal que

$$|K \cap (x + \langle u \rangle)| = |S_u(K) \cap (x + \langle u \rangle)|,$$

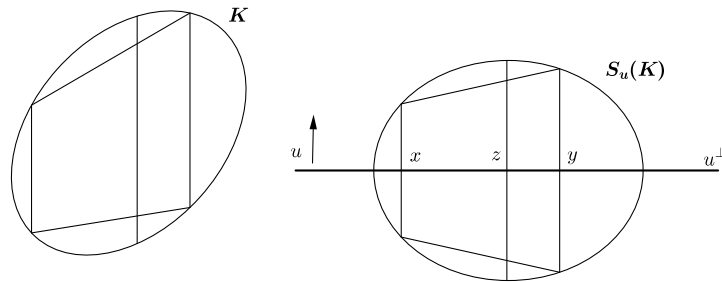
donde los intervalos del término de la derecha están centrados en  $x$ .



La siguiente proposición demuestra que la simetrización de Steiner conserva la convexidad.

**Proposición 2.2.1.** Si  $K$  es un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$  y  $u \in S^{n-1}$ , entonces el cuerpo  $S_u(K)$  es convexo.

*Demostración.* Se demuestra fácilmente tomando trapezoides. Sean  $x, y \in u^\perp$ , con  $l_x = |K \cap (x + \langle u \rangle)|$  y  $l_y = |K \cap (y + \langle u \rangle)|$ . Vamos a ver que para cualquier  $0 < \lambda < 1$  el intervalo centrado en  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$  que tiene longitud  $l_z = |K \cap (z + \langle u \rangle)|$  cumple  $l_z \geq (1 - \lambda)l_x + \lambda l_y$ .



Veamos que  $(1 - \lambda)(K \cap (x + \langle u \rangle)) + \lambda(K \cap (y + \langle u \rangle)) \subseteq K \cap (z + \langle u \rangle)$ . Sea  $a \in (1 - \lambda)(K \cap (x + \langle u \rangle)) + \lambda(K \cap (y + \langle u \rangle))$ , por un lado  $a \in K$  por ser una combinación convexa de puntos de  $K$  y por otro lado  $a \in (1 - \lambda)(x + \langle u \rangle) + \lambda(y + \langle u \rangle) = [(1 - \lambda)x + \lambda y] + \langle u \rangle = z + \langle u \rangle$ . Por tanto,  $a \in K \cap (z + \langle u \rangle)$ . Se sigue que  $|(1 - \lambda)(K \cap (x + \langle u \rangle)) + \lambda(K \cap (y + \langle u \rangle))| \leq |K \cap (z + \langle u \rangle)|$  y se tiene que  $(1 - \lambda)l_x + \lambda l_y \leq l_z$  ya que la longitud de la suma de segmentos paralelos es la suma de las longitudes de los segmentos,  $|(1 - \lambda)(K \cap (x + \langle u \rangle)) + \lambda(K \cap (y + \langle u \rangle))| = |(1 - \lambda)(K \cap (x + \langle u \rangle))| + |\lambda(K \cap (y + \langle u \rangle))|$ . Entonces,  $S_u(K)$  es convexo.  $\square$

**Propiedades.** Sean  $K, T \in \mathbb{R}^n$  dos cuerpos convexos,  $u \in S^{n-1}$  y  $\lambda > 0$ . Entonces:

1.  $S_u(\lambda K) = \lambda S_u(K)$ .
2.  $S_u(K) + S_u(T) \subseteq S_u(K + T)$ . Suma de Minkowski.
3.  $K \subseteq T \Rightarrow S_u(K) \subseteq S_u(T)$ .
4.  $|S_u(K)| = |K|$ .

*Demostración.* Vamos a demostrar las propiedades descritas anteriormente para  $e_n$  y serán ciertas para cualquier dirección  $u \in S^{n-1}$ , ya que dichas propiedades son invariantes frente a transformaciones ortogonales.

1.  $\forall \lambda > 0$ ,

$$\begin{aligned} S_{e_n}(\lambda K) &= \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n : x \in P_{e_n^\perp}(\lambda K), |t| \leq \frac{1}{2} |\lambda K \cap (x + \langle e_n \rangle)| \right\} = \\ &= \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n : \frac{x}{\lambda} \in P_{e_n^\perp}(K), \left| \frac{t}{\lambda} \right| \leq \frac{1}{2} |K \cap \left( \frac{x}{\lambda} + \langle e_n \rangle \right)| \right\} = \\ &= \left\{ \lambda(x, t) \in \mathbb{R}^n : x \in P_{e_n^\perp}(K), |t| \leq \frac{1}{2} |K \cap (x + \langle e_n \rangle)| \right\} = \lambda S_{e_n}(K). \end{aligned}$$

2. Si  $x_1 \in P_{e_n^\perp}(K)$  y  $x_2 \in P_{e_n^\perp}(T)$ , entonces  $x_1 + x_2 \in P_{e_n^\perp}(K + T)$ .

Por otro lado, sean  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $|t_1| \leq \frac{1}{2} |K \cap (x_1 + \langle e_n \rangle)|$  y  $|t_2| \leq \frac{1}{2} |T \cap (x_2 + \langle e_n \rangle)|$ . Veamos que  $[K \cap (x_1 + \langle e_n \rangle)] + [T \cap (x_2 + \langle e_n \rangle)] \subseteq [(T + K) \cap ((x_1 + x_2) + \langle e_n \rangle)]$ . Dados  $a \in K \cap (x_1 + \langle e_n \rangle)$  y  $b \in T \cap (x_2 + \langle e_n \rangle)$ , en particular,  $a \in K, b \in T$  entonces  $a + b \in K + T$ . Además,  $a \in (x_1 + \langle e_n \rangle)$  y  $b \in (x_2 + \langle e_n \rangle)$ , por lo que  $a + b \in (x_1 + x_2) + \langle e_n \rangle$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} |t_1 + t_2| &\leq |t_1| + |t_2| \leq \frac{1}{2} [ |K \cap (x_1 + \langle e_n \rangle)| + |T \cap (x_2 + \langle e_n \rangle)| ] = \\ &= \frac{1}{2} | [K \cap (x_1 + \langle e_n \rangle)] + [T \cap (x_2 + \langle e_n \rangle)] | \leq \frac{1}{2} | (T + K) \cap ((x_1 + x_2) + \langle e_n \rangle) |. \end{aligned}$$

Y queda probado  $S_{e_n}(K) + S_{e_n}(T) \subseteq S_{e_n}(K + T)$ .

3. Supongamos  $K \subseteq T$ . Si  $x \in P_{e_n^\perp}(K)$ , en particular,  $x \in P_{e_n^\perp}(T)$ . Además, si  $|t| \leq \frac{1}{2}|K \cap (x + \langle e_n \rangle)|$  entonces,  $|t| \leq \frac{1}{2}|T \cap (x + \langle e_n \rangle)|$ . Así,

$$\begin{aligned} S_{e_n}(K) &= \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n : x \in P_{e_n^\perp}(K), |t| \leq \frac{1}{2}|K \cap (x + \langle e_n \rangle)| \right\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n : x \in P_{e_n^\perp}(T), |t| \leq \frac{1}{2}|T \cap (x + \langle e_n \rangle)| \right\} = S_{e_n}(T). \end{aligned}$$

4. Por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} |S_{e_n}(K)| &= \int_{S_{e_n}} 1 \cdot dt dx_1 \cdots dx_{n-1} = \int_{P_{e_n^\perp}} |K \cap (x + \langle e_n \rangle)| dx_1 \cdots dx_{n-1} = \\ &= \int_K dt dx_1 \cdots dx_{n-1} = |K|. \end{aligned}$$

□

### 2.3 Demostración de la desigualdad de Brunn-Minkowski con simetrizaciones de Steiner

Aplicando sucesivas simetrizaciones de Steiner a un conjunto convexo nos aproximamos a la bola euclídea, este resultado lo vamos a enunciar sin demostración. Se puede encontrar una demostración en [2, Theorem 10.3.2].

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo tal que  $|K| = |\mathbb{B}_n|$ . Entonces, existe una sucesión de vectores  $\{u_j\}_{j=1}^\infty \in S^{n-1}$  tal que si  $K_j = S_{u_j}(K_{j-1}) \Rightarrow K_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathbb{B}_n$  en la métrica de Hausdorff.*

Usaremos una variante de este resultado para demostrar el principio de concavidad de Brunn, que nos llevará a una demostración de la desigualdad de Brunn-Minkowski para cuerpos convexos.

**Teorema 2.3.2. Principio de concavidad de Brunn.** *Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo y  $F$  un subespacio  $k$ -dimensional. Entonces la función*

$$\begin{aligned} f : F^\perp &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |K \cap (F + x)|^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

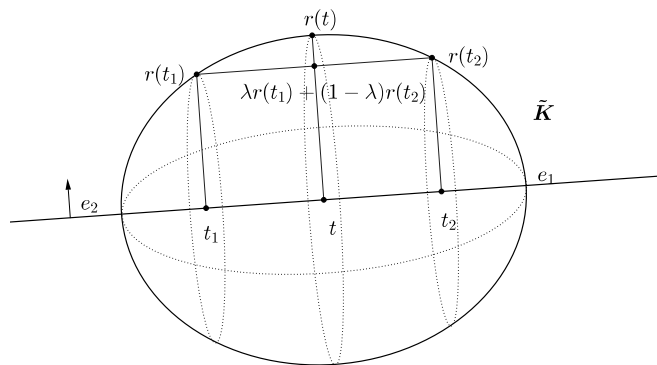
*es cóncava en su soporte.*

*Demostración.* (Esquema de la demostración)

De una manera similar a como ocurre en el Teorema 2.3.1 podemos encontrar una sucesión de simetrizaciones de Steiner de  $K$  en direcciones  $u_j$  del subespacio  $F$  tal que el límite es un cuerpo convexo  $\tilde{K}$  con la siguiente propiedad:  $\forall x \in F^\perp$ ,  $\tilde{K} \cap (F + x) = B(x, r(x))$  tal que  $|\tilde{K} \cap (F + x)| = |K \cap (F + x)|$ . Es decir, las secciones tomadas en las direcciones  $u_j$  son bolas de dimensión  $n - k$ .

Notar que  $\tilde{K}$  es convexo ya que la simetrización de Steiner conserva la convexidad y el límite de cuerpos convexos es convexo. Lo que implica que  $r(x)$ , la función radial de las bolas que se generan al cortar  $\tilde{K}$  con los subespacios  $x + F$ , es cóncava en su soporte. Para dos dimensiones, gráficamente sería:



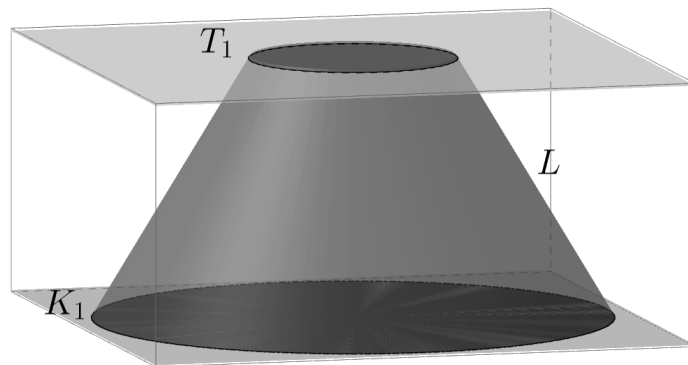


Veámoslo, sea  $\tilde{K} = S_{e_1}(K)$ , tomamos  $t_1e_1 + r(t_1)e_2$  y  $t_2e_1 + r(t_2)e_2$  dos puntos en la frontera de  $\tilde{K}$ . En general, para dos vectores ortogonales cualesquiera  $e_1 \in F^\perp$ ,  $e_2 \in F$ . Para  $0 \leq \lambda \leq 1$  tomamos un punto  $t = \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2$  en  $[t_1, t_2]$ , como  $\tilde{K}$  es convexo se tiene que  $te_1 + r(t)e_2$  está en la frontera de  $\tilde{K}$  y  $[\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2]e_1 + [r(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)]e_2 \geq \lambda(t_1e_1 + r(t_1)e_2) + (1 - \lambda)(t_2e_1 + r(t_2)e_2) = (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)e_1 + (\lambda r(t_1) + (1 - \lambda)r(t_2))e_2$ . En particular,  $\lambda r(t_1) + (1 - \lambda)r(t_2) \leq r(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)$ , por lo que  $r$  es cóncava (- $r$  convexa).

Finalmente, para  $k = n - 1$  queda  $f(x) = |K \cap (F + x)|^{\frac{1}{n-1}} = |\tilde{K} \cap (F + x)|^{\frac{1}{n-1}} = |B(x, r(x))|^{\frac{1}{n-1}} = |r(x)\mathbb{B}_{n-1}|^{\frac{1}{n-1}} = (r(x)^{n-1}|\mathbb{B}_{n-1}|)^{\frac{1}{n-1}} = r(x)|\mathbb{B}_{n-1}|^{\frac{1}{n-1}}$  y entonces  $f(x)$  también es cóncava por ser producto de una función cóncava por una constante. El resultado se obtiene en general para cualquier  $k$ .  $\square$

El principio de concavidad de Brunn demuestra la desigualdad de Brunn-Minkowski para cuerpos convexos.

Sean  $K, T \in \mathbb{R}^n$  dos cuerpos convexos. Definimos  $K_1 = K \times \{0\}$ ,  $T_1 = T \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  y consideramos la envoltura convexa  $L$  de  $K_1$  y  $T_1$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .



Podemos escribir  $L$  como  $L = \{(1 - \lambda)(x_0, 0) + \lambda(x_1, 1), \text{ con } x_0 \in K, x_1 \in T\}$ . Sea  $L(t) = \{x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1] : (x, t) \in L\}$ . Se comprueba fácilmente por definición que  $L(0) = K$  y  $L(1) = T$ . Si  $(x, t) \in L(t)$ , entonces es de la forma  $(x, t) = (1 - \lambda)(x_0, 0) + \lambda(x_1, 1)$  con  $0 \leq \lambda \leq 1$  y  $x_0 \in K$ ,  $x_1 \in T$  y  $(x, t) \in L$ . En particular,  $L(\lambda) = (1 - \lambda)K + \lambda T$  para  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

El principio de concavidad de Brunn para  $F = \mathbb{R}^n$ , nos dice que  $f(x) = |L(t)|^{\frac{1}{n}}$  es cóncava con  $L$  cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Por lo que,

$$|L(\lambda)|^{\frac{1}{n}} = |(1 - \lambda)K + \lambda T|^{\frac{1}{n}} \geq (1 - \lambda)|K|^{\frac{1}{n}} + \lambda|T|^{\frac{1}{n}}.$$

Para cualquier  $0 \leq \lambda \leq 1$  obteniendo así la desigualdad de Brunn-Minkowski.

## 2.4 Demostración por inducción sobre la dimensión

En esta sección vamos a demostrar la desigualdad de Brunn-Minkowski para cuerpos convexos por inducción sobre la dimensión del espacio. En particular, con esta demostración vamos a caracterizar el caso de igualdad.

**Teorema 2.4.1.** Sean  $K_0, K_1$  dos cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$ . Para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,

$$(1 - \lambda)|K_0|^{\frac{1}{n}} + \lambda|K_1|^{\frac{1}{n}} \leq |(1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1|^{\frac{1}{n}}.$$

La igualdad se cumple si y sólo si son homotéticos, es decir, si existe  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha > 0$  tales que  $K_1 = x + \alpha K_0$ .

*Demostración.* • Sea  $n = 1$  y sean  $K_0, K_1 \in \mathbb{R}$  dos cuerpos convexos cualesquiera (intervalos cerrados y acotados). Sean  $k_{min}^0$  el elemento mínimo de  $K_0$  y  $k_{max}^1$  el elemento máximo de  $K_1$ . Observar que como son dos cuerpos convexos, cerrados y acotados,  $k_{min}^0 \in K_0, k_{max}^1 \in K_1$ .

Por un lado,  $(k_{min}^0 + K_1) \cup (K_0 + k_{max}^1) = \{k_{min}^0 + t : t \in K_1\} \cup \{t + k_{max}^1 : t \in K_0\} \subseteq K_0 + K_1$ . Entonces,  $|(k_{min}^0 + K_1) \cup (K_0 + k_{max}^1)| \leq |K_0 + K_1|$ .

Además,  $(k_{min}^0 + K_1) \cap (K_0 + k_{max}^1) = \{k_{min}^0 + t : t \in K_1\} \cap \{t + k_{max}^1 : t \in K_0\} = \{k_{min}^0 + k_{max}^1\}$  y  $|\{k_{min}^0 + k_{max}^1\}| = 0$  ya que la medida de Lebesgue de un punto es nula. Entonces,

$$\begin{aligned} |K_0 + K_1| &\geq |(k_{min}^0 + K_1) \cup (K_0 + k_{max}^1)| = |k_{min}^0 + K_1| + |K_0 + k_{max}^1| - |(k_{min}^0 + K_1) \cap (K_0 + k_{max}^1)| \\ &= |K_1| + |K_0| - 0 = |K_0| + |K_1| \end{aligned}$$

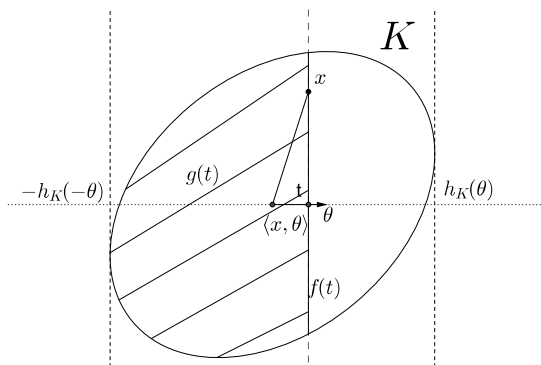
Si  $|K_0| + |K_1| \leq |K_0 + K_1| \forall K_0, K_1$  entonces,  $(1 - \lambda)|K_0| + \lambda|K_1| \leq |(1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1| \forall K_0, K_1$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Así queda demostrada la desigualdad para  $n=1$ .

- Supongamos que la desigualdad es cierta para  $n - 1$  con  $n \geq 2$  y veamos que se cumple para  $n$ .

Sean  $K_0, K_1$  dos cuerpos convexos. Suponemos que  $|K_0|, |K_1| = 1$  y que el origen es el baricentro de ambos.

Sean  $\theta \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$  y  $t \in (-h_{K_i}(-\theta), h_{K_i}(\theta))$  para  $i = 0, 1$ , definimos:

$f_i(t) = Vol_{n-1}(\{x \in K_i : \langle x, \theta \rangle = t\})$  y  $g_i(t) = Vol_n(\{x \in K_i : \langle x, \theta \rangle \leq t\})$ .



Entonces, por el teorema de Fubini,

$$g_i(t) = \int_{-h_{K_i}(-\theta)}^t f_i(s) ds.$$

Notar que como hemos supuesto  $|K_0|, |K_1| = 1$ , entonces  $g_i(t) \in (0, 1)$ . Por el principio de concavidad de Brunn  $f_i^{\frac{1}{n}}$  es una función cóncava en su soporte, luego  $f_i$  es continua en el interior

del dominio por el teorema 1.2.2 y estrictamente positiva. Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos  $g'_i(t) = f_i(t) > 0$ ,  $g_i$  es estrictamente creciente  $\forall t \in (-h_{K_i}(-\theta), h_{K_i}(\theta))$ .

Recordar que  $(g^{-1})'(u) = \frac{1}{g'(t)}$  con  $u = g(t)$ . Si  $h_i : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  es la inversa de  $g_i$  entonces tenemos,

$$h'_i(u) = \frac{1}{g'_i(h_i(u))} = \frac{1}{f_i(h_i(u))}, \quad 0 < u < 1$$

Definimos  $K_\lambda = (1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1$  y  $K_\lambda(u) = K_\lambda \cap \{y + h_\lambda(u)\theta : y \in \theta^\perp\} = K_\lambda \cap \{x : \langle x, \theta \rangle = h_\lambda(u)\} \forall u \in (0, 1)$  con  $0 \leq \lambda \leq 1$ , donde  $h_\lambda = (1 - \lambda)h_0 + \lambda h_1$ .

Para  $u \in (0, 1)$  veamos que  $(1 - \lambda)K_0(u) + \lambda K_1(u) \subseteq K_\lambda(u)$ . Sea  $a \in (1 - \lambda)K_0(u) + \lambda K_1(u)$ , entonces  $a = (1 - \lambda)r + \lambda t$  con  $r \in K_0 \cap \{y + h_0(u)\theta : y \in \theta^\perp\}$  y  $t \in K_1 \cap \{y + h_1(u)\theta : y \in \theta^\perp\}$ . En particular,  $r \in K_0$  y  $t \in K_1$ , entonces  $a \in (1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1 = K_\lambda$ . Por otro lado,  $r = y_0 + h_0(u)\theta$ ,  $y_0 \in \theta^\perp$  y  $t = y_1 + h_1(u)\theta$ ,  $y_1 \in \theta^\perp$ . Así,

$$\begin{aligned} a &= (1 - \lambda)(y_0 + h_0(u)\theta) + \lambda(y_1 + h_1(u)\theta) \\ &= \underbrace{(1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1}_{\in \theta^\perp} + \underbrace{(1 - \lambda)h_0(u)\theta + \lambda h_1(u)\theta}_{h_\lambda(u)\theta} \in K_\lambda(u). \end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo el cambio de variable  $t = h_\lambda(u)$  y utilizando que  $h_{K_0+K_1} = h_{K_0} + h_{K_1}$  para todo par de cuerpos convexos  $K_0, K_1 \in \mathbb{R}^n$  tenemos que

$$\begin{aligned} Vol_n(K_\lambda) &= \int_{-h_{K_\lambda}(-\theta)}^{h_{K_\lambda}(\theta)} Vol_{n-1}(K_\lambda \cap (\theta^\perp + t\theta)) dt = \int_0^1 Vol_{n-1}(K_\lambda(u)) h'_\lambda(u) du \\ &\geq \int_0^1 Vol_{n-1}((1 - \lambda)K_0(u) + \lambda K_1(u)) \left( \frac{1 - \lambda}{f_0(h_0(u))} + \frac{\lambda}{f_1(h_1(u))} \right) du \end{aligned}$$

ya que  $h'_\lambda(u) = (1 - \lambda)h'_0 + \lambda h'_1 = (1 - \lambda)\frac{1}{f_0(h_0(u))} + \lambda\frac{1}{f_1(h_1(u))}$ .

Por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} Vol_{n-1}((1 - \lambda)K_0(u) + \lambda K_1(u)) &\geq [(1 - \lambda)Vol_{n-1}(K_0(u))^{\frac{1}{n-1}} + \lambda Vol_{n-1}(K_1(u))^{\frac{1}{n-1}}]^{n-1} \\ &= [(1 - \lambda)f_0(h_0(u))^{\frac{1}{n-1}} + \lambda f_1(h_1(u))^{\frac{1}{n-1}}]^{n-1} \end{aligned}$$

ya que  $|K_0(u)| = |K_0 \cap \{y + h_0(u)\theta : y \in \theta^\perp\}| = |K_0 \cap \{x : \langle x, \theta \rangle = h_0(u)\}| = |\{x \in K_0 : \langle x, \theta \rangle = h_0(u)\}| = f_0(h_0(u))$  y análogamente para  $K_1(u)$ .

Utilizando la desigualdad aritmético geométrica,

$$\begin{aligned} Vol_n(K_\lambda) &\geq \int_0^1 [(1 - \lambda)f_0(h_0(u))^{\frac{1}{n-1}} + \lambda f_1(h_1(u))^{\frac{1}{n-1}}]^{n-1} \left( \frac{1 - \lambda}{f_0(h_0(u))} + \frac{\lambda}{f_1(h_1(u))} \right) du \\ &\geq \int_0^1 \left( f_0(h_0(u))^{\frac{1-\lambda}{n-1}} f_1(h_1(u))^{\frac{\lambda}{n-1}} \right)^{n-1} \left( \frac{1}{f_0(h_0(u))^{1-\lambda}} \frac{1}{f_1(h_1(u))^\lambda} \right) du = 1 \end{aligned}$$

Por tanto,  $Vol_n((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1) = Vol_n(K_\lambda) \geq 1 = ((1 - \lambda)Vol_n(K_0)^{\frac{1}{n}} + \lambda Vol_n(K_1)^{\frac{1}{n}})^n$  como queríamos demostrar.

Estudiemos el caso de igualdad. Supongamos que  $Vol_n((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1) = 1$  para algún  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Entonces se obtiene la igualdad en la desigualdad aritmético geométrica y debe ser  $f_0(h_0(u)) = f_1(h_1(u)) \forall u \in (0, 1)$  y por definición  $h'_0(u) = h'_1(u) \forall u \in (0, 1)$ . Por lo que,  $h_0(u) = h_1(u) + C$ , con  $C$  una constante.

Como 0 es el baricentro de  $K_i$  para  $i = 0, 1$  y haciendo el cambio de variable  $t = h_i(u)$ ,

$$0 = \int_{K_i} \langle x, \theta \rangle dx = \int_{-h_{K_i}(-\theta)}^{h_{K_i}(\theta)} t f_i(t) dt = \int_0^1 h_i(u) f_i(h_i(u)) h_i'(u) du = \int_0^1 h_i(u) du$$

Entonces  $C = 0$  y  $h_0 \equiv h_1$ . En particular, el valor es el mismo cuando  $u \rightarrow 1$ , es decir cuando el volumen es el total. Así,  $h_{K_0}(\theta) = h_{K_1}(\theta) \forall \theta \in S^{n-1}$  por tanto la igualdad se cumple para  $K_0 = K_1$ .

Hemos probado el teorema suponiendo  $|K_0|, |K_1| = 1$  y 0 el baricentro de ambos. Notar que si  $K_0, K_1$  son dos cuerpos convexos cualesquiera, podemos tomar:  $K_i' = \frac{K_i - x_i}{|K_i|^{\frac{1}{n}}}$ , con  $x_i$  el baricentro de  $K_i$  y  $\lambda = \frac{|K_1|^{\frac{1}{n}}}{|K_0|^{\frac{1}{n}} + |K_1|^{\frac{1}{n}}}$  para los que está demostrada la desigualdad. Así, el teorema quedaría probado para cualquier par de cuerpos convexos y se tiene la igualdad si y sólo si  $K_0$  y  $K_1$  son homotéticos.  $\square$

## 2.5 Desigualdad de Prékopa-Leindler

Por último y con el objetivo de demostrar la desigualdad de Brunn-Minkowski para borelianos no vacíos cualesquiera de  $\mathbb{R}^n$ , no necesariamente convexos, introducimos la desigualdad funcional de Prékopa-Leindler para llegar a la de Brunn-Minkowski como un caso particular.

**Teorema 2.5.1. Desigualdad de Prékopa-Leindler** Sean  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles no negativas y  $0 \leq \lambda \leq 1$  tal que  $f(x)^{1-\lambda} g(x)^\lambda \leq h(x)$  siempre que  $x = (1-\lambda)x + \lambda y$ . Entonces,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz.$$

*Demostración.* Vamos a proceder a demostrarlo por inducción sobre la dimensión. Suponemos que  $\|f\|_\infty = 1 = \|g\|_\infty$ .

Para cualquier  $0 \leq t < 1$ , tenemos

$$(1-\lambda)\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\} + \lambda\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq t\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq t\}.$$

En efecto, sea  $z \in (1-\lambda)\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\} + \lambda\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq t\}$ , entonces existen  $x_f \in \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}$  y  $x_g \in \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq t\}$  tal que  $z = (1-\lambda)x_f + \lambda x_g$  con  $h(z) \geq f(x_f)^{1-\lambda} g(x_g)^\lambda \geq t^{1-\lambda} t^\lambda = t$ . Por tanto,  $z \in \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq t\}$ .

- Para  $n = 1$ , la demostración para compactos no vacíos es la misma que en el teorema 2.4.1 para dos cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^n$  y por aproximación para dos conjuntos (Borel) no vacíos cualesquiera de  $\mathbb{R}^n$ . Ya que la  $\sigma$ -álgebra de Borel está generada por compactos.

Tenemos, por la desigualdad aritmético geométrica y el teorema de Fubini que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx &= \int_0^1 |\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq t\}| dt \\ &\geq (1-\lambda) \int_0^1 |\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}| dt + \lambda \int_0^1 |\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq t\}| dt \\ &\geq \left( \int_0^1 |\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}| dt \right)^{1-\lambda} \left( \int_0^1 |\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq t\}| dt \right)^\lambda \\ &\geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \right)^\lambda. \end{aligned}$$

- Supongamos que el resultado es cierto para  $n - 1$ , con  $n > 1$ , y veamos que se cumple para  $n$ . Fijamos  $x_1 \in \mathbb{R}$  y definimos  $f_{x_1} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow [0, \infty)$ , dada por  $f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Análogamente definimos  $g_{y_1}, h_{z_1}$ .

Por hipótesis para  $n$  tenemos que para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$  y  $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$h((1 - \lambda)(x_1, \dots, x_n) + \lambda(y_1, \dots, y_n)) \geq f(x_1, \dots, x_n)^{1-\lambda} g(y_1, \dots, y_n)^\lambda.$$

Entonces, para cualquier  $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $z_1 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda y_1$  y  $\forall (x_2, \dots, x_n), (y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  se tiene

$$h(z_1, (1 - \lambda)(x_2, \dots, x_n) + \lambda(y_2, \dots, y_n)) \geq f(x_1, \dots, x_n)^{1-\lambda} g(y_1, \dots, y_n)^\lambda.$$

Equivalentemente,

$$h_{z_1}((1 - \lambda)(x_2, \dots, x_n) + \lambda(y_2, \dots, y_n)) \geq f_{x_1}(x_2, \dots, x_n)^{1-\lambda} g_{y_1}(y_2, \dots, y_n)^\lambda.$$

Así tenemos, por hipótesis de inducción, que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(z_2, \dots, z_n) dz_2 \cdots dz_n \geq \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(y_2, \dots, y_n) dy_2 \cdots dy_n \right)^\lambda,$$

donde  $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(z_2, \dots, z_n) dz_2 \cdots dz_n, \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n, \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(y_2, \dots, y_n) dy_2 \cdots dy_n$  son funciones medibles no negativas en  $\mathbb{R}$ . Hemos visto que el resultado es cierto para  $n = 1$  y aplicando el teorema de Fubini, nos queda:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(z_2, \dots, z_n) dz_2 \cdots dz_n \right) dz_1 \geq \\ & \geq \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n \right) dx_1 \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(y_2, \dots, y_n) dy_2 \cdots dy_n \right) dy_1 \right)^\lambda. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(z_1, \dots, z_n) dz_1 \cdots dz_n \geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n \right)^\lambda.$$

Y queda probado para todo  $n$ .

Sean  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles no negativas cualesquiera con  $0 \leq \lambda \leq 1$  tal que  $f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \leq h(z)$  siempre que  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ . Tomamos  $\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_\infty}$  y  $\tilde{g}(y) = \frac{g(y)}{\|g\|_\infty}$  de modo que  $\|\tilde{f}\|_\infty = 1 = \|\tilde{g}\|_\infty$  y  $\tilde{h} = \frac{h}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda}$ .

Observar que como  $h(z) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda$  siempre que  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ , entonces,

$$\frac{h}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda} \geq \frac{f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda} = \left( \frac{f(x)}{\|f\|_\infty} \right)^{1-\lambda} \left( \frac{g(y)}{\|g\|_\infty} \right)^\lambda,$$

es decir, se cumple que  $\tilde{h}(z) \geq \tilde{f}(x)^{1-\lambda} \tilde{g}(y)^\lambda$  siempre que  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$  y podemos aplicar la desigualdad de Prékopa-Leindler a  $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}$ . Obtenemos:

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda} = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}(z) dz \geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(y) dy \right)^\lambda \geq \left( \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx}{\|f\|_\infty} \right)^{1-\lambda} \left( \frac{\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy}{\|g\|_\infty} \right)^\lambda.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz.$$

Y la desigualdad queda probada para  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles no negativas cualesquiera con  $0 \leq \lambda \leq 1$  tal que  $f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \leq h(z)$  siempre que  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ . □

Sean  $f = \chi_A$  y  $g = \chi_B$  funciones características de  $A$  y  $B$ , dos conjuntos borelianos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $h = \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}$  que cumple  $f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda \leq h(z)$  ya que  $\chi_A^{1-\lambda}(x)\chi_B^\lambda(y) \leq \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}(z)$ , para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$  siempre que  $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ . Veamos que se cumple. Como la función característica sólo puede tomar los valores  $\{0, 1\}$ , la desigualdad es equivalente a  $\chi_A(x)\chi_B(y) \leq \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}(z)$ . Observar que si  $x \notin A \Rightarrow \chi_A(x) = 0$  ó si  $y \notin B \Rightarrow \chi_B(y) = 0$  y la desigualdad es trivial puesto que  $\chi_{(1-\lambda)A+\lambda B} \geq 0$ . En el caso  $\chi_A(x) = 1 = \chi_B(y)$  tenemos que  $x \in A$ ,  $y \in B$ , entonces  $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in (1-\lambda)A + \lambda B$  y así  $\chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}(z) = 1$ .

Aplicando Prékopa-Leindler obtenemos la desigualdad de Brunn-Minkowski, ya que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) dx \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}(z) dz$$

y esta desigualdad es equivalente a:

$$|A|^{1-\lambda} |B|^\lambda \leq |(1-\lambda)A + \lambda B|,$$

así la desigualdad de Brunn-Minkowski queda probada para todo par de conjuntos borelianos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$  y para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

## Capítulo 3

# Aplicaciones de la desigualdad de Brunn-Minkowski

### 3.1 Desigualdad isoperimétrica

La desigualdad isoperimétrica nos dice que la bola euclídea es el cuerpo de menor superficie de entre todos los de un volumen dado.

**Definición.** La medida de la superficie (o contenido de Minkowski) de un cuerpo convexo  $K$  se define como

$$|\partial K| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|K + t\mathbb{B}_n| - |K|}{t}.$$

**Observación 3.1.1.** Veamos que para todo  $\lambda \neq 0$  real se tiene  $\frac{|\partial(\lambda K)|^{\frac{1}{n-1}}}{|\lambda K|^{\frac{1}{n}}} = \frac{|\partial K|^{\frac{1}{n-1}}}{|K|^{\frac{1}{n}}}$ . Por las propiedades de la medida de Lebesgue  $|\lambda K|^{\frac{1}{n}} = \lambda |K|^{\frac{1}{n}}$ . Por otro lado,  $|\partial(\lambda K)|^{\frac{1}{n-1}} = \lambda |\partial K|^{\frac{1}{n-1}}$  ya que,

$$\begin{aligned} |\partial(\lambda K)| &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\lambda K + t\mathbb{B}_n| - |\lambda K|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^n |K + \frac{t}{\lambda}\mathbb{B}_n| - \lambda^n |K|}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^{n-1} [ |K + \frac{t}{\lambda}\mathbb{B}_n| - |K| ]}{\frac{t}{\lambda}} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^{n-1} [ |K + s\mathbb{B}_n| - |K| ]}{s} = \lambda^{n-1} |\partial K|. \end{aligned}$$

**Teorema 3.1.2.** Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{B}_n$  la bola euclídea de dimensión  $n$ , entonces

$$\frac{|\partial K|^{\frac{1}{n-1}}}{|K|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{|\partial \mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n-1}}}{|\mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Es decir, entre todos los cuerpos convexos de un volumen dado de  $\mathbb{R}^n$ , la bola euclídea es el de mínima superficie.

*Demostración.* Sea  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$ . Si aplicamos la desigualdad de Brunn-Minkowski  $|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A+B|^{\frac{1}{n}} \forall A, B$  conjuntos convexos no vacíos en  $\mathbb{R}^n$  en la definición de superficie de  $K$  para  $K$  y  $\mathbb{B}_n$ , tenemos

$$\begin{aligned}
|\partial K| &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|K + t\mathbb{B}_n| - |K|}{t} \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(|K|^{\frac{1}{n}} + t|\mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n}})^n - |K|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |K|^{\frac{n-i}{n}} t^i |\mathbb{B}_n|^{\frac{i}{n}}\right) - |K|}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|K| + \left(\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} |K|^{\frac{n-i}{n}} t^i |\mathbb{B}_n|^{\frac{i}{n}}\right) - |K|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} |K|^{\frac{n-i}{n}} t^i |\mathbb{B}_n|^{\frac{i}{n}}\right)}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(n|K|^{\frac{n-1}{n}} t |\mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n}}\right) + \binom{n}{2} |K|^{\frac{n-2}{n}} t^2 |\mathbb{B}_n|^{\frac{2}{n}} + \dots + (t^n |\mathbb{B}_n|)}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(n|K|^{\frac{n-1}{n}} |\mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n}}\right) + \left(\binom{n}{2} |K|^{\frac{n-2}{n}} t |\mathbb{B}_n|^{\frac{2}{n}}\right) + \dots + (t^{n-1} |\mathbb{B}_n|) = n|K|^{\frac{n-1}{n}} |\mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $|\partial K| \geq n|K|^{\frac{n-1}{n}} |\mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n}}$ .

La superficie de la bola euclídea es:

$$\begin{aligned}
|\partial \mathbb{B}_n| &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\mathbb{B}_n + t\mathbb{B}_n| - |\mathbb{B}_n|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^n |\mathbb{B}_n| - |\mathbb{B}_n|}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^n}{t} |\mathbb{B}_n| \stackrel{L'H\acute{o}pital}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{n(1+t)^{n-1}}{1} |\mathbb{B}_n| = n|\mathbb{B}_n|.
\end{aligned}$$

Sustituyendo  $|\partial \mathbb{B}_n| = n|\mathbb{B}_n|$  en la desigualdad, queda  $|\partial K| \geq n|K|^{\frac{n-1}{n}} |\mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n}} = n|K|^{\frac{n-1}{n}} |\mathbb{B}_n| |\mathbb{B}_n|^{\frac{1-n}{n}} = |K|^{\frac{n-1}{n}} |\partial \mathbb{B}_n| |\mathbb{B}_n|^{\frac{1-n}{n}}$ , es decir,  $|\partial K|^{\frac{1}{n-1}} \geq |K|^{\frac{1}{n}} |\partial \mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n-1}} |\mathbb{B}_n|^{\frac{-1}{n}} \Leftrightarrow \frac{|\partial K|^{\frac{1}{n-1}}}{|K|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{|\partial \mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n-1}}}{|\mathbb{B}_n|^{\frac{1}{n}}}$ . □

## 3.2 Desigualdad de Blaschke-Santaló

**Definición.** Definimos el *volumen producto* de un cuerpo convexo  $K \in \mathbb{R}^n$  como  $s(K) = |K||K^o|$ .

**Observación 3.2.1.** Como  $(T(K))^o = (T^t)^{-1}(K^o) \forall T \in GL(n)$  isomorfismo, se sigue fácilmente que  $s(K) = s(TK)$ . Ya que  $s(TK) = |T(K)|| (T(K))^o| = |T(K)|| (T^t)^{-1} K^o| = |\det T| |K| |\det (T^t)^{-1}| |K^o| = |K||K^o| = s(K)$ . Así el *volumen producto* es invariante por transformaciones lineales de  $K$ .

Sea  $K$  un cuerpo convexo y simétrico en  $\mathbb{R}^n$ . La desigualdad de Blaschke-Santaló muestra que  $s(K)$  es máximo cuando  $K$  es un elipsoide, es decir, una transformación lineal de la bola euclídea.

**Teorema 3.2.2. (Blaschke-Santaló)** Sea  $K \in \mathcal{K}_n$  simétrico. Entonces,  $|K||K^o| \leq |\mathbb{B}_n|^2$ .

*Demostración.* Veamos que si  $K$  es un cuerpo convexo simétrico en  $\mathbb{R}^n$  y  $K_1 = S_u(K)$  la simetrización de Steiner de  $K$  en la dirección  $u \in S^{n-1}$ , entonces  $|K^o| \leq |K_1^o|$ . Para ello suponemos  $u^\perp = e_n$ , vector  $n$ -ésimo de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Observar que la definición de simetrización de Steiner dada en el capítulo anterior es equivalente a la siguiente:

$$K_1 = S_u(K) = \left\{ \left( x, \frac{t_1 - t_2}{2} \right) : x \in P_{u^\perp}(K), (x, t_1) \in K, (x, t_2) \in K \right\}.$$

Para todo  $A \in \mathbb{R}^n$  definimos  $A(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, t) \in A\}$  y así  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{K^o(s) + K^o(-s)}{2} \subseteq K_1^o(s)$ .



Veamos este contenido. Queremos probar que  $\frac{x+\tilde{x}}{2} \in K_1^o(s)$  con  $x \in K^o(s)$  y  $\tilde{x} \in K^o(-s)$ . observar que:

$$\begin{aligned} K^o(s) &= \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \langle (x, s), y \rangle \leq 1, \forall y \in K\} \\ K^o(-s) &= \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \langle (x, -s), y \rangle \leq 1, \forall y \in K\} \\ K_1^o(s) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} : \left\langle (x, s), \left( x_1, \frac{t_1-t_2}{2} \right) \right\rangle \leq 1, \forall \left( x_1, \frac{t_1-t_2}{2} \right) \in K_1 \right\} \end{aligned}$$

Es decir, queremos ver que  $\langle (\frac{x+\tilde{x}}{2}, s), (x_1, \frac{t_1-t_2}{2}) \rangle \leq 1, \forall (x_1, \frac{t_1-t_2}{2}) \in K_1$ .

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \frac{x+\tilde{x}}{2}, s \right), \left( x_1, \frac{t_1-t_2}{2} \right) \right\rangle &= \left\langle \left( \frac{x}{2}, \frac{s}{2} \right), \left( x_1, \frac{t_1-t_2}{2} \right) \right\rangle + \left\langle \left( \frac{\tilde{x}}{2}, \frac{s}{2} \right), \left( x_1, \frac{t_1-t_2}{2} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4} \langle (x, s), (x_1, t_1) \rangle + \frac{1}{4} \langle (x, s), (x_1, -t_2) \rangle + \frac{1}{4} \langle (\tilde{x}, s), (x_1, t_1) \rangle + \frac{1}{4} \langle (\tilde{x}, s), (x_1, -t_2) \rangle \end{aligned}$$

Para el primer sumando, como  $(x_1, t_1) \in K$  entonces,  $\langle (x, s), (x_1, t_1) \rangle \leq 1$ . Para los dos siguientes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \langle (x, s), (x_1, -t_2) \rangle + \frac{1}{4} \langle (\tilde{x}, s), (x_1, t_1) \rangle &= \frac{1}{4} [\langle x, x_1 \rangle + s(-t_2) + \langle \tilde{x}, x_1 \rangle + st_1] = \\ &= \frac{1}{4} \langle (x, s), (x_1, t_1) \rangle + \frac{1}{4} \langle (\tilde{x}, -s), (x_1, t_2) \rangle \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ya que  $(x_1, t_2) \in K$ . Finalmente,  $\langle (\tilde{x}, s), (x_1, -t_2) \rangle = \langle (\tilde{x}, -s), (x_1, t_2) \rangle \leq 1$ . Y así  $\langle (\frac{x+\tilde{x}}{2}, s), (x_1, \frac{t_1-t_2}{2}) \rangle \leq 1$  y  $\frac{x+\tilde{x}}{2} \in K_1^o(s)$ , como queríamos probar.

Aplicando la desigualdad de Brunn-Minkowski:

$$|K_1^o(s)| \geq \left| \frac{K^o(s) + K^o(-s)}{2} \right| \geq |K^o(s)|^{\frac{1}{2}} |K^o(-s)|^{\frac{1}{2}}.$$

Como  $|K^o(s)| = |K^o(-s)|$  por ser  $K$  simétrico, llegamos a  $|K_1^o(s)| \geq |K^o(s)| \forall s \in \mathbb{R}$  y por lo tanto,  $|K_1^o| \geq |K^o|$ .

La simetrización de Steiner preserva el volumen, por lo que  $s(K) \leq s(K_1)$ .

$$s(K) = |K| |K^o| \leq |K| |K_1^o| = |S_u(K)| |K_1^o| = |K_1| |K_1^o| = s(K_1)$$

Entonces, como consecuencia del teorema 2.3.1, aplicando sucesivas simetrizaciones de Steiner a  $K$  de manera que la sucesión de cuerpos resultantes converja a la bola euclídea, se sigue que  $K_n^o \rightarrow \mathbb{B}_n$ . Ya que si  $K_n \rightarrow \mathbb{B}_n$ , entonces  $\delta(K_n, \mathbb{B}_n) \leq \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$ . Por definición de distancia de Hausdorff tenemos que  $K_n \subseteq \mathbb{B}_n + \varepsilon \mathbb{B}_n$  y  $\mathbb{B}_n \subseteq K_n + \varepsilon \mathbb{B}_n$ , es decir,  $(1-\varepsilon)\mathbb{B}_n \subseteq K_n \subseteq (1+\varepsilon)\mathbb{B}_n$ . Recordemos que  $(\lambda K)^o = \frac{1}{\lambda} K^o$ ,  $\mathbb{B}_n^o = \mathbb{B}_n$  y  $T^o \subseteq K^o$  si  $K \subseteq T$ . Entonces, se tiene que  $\frac{1}{1+\varepsilon} \mathbb{B}_n \subseteq K_n^o \subseteq \frac{1}{1-\varepsilon} \mathbb{B}_n$ .

$$|K^o| \leq |K_1^o| \leq \dots \leq |K_n^o| \rightarrow |\mathbb{B}_n|$$

Y como el volumen es continuo respecto a la distancia de Hausdorff se tiene que

$$|K| |K^o| = s(K) \leq s(\mathbb{B}_n) = |\mathbb{B}_n| |(\mathbb{B}_n)^o| = |\mathbb{B}_n|^2.$$

□



# Bibliografía

- [1] A.C.TOMPSON, *Minkowski geometry*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 63, Cambridge University Press, Cambridge 1996.
- [2] R. SCHNEIDER, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 151, Cambridge University Press, Cambridge 2014.
- [3] S. ARTSTEIN-ARIDAN, A. GIANNOPOULOS, V. D. MILMAN, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Mathematical Surveys and Monographs Volume 202. American Mathematical Society, 2015.
- [4] P.M. GRUBER, J.M. WILLS, *Handbook Of Convex Geometry*, Volume A, North-Holland, 1993.

