Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Probabilidad: una propuesta didáctica para 2º curso de ESO

Probability: a didactic proposal for 2nd ESO course

Autor

Lina Patricia Maldonado Guaje

Director

Rafael Escolano Vizcarra

Facultad de Educación

2017

"Cuando no está en nuestra mano determinar lo que es verdad, debemos actuar de acuerdo con lo que es más probable."

Descartes

ÍNDICE

I. EL OBJETO MATEMÁTICO

1.1 Objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático a enseñar es la introducción a la probabilidad desde un punto de vista intuitivo y conceptual, abordando el cálculo de probabilidades en experimentos sencillos.

1.2 Situación en el currículo.

La probabilidad está incluida en el currículo de segundo de ESO, dentro de la asignatura Matemáticas.

Según la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, para 2º curso de ESO los siguientes contenidos:

Bloque 5. Estadística y probabilidad.

(…)

- Fenómenos deterministas y aleatorios.
- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.
- Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
- Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.
- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

Relacionados con estos contenidos el currículo aragonés establece dos criterios de evaluación, a saber:

Crit.MA.5.3 Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.

Crit.MA.5.4 Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.

1.3 Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar.

Se pretende iniciar con una introducción a la probabilidad a partir del estudio de los sucesos, mediante la diferenciación de los sucesos aleatorios y los deterministas, utilizando para esto la definición de aleatoriedad y determinismo. Posteriormente, se introduce la exploración del espacio muestral, mediante la visualización de los diferentes resultados de un experimento, empleando la definición de espacio muestral y los diferentes sucesos y sus operaciones y estudiando el significado frecuencial de la probabilidad (relacionado con la frecuencia relativa), a partir de ensayos repetidos en las mismas condiciones, registrando los datos y dividiendo el número de veces que se obtiene el resultado que nos interesa, entre el número de veces que se realizó el experimento. A continuación, se estudia el significado clásico de la probabilidad, mediante el recuento de sucesos y su comprensión, utilizando la acepción dada por Laplace en sucesos equiprobables: cociente entre casos favorables y casos posibles. Se termina el tema estudiando los experimentos compuestos, mediante técnicas de recuento, utilizando para la resolución de problemas los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.

II. ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

1. Introducción escolar del objeto matemático.

A partir de la implementación de la LOMCE, el último bloque de matemáticas de 2do de ESO está conformado por dos unidades que corresponden a estadística y probabilidad. Dentro del currículo oficial, siempre es el último bloque de la asignatura de matemáticas para todos los niveles de la enseñanza secundaria obligatoria y es por este motivo que, lamentablemente, algunos centros y/o docentes (por lo ajustado del cronograma y el calendario escolar) lo excluyen dentro de su programación. Hasta la LOE, en este curso no se hacía referencia a la probabilidad y al azar, reduciéndose el bloque únicamente a la estadística y a los conceptos derivados de ésta, definiendo el concepto de frecuencia relativa al realizar las tablas agrupadas, sin ni siquiera relacionarlo con el concepto de probabilidad.

Para estudiar cómo es la introducción del tema en el aula, se utiliza el libro de 2do de ESO de la editorial SM-Savia (2016) que la introduce en el tema 13 "Probabilidad", compuesto por 4 apartados. En el primer apartado: "azar y determinismo", introducen la diferencia entre azar y determinismo mediante dos ejemplos: "si un vehículo circula a 80 km/hora a manera constante, podemos conocer con antelación el tiempo que tardará en recorrer una cierta distancia utilizando las leyes de la física. En cambio, cuando lanzamos una moneda al aire no podemos conocer su resultado de antemano". Este tipo de introducción es adecuada puesto que comprender la diferencia entre determinismo y aleatoriedad es la base de este tema.

En "sucesos", también introducen el contenido mediante un ejemplo: "Carlos, Esther y Jesús están jugando a un juego de mesa que consiste en desplazarse por un tablero y contestar una serie de preguntas en función del número que se obtenga al lanzar el dado tetraédrico y en el dibujo que acompaña el ejemplo sale los tres niños jugando y Esther lanzando el dado diciendo: puede salir un 4, mientras que uno de los chicos decía: o un tres y el otro: o un 2 o un 1". Considero que esta introducción, basada en un tratamiento intuitivo de los sucesos en un contexto de juego, resulta adecuada para explorar y establecer las posibles ocurrencias de un suceso (en este caso, al lanzar el dado tetraédrico). Además, una vez definido los conceptos y tipos de sucesos (elemental, compuesto, imposible y seguro), complementan la explicación con el ejemplo de un bombo con tres bolas (una roja, una azul y una morada) explicando todos los sucesos involucrados en el experimento “si sacamos una bola del bombo”.

La secuencia planteada por el libro de texto es la siguiente: reconocer y diferenciar los sucesos aleatorios de los deterministas, estudiar los sucesos y el espacio muestral. Seguidamente, estudiar las operaciones con sucesos y los experimentos compuestos y técnicas de recuento (utilizando la tabla de doble entrada y el diagrama de árbol y planteando su utilización en un experimento sencillo: “lanzar un dado y una moneda a la vez”), para finalmente definir la probabilidad de un suceso y la regla de Laplace.

Aunque el libro consultado (SM-Savia) no hace mención explícita sobre la posibilidad de crear probabilidad empírica mediante la repetición sucesiva de un experimento, se hace necesario que los estudiantes sepan distinguir entre la probabilidad teórica y la empírica. En un estudio realizado por Batanero y Serrano (1999) sobre el significado de la aleatoriedad en los estudiantes de secundaria encontraron que al pedirles a los estudiantes que establecieran si un conjunto de 4 sucesiones eran aleatorias o no (cara-cruz) en 40 lanzamientos de monedas, estos tenían mayor dificultad en el reconocimiento de posibles patrones de no aleatoriedad en las sucesiones que en el reconocimiento de frecuencias observadas y esperadas. Se puede concluir con esto que la enseñanza que propone esta editorial es muy tradicional: se otorga más importancia a la cuantificación de la probabilidad que a la comprensión de la noción. Aunque tan sólo hemos analizado la propuesta de una editorial, consideramos que esta enseñanza tradicional la comparten otras editoriales de libros de texto. En efecto, como se expone en Serradó et al. (2006), en los libros de texto la noción de probabilidad se realiza asimilándola con su medida desde una perspectiva clásica, como el valor que se obtiene de aplicar la regla de Laplace, o desde una perspectiva frecuencial como el valor al cual tienden las frecuencias relativas, sin incidir en el significado de esta noción. Por todo esto, podemos afirmar que la enseñanza habitual de la probabilidad se encamina a la excesiva formalidad, ya que va muy dirigida a la enseñanza de la probabilidad teórica (construcción del espacio muestral y a la aplicación de la regla de Laplace) y no trabaja la probabilidad empírica (o cuando la trabaja no la relaciona con el concepto formal) a través del estudio de fenómenos y datos que están en el entorno vital de los alumnos y cuyo estudio les resultaría mucho más motivador y beneficioso para comprender mejor el mundo en el que viven.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

En la tabla 1 aparecen los cuatro campos de problemas que se van a enseñar en este tema de probabilidad, con sus técnicas y tecnologías asociadas.

Campo de Problemas	**Técnicas**	**Tecnologías**
Determinación de experimentos aleatorios y deterministas	Establecimiento del carácter aleatorio o determinístico de las experiencias.	Definición del suceso aleatorio y determinista.
Exploración del espacio muestral	Determinación de los posibles resultados. Técnicas de recuento.	Definición: Espacio muestral, sucesos, tipos de sucesos y operaciones.
Probabilidad de sucesos	Técnicas de recuento. Unión e intersección de sucesos. Sucesos compatibles / incompatibles. Frecuencia absoluta y relativa de un suceso	Propiedades de la probabilidad. Sucesos equiprobables. Regla de Laplace. Probabilidad de la unión, intersección y del suceso contrario
Experimentos compuestos	Tablas de contingencia Diagramas de árbol	Regla de Laplace. Probabilidad de la unión, intersección y del suceso contrario

Tabla 1 Campos de problemas, técnicas y tecnologías habituales en la enseñanza de la probabilidad en 2do de ESO

3. **¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?**

Este es, probablemente, el único tema del currículo de Matemáticas en el que el alumnado tiene preconcepciones, formadas fuera del aula de clase, fruto de sus propias experiencias. Estas experiencias previas pueden ser aprovechadas por el profesor y ser didácticamente útiles al recurrir a ellas para construir un conocimiento formal y elaborado, aunque también pueden dar lugar a conceptos erróneos que hay que corregir en el aula de clase, con experimentaciones adecuadas. Como hemos indicado en II.3 la enseñanza excesivamente formal puede provocar en los alumnos desmotivación y dificultades de aprendizaje.

III. CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

En el segundo curso, el alumnado de la ESO se enfrenta al estudio sistemático del azar y al cálculo de probabilidades. Para introducirse en este objeto matemático el estudiante debe haber alcanzado las siguientes destrezas en su etapa de educación primaria:

- Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas.
- Realizar conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería…). Comparar cualitativamente probabilidades (más probable, menos probable, improbable).
- Calcular la frecuencia relativa (de atributos) a partir de observaciones o datos.
- Conocer el número racional como razón para cálculo de frecuencias absolutas.
- Resolver problemas sencillos que impliquen dominio de los contenidos propios de probabilidad.

Respecto al primer curso de ESO, se deben haber introducido los siguientes contenidos:

- Fenómenos deterministas y aleatorios.
- Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
- Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.
- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.

Sin embargo, como ya se ha mencionado anteriormente, por lo ajustado del cronograma y el calendario escolar y al ser este tema el último en la programación para todos los cursos de matemáticas de la ESO, lamentablemente no se le da la importancia requerida, llegando los docentes, en algunos centros, a excluirlo de su programación. Es por esto que la introducción de este objeto matemático que por currículo está programado para el curso de primero de la ESO, usualmente se pospone a los siguientes cursos (2º o 3º de ESO).

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Al comenzar la enseñanza de la probabilidad es especialmente importante analizar los razonamientos de los niños, puesto que tratamos con ideas bastante abstractas y no tan ligadas a la experiencia directa del niño como pudieran ser los conceptos geométricos o numéricos (Batanero, 2013). Hasta este momento de su educación, como menciona Gómez-Torres et al. (2014) sólo se observan, en los libros de textos de primaria, el tratamiento inicial de cuatro de los cinco tipos de conocimiento que forman parte de la alfabetización probabilística: ideas probabilísticas, asignación de probabilidades, uso de lenguaje probabilístico y capacidad de contextualizar, sin hacer énfasis en la evaluación de la calidad de la información disponible. Concretamente, en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, en el área de matemáticas están presentes las nociones de azar y sucesos.

Bloque 5. Estadística y probabilidad

(…)

3. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado.

4. Observar y constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición.

Sin embargo, Estrada y Batanero (2015) establecen que en la etapa de educación primaria, la necesidad de la formación en probabilidad de los niños podría no ser percibida, no dándose valor a la materia o su enseñanza. Esto se debe principalmente al hecho de que la inclusión de la probabilidad en la educación primaria es reciente, con el cambio a la LOMCE. Además, se ha asumido con un cambio en el enfoque, privilegiándose el enfoque frecuencial, basado en la simulación y la experimentación, con la finalidad de proporcionar a los niños una experiencia estocástica, pero sin la correspondiente asociación a la relación con el concepto de probabilidad.

En la línea de estos estudios, la enseñanza de la probabilidad debería estar más valorada, asignándole mayor relevancia en edades tempranas. Se debe cuidar y/o aclarar las creencias preconcebidas e infundadas que tienen los estudiantes sobre los experimentos o fenómenos aleatorios de la vida cotidiana. Como se mencionó en el apartado 1, esta enseñanza previa incluso se ve pospuesta a grados superiores por lo ajustado del calendario escolar. En estas condiciones, no tenemos seguridad de que los alumnos posean estos conocimientos previos y por este motivo vamos a abordar la enseñanza de la probabilidad como si fuese la primera que vez que entran en contacto con este concepto.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior no vamos a realizar una prueba inicial de diagnóstico de la comprensión de la probabilidad por parte de los alumnos. Entraremos directamente a desarrollar la propuesta de enseñanza. Se utilizarán los problemas de razón de ser del cálculo de probabilidades propuestos en el siguiente apartado (Apartado IV.3) para que los estudiantes sean capaces de rememorar los conocimientos anteriores sobre aleatoriedad y probabilidad. Algunos de estos problemas serán resueltos en forma individual, otros por parejas y otros en pequeños grupos. Posteriormente se comentarán resultados, se discutirán y se corregirán en conjunto.

IV. RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

Fischbein (1975) concluyó que los niños tienen ideas correctas pero parciales (o incompletas) sobre los conceptos probabilísticos y analizó el efecto de la enseñanza para la mejora de la intuición, otorgándole un peso importante a ésta como componente de la inteligencia. Para este autor, el conocimiento intuitivo "no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos rigurosos y, a pesar de ello, se tiende a aceptar como cierto y evidente"

La razón de ser que se va a utilizar en el aula se basa en la presencia natural de la probabilidad en la vida cotidiana, ya que gran parte de los sucesos ocurridos en nuestro día a día son aleatorios. Utilizando la singularidad que tienen los fenómenos aleatorios, de producir resultados diferentes para un mismo experimento tras varias repeticiones del mismo, aun realizándose con las mismas condiciones, se pretende analizar la asignación del grado de incertidumbre asociado a situaciones didácticas, basándose en experimentos sencillos que formen parte de la vida cotidiana, como es el cálculo de probabilidades en los juegos de azar más elementales como es el lanzamiento de una moneda o un dado.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Si coinciden, la noción de azar nació con los juegos de azar y las prácticas de adivinación. El primer dado que se conoce en la historia fueron los astrágalos o tabas (huesos) y al igual que los dados que actualmente conocemos se tienen referencias del valor en puntos de cómo caían: lado plano 1 punto, cóncavo 3 puntos, convexo 4 puntos y sinuoso 6 puntos. A los jugadores de los astrágalos se le conocían como astragalizantes y estos tiraban los huesos al aire como se hacen con los dados comunes. Los dados cúbicos eran abundantes en culturas primitivas, como las civilizaciones egipcias, chinas, griegas y romanas, que usaban juegos de azar en un intento de predecir o controlar el destino en la toma de decisiones o ceremonias religiosas. En las pirámides de Egipto se han encontrado pinturas que muestran juegos de azar de la época de 3.500 años A.C. Curiosamente, el desarrollo de la teoría de la probabilidad es mucho más reciente, según David (1962), no hay razones claras para explicar este retraso, sin embargo, algunos historiadores atribuyen al hecho de no advertir la equiprobabilidad de los resultados elementales en dados equilibrados, como una de las causas de que el desarrollo del cálculo de probabilidades se retrasara durante siglos

La probabilidad nace del azar. La palabra *Azar: del árabe hispano azzahr y éste del árabe zahr, literalmente, "flores"*. Como ya se sabe los juegos de azar y los dados están muy relacionados y los dados árabes antiguos en vez de marcar los números de los lados con puntos como es el dado actual, lo marcaban con flores. De allí surge el nombre.

En los comienzos del siglo XVI, los matemáticos italianos comienzan a interpretar los resultados de experimentos aleatorios sencillos, Cardano (1501-1576), cuyo tratado, De Ludo Aleae, puede ser el mejor manual escrito para un jugador de la época. En él resuelve varios problemas de análisis combinatorio. Establece la equiprobabilidad en la aparición de las caras de un dado a largo plazo.

El desarrollo, y los primeros fundamentos, del cálculo de probabilidades para los juegos de azar se producen lentamente durante los siglos XVI y XVII, con autores como Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665). Los dos autores consideraron el problema de los dados y el problema de los puntos, ya estudiados por Cardano. El problema de los dados plantea cuántas veces hay que tirar dos dados hasta que aparezca en ellos el seis. El problema de los puntos fue el que el Caballero De Meré, un jugador empedernido, le propuso a Pascal, y éste, a su vez se lo comunicó a Fermat. Consistía en cómo debería repartirse el dinero de las apuestas depositado en la mesa si los jugadores se ven obligados (seguramente por la policía ya que el juego estaba prohibido) a finalizar la partida sin que exista un ganador (Morales, 2002).

Christian Huygens en 1657, escribió un pequeño trabajo llamado *De Ratiociniis in Ludo Aleae (sobre el razonamiento de los juegos de azar)*, que fue la más importante aportación a la teoría de la probabilidad en la segunda mitad del siglo XVII. En la última parte del siglo XVII y principios del XVIII James Bernoulli escribió un amplio tratado, *Ars Conjectandi (El arte de la previsión)* sobre el cálculo de probabilidades, publicado en 1713, continuando el estudio de Huygens. Pierre Rémond De Montmort (1678-1719), cuya decisiva obra *Essai d'analyse sur le jeux d'hasard* contiene la teoría de las combinaciones, juegos de cartas y de dados. Moivre estudió el problema de la duración del juego, siendo su contribución más importante a la teoría de la probabilidad encontrada en su obra *A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Actividad azar: Señala cuáles de las siguientes experiencias son de aleatorias:

a) Dejar caer un cuerpo y observar su caída.
b) Que salga tu número premiado en la rifa de fin de curso.
c) Sacar un caramelo de una bolsa de caramelos variados y averiguar su sabor.
d) Ser elegido delegado de tu clase.
e) Tirar a canasta con los ojos cerrados y encestar.

Solución: Son experiencias aleatorias los apartados: b), c) y e)

Actividad con Geogebra (Lanzamiento de una moneda): En Batanero (2006), se sugiere usar el ordenador y experimentar con muestras de tamaño creciente, de modo que el estudiante vaya tomando consciencia de la estabilización de las frecuencias relativas a medida que aumenta el número de pruebas para introducir gradualmente la aproximación frecuencial a la probabilidad. Así, la aplicación de la regla de Laplace irá precedida del análisis previo del experimento.

Esta actividad permite la comprensión de la probabilidad como estabilización de la frecuencia de una manera sencilla y visual, utilizando el programa Geogebra. Con él se ejercita la comprensión de las probabilidades cuando un experimento tan sencillo como el lanzamiento de una moneda se repite un gran número de veces. El applet se encuentra en la siguiente dirección web https://www.geogebra.org/m/ZDNUEEwW

A continuación se presenta la simulación del lanzamiento de una moneda, en ella encontraremos una tabla de frecuencias relativas y frecuencias absolutas que van procesan los datos, además de un gráfico que muestra la distribución de las frecuencias relativas al realizar los lanzamientos. Mediante tablets (u ordenadores) trabajarán los estudiantes en parejas, haciendo lanzamientos de las monedas y haciendo un registro (recuento) de los resultados que se obtienen al lanzar 5, 10, 25, 50, 100 y 200 veces una moneda. En esta actividad, se quiere que los estudiantes observen como se estabiliza el conteo de caras y cruces (frecuencia absoluta) y la frecuencia relativa correspondiente a la probabilidad teórica que todos conocemos, repitiendo el experimento bajo las mismas condiciones (sentido frecuencial de la probabilidad).

En este problema la técnica asociada es el cálculo de la frecuencia relativa del suceso "obtener cara" y del suceso "obtener cruz". Al concluir la actividad la tecnología que aparecerá institucionalizada en el aula es la noción de probabilidad como límite de frecuencias relativas.

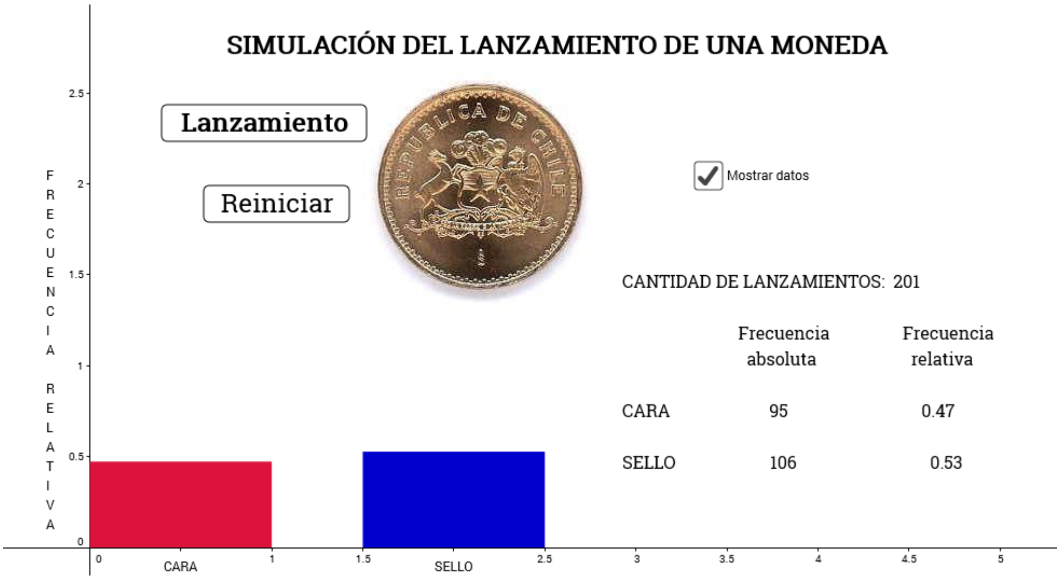


Figura 1 Visualización de la aplicación de Geogebra - Lanzamiento de una moneda

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La idea es utilizar los conceptos básicos y habilidades que traen los estudiantes tanto en la etapa de Educación Primaria como en 1º de la ESO sobre probabilidad, como son la discriminación entre fenómenos aleatorios y determinísticos y las técnicas de conteo. Estas habilidades permiten al estudiante reconocer un universo de eventos donde debe trabajar, y son necesarias para llegar a establecer una asociación entre un determinado evento y una medida de la incertidumbre. Se introducirá la probabilidad y los fenómenos aleatorios mediante simulación, con el experimento más sencillo y a su vez más utilizado, que es el lanzamiento de una moneda. Se quiere que el estudiante comprenda que en espacios de probabilidad discretos con sucesos equiprobables, para asignar una medida a la incertidumbre de un cierto fenómeno aleatorio, se requiere determinar el número de eventos favorables entre la totalidad de eventos posibles.

Antes de realizar la simulación con Geogebra, se debe discutir y analizar con los estudiantes que los fenómenos estudiados por la probabilidad cumplen con ciertas características: se conocen todos los posibles resultados antes de realizar el experimento (puede salir cara o cruz), no se puede saber cuál de los posibles resultados se obtendrá en un experimento en particular y que el experimento puede repetirse tantas veces como se quiere.

En Batanero (2015), se explica el concepto de aleatoriedad desde varios puntos de vista: intuitivo, clásico, frecuentista, subjetivo y axiomático. En esta primera actividad que hemos presentando anteriormente, se quiere explorar algunos de estos puntos de vista: desde la intuición se le pregunta al estudiante sobre cuál puede ser el resultado del lanzamiento de una moneda y si alguno de los posibles resultados (caer cara o cruz) consideran que tienen mayor o menor probabilidad con respecto al otro, con preguntas como: ¿luego de obtener 3 caras es más probable que en el siguiente lanzamiento caiga cruz? (idea de repetibilidad de un experimento aleatorio e independencia de los ensayos sucesivos). Proponemos comenzar por el significado frecuencial, mediante la simulación y la utilización del concepto de frecuencia relativa y desde el significado clásico, que está inherente en el experimento pero que será desarrollado en las clases posteriores como es la regla de Laplace: cociente de casos favorables y posibles y la equiprobabilidad de sucesos simples.

Se fomenta la intuición, la exploración y el sentido frecuencial puesto que consideramos que la enseñanza tradicional de la introducción a la probabilidad con la regla de Laplace es restrictiva y mecánica y no da respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad sino que se limita a proporcionar un método de cálculo sencillo de algunos sucesos (equiprobables), no extensible a experimentos con número infinito de posibilidades o casos con espacio muestral finito pero con sucesos no equiprobables, como por ejemplo el lanzamiento de chinchetas que es un problema propuesto dentro del campo de problemas que se presenta en el siguiente apartado.

V. EL CAMPO DE PROBLEMAS

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Para la introducción de la probabilidad, se consideran 4 campos de problemas que permitan trabajar los distintos aspectos que conlleva el estudio de la probabilidad. Dichos campos son:

1) Determinación de experimentos aleatorios y deterministas.
2) Exploración y determinación del espacio muestral.
3) Probabilidad de sucesos.
4) Experimentos compuestos.

V.1. Determinación de experimentos aleatorios y deterministas.

Problema 1: Determinación de aleatoriedad.

Indica si los siguientes experimentos son aleatorios o no. En caso afirmativo escribe el espacio muestral:

a) Dejar caer una bola de acero y una de goma desde la misma altura y anotar cual llega primero al suelo.
b) Extraer (sin mirar) una bola de una caja que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10.

Solución:

a) Experimento determinista, sabemos que la primera en llegar al suelo es la bola de acero ya que pesa más.
b) Experimento aleatorio: Sabemos todos los posibles resultados antes de realizar el experimento pero no se puede saber cuál de los posibles resultados se obtendrá. El espacio muestral corresponde al conjunto E={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Problema 2: Dados y estudiantes *(Jiménez y Jiménez, 2005):*

Se asignan dos números distintos entre 1 y 6 a cada uno de tres estudiantes. Por ejemplo: Estudiante A: 1 y 4. Estudiante B: 2 y 5. Estudiante C: 3 y 6. Un estudiante lanza un dado. Se asigna un punto a aquel estudiante que tiene el número que sale en la cara superior de un dado convencional. El ganador del juego es aquel que logre primero sumar 5 puntos. Se les pide que repitan el juego tres veces y se entrega una hoja con las siguientes preguntas:

i) Antes de lanzar el dado, ¿qué jugador tiene mayor posibilidad de obtener el punto?

ii) ¿Cuál es el número mínimo de veces que se debe lanzar el dado para obtener un ganador?

iii) ¿Cuál es el número máximo de veces que se debe lanzar el dado para obtener un ganador?

Este problema se utilizará para introducir la idea de experimento aleatorio utilizando técnicas muy elementales de recuento, antes de su realización el profesor no dará mayores instrucciones sobre cómo realizarlo, sólo discutirá con los estudiantes el apartado i) del problema para establecer las creencias iniciales de los estudiantes sobre los posibles resultados de la actividad (máximo 5 minutos de reflexión sobre las creencias que más se repiten entre los grupos de estudiantes). Los alumnos se posicionarán en grupos de tres para buscar las soluciones posibles de los apartados ii) y iii). Una vez realizados los ensayos, se realiza una puesta en común de los resultados y el profesor explicará las posibles diferencias que puedan establecerse entre las creencias iniciales de los alumnos y lo obtenido en el experimento.

Problema 3: Lanzamiento de chinchetas.

Mostrando una chincheta, se le pregunta a los estudiantes: “si lanzo esta chincheta, ¿Qué es más probable, que caiga con la punta hacia arriba o que lo haga con ella hacia abajo?”. ¿Qué podríamos hacer para saberlo?.

Es muy probable que en la clase haya una gran cantidad de criterios en cuanto a las creencias previas, siendo difícil llegar a un consenso previo de lo que puede pasar. En cuanto a cómo se podría conocer la probabilidad, se podría esperar que una vez realizado el primer acercamiento del sentido frecuencial de la probabilidad con el ejercicio del dado (incluido en la razón de ser del objeto matemático), los estudiantes propongan el lanzamiento de la chincheta un cierto número de veces y analizar los resultados obtenidos.

Se repartirán las chinchetas y en grupos de 3 alumnos empezarán a realizar los lanzamientos, hasta llegar a un número grande de éstos, por ejemplo: 100 lanzamientos, anotando y valorando los resultados obtenidos. Posteriormente se hará una puesta en común de los resultados en el conjunto de la clase, tratando de llegar a un acuerdo de las probabilidades estudiadas.

Problema 4: Simulaciones de dados.

Se han fabricado con un molde varios miles de dados. Sospechamos que son incorrectos. ¿Cómo procedemos para averiguar si son o no correctos? En caso de que no lo sean, ¿Cómo evaluaremos la probabilidad de cada cara?

Supongamos que en 1000 lanzamientos de uno de esos dados "sospechosos", hemos contado los resultados y construido con ellos la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6
n	151	123	234	105	203	184
f_i	0.151	0.123	0.234	0.105	0.203	0.184

¿Qué podemos decir sobre nuestras sospechas?

Comprobación: Este ejemplo se puede comprobar mediante una simulación en este caso del lanzamiento de un dado "correcto" mediante https://www.geogebra.org/m/upH7vHj2, en este caso, además del gráfico de barra de la frecuencia relativa de todos los lanzamientos, se presenta la recta que muestra probabilidad teórica para los lanzamientos del dado y la siguiente información estadística respecto del lanzamiento sucesivo de un dado: Número de lanzamientos realizados, frecuencia relativa de cada lanzamiento y la frecuencia relativa porcentual de cada lanzamiento. Con él además se refuerza la comprensión de las probabilidades cuando el experimento se repite un gran número de veces que se comenzó en el ejercicio del apartado IV de la razón de ser del objeto matemático.

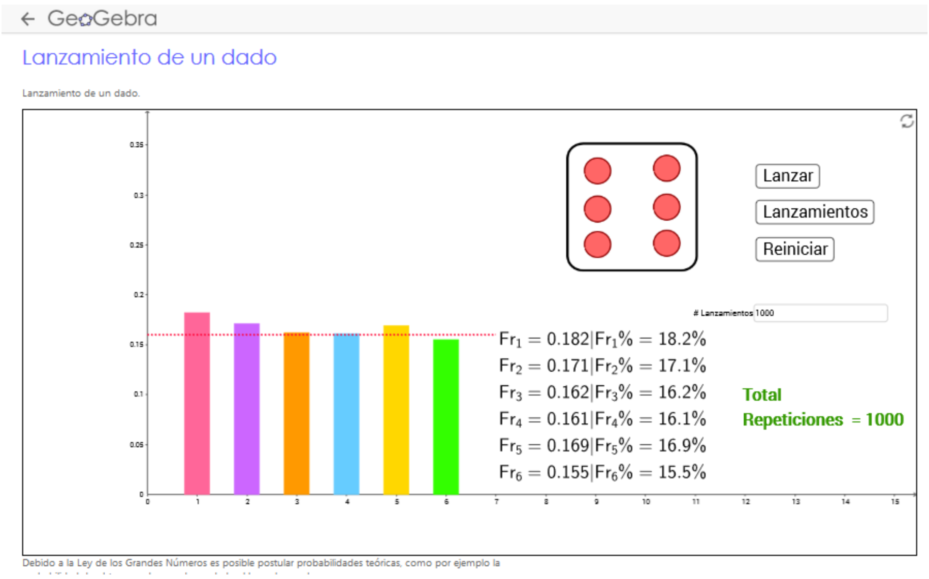


Figura 2 Visualización de la aplicación de Geogebra - Lanzamiento de un dado

V.2. Exploración y determinación del espacio muestral.

Problema 5: Carrera de caballos.

En una carrera participan 3 caballos A, B y C.

a) {A, B, C} es un posible orden de llegada de los caballos a la meta. ¿Cuántas llegadas diferentes pueden tener lugar? Indícalas.

b) Consideramos el suceso T = “gana el caballo A”. ¿De cuántas maneras puede acontecer este suceso?

c) Consideramos el suceso R = “no gana B”. ¿De cuántas maneras puede acontecer este suceso?

d) Dos sucesos son compatibles si $A \cap B \neq \emptyset$, mientras que si $A \cap B = \emptyset$ se dice que son incompatibles. ¿Son los sucesos T y R compatibles o incompatibles?

Solución:

a) El número de posibles llegadas diferentes es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

{{A, B, C}, {A, C, B}, {B, A, C}, {B, C, A}, {C, A, B}, {C, B, A}}

b) Dos elementos: {A, B, C}, {A, C, B}

c) Cuatro elementos: {A, B, C}, {A, C, B}, {C, A, B}, {C, B, A}

d) Son compatibles.

Problema 6: Describiendo experimentos

Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

a) Lanzar dos monedas.
b) Lanzar una moneda y un dado.
c) Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.
d) El tiempo, con relación a la lluvia, que hará durante tres días consecutivos.

Solución:

a) Sea C= sacar cara y X=sacar cruz, se tiene E={(C,C), (C,X), (X,C), (X,X)}. El espacio muestral está formado por 4 sucesos.
b) E={(C,1), (C,2), (C,3), (C,4), (C,5),(C,6), (X,1), (X,2), (X,3), (X,4), (X,5), (X,6)}. El espacio muestral está formado por 12 sucesos.
c) Sea B= sacar bola blanca y N= sacar bola negra, tenemos E={BB,BN,NN}. E está formado por 3 sucesos.
d) Si llamamos L=día con lluvia y N= día sin lluvia, se obtiene el siguiente espacio muestral: E={(LLL),(LLN),(LNL),(NLL),(LNN),(NLN),(NNL),(NNN)}. El espacio muestral está formado por 8 sucesos.

Problema 7: El error de Leibniz.

El concepto de probabilidad puede parecer uno de los más sencillos de entender de las matemáticas, pero la historia demuestra que puede llegar a confundir incluso a los más ilustres matemáticos. Leibniz, por ejemplo, era aficionado a los juegos de dados y estaba convencido de que era igual de difícil conseguir 11 puntos que 12, argumentando que ambas puntuaciones sólo se podían conseguir mediante una combinación de dos dados: 6 y 5 en el primer caso y, 6 y 6 en el segundo. En realidad se equivocaba, porque 11 se puede obtener de dos formas: con un 5 en el primer dado y un 6 en el segundo o con un 6 en el primero y un 5 en el segundo. Haz la prueba tirando los dados muchas veces y comprobarás que salen más a menudo 11 puntos que 12. Luego calcula el espacio muestral.

Solución:

E={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

El espacio muestral está formado por 36 sucesos. Es más probable obtener 11 puntos que 12 puntos porque hay dos sucesos que permiten “obtener 11 puntos” frente a uno para “obtener 12 puntos”.

Problema 7: Inventa.

Se pide a los estudiantes (de manera individual) inventar un experimento aleatorio y describir su espacio muestral. Se pide determinar un suceso imposible, dos sucesos compatibles, dos sucesos contrarios y un suceso imposible presente en su experimento.

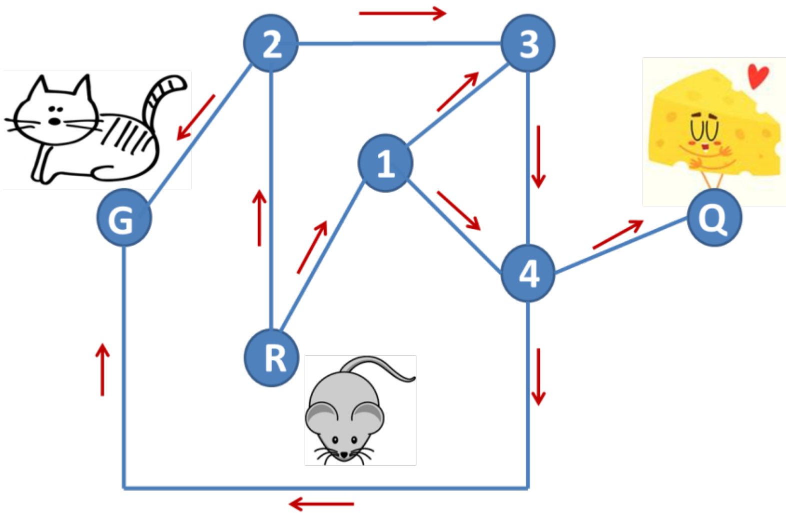
Posibles respuestas: Aquí podemos esperar que los estudiantes construyan algunos experimentos que pertenezcan a su cotidianidad pero que sean un poco más elaboradas que los típicos ejemplos ya vistos de lanzamiento de monedas y dados. Puede ser algún experimento asociado a las cartas, extracción de bolas numeradas, girar la flecha de la ruleta numerada o elegir bombones al azar de una caja con bombones de diferentes sabores.

V.3. Probabilidad de sucesos.

Problema 7: Juego del ratón, el gato y el queso *(Mora, 2000).*

Este juego consiste en ir introduciendo ratones (fichas) por la entrada del laberinto R que tiene dos salidas: G, el gato, que se come a los ratones y Q, el queso, que es lo que buscan los ratones.

Para jugar tira una moneda, si sale cara toma el camino de la derecha, si sale cruz el de la izquierda. Si introduces ocho ratones, ¿cuántos se comerá el gato? ¿cuántos se irán al queso? Repite varias veces el juego y anota los resultados.



Solución: Para resolver es necesario un sencillo recuento de frecuencias absolutas, sin mencionar que estamos trabajando con frecuencias o con probabilidades. Se quiere que los estudiantes observen que al aumentar el número de veces que repiten el experimento, la frecuencia relativa se estabiliza. No se les menciona a priori nada sobre frecuencias, se fijan el número de ratones que se introducen en el laberinto (en este caso ocho ratones, siendo las probabilidades teóricas p(gato)= 5/8 y p(queso)= 3/8), y se les pide a los estudiantes que repitan el experimento 3 veces (o tandas) sumando los resultados obtenidos. Se les pide también antes de realizar cada una de las tandas que apuesten a lo que ellos consideran que sería el resultado. Se pretende observar cómo van modificando sus apuestas a lo largo del experimento. El objetivo matemático de este problema es que los estudiantes relacionen la estabilización de la frecuencia relativa con el concepto de la probabilidad teórica que después de realizar los ensayos, se calcula.

Problema 8: Juego de dominó.

En un juego de dominó se extrae una ficha. Calcula la probabilidad de que:

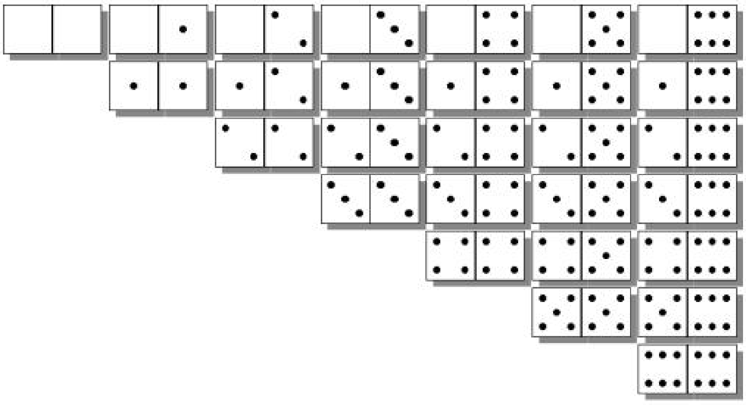
a) La suma de sus puntos sea par.

b) La suma de sus puntos sea impar.

c) Sea una ficha doble.

d) La suma de sus puntos sea mayor que 7.

Solución: En situaciones como la presente nos vemos obligados a desarrollar el espacio muestral, contando, posteriormente, las situaciones que se ajustan al problema (casos favorables). El objetivo de este problema es que los estudiantes construyan el espacio muestral antes de asignar probabilidades a los sucesos.



a) $P(suma\ par) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

b) $P(suma\ impar) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ ó

$P(suma\ impar) = 1 - P(suma\ par) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

c) $P(doble) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

d) $P(suma > 7) = \frac{9}{28}$

Problema 9: Idiomas.

De los 39 alumnos de una clase, 16 escogieron como idioma el francés, y 27, el inglés. Nueve alumnos eligieron ambos idiomas y el resto no escogió ninguno de ellos. Si se elige al azar a un alumno de dicha clase, halla las siguientes probabilidades.

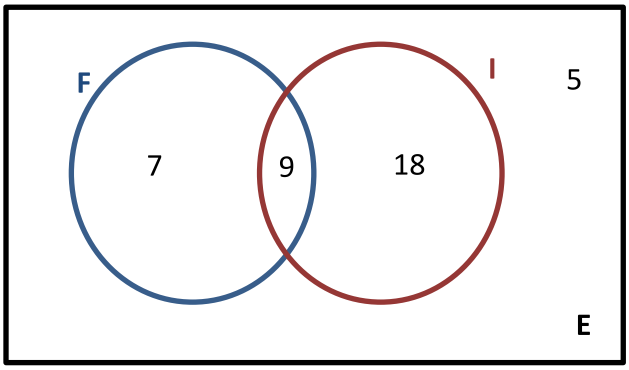
a) Escogió francés. b) Escogió inglés.

c) Escogió ambos idiomas. d) Escogió francés o inglés.

e) Escogió francés, pero no inglés. f) No escogió ni inglés ni francés.

Solución: Se consideran los sucesos F = “estudiar francés” e I = “estudiar inglés”.

Se utiliza el diagrama de Venn para calcular el número de alumnos que estudian solo inglés y solo francés. Como hay 9 alumnos que estudian los dos idiomas y 16 alumnos que estudian francés, se deduce que 7 estudian solo francés. De modo análogo se deduce que 18 alumnos estudian solo inglés. El número de alumnos que estudian idiomas es 34, y, por tanto, habrá 5 alumnos que no estudian ningún idioma.

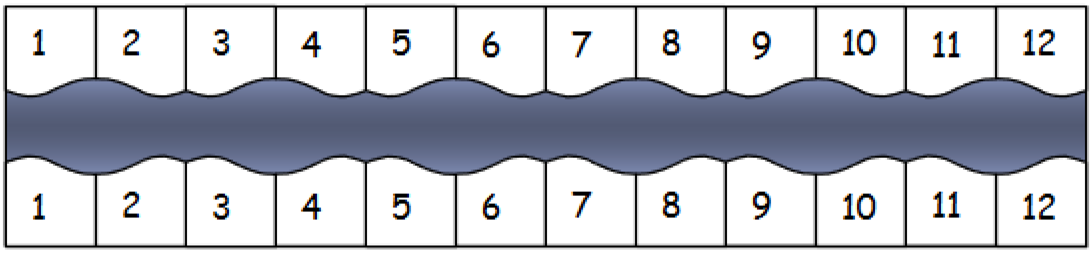


a) $P(F) = \frac{16}{39}$ b) $P(I) = \frac{27}{39}$ c)$P(F \cap I) = \frac{9}{39}$

d) $P(F \cup I) = \frac{34}{39}$ e) $P(F \cup I^c) = \frac{7}{39}$ f) $P(F \cap I^c) = \frac{5}{39}$

Problema 10: Juego cruzar el río *(Gallardo et. Al, 2007).*

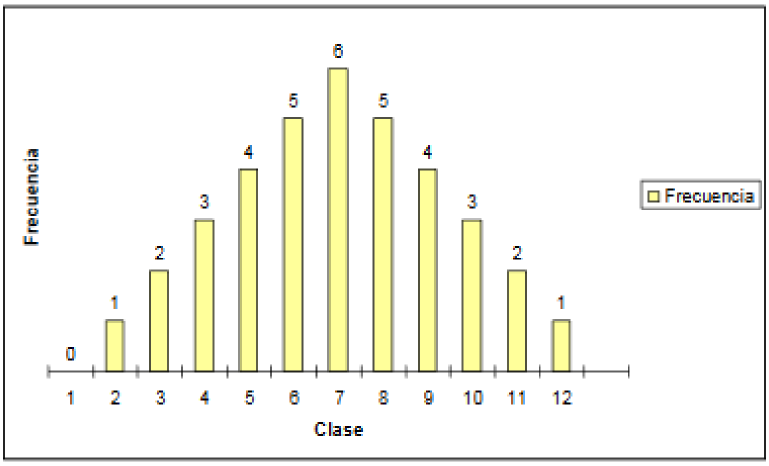
Para el trabajo con sucesos equiprobables y no equiprobables, comenzamos con el siguiente juego cuyo objetivo final es cruzar un río como se observa en la Figura:



La franja central que se observa en la figura anterior representa un río y a cada lado doce casillas numeradas del 1 al 12. Para este juego se necesitan 24 fichas y dos dados.

En este juego han de participar dos jugadores; cada uno de los cuales dispone de 12 fichas, situando éstas donde ellos quieran (desde situarlas cada una en un lugar hasta ponerlas todas en la misma casilla). Uno de los jugadores lanzará los dos dados, sumará las puntuaciones obtenidas y, si tiene una ficha en la casilla numerada con el resultado de la suma, pasará la ficha a la otra orilla. Después le tocará el turno al otro jugador que procederá del mismo modo. Gana el juego el primer jugador que pasa a la otra orilla todas sus fichas. Realizarán el juego varias veces de manera que ellos mismos puedan descubrir que hay posiciones desde las que es más fácil pasar al otro lado (mayor probabilidad de ocurrencia) y posiciones menos probables o imposibles (casilla 1).

Los aspectos más importantes tratados en este juego (objetivos didácticos) son los de no equiprobabilidad de sucesos, suceso imposible y suceso más o menos probable. En este problema esperas que los alumnos asignen probabilidades a los sucesos “suma de dos dados” estableciendo el espacio muestral y aplicando la Regla de Laplace. También se puede trabajar la introducción a la representación gráfica de los resultados obtenidos del juego, como por ejemplo el histograma (ver figura).



Problema 11: Para casarse.

Hace ya mucho tiempo, en un pueblo remoto, cuando una pareja quería casarse tenía que pedir permiso: iban al alcalde y éste ponía en la mano de la chica 6 trozos de una cuerda fina que sobresalían por los 2 lados y se la cerraba. Su pretendiente tenía que ir uniendo los extremos de 2 en 2 por cada lado de la mano sin que la abriera. Una vez hechos los seis nudos la chica abría la mano... Si la cuerda salía formando un anillo podían casarse; si no, NO tenían derecho a casarse. ¿Qué podríamos decir sobre la probabilidad de casarse?, ¿es muy probable, poco probable o imposible?, ¿La podemos calcular?, ¿Cuál es la probabilidad de que se casen?.

Solución: Lo que se quiere hacer con este problema sería primero observar las concepciones previas que tienen los estudiantes sobre la probabilidad de casarse: ¿Es muy probable?, ¿poco probable? ¿imposible?. Luego, se busca realizar el experimento por parejas, a cada uno de los integrantes de las parejas que anuden las cuerdas por turnos y observen el resultado. Se puede repetir unas cuantas veces el experimento para hacerse una idea aproximada de cuál es el orden de la probabilidad que buscamos, es decir, obtener el resultado del problema por medio de la experimentación.

Luego del debate, se pide a los alumnos que utilicen los conocimientos aprendidos a lo largo de la unidad didáctica para calcular la probabilidad teórica del suceso. Se da un tiempo para la reflexión por parejas, se discute y luego se corrige en la pizarra analizando la situación involucrada en el experimento: atamos como queremos las cuerdas por un de los lados de la mano, nos fijamos ahora en el otro lado y calculamos los casos favorables (CF) y los posibles (CP). Las maneras de atar son las siguientes: el primer nudo, elegido uno de los extremos, lo podemos atar con cualquiera de los otros 5 , elegido el segundo extremo, tras hacer el nudo anterior ya sólo quedan 3 para elegir; ya ahora para el último sólo quedan dos extremos sueltos luego la única posibilidad es atarlos entre si. Por lo tanto $CP = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$. Esos serán los casos posibles.

¿En cuántos de esos casos sale un anillo: casos favorables?

Elegido uno de los extremos, el primer nudo podemos hacerlo con todas las cuerdas excepto aquella que ya está unida por arriba con ésta, son cuatro casos; en el segundo tenemos que evitar la cuerda que ya está unida con ella, dos casos; en el tercero ya sólo quedan dos extremos, luego una sola posibilidad. Con todo esto, los casos favorables $CF = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$. Luego la probabilidad de casarse el primer año: $p(casarse) = \frac{8}{15} = 0.53$.

Se casan en más de las mitad de los casos: 53% de las veces.

V.4. Experimentos compuestos.

Problema 12: Cuatro gatitos *(Gadner y García, 1989).*

Al calcular probabilidades es fácil despistarse. Veamos aquí a un gato y una gata que se fueron de picos pardos.

Señor Gato: Oye, salada, ¿cuántos gatitos hemos tenido de la última lechigada?

Señora de Gato: ¡Pero qué zángano eres! ¿No sabes contar? ¡Pues cuatro!

Señor Gato: ¿Cuántos han sido machos?

Señora de Gato: Es difícil de saber. Todavía no te lo puedo decir.

Señor Gato: No es muy probable que los cuatro hayan sido machos.

Señora de Gato: Y tampoco lo es que las cuatro sean gatas.

Señor Gato: A lo mejor sólo hay un gatito macho.

Señora de Gato: Y tal vez haya solamente una hembra.

Señor Gato: Calculando no es muy difícil. El que un gatito sea macho o hembra es cosa de cara o cruz. Así pues, es evidente que lo más verosímil es que haya dos machos y dos hembras.

¿Crees que ha razonado correctamente el señor Gato? ¿Puedes comprobarlo? ¿De qué forma lo harías?. Calcula la probabilidad de:

a) Que los cuatro gatitos sean machos.
b) Que los cuatro gatitos sean hembras.
c) Que sólo haya un gatito macho.
d) Qué solo haya una gatita hembra.
e) Que hayan 2 gatos machos y 2 hembras.

<u>Solución:</u> Comprobemos la teoría del señor Gato: denotando H a las hembras y M a los machos, podemos dar la lista de todos los casos igualmente posibles, que son 16.

$\boxed{\text{MMMM}}$	$\boxed{\text{HHHH}}$	MMMH	HHHM	MMHH	HHMM
MHMH	HMHM	MHMM	HMHH	MMHM	HHMH
MHHM	HMMH	MHHH	HMMM		

Solamente en dos de los 16 casos son todas las crías del mismo sexo. Por tanto, la probabilidad de que así ocurra es de 2/16, o sea, de 1/8. El señor Gato estaba en lo cierto al pensar que este resultado tenía una probabilidad pequeña.

MMMM	HHHH	MMMH	HHHM	MMHH	HHMM
MHMH	HMHM	MHMM	HMHH	MMHM	HHMH
MHHM	HMMH	MHHH	HMMM		

Analicemos ahora la descomposición 2 machos – 2 hembras que el señor Gato había considerado como más probable. Esta descomposición se presenta 6 veces. Su probabilidad es, por tanto, 6/16, o sea, 3/8 es más que 1/8. Tal vez el señor Gato esté en lo cierto.

MMMM	HHHH	MMMH	HHHM	MMHH	HHMM
MHMH	HMHM	MHMM	HMHH	MMHM	HHMH
MHHM	HMMH	MHHH	HMMM		

Pero nos queda otra descomposición más por considerar, a saber, 3 de un sexo y 1 del otro. Así sucede en ocho casos, y su probabilidad es mayor que la del caso 2-2. ¿No podrá ser que nos hayamos equivocado?

Si nuestras probabilidades fuesen correctas deberían sumar 1. Así sucede (2+6+8= 16/16), lo que nos dice que con certeza tendrá que darse uno de estos tres casos (4-0, 2-2, 3-1). La estimación del señor Gato fue errónea. El caso más verosímil no es el 2-2, sino el de 3 de un sexo y 1 del otro.

A casi todo el mundo le sorprende que en familias de cuatro hijos lo más probable sea que haya tres de un sexo y uno del otro. Experimentalmente se puede corroborar lanzando repetidas veces cuatro monedas. Llevemos registro de cada lanzamiento. Después de cien lanzamientos, aproximadamente 50 deberían mostrar la partición 3- 1, y alrededor de 33 la partición 2-2.

Problema 13: Lanzamiento de dos dados *(Ed. SM)****:***

En un juego para dos jugadores, Elsa y Benito lanzan dos dados y se anota su suma. Elsa gana si la suma sale un número par y Benito si sale un número impar.

a) ¿Es justo el juego?
b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno?
c) Calcula las probabilidades de cada uno si en lugar de sumar los resultados de los dados los multiplican, y Elsa sigue apostando a que sale par y Benito a que sale impar.

Solución: Para determinar si el juego es justo, vamos a calcular el espacio muestral del experimento aleatorio y los casos favorables a Elsa y a Benito.

Suma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Así, el espacio muestral es E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Los casos favorables a Elsa son {2, 4, 6, 8, 10, 12}, mientras que los de Benito son {3, 5, 7, 9, 11}. Como el número de casos favorables de Elsa son seis, mientras que los casos favorables de Benito son cinco, el juego no es justo, puesto que Elsa tiene mayor probabilidad de ganar que Benito.

b) $P(gana\ Elsa)\ = \frac{6}{11} =\ 0{,}545$ $P(gana\ Benito)\ = \frac{5}{11} =\ 0{,}455$

a) Determinemos ahora el espacio muestral en el caso de multiplicar los resultados de los dados.

Producto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

El espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36}. Como Elsa sigue apostando a que sale par, sus casos favorables son {2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 30, 36}, mientras que los favorables a Benito son {1, 3, 5, 9, 15, 25}.

$P(gana\ Elsa)\ = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} = \ 0{,}667$ $\qquad$ $P(gana\ Benito)\ = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} = \ 0{,}333$

Al final de este campo de problemas serán los propios estudiantes quienes institucionalizarán la definición de experimentos compuestos, las tablas de contingencia y los diagramas de árbol mediante estas actividades de los 4 gatitos y el lanzamiento de dos dados. En estos problemas se trabaja la intuición, la extracción de información y su clasificación para la ordenación y construcción de las diferentes opciones, reforzando la necesidad del uso de todos los conocimientos y destrezas adquiridas durante toda la unidad.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

En el campo de problemas 1 se trabajarán los conceptos de aleatoriedad y determinismo y las diferencias entre ambos como primera aproximación al azar. También se introducirá el tema de probabilidad utilizando técnicas de recuento, mediante la investigación, utilizándola como una manera de contribuir a mejorar y motivar el aprendizaje de la teoría de la probabilidad. Se utilizará Geogebra para la comprobación de creencias (o supuestos) sobre la probabilidad empírica de un experimento (lanzamiento de un dado).

En el campo de problemas 2, se incentivará la comprensión y la formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos, con el diseño de experimentos aleatorios y la verificación de las características de los sucesos involucrados en dicho experimento. Además, mediante la investigación del propio alumno, se trabajará con un ejemplo muy típico como es el lanzamiento de un dado, para introducir el concepto de probabilidad de un suceso visto desde el punto de vista frecuentista: "dado un suceso A que se repite un número de veces, si observamos la frecuencia con que se repite ese suceso, obtendremos las probabilidades asociadas asignando la frecuencia relativa a cada suceso", pero visto de manera inversa.

En el campo de problemas 3, se trabaja el concepto de probabilidad de sucesos, operaciones con sucesos y sucesos equiprobables, mediante problemas que motivan a la experimentación.

En el campo de problemas 4, se plantea una introducción a los experimentos compuestos como el lanzamiento de dos dados, lanzamiento de un dado y una moneda, entre otros, atendiendo todas las posibilidades de resultado dentro de estos experimentos y la construcción de tablas de contingencia y diagramas de árbol. Además, se finaliza con un problema con un experimento de sucesos no equiprobables para iniciar a los estudiantes en el estudio de este tipo de sucesos

3. **Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula**.

Se introduce el concepto de probabilidad estableciendo su relación con los fenómenos, experimentos o sucesos aleatorios, con lo que se quiere motivar a los estudiantes haciéndoles partícipes en la construcción de su aprendizaje de forma directa, por medio de la investigación, otorgándole importancia al tratamiento intuitivo de la probabilidad (cuantificación de la probabilidad en varios contextos, en especial la experimentación y la gamificación) como medio para la comprensión de su noción. En cada campo de problemas se propone un problema para el tratamiento intuitivo mediante gamificación y/o experimentación de los apartados, además de proponer otros ejercicios que requieren el conocimiento y uso de la técnica a enseñar. La metodología se indica detalladamente en el apartado VII.1 (Secuencia didáctica y cronograma).

VI. TÉCNICAS

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

Los ejercicios se presentan en el apartado V.1 Campo de problemas.

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

- *Determinación de experimentos aleatorios y deterministas:* Se propondrán problemas para que los estudiantes ejerciten el establecimiento del carácter aleatorio o determinístico de las experiencias, por medio de la clasificación de sucesos. Se proponen problemas 1, 2 y 3 que permiten establecer la relación con los fenómenos, experimentos o sucesos aleatorios, mediante los cuales se introducen algunas explicaciones sobre el significado del azar utilizando la técnica del recuento. En los problemas 2 y 3 hay un primer acercamiento a la noción de probabilidad en su sentido frecuencial.

- *Exploración del espacio muestral:* Una vez comprendida la diferencia entre los fenómenos aleatorios y los deterministas e incorporado el significado del azar en ciertos fenómenos o sucesos, se profundiza mediante problemas este concepto, utilizando como técnica la determinación de los posibles resultados de dichos sucesos. Se trabaja el diseño de experiencias aleatorias para la formulación de conjeturas sobre el comportamiento de los sucesos. Como menciona Batanero (2006), el concepto de la probabilidad y el azar, tienen significados que afectan al tipo de problemas que se resuelven, la forma de asignar probabilidades e incluso sus propiedades, conceptos relacionados y terminología, en este caso, se comenzará introduciendo el concepto de probabilidad mediante el punto de vista frecuencial, mediante las técnicas de frecuencia absoluta y relativa de un suceso, incentivando a los estudiantes a asignar grados de incertidumbre a sucesos sencillos (como es el lanzamiento de un dado), para luego comprobar la asignación dada, mediante la utilización de un applet de Geogebra.

- *Probabilidad de un suceso:* Se continuará el planteamiento de los campos de problemas anteriores, utilizando la experimentación para la introducción de los conceptos. En este apartado también se trabajan las operaciones con sucesos (unión e intersección de sucesos, sucesos compatibles e incompatibles y suceso contrario) y sirve además para practicar y distinguir los conceptos de dependencia e independencia. Se trabajan la técnica del recuento mediante actividades de experimentación del alumno como la actividad casarse, la del dominó y la del gato, el ratón y el queso, ésta última además nos permite asociar el concepto de probabilidad teórica con el concepto de probabilidad empírica (frecuencial) que se introduce al final del campo de problemas anterior.

- *Experimentos compuestos:* Mediante la experimentación y el juego y utilizando la técnica del recuento, el uso de tablas de contingencia y los diagramas de árbol, se trabajan con experimentos compuestos sencillos, como es el lanzamiento de dos dados o el problema de los 4 gatitos. Terminamos este campo con un problema que nos permite introducir el hecho de que no todos los sucesos que ocurren en un experimento aleatorio son equiprobables mediante el juego de cruzar el río.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Todas las técnicas que se enseñan y utilizan en cada uno de los campos de problemas propuestos son adecuadas y necesarias para la resolución de los ejercicios, además de estar adaptadas al currículo oficial.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Una vez definidos y discutidos los fenómenos aleatorios y deterministas, se propondrán diferentes experimentos aleatorios para que el estudiante explore y asimile los conceptos de espacio muestral, sucesos y tipos de sucesos. Es necesario que los estudiantes comprendan que la frecuencia relativa de un experimento repetido, en las mismas condiciones, se puede acercar tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso, sin más que aumentar el número de repeticiones.

Es importante que los estudiantes realicen ejercicios de probabilidad de un suceso para familiarizarse con las técnicas de recuento y asimilen el concepto Laplaciano de la probabilidad, para que posteriormente resuelvan los problemas sin dificultad.

Es conveniente plantear problemas para el manejo de las técnicas del recuento en experimentos compuestos, utilizando los diagramas de árbol y las tablas de contingencia. Uno de los problemas que se les plantea a los estudiantes es la construcción de los sucesos pertenecientes al experimento compuesto, lo que se traduce en una construcción incompleta del espacio muestral, tomando en consideración sólo una parte de las combinaciones de sucesos del experimento.

En el caso de las actividades y problemas propuestos en clase, los alumnos trabajarán de forma individual, por parejas o por grupos (dependiendo de la actividad o problema, como se explica detalladamente en el apartado VII, correspondiente a la secuencia didáctica y su cronograma) y se discutirán y comprobarán los resultados de los experimentos, fomentando al debate y al intercambio de ideas, mientras que la corrección de los ejercicios se realizará en la pizarra y serán resueltos por los estudiantes

VII. TECNOLOGÍAS

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

El punto de partida de la introducción del objeto matemático es conocer las ideas preconcebidas que tienen los estudiantes sobre el azar, producto de sus vivencias (significado intuitivo de la probabilidad). Algunos de estas ideas pueden ser utilizados como herramientas de inicio en clase, mientras que las ideas preconcebidas equivocadas también deben utilizarse para solventarse y disipar dudas. La técnica para la determinación de fenómenos aleatorios y deterministas es la determinación del carácter del suceso. Esta justificación se realizará mediante la definición de experimento aleatorio como aquel que manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, el resultado no siempre es el mismo, no es posible predecir el resultado.

Para justificar la técnica de determinación de los distintos resultados posibles dentro de un experimento, se realizará un razonamiento lógico basado en la definición del espacio muestral como el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio y en la de suceso: un suceso (o evento) corresponde a cada uno de los casos que se pueden dar al realizar un experimento aleatorio o asociado al espacio muestral como cada uno de los subconjuntos que pertenecen a éste. Además, se determinarán los diferentes tipos de sucesos inmersos en un experimento aleatorio: suceso imposible como el suceso que no puede ocurrir y que se designa por ø, suceso seguro que es el que siempre se verifica, suceso contrario que es un suceso que se realiza cuando no se realiza otro, sucesos compatibles que son los sucesos que pueden ocurrir a la vez y los incompatibles que son los sucesos que no pueden ocurrir a la vez. Por último, se hace mención a los sucesos equiprobables como los sucesos que tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Mediante un razonamiento de carácter intuitivo y exploratorio basado en el significado frecuentista de la probabilidad, se recordará que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de repeticiones, utilizando la Ley de los Grandes Números implícitamente sin llegar a definirla.

Se define la probabilidad como una medida de lo factible que es que ocurra un determinado suceso. Paralelamente, para justificar el concepto Laplaciano de la probabilidad definimos mediante un razonamiento aritmético y técnicas de recuento, que la probabilidad de un suceso es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles, si todos los sucesos de un experimento aleatorio son equiprobables. Además, se relaciona el concepto de probabilidad con los tipos de sucesos considerando que la probabilidad de un suceso es un número que está entre 0 y 1. Si la probabilidad es 0, el suceso es imposible. Si la probabilidad es 1, el suceso es seguro. Cuanto más cerca esté una probabilidad del 0, menos probable será el suceso. Cuanto más cerca esté una probabilidad del 1, más probable será el suceso.

También, se utilizan las operaciones con sucesos: unión e intersección de sucesos. La unión de sucesos, denotada por $A \cup B$, es el suceso que se realiza cuando se verifica A o se verifica B, o ambos a la vez y está compuesto por todos los elementos de A y de B, mientras que la intersección de sucesos se denota por $A \cap B$ y que corresponde al suceso que se realiza cuando se verifican al mismo tiempo el suceso A y el suceso B y se compone por los elementos comunes de A y B.

Por último, para introducir los experimentos compuestos, se utilizará una extensión de la técnica del recuento justificada mediante la incorporación y utilización de los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.

2. **¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?**

Con las actividades diseñadas en el apartado V.1 (campo de problemas), se ha querido que el profesor, que es la persona en la que generalmente recae la responsabilidad de justificar las técnicas que se utilizan, ceda parte de ese papel principal a sus alumnos, para promover la experimentación y el descubrimiento de los razonamientos mediante las diferentes actividades, sin que esto signifique que el profesor no siga siendo el encargado de la explicación, refuerzo e institucionalización de estas técnicas.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

El proceso de institucionalización de los distintos aspectos de la introducción a la probabilidad, que es el objeto matemático que tratamos en esta memoria, se explica al final de cada campo de problemas en las que se utilizan (Apartado V).

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Como se ha mencionado anteriormente, para cada uno de los campos de problemas considerados, se propone un problema de tipo experimental y/o juego, con preguntas asumibles pon los estudiantes, que los hagan reflexionar, cuestionarse y extraer conclusiones sobre los resultados obtenidos en éstos, y así motivar mediante la investigación la necesidad del conocimiento y el uso de la técnica. Se animará a la reflexión de los conceptos y propiedades mediante la experimentación, siendo el profesor la guía y apoyo del aprendizaje del alumno y, partiendo de las aportaciones de los estudiantes, el encargado final de institucionalizar de manera formal las técnicas, resaltando la importancia de las mismas. Se utilizan applets de Geogebra para la comprobación de resultados y explicación de los problemas basados en el concepto frecuentista de la probabilidad.

VII. SECUENCIA DIDÁCTICA Y CRONOGRAMA

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

La unidad didáctica de la Probabilidad se tratará en 10 sesiones, repartidas de la siguiente manera: 7 sesiones de clases, una sesión de repaso previo al examen, la sesión del examen y una sesión "extra" para la entrega de notas y corrección del examen. La duración de cada sesión (incluyendo la del examen) son de 55 minutos de duración.

2. Establece una duración temporal aproximada.

Sesión 1 *(Introductoria):* Se comenzará la sesión motivando a los estudiantes a debatir que entienden ellos sobre los conceptos de azar, probabilidad y experimento aleatorio. Se les motiva a discutir sobre qué es un fenómeno aleatorio y qué no lo es (fenómeno determinista). Se pide que nombren algún experimento aleatorio que conozcan (sería lógico esperar que mencionen el lanzamiento de una moneda o un dado). Se propone a los estudiantes para la primera actividad, sobre la determinación de aleatoriedad, que la realicen de manera individual y luego se discute cada una de ellas. Esta actividad tiene una duración de 10 minutos. Se procede luego a la resolución del problema de construcción de la razón de ser del cálculo de probabilidades, especificado en el apartado D (lanzamiento de una moneda con Geogebra).

Sesión 2 *(Campo de problemas 1)****:*** Se plantean en esta sesión la resolución de los cuatro problemas enunciados en el campo de problemas 1. Se comienza con el problema 1 sobre la clasificación de ciertos fenómenos como aleatorios o deterministas, primero dando unos pocos minutos a los estudiantes para su razonamiento de forma individual y luego debatiendo éstos con el grupo de clase (10 minutos). Luego, se plantea el problema 2 "Dados y estudiantes", trabajando en grupos de 3 alumnos cada uno. La ejecución de esta actividad es de 10 minutos y la puesta en común y discusión de la actividad durará otros 10 minutos. Se utiliza la resolución de los problemas para institucionalizar los conceptos de espacio muestral, sucesos y operaciones con sucesos. Para finalizar se propone el problema 3 "lanzamiento de chincheta", para ser realizado en grupos de 3 y con un tiempo de realización de 20 minutos, entre la ejecución, puesta en común y debate de los resultados obtenidos. Se realizan más ejercicios de ampliación sobre sucesos para la atención a la diversidad, tanto en clase como deberes para casa.

Sesión 3 *(Campo de problemas 1 y 2):* Para comenzar la clase, se realiza el cuarto y último problema del campo de problemas 1, “experimento con simulaciones de dados”, en el que se utilizarán 5 minutos para la discusión de las sospechas sobre si el dado está trucado o no y 10 minutos para la concluir la averiguación y la comprobación en Geogebra. Se propondrá el problema 5 “carrera de caballos”, para ser realizado individualmente. Se corrige en la pizarra (un alumno pasa a solucionarlo, mientras los demás compañeros comentan la resolución o ayudan), la duración de la actividad es de aproximadamente 15 minutos. Para finalizar la clase, se propone para ser trabajado también de forma individual el problema 6 “describiendo experimentos”, tomando 10 minutos de la clase para su ejecución y 5 minutos para su debate y corrección en la pizarra.

Sesión 4 *(Campo de problemas 2 y 3):* Para iniciar la clase y recordar los contenidos vistos en las sesiones anteriores, se propone a los estudiantes se propone el problema 7 “el error de Leibniz” para realizarse en parejas y con una duración estimada de 10 minutos. Luego, se realizará la actividad 8 “Inventa” que es la última actividad del campo de problemas 2, su duración aproximada será de 10 minutos para la actividad y otros 10 para el debate de las ideas surgidas en esta. Se comienza a trabajar el campo de problemas 3 con el problema 9 “el ratón, el gato y el queso”, que realizarán mediante la experimentación y el juego en grupo de 4 personas. El profesor explicará la diferencia entre la probabilidad empírica y teórica, la duración estimada es de 15 minutos. Se institucionaliza con la explicación, por parte del profesor, de la regla de Laplace y las propiedades de la probabilidad

Sesión 5 *(Campo de problemas 3)****:*** Como a esta altura de las sesiones ya se ha explicado la teoría de este apartado, esta sesión será totalmente práctica. Se comenzará con el problema 10 “dominó”, realizado en parejas (con una duración estimada de 15 minutos) y se corregirá en la pizarra. Seguidamente se propone el problema 11 "idiomas", que también se realizará en parejas y tendrá un tiempo de realización de 15 minutos con corrección en la pizarra. Para finalizar la sesión, se realiza el problema 12 "cruzar el río", que se realiza en parejas con una duración de 20 minutos.

Sesión 6 *(Campo de problemas 3 y 4):* Para comenzar la clase se plantea el problema 13 "casarse", esta actividad se realiza en parejas y tendrá una duración de 10 minutos. La explicación y discusión de esta actividad se plantea en otros 15 minutos. Se propone el problema 14 "los 4 gatitos" a ser realizado por parejas, con una duración de 20 minutos entre su realización y el debate y corrección. Explicación del profesor sobre los experimentos compuestos y la creación y estudio de las tablas de contingencia y diagramas de árbol. Se propondrán problemas similares, como trabajo para casa, para que los alumnos trabajen y refuercen el conocimiento adquirido en casa.

Sesión 7 *(Campo de problemas 4):* Se comienza la clase revisando en la pizarra los ejercicios propuestos para casa, reforzando el sentido frecuencial y teórico de la probabilidad y las operaciones con sucesos, y aprovechando lo estudiado en la última sesión se compararán las dos formas de resolución de problemas de experimentos compuestos: los diagramas de árbol y las tablas de contingencia. A continuación, se planteará el problema 15 del "lanzamiento de dos dados", realizado en parejas, con una duración de 20 minutos entre su realización, el debate de los resultados y la corrección en la pizarra. En los últimos 10 minutos de la sesión se visualizará el video de Probabilidad de Troncho y Poncho, mediante este vídeo se refuerzan las definiciones de fenómeno, experimento aleatorio y probabilidad, sus propiedades, concepto y tipos de sucesos y la regla de Laplace. El enlace es el siguiente:

https://www.youtube.com/watch?v=slaR4f6db6k

Sesión 8 *(repaso/refuerzo)*: Sesión cuyo objetivo es reforzar todos los conceptos y propiedades vistas aprendidas en las 7 sesiones anteriores, haciendo hincapié en los conceptos y propiedades de la probabilidad aprendidas y recordando el concepto de la probabilidad desde los tres puntos de vista conocidos hasta ahora: intuitivo, clásico y frecuencial.

Sesión 9 *(de evaluación):* En esta se realizará la evaluación presentada en el apartado IX (Evaluación).

Sesión 10 *(corrección del examen):* Las calificaciones se comunicarán mediante la entrega de examen corregido en la hora de clase siguiente a la evaluación y los resultados se comprobarán mediante resolución de los problemas en la pizarra por parte de los mismos estudiantes, en colaboración de todos los compañeros de la clase.

IX. EVALUACIÓN

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

Cada uno de los alumnos de la clase realiza la prueba escrita de modo individual y dispone de la duración de la sesión de clase para resolverla. Los alumnos reciben los enunciados de la prueba junto con las siguientes consignas: Escribe los APELLIDOS, NOMBRE y GRUPO, en letras mayúsculas, en todos los folios que utilices para el examen. Se deben justificar y razonar las propiedades o reglas empleadas. Los resultados deben ser simplificados a su expresión más sencilla.

1.- (1 punto) Al tirar una chincheta puede caer con la punta hacia arriba o hacia abajo. Para averiguar la probabilidad de cada uno de estos sucesos, se ha realizado el experimento muchas veces obteniendo los resultados dados en la tabla. A la vista de ellos, ¿qué probabilidad empírica asignarías al suceso "caer con la punta hacia arriba"?, ¿y al suceso "caer con la punta hacia abajo"?

Nº de tiradas	10	50	100	500	1000
Punta hacia arriba	7	29	65	337	668

2.- (1 punto) De los siguientes experimentos señala cuales dependen del azar y cuáles no:

a) Extraer una carta de una baraja. b) Elegir una fruta de una caja de manzanas c) Abrir un libro por una página cualquiera y anotar el número de la página de la derecha.

3.- (1 punto) Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

a) Lanzar tres monedas.
b) Sexo de los dos hijos de una familia.

4.- (1 punto) Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?

5.- (1 punto) Tengo en la mano 10 cartas con los números del 1 al 10. Una amiga escoge una carta al azar.

Halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Salir un nº menor que 3. b) Salir un nº divisible por 3.

c) Salir un nº mayor que 5. d) Salir un nº divisible por 5.

6.- (2 puntos) Estudia el lanzamiento de un dado. Recuerda que el espacio muestral del experimento lanzar un dado es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Relaciona la columna de la izquierda con el suceso correspondiente de la derecha.

A= Salir un número mayor de 3.	{3, 5}
B= Salir un número mayor de 6.	{6}
C= Salir menor de 4.	{3, 4}
D= Salir el 6.	{1, 3, 5}
E= Salir un número mayor de 2 y menor de 5.	Ø
F= Salir impar.	{2, 4, 6}
G= Salir par.	{2, 3, 4, 5, 6}
H= Salir múltiplo de 2.	{4, 5, 6}
I= Salir par o número primo.	{2, 4, 6}
J= Salir impar y número primo.	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
K= Salir menor que 7.	{1, 2, 3}

7.- (2 puntos) Contesta a las siguientes preguntas relacionadas con la pregunta anterior.

a) ¿Qué tipo de suceso es K?
b) ¿Qué relación existe entre los sucesos F y G?
c) ¿Encuentras algún elemento en común en los sucesos I y J?. ¿Qué relación existe entre los sucesos I y J?.
d) ¿Los sucesos C y G son compatibles o incompatibles?

e) Indica qué tipo de sucesos es A. ¿Qué tipo de sucesos es B? y ¿Qué tipo de sucesos es D?
f) ¿Qué relación existe entre los sucesos G y H?
g) ¿Son equiprobables los sucesos F y G?

8.- (1 punto) Un juego cartas consiste en que se barajan y se colocan boca abajo sobre la mesa cuatro cartas, dos rojas y dos negras. El jugador puede apostar el dinero que desee a que saca dos cartas del mismo color.

a) Calcula la probabilidad de este suceso.
b) Explica si interesa o no jugar a este juego.

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Pregunta #1: Se evaluará la comprensión del sentido frecuencial de la probabilidad. La técnica: relación entre frecuencia relativa y la noción de probabilidad. Las tecnologías: propiedades de la probabilidad y tipo de sucesos (probabilidad del suceso contrario). La tarea principal es la determinación de que cuanto mayor es el número de pruebas realizadas más se aproxima el valor obtenido al valor desconocido de la probabilidad teórica (introducción a la Ley de los grandes números).

Pregunta #2: El campo de problemas es la identificación de sucesos aleatorios y deterministas. La técnica: mediante el establecimiento del carácter aleatorio o determinístico de las experiencias. Las tecnologías: la definición del suceso aleatorio y determinista. La tarea principal es diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios. El estándar de aprendizaje corresponde a si el alumno identifica las experiencias y los sucesos aleatorios y si sabe diferenciarlos de los determinísticos y la resolución de problemas de la vida cotidiana aplicando los contenidos trabajados.

Pregunta #3: El campo de problemas: la exploración del espacio muestral. La técnica: mediante la visualización de los distintos resultados posibles. Las tecnologías: la definición del espacio muestral y los sucesos. La tarea principal a evaluar es que ante una experiencia aleatoria sencilla, el estudiante obtenga el espacio muestral y describa los distintos sucesos. El estándar de aprendizaje relacionado es utilizar el diagrama en árbol para realizar recuentos sistemáticos y calcula probabilidades a partir de estos, además de la resolución de problemas de la vida cotidiana aplicando los contenidos trabajados.

Pregunta #4: El campo de problemas es la probabilidad de sucesos compuestos. La técnica mediante recuento, unión e intersección, compatibilidad-incompatibilidad y dependencia-independencia. Las tecnologías son las propiedades de la unión y del suceso contrario. La tarea principal a evaluar es el cálculo de los sucesos descritos mediante las propiedades de la probabilidad de la unión y suceso contrario y/o la regla de Laplace. Las tareas específicas son expresar la probabilidad en forma de fracción y como porcentaje. El estándar de aprendizaje correspondiente es la descripción de distintos sucesos (seguro, contrario, unión e intersección) y su clasificación según su probabilidad.

Pregunta #5: El campo de problemas es la probabilidad de sucesos. La técnica mediante recuento y comprensión de un número divisible por otro. Las tecnologías son las propiedades de la probabilidad y la regla de Laplace. La tarea principal es calcular la probabilidad de los sucesos asociados mediante la regla de Laplace. Las tareas específicas son expresar la probabilidad en forma de fracción y como porcentaje. El estándar de aprendizaje es aplicar la ley de Laplace para calcular la probabilidad de sucesos pertenecientes a experiencias aleatorias regulares.

Pregunta #6: El campo de problemas: la determinación de los sucesos descritos. La técnica: mediante la identificación del (o los) resultado(s) posible(s). Las tecnologías: la definición del espacio muestral y los sucesos. La tarea principal a evaluar es la comprensión de los sucesos que pueden (o no) ocurrir en un espacio muestral. La tarea específica que se evaluará es la capacidad de extrapolar conocimientos ya adquiridos. El estándar de aprendizaje que se evalúa es identificar las experiencias y los sucesos aleatorios, analizar sus elementos y describirlos y realizar conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería ...).

Pregunta #7: El campo de problemas: relacionar los diferentes sucesos descritos en el problema 6. La técnica: mediante la identificación del (o los) resultado(s) posible(s). Las tecnologías: la definición de los diferentes sucesos y el concepto de sucesos equiprobables. La tarea principal a evaluar es la relación que pueden tener los diferentes sucesos que pueden (o no) ocurrir en un espacio muestral. La tarea específica que se evaluará es la capacidad de extrapolar conocimientos ya adquiridos. El estándar de aprendizaje relacionado a esta pregunta es: ante una experiencia aleatoria sencilla, el alumno describe distintos sucesos (seguro, contrario, unión e intersección) y los clasifica.

Pregunta #8: El campo de problemas es la exploración del espacio muestral y la probabilidad de sucesos. La técnica: mediante la visualización de los distintos resultados posibles y el recuento. Las tecnologías: la definición del espacio muestral y sucesos y la regla de Laplace. La tarea principal a evaluar es la obtención el espacio muestral y la aplicación de la regla de Laplace.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Pregunta #1:

En la tabla se observa que la frecuencia relativa del suceso “caer con la punta hacia arriba” tiende a 0,67.

Caer con la “punta hacia abajo” es el suceso contrario, se puede considerar P(“punta hacia abajo”) = 1– 0,67 = 0,33

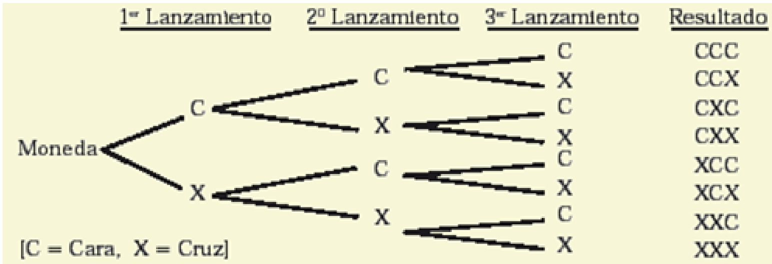
Pregunta #2:

a) Aleatorio. b) Determinista. c) Aleatorio.

El ejercicio es muy sencillo, la única posibilidad de error vendría de que se equivocaran en el b) al decir escoger una "fruta" de una caja de manzanas y lo relacionaran con escoger una "manzana" en una caja de frutas y pensaran que el azar está involucrado.

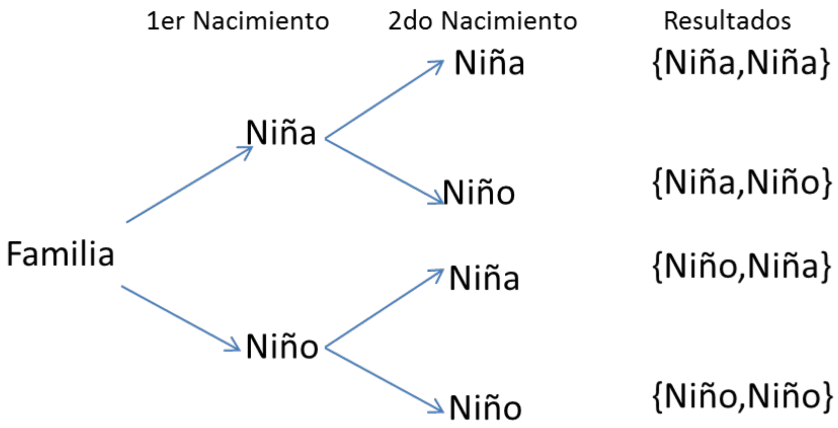
Pregunta #3: Resolución primer apartado

Ejemplo: Lanzar una moneda 3 veces.



El espacio muestral está formado por 8 sucesos elementales:
E={{C,C,C},{C,C,X},{C,X,C},{X,C,C},{C,X,X},{X,C,X},{X,X,C},{X,X,X}}

Resolución segundo apartado:



Posibles errores que pueden cometer los estudiantes: construir los sucesos pertenecientes al espacio muestral incompletos, sólo tomando en consideración los sucesos más "lógicos o sencillos" de cada uno de los ejercicios. Por ejemplo, en el primero: el correspondiente a CCC (todas caras), XXX (todas cruces) y alguna combinación de dos caras y una cruz y otra de dos cruces y una cara. En el segundo, el correspondiente a {niña, niña}, {niño, niño} y luego sólo una combinación de {niña, niño} o {niño, niña}. Este error podría deberse a la falta de construcción del diagrama de árbol correspondiente o por una estrategia errada de enfrentarse al problema (casi por intuición o lógica).

Pregunta #4: Resolución correcta:

a) Sea B=”Extraigo bola blanca” y R=”Extraigo bola roja”.

$$\mathrm{P(B)} = \frac{Fav}{Pos} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \qquad \mathrm{P(R)} = \frac{Fav}{Pos} = \frac{4}{15}$$

$$\mathrm{P(BoR)} = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

b) $\mathrm{P(No\ B)} = 1 - \mathrm{P(B)} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Posibles equivocaciones: En el caso de la primera probabilidad, los estudiantes podrían responderla de forma incompleta: calcular por un lado la probabilidad de que la bola sea roja y por otro lado de que la bola sea blanca, sin calcular la probabilidad de la unión del suceso, que al ser sucesos incompatibles, se calcula con la suma de las probabilidades individuales.

En el caso de la segunda probabilidad, los estudiantes podrían resolverla de dos formas: utilizando la regla de Laplace, tomando como casos favorables el conteo de bolas rojas y negras y dividiendo entre los casos posibles o mediante la probabilidad de suceso contrario P(No B)=1-P(B), que es una cuenta más sencilla de calcularlo (ya tenían calculado P(B), por el apartado anterior).

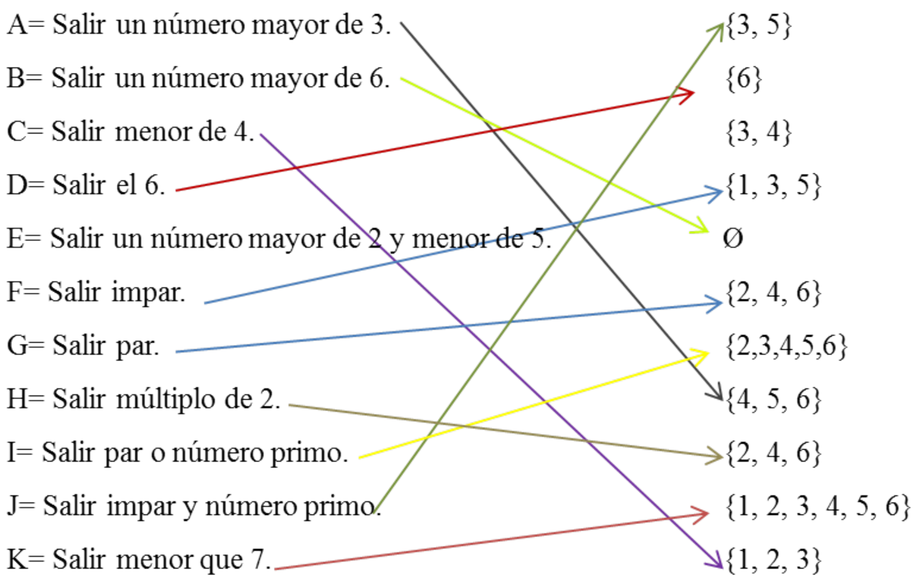
Pregunta #5: Resolución correcta:

a) $\mathrm{P(nº\ menor\ que\ 3)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. b) $P(\mathrm{nº\ divisible\ por\ 3}) = \frac{3}{10}$

c) $P(\mathrm{nº\ mayor\ que\ 5}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ d) $P(\mathrm{nº\ divisible\ por\ 5}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Posibles errores: No simplificar las fracciones para reducirlas a su expresión más simple. Se pide en el enunciado del examen. Al ser un examen con cuentas tan sencillas no se permite el uso de calculadora

Pregunta #6: Respuesta correcta:



Pregunta #7: Respuesta correcta:

a) K es un suceso seguro: sus elementos conforman todo el espacio muestral.
b) El suceso G es el suceso contrario del F.
c) Los elementos comunes a I y a J son el 3 y 5. el suceso J está contenido en I.
d) C y G son compatibles porque su intersección es el suceso elemental “2”.
e) A es un suceso compuesto, B es un suceso imposible y D es un suceso elemental.
f) Son sucesos idénticos.
g) Si, los sucesos F y G son equiprobables, ambos tienen probabilidad ½ de salir.

Pregunta #8: Los alumnos deben construir en primer lugar el espacio muestral:

E={(R1, R2), (R1, N1), (R1, N2), (N1, R2), (N1, N2), (N2, R2)}

Aplicando la regla de Laplace comprobarán que la probalidad de sacar dos cartas del mismo color es 1/3, cuando posiblemente su primera intuición errónea es pensar que el juego es justo porque esa probabilidad es de 1/2. En consecuencia, no interesa jugar.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Pregunta #1: Determinación de la probabilidad empírica (0.5 puntos). Determinación de la probabilidad del suceso contrario (0.5 puntos)

Pregunta #2: La escogencia de la respuesta correcta en cada apartado: 0,5 puntos c/u.

Pregunta #3: El conjunto completo de sucesos (8 en el primer caso y 4 en el segundo): 0,5 puntos c/u. De estar incompletos, se bajaría la calificación en proporción a los sucesos faltantes para cada caso (0,06 para cada suceso faltante del primer caso y 0,12 para cada suceso faltante del segundo caso).

Pregunta #4: El primer apartado vale 1 punto: 0,25 el cálculo de las probabilidades y 0,25 el cálculo de la unión de la probabilidad (suma). En el segundo apartado la correcta utilización de la propiedad de la probabilidad del suceso contrario valdrá 0.25 puntos. Calcular correctamente la probabilidad 0.25 puntos.

Pregunta #5: 0,25 la resolución correcta de cada probabilidad. (-0,10 si no simplifican la fracción resultante).

Pregunta #6: Son 10 relaciones, cada relación correcta tiene un valor de 0,20 puntos.

Pregunta #7: Son ocho preguntas puesto que aunque son 7 apartados, el apartado c consta de dos preguntas. Cada pregunta correctamente justificada valdrá 0,25 puntos. Si la justificación es pobre, poco argumentada, aunque contiene algún fundamento teórico 0,1 puntos.

Pregunta # 8: La determinación del espacio muestral valdrá 0,5 puntos. El cálculo de la probabilidad 0,5 puntos.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C., & Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 558-567.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación. Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, 9-21.

Batanero, C. (2015). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-49).

Bayés, A. S., Goded, P. A., & Domingo, J. M. C. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya: Revista de investigación e innovación educativa,* (38), 91-112.

David, F. N. (1962). Games, gods and gambling. London: Griffin.

Estrada, A., & Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 239-248). Alicante: SEIEM.

Fischbein, H. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Vol. 85). Springer Science & Business Media.

Gallardo, S., Cañadas, M. C., Martínez-Santaolalla, M. J., & Molina, M. (2007). Jugando con la Probabilidad. *SAEM Thales. Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada*.

Gardner, M., & García, L. B. (1983). ¡Aja! paradojas: paradojas que hacen pensar. Editorial Labor S.A.

Gómez-Torres, E., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2014) Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Epsilon*, *31*(2), 25-42.

Jiménez, L., & Jiménez, R. (2005). Enseñar probabilidad en primaria y secundaria?¿ Para qué y por qué?. Revista Digital Matemática, 6(1), 1-10.

Mora Pardo, Manuel (2000). EL ÁBACO PROBABILÍSTICO. Recuperado de: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0224-04/abacos.htm#2

Morales, G. M. A. (2002). Historia de la probabilidad (desde sus orígenes a Laplace) y su relación con la historia de la teoría de la decisión. *Historia de la Probabilidad y de la Estadística, Volumen 1*.

Serradó, A., Azcárate, P., & Cardeñoso, J. M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya: Revista de investigación e innovación educativa*, (38), 91-112.