Grupos de Coxeter

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza
1542

Eduardo Quintana García
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Conchita Martínez Pérez
28 de Noviembre de 2017

Prólogo

Se dice grupo de Coxeter a aquel que puede ser generado por involuciones s_i tales que las relaciones que cumplen son todas del tipo $(s_i s_j)^m = 1$. Este trabajo trata de adentrarse un poco en la teoría de grupos, en concreto en estudiar estudiar un tema clásico en teoría de grupos: la linealidad de los grupos de Coxeter.

Que un grupo sea lineal significa que puede interpretarse como un subgrupo del grupo general lineal de un espacio vectorial ($GL(V)$), y por tanto cumple las propiedades de linealidad de dichas matrices.

Para demostrar esta linealidad construiremos un homomorfismo de grupos entre estos grupos generados por involuciones y $GL(V)$. Este homomorfismo veremos primeramente que es inyectivo si se restringe a una serie de subgrupos, para posteriormente demostrar que esta inyectividad es cierta sin restricción, y por tanto un grupo de Coxeter es isomorfo a un subgrupo de $GL(V)$.

Resumen

In this work we discuss how certain groups can be represented as groups of matrices, in particular, how Coxeter groups are represented by a faithful homomorphism $G \to GL(V)$

Firstly we introduce the idea of group presentation $\langle A|R\rangle$, where A is a set of letters that we call generators and $R \subseteq F(A)$ a set of relations with $F(A)$ is the group of words made by letters in $A \cap A^{-1}$.

Proposición 0.1. *Suppose $\phi : A \to G$ is a map from the set of letters A to the group G. Then ϕ can be uniquely extended to a group homorphism $\Phi : F(A) \to G$ where $\phi(a) = \Phi(a)$ for all $a \in A$. If ϕ preserves the relations in R, ϕ induces to an unique homomorphism of groups $\langle A|R\rangle \to G$.*

Definición 0.2. *Let M be a symmetric matrix with entries from $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ such that $m_{ii} = 1$. It is called Coxeter matrix, and the Coxeter group of type M is the group with presentation.*

$$G(M) = \langle s_1, \dots s_n | s_i^2 = 1 \ \forall i, \ (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \ \forall m_{ij} < \infty\rangle$$

Some examples of Coxeter groups are symmetrical groups, dihedral groups, groups of movements that fix a tessellation...

Definición 0.3. *A linear represtation of a group G is a faithfull group homomorphism $G \to GL(V)$ where $GL(V)$ is the group of invertible lineal tranformations from V to V and V is vector space of finite dimension over a field.*

G is a Coxeter group presented by $\langle S|R\rangle$, where we fixed S a set of generators.

Definición 0.4. *The length of w respecto to S, $l_S(w)$, is the length of the minimal expression for w with letters in S.*

For all $w \in G$ and $s \in S$, $l(sw) = l(w) \pm 1$. For each $T \subseteq S$, we define

$$^{T}G = \{w \in G | l(tw) > l(w) \forall t \in T\}$$

and similar for G^T.

The following technical result will be useful to show that our representation is faithful.

Lema 0.5. *Let be G Coxeter group and $T \subseteq S$ subset of generators, then*

1. *For each $w \in G$ there where $u \in \langle T\rangle$ and $v \in^T G$ such that $w = uv$ and $l(w) = l(u) + l(v)$.*
2. *For each $w \in \langle T\rangle$, $l(w) = l_T(w)$, wich is the lenth of w restricted to T.*

We continue with a brief explanation about about the affine space associated to a vector space. We consider a special kind of transformations of the affine space that will be very useful: linear and affine reflections.

To define our representation we will use the following bilineal form.

Definición 0.6. *Let be G a Coxeter group type M. We denote B_M, the symmetric bilineal form*

$$B_M(e_i e_i) = -2cos(\frac{\pi}{m_{ij}}) \text{ if } m_{ij} < \infty \text{ and } B_M(e_i, e_j) = -2 \text{ if } m_{ij} = \infty.$$

Proposición 0.7. *Let be G a coxeter group type M, $B = B_M$, and $\rho_i : V \to V$ a linear transformation such that $\rho_i(x) = x - B(x, e_i)e_i$. Then*

- $B(e_i, e_i) = 2$.
- $B(e_i, e_j) \leq 0$ *for all* $i \neq j$, *and* $B(e_i, e_j) = 0 \Leftrightarrow m_{ij} = 2$.
- ρ_i *is a reflexion with mirror* $\{x \in V | B(x, e_i) = 0\}$ *and root* e_i.
- $B(x, y) = B(\rho_i(x), \rho_i(y))$.
- *The order of* $\rho_i\rho_j$ *equals* m_{ij}.

Teorema 0.8. *Let be G a Coxeter group type M and $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$, and V a vector space. We define de map $\rho : S \to GL(V)$ by $\rho(s_i) = \rho_i$, then*

1. $\rho : G \to GL(V)$ *defines a linear representation of G on V preserving B.*
2. $\rho_i \neq \rho_j$ *for all* $i \neq j$.
3. ρ *restricted to* $\langle s_i, s_j \rangle \leq G$ *is faithfull for all* i, j.

In the third and last chapter we will see that the homomorphism ρ is in fact an isomorphism between the Coxeter group W to a subgroup of $GL(V)$ generated by reflections.

For this we introduce prefundamental domains as sets D such that $D \cap gD = \emptyset$ for all $g \in G$, and use this for the proof of

Teorema 0.9. *(Tits lemma) Let be G a group generated by $\{\rho_i | i \in I\}$ affine reflections For each I, A_i is one of the twho half-spaces determined by the mirror of ρ_i. And $A = \cap A_i$. Then*

- *A is prefundamental domain for G.*
- *G is isomorphic to a Coxeter group type M with $m_{ij} =$ order of $\rho_i\rho_j$.*

In the last section, we use ρ to construct a dual representation ρ^* and show that one is faithful if and only if the other is. Finally, we use Tits Lemma to prove that ρ^* is faithful.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Una primera manera de representar un grupo G sería como un conjunto de elementos también llamado G que lleva asociada una aplicación interna $G \times G \to G$ llamada multiplicación, que contiene un elemento identidad $1 \in G$, y para cada $x \in G$ existe un elemento $x^{-1} \in G$ que cumple $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, es decir, es el inverso de x.
Esta representación suele darse mediante el conjunto de elementos y la tabla de multiplicar. Sin embargo no es una buena manera de presentar un grupo ya que sólo es útil en grupos finitos y de pocos elementos, así que hemos de encontrar una forma mejor de expresar un grupo.

En este trabajo veremos como presentar un grupo de diversas maneras, centrándonos en los grupos de involuciones llamados grupos de Coxeter. El objetivo último de este trabajo es dar las herramientas para concluir que los grupos de Coxeter son grupos lineales.

1.1. Grupos finítamente generados

Una forma eficiente de expresar un grupo es mediante generadores y relaciones. Partiremos de un conjunto S, cuyos elementos $a \in S$ denominaremos letras, y a las concatenaciones de los mismos las llamaremos palabras.
Podemos construir el conjunto S^{-1} formado por elementos de la forma a^{-1} por cada $a \in S$, siendo S y S^{-1} disjuntos.

A partir de S, definimos $F(S)$ como el conjunto formado por las palabras en $S \cup S^{-1}$ incluyendo la palabra vacía que denotaremos 1, dotado de la operación de yuxtaposición:

$$ab = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$$
$$\text{con } a = a_1 \dots a_n \text{ y } b = b_1 \dots b_m \text{ palabras en } S \cup S^{-1}$$

y con la relación de equivalencia generada por por:

$$vaa^{-1}w \sim vw$$
$$va^{-1}aw \sim vw$$

para cualesquiera v y w palabras.

Se puede comprobar que que $F(S)$ es un grupo, el cual se llama *grupo libre en S*.

Definición 1.1. *Dada una familia de palabras $R \subseteq F(S)$. Entonces denotamos, $\langle R \rangle$ al menor subgrupo de $F(A)$ que contiene a R. Asimismo, $\langle\langle R \rangle\rangle$ se refiere el menor subgrupo normal de $F(A)$ que contiene a R.*

Definición 1.2. *Sea S un conjunto de letras, $F(S)$ el grupo libre de S y $R \subseteq F(S)$ un conjunto de palabras. Denotamos por $\langle S|R\rangle$ al cociente $G = F(S) \diagup \langle\langle R\rangle\rangle$.*
Se dice que $\langle S|R\rangle$ es una presentación de G, o que G es el grupo generado por los elementos de S con las relaciones $\{r = 1|r \in R\}$.

Ejemplo 1.3. *El grupo cíclico infinito generado por un elemento a y sin restricciones tiene por presentación a $\langle a|\rangle$, o simplemente $\langle a\rangle$. Si ahora tomamos $R = a^m$ tenemos que $\langle a|a^m\rangle$ es una presentación del grupo cíclico de orden m, donde $a^m = 1$.*

Podemos considerar ahora G, el grupo generado por las letras a y b, donde el producto es conmutativo, es decir $ab = ba$, en este caso la relación se puede expresar como $aba^{-1}b^{-1} = 1$ y tendríamos la presentación

$$\langle S|R\rangle = \langle a,b|aba^{-1}b^{-1}\rangle$$

Sin embargo, para expresar G de una forma algo más intuitiva, podemos utilizar también la presentación $\langle a, b|ab = ba\rangle$.

A continuación introduciremos un resultado cuya demostración no vamos a dar con detalle, pero que tiene gran importancia ya que da una base para, posteriormente, hallar un isomorfismo entre un grupo de Coxeter y un grupo lineal.

Proposición 1.4. *Sean S un conjunto de palabras y G un grupo cualesquiera, entonces para toda aplicación $\phi : S \to G$ existe un único homomorfismo de grupos $\Phi : F(S) \to G$ que extiende a ϕ, es decir, $\Phi(a) = \phi(a)$ para todo $a \in S$.*
Si ademas ϕ preserva las relaciones R de $\langle S|R\rangle$, es decir, si para cada $r \in R$ tal que $r = a_1 \dots a_n$ se tiene $\phi(a_1)\dots\phi(a_n) = 1$ en G, entonces también existe un único homomorfismo de grupos $\langle S|R\rangle \to G$ que extiende a ϕ.

1.2. Ejemplos

1.2.1. Grupos simétricos

Definición 1.5. *Dado un conjunto cualquiera X, el grupo simétrico de X es el grupo de permutaciones del conjunto X. Lo denotaremos $Sym(X)$.*

Para el caso de $X = [n] = \{i,\dots,n\}$ $Sym(X)$, lo denotaremos Sym_n. Además, cuando hablemos del ciclo

$$(i_1,\dots,i_k) \text{ con } i_j \in [n] \text{ para todo } j \in [k]$$

no referiremos a la permutación que actúa llevando $i_j \longmapsto i_{j+1}$ para cada $j \in [k-1]$ y $i_k \longmapsto i_1$, y dejando fijos el resto de elementos de X.

Ejemplo 1.6. *Sea el conjunto $S_n = \{s_1,\dots s_n\}$ y el conjunto de relaciones T_n dado por*

$$s_i^2 = 1 \textit{ para todo } i = 1\dots n$$
$$s_is_j = s_js_i \textit{ para todo } \mid i-j \mid > 1$$
$$s_is_js_i = s_js_is_j \textit{ para todo } \mid i-j \mid = 1.$$

Entonces se puede probar que la aplicación $S_n \to Sym_{n+1}$ tal que $s_i \mapsto (i,i+1)$ induce un isomorfismo entre Sn y Sym_{n+1}. Es decir, $\langle S_n|T_n\rangle$ es una presentación de Sym_{n+1}.

Ejemplo 1.7. *Si tomamos $X = \{1,2,3\}$, $Sym(X) = Sym_3$ tiene 6 elementos, correspondientes a las permutaciones 1, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, y una presentación de Sym_3 grupo sería $\alpha : G \to$ Sym(X) con $G = \langle a,b|a^2,b^2,(ab)^3\rangle$ con $a = (2,3)$ y $b = (1,2)$.*
Para verlo, notemos que es claro que $a^2 = b^2 = 1$, y además, como $aba = bab$ tenemos $ababab = (ab)^3 = 1$.

Definición 1.8. *Una representación como grupo de permutaciones de un grupo cualquiera G es un homomorfismo de grupos* $\alpha : G \to Sym(X)$.
Si α *es inyectiva se dice que el homomorfismo es fiel.*

1.2.2. Grupos diédricos

Llamamos grupo diédrico de orden m al grupo formado por todos los movimientos del plano que fijan un polígono de m lados. Lo denotaremos Dih_{2m}, o simplemente D_{2m}.

Dicho grupo admite la siguiente presentación

$$Dih_{2m} = \langle a,b | a^2 = 1, b^m = 1, (ab)^2 = 1 \rangle$$

donde a es una simetría respecto a una recta y b es un giro de angulo $\frac{2\pi}{m}$ como se aprecia en el dibujo del ejemplo 1.9.

Si llamamos $c = ab$ tenemos que se puede presentar el mismo grupo de la forma

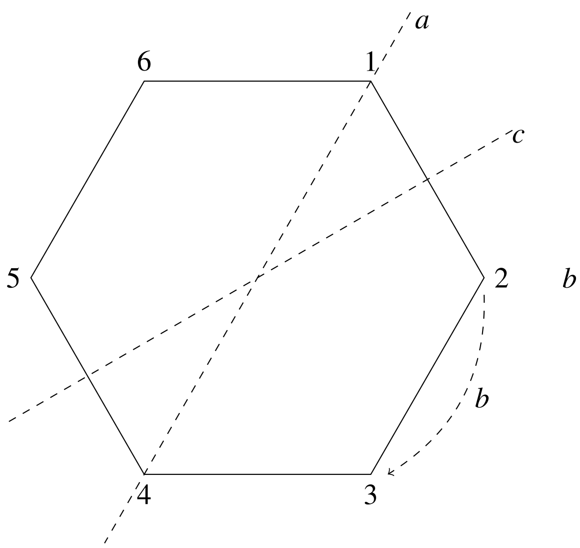
$$Dih_{2m} = \langle a,c | a^2 = 1, c^2 = 1, (ac)^m = 1 \rangle.$$

En este caso a y c son simetrías, una respecto a un a recta que pasa por dos vértices y otra respecto a una recta que corta dos aristas por su punto medio.

Veremos posteriormente que este grupo generado por elementos de orden 2 es un grupo de Coxeter. Notar que Dih_{2m}, el grupo diédrico de orden m se puede ver como un subgrupo de Sym_m. Para verlo, basta numerar los vértces y notar que los elementos de Dih_{2m} permutan dichos vértices.

Ejemplo 1.9. *Tomemos el grupo diédrico del hexágono, es decir, el caso donde* $m = 6$*, entonces tenemos*

$$D_{12} \leqslant Sym_6$$
$$a = (6,2)(5,3)$$
$$c = (1,2)(6,3)(5,4)$$
$$\textit{dando lugar a } b = (1,2,3,4,5,6)$$



La presentación explicada arriba para grupos diédricos en el caso correspondiente al hexágono es

$$D_{12} = \langle a,c | a^2 = 1, c^2 = 1, (ac)^6 = 1 \rangle$$

1.2.3. Grupos de Coxeter

Definición 1.10. *Sea M una matriz simétrica $n \times n$ con entradas en $\mathbb{Z}^+ \cup \{+\infty\}$ de la forma $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ con $m_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \cdots, n$ y $1 < m_{ij} \in \mathbb{N}$ para todo $i \neq j$.*
Entonces M es una matriz de Coxeter y se define como grupo de Coxeter de tipo M al grupo

$$G(M) = \langle s_1, \cdots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \; \forall \, i, j = 1, \cdots, n \text{ y } m_{ij} < \infty \rangle.$$

La anterior se dice presentación de Coxeter de $G(M)$.

Definición 1.11. *Un grupo que admita una presentación de Coxeter para alguna matriz de Coxeter M se dice grupo de Coxeter.*

Ejemplo 1.12. *Hemos visto en el ejemplo 19 que el grupo diédrigo del hexágono admite una presentación*

$$D_{12} = \langle a, c | a^2 = 1, c^2 = 1, (ac)^6 = 1 \rangle$$

en la que los generadores son dos simetrías, a y c, es decir, involuciones. Como la otra relación es $(ac)^6 = 1$, estamos ante un grupo de Coxeter que podemos presentar mediante una matriz de Coxeter $M = (m_{ij})$.
Tengo dos generadores así que M sera una matriz 2×2, donde $m_{1,1} = m_{2,2} = 1$ y $m_{1,2} = m_{2,1} =$ orden de ac, es decir 6. Dando lugar a que D_{12} es un grupo de Coxeter tipo M con

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

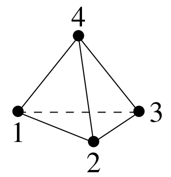
Ejemplo 1.13. *Ahora partimos de una matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

que cumple las condiciones para ser matriz de Coxeter, y por tanto el grupo

$$G(M) = \langle s_1, s_2, s_3 | s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = (s_1 s_2)^3 = (s_1 s_3)^2 = (s_2 s_3)^3 = 1 \rangle$$

es el grupo de Coxeter tipo M.
Aunque no entraré en detalles, se puede probar que el grupo $G(M)$ es exactamente el grupo T de isomometrías del espacio que dejan fijo un tetraedro. Para ello numeramos los vértices del tetraedro como el en el dibujo de 1.13 y podremos entender T como un subgrupo de Sym_4.



s_1 es la simetría que fija el plano que pasa por los vértices 3, 4 y el punto medio del segmento entre 1 y 4, y que intercambia los vértices 1 y 2.

De igual manera manera s_2 fija el plano que pasa por 1, 4 y el punto medio del segmento 2 a 3, intercambiando 2 y 3. Y s_3 fija 1, 2, el punto medio del segmento entre 3 4, e intercambia los vértices 3 y 4.

Ejemplo 1.14. *Consideremos la teselación del plano formada por cuadrados, es decir, un plano cubierto completamente por cuadrados de igual tamaño los cuales no se superponen entre ellos. Véase en el dibujo de 1.14 que se trata de lo que comúnmente podría llamarse una cuadricula infinita.*

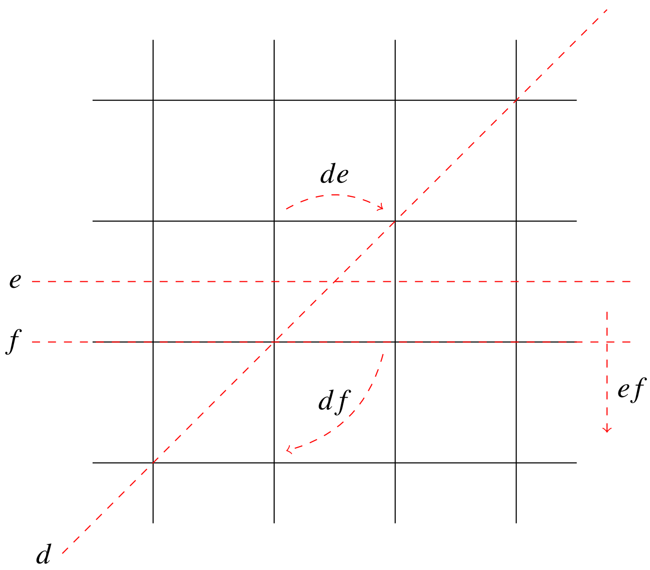
Entonces pensamos en los movimientos del plano que dejan fija mi teselación, por ejemplo, las simetrías respecto a los ejes d, e y f como se ven en 1.14.

A partir de d, e y f consideramos el grupo G que generan, el cual cumple las siguientes relaciones:

- $(de)^4 = 1$ *ya que de es un giro de* 90 *grados y centro en la intersección de los ejes de d y e.*
- $(df)^4 = 1$ *ya que* df *es un giro de* 90 *grados y centro en la intersección de los ejes de d y d.*
- $(ef)^m \neq 1$ *para todo m ya que* ef *es una traslación, es decir, tiene orden infinito.*
- $d^2 = e^2 = f^2 = 1$ *ya que son simetrías.*

Se puede probar que las relaciones $R = \{(de)^4, (df)^4, d^2, e^2, f^2\}$ *son suficientes para presentarlo, de la manera que tenemos*

$$G = \langle e, d, f | (de)^4, (df)^4, d^2, e^2, f^2 \rangle$$



G es claramente un grupo de Coxeter y por tanto puede presentarse como Grupo de Coxeter tipo M con matriz de Coxeter

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & \infty \\ 4 & 1 & 4 \\ \infty & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que no estamos hablando del grupo completo de todos los movimientos del plano que dejan fija mi teselación, sino simplemente un subgrupo de los mismos. Esto se puede demostrar observando que, por ejemplo, la traslación hacia la derecha no puede generarse a partir de d, e y f.

Ejemplo 1.15. *Sea el grupo simétrico* Sym_5 *que permuta el los elementos del conjunto* $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Sabemos del apartado 1.2.1 que esta generado por* $S_4 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ *con* $s_i = (i, i+1)$ *para todo i, cumpliendo las relaciones:*

- $s_i^2 = 1$ *para todo* $i = 1, 2, 3, 4$.
- $s_i s_j = s_j s_i$, *es decir,* $(s_i s_j)^2 = 1$ *si* $|i - j| > 1$. *Luego* $(s_1 s_3)^2 = (s_2 s_4)^2 = (s_3 s_5)^2 = 1$.

- $s_is_js_i = s_js_is_j$, *es decir* $(s_is_j)^3 = 1$ *si* $\mid i-j \mid = 1$. *Luego* $(s_1s_2)^3 = (s_2s_3)^3 = (s_3s_4)^3 = (s_4s_5)^3 = 1$.

Por tanto tenemos

$$Sym_5 = \langle s_1, s_2, s_3, s_4 | s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 =$$
$$= (s_1s_3)^2 = (s_2s_4)^2 = (s_3s_5)^2 = (s_1s_2)^3 = (s_2s_3)^3 = (s_3s_4)^3 = (s_4s_5)^3 = 1\rangle$$

y podemos concluir que Sym_5 *es un grupo de Coxeter tipo M con*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3. Grupos lineales y representaciones

Definición 1.16. *Sea GL(V) el grupo de las transformaciones lineales invertibles de V en V con V espacio vectorial con la operación de composición, es decir, el grupo general lineal sobre V. Una representación lineal de un grupo G consiste en un homomorfismo inyectivo de grupos* $G \to GL(V)$

Ejemplo 1.17. *Consideremos el grupo diédrico del hexagono* D_{12}=$\langle a, c | a^2 = c^2 = 1, (ac)^6 = 1\rangle$, *y ponemos*

$$A = \begin{pmatrix} sen\frac{2\pi}{6} & cos\frac{2\pi}{6} \\ cos\frac{2\pi}{6} & -sen\frac{2\pi}{6} \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} sen\frac{2\pi}{12} & cos\frac{2\pi}{12} \\ cos\frac{2\pi}{12} & -sen\frac{2\pi}{12} \end{pmatrix}$$

Se ve facilmente que se trata de dos matrices de orden 2, *y que además la matriz AC tiene orden* 6. *Consideremos el homomorfismo resultante de extender* $\phi : \{a, c\} \to GL(V)$ *a* $\phi : D_{12} \to GL(V)$ *según la proposición 1.1. Al ser un grupo finito se puede comprobar simpremente escribiendo todos sus elementos las matrices asociadas que* ϕ *es inyectivo.*
Por tanto $D_{12} \cong \langle A, C\rangle \leq GL(V)$ *y* ϕ *es una representación lineal de* D_{12}.

Una forma de ver gráficamente esta presentación es entender A y C como transformaciones lineales del plano $\mathbb{R}^2$. *Así pues, corresponden a dos simetrías respecto a dos rectas que pasan por el origen y tienen distinta pendiente. De esta manera AC, que es la imagen de* $ac = b$ *es un giro de* $\frac{2\pi}{6}$ *respecto al origen. De hecho, son exactamente las reflexiones y el giro del ejemplo 1.9 entendiéndolos no como movimientos del hexágono, sino de todo* $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.18. *Consideremos el grupo simétrico* Sym_{n+1} *formado por todas las permutaciones de* $\{1, \ldots, n+1\}$. *Sabemos ya que este grupo admite una presentación* $Sym_{n+1} = \langle S_n | T_n\rangle$ *como en ejemplo 1.2, donde* s_i *corresponde con la permutación* $(i, i+1)$

Vamos a construir una representacińn $S_n \to GL(V)$, *para eso ponemos*

$$\phi(s_i) = P_i$$

con $s_i = (i, i+1)$ *y* $P_i = (p_{jk})_{jk \in [n+1]}$ *la matriz de permutación* $n+1 \times n+1$ *con* $p_{i,i+1} = p_{i+1,i} = 1$, $p_{jj} = 1$ *para todo* $j \in [n+1]$ *distinto de i e* $i+1$ *y ceros en las demás entradas.*

Ésto implica que estas matrices P_i *cumplen las relaciones de la representación anterior de* S_n, *es decir*

$$P_i^2 = 1 \text{ para todo } i = 1 \ldots n$$
$$P_iP_j = P_jP_i \text{ para todo } \mid i-j \mid > 1$$
$$P_iP_jP_i = P_jP_iP_j \text{ para todo } \mid i-j \mid = 1.$$

Por lo tanto obtenemos un homomorfismo $\phi : Sym_{n+1} \to GL(V)$ *y se comprueba que si* $\sigma \in S_n$ *lleva i a* $\sigma(i)$, *entonces* $\phi(\sigma)$ *corresponde a la matriz nxn con unos en las posiciones* $(i, \sigma(i))$ *y el resto ceros. Se puede ver que* ϕ *es inyectivo, luego tenemos una presentación lineal de* Sym_{n+1}.

Capítulo 2

Presentaciones de Grupos de Coxeter

Durante este capítulo denotaremos por G a un grupo de Coxeter y por $\langle S,R\rangle$ a una presentación de Coxeter de G donde S es un familia generadora que consideraremos fija del grupo G.
Al tratarse de una presentación de Coxeter todos los generadores $s \in S$ son de orden 2, es decir, $s^2 = 1$ (o también, $s^{-1} = s$).

2.1. Longitud en grupos de Coxeter

Definición 2.1. *Dado un grupo de Coxeter G y un conjunto de generadores $T \subseteq S$, con S familia generadora fija, definimos como longitud respecto a T de un elemento $w \in \langle T\rangle$, a la menos longitud, o menor numero de letras, posible de una palabra en T que represente al elemento w. Lo denotaremos como $l_T(w)$. En el caso de que $T = S$, y por tanto $w \in \langle S\rangle = G$, diremos simplemente $l(w)$.*

Notemos que la longitud de la palabra vacía 1 es $l(1) = 0$.

Definición 2.2. *Una palabra que representa a $w \in G$ y tenga la menor longitud posible se llama palabra geodésica.*

Lema 2.3. *Para cualquier elemento $w \in G$ y $s \in S$ generador, se tiene $l(sw) = l(w) \pm 1$. Además, hay alguna palabra geodésica que represente w que empiece por s si y solo si $l(sw) = l(w) - 1$.*
Si $T \subseteq S$, $l_S(w) \leq l_T(w)$.

Demostración. Sea $w \in G$, $s \in S$ familia generadora, es claro que $l(sw) \leqslant l(w)+1$ y $l(w) = l(ssw) \leqslant l(sw)+1$, es decir, $l(w)-1 \leqslant l(sw)$, luego

$$l(w)-1 \leqslant l(sw) \leqslant l(w)+1$$

Veamos que $l(sw)$ y $l(w)$ tienen distinta paridad.

Para ello construimos un homomorfismo $\sigma : G \to \{\pm 1\}$ inducido por $a \longmapsto -1$ para todo $a \in S$. Como$\sigma(a)^2 = (-1)^2 = 1 = a^2$ y $(\sigma(a)\sigma(b))^m = ((-1)(-1))^m = 1 = (ab)^m$ se ve que respeta las relaciones y por tanto esta bien definido.
Se ve que $\sigma(w) = (-1)^{l(w)}$ y que $\sigma(sw) = (-1)^{l(sw)} = -\sigma(w) = -(-1)^{l(w)}$. Luego $l(w)$ y $l(sw)$ tienen distinta paridad, concluyendo

$$l(sw) = l(w)+1 \text{ ó } l(sw) = l(w)-1$$

Además, sea $l(w) = q$. Es claro que si existe una palabra geodésica que represente a $w \in G$ de la forma $w = ss_1 \dots s_{q-1}$, entonces $l(sw) = l(sss_1 \dots s_{q-1}) = l(s_1 \dots s_{q-1})$ ya que $s \in S$ es de orden 2 y por tanto $ss = s^2 = 1$. Como una subpalabra de una palabra geodésica también es geodésica, se deduce que $l(sw) = q-1$.

Por otro lado, supongamos que $l(sw) = l(w) - 1$ y sea $u \in G$ representante geodésica de sw. Entonces $u = sw$, es decir, $w = su$, y por hipótesis $l(w) = l(sw) + 1 = l(u) + 1$ luego su es geodésica y empieza por s. Teniendo así la segunda parte del enunciado.

La ultima afirmación del enunciado es trivial ya que toda palabra en T que represente a w es también palabra en S, luego si $l_T(w) = q$, existe una palabra en S que represente a w de longitud q, es decir, geodésica para esta palabra no tiene que ser necesariamente geodésica en S, luego $l_S(w) \leq q = l_T(w)$. □

Definición 2.4. *Sea $T \subseteq S$ un subconjunto del conjunto de letras, entonces diremos que $w \in G$ es $T-$reducida a izquierda si para todo $t \in T$ se tiene $l(tw) > l(w)$. Además, al conjunto de todos los elementos $T-$reducidos a izquierda de G lo denotaremos ${}^TG$.*
De manera análoga tenemos G^K, el conjunto de los elementos de G que sean K-reducidos a derecha, es decir, los elementos tales que $l(wk) > l(w)$ para todo $k \in K$ con $K \subseteq S$.

Ejemplo 2.5. *Sea $G = D_{12} = \langle a, c | a^2 = c^2 = (ac)^6 \rangle$, entonces los 12 elementos de D_{12} son*

$$\{1, ac, acac, acacac = cacaca, caca, ca$$

$$a, aca, acaca, cacac, cac, c\}$$

representados todos ellos con una palabra geodésica.
Luego podemos calcular D_{12}^T y ${}^TD_{12}$ para $T = a$ simplemente observando como actúa a a izquierda o a derecha, dando lugar a

$${}^TD_{12} = 1, c, ca, cac, caca, cacac$$

$${D_{12}}^T = 1, c, ac, cac, acac, cacac$$

Lema 2.6. *Sea G grupo de Coxeter y T un subconjunto de generadores de G, entonces*

a) Para todo $w \in G$ existen $u \in \langle T \rangle$ y $v \in^T G$ tales que $w = uv$ cumpliendo $l(w) = l(u) + l(v)$ y $l_T(u) = l(u)$.

b) Para todo $w \in \langle T \rangle$, $l(w) = l_T(w)$.

Demostración. a) Dado $w \in G$, denotamos por D al conjunto de pares (u, v) con $u \in \langle T \rangle$ y $v \in^T G$ tales que

$$w = uv \text{ con } l(w) = l(u) + l(v) \text{ y } l(u) = l_T(u).$$

Es claro que no es vacío ya que $(1, w) \in D$. Sea ahora $(u, v) \in D$ que maximiza $l(u)$. Supongamos que $v \notin^T W$, es decir, que existe $t \in T$ tal que $l(v) > l(tv)$, entonces por lema 2.1 $v = tx$ para algúna palabra geodésica x y $l(v) = l(x) + 1$.
Tenemos entonces que $w = (ut)x$ con $x \in G$ y $ut \in \langle T \rangle$, entonces

$$l(w) \leq l(ut) + l(x) \leq (l(u) + 1) + (l(v) - 1) = l(w)$$

por lo que se tiene $l(ut) = l(u) + 1$ y $l(w) = l(ut) + l(x)$. Además $l(ut) \leq l_T(ut) \leq l_T(u) + 1 = l(u) + 1 = l(ut)$, luego $l(ut) = l_T(ut)$ y tenemos $(ut, x) \in D$ con $l(u) < l(ut)$, contradiciendo la maximalidad de $l(u)$. Por tanto $v \in^T W$.

b) Dado $w \in \langle T \rangle \subseteq G$, por a) sabemos que $w = uv$ con u, v tales que $u \in \langle T \rangle$, $v \in^T G$ y $l_T(u) = l(u)$. Además como $w \in \langle T \rangle$, $v \in \langle T \rangle$, se tiene $v = 1$, es decir $w = u$. Luego $l(w) = l(u) + l(1) = l(u) = l_T(u) = l_T(w)$.

□

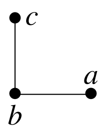
Definición 2.7. *Dada una matriz $n \times n$ de Coxeter M, le podemos asociamos un grafo de n vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ de forma que hay un eje entre v_i y v_j si $m_{ij} \neq 2$. Si este grafo tiene una única componente conexa diremos que M irreducible, e igualmente diremos que le grupo de Coxeter $G(M)$ de matriz de coxeter M es irreducible.*

Se puede entender que cada componente conexa del grafo esta formada por generadores a_i con $i \in I$ que conmutan con todos los generadores b_j con $j \in J$ que no pertenecen a dicha componente, ya que $(a_i b_j)^2 = 1$ para todo $i \in I$, $j \in J$ y por tanto $a_i b_j = b_j a_i$.

Ejemplo 2.8. *Tomamos el grupo de Coxeter tipo M con*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

generado por la familia $\{a, b, c\}$ entonces el grafo me queda tiene una única componente conexa, luego M es irreducible.



Consideremos una matriz de Coxeter M no irreducible y denotemos $J \subseteq [n]$, podemos tomar la matriz $M|_{J \times J}$, o simplemente J. Entonces podemos considerar $G(J)$ como el grupo de Coxeter tipo J. El razonamiento anterior implica.

Proposición 2.9. *Dado un grupo de Coxeter $G(M)$ tomamos una partición del grafo de M en componentes conexas $J_1, \dots J_r$, entonces $G(M) \cong G(J_1) \times \cdots \times G(J_r)$.*

2.2. Espacio afín de un espacio vectorial

Definición 2.10. *Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, un subespacio de este $S \leqslant V$, y un elemento $v \in V$, se dice clase de $v \in V$ al conjunto $v + S$. Ademas llamaremos cociente V/S al conjunto de clases $\{v + S | v \in V\}$, dicho conjunto es también un espacio vectorial.*

Definición 2.11. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces el espacio afín de V es el conjunto de puntos V dotados de una colección de subespacios afines y de la relación de paralelismo, definidos de la siguiente manera:*

Un subespacio afín de $A(V)$ es una clase de un subespacio lineal de V.

Dos subespacios afines son paralelos si son clases del mismo subespacio lineal de V, es decir, si son de la forma $v_1 + S$ y $v_2 + S$ con $v_1, v_2 \in V$ y $S \leqslant V$.
A este espacio afín lo denotaremos con $A(V)$, y si los subespacios afines X e Y son paralelos, escribiremos $X || Y$.

El paralelismo es una relación de equivalencia, y todos los los subespacios paralelos a un subesapcio dado dado dan una partición del total. Esto significa $V = \cup\{v + S | v \in V/S\}$.

Definición 2.12. *Si Y es la clase $v + S$ con $v \in V$ y con $S \leqslant V$ subespacio lineal de dimension d, entonces decimos que $dim(Y) = d$, en particular $dim(A(V)) = dim(V)$.*
Al conjunto vacío le diremos de dimension -1, un subespacio afín de dimension 1 es un único punto, y de dimension 1 es una recta.
La intersección de subespacios afines es un subespacio afín, y por tanto dado un subconjunto X de V, se define como subespacio generado por X a la intersección de todos los subespacios afines que contienen a X, y se denota $\langle X \rangle$.

Definición 2.13. *Un hiperplano de $V = \mathbb{R}^n$ es un subespacio afín de dimensión $n-1$.*

Definición 2.14. *Una transformación lineal sobre un espacio vectorial V es una aplicación $f : V \to V$ tal que $f(u+v) = f(u) + f(v)$ para todo $u, v \in V$. Un automorfismo de $A(V)$ es una aplicación biyectiva de V en V que preserva contenidos y paralelismos.*
Denotaremos $GL(V)$ al grupo de transformaciones de V y $Aut((A(V))$ al grupo de automorfismos.
Si tenemos un producto escalar en el espacio V, una isometría es una aplicación de V en V que conserva la distancia asociada a dicho producto escalar.

Definición 2.15. *Una traslación $\tau_v : V \to V$ es un automorfismo de la forma $\tau_v(x) = x + v$ para todo $x \in V$.*
Asimismo, denotamos $T(V)$ al grupo de traslaciones de V, el cual es un un subgrupo del grupo $Aut(A(V))$.

Definición 2.16. *El subgrupo de $Aut(A(V))$ generado por $T(V)$ y $GL(V)$ es el grupo afín lineal de V, lo denotamos $AGL(V)$.*

Definición 2.17. *Dado $v \in V$, una reflexión ρ respecto a un hiperplano H de V (es decir, un subepacio afín de dimensión $n-1$ que pasa por el origen) es una transormación lineal de V que deja fijos los puntos H, y que tiene un vector v no trivial de valor propio -1.*
H se llama espejo de ρ y v raíz de ρ.
Una reflexión afín respecto a un hiperplano arbitrario H es un elemento ρ del grupo afín lineal de V que fija los puntos de H y tal que $\rho^2 = 1$.

Se puede comprobar que una reflexión es una isometría respecto a un producto escalar si y sólo si su espejo y su raíz son ortogonales entre sí respecto a dicho producto escalar.

2.3. Representación por reflexiones

En esta sección vamos a tomar un grupo de Coxeter G generado por $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, y construir una representación lineal de G de grado n haciendo corresponder a cada s_i una reflexión del espacio afín $\mathbb{R}^n$. Estas reflexiones no son en general isometrías respecto al producto escalar habitual pero en cierto sentido, vamos a deformar la geometría de $\mathbb{R}^n$ de forma que las raíces y los espejos las reflexiones s_i sean ortogonales.

Definición 2.18. *Sean G, grupo de coxeter de tipo $M = (m_{ij})_{i,j \in [n]}$, y V, espacio vectorial real V con base $(e_i)_{i \in [n]}$. Entonces denotaremos B_M a la forma bilineal simétrica de $V \times V$ a $\mathbb{R}$ dada por*

$$B_M(e_i, e_j) = -2cos(\pi/m_{ij}) \ \forall i, j \in [n] \ con \ B_M(e_i, e_j) = -2 \ si \ m_{ij} = \infty$$

Notemos que es simétrica ya que $m_{ij} = m_{ji}$ para todo $i, j \in [n]$, y además $B(e_i, e_i) = 2$, ya que $m_{i,i} = 1$ para todo i.

Si M esta clara, pondremos simplemente B.

Ejemplo 2.19. *Tomemos el grupo D_{12}, correspondiente al diédrico del hexágono, como vimos en el capítulo anterior, $D_{12} = \langle a, c | a^2 = c^2 = (ac)^6 = 1 \rangle$.*
Por tanto se trata de un grupo de Coxeter tipo M, con

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

y le podemos asociar un grafo con dos únicos nodos unidos entre sí, ya que $m_{1,2} = 6 \neq 2$ (observemos que se trata pues de un grupo irreducible, ya que su grafo asociado tiene solo una componente conexa).

Tomemos ahora el espacio $\mathbb{R}^2$ con base canónica e_1, e_2.
Calculamos la forma bilineal simétrica asociada a M mediante

$$B(e_1e_1) = -2cos(\frac{\pi}{m_{1,1}}) = -2cos(\pi) = 2$$

$$B(e_1e_2) = -2cos(\frac{\pi}{m_{1,2}}) = -2cos(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}.$$

Como $m_{1,1} = m2,2$ y $m_{1,2} = m2,1$, entonces $B(e_1e_1) = B(e_2e_2)$ y $B(e_1e_2) = B(e_2e_1)$, quedando así

$$B_M = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.20. *Dada B previamente definida, la forma cuadrática asociada a M, denotada como Q_M, o simplemente Q es la dada por*

$$Q(x) = \tfrac{1}{2}B(x,x)\ \forall x \in V.$$

Es decir, para $x = \Sigma_{i\in[n]}x_ie_i \in V$

$$Q(x) = \frac{1}{2}\Sigma_{i,j\in[n]}x_ix_jB(e_i,e_j) = -\Sigma_{i,j\in[n]}x_ix_jcos(\pi/m_{ij})$$

Ademas, $B(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$.

En la siguiente proposición veremos como construir un conjunto de reflexiones sobre $\mathbb{R}^n$ que preservan B_M de manera que generan que más adelante veremos que es isomorfo al grupo de Coxeter tipo M dado. Estas reflexiones además cumplirán que sus espejos y raíces serán ortogonales respecto a la forma bilineal B_M aunque no lo sean para la métrica habitual.

En el siguiente resultado el simbolo $\perp$ denota ortogonalidad respecto a la forma bilineal B.

Proposición 2.21. *Sea G un grupo de Coxeter tipo M con B forma bilineal simétrica asociada a M, y sea la transformación lineal $\rho_i : V \to V$ dada por*

$$\rho_i(x) = x - B(x,e_i)e_i$$

con $i \in [n]$. Para todo $i, j \in [n]$ se tiene:

a) $B(e_i,e_i) = 2$.

b) $B(e_i,e_j) \leqslant 0$ *si* $i \neq j$, *y se tiene* $B(e_i,e_j) = 0$ *si y solo si* $m_{ij} = 2$.

c) ρ_i *es una reflexión sobre* V *con espejo* $e_i^{\perp} = \{x \in V | B(x,e_i) = 0\}$ *y raíz* e_i.

d) $B(x,y) = B(\rho_ix,\rho_iy)$, *es decir,* ρ_i *preserva* B.

e) $\rho_i\rho_j$ *tiene orden exactamente* m_{ij}.

Demostración. a) y b) son consecuencia directa de la definición de B.

c) Sabemos que ρ_i es una transformación lineal. Vamos a ver que $e_i^{\perp}$ es un hiperplano de V,e s decir que tiene dimensión $n-1$.
Para ello consideramos $B(\cdot,e_i) : V \to \mathbb{R}$ la aplicación que actúa $s \longmapsto B(s,e_i)$. Por definición de $e_i^{\perp}$ es claro que

$$Ker(B(\cdot,e_i)) = e_i^{\perp}.$$

Es claro también que $B(\cdot,e_i) \neq 0$ luego $Im(B(\cdot,e_i)) = \mathbb{R}$, por tanto

$$dim(e_i^{\perp}) = dim(Ker(B(\cdot,e_i))) = dim(V) - dim(\mathbb{R}) = n-1.$$

Sea $x \in e_i^{\perp}$, es decir, $B(x,e_i)e_i = 0$. Entonces

$$\rho_i(x) = x - B(x,e_i)e_i = x,$$

luego ρ_i fija los elementos del subespacio $e_i^{\perp}$.

Además

$$\rho_i(e_i) = e_i - B(e_i,e_i)e_i = e_i - 2e_i = -e_i,$$

luego e_i es vector de valor propio, y por tanto es la raíz de ρ_i.

d) Dados $x,y \in V$, aplicando directamente las propiedades y la definición de B obtenemos

$$B(\rho_i x, \rho_i y) = B(x - B(x,e_i)e_i, y - B(y,e_i)e_i) =$$

$$= B(x,y) - B(x,e_i)B(e_i,y) - B(x,e_i)B(y,e_i) + B(x,e_i)B(y,e_i)B(e_i,e_i) =$$
$$= B(x,y) - B(x,e_i)B(e_i,y) - B(x,e_i)B(y,e_i) + 2B(x,e_i)B(y,e_i) =$$
$$= B(x,y).$$

e) Sea el subespacio de V, $U = \mathbb{R}e_i + \mathbb{R}e_j$, invariante respecto ρ_i y ρ_j y denotemos $b = B(e_j,e_i)$. Entonces podemos expresar las matrices de las transformaciones lineales ρ_i y ρ_j de U respecto a la base e_i, e_j, es decir

$$(\rho_i)_U = \begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\rho_j)_U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego $\rho_i\rho_j$ tiene matriz $R = \begin{pmatrix} -1+b^2 & b \\ -b & -1 \end{pmatrix}$

cuyo polinomio característico es $\lambda^2 - (b^2-2)\lambda + 1$, el cual se descompone en factores como

$$(\lambda - e^{i\frac{2\pi}{m_{ij}}})(\lambda - e^{-i\frac{2\pi}{m_{ij}}}).$$

En efecto

$$(\lambda - e^{i\frac{2\pi}{m_{ij}}})(\lambda - e^{-i\frac{2\pi}{m_{ij}}}) = \lambda^2 - (e^{i\frac{2\pi}{m_{ij}}} + e^{-i\frac{2\pi}{m_{ij}}})\lambda + 1 = \lambda^2 - (b^2-2)\lambda + 1$$

ya que

$$b^2 - 2 = 4cos^2(\frac{\pi}{m_{ij}}) - 2 = 2\left(2cos^2(\frac{\pi}{m_{ij}}) - 1\right) = 2cos(\frac{2\pi}{m_{ij}}) = e^{i\frac{2\pi}{m_{ij}}} + e^{-i\frac{2\pi}{m_{ij}}}.$$

Vamos a ver que $\rho_i\rho_j$ tiene orden m_{ij}. Para ello primero hacemos la observación de que $\rho_i\rho_j$ no puede ser la identidad, y ahora separaremos en dos casos, cuando $m_{ij} = \infty$ y cuando $m_{ij} < \infty$.

Si $m_{ij} = \infty$. Tenemos que $R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo polinomio mínimo es $(\lambda-1)^2$.

Si $R^m = I_2$ entonces el polinomio tendría que dividir a $\lambda^m - 1$, pero $(\lambda-1)^2$ no divide a $\lambda^m - 1$, luego R tiene orden infinito, y por tanto lo tiene $\rho_i\rho_j$.

Si $m_{ij} < \infty$. Consideremos el subespacio de dimensión $n-2$, $U^{\perp} = e_i^{\perp} \cap e_i^{\perp}$. La restricción de Q a U es

$$Q(x_ie_i + x_je_j) = x_i^2 - 2x_ix_jcos(\frac{\pi}{m_{ij}}) + x_j^2 = (x_i - x_jcos(\frac{\pi}{m_{ij}}))^2 + x_j^2sin^2(\frac{\pi}{m_{ij}}).$$

Por tanto Q es definida positiva en U, luego $U \cap U^{\perp} = \emptyset$ y $U \oplus U^{\perp} = V$. Como ρ_i fija los puntos de $e_i^{\perp}$ y ρ_j fija los de $e_j^{\perp}$, $\rho_i\rho_j$ fija todos los puntos de $U^{\perp}$. Es decir, el orden de de $\rho_i\rho_j$ sera el orden de esta en U, donde $\rho_i\rho_j$ tiene matriz R y por tanto polinomio característico

$$(\lambda - e^{i\frac{2\pi}{m_{ij}}})(\lambda - e^{-i\frac{2\pi}{m_{ij}}})$$

Los valores propios de $\rho_i\rho_j$ en U son entonces $e^{i\frac{2\pi}{m_{ij}}}$ y $e^{-i\frac{2\pi}{m_{ij}}}$, los cuales son las raíces m_{ij}−ésimas de la identidad y R es semejante a la matriz diagonal con $e^{i\frac{2\pi}{m_{ij}}}$ y $e^{-i\frac{2\pi}{m_{ij}}}$ en la diagonal. Concluimos pues que R, y $\rho_i\rho_j$, tienen orden exactamente m_{ij}.

□

Ejemplo 2.22. *Retomemos el ejemplo 2.19. Ahora queremos encontrar ahora las reflexiones ρ_1 y ρ_2 del teorema anterior:*
ρ_1 es la reflexión respecto al hiperplano $e_i^{\perp}$, que en este caso de dimensión dos, es la recta dada por $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | B((x_1,x_2),e_1) = 0\}$.

$$B((x_1,x_2),e_1) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = 0$$

luego $2x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$. Por lo tanto ρ_1 es la relexión en el plano $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta $x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}x_1$ con raíz e_1. Además, ρ_1 tiene matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De forma análoga se ve que ρ_2 es la reflexión respecto a la recta $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1$ con raíz e_2.Además, ρ_2 tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora consideramos el grupo generado por las reflexiones ρ_1 y ρ_2 como las acabamos de definir, veremos en el teorema siguiente que es isomorfo al grupo D_{12}.
Ademas los espejos de las reflexiones ρ_1 y ρ_2, las rectas $x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}x_1$ y $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1$, y las raíces de ρ_1 y ρ_2, e_1 y e_2, son ortogonales respecto a la métrica dada por B_M. Es decir hemos deformado la geometría del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ de manera que los espejos y las raíces de las simetrías que generan los movimientos que dejan fijo un hexágono sean ortogonales.

Ejemplo 2.23. *Tomemos el grupo diédrico infinito $D_\infty = \langle a,c | a^2 = c^2 \rangle$, es decir, un grupo de Coxeter tipo M con $M = \begin{pmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{pmatrix}$.*
Tomemos ahora el espacio $\mathbb{R}^2$ con la base canónica e_1, e_2, y contruyamos la forma bilineal simétrica asociada a M:
$B(e_1,e_1) = -2cos(\frac{\pi}{m_{1,1}}) = 2$, $B(e_2,e_2) = -2cos(\frac{\pi}{m_{2,2}}) = 2$ *y* $B(e_1,e_2) = B(e_1,e_2) = 2$. *Es decir*

$$B_M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Busquemos ahora la reflexiones ρ_1. Para ello, veamos quien es $e_1^{\perp}$.

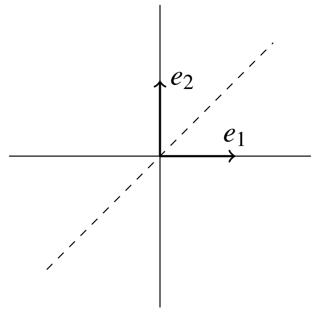
$$B((x_1,x_2),e_1) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0,$$

luego $2x_1 + 2x_2 = 0$. *Es decir,* $e_1^\perp$ *es la recta* $x_2 = x_1$.
Por tanto ρ_1 *es una reflexión respecto a* $x_2 = x_1$ *con raíz* e_1. *Además,* ρ_1 *tiene matriz*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente ρ_2 *es una reflexión respecto a* $x_2 = x_1$ *con raíz* e_2. *Además,* ρ_2 *tiene matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$



Teorema 2.24. *Dado G un grupo de Coxeter tipo M generado por* $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, *y V un espacio vectorial real de dim* $V = n$ *definimos una aplicación* $\rho : S \to GL(V)$ *mediante* $\rho(s_i) = \rho_i$. *Entonces:*

a) Esta aplicación se puede extender a todo G, dando lugar a una representación lineal de G mediante un homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$ *cuya imagen preserva B.*

b) $\rho_i \neq \rho_j$ *para todo* $i \neq j$.

c) ρ *restringido al subgrupo* $\langle s_i, s_j \rangle$ *de G es fiel para todo* $i, j \in [n]$.

Demostración. a) Por c) y e) de la proposición 2.21 se puede ver facilmente que los ρ_i cumplen las relaciones de coxeter, además ρ preserva claramente B por d) de la proposición 2.21.

b) Sean $\rho_i = \rho_j$ entonces por la proposición 2.21 $m_{ij} =$ orden de $\rho_i\rho_j = \rho_i\rho_i$, que tiene orden 1 puesto que es la identidad. Luego $m_{ij} = 1$, y por ser M matriz de Coxeter, solo puede ser $i = j$.

c) Sea $\rho : \langle s_i, s_j \rangle \to GL(V)$, veamos que es inyectiva.

Veamos que todos los elementos de $\langle s_i, s_j \rangle$ son de la forma $(s_i s_j)^r$ ó $s_i(s_j s_i)^r$ con algún $r \in \mathbb{N}$.

Es claro que $w \in \langle s_i, s_j \rangle$ es de la forma $w = \dots s_i s_j s_i s_j \dots$ ya que $s_i s_i = s_j s_j = 1$, diferenciando cuando empieza y acaba por la misma letra, y cuando lo hace con letra distinta. Si empieza y acaba por la misma letra entonces

$$w = s_i s_j \dots s_j s_i = s_i(s_i s_j)^r \text{ para algún } r$$
$$\text{ó}$$
$$w = s_j s_i \dots s_i s_j = s_j(s_i s_j)^s = s_j(s_j s_i)^{m_{ij}-s} = s_i(s_j s_i)^{m_{ij}-s-1}$$
$$\text{luego } w = s_i(s_j s_i)^{m_{ij}-s-1} \text{ para algún } s, \text{ basta tomar } r = m_{ij} - s - 1.$$

Si empiezan y acaban por distinta letra entonces

$$w = s_i s_j \dots s_j s_i = (s_i s_j)^r \text{ para algún } r$$
$$\text{ó}$$
$$w = s_j s_i \dots s_j s_i = (s_j s_i)^s = (s_j s_i)^{m_{ij}-s}$$
$$\text{luego } w = (s_j s_i)^{m_{ij}-s} \text{ para algún } s, \text{ basta tomar } r = m_{ij} - s.$$

Ahora vamos a ver que si $\rho(w) = 1$ entonces necesariamente $w = 1$.

Si $w = (s_i s_j)^r$.
$\rho((s_i s_j)^r) = (\rho_i \rho_j)^r = 1$ implica $\rho_i \rho_j$ tiene orden divisor de r. El orden de $\rho_i \rho_j$ es m_{ij}= orden de $s_i s_j$, luego $(s_i s_j)^r = (s_i s_j)^{m_{ij} s} = 1^s = 1$.

Si $w = s_i (s_j s_i)^r$.
$\rho(s_i (s_j s_i)^r) = \rho_i (\rho_j \rho_i)^r = 1$ implica $(\rho_j \rho_i)^r = \rho_i^{-1} = \rho_i$.
Las matrices ρ_i tienen determinante -1 luego $(\rho_j \rho_i)^r$ debería tener determinante -1. Pero $(\rho_j \rho_i)^r$ tiene determinante $((-1)(-1))^r = 1^r = 1$, lo que es una contradicción. Por tanto no w tal que $\rho(w) = 1$ no puede ser de la forma $w = s_i (s_j s_i)^r$.

En conclusión, $\rho(w) = 1$ implica $w = 1$, y por tanto ρ es inyectiva en $\langle s_i, s_j \rangle$.

$\square$

Definición 2.25. *Dado G grupo de Coxeter tipo M generado por S, a la representación lineal* $\rho : G \to GL(V)$ *se le llama representación por reflexiones de G.*

Capítulo 3

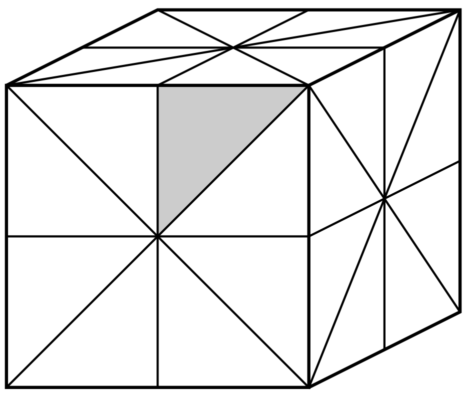
Linealidad de los grupos de Coxeter

3.1. Grupos generados por reflexiones afines

Cualquier grupo G generado por un conjunto de involuciones $\{\rho_i | i \in [n]\}$ es imagen homomorfica de un grupo W de Coxeter de tipo $M = (m_{ij})_{i,j\in[n]}$ con m_{ij} =orden de $\rho_i\rho_j$. En esta sección vamos a ver que para G subgrupo de $AGL(V)$ generado por reflexiones afines que satisfacen cierta condición, este homomorfisto es un isomorfismo.

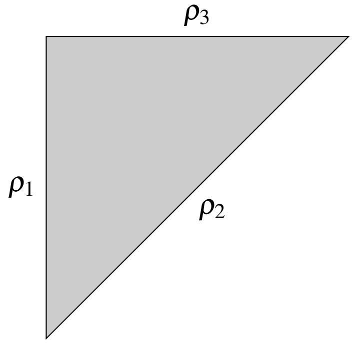
Definición 3.1. *Si un grupo G actúa sobre un conjunto E, un dominio prefundamental de G es un subconjunto no vacío $D \subset E$ tal que $D \cap gD = \emptyset$ para todo $g \in G$ distinto de* 1.

Ejemplo 3.2. *Consideremos un cubo en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ donde los vértices del cubo son los puntos de la forma $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Ahora contruímos la subdivisión baricéntrica de cada cara, dando lugar a una serie de tríangulos a los cuales llamaremos cámaras.*



Cada una de las 48 cámaras se corresponde con una única selección de cara, arista y vértice del cubo, vamos a fijarnos simplemente en la cámara correspondiente al vértice $v1 = (1,1,1)$, la arista $a1 = \{v1, (1,-1,1)\}$ y a la cara $c1 = a1 \cup \{(1,1,-1), (1,-1,-1)\}$. Este triángulo determina tres reflexiones ρ_1, ρ_2 y ρ_3 correspondientes a la simetría respecto al plano centrado en el origen que pasa por cada uno de los lados del mismo.

Así pues, ρ_1 es la simetría que deja invariante el cubo tal que mi cámara cambia de vértice asociado, pero sigue asociado a la misma cara y arista, mientras que ρ_2 y ρ_3 cambian mi cámara de arista y de cara asociada respectivamente.



Se puede probar que estas tres simetrías generan el grupo G de las 48 *isometrías en* $\mathbb{R}^3$ *que dejan invariante el cubo. Además puede verse que cada uno de las* 48 *isometrías mueve mi cámara a cada de las posiciones de las* 48 *cámaras del cubo.*

Como dos cámaras solo pueden intersecar en su borde (o un vértice o una arista) es fácil ver que el interior de las cámaras del cubo son dominios prefundamentales.

El interior de las cámaras del ejemplo anterior son un ejemplo de dominio prefundamental, ya que aplicar una isometría distinta de la identidad que deja fijo el cubo mueve una cámara a otra posición, de forma que la intersección del interior de una cámara y su imagen es vacía.

Definición 3.3. *Sea V un espacio vectorial y W un grupo de Coxeter que actúa en $A(V)$ y sea $S = \{s_1 | i \in I\}$ una familia generadora de W. Para cada s_i, sea $A_i \subseteq V$ de la forma $A_i \cap s_i A_i = \emptyset$ y sea $A = \cap A_i$. Consideramos las siguientes afirmaciones:*

(P_q): Para todo $i \in I$, $w \in W$ con $l(w) \leqslant q$ se tiene $wA \subseteq A_i$ ó $wA \subseteq s_i A_i$, en este ultimo caso $l(s_i w) = l(w) - 1$.

(P): Se cumple (P_q) para todo $q \neq 0$.

Definición 3.4. *Sea G grupo generado por reflexiones afines $\{\rho_i | i \in I = [m]\}$ respeto a hiperplanos H_i del espacio afín $A(V)$.*
Entonces el grupo de Coxeter asociado a G es W generado por $\{s_i | i \in [m]\}$ con la matriz de coxeter dada por

$$m_{ij} = orden(\rho_i \rho_j).$$

Tenemos $\rho \to G$ bien definida por la proposición 1.4 que induce una acción de W en $A(V)$.
Además denotaremos $\rho(w)X := wX$.

Teorema 3.5 (Lema de Tits)**.** *Sea G un grupo generado por reflexiones afines como en la definición anterior. Sea A_i una de las dos mitades de V determinadas por H_i y supongamos que $A = \cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Sea W el grupo de Coxeter asociado a G como en la definición anterior y para cada par de generadores s_i y s_j de W denotamos W_{ij} al subgrupo de W generado por s_i, s_j.*

Suponemos que para todo i, j W_{ij} cumple (P) respecto A_i, A_j. Entonces

a) A es dominio prefundamental de G.

b) $\rho : W \to G$ es isomorfismo.

Demostración. Primero, vamos a probar que si W cumple la afirmación (P) respecto $A_1, \ldots A_m$, entonces se cumplen a) y b).

b) Sea $w \in Ker(\alpha)$, es decir, $\alpha(w) = 1$, entonces $\alpha(w)A = wA = A$. Esto implica que para todo $i \in I$,

$$s_i w A = s_i A \subseteq s_i A_i$$

por (P_q) con $q = l(s_i w)$, se tiene $l(s_i^2 w) = l(s_i w) - 1$, es decir, $l(s_i w) = l(w) + 1$. Esto significa que w no empieza por s_i para ningún $i \in I$ y por tanto $w = 1$. Se deduce que $Ker(\alpha) = \{1\}$, luego G es isomorfo a W.

a) Supongamos que para $w \in W$ se tiene $A \cap wA \neq \emptyset$, entonces para todo $i \in I$ se tiene $A_i \cap wA \neq \emptyset$. Como $a_i \cap s_i A_i = \emptyset$, por (P_q) con $q = l(w)$, se deduce $wA \subseteq A$ y por tanto $sA \subseteq A$. Pero la suposición sobre $w \in W$ también significa que $w^{-1}A \cap A \neq \emptyset$, así que de manera similar se prueba $w^{-1}A \subseteq A$, luego $A \subseteq wA$. En consecuencia $A = wA$, y por el mismo argumento que en b), $w = 1$. Tenemos pues que A es dominio prefundamental para W, y al ser $G \cong W$, se tiene a).

Ahora, veamos que (P) para W_{ij} implica (P) para W. Procederemos por inducción sobre q, partiendo de que (P_0) es trivialmente cierto.

Supongamos cierto (P_q) y veamos (P_{q+1}):
Sea $w \in W$ con $l(w) = q+1$, tomamos $j \in I$ tal que $w = s_j w'$ para algún $w' \in W$ y además $l(w') = q$ con $l(w) = l(s_j w') \neq l(w') - 1$. Aplicando (P_q) a w' se decuce $w'A \subseteq s_j A_j$, luego

$$wA = s_j w'A \subseteq s_j Aj, \text{ y en este caso } l(s_j w) = l(w') = q = q+1-1l(w)-1$$

luego se cumple (P_{q+1}) para w y el indice j.

Sea ahora $i \in I$ tal que $l(s_i w) = l(w) + 1$, y sea j como antes, es decir, $l(s_w) = l(w) - 1$, en particular $i \neq j$. Por el lema 2.1 existen $u \in \langle s_i, s_j \rangle = W_{ij}$ y $v \in^{\{i,j\}} W$ de manera que

$$w' = uv \text{ cumpliendo } l(w') = l(uv) = l_{ij}(u) + l(v) = l(u) + l(v)$$

Como $v \in^{\{i,j\}} W$ por definición, sabemos que $l(s_i v) > l(v)$ y $l(s_j v) > l(v)$. Vamos a provar que

$$vA \subseteq A_{ij} = A_i \cap A_j \tag{3.1}$$

Notar que $l(v) < q+1$, luego como (P_q) se aplicar para v.
Si fuese $v \subseteq A_i$ $l(s_i v) = l(v) - 1$, es decir, $l(s_i v) < l(v)$, pero sabemos que $l(s_i v) > l(v)$, luego $vA \subseteq A_i$. Análogamente deducimos que $vA \subseteq A_j$, y por tanto 3.1 se cumple.

Obtenemos entonces $wA = s_j w'A = s_j uvA \subseteq s_j uA_{ij}$. Vamos a aplica (P) para el grupo W_{ij}, la cual sabemos que es cierta, al elemento $s_j u \in W_{ij}$. Es decir, $s_j uA_{ij} \subseteq A_i$ ó $s_i A_i$, cumpliendo en este ultimo caso $l(s_i s_j) = l(s_j u) - 1$.

Por 3.1 tenemos $wA \subseteq s_j uA_{ij}$, luego wA esta contenido en A_i ó $s_i A_i$, teniendo así la primer afirmación de (P_{q+1}).

Además, si $wA \subseteq s_i A_i$, tenemos $wA \subseteq s_j uA_{ij} \subseteq s_i A_i$, se tiene

$$l(s_i w) = l((s_i s_j u)(u^{-1} w')) \leq l(s_i s_j u) + l(u^{-1} w')$$

$$\leq l(s_i s_j u) + l(w') - l(u) \leq l(s_j u) - 1 + q - l(u) \leq q$$

y como $l(w) = q+1$, obtenemos $l(s_i w) = q = l(w) - 1$, quedando demostrado (P_{q+1}). □

3.2. Representacion por reflexiones lineales

En esta sección culmina con la demostración, mediante la aplicación del lema de Tits, de que la representación por reflexiones ρ contruída en el teorema 2.24 es fiel. Para ello vamos a tener que modificar la representación.

Partimos de una representación lineal de un grupo G

$$\rho : G \to GL(V)$$

y definimos $\rho^* : G \to GL(V)$ como

$$\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^t \text{ para todo } g \in G$$

donde t indica la matriz traspuesta.
Hay que ver que es homomorfismo de grupos:

$$\rho^*(g_1g_2) = \rho((g_1g_2)^{-1})^t = \rho(g_2^{-1}g_1^{-1})^t = (\rho(g_2^{-1})\rho(g_1^{-1}))^t = (\rho(g_1^{-1})^t(\rho(g_2^{-1})^t = \rho^*(g_1)\rho^*(g_1)$$

Por tanto ρ^* es una representación del grupo G.

El siguiente lema es trivial.

Lema 3.6. *ρ^* es fiel si y solo si ρ es fiel*

Observemos la siguiente relación entre los vectores propios de una matriz P y los de su traspuesta P^t:

Sea $< \cdot, \cdot >$ el producto espalar habitual. Si v es vector propio de P de valor propio α y w vector propio de P^t de valor propio β, con $\alpha \neq \beta$

$$\alpha\langle v, w\rangle = \langle \alpha v, w\rangle = \langle Pv, w\rangle = (Pv)^t w =$$

$$v^t P^t w = \langle v, P^t w\rangle = \langle v, \beta w\rangle = \beta\langle v, w\rangle.$$

Como $\alpha \neq \beta$, esto implica $\langle v, w\rangle = 0$, es decir, v y w son ortogonales respecto al producto escalar habitual.

Ahora, supongamos que $P = \rho(s)$ con $s \in S$ familia generadora de W grupo de Coxeter. Entonces

$$\rho^*(s) = \rho(s^{-1})^t = \rho(s)^t = P^t$$

Los vectores propios de P, como ya hemos estudiado, son:

e (raíz) de valor propio -1
el subespacio de dimensión $n-1$, $e^{\perp_B}$ (espejo) de valor propio 1

donde $\perp_B$ se refiere a ortogonalidad respecto a B como en el tema 2.
La matriz P^t tiene también valores propios 1 y -1 con multiplicidades $n-1$ y 1 respectivamente.
Así que si v es raíz de P^t, se tiene

$$\langle v, w\rangle = 0 \text{ para todo } w \in e^{\perp_B}.$$

Además, el espejo de P^t es ortogonal respecto a $< \cdot, \cdot >$ de e, es decir

$$\text{espejo de } P^t = \{u \in V | \langle u, e\rangle = 0\}.$$

En resumen:

$P = \rho(s)$ tiene espejo $e^{\perp_B}$ y raíz e
$P^t = \rho^*(s)$ tiene espejo $e^{\perp_{<\cdot,\cdot>}}$ y raíz $(e^{\perp_B})^{\perp_{<\cdot,\cdot>}}$.

Aplicando esto a un $s_i \in W$ con raíz e_i tenemos:

$$\text{espejo de } \rho_i^* = \langle e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n\rangle.$$

Lema 3.7. *Para D_∞, la acción en $\mathbb{R}^2$ asociada a ρ^* cumple la propiedad (P) respecto de ciertos A_i, A_j.*

Demostración. Como ya vimos en el ejemplo 2.23, el grupo diédrico infinito es $D_\infty = \langle a, c | a^2 = c^2 \rangle$ y $\rho : D_\infty \to GL(V)$ es la presentación por reflexiones sobre el plano $\mathbb{R}^2$ con

$$a \longmapsto \rho_1, \text{ la reflexión de matriz } \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$c \longmapsto \rho_2, \text{ la reflexión de matriz } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

tal y como hemos visto en el tema 2. Llamaremos a estas matrices también ρ_1 y ρ_2 respectivamente, vamos a estudiar como son las reflexiones correspondientes a la representación dada por ρ^*.

Notemos que $\rho_1^* = \rho_1^t$ y $\rho_2^* = \rho_2^t$. Luego las matrices de mis nuevas reflexiones son simplemente

$$\rho_1^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

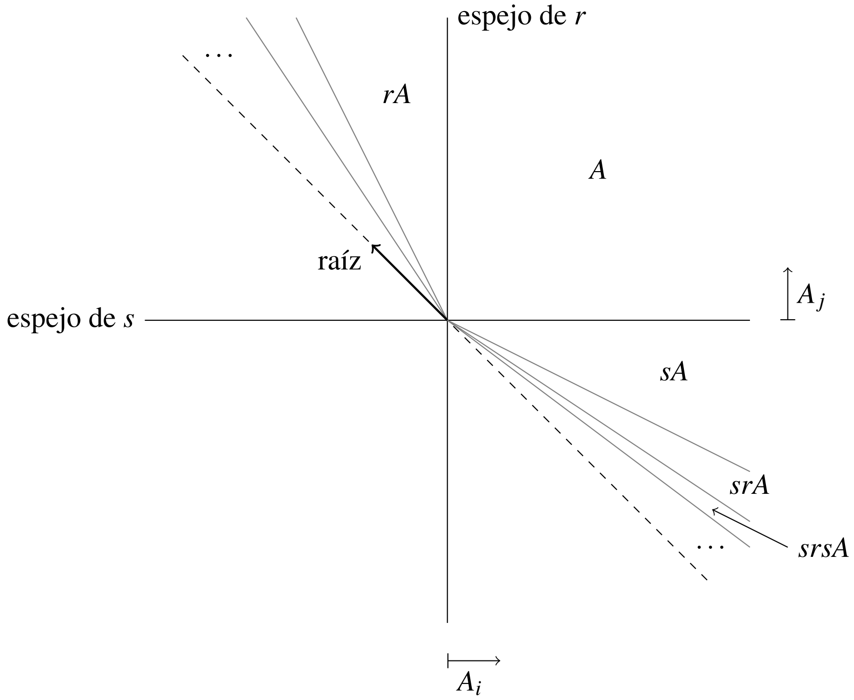
Por lo dicho anteriormente, obtenemos que el espejo de ρ_1^t es la recta $x_1 = 0$, mientras que su raíz es el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De igual manera obtenemos que $x_2 = 0$ es el espejo de ρ_2^t, y su raíz es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Al contrario que lo que pasa para ρ_i y rho_j, ahora ρ_i^t y ρ_j^t tienen distintos espejos y la misma raÃz.

Queremos ver que el conjunto $A_i \cap A_j$ al que denotaremos simplemente A es dominio prefundamental para el grupo $\langle \rho_1^t \rho_2^t \rangle$. Para ello, basta con fijarse como actúan los elementos de este sobre A.

En el siguiente dibujo denotaremos ρ_1^t y ρ_2^t como r y s respectivamente:



Así pues concluímos que wA siempre va a estar exactamente en una de las mitades de V determinada por el espejo de r, y lo mismo respecto el de s, es decir, cumple la primera parte de la afirmación (P). Por último, observemos que las imágenes wA de A con $w \in D_\infty$ que están contenidas en rA_i son de la forma wA con $w = rw'$, luego $l(rw) = l(w) - 1$, análogamente para A_j. □

Lema 3.8. *Para D_m con $m < \infty$, la acción en $\mathbb{R}^2$ asociada a ρ^* cumple la propiedad (P) respecto de ciertos A_i, A_j.*

Demostración. Procediendo de igual forma que la demostración del teorema anterior, obtenemos que para D_m:

$$\rho_1^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2cos\frac{\pi}{m} & 1 \end{pmatrix}$$

con espejo e_2 y raíz $\begin{pmatrix} 1 \\ -cos\frac{\pi}{m} \end{pmatrix}$, y

$$\rho_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 2cos\frac{\pi}{m} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con espejo e_1 y raíz $\begin{pmatrix} -cos\frac{\pi}{m} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para ver gráficamente con facilidad como acúan los elementos w de D_m sobre A vamos hacer un cambio de base de $\mathbb{R}^2$. Tomamos la nueva base

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -cos\frac{\pi}{m} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{sen\frac{\pi}{m}}$$

Calculando las coordenadas de los vectores anteriores en la nueva base obtenemos fácilmente que transformaciones lineales tenemos en cada caso:

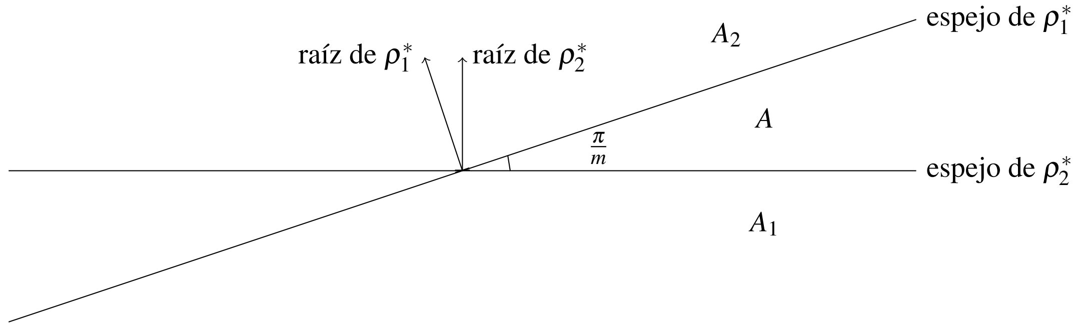
ρ_1^*

$$\text{Raíz: } \begin{pmatrix} 1 \\ -cos\frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \text{ en la base anterior} \longrightarrow \begin{pmatrix} sen\frac{\pi}{m} \\ -cos\frac{\pi}{m} \end{pmatrix} sen\frac{\pi}{m} \text{ en la nueva base.}$$
$$\text{Espejo: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en la base anterior} \longrightarrow \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{m} \\ sen\frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \text{ en la nueva base.}$$

ρ_2^*

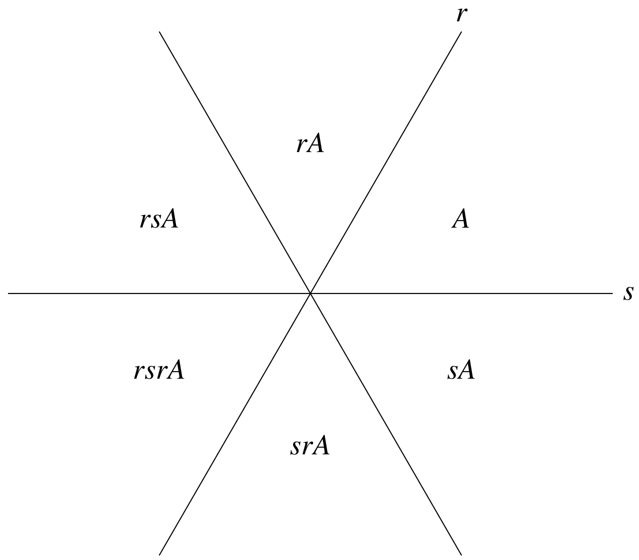
$$\text{Raíz: } \begin{pmatrix} -cos\frac{\pi}{m} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en la base anterior} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} sen\frac{\pi}{m} \text{ en la nueva base.}$$
$$\text{Espejo: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en la base anterior} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en la nueva base.}$$

Así, las raíces son ortogonales a los espejos en el nuevo sistema de referencia. Los espejos de ρ_1^* y ρ_2^* forman un ángulo de $\frac{\pi}{m}$.



Ahora hay que razonar que se cumple (P) en este sistema de referencia, para lo cual analizaremos únicamente el caso $m = 6$ que nos servirá para deducirlo para todo $m < \infty$.

En la siguiente figura denotaremos r y s tanto a ρ_1^* ρ_2^* respectivamente como a sus espejos. Se ve claramente en la siguiente figura que wA está contenido exactamente en una de las dos mitades de V determinadas por r, e igualmente con s.



Tenemos así la primera parte de la afirmación (P). La segunda se puede ver simplemente analizando cada $w \in D_m$, ya que es un grupo finito, y se ve que se cumple también.

Luego (P) se cumple para el nuevo sistema de referencia, y además, volviendo al sistema de referencia original, se deduce también que (P) se cumple.

Por último, en el caso de un m arbitrario, serviría la misma demostración pero con m sectores en lugar de 6. □

Teorema 3.9. *Sea W un grupo de Coxeter con generadores $\{s_1 \dots s_n\}$ y ρ la aplicación construida en el teorema 2.24. Entonces ρ es inyectiva.*

Demostración. Basta probar que ρ^* es inyectiva. Y por el resultado principal de la sección anterior, basta probar que para $A_1, \dots, A_n$ asociados a la acción de W en $V = \mathbb{R}^n$ dada por ρ^* y para cada i, j, el grupo W_{ij} generado por s_i, s_j cumple (P) respecto de A_i, A_j.

Sea U la intersección de los espejos de ρ_i^* y ρ_j^* y S el subespacio generado por las raíces de ρ_i^* y ρ_j^*. Vamos a ver que son invariantes para ρ_1^* y ρ_2^*.

Es claro que ρ_i^* y ρ_j^* actúan trivialmente en U ya que es intersección de sus espejos. Además

$$U = \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n \rangle.$$

Por otra parte

$$S = \langle (e_i^{\perp_B})^{\perp_{<\cdot,\cdot>}}, (e_j^{\perp_B})^{\perp_{<\cdot,\cdot>}} \rangle = (e_i^{\perp_B} \cap e_j^{\perp_B})^{\perp_{<\cdot,\cdot>}}$$

es decir, S es el subesapcio ortogonal respecto al producto escalar habitual de la intersección de los espejos de ρ_i y ρ_j.
Sea $v \in S$. Entonces para todo w en la intersección de los espejos de ρ_i y ρ_j se tiene

$$< \rho_i^* v, w > = < v, \rho_i w > = < v, w > = 0$$

luego $\rho_i^* v \in S$.
Análogamente se prueba que S es invariante para ρ_j^*.

Se puede probar, aunque no entraremos en detalles, que además las matrices de la restricción de ρ_i^* y ρ_j^* son o como en el lema 3.7 o en el lema 3.8. Esto implica que las restricciones cumplen (P) respecto a $A_i \cap S$ y $A_j \cap S$ y, teniendo en cuenta que ambos actúan trivialmente en U y que $U \oplus S = V$, se puede deducir fácilmente que ρ_i^* y ρ_j^* también cumplen (P) respecto A_i y A_j.

□

Para finalizar con este trabajo, vamos a ver como son los subespacios S y U del el teorema anterior en el caso del grupo introducido en el ejemplo 1.14.

Ejemplo 3.10. *Recordemos que el grupo del ejemplo 1.14 era un grupo G formado por movimientos (no todos) del plano que dejan una teselación formada por cuadrados. Este grupo tiene presentación*

$$G = \langle e, d, f \mid (de)^4, (df)^4, d^2, e^2, f^2 \rangle$$

y es un grupo de Coxeter tipo $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \infty \\ 4 & 1 & 4 \\ \infty & 4 & 1 \end{pmatrix}$. *A partir de M, como hacíamos en el capítulo 2, podemos obtener*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ -2 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Tomamos la base canónica e_1, e_2, e_3 del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Vamos a fijarnos únicamente en el par de reflexiones ρ_1 y ρ_2 (correspondientes a e y f), las cuales se pueden calcular y son:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de espejo } e_1^{\perp_B} \text{ y raíz } e_1.$$
$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de espejo } e_2^{\perp_B} \text{ y raíz } e_2.$$

De esta manera:

$$\rho_1^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de espejo } \langle e_2, e_3 \rangle \text{ y raíz } (e_1^{\perp_B})^{\perp_{<\cdot,\cdot>}}.$$
$$\rho_2^* = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ de espejo } \langle e_1, e_3 \rangle \text{ y raíz } (e_2^{\perp_B})^{\perp_{<\cdot,\cdot>}}.$$

Ahora utilizamos lo que sabemos de S y U por el teorema anterior y tenemos que

- *U es la intersección de los espejos de ρ_1^* y ρ_2^*, por tanto*

$$U = \langle e_3 \rangle.$$

- *S es el subgrupo generado por las raíces de ρ_1^* y ρ_2^*, por tanto $S = \langle (e_1^{\perp_B})^{\perp_{<\cdot,\cdot>}}, (e_2^{\perp_B})^{\perp_{<\cdot,\cdot>}} \rangle$. Haciendo los cálculos necesarios de álgebra lineal se puede ver que es el plano*

$$3\sqrt{2}x_1 + 4x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0.$$

Bibliografía

[1] ARJEH M. COHEN, *Coxeter groups*, http://www.win.tue.nl/~amc/pub/CoxNotes.pdf.

[2] AMJAMES E. HUMPHEREYS, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, https://sites.math.washington.edu/~billey/classes/root.systems/references/Reflection%20Groups%20and%20Coxeter%20%20Groups.pdf.

[3] MICHAEL W. DAVIS, *The Geometry and topology of Coxeter Groups*, https://faculty.math.illinois.edu/~liang41/coxeter%20group.pdf.

[4] ANDERS BJORNER AND FRANCESCO BRENTI, *Combinatorics of Coxeter Groups*, https://sites.math.washington.edu/~billey/classes/coxeter/EntireBook.pdf.