



**Universidad**  
Zaragoza

**Anexos al Trabajo de Fin de Grado:  
Técnicas de simulación numérica en  
Relatividad General**

Autor:  
Enrique Antón Fuertes

Director:  
Eduardo Follana Adin

Facultad de ciencias  
2016/2017

# Índice

<b>A. Repaso de Relatividad General y geometría diferencial</b>	<b>1</b>
A.1. Principio de Relatividad e invariancia de las leyes de la física . . . . .	1
A.2. El espacio de Minkowski . . . . .	2
A.3. La necesidad de la relatividad general . . . . .	3
A.4. Tensores y cambios generales de coordenadas . . . . .	4
A.5. Conceptos de geometría diferencial . . . . .	4
A.5.1. Variedades diferenciales y la métrica en una variedad . . . . .	4
A.5.2. Transporte paralelo y derivada covariante . . . . .	5
A.5.3. El tensor de Riemann . . . . .	6
A.5.4. La conexión de Levi-Civita . . . . .	8
A.5.5. Geodésicas . . . . .	8
A.6. Las ecuaciones de Einstein . . . . .	8
<b>Bibliografía</b>	<b>9</b>
<b>B. Código empleado para la simulación de un agujero negro de Schwarzschild</b>	<b>10</b>

## A. Repaso de Relatividad General y geometría diferencial

### A.1. Principio de Relatividad e invariancia de las leyes de la física

Un principio clave en el desarrollo de la Relatividad General es el Principio de la Relatividad, formulado varios siglos antes por Galileo Galilei (1564-1642), diciendo que es imposible distinguir por medio de experimentos mecánicos si un sistema está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. De este modo queda establecido un conjunto de observadores o sistemas de referencia que llamamos *sistemas inerciales*, que son todos aquellos en reposo o movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema previamente elegido como inercial y que, como dice el Principio de Relatividad, ven todos la misma física.

Ya en el siglo XX, Albert Einstein (1879-1955) razonó que si todos los observadores inerciales veían la misma física, entonces todos ellos deberían llegar a las mismas leyes físicas. Además pensó que este principio no tenía por qué limitarse a la mecánica, sino que podía ser aplicado a toda la física. Esta invariancia de las leyes físicas impone que las transformaciones (cambios de coordenadas) entre observadores inerciales tengan una forma determinada, y el conjunto de estas transformaciones tiene la estructura matemática de un grupo. Puede enunciarse entonces el Principio de Relatividad en formulación covariante como:

*Las leyes de la física transforman bien bajo las transformaciones del grupo de simetría que relacionan a los distintos observadores.*

Pronto se encontró un problema teórico importante a esta afirmación. En mecánica clásica, dos observadores en movimiento relativo con velocidad constante  $\vec{v}$  (por simplicidad,  $\vec{v} = v\hat{x}$ ) que observan el mismo suceso pueden relacionar sus mediciones de posición y tiempo mediante las *transformaciones de Galileo*:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (\text{A.1})$$

Las transformaciones de Galileo, junto con las rotaciones y las traslaciones espaciales y temporales, forman el *grupo de Galileo*, bajo el cual la mecánica newtoniana transforma de forma covariante. Sin embargo, puede demostrarse que las leyes de Maxwell no transforman bien bajo las transformaciones de Galileo, sino bajo transformaciones de la forma<sup>1</sup>

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (\text{A.2})$$

conocidas como *transformaciones de Lorentz*, que tienden a las de Galileo cuando  $v \ll c$ , y que puede demostrarse que también constituyen un grupo (*grupo de Lorentz*).

Tenemos entonces dos grupos de simetría distintos para la mecánica newtoniana y el electromagnetismo. Para solucionar este problema teórico, Einstein propuso que lo que había que modificar era la mecánica, de forma que transforme bien bajo las transformaciones de Lorentz

---

<sup>1</sup>Se muestran aquí solo las transformaciones de las coordenadas espaciales y temporales. Pueden encontrarse en la bibliografía relacionada las expresiones correspondientes para transformaciones de cargas, corrientes y campos.

en lugar de las de Galileo. El resultado de esto es lo que conocemos como *teoría de la Relatividad Especial*, lo que llevó a una forma completamente nueva de entender el espacio y el tiempo, y la relación entre ellos.

## A.2. El espacio de Minkowski

En su formulación de la relatividad espacial, Albert Einstein concluyó que el espacio y el tiempo dependen del observador, y que ambas magnitudes están íntimamente relacionadas. Fenómenos como la *contracción de Lorentz* y la *dilatación temporal* son buena muestra de ello.

En relatividad especial las distancias y los intervalos de tiempo no son iguales para todos los observadores. Sin embargo, sí existen cantidades invariantes, como

$$s^2 = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2. \quad (\text{A.3})$$

En 1907, Hermann Minkowski (1864-1909) se dio cuenta de que la relatividad especial podía entenderse a partir de una geometría cuatridimensional, y define un espacio vectorial que llamamos *espacio de Minkowski*, donde la cantidad (A.3) puede asociarse al cuadrado de la (pseudo)norma de un vector y donde la distancia al cuadrado entre dos puntos o *sucesos*  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  y  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$  es el *intervalo*

$$\Delta s^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \quad (\text{A.4})$$

que es también invariante Lorentz. Hay que destacar que, al tener el tiempo el signo cambiado, los intervalos no son definidos positivos y se clasifican según su signo. Si  $\Delta s^2 < 0$ , los sucesos están separados por un *intervalo temporal*, si  $\Delta s^2 = 0$ , por un *intervalo nulo* o *tipo nulo* y si  $\Delta s^2 > 0$ , por un *intervalo espacial*. Solo puede existir relación causal entre dos sucesos si están separados por intervalos temporales o nulos.

De aquí en adelante emplearemos las *unidades naturales*, donde  $c = 1$ . Tenemos entonces que cada suceso está caracterizado por un cuadrvector  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ , y que su norma en el espacio de Minkowski es

$$\|x^\mu\|^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad (\text{A.5})$$

donde en la última igualdad hemos usado el *convenio de sumación de Einstein*<sup>2</sup> y donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la *métrica de Minkowski*, que en forma matricial es

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (\text{A.6})$$

La métrica nos dice cómo calcular distancias en nuestro espaciotiempo y en función de ella podemos escribir un elemento de línea como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (\text{A.7})$$

<sup>2</sup>La repetición de índices arriba y abajo en una expresión representa un sumatorio sobre todos los valores posibles de ese índice. En este caso, los índices  $\mu$  y  $\nu$  van de 0 a 3.

El signo negativo en la dimensión temporal es lo que distingue al espacio de Minkowski del espacio euclídeo al que estamos más acostumbrados, en el que las distancias vienen dadas por la generalización del teorema de Pitágoras al número de dimensiones del espacio, y por tanto la métrica del espacio euclídeo es la identidad.

Otra cantidad invariante de gran importancia es el *tiempo propio*  $\tau$  de una partícula. El tiempo propio es el tiempo medido por un observador  $\mathcal{O}$  que se mueve junto a la partícula, y la relación entre  $d\tau$  y el tiempo  $dt$  medido por cualquier otro observador  $\mathcal{O}'$  es

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt, \quad (\text{A.8})$$

donde  $v$  es la velocidad de la partícula con respecto al observador  $\mathcal{O}'$  en el intervalo  $d\tau$ .

Esta formulación de la relatividad especial en términos geométricos fue de vital importancia en el desarrollo de una teoría relativista que incluyera efectos gravitatorios, la *teoría de la relatividad general*.

### A.3. La necesidad de la relatividad general

A la hora de tratar con la interacción gravitatoria, había incompatibilidades importantes entre la gravedad newtoniana y la relatividad especial. Matemáticamente, tenemos que la gravedad newtoniana no es invariante bajo el grupo de Lorentz. Además, la gravedad newtoniana implica variaciones instantáneas en el potencial gravitatorio ante variaciones de la distribución de materia en el universo, lo que implica que la fuerza gravitatoria se propaga con velocidad infinita, lo cual es incompatible con la velocidad máxima  $c$  de la relatividad especial.

El principal problema al intentar incorporar la gravedad es que tenemos que considerar observadores no iniciales, que la relatividad especial no considera. Einstein se dio cuenta de que un observador en caída libre es equivalente (localmente) a un observador inercial, para el que las partículas en caída libre están en reposo y podría considerar la fuerza gravitatoria como una fuerza ficticia. Esto se conoce como *Principio de Equivalencia* y es posible gracias a la equivalencia entre masa inercial y masa gravitatoria y al hecho de que todos los objetos caen con la misma aceleración, independientemente de su masa.

Un aspecto clave del principio de equivalencia es que solo es válido localmente. Un observador en caída libre dejará de percibir la gravedad en un entorno muy cercano, pero a una distancia lo bastante grande notará las inhomogeneidades del campo gravitatorio. Como ejemplo, dos observadores en caída libre en dos puntos alejados de un campo con simetría esférica podrían considerarse a si mismos como iniciales si realizan observaciones en una región muy pequeña en torno a ellos, pero se verán mutuamente acelerados sin que pueda eliminarse la fuerza gravitatoria completamente en ningún sistema de referencia.

Esto tiene una consecuencia muy importante: podemos considerar el espaciotiempo como un conjunto de trozos infinitesimales de espaciotiempo plano (de Minkowski). Tendríamos así un espaciotiempo que localmente es plano pero globalmente tiene curvatura. Los espacios que tienen esta propiedad se conocen en matemáticas como *variedades* y la disciplina que los estudia es la *geometría diferencial*. Veremos que esto será clave en el desarrollo de la Relatividad General.

## A.4. Tensores y cambios generales de coordenadas

Antes de empezar con los conceptos propios de la geometría diferencial, vamos a definir los objetos con los que vamos a trabajar y cuyas propiedades serán de especial interés en el desarrollo de la teoría de la relatividad general.

Los objetos más sencillos son los *escalares*, que son invariantes bajo cambios de coordenadas y que representamos sin índices:

$$\phi' = \phi. \quad (\text{A.9})$$

Tenemos también los vectores, elementos de un espacio vectorial  $\mathbb{R}^N$  que podemos describir por sus componentes  $V^\mu$  en una determinada base. Los vectores transforman bajo un cambio general de coordenadas según

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad (\text{A.10})$$

y por esta forma de transformar los llamaremos *vectores contravariantes*. Si consideramos ahora el espacio dual  ${}^*\mathbb{R}^N$ , sus elementos  $W_\mu$  también son vectores al ser  ${}^*\mathbb{R}^N$  un espacio vectorial, pero transforman de distinto modo, según

$$W'_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} W_\nu. \quad (\text{A.11})$$

A los vectores que transforman según esta relación los llamamos *vectores covariantes*. Nótese que distinguimos entre vectores contravariantes y covariantes escribiendo el índice arriba o abajo.

Podemos construir también objetos a partir del producto tensorial de vectores covariantes y contravariantes, a los que llamaremos *tensores*. La forma más general sería la construcción a partir de  $m$  vectores contravariantes y  $n$  vectores covariantes, o *tensor de rango* (m,n). Los tensores transforman bajo cambios generales de coordenadas del siguiente modo:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\alpha_m}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} \quad (\text{A.12})$$

La gran ventaja de usar tensores es que si una relación del tipo

$$A^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} = B^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_n} + C^{i_1 \dots i_m} D_{j_1 \dots j_n} \quad (\text{A.13})$$

es válida en un sistema de coordenadas, lo será también en cualquier otro sistema de coordenadas, por la forma en que transforman los tensores. Como hemos visto en el apartado A.1, el Principio de la Relatividad nos dice que las leyes de la física deben ser las mismas para cualquier observador. Esto implica que las leyes de la física deben escribirse en función de objetos que transformen bien bajo cambios de coordenadas (escalares, vectores y tensores), lo que se conoce también como *Principio de Covariancia General*.

## A.5. Conceptos de geometría diferencial

### A.5.1. Variedades diferenciales y la métrica en una variedad

A grandes rasgos, podemos decir que una variedad diferenciable  $N$ -dimensional  $\mathcal{M}^N$  es un espacio que localmente tiene el aspecto de  $\mathbb{R}^N$ . Esto implica que en cada punto  $p$  de la variedad

se puede definir un espacio tangente  $T_p(\mathcal{M}^N)$ , isomorfo a  $\mathbb{R}^N$ , y que para una región lo bastante pequeña es una buena aproximación a la variedad.

Hemos visto anteriormente que la métrica euclídea y la de Minkowski nos dicen cómo calcular distancias en el espacio euclídeo y en el de Minkowski. En una variedad curva arbitraria, la métrica  $g_{\mu\nu}$  ya no tomará una forma tan sencilla, pero igualmente nos permitirá medir distancias en la variedad según

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.14})$$

Podemos clasificar las variedades según la signatura de su métrica. Si la métrica es definida positiva tenemos una *variedad riemanniana*, mientras que si la métrica tiene una signatura  $(-++\dots+)$  se dice que es una *variedad lorentziana*. Estos dos casos son generalizaciones curvas de los espacios euclídeo y de Minkowski, respectivamente. En relatividad general, el espacio-tiempo estará representado por una variedad lorentziana.

La métrica  $g_{\mu\nu}$  y su inversa  $g^{\mu\nu}$  son ejemplos de tensores de rango 2. Además de permitirnos calcular distancias, puede demostrarse que la métrica tiene otra propiedad muy importante: establece una relación uno a uno entre los vectores de un espacio vectorial y su dual (vectores contravariantes y covariantes) a través de las expresiones

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu, \quad V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu. \quad (\text{A.15})$$

Operar con la métrica de esta forma se conoce comúnmente como “*subir y bajar índices*”.

### A.5.2. Transporte paralelo y derivada covariante

Veamos cómo transforma la derivada parcial de un vector bajo cambios generales de coordenadas. Aplicando la regla de la cadena y usando que  $V^\mu$  transforma con un vector:

$$\partial'_\mu V'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \partial_\alpha \left( \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} V^\beta \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \partial_\alpha V^\beta + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} V^\beta \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (\text{A.16})$$

Es decir, que la derivada parcial de un vector (o tensor) no transforma bien bajo cambios generales de coordenadas.

Es importante tener en cuenta que un vector localizado en el punto  $p$  de una variedad es un objeto que no vive en la variedad, sino en el espacio tangente a la variedad en  $p$  (fig. A.1, izquierda). Esto significa que expresiones como la derivada ordinaria de un campo vectorial  $V^\mu$ ,

$$\partial_\nu V^\mu = \lim_{\delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(q) - V^\mu(p)}{\delta x^\nu}, \quad (\text{A.17})$$

matemáticamente no tengan sentido, ya que estamos restando vectores de espacios distintos,  $T_p(\mathcal{M})$  y  $T_q(\mathcal{M})$ . Para poder compararlos necesitamos un vector  $V_p^\mu(q)$  que vive en  $T_q(\mathcal{M})$  y tiene toda la información de  $V^\mu(p)$ , al que llamaremos *transportado paralelo de  $V^\mu(p)$* .

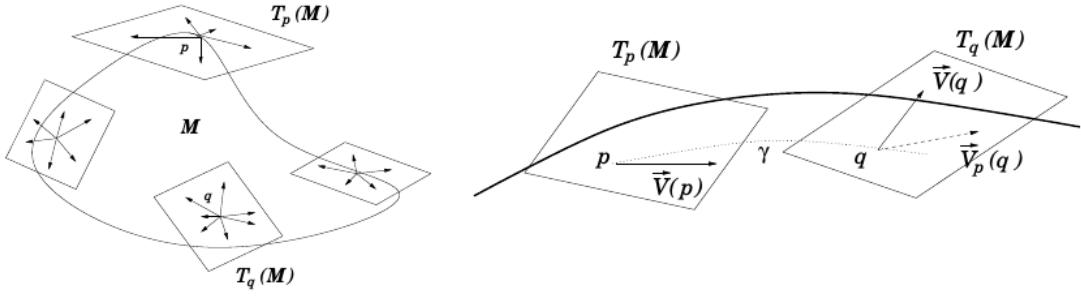


Figura A.1: Izquierda: Variedad y espacios tangentes. Derecha: comparación de vectores en distintos puntos de la variedad: transporte paralelo.[1]

Conocido  $V_p^\mu(q)$ , el objeto

$$\nabla_\nu V^\mu = \lim_{\delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(q) - V_p^\mu(q)}{\delta x^\nu} \quad (\text{A.18})$$

quedaría bien definido y se le llama *derivada covariante del vector*  $V^\mu$ . Pero aún no hemos dicho como obtener el vector  $V_p^\mu(q)$ . Podemos obtener dicho vector como el vector original  $V^\mu(p)$  más un término de corrección, proporcional tanto al desplazamiento  $\delta x^\mu$  entre las coordenadas de  $p$  y  $q$  como al vector original:

$$V_p^\mu(q) = V^\mu(p) - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \delta x^\nu V^\rho(p), \quad (\text{A.19})$$

donde los coeficientes de proporcionalidad  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ , que no son tensores, representan el cambio de la componente  $\mu$  del vector en la dirección  $\rho$  bajo el desplazamiento en la dirección  $\nu$  y constituyen lo que llamamos *conexión*. Finalmente, podemos escribir la derivada covariante de un vector como

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\rho. \quad (\text{A.20})$$

Su generalización a tensores de rango  $(m, n)$  es

$$\begin{aligned} \nabla_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} &= \partial_\rho T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} + \dots + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_m} T^{\mu_1 \dots \mu_{m-1} \lambda}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \\ &\quad - \Gamma_{\rho\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_n} - \dots - \Gamma_{\rho\nu_n}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_{n-1} \lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Puede comprobarse que la derivada covariante de un vector o tensor sí transforma bien bajo cambios generales de coordenadas.

### A.5.3. El tensor de Riemann

En una variedad hay muchas conexiones posibles, por lo que la elección de las funciones  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  es arbitraria. Nótese que hay tantas formas de hacer el transporte paralelo como trayectorias posibles entre  $p$  y  $q$ , y que el vector resultante  $V_p^\mu(q)$  dependerá de la curva elegida para el transporte. Esta propiedad es una manifestación de la curvatura de la variedad.

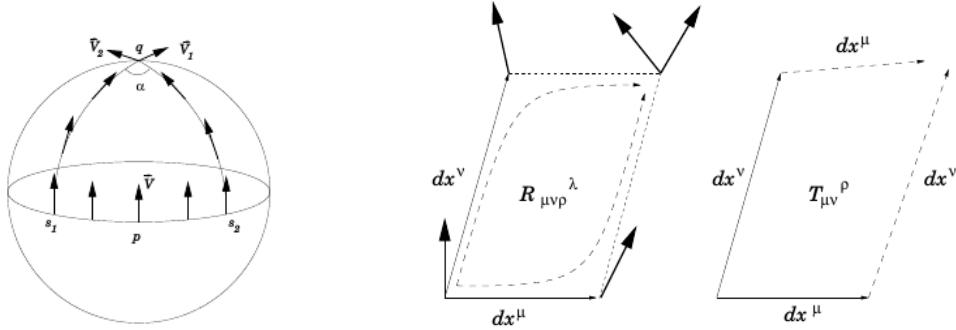


Figura A.2: Izquierda: Transporte paralelo de un vector por dos caminos distintos: uno directamente desde un punto del ecuador hasta el polo, el otro primero se transporta a lo largo del ecuador y después al polo. El vector resultante es distinto en cada caso. Derecha: El tensor de Riemann mide la diferencia entre transportes paralelos por distintas trayectorias de un paralelogramo infinitesimal, y es una medida de la curvatura en la región encerrada. El tensor de torsión mide el cuánto cierra el paralelogramo.[1]

Diremos que una variedad es curva si el transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada da como resultado un vector diferente al llegar al punto inicial. Para definir esto cuantitativamente consideramos el transporte paralelo de un vector a lo largo de un paralelogramo infinitesimal cuyos lados son los vectores  $dx^\mu$  y  $dx^\nu$ . Queremos calcular la diferencia entre trasladar un vector  $V^\mu$  primero a lo largo de  $dx^\mu$  y después de  $dx^\nu$  y trasladarlo en el orden opuesto. Para ello tenemos que calcular el comutador de las derivadas covariantes  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$  actuando sobre el vector  $V^\lambda$ . Operando llegamos a

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda = \left( \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \right) V^\rho - (\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho) \nabla_\rho V^\lambda = R_{\mu\nu\rho}^\lambda V^\rho - T_{\mu\nu}^\rho \nabla_\rho V^\lambda, \quad (\text{A.22})$$

donde tenemos una parte proporcional a  $V^\rho$  y otra proporcional a  $\nabla_\rho V^\lambda$ , y cuyos factores de proporcionalidad son lo que definimos como *tensor de Riemann*  $R_{\mu\nu\rho}^\lambda$  y *tensor de torsión*  $T_{\mu\nu}^\rho$ . El tensor de Riemann mide la diferencia entre el transporte paralelo en una u otra trayectoria, y es por lo tanto una medida de la curvatura del espacio encerrado en el paralelogramo. El transporte paralelo no tiene por qué acabar en el mismo punto en ambas trayectorias, y el tensor de torsión mide el grado en que cierra el paralelogramo (fig. A.2). Es importante señalar que si  $R_{\mu\nu\rho}^\lambda$  es idénticamente cero, el transporte paralelo no depende del camino y significa que la variedad es plana; esto es lo que sucede en el espacio plano  $\mathbb{R}^N$  y en el espaciotiempo de Minkowski.

Contrayendo los índices segundo y cuarto del tensor de Riemann se obtiene el *tensor de Ricci*

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho, \quad (\text{A.23})$$

y contrayendo los dos índices del tensor de Ricci con la métrica, tenemos el *escalar de Ricci*

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.24})$$

Estos dos objetos son importantes porque aparecerán en las ecuaciones del campo de Einstein.

#### A.5.4. La conexión de Levi-Civita

Como ya hemos comentado, en una variedad tenemos infinidad de conexiones posibles. Sin embargo, cuando definimos una métrica en nuestra variedad, hay una conexión llamada *conexión de Levi-Civita* que tiene una serie de propiedades que la hacen única por su relación con la métrica. Dicha conexión cumple dos condiciones:

1. Es simétrica en los dos índices inferiores:  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$
2. La derivada covariante de la métrica se anula:  $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$

La primera condición implica que el tensor de torsión es cero. La segunda se llama *compatibilidad con la métrica*, y simplifica mucho algunas propiedades geométricas de la variedad. Dadas estas condiciones, se puede demostrar que la conexión queda completamente determinada por la métrica mediante la expresión

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.25})$$

Esto significa que en una variedad equipada con la conexión de Levi-Civita todas las propiedades geométricas están determinadas únicamente por la métrica. La métrica permite determinar distancias y ángulos en nuestra variedad, pero al introducir la conexión de Levi-Civita también determina el transporte paralelo y la curvatura (tensor de Riemann). La conexión de Levi-Civita será la empleada siempre en Relatividad General, salvo que se indique de otro modo.

#### A.5.5. Geodésicas

Las rectas en el espacio plano tienen dos propiedades que las hacen especiales. Una es que una recta es la curva más corta entre dos puntos del espacio. La otra es que es la única curva en la que el vector tangente está transportado paralelamente a si mismo a lo largo de la curva. En una variedad arbitraria con conexión, podemos definir curvas con cada una de estas propiedades: la *geodésica métrica* y la *geodésica afín*, respectivamente.

Si la conexión elegida es la de Levi-Civita, puede demostrarse que geodésicas métricas y afines coinciden, y las llamamos simplemente *geodésicas* y vienen dadas por la ecuación

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (\text{A.26})$$

La importancia de las geodésicas reside en que son las curvas que describen la trayectoria de una partícula libre en un espacio curvo o, en el marco de la Relatividad General, la trayectoria en el espaciotiempo de una partícula afectada solo por efectos gravitatorios.

### A.6. Las ecuaciones de Einstein

El Principio de Equivalencia nos sugiere que podemos describir el espaciotiempo como una variedad cuatridimensional y el campo gravitatorio como la curvatura del espaciotiempo.

Por la gravedad newtoniana sabemos que la fuente de fuerza gravitatoria es la masa de los cuerpos. Pero esta no es la única fuente de curvatura. La gravedad se acopla a cualquier tipo de energía y momento del espaciotiempo. Resulta conveniente describir esto como un fluido, caracterizado por funciones continuas en el espaciotiempo que son magnitudes macroscópicas (velocidad del fluido, densidad, presión, etc). La energía y el momento de este fluido viene descrito por el *tensor de energía-momento*  $T_{\mu\nu}$ .

Pero nos falta todavía saber cómo interacciona la materia con el espaciotiempo. La expresión que describe esa interacción se conoce como *ecuaciones de Einstein*. Por el principio de covariancia, la ecuación que describa dicha interacción deberá ser válida en todos los sistemas de referencia, y por lo tanto debe tener una forma tensorial tal que

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.27})$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el *tensor de Einstein*, que describe la curvatura del espaciotiempo, y  $\kappa$  una constante de proporcionalidad.

Nos falta describir el tensor  $G_{\mu\nu}$  en función de los términos geométricos conocidos. Sabemos que es un objeto puramente geométrico, por lo que solo puede depender de la mátrica y sus derivadas. Además, el tensor de energía-impulso es simétrico, así que el tensor  $G_{\mu\nu}$  también debe serlo. Imponiendo algunas condiciones más como la conservación de la energía ( $\nabla_\mu T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla_\mu G_{\mu\nu} = 0$ ) y la recuperación de la ecuación de Poisson para el caso estático, Einstein llegó a que

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{A.28})$$

Además, por comparación con las fórmulas newtonianas, llega a que la constante de proporcionalidad es  $\kappa = 8\pi G_N$ , donde  $G_N$  es la constante de gravitación universal de Newton.

Tenemos, por tanto, que las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.29})$$

Estas ecuaciones forman un sistema de 10 ecuaciones en derivadas parciales no lineales acopladas de segundo orden. Sin embargo, la condición  $\nabla_\mu G_{\mu\nu} = 0$  impone cuatro ligaduras, así que solo 6 ecuaciones son independientes y las otras 4 componentes están relacionadas con la libertad de elección del sistema de coordenadas.

En la práctica, salvo en casos de mucha simetría, la resolución de las ecuaciones de Einstein no puede realizarse de forma analítica, siendo imprescindible la utilización de métodos numéricos y la potencia de cálculo que proporcionan los ordenadores.

## Bibliografía

- [1] B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Apuntes de la Universidad de Granada (2013).

## B. Código empleado para la simulación de un agujero negro de Schwarzschild

En este anexo se muestra el código (en lenguaje de programación C) empleado en las simulaciones del agujero negro de Schwarzschild.

-Cabezera:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define dr 0.01      //Tamaño del intervalo radial
#define Nr 1000      //Número de intervalos radiales para simular
#define dt 0.005     //Tamaño del intervalo temporal
#define Nt 2000      //Número de intervalos de tiempo para simular
#define M 1           //Masa del agujero negro

//IMPORTANTE: DEFINIR SOLO UNO (Elección de foliación)
#define MAX          //Foliación maximal
//#define LOG         //Foliación 1+log
```

-Programa principal:

```
int main()
{
    int j, t;    //j=índice discret. espacio; t=índice discret. tiempo.

    /*Las variables A,B,Db,Ka,Kb definidas aquí son las reescaladas con el
     factor conforme  $\psi^4$  (las variables con tilde)*/
    double A[Nr], B[Nr], Da[Nr], Db[Nr], Ka[Nr], Kb[Nr], alpha[Nr];

    char dir[256] = "/directorio"; //Carpeta en la que guardar los ficheros
    printf("Simulacion agujero negro de Schwarzschild.\n");

    //Cálculo de los datos iniciales
    valores_iniciales(A, B, Da, Db, Ka, Kb, alpha);
    #ifdef MAX //Resolvemos la ecuación de la foliación maximal en su caso.
    alpha_max_slicing(A, Da, Db, Ka, Kb, alpha);
    #endif // MAX

    //Comienzo de la simulación
    for(t = 0; t < Nt; t++)
```

```

{
    //Escritura de los datos en ficheros
    if(t%(Nt/10)==0)
    {
        escribe_fich_out(dir, t/(Nt/10), alpha, A, B, Da, Db, Ka, Kb);
        printf("Escrito file_%02d.txt\n", t/(Nt/10));
    }

    //Evolución de las variables en un paso de tiempo
    evolucion(A, B, Da, Db, Ka, Kb, alpha);
    #ifdef MAX //Resolvemos la ecuación de la foliación maximal en su caso.
    alpha_max_slicing(A, Da, Db, Ka, Kb, alpha);
    #endif // MAX
}

escribe_fich_out(dir, t/(Nt/10), alpha, A, B, Da, Db, Ka, Kb);

//Fin de la simulación
return 0;
}

```

-Funciones empleadas:

```

//Función que escribe todas las variables en un fichero.
void escribe_fich_out(char *dir, int n_file, double *alpha, double *A, double
                      *B, double *Da, double *Db, double *Ka, double *Kb)
{
    int j;
    char fich_out[256];
    sprintf(fich_out, "%s/file_%02d.txt", dir, n_file);

    f_out = fopen(fich_out, "wt");
    if(f_out == NULL)
    {
        printf("Error al crear fichero.\n");
        exit(-1);
    }

    for(j = 0; j < Nr; j++)
        fprintf(f_out, "%lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf\n",
                j*dr, alpha[j],
                A[j], B[j], Da[j], Db[j], Ka[j], Kb[j]);

    fclose(f_out);
}

```

```

}

//Función que inicializa las variables con sus valores iniciales
void valores_iniciales(double *A, double *B, double *Da, double *Db,
                      double *Ka, double *Kb, double *alpha)
{
    int j;

    for(j = 0; j < Nr; j++)
    {
        A[j] = 1; B[j] = 1;
        Da[j] = 0; Db[j] = 0;
        Ka[j] = 0; Kb[j] = 0;

        #ifdef LOG
        alpha[j] = 1;
        #endif //LOG
    }
}

//Cálculo de la variable auxiliar D_alpha
void calcula_Dalpha(double *alpha, double *Dalpha)
{
    int j;

    Dalpha[0] = 0;
    for(j = 1; j < Nr-1; j++)
        Dalpha[j] = (alpha[j+1]-alpha[j-1])/(2*dr*alpha[j]);
    Dalpha[Nr-1] = (1-alpha[Nr-1])/((Nr-1)*dr*alpha[Nr-1]);
}

//Cálculo de la derivada parcial respecto de r de D_alpha.
void calcula_d_Dalpha(double *alpha, double *Dalpha, double *d_Dalpha)
{
    int j;

    d_Dalpha[0] = 2*(alpha[1]-alpha[0])/(dr*dr*alpha[0]) - Dalpha[0]*Dalpha[0];
    for(j = 1; j < Nr-1; j++)
        d_Dalpha[j] = (alpha[j+1]-2*alpha[j]+alpha[j-1])/(dr*dr * alpha[j])
                    -Dalpha[j]*Dalpha[j];
    d_Dalpha[Nr-1] = (2./((Nr-1)*(1-alpha[Nr-1]))-2*alpha[Nr-1]
                      +2*alpha[Nr-2])/(dr*dr * alpha[Nr-1])
                      -Dalpha[Nr-1]*Dalpha[Nr-1];
}

```

```

}

//Cálculo de las derivadas parciales respecto de r de K_a y K_b
void calcula_d_Ka_d_Kb(double *Ka, double *Kb, double *d_Ka, double *d_Kb)
{
    int j;

    d_Ka[0] = 0;
    d_Kb[0] = 0;
    for(j = 1; j < Nr-1; j++)
    {
        d_Ka[j] = (Ka[j+1]-Ka[j-1])/(2*dr);
        d_Kb[j] = (Kb[j+1]-Kb[j-1])/(2*dr);
    }
    d_Ka[Nr-1] = -Ka[Nr-1]/((Nr-1)*dr);
    d_Kb[Nr-1] = -Kb[Nr-1]/((Nr-1)*dr);
}

//Cálculo de la derivada parcial respecto de r de D_b
void calcula_d_Db(double *B, double *Db, double *d_Db)
{
    int j;

    d_Db[0] = 2*(B[1]-B[0])/(dr*dr * B[0]) - Db[0]*Db[0];
    for(j = 1; j < Nr-1; j++)
        d_Db[j] = (B[j+1]-2*B[j]+B[j-1])/(dr*dr * B[j]) - Db[j]*Db[j];
    d_Db[Nr-1] = (2./((Nr-1)*(1-B[Nr-1])-2*B[Nr-1]+2*B[Nr-2]))/(dr*dr * B[Nr-1])
        -Db[Nr-1]*Db[Nr-1];
}

//Calcula el lado derecho (espacial) de las ecuaciones de evolucion
void Sources(double *A, double *B, double *Da, double *Db, double *d_Db,
            double *Ka, double *d_Ka, double *Kb, double *d_Kb,
            double *alpha, double *Dalpha, double *d_Dalpha, double *S_A,
            double *S_B, double *S_Da, double *S_Db, double *S_Ka,
            double *S_Kb, double *S_alpha)
{
    int j;

    for(j = 0; j < Nr; j++)
    {
        S_A[j] = -2*alpha[j]*A[j]*Ka[j];
        S_B[j] = -2*alpha[j]*B[j]*Kb[j];
    }
}

```

```

S_Da[j] = -2*alpha[j] * (Ka[j]*Dalpha[j] + d_Ka[j]);
S_Db[j] = -2*alpha[j] * (Kb[j]*Dalpha[j] + d_Kb[j]);

S_Ka[j] = -alpha[j]/A[j] *(pow(2*j*dr/(2*j*dr+M),4)*(d_Dalpha[j]
+d_Db[j] +Dalpha[j]*Dalpha[j] -Dalpha[j]*Da[j]/2
+Db[j]*Db[j]/2 -Da[j]*Db[j]/2) +16*j*dr*j*dr/pow(2*j*dr+M,6)
*(8*M*j*dr +2*M*j*dr*(2*j*dr+M)*(Da[j]-Db[j] +Dalpha[j])
-j*dr*(2*j*dr+M)*(2*j*dr+M)*(Da[j]-2*Db[j]))
+alpha[j]*Ka[j]*(Ka[j]+2*Kb[j]));

S_Kb[j] = -alpha[j]/(2*A[j]) *(pow(2*j*dr/(2*j*dr+M),4)*(d_Db[j]
+(Dalpha[j]+Db[j])*Db[j]-Da[j]*Db[j]/2) +16*j*dr
*j*dr/pow(2*j*dr+M,6)*(-8*M*j*dr +2*M*j*dr*(2*j*dr+M)
*(Da[j]-3*Db[j]-2*Dalpha[j])-j*dr*(2*j*dr+M)*(2*j*dr+M)
*(Da[j]-4*Db[j]-2*Dalpha[j])-2*(2*j*dr+M)*(2*j*dr+M)
*(A[j]/B[j] -1))+alpha[j]*Kb[j]*(Ka[j]+2*Kb[j]));

#endif LOG
S_alpha[j] = -2*alpha[j]*(Ka[j]+2*Kb[j]);
#endif // LOG
}

}

/*Realiza 1 paso de tiempo en la evolucion de las varianbles, con algoritmo
Crank-Nicholson de 3 iteraciones*/
void evolucion(double *A, double *B, double *Da, double *Db, double *Ka,
               double *Kb, double *alpha)
{
    int j;
    double Dalpha[Nr], d_Ka[Nr], d_Kb[Nr], d_Dalpha[Nr], d_Db[Nr];

    //variables auxiliares para los pasos intermedios del algoritmo ICN
    double Dalpha1[Nr], Dalpha2[Nr], d_Dalpha1[Nr], d_Dalpha2[Nr];
    double d_Db1[Nr], d_Db2[Nr], d_Ka1[Nr], d_Ka2[Nr], d_Kb1[Nr], d_Kb2[Nr];
    double A1[Nr], A2[Nr], S_A[Nr], S_A1[Nr], S_A2[Nr], B1[Nr], B2[Nr],
           S_B[Nr], S_B1[Nr], S_B2[Nr];
    double Da1[Nr], Da2[Nr], S_Da[Nr], S_Da1[Nr], S_Da2[Nr], Db1[Nr], Db2[Nr],
           S_Db[Nr], S_Db1[Nr], S_Db2[Nr];
    double Ka1[Nr], Ka2[Nr], S_Ka[Nr], S_Ka1[Nr], S_Ka2[Nr], Kb1[Nr], Kb2[Nr],
           S_Kb[Nr], S_Kb1[Nr], S_Kb2[Nr];
    double alpha1[Nr], alpha2[Nr], S_alpha[Nr], S_alpha1[Nr], S_alpha2[Nr];

```

```

//Cálculo de algunas variables y derivadas necesarias para calcular fuentes
calcula_Dalpha(alpha, Dalpha);
calcula_d_Dalpha(alpha, Dalpha, d_Dalpha);
calcula_d_Db(B, Db, d_Db);
calcula_d_Ka_d_Kb(Ka, Kb, d_Ka, d_Kb);

//Calculamos las fuentes (parte derecha de las ecuaciones de evolucion)
Sources(A, B, Da, Db, d_Db, Ka, d_Ka, Kb, d_Kb, alpha, Dalpha, d_Dalpha,
         S_A, S_B, S_Da, S_Db, S_Ka, S_Kb, S_alpha);

//Realizamos el primer paso del algoritmo de ICN
for(j = 0; j < Nr; j++)
{
    A1[j] = A[j] + dt*S_A[j];
    B1[j] = B[j] + dt*S_B[j];
    Da1[j] = Da[j] + dt*S_Da[j];
    Db1[j] = Db[j] + dt*S_Db[j];
    Ka1[j] = Ka[j] + dt*S_Ka[j];
    Kb1[j] = Kb[j] + dt*S_Kb[j];
    #ifdef LOG
    alpha1[j] = alpha[j] + dt*S_alpha[j];
    #endif // LOG
}

//Recalculamos las variables y fuentes auxiliares
#ifdef MAX
alpha_max_slicing(A1, Da1, Db1, Ka1, Kb1, alpha1);
#endif // MAX
calcula_Dalpha(alpha1, Dalpha1);
calcula_d_Dalpha(alpha1, Dalpha1, d_Dalpha1);
calcula_d_Db(B1, Db1, d_Db1);
calcula_d_Ka_d_Kb(Ka1, Kb1, d_Ka1, d_Kb1);

Sources(A1, B1, Da1, Db1, d_Db1, Ka1, d_Ka1, Kb1, d_Kb1, alpha1, Dalpha1,
         d_Dalpha1, S_A1, S_B1, S_Da1, S_Db1, S_Ka1, S_Kb1, S_alpha1);

//Segundo paso de ICN
for(j = 0; j < Nr; j++)
{
    A2[j] = A[j] + 0.5*dt*(S_A[j]+S_A1[j]);
    B2[j] = B[j] + 0.5*dt*(S_B[j]+S_B1[j]);
    Da2[j] = Da[j] + 0.5*dt*(S_Da[j]+S_Da1[j]);
}

```

```

Db2[j] = Db[j] + 0.5*dt*(S_Db[j]+S_Db1[j]);
Ka2[j] = Ka[j] + 0.5*dt*(S_Ka[j]+S_Ka1[j]);
Kb2[j] = Kb[j] + 0.5*dt*(S_Kb[j]+S_Kb1[j]);
#ifndef LOG
alpha2[j] = alpha[j] + 0.5*dt*(S_alpha[j]+S_alpha1[j]);
#endif // LOG
}

//Recalculamos las variables y fuentes auxiliares
#ifndef MAX
alpha_max_slicing(A2, Da2, Db2, Ka2, Kb2, alpha2);
#endif // MAX
calcula_Dalpha(alpha2, Dalpha2);
calcula_d_Dalpha(alpha2, Dalpha2, d_Dalpha2);
calcula_d_Db(B2, Db2, d_Db2);
calcula_d_Ka_d_Kb(Ka2, Kb2, d_Ka2, d_Kb2);

Sources(A2, B2, Da2, Db2, d_Db2, Ka2, d_Ka2, Kb2, d_Kb2, alpha2, Dalpha2,
        d_Dalpha2, S_A2, S_B2, S_Da2, S_Db2, S_Ka2, S_Kb2, S_alpha2);

//Tercer paso de ICN
for(j = 0; j < Nr; j++)
{
    A[j] = A[j] + 0.5*dt*(S_A[j]+S_A2[j]);
    B[j] = B[j] + 0.5*dt*(S_B[j]+S_B2[j]);
    Da[j] = Da[j] + 0.5*dt*(S_Da[j]+S_Da2[j]);
    Db[j] = Db[j] + 0.5*dt*(S_Db[j]+S_Db2[j]);
    Ka[j] = Ka[j] + 0.5*dt*(S_Ka[j]+S_Ka2[j]);
    Kb[j] = Kb[j] + 0.5*dt*(S_Kb[j]+S_Kb2[j]);
#ifndef LOG
    alpha[j] = alpha[j] + 0.5*dt*(S_alpha[j]+S_alpha2[j]);
#endif // LOG
}
}

//Resuelve M*x = d, donde M es una matriz tridiagonal (algoritmo de Thomas.
void tridiagonal_solver(int N, double *a, double *b, double *c, double *d,
                        double *x)
{
    int j;
    double c_aux[Nr], d_aux[Nr];

/*

```

Algoritmo de Thomas

Resuelve  $M \cdot x = d$ , donde  $M$  es una matriz tridiagonal

Definimos:

$x[]$  - solución  $[0, \dots, N - 1]$

$Nr$  - número de ecuaciones

$a[]$  - subdiagonal (la diagonal debajo de la diagonal principal)

-- indexada según  $[1, \dots, Nr-1]$

$b[]$  - diagonal principal, indexada según  $[0, \dots, Nr-1]$

$c[]$  - superdiagonal (la diagonal encima de la diagonal principal)

-- indexada según  $[0, \dots, Nr-2]$

\*/

```
c_aux[0] = c[0]/b[0];
```

```
d_aux[0] = d[0]/b[0];
```

```
for(j = 1; j < Nr; j++)
```

```
{
```

```
    if(j < Nr-1)
```

```
        c_aux[j] = c[j]/(b[j] - a[j]*c_aux[j-1]);
```

```
        d_aux[j] = (d[j] - a[j]*d_aux[j-1]) / (b[j] - a[j]*c_aux[j-1]);
```

```
}
```

```
x[Nr-1] = d_aux[Nr-1];
```

```
for(j = Nr-2; j >= 0; j--)
```

```
    x[j] = d_aux[j] - c_aux[j]*x[j+1];
```

```
}
```

```
/*Resuelve la ecuación de la foliación maximal empleando el algoritmo de Thomas  
(función 'tridiagonal_solver')
```

```
void alpha_max_slicing(double *A, double *Da, double *Db, double *Ka,  
                      double *Kb, double *alpha)
```

```
{
```

```
    int j;
```

```
    double inv_APsi4[Nr], C[Nr], d[Nr], a[Nr], b[Nr], c[Nr];
```

```
/*Discretizando la ec. de maximal slicing obtenemos un sistema  $M \cdot \alpha = d$ ,  
con  $M$  matriz  $[Nr \times Nr]$  tridiagonal y  $d$  vector  $[Nr]$ . Resolver para  $\alpha$ .  
(Los  $C(j)$  son valores de los que dependen los elementos de la matriz  $M$ )*/
```

```
//LLamo inv_APsi4(r) al factor  $1/(A \cdot \Psi^4)$ , con  $\Psi = 1 + M/(2 \cdot r)$ 
```

```

inv_APsi4[0] = pow(2*0.5*dr/(2*0.5*dr+M), 4)/A[0];
for(j = 1; j < Nr; j++)
    inv_APsi4[j] = pow(2*j*dr/(2*j*dr+M), 4)/A[j];

//Llamo C(r) al factor que multiplica a d_alpha en la ec. 10.3.48
C[0] = 0;
for(j = 1; j < Nr; j++)
    C[j] = 2. / (j*dr) + Db[j] - 0.5*Da[j] - 2.*M/(j*dr*(2*j*dr+M));

/*a[], b[], c[] son las diagonales de la matriz, definidas en la
funcion 'tridiagonal_solver'*/
a[0] = 0; //Elemento fuera de la matriz
b[0] = -2*inv_APsi4[0] -(Ka[0]*Ka[0] +2*Kb[0]*Kb[0])*dr*dr;
c[0] = 2*inv_APsi4[0];
d[0] = 0;
for(j = 1; j < Nr-1; j++)
{
    a[j] = (1-C[j]*dr/2)*inv_APsi4[j];
    b[j] = -2*inv_APsi4[j] -(Ka[j]*Ka[j] +2*Kb[j]*Kb[j])*dr*dr;
    c[j] = (1+C[j]*dr/2)*inv_APsi4[j];
    d[j] = 0;
}
a[Nr-1] = 2*inv_APsi4[Nr-1];
b[Nr-1] = -2*inv_APsi4[Nr-1] -(Ka[Nr-1]*Ka[Nr-1]+2*Kb[Nr-1]*Kb[Nr-1])
    *dr*dr -2*inv_APsi4[Nr-1]/(Nr-1)*(1+C[Nr-1]*dr/2);
c[Nr-1] = 0; //Elemento fuera de la matriz
d[Nr-1] = -2*inv_APsi4[Nr-1]/(Nr-1)*(1+C[Nr-1]*dr/2);

tridiagonal_solver(Nr, a, b, c, d, alpha);
}

```