

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
TRIESTE**

Dipartimento di Ingegneria e Architettura



Laurea Magistrale in Ingegneria Elettronica

**Studio sulle condizione di validità del
criterio di Barkhausen**

8 agosto 2018

Laureando
María Gavín

Relatore
Prof. Sergio Carrato

Correlatore
Prof. Antonio Romeo

Anno Accademico 2017/2018

This planet, with all its appalling immensity,
is to electric currents virtually
no more than a small metal ball.

—
Nikola Tesla
—

*to my parents and friends
to my sister, Marina
to Julia, Gema and Miriam*

Sommario

Questo elaborato riguarda il criterio di Barkhausen e in particolare la relazione che intercorre tra tale criterio e la instabilità di un sistema. Si riporta innanzitutto la dimostrazione di necessarietà del criterio di Barkhausen affinché un sistema retroazionato positivamente produca un'uscita oscillatoria ad ampiezza costante, per un tempo indefinito. Sebbene questo criterio non garantisca sempre l'oscillazione. Viene anche studiato il feedback negativo negli oscillatori e il problema per calcolare la frequenza di oscillazione del circuito. Infine, studieremo questi circuiti in laboratorio e il ritardo del gruppo esistente.

Indice

Sommario	i
Introduzione	iv
1 Sistemi e Stabilità	1
1.1 Sistemi dinamici	1
1.2 Sistemi LTI	2
1.3 Stato di un sistema	3
1.4 Descrizione esterna	4
1.5 Equilibri e stabilità	6
2 Introduzione teorica agli oscillatori	9
2.1 Oscillatori sinusoidali. Concetto	9
2.2 Principio di Funzionamento. Criterio di Barkhausen	11
2.3 Stabilità negli oscillatori	13
2.4 Criterio di Nyquist	17
3 Guadagno ad anello aperto	21
4 L'approccio seriale	25
4.1 Un risultato preliminare	25
4.2 L'approccio seriale per i sistemi LTI	33
5 Un controesempio	37
5.1 Controesempio	37
5.2 Il circuito	64
6 Feedback positivo, instabilità e frequenza di oscillazione	71
6.1 Ponte di Wien	71
6.1.1 Circuito 1	71
6.1.2 Circuito 2	77
6.1.3 Circuito 3	80
6.1.4 Circuito 4	83
6.1.5 Conclusione	86

INDICE

6.2	Phase shift	87
6.3	Sistema condizionalmente stabile	96
7	Analisi in laboratorio	104
7.1	Ponte di Wien	104
7.2	Phase shift	107
7.3	Condizionalmente stabile	108
8	Una condizione aggiuntiva	109
8.1	Diagramma di Nyquist in funzione di K	110
8.2	Nyquist e $\frac{d\phi}{d\omega} < 0$	112
8.3	Significato fisico della condizione aggiuntiva	114
9	Analisi del Group Delay	116
	Conclusioni	124

Introduzione

Questo progetto nasce con l'interesse di studiare il comportamento degli oscillatori sinusoidali, essendo in grado di analizzare il loro comportamento in base alle diverse variabili che modellano detto sistema e di trovare una condizione che soddisfi la sua oscillazione, poiché il suo principio di funzionamento, formulato dal criterio di Barkhausen, non garantisce sempre l'oscillazione.

L'obiettivo di questo progetto è lo sviluppo di circuiti elettronici in grado di produrre oscillazioni sinodali sostenute ad una singola frequenza, in assenza di fonti CA esterne.

Gli oscillatori da studiare in questo lavoro sono oscillatori lineari. Il metodo consiste in un'analisi della risposta temporale e in frequenza di questi dispositivi e quindi un confronto con il modello lineare offerto dal criterio di Barkhausen. In particolare, questo studio si è concentrato sul ponte Wien, un tipo di oscillatore del secondo ordine ampiamente utilizzato nelle applicazioni elettroniche a bassa frequenza; l'oscillatore a sfasamento, un oscillatore di terzo ordine, utilizzato anche nelle applicazioni elettroniche a bassa frequenza e l'oscillatore condizionatamente stabile che oscillerà quando il guadagno è tra un gamma di ampiezza, in modo che il circuito sia instabile.

Per realizzare questo studio, sono stati utilizzati due strumenti informatici, MATLAB e PSpice.

Una volta analizzati matematicamente i circuiti, precedentemente commentati, sono stati simulati in PSpice e in laboratorio, per analizzare e confrontare il loro ideale (VCVS) e la risposta reale, mediante amplificatori operazionali, nel dominio del tempo e della frequenza, con i calcoli matematici.

Usando MATLAB è stato progettato un modello matematico che riproduce come teoricamente dovrebbe essere il segnale di uscita che diverge da un oscillatore, tenendo conto del ritardo di gruppo esistente, per confrontarlo con il suo output ideale ottenuto da PSpice. L'analisi mostra che ci saranno delle differenze che verranno trattate in seguito.

Infine, sono stati effettuati test in laboratorio che dimostrano che i modelli sopra citati sono corretti.

Per ottenere un oscillatore accurato, sarebbe necessario introdurre alcune modifiche ai criteri comunemente utilizzati e alcune modifiche al circuito,

INTRODUZIONE

poiché in realtà la saturazione dello stadio di amplificazione non consente di ottenere un'uscita sinodale.

Inoltre, vi è l'inconveniente che la frequenza di oscillazione non è la stessa per cui è progettato il circuito, cioè la frequenza di oscillazione, a cui il circuito dovrebbe oscillare, progettato dalla rete di retroazione $B(j\omega)$, dipende dal guadagno della rete $A(j\omega)$.

Infine, quando si confrontano i modelli ideale e non ideale, si può vedere che c'è una differenza tra loro, a causa dell'uso di amplificatori operazionali nel secondo.

Capitolo 1

Sistemi e Stabilità

In questo primo capitolo vengono riportati, introduttivamente, concetti noti dalla teoria dei sistemi, tratti da [4, 25, 27]. La scelta di dedicare un intero capitolo a tale introduzione è motivata dalla possibilità di introdurre la simbologia e i risultati salienti in maniera organica, in modo da poter essere citati agevolmente in tutto il resto del testo, snellendo la successiva trattazione.

1.1 Sistemi dinamici

Con **sistema dinamico a tempo continuo a parametri concentrati** ci si riferisce ad un sistema fisico descritto da un sistema di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

dove, dato un dominio $T = [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$, $x : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ è il *vettore di stato*, $u : T \rightarrow \mathbb{R}^m$ è il *vettore d'ingresso* e $y : T \rightarrow \mathbb{R}^p$ è il *vettore d'uscita*. Pertanto f e g sono definite su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times T$. Per i casi da noi affrontati, sarà $T = \mathbb{R}$ e $m = p = 1$, ossia sistemi con solamente un ingresso e un'uscita, detti **Single Input - Single Output** (abbreviato *SISO*). La prima equazione viene detta **equazione di stato**, la seconda **equazione d'uscita**.

Il sistema si dice **a tempo continuo** poiché il tempo è modellizzato con una variabile che si muove in un intervallo di \mathbb{R} , ossia varia *con continuità*. A questo tipo di sistemi si contrappongono i sistemi **a tempo discreto**, in cui il tempo viene modellizzato come una variabile k in un dominio $E = [k_0, k_1] \subseteq \mathbb{Z}$, ossia gli istanti di interesse sono *numerabili*. Tali sistemi, invece di essere descritti da equazioni differenziali, sono descritti da equazioni alle differenze.

La dicitura **a parametri concentrati** sta a significare che ciascun componente del sistema ha una proprietà che fisicamente si può considerare *concentrata in un punto*, e pertanto può essere descritta da uno scalare, che

può o meno variare nel tempo. Vi si contrappongono i sistemi **a parametri distribuiti**, in cui le proprietà fisiche sono invece *distribuite nello spazio*, e pertanto devono essere descritte da funzioni il cui valore varia al variare del punto considerato (ed eventualmente nel tempo). In questo caso le equazioni che si ottengono sono alle derivate parziali. Nel mondo reale i parametri sono sempre distribuiti, ma in caso di sistemi che operano a basse frequenze, la minima lunghezza d'onda che può interessare il sistema è normalmente molto maggiore delle dimensioni del sistema stesso. Pertanto si può assumere che ogni variazione si propaghi *istantaneamente* attraverso il sistema, mentre nei sistemi a parametri distribuiti questa assunzione è falsa.

Se in un sistema l'uscita non dipende direttamente dall'ingresso, ossia $y(t) = g(x(t), t)$, il sistema si dice **strettamente proprio**. In caso contrario, il sistema è non strettamente proprio.

1.2 Sistemi LTI

Se tutti i componenti di un sistema hanno proprietà che *non* variano nel tempo, allora la f e la g in 1.1.1 non dipendono da t , e si parla di sistema **stazionario** o **tempo-invariante**. Il sistema di equazioni diventa dunque:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Nel caso particolare in cui f e g siano lineari, il sistema si dice **lineare** e il sistema di equazioni 1.1.1 diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

dove $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $B : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $C : T \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D : T \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$.

Qualora entrambe le proprietà siano soddisfatte, si parla di **sistemi lineari tempo-invarianti**, spesso abbreviato in **sistemi LTI**. Il sistema di equazioni, in tal caso, si riduce a:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Si osservi che in questo caso $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, ossia le matrici sono costanti. Inoltre, il sistema è *strettamente proprio* se $D = 0$.

I sistemi LTI sono di fondamentale importanza in ingegneria (e in particolare in questa trattazione) per due ragioni:

- tranne in casi particolarissimi, si vogliono realizzare sistemi le cui proprietà fisiche rimangano idealmente inalterate con lo scorrere del tempo, ossia sistemi tempo-invarianti; inoltre, alcuni sistemi non stazionari variano in funzione di t in modo così lento che si possono considerare tempo-invarianti anche su intervalli T ragionevolmente lunghi;
- si prediligono i sistemi lineari per la semplicità di trattazione data dal *principio di sovrapposizione degli effetti*, tanto che spesso si restringe il range di impiego di sistemi non lineari in modo tale da poterli linearizzare in un intorno di un determinato punto di lavoro.

1.3 Stato di un sistema

Il concetto di **stato** distingue un sistema dinamico da uno non dinamico. In un sistema non dinamico, l'uscita y all'istante di tempo t dipende esclusivamente dal valore dell'ingresso u allo stesso istante di tempo. In un sistema dinamico, invece, l'uscita dipende sia dall'ingresso che dal valore di alcune altre grandezze variabili, dette **variabili di stato** del sistema. Presentiamo due esempi significativi per chiarire la necessità dell'introduzione di tale concetto.

Un esempio in ambito elettrotecnico di sistema *non dinamico* è il resistore, descritto dalla legge di Ohm:

$$v = R i$$

La differenza di potenziale (in breve d.d.p.) v ai capi di un resistore (*uscita*) dipende unicamente dalla corrente i che scorre attraverso di esso, e dal parametro concentrato R - la resistenza del componente. Si osservi che tale sistema si può considerare un sistema dinamico con stato costante e matrici A, B, C nulle, mentre $D = R$. In pratica, i sistemi non dinamici sono un sottoinsieme dei sistemi dinamici, e le equazioni che descrivono i sistemi non dinamici LTI sono equazioni lineari *algebriche*, piuttosto che differenziali.

Rimanendo sempre nell'elettrotecnica, un esempio di sistema *dinamico* è invece il condensatore, la cui caratteristica è:

$$i(t) = C_1 \frac{dv}{dt}(t) \quad (1.3.1)$$

dove C_1 è la *capacità* del condensatore. Volendola porre nella forma riportata in 1.2.3:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) = \frac{1}{C_1} i(t) \\ y(t) = v(t) \end{cases}$$

ossia, lo stato è rappresentato da v , le matrici A e C si riducono a $0 \in \mathbb{R}$, la matrice B a $\frac{1}{C_1}$ e la D diventa $1 \in \mathbb{R}$ (ossia l'uscita coincide con lo stato). Dalla 1.3.1 si ricava facilmente che:

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

Si osservi che la v non dipende soltanto dalla i , ma anche dal *valore iniziale* $v(t_0)$ della d.d.p., che di fatto misura il livello di carica del condensatore (poiché $C_1 := \frac{Q}{v} \Rightarrow Q = C_1 v$). Applicando la stessa corrente nel medesimo periodo temporale a due condensatori con d.d.p. iniziale diversa (ossia *che si trovano in uno stato differente*), si giunge a una d.d.p. finale diversa.

Pertanto, i sistemi fisici aventi un'inerzia o una memoria di qualche tipo, o (più rigorosamente) descritti da equazioni integrali, differenziali o integro-differenziali, hanno evidenziato il bisogno del concetto di stato affinché il modello di sistema rispecchi opportunamente la realtà fisica.

1.4 Descrizione esterna

La notazione usata finora per descrivere un sistema viene detta **descrizione interna**, poiché presuppone la conoscenza dello stato, di come esso sia condizionato dall'ingresso e da come esso condizioni se stesso e l'uscita. Vi è la possibilità di trovare una descrizione del sistema che esprima direttamente l'uscita in funzione dell'ingresso. Per farlo è necessario usare la **trasformata di Laplace** (in breve \mathcal{L} -trasformata). La \mathcal{L} -trasformata unilatera di una funzione f è una funzione F , in generale a valori complessi, definita da:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] := \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1.4.1)$$

L'integrale da 0^- è un modo compatto per scrivere:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Ciò serve a includere nell'integrale eventuali impulsi di Dirac che si trovassero in $t = 0$.

Tra le varie importanti proprietà che caratterizzano la trasformata di Laplace, riportiamo la seguente:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^+) \quad (1.4.2)$$

Applichiamola ora al sistema 1.2.3:

$$\begin{cases} s X(s) - x(0^+) = A X(s) + B U(s) \\ Y(s) = C X(s) + D U(s) \end{cases}$$

Allora l'equazione di stato diventa:

$$X(s)(sI - A) = x(0^+) + BU(s)$$

Dovendo invertire $(sI - A)$, ci si chiede per quali valori di s ciò sia possibile, ossia per quali valori di s si ha $\det(sI - A) \neq 0$. Poiché il determinante di $(sI - A)$ è proprio il polinomio caratteristico di A , esso sarà di grado n . Pertanto solo per n valori di s tale determinante è nullo (i.e., gli autovalori di A). Per tutti gli altri, $(sI - A)$ è invertibile, e possiamo scrivere:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}(x(0^+) + BU(s))$$

Sostituendo nell'equazione d'uscita:

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(sI - A)^{-1}(x(0^+) + BU(s)) + DU(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0^+) + (D + C(sI - A)^{-1}B)U(s) \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Si osservi che se $x(0^+) = 0$ (ossia lo stato iniziale è nullo e non sono stati applicati impulsi all'istante iniziale), allora:

$$Y(s) = (D + C(sI - A)^{-1}B)U(s) \quad (1.4.4)$$

La $(D + C(sI - A)^{-1}B)$ viene indicata con $H(s)$ e detta **funzione di trasferimento** (in breve *f.d.t.*). Nota la trasformata U del vettore d'ingresso e nota la f.d.t. del sistema, moltiplicandole tra loro e antitrasformando il risultato, si ottiene y funzione del tempo, detta in questo caso **evoluzione forzata** dell'uscita del sistema. Per questo, vista anche l'assenza dello stato nella 1.4.4, si parla in questo caso di **descrizione esterna** del sistema.

È opportuno osservare che $(sI - A)^{-1}$ ha per elementi delle *funzioni algebriche razionali fratte*. Questo perché:

- come già detto, il determinante è il polinomio caratteristico di A (che quindi è di grado n), e va al denominatore di ciascun elemento;
- ciascun complemento algebrico deriva dal calcolo del minore complementare, che è il determinante di una sottomatrice di $(sI - A)$ di dimensione $n - 1$, e quindi un polinomio di grado $n - 1$.

Se il sistema è *strettamente proprio*, D è la matrice nulla e gli elementi di $H(s)$ sono razionali fratte con grado $n - 1$ al numeratore, n al denominatore. Altrimenti, a causa di D , dovendo sviluppare un denominatore comune per ogni elemento, si ottengono razionali fratte con grado n sia al numeratore che al denominatore. Per sistemi *SISO*, la $H(s)$ si riduce ad una sola funzione razionale fratta, ossia:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (1.4.5)$$

con m pari a $n - 1$ o n come già spiegato sopra, $K \in \mathbb{C}$ costante. Le radici del denominatore vengono dette **poli** della funzione di trasferimento, quelle del numeratore **zeri**. Salvo cancellazioni (ossia semplificazioni in caso di zeri e poli coincidenti), i poli coincidono con gli autovalori di A .

Riprendendo la 1.4.3 e ponendo $U(s) = 0$, che è la trasformata dell'ingresso nullo, si ha:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0^+) \quad (1.4.6)$$

La $C(sI - A)^{-1}$, che noi indicheremo con $H_L(s)$, esprime la proporzionalità tra $Y(s)$ e $x(0^+)$, permettendo quindi di studiare la cosiddetta **evoluzione libera** dell'uscita del sistema. Per gli stessi ragionamenti fatti per la f.d.t., H_L è, nel caso *SISO*, una funzione algebrica razionale fratta del tipo:

$$H_L(s) = \frac{N_L(s)}{D(s)} = K_L \frac{(s - z_{L,1})(s - z_{L,2}) \cdots (s - z_{L,n-1})}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (1.4.7)$$

Il denominatore è, per ovvi motivi, lo stesso visto nella $H(s)$, e quindi le due condividono gli stessi poli (sempre salvo cancellazioni).

1.5 Equilibri e stabilità

L'*equilibrio* è un concetto presente nella vita di tutti i giorni. Diciamo che un corpo è in equilibrio quando, malgrado non sia fissato saldamente al terreno, a un edificio, o comunque a un corpo ritenuto relativamente inamovibile, esso mantiene la sua posizione, o non cade, seppure tale eventualità sia contemplata. Di tutto questo, ciò che realmente conta è lo stato di quiete del corpo nonostante le sollecitazioni esterne che esso possa subire, mentre la precarietà o meno dell'equilibrio ricadrà nel concetto di *stabilità*.

In riferimento a 1.1.1, fissata una funzione d'ingresso u , se esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$x(t_0) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x} \quad \forall t \geq t_0, t \in D \quad (1.5.1)$$

esso si dice **stato di equilibrio** o semplicemente **equilibrio**. In maniera del tutto analoga, fissata u , se esiste $\bar{y} \in \mathbb{R}^p$ tale che:

$$y(t_0) = \bar{y} \Rightarrow y(t) = \bar{y} \quad \forall t \geq t_0, t \in D \quad (1.5.2)$$

si parla di **uscita di equilibrio**.

CAPITOLO 1. SISTEMI E STABILITÀ

Per sistemi *stazionari* (vedi 1.2.1), essendo l'equazione di stato indipendente da t , si ha in generale:

$$f(\bar{x}, u(t)) = 0 \Leftrightarrow u(t) = \bar{u}$$

e dunque è necessario che anche l'ingresso sia costante affinché sia possibile trovare degli equilibri. Per ogni stato di equilibrio, poi, si evidenzia un'uscita di equilibrio, poiché:

$$g(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{y} \in \mathbb{R}^p$$

Informalmente, un equilibrio (u, \bar{x}) è **stabile** se, perturbato leggermente lo stato iniziale, l'evoluzione dello stato non si discosta troppo da \bar{x} . In altre parole, per piccole variazioni dello stato iniziale si hanno piccole variazioni del *movimento dello stato* (ossia di $t \mapsto x(t)$). L'equilibrio sarà poi **asintoticamente stabile** se, perturbato lo stato iniziale, il movimento dello stato tenderà nuovamente all'equilibrio. In simboli, se t_0 è l'istante iniziale, $v = (u, \bar{x})$ è un *equilibrio stabile* se:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta = \delta(\mathcal{E}, v) > 0 : \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \mathcal{E} \quad \forall t > t_0 \quad (1.5.3)$$

ed è inoltre *asintoticamente stabile* se:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0 \quad (1.5.4)$$

Per i sistemi lineari (e quindi in particolare per i sistemi LTI) si può dimostrare che la stabilità è una proprietà *del sistema* e non dell'equilibrio. Ciò significa tutti gli equilibri del sistema hanno le medesime proprietà di stabilità. È possibile dimostrare anche che la stabilità del sistema dipende esclusivamente **dagli autovalori della matrice A**. In particolare:

- se gli autovalori hanno tutti parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile
- se esistono autovalori a parte reale nulla ma sono tutti distinti, il sistema è stabile (non asintoticamente).
- se esiste almeno un autovalore a parte reale positiva, il sistema è instabile

Sul caso autovalori multipli a parte reale nulla non si può decretare nulla: ci sono casi in cui il sistema è stabile, casi in cui si rivela instabile.

Un altro tipo di stabilità è la cosiddetta **stabilità esterna**, o stabilità **Bounded Input - Bounded Output** (abbreviato *BIBO*). Un sistema è BIBO-stabile se a input di ampiezza limitata corrispondono sempre output

CAPITOLO 1. SISTEMI E STABILITÀ

di ampiezza limitata. Il nome *stabilità esterna* suggerisce una stretta correlazione tra questa caratteristica e la descrizione esterna del sistema. Infatti, un sistema LTI è BIBO-stabile se, a seguito delle cancellazioni tra poli e zeri nella f.d.t., non vi sono in essa poli a parte reale positiva o nulla. Questo fatto si dimostra banalmente scomponendo la generica f.d.t. in fratti semplici e antitrasformando: tali fratti danno infatti luogo a componenti divergenti se e solo se i corrispondenti poli sono a parte reale positiva, o a parte reale nulla e con molteplicità maggiore di 1. Moltiplicando la f.d.t. per la trasformata di un input, non si fa che aggiungere poli, o alzare la molteplicità di quelli presenti. Se i poli dell'input sono a parte reale negativa, non si lede in alcun modo la limitatezza dell'output. Tuttavia, se la f.d.t. avesse poli a parte reale nulla, sarebbe possibile scegliere opportunamente degli input limitati con poli a parte reale nulla coincidenti con quelli della f.d.t., in modo da ottenere output illimitati.

Nel caso di sistemi LTI, la asintotica stabilità implica la stabilità BIBO, ma non è vero il viceversa. Ciò è di semplice spiegazione ricordando che, salvo cancellazioni, i poli della f.d.t. sono gli autovalori della matrice A :

- se tutti gli autovalori sono a parte reale negativa, tutti i poli sono a parte reale negativa (anche dopo eventuali cancellazioni); pertanto *asintotica stabilità* \Rightarrow *stabilità esterna*;
- viceversa si può avere stabilità BIBO anche con poli a parte reale nulla, od ottenere la cancellazione di poli a parte reale positiva (che quindi continuano a esistere come autovalori, anche se non appaiono nella f.d.t.); pertanto *stabilità esterna* $\not\Rightarrow$ *asintotica stabilità*.

Capitolo 2

Introduzione teorica agli oscillatori

2.1 Oscillatori sinusoidali. Concetto

Un oscillatore è un circuito in cui un segnale di uscita periodica viene generata spontaneamente, poiché ha solo i feed e la massa [9]. È quindi inteso come un oscillatore uno stadio elettronico che, essendo alimentato con una tensione continua, fornisce un'uscita periodica, che può essere approssimativamente sinusoidale, quadrata, triangolare, ecc.

Tutti gli oscillatori hanno una frequenza di lavoro caratteristica, che dipende dai valori dei componenti del circuito (resistori, condensatori, bobine ...) e che, in alcuni casi, è controllabile dall'esterno mediante una tensione applicata (VCO). Pertanto, un oscillatore converte la potenza fornita dalle sorgenti di alimentazione in corrente continua in una corrente alternata avente le caratteristiche desiderate. [9]

Sono ampiamente utilizzati e per questo è importante studiare come funzionano. Gli oscillatori possono essere classificati come:

- Armoniche: quando l'uscita è sinusoidale.
- Rilassamento o multivibratore: se generano un'onda quadra.

Il requisito principale di un oscillatore è una distorsione armonica molto bassa (THD) e ampiezza e frequenza fissa.

Ma ci sono anche oscillatori a frequenza variabile. La frequenza può essere regolata meccanicamente (condensatori o bobine a valore regolabile) o applicando la tensione a un elemento. Questi ultimi sono noti come oscil-

CAPITOLO 2. INTRODUZIONE TEORICA AGLI OSCILLATORI

latori a tensione controllata o VCO, ovvero oscillatori la cui frequenza di oscillazione dipende dal valore di una tensione di controllo.

I parametri principali di un oscillatore sono: [1]

- Frequenza: è la frequenza della modalità operativa.
- Il campo di regolazione, per gli oscillatori di frequenza regolabili, è il campo di regolazione.
- Potenza e prestazioni in uscita. Le prestazioni sono il quoziente tra la potenza del segnale di uscita e la potenza che consuma.
- Livello armonico: potenza dell'armonica riferita alla potenza del fondamentale, in dB.
- Deriva con la temperatura: variazione della frequenza dell'oscillatore quando la temperatura varia.
- Rumore di fase o derive istantanee della frequenza.
- Stabilità della frequenza a lungo termine durante la vita dell'oscillatore.

Gli oscillatori possono essere basati su amplificatori operazionali e transistor. L'applicazione di A.O. ha i suoi limiti, data principalmente dalla larghezza di banda, quindi non è possibile progettare oscillatori ad alta frequenza (superiori a 1 MHz), sostituiti da transistor bipolari o F.E.T.

In questo progetto ci limiteremo allo studio degli oscillatori ad onda sinusoidale o "quasi sinusoidali" con amplificatore operazionale.

2.2 Principio di Funzionamento. Criterio di Barkhausen

Una prima idea della forma acquisita da un oscillatore riguarda il concetto di feedback e instabilità.

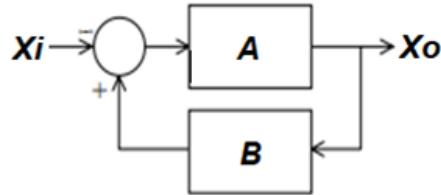
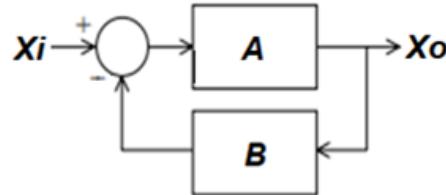


Figura 2.1: Struttura di feedback di base di un oscillatore con feedback positivo



[20]

Figura 2.2: Principio di funzionamento di un oscillatore con feedback negativo

Essendo **A** il guadagno dell'amplificatore e **B** la funzione di trasferimento della rete di feedback con X_i l'ingresso e x o X_o l'uscita, può succedere:

Se il feedback è positivo (Figura 2.1):

- a) $A \cdot B \cdot X_i < X_i$ (tensione di ingresso) e quindi in assenza di un segnale, le oscillazioni cesseranno dopo un certo periodo di tempo, cioè il segnale di uscita verrà attenuato.
- b) $A \cdot B \cdot X_i > X_i$, la retroazione sarà rigenerativa e il valore della tensione di uscita, $X_o = A \cdot X_i$, aumenterà.
- c) $A \cdot B \cdot X_i = X_i$, significa che il sistema è in grado di fornire un segnale di uscita senza la necessità di applicare un segnale all'ingresso.

L'uguaglianza $A \cdot B \cdot X_i = X_i$ implica che $|AB| = 1$, vale a dire che il guadagno del ciclo è uguale all'unità. Perché una tensione sinusoidale soddisfi $A \cdot B \cdot X_i = X_i$, l'ampiezza, la fase e la frequenza di entrambi i segnali devono essere identici.

La condizione $|AB| = 1$ è il requisito di ampiezza e la condizione di uguaglianza nella fase del segnale di retroazione con quella del segnale di ingresso, è il requisito di fase; in modo che questi requisiti rappresentino le condizioni necessarie e sufficienti per far oscillare un amplificatore di retroazione. Queste condizioni fondamentali sono conosciute come il criterio di Barkhausen.

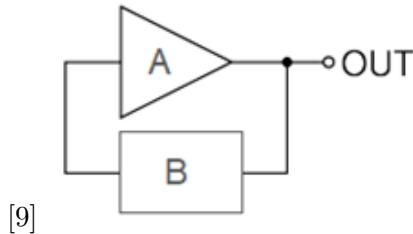


Figura 2.3: Struttura alimentata senza input

Dove B è la rete di frequenza selettiva (rete di feedback $B(j\omega)$) che utilizza elementi passivi, resistori, condensatori, bobine) e $A(j\omega)$ è un amplificatore indipendente dalla frequenza.

Pertanto, le condizioni necessarie affinché un oscillatore oscilli sono:

1- Che il segnale di retroazione sia in fase con il segnale di ingresso $\phi=0$ (con feedback positivo. Figura 2.1) o $\phi=180^\circ$ (nel caso di feedback negativo. Figura 2.2).

2- Che il guadagno dell'anello aperto $|AB|$ sia uguale a 1.

Per i circuiti delle figure 2.1 e 2.2:

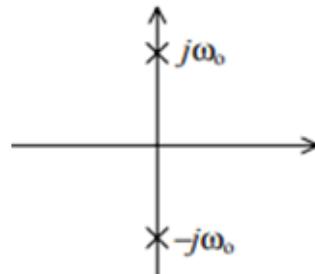
Se il guadagno dell'anello aperto $|AB| < 1$ (0 dB) non si verificano oscillazioni. Se il valore $|AB|$ è vicino a 1 e viene applicato un disturbo (passo, impulso, ecc. O il rumore presente nei componenti) può essere osservato un'oscillazione.

Nel caso in cui il guadagno del loop $|AB| > 1$ (0 dB) generi un'oscillazione che cresce in modo esponenziale, in pratica, smetterà di crescere quando l'amplificatore smetterà di essere lineare a causa dell'input nel taglio o nella saturazione dei transistor. In questo caso, il segnale verrà interrotto e quindi non sarà più un segnale sinusoidale.

2.3 Stabilità negli oscillatori

Come abbiamo detto prima, una prima idea sulla forma acquisita da un oscillatore riguarda il concetto di feedback e instabilità.

Normalmente l'instabilità influisce negativamente sui sistemi, tranne nel caso degli oscillatori. Dato che stiamo cercando un'uscita sinusoidale pura, senza input, cioè che il sistema abbia una risposta libera sinusoidale, i poli devono essere sull'asse immaginario.



[24]

Figura 2.4: Struttura alimentata senza input

In altre parole, $1 + A \cdot B$ (denominatore della funzione di trasferimento) ha zeri immaginari $\pm j\omega_0$, cioè: $A(j\omega_0) \cdot B(j\omega_0) = -1$. Pertanto, il criterio di Barkhausen può essere espresso come:

$$|A(j\omega_0)B(j\omega_0)| \geq 1 \quad (2.3.1)$$

$$\text{Arg}(A(j\omega_0)B(j\omega_0)) = 0^\circ \quad (2.3.2)$$

O come,

$$\text{Arg}(A(j\omega_0)B(j\omega_0)) = 180^\circ \quad (2.3.3)$$

Eq. 2.3.2 nel caso di un oscillatore con feedback positivo (Figura 2.1), dove ω_0 è la frequenza naturale di oscillazione; Eq. 2.3.3, nel caso di un oscillatore con feedback negativo (Figura 2.2), essendo $T(j\omega_0)=A(j\omega_0)B(j\omega_0)$ la funzione di trasferimento dell'anello aperto.

Teoricamente con il criterio di Barkhausen si potrebbe sostenere che i poli si trovino sull'asse immaginario, però, a causa di derive termiche, invecchiamento o dispersione dei parametri i poli tendono a spostarsi verso il semipiano positivo o negativo. In quest'ultimo caso, le oscillazioni scompaiono. Se, invece, i poli si trovano sul semipiano positivo, tendono ad aumentare di ampiezza fino alla saturazione.

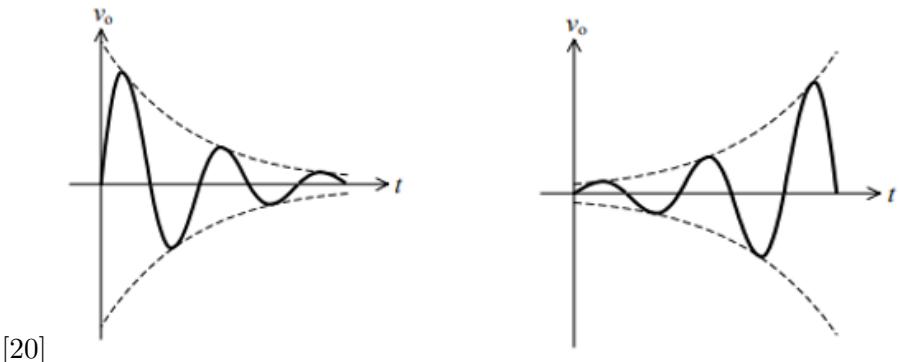


Figura 2.5: Uscita quando i poli sono nella mezza sinistra e mezza destra

Questo può essere spiegato meglio considerando che la saturazione può essere interpretata come una variazione di guadagno. Quando il guadagno varia, la posizione dei poli varia. Se l'ampiezza aumenta molto, il guadagno del sistema diminuisce e i poli tornano all'asse immaginario (Figura 2.7).

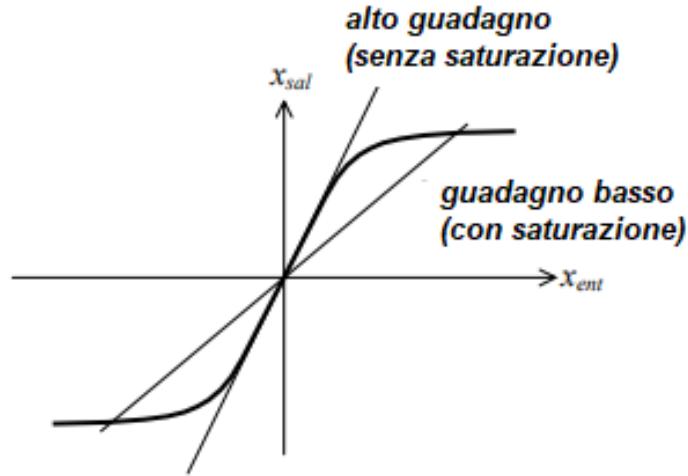


Figura 2.6: Quando il segnale di ingresso è piccolo, il guadagno è alto. Quando il segnale si avvicina alla saturazione, il guadagno apparente viene ridotto

[20]

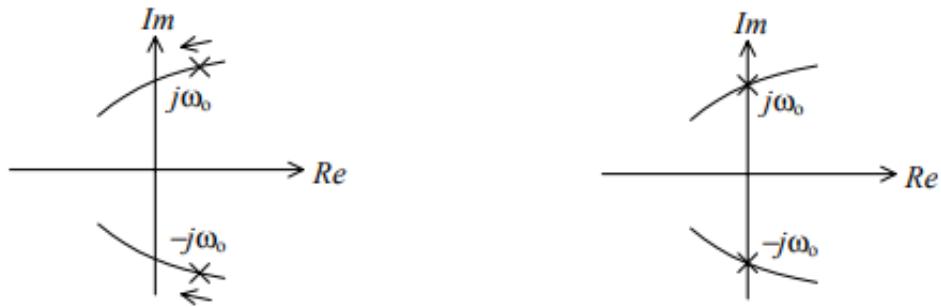


Figura 2.7: 1- Quando il guadagno viene ridotto, i poli si spostano sull'asse immaginario. 2- Quando l'uscita raggiunge la saturazione, i poli si trovano sull'asse immaginario

Pertanto, dal punto di vista pratico, i poli si devvono trovare nella parte reale positiva perché attraverso il processo di feedback di ampiezza-guadagno, questa ampiezza non cresce indefinitamente. Questo è perchè all'aumentare l'ampiezza, il guadagno diminuisce e l'ampiezza diminuisce di nuovo, ritornando alla situazione precedente.

Tuttavia, in modo più dettagliato, ciò che accade è:

[18]

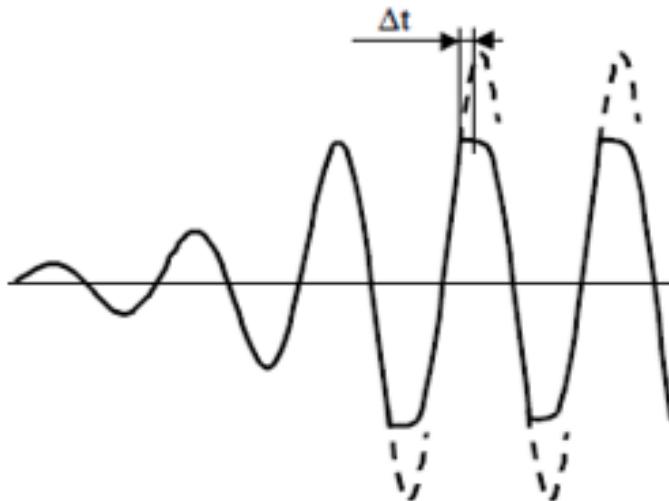


Figura 2.8: Segnale che diverge all'uscita di un oscillatore

Durante Δt si perde la linearità. Durante questo periodo, i condensatori del circuito vengono riorganizzati e quando entrano nella zona lineare si inizia una nuova onda sinusoidale che è una esponenziale crescente. Questo non dovrebbe essere confuso con un ritaglio. Se è così, il segnale sarebbe sempre più quadrata.

Da quanto sopra la condizione di Barkhausen è quindi:

$$|T(j\omega_0)| \geq 1 \quad (2.3.4)$$

$$\arg(T(j\omega_0)) = 0^\circ \text{ con feedback positivo (Figura 2.1)} \quad (2.3.5)$$

$$\arg(T(j\omega_0)) = 180^\circ \text{ con feedback negativo} (\text{Figura 2.2}) \quad (2.3.6)$$

2.4 Criterio di Nyquist

Dato che, come indicato sopra, l'obiettivo nella progettazione di un oscillatore è lo studio della particolare instabilità del sistema per ottenere le oscillazioni, una delle metodologie applicabili a un sistema di feedback è il criterio di Nyquist.

Il criterio di Nyquist si basa su un teorema complesso di analisi delle variabili noto come principio dell'argomento:

Principio dell'argomento: Se $F(z)$ è una funzione analitica e C è un contorno nel piano complesso che racchiude Z zeri e P poli di F , quindi il contorno $C' = F(C)$, circoscrive l'origine N volte, dove: [19]

$$N = Z - P \quad (2.4.1)$$

La figura seguente mostra un caso particolare di questo teorema:

[24]

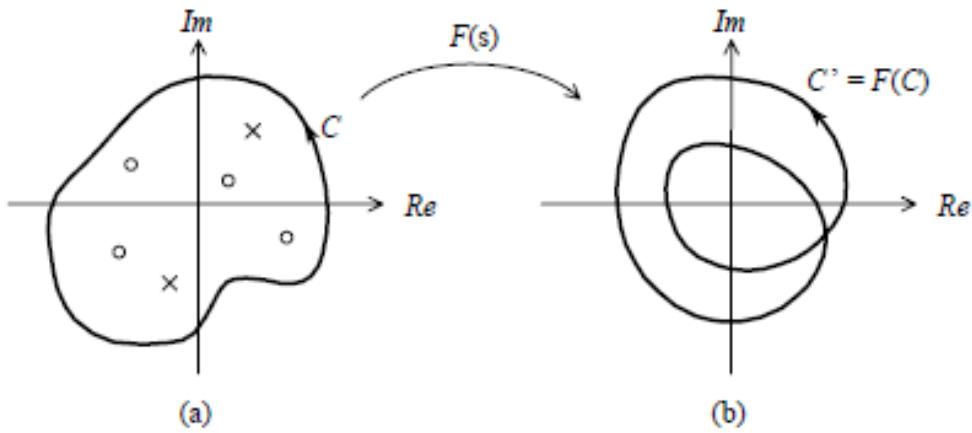


Figura 2.9: Esempio Nyquist

- (a) Una curva C che racchiude 4 zeri (indicati da cerchi) e 2 poli (indicati da croci) della funzione analitica $F(s)$.
- (b) La curva C' trasformata da $F(s)$ circonda 4-2=2 volte all'origine.

Essendo la funzione di trasferimento $H(s)=A(s)/(1+A(s)\cdot B(s))$ del sistema di retroazione, i suoi poli saranno gli zeri del suo denominatore $(1+A(s)\cdot B(s))$. I poli del suo numeratore $A(s)$, che potrebbero anche essere aggiunti, saranno effettivamente cancellati con i poli $1+A(s)\cdot B(s)$ ¹, poiché coincidono con questi (a meno che $B(s)$ abbia zeri coincidenti con poli di (s) , caso che vedremo più avanti).

In conclusione, la stabilità di $H(s)$ può essere studiata determinando se $1+A(s)\cdot B(s)$ ha zeri nel mezzo piano reale positivo, $\text{Re}(s)>0$. Per questo applicheremo il principio dell'argomento alla funzione $F(s)=1+A(s)\cdot B(s)$.

Consideriamo il contorno semicircolare C indicato in figura 2.10, per il quale abbiamo preso la precauzione di scegliere R abbastanza grande in modo che tutti gli zeri del mezzo piano reale positivo siano racchiusi da esso.

[24]

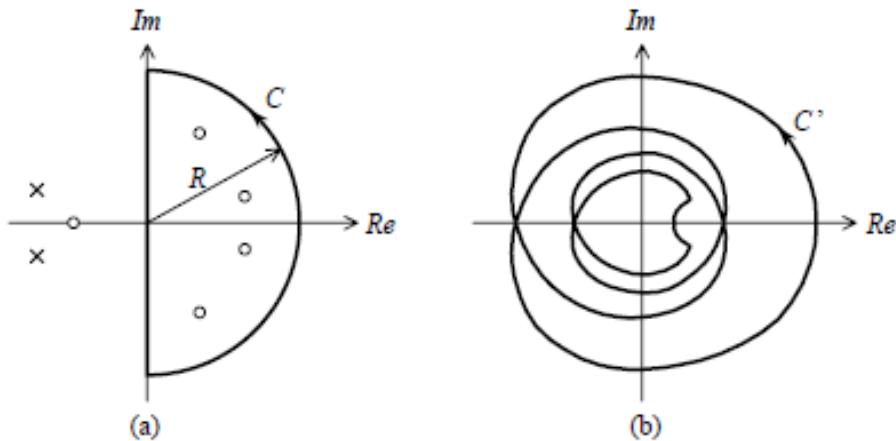


Figura 2.10: (a) Contorno C usato per determinare se la funzione $F(s)$ ha zeri nel mezzo piano reale positivo. Gli zeri indicati con cerchi. (b) Contour C' trasformato da $F(s)$. Poiché C racchiude 4 zeri, C' circonda l'origine 4 volte

¹(1) I poli di $1 + A(s)\cdot B(s)$ sono uguali ai poli di $A(s)\cdot B(s)$ perché l'aggiunta della costante 1 non altera la posizione dei poli, e i poli di $A(s)\cdot B(s)$ includono i poli di $A(s)$.

Se partiamo dal presupposto che $A(s)$ e $B(s)$ sono stabili, allora $F(s)$ non avrà poli con una parte reale positiva, quindi:

$$N = Z \quad (2.4.2)$$

Cioè, il numero di giri che $C = F(s)$ dà intorno a 0 coincide con il numero di zeri di $F(s)$ dentro C . Se questo numero è maggiore di 0, ci sarà almeno uno zero e il sistema di feedback sarà instabile.

Osserviamo che invece di considerare $F(s) = 1 + A(s) \cdot B(s)$ potremmo semplificare la traccia considerando la funzione $G(s) = A(s) \cdot B(s)$, funzione dell'anello aperto. L'unica differenza sarà che il contorno trasformato ruoterà attorno a -1 invece che intorno a 0. Figura 2.11.

[19]

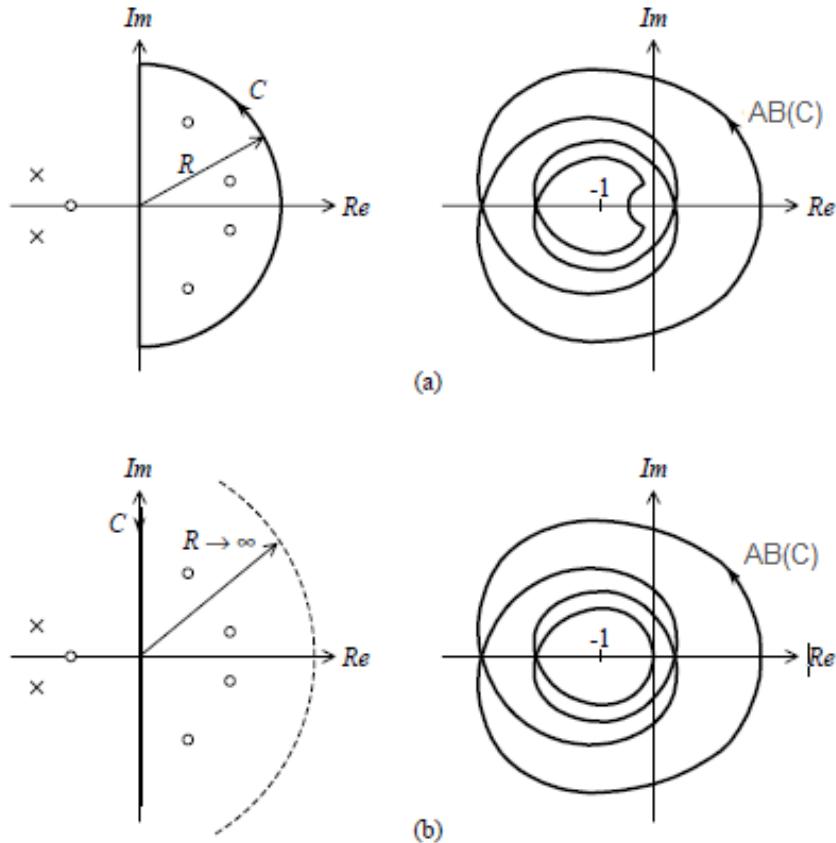


Figura 2.11:

(a) Sullo stesso contorno C della figura 12 viene applicata la funzione $G(s) = A(s) \cdot B(s)$ invece di $F(s) = 1 + A(s) \cdot B(s)$. Il numero di zeri di $F(s)$ è ora il numero di volte in cui il contorno trasformato circonda -1.

(b) Tendono a R a $T\infty$. I valori di $A \cdot B$ sull'estensione semicircolare tendono a 0. Il contorno ottenuto trasformando l'asse immaginario attraverso $A(s) \cdot B(s)$ è chiamato il punto o contorno di Nyquist e quindi il criterio di stabilità può essere definito come segue:

“Un sistema di feedback sarà stabile se il suo contorno di Nyquist (l'asse immaginario trasformato da uno $A(s) \cdot B(s)$) non racchiude il punto -1, chiamato punto critico.” [2]

Di seguito sono riportati due esempi di applicazione del criterio di Nyquist. Nel caso instabile, il contorno di Nyquist circonda il punto -1 e nel caso stabile non lo fa.

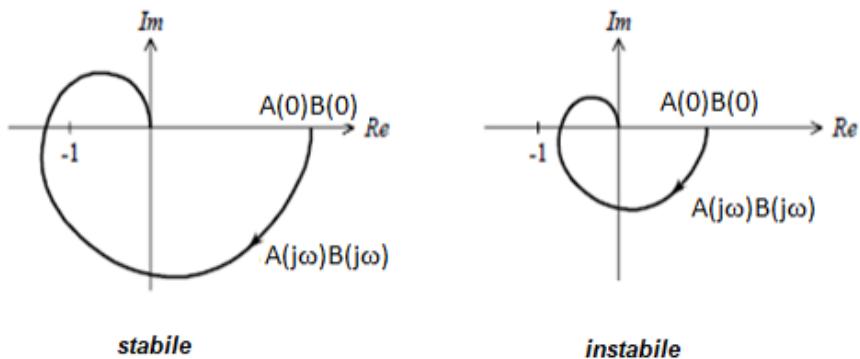


Figura 2.12:

Il vantaggio principale del criterio di Nyquist è la sua semplicità quando è solo necessario determinare se un sistema sarà stabile o instabile quando viene riconsegnato.

Pertanto, nel nostro studio, gli oscillatori dovrebbero essere progettati in modo che il diagramma di Nyquist della funzione di loop $A(s) \cdot B(s)$ circondi il punto critico -1, come condizione per la sua instabilità.

Capitolo 3

Guadagno ad anello aperto

Se apriamo l'ingresso dell'amplificatore e applichiamo un generatore di segnali come quello mostrato nella figura:

[3]

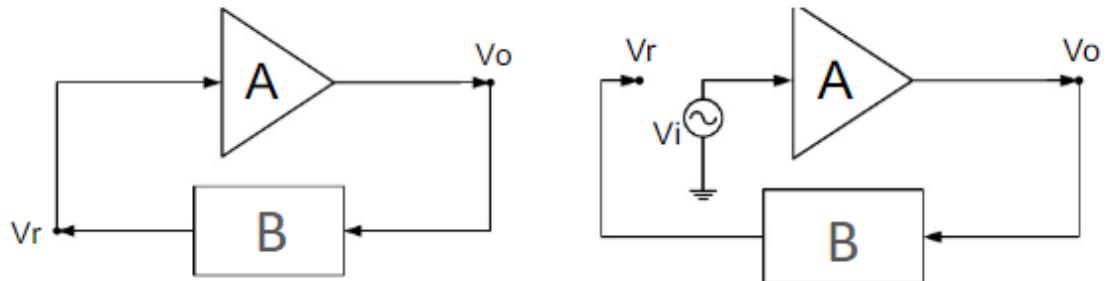


Figura 3.1:

$$V_o = A \cdot V_i \quad (3.0.1)$$

$$V_r = B \cdot V_o \quad (3.0.2)$$

$$V_r = A \cdot B \cdot V_i \quad (3.0.3)$$

Se ora rimuoviamo il generatore e ricollegiamo il circuito, come in Figura 1, l'ingresso dell'amplificatore è il segnale di retroazione. Quindi, avremo comportamenti diversi a seconda del valore del guadagno del circuito $A \cdot B$. I casi possibili sono:

- Se $A \cdot B < 1$, V_o verrà attenuato nel tempo:

[24]

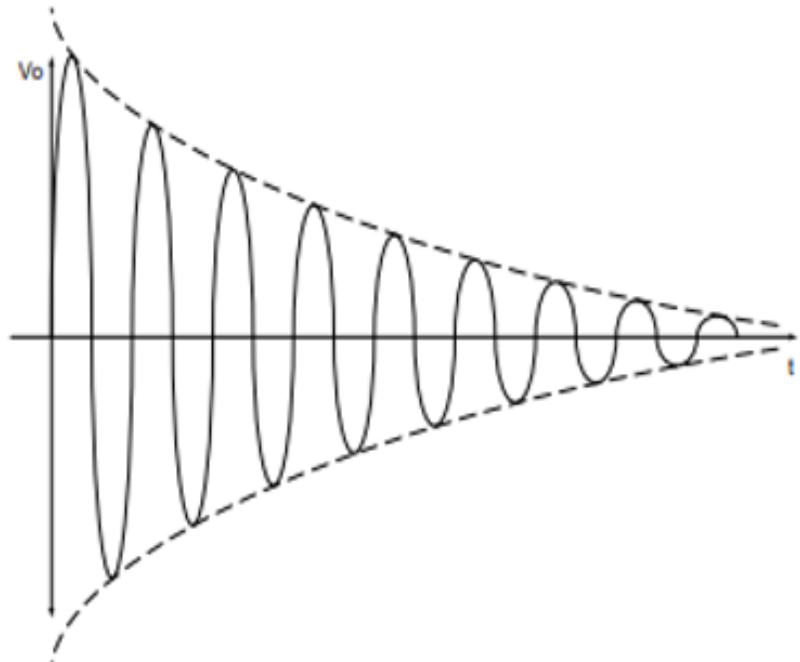


Figura 3.2: Attenuazione dell'uscita

- Se $A \cdot B > 1$ V_o aumenta nel tempo

[18]

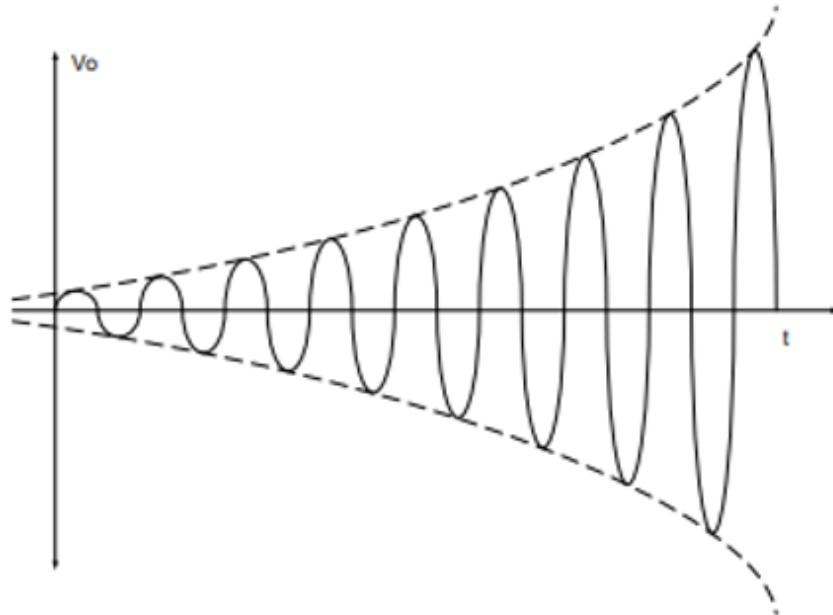
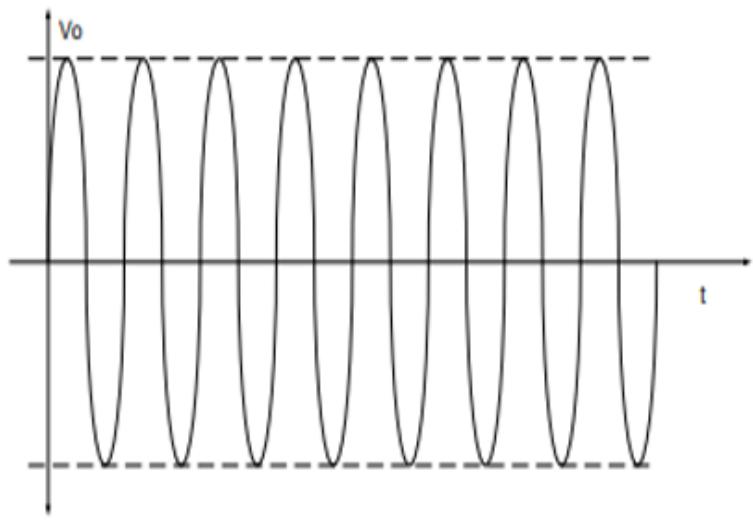


Figura 3.3: Il segnale diverge nel tempo

Ciò porterà l'amplificatore alle zone di saturazione, deformando il segnale di uscita.

- Se $A \cdot B = 1$ V_o sarà un segnale sinusoidale stabile nel tempo



[18]

Figura 3.4: Segnale stabile nel tempo

Quindi per costruire un oscillatore, abbiamo bisogno che, quando si eccita il circuito, $A \cdot B > 1$ e poi quando l'uscita V_o è cresciuta fino all'ampiezza desiderata il guadagno del circuito diminuisce automaticamente e assume un valore uguale a uno ($A \cdot B = 1$). Ricordiamo che A e B sono in realtà $A(j\omega)$ e $B(j\omega)$, cioè sono funzioni della frequenza e per tanto l'oscillazione può succedere per una gamma di frequenze o per una particolare frequenza. In un oscillatore faremo in modo che questo accada solo per una frequenza f_0 , la frequenza di oscillazione che vogliamo avere nel circuito.

Capitolo 4

L'approccio seriale

In questo capitolo si mira a formalizzare il ragionamento visto nella sezione [2.2], partendo dapprima da un caso semplificato, ossia in assenza di dinamica, per poi affrontare il caso generale. L'obiettivo è trarre da tale approccio informazioni corrette sul comportamento del sistema in funzione di H e G . In particolare siamo interessati alla stabilità del sistema e alla presenza di oscillazioni nella risposta libera.

4.1 Un risultato preliminare

Si consideri un sistema non dinamico, retroazionato positivamente, in cui $H(s) = H \in \mathbb{R}$ e $G(s) = G \in \mathbb{R}$. In questo modo, a tutte le pulsazioni ω l'amplificazione dell'anello risulta essere $H(j\omega)G(j\omega) = HG \in \mathbb{R}$. Se ad esempio $H = 4$ e $G = 0.5$, calcolando il valore della f.d.t.:

$$F(s) = \frac{H(s)}{1 - H(s)G(s)} = \frac{4}{1 - 2} = -4$$

Da questa ci aspetteremmo di aver descritto un amplificatore invertente con amplificazione pari a 4. In realtà tale sistema è BIBO-instabile. Questo è uno dei casi in cui la rimozione del ritardo di propagazione dall'anello trae in inganno. Una volta reintrodotta, il ragionamento con cui si è ricavato il criterio esteso nella sezione [14] fornisce una predizione ragionevole.

Per prima cosa, modifichiamo il nostro sistema retroazionato positivamente come in figura 4.1. Si dimostra facilmente che inserire un unico ritardo nell'anello di retroazione pari alla somma dei ritardi introdotti dai singoli rami è equivalente a considerare il ritardo di ciascun ramo. Facendo tendere Δt a 0, alla fine, otterremo predizioni valide per il sistema di partenza.

Rimaniamo nel dominio del tempo, e indichiamo il ritardo con Δt . Dal momento che il sistema è tempo invariante, consideriamo $t = 0$ l'istante iniziale senza perdere in generalità. Le equazioni che descrivono il sistema

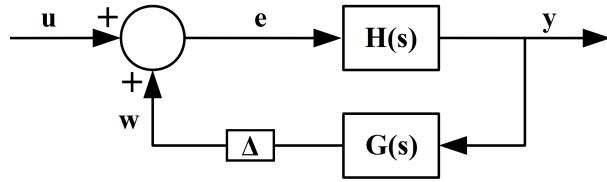


Figura 4.1: Sistema a retroazione positiva con ritardo di propagazione

sono:

$$\begin{cases} y(t) = He(t) \\ w(t) = Gy(t - \Delta t) \\ e(t) = u(t) + w(t) \end{cases}$$

Sostituendo la terza nella prima:

$$y(t) = H(u(t) + w(t))$$

E scrivendo l'espressione di $w(t)$ come riportato nella seconda:

$$y(t) = H(u(t) + Gy(t - \Delta t))$$

Che, riarrangiata, diventa:

$$y(t) = HGy(t - \Delta t) + Hu(t)$$

Ci si può dunque ricondurre ad una rappresentazione per successioni:

$$y_n = HGy_{n-1} + Hu_n \quad (4.1.1)$$

Per prima cosa, cerchiamo un *equilibrio* della successione $(y_n)_n$, ossia un valore y tale che se $y_n = y$, allora $y_{n+1} = y$ per ogni n .

$$y = HGy + Hu$$

$$\iff y(1 - HG) = Hu$$

$$\iff y = \frac{H}{1 - HG} u$$

e ciò è valido se e solo se $u_n = u$ costante:

$$y = \frac{H}{1 - HG} u \quad (4.1.2)$$

Se non volessimo avere $u_n = u$ e $y_n = \frac{H}{1 - HG} u$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, basterebbe imporre la condizione $u_n = u$ per $n \geq 0$ e $y_{-1} = \frac{H}{1 - HG} u$. Infatti, applicando la 4.1.1:

$$y_0 = HGy_{-1} + Hu_0 =$$

$$\begin{aligned}
 &= HG \left(\frac{H}{1 - HG} u \right) + Hu = \\
 &= \frac{H^2 G u + H(1 - HG)u}{1 - HG} = \\
 &= \frac{H}{1 - HG} u
 \end{aligned}$$

e per induzione, si ha che $y_n = \frac{H}{1 - HG} u \quad \forall n \geq -1$. Ciò è già irrealizzabile di per sé nel caso reale, poiché nella realtà fisica possiamo controllare solamente la u : la y ne è una conseguenza. Infatti le condizioni di studio dei sistemi sono, usualmente, a stato nullo e ingressi nulli per istanti precedenti a quello iniziale. Ciò implica, grazie all'equazione d'uscita in 1.2.3 che anche l'uscita sia nulla per istanti precedenti a quello iniziale. Ciononostante, studiamo la *stabilità* di questo equilibrio nel senso delle successioni, per capire se l'uscita vi tenda anche qualora la condizione sulla y_{-1} sopra citata non sia soddisfatta (e in particolare per $y_n = 0$ per $n < 0$).

Chiamiamo $L = \frac{H}{1 - HG} u$ per semplicità. Sia $\mathcal{E} \in \mathbb{R}$, e sia $y_{-1} = L + \mathcal{E}$. Allora:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= HGy_{-1} + Hu_0 = \\
 &= HG(L + \mathcal{E}) + Hu = \\
 &= HG L + Hu + HG\mathcal{E} = \\
 &= L + HG\mathcal{E}
 \end{aligned}$$

e quindi, induttivamente:

$$y_n = L + (HG)^{n+1}\mathcal{E}$$

Il che significa che se $|HG| < 1$, l'uscita y_n tenderà a L anche se la y_{-1} non è esattamente L . Se $|HG| \geq 1$, invece, l'uscita divergerà. Un interessante caso particolare si ha per $u = 0$. Allora $L = 0$ e $\mathcal{E} = y_{n-1}$.

$$y_n = (HG)^{n+1}\mathcal{E}$$

Dal momento che è sempre presente del rumore termico in sistemi reali, anche un sistema in cui l'equilibrio dovrebbe essere l'uscita nulla sarà instabile, e l'uscita saturerà in breve tempo (praticamente nullo).

Vale la pena di calcolare y_n applicando ricorsivamente la 4.1.1 in condizioni iniziali nulle (ossia $u_n = y_n = 0$ se $n < 0$).

$$y_0 = Hu_0$$

$$y_1 = HG(Hu_0) + Hu_1 = H(HGu_0 + u_1)$$

$$y_2 = HG(H(HGu_0 + u_1)) + Hu_2 = H((HG)^2 u_0 + HGu_1 + u_2)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ y_n &= H(u_0(HG)^n + u_1(HG)^{n-1} + \cdots + u_{n-1}(HG) + u_n) \\ y_n &= H \sum_{k=0}^n (HG)^k u_{n-k} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

In particolare, sia $u_n = u$ per $n \geq 0$

$$y_n = u H \sum_{k=0}^n (HG)^k$$

Si osservi che $\sum_{k=0}^n (HG)^k$ è l'ennesimo termine di una serie geometrica. Pertanto:

- se $|HG| \geq 1$ l'uscita è illimitata
- se $|HG| < 1$, la serie converge a $\frac{1}{1-HG}$, quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{H}{1 - HG} u \quad (4.1.4)$$

Si consideri ora di far tendere a 0 il Δt . Questo è equivalente ad avere infinite propagazioni attraverso il circuito in tempo zero, e questo ad ogni istante t . Pertanto $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ non è più il valore dell'uscita all'istante n -esimo, bensì:

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (HG)^k u(t)$$

Quando $|HG| < 1$ la serie converge ed effettivamente si ha:

$$y(t) = \frac{H}{1 - GH} u(t)$$

Quando $|HG| \geq 1$, invece, la serie diverge e si potrebbe dire che, nel modello:

$$y(t) = +\infty \quad \forall t \geq 0$$

Nel caso reale non si ha mai $\Delta t = 0$ e quindi l'uscita ha l'andamento di y_n . Non appare a gradini perchè il ritardo attraverso il loop, alla velocità della luce, è dell'ordine di circa trenta picosecondi per centimetro da percorrere. Pertanto i gradini sarebbero molto brevi anche in assenza di altri disturbi, e a un normale strumento di misura sono impossibili da apprezzare.

Un altro importante caso particolare della 4.1.3 si ha quando $u_0 = 1$, $u_n = 0$ per $n \neq 0$. In questa situazione l'uscita è:

$$y_n = H(HG)^n \quad (4.1.5)$$

In altre parole, la risposta all'impulso del sistema a tempo discreto è la successione $h_n = H(HG)^n$ per $n \geq 0$. Se $|HG| < 1$ si ha che h_n tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Viceversa, per $|HG| > 1$ si ha h_n illimitata. Per il valore di frontiera tra i due casi, ossia $|HG| = 1$, $h_n = H$, costante. Tale condizione è esattamente la traduzione di quanto riportato nella sezione [2.2] per $\omega = 0$. Infatti, per quel che riguarda la stabilità del sistema, grazie a quanto dimostrato precedentemente si può affermare che il sistema sia esternamente stabile se $|HG| < 1$, e non lo sia altrimenti. Per quel che riguarda la stabilità in senso stretto, invece, si sarebbe persuasi di definire il sistema:

- stabile quando $|HG| < 1$, poichè y tende a 0 quando non si applicano ingressi;
- marginalmente stabile quando $|HG| = 1$, poichè il sistema "oscilla a frequenza nulla", ossia mantiene autonomamente un'uscita costante
- instabile quando $|HG| > 1$, poichè non appena un qualsiasi segnale nel sistema dovesse discostarsi da 0, l'uscita y crescerrebbe illimitatamente in valore assoluto

Tale visione, a rigore, è corretta solo per il sistema a tempo discreto. Infatti per i sistemi a tempo discreto l'equazione differenziale in 1.1.1 diventa un'equazione alle differenze, la quale nel nostro caso sarebbe la 4.1.3. Da ciò si deduce che lo stato può essere rappresentato proprio dalla y .

In conclusione, la descrizione classica di questo sistema con l'imposizione del tempo di propagazione pari a zero fornisce risultati corretti soltanto se $|HG| < 1$. Quando invece $|HG| \geq 1$, la f.d.t. ricavata in modo classico fornisce risultati scorretti sul reale comportamento del sistema, e bisognerebbe piuttosto ricorrere all'introduzione del ritardo, per poi farlo tendere a zero. Di seguito riportiamo delle simulazioni svolte per il circuito di cui sopra, sia col modello di figura (figura 4.2), sia col modello appena introdotto (figura 4.1) e ritardi decrescenti (figure 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7). Qualora il lettore stesse visualizzando l'elaborato in formato pdf, per la visualizzazione corretta dei grafici delle risposte nel tempo si consiglia un fattore di zoom del 150% o superiore.

CAPITOLO 4. L'APPROCCIO SERIALE

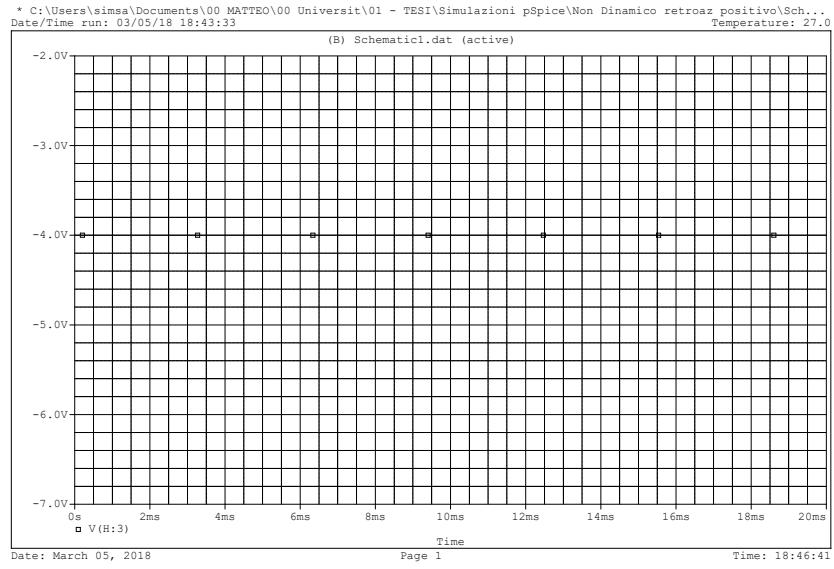


Figura 4.2: Risposta del circuito non dinamico ad ingresso costante di ampiezza 1, modello senza ritardo di propagazione

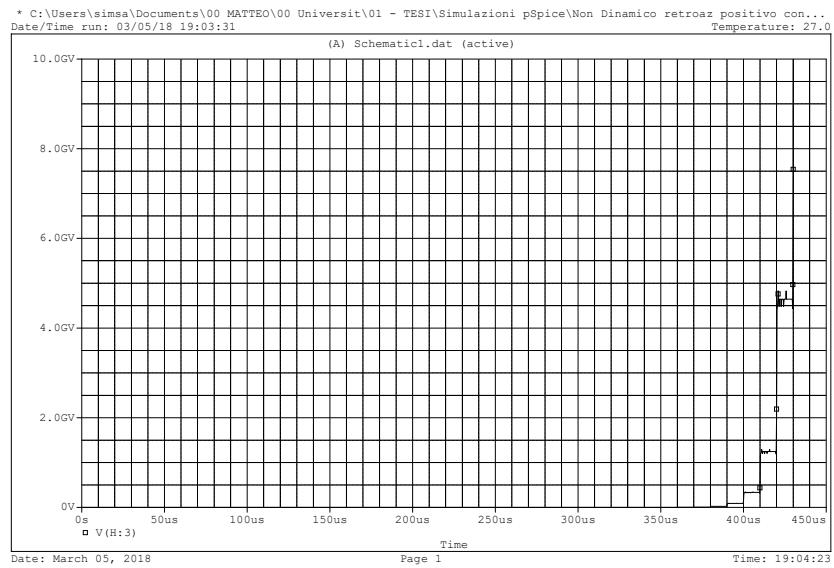


Figura 4.3: Risposta del circuito non dinamico ad ingresso costante di ampiezza 1, modello con ritardo di propagazione. $\Delta t = 10\mu s$, Step ceiling = 100ns

CAPITOLO 4. L'APPROCCIO SERIALE

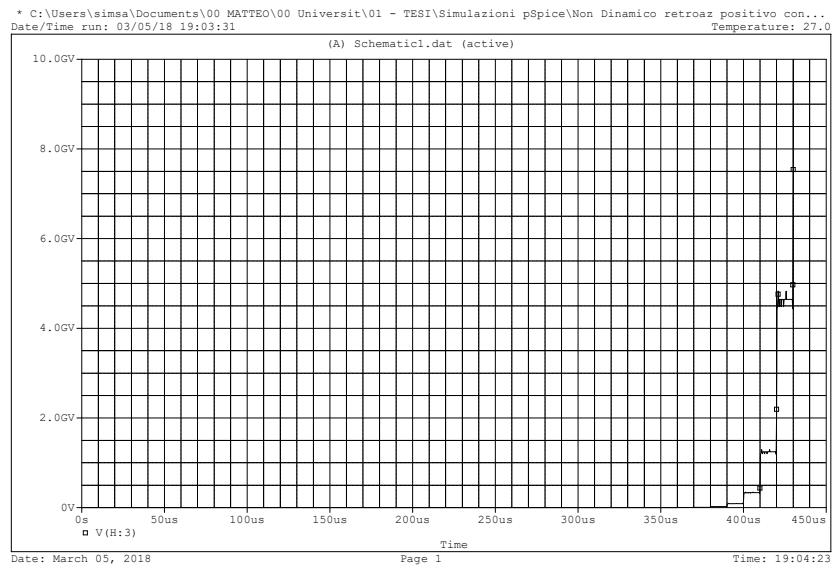


Figura 4.4: Risposta del circuito non dinamico ad ingresso costante di ampiezza 1, modello con ritardo di propagazione. $\Delta t = 5\mu s$, Step ceiling = 100ns

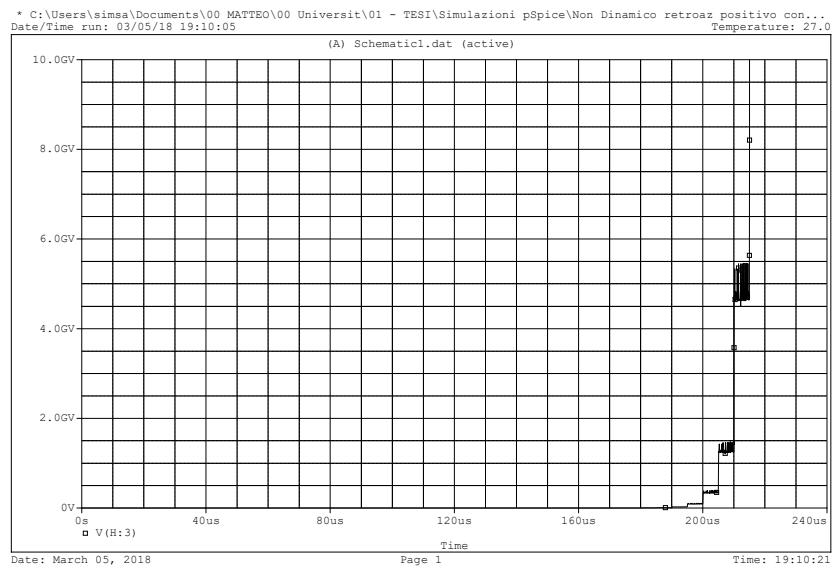


Figura 4.5: Risposta del circuito non dinamico ad ingresso costante di ampiezza 1, modello con ritardo di propagazione. $\Delta t = 1\mu s$, Step ceiling = 10ns

CAPITOLO 4. L'APPROCCIO SERIALE

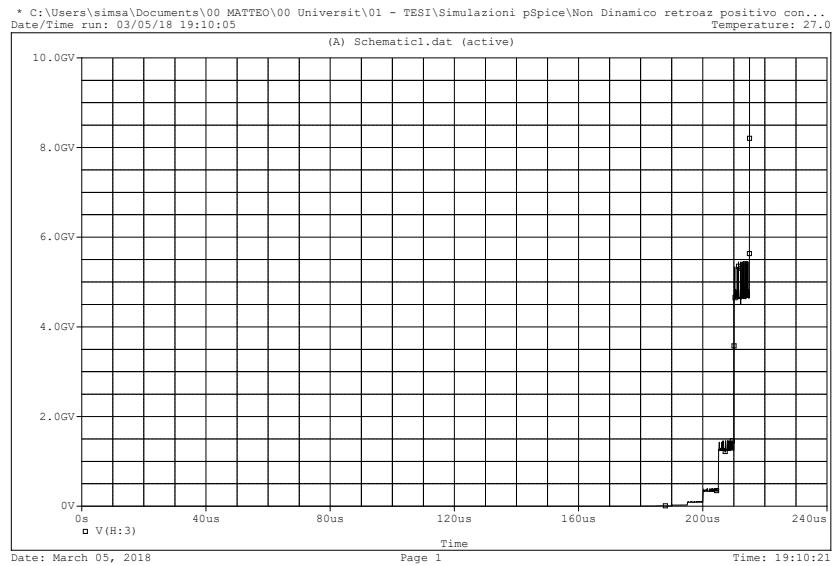


Figura 4.6: Risposta del circuito non dinamico ad ingresso costante di ampiezza 1, modello con ritardo di propagazione. $\Delta t = 500nss$, Step ceiling = 1ns

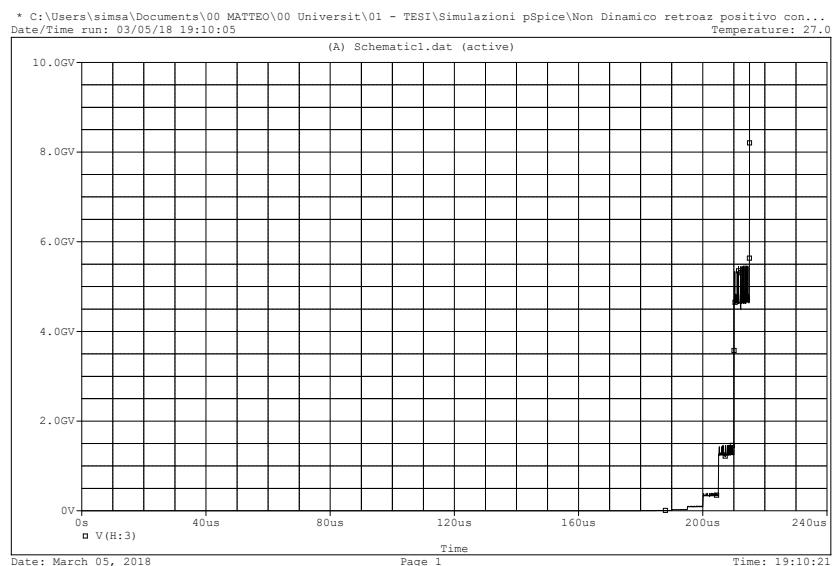


Figura 4.7: Risposta del circuito non dinamico ad ingresso costante di ampiezza 1, modello con ritardo di propagazione. $\Delta t = 1nss$, Step ceiling = 1ps

Queste rispecchiano le previsioni teoriche appena presentate. Nella fat-tispecie si noti che per le simulazioni con ritardo decrescente (figure da 4.3 a 4.7), al tendere a zero del tempo di propagazione, il tempo in cui il segnale d'uscita diverge tende a zero.

Nella prossima sezione, estendiamo il ragionamento ai sistemi LTI generali, evidenziando la maggior complessità della trattazione e ricavando risultati più generali.

4.2 L'approccio seriale per i sistemi LTI

Consideriamo il caso generale di sistema LTI, e facciamo ancora riferimento allo schema in 4.1. Sia Δt il ritardo di propagazione attraverso l'anello di retroazione. Consideriamo un segnale di ingresso u tale che la sua trasformata di Laplace sia U . Sia Y la trasformata dell'uscita.

Consideriamo l'intervallo $[0, \Delta t]$. Durante tale intervallo, il segnale non si è ancora propagato attraverso il ramo di retroazione e quindi w è ancora nullo. La trasformata dell'uscita del sistema è pertanto:

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

mentre in uscita dal blocco G si ha un segnale la cui trasformata è:

$$Y(s)G(s) = (H(s)G(s))U(s)$$

All'istante Δt finalmente il segnale w non è più nullo, e in particolare è una versione ritardata di Δt secondi del segnale in uscita dal blocco G . Pertanto, la sua trasformata è:

$$W(s) = (H(s)G(s))U(s)e^{-s\Delta t}$$

Durante l'intervallo $[\Delta t, 2\Delta t]$, il segnale e avrà dunque trasformata:

$$\begin{aligned} E(s) &= U(s) + W(s) = U(s) + (H(s)G(s))U(s)e^{-s\Delta t} = \\ &= U(s)(1 + (H(s)G(s))e^{-s\Delta t}) \end{aligned}$$

Dunque l'uscita sarà:

$$Y(s) = H(s)E(s) = H(s)\left(U(s)(1 + (H(s)G(s))e^{-s\Delta t})\right)$$

Ripetendo il procedimento, si ottiene che durante l'intervallo $[2\Delta t, 3\Delta t]$ la W è:

$$\begin{aligned} W(s) &= (H(s)G(s))\left(U(s)(1 + (H(s)G(s))e^{-s\Delta t})\right)e^{-s\Delta t} = \\ W(s) &= U(s)\left((H(s)G(s))e^{-s\Delta t} + (H(s)G(s))^2e^{-2s\Delta t}\right) \end{aligned}$$

E dunque la Y risulta essere:

$$\begin{aligned} Y(s) &= (U(s) + W(s)) H(s) = \\ &= H(s) U(s) \left(1 + (H(s) G(s)) e^{-s\Delta t} + (H(s) G(s))^2 e^{-2s\Delta t} \right) \end{aligned}$$

In generale, iterando, si ottiene la trasformata di Y per l'intervallo $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$:

$$Y(s) = \left[H(s) \sum_{k=0}^n (H(s) G(s))^k e^{-ks\Delta t} \right] U(s) \quad (4.2.1)$$

Come si può vedere, questa forma è la versione più generale della 4.1.3. Inoltre, se $\Delta t \rightarrow 0$, la 4.2.1 tende a:

$$Y(s) = \left[H(s) \sum_{k=0}^n (H(s) G(s))^k \right] U(s) \quad (4.2.2)$$

Ci sono diverse osservazioni da fare. La prima è che la serie geometrica per numeri complessi è formalmente uguale a quella per numeri reali: converge se, essendo a^k la generatrice, si ha $|a| < 1$, e il limite è $\frac{1}{1-a}$ ($\in \mathbb{C}$, in questo caso).

La seconda e più importante considerazione è che nel risultato preliminare si aveva a che fare con una serie numerica, mentre in questo caso generale si ha a che fare con una serie di funzioni (in questo caso complesse). Si osservi che, pertanto, è necessario stabilire a priori la definizione di convergenza da utilizzare.

La *trasformata inversa* di Laplace è definita da [35]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\gamma-jM}^{\gamma+jM} F(s) e^{st} ds$$

e in particolare, nei casi di nostro interesse, si ha $\gamma = 0$. Supponiamo che la serie 4.2.2 converga, per cui è lecito scriverne il limite per n tendendo a $+\infty$, e supponiamo che la convergenza al limite sia *uniforme*. Poiché la convergenza uniforme implica la convergenza *puntuale*, per unicità del limite si ha, necessariamente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} H(s) \left(\sum_{k=0}^n (H(s) G(s))^k \right) U(s) &= \\ &= \frac{H(s)}{1 - H(s) G(s)} U(s) \end{aligned}$$

per ogni s nella *ROC* [35] di quest'ultima. Dunque:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} H \left(\sum_{k=0}^n (H G)^k \right) U &= \\ &= \frac{H}{1 - HG} U \end{aligned}$$

dove la convergenza si intende in senso uniforme. Possiamo dunque scrivere:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H}{1 - HG} U \right] &= \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} H \left(\sum_{k=0}^n (H G)^k \right) U \right] &= \\ = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} &\left[H(s) \left(\sum_{k=0}^n (H(s) G(s))^k \right) U(s) \right] e^{st} ds \end{aligned}$$

Poiché la convergenza è uniforme per ipotesi, possiamo invertire il segno di limite col segno di integrale e scrivere:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} &\left[H(s) \left(\sum_{k=0}^n (H(s) G(s))^k \right) U(s) \right] e^{st} ds = \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n &\left[\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} H(s) (H(s) G(s))^k U(s) e^{st} ds \right] = \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n &\mathcal{L}^{-1} \left[H(s) (H(s) G(s))^k U(s) \right] \end{aligned}$$

Riassumendo, se la serie converge uniformemente, converge alla f.d.t. e allora la risposta del sistema al segnale u coincide con la serie delle risposte a u dei sistemi $H(HG)$, $H(HG)^2$, $H(HG)^3\dots$. In simboli:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H}{1 - HG} U \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left[H (HG)^k U \right] \quad (4.2.3)$$

L'uniforme convergenza è solo *condizione sufficiente* affinchè si possa invertire il segno di limite con il segno di integrale. Pertanto, ci potrebbero essere casi in cui nonostante la convergenza non sia uniforme, la risposta del sistema reale si può comunque calcolare con la f.d.t. intesa in senso classico.

Mentre per il caso in sezione 4.1 bastava imporre $|HG| < 1$ per avere stabilità esterna e quindi stabilità asintotica, nel caso generale imporre

CAPITOLO 4. L'APPROCCIO SERIALE

$|H(s)G(s)| < 1$ per ogni s appartenente alla *ROC* non è sufficiente, poichè ciò implica solamente la convergenza *puntuale*. Inoltre, se anche trovassimo una condizione affinchè valga la 4.2.3, questo ci permetterebbe soltanto di affermare che la risposta del sistema è effettivamente pari a $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H}{1-HG}U\right]$, senza poter dedurre niente riguardo la stabilità esterna. A maggior ragione, dunque, non può essere sufficiente imporre $|H(j\omega)G(j\omega)| < 1$ per $\omega : \angle H(j\omega)G(j\omega) = 0$ per decretare alcunché sulla stabilità esterna, meno su quella interna.

Capitolo 5

Un controesempio

In questo capitolo anchè analizzeremo diversi circuiti, il loro feedback e instabilità e la loro risposta nel dominio della frequenza per confrontare i risultati con il criterio di Barkhausen e ottenere le condizioni sufficienti per l'oscillazione.

5.1 Controesempio

La fase preliminare di ricerca bibliografica ha portato ad esaminare gli articoli [30][8][2]. In particolare, al punto 3 “*Example 2*” di [30] viene presentato un circuito in cui il blocco H è un amplificatore non invertente di guadagno K , mentre il blocco G di retroazione è realizzato come un partitore tra una serie RC e un parallelo RC , in modo da presentare un comportamento oscillatorio (vedasi figura 5.1, tratta da [30]). Tale circuito ha la proprietà di essere asintoticamente stabile per $K < 1$ e $K > 1.5$, mentre è instabile se $K \in (1, 1.5)$. Sulla frontiera dell’intervallo si ha marginale stabilità. Il fatto interessante è che il criterio esteso di Barkhausen prevederebbe comportamento oscillatorio instabile per $K > 1.5$, stabile per $K < 1.5$. La funzione di trasferimento è:

$$H(s) G(s) = K \frac{1 + s^2 R^2 C^2 + 2 s R C}{1 + s^2 R^2 C^2 + 3 s R C} \quad (5.1.1)$$

In figura 5.2 il diagramma di Nyquist per il circuito per $K = 1$, $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ nF}$. Su di esso è riportato il punto $\frac{1}{K}$ per i valori più significativi di K (si faccia riferimento a [22], tenendo presente che nel nostro caso si ha retroazione positiva, non negativa). Si riportano inoltre in figura 5.3 i diagrammi di Bode per modulo e fase, tracciato per gli stessi valori di K , R e C . Innanzitutto, il circuito è stato simulato su pSpice 9.1 utilizzando lo schema circuitale di figura 5.4. Lo schema è differente da quello visto in figura 5.1. Si vuole dunque motivare l’introduzione di due dispositivi VCVS (*Voltage Controlled Voltage Source*) in più rispetto al circuito originale:

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

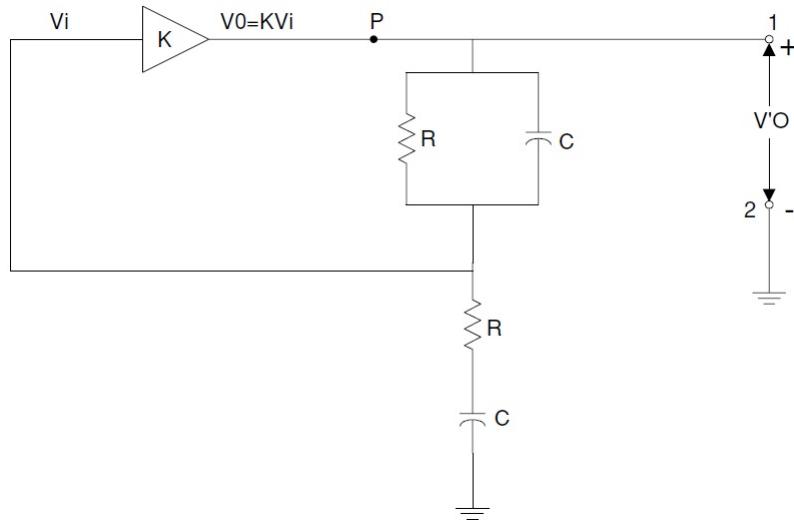


Figura 5.1: Lo schema circuitale come in [32]

Figura 5.2: Il diagramma di Nyquist per il circuito in figura 5.1

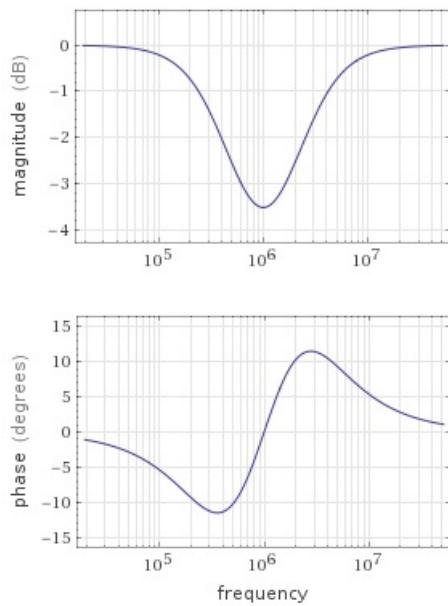


Figura 5.3: I diagrammi di Bode per il circuito in figura 5.1

- il VCVS A è un amplificatore ideale di tensione controllato in tensione; fa le veci dell'amplificatore a guadagno K presentato in figura 5.1;

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

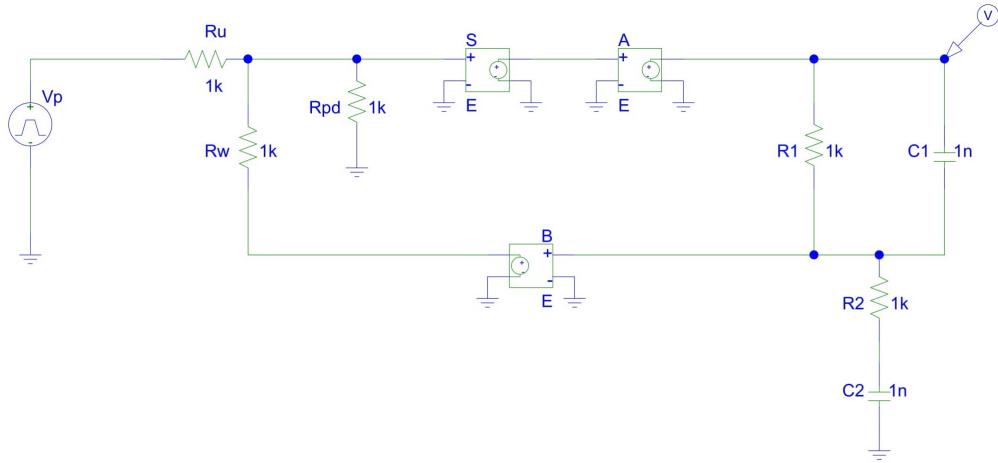


Figura 5.4: Lo schema circuitale ideale su pSpice 9.1

- il VCVS S viene usato come sommatore non invertente, in modo da poter dare un impulso iniziale al circuito con l'ausilio del generatore V_p ; detta w l'uscita del blocco B , è facile verificare, sfruttando la sovrapposizione degli effetti, che all'ingresso di S si ha $\frac{1}{3}w + \frac{1}{3}V_p$; pertanto il blocco B ha guadagno pari a 3;
- il VCVS B fa da buffer non invertente, necessario a causa dell'introduzione delle resistenze R_p , R_w , R_{pd} .

Dare un impulso iniziale al circuito è necessario perché altrimenti, essendo tutti i componenti ideali, si ha uscita nulla anche in caso di circuito instabile, causa le condizioni iniziali nulle. L'impulso iniziale permette di perturbare dunque lo stato del sistema.

L'impulso iniziale utilizzato nella simulazione è rettangolare, di durata $1\mu\text{s}$, fronti di salita e discesa molto ripidi (tempo di salita e di discesa pari a 10 ns), ampiezza 1 V . Come previsto dall'articolo [32], il circuito esibisce un comportamento stabile per $K < 1$. In particolare, si può osservare dalle figure 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9 come le capacità nell'anello di retroazione reagiscano ai fronti dell'impulso generando degli *spike* molto brevi in corrispondenza di essi. Tali impulsi tendono ad avere durata nulla e ampiezza infinita quando K tende a 1 (figure 5.8 e 5.9).

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

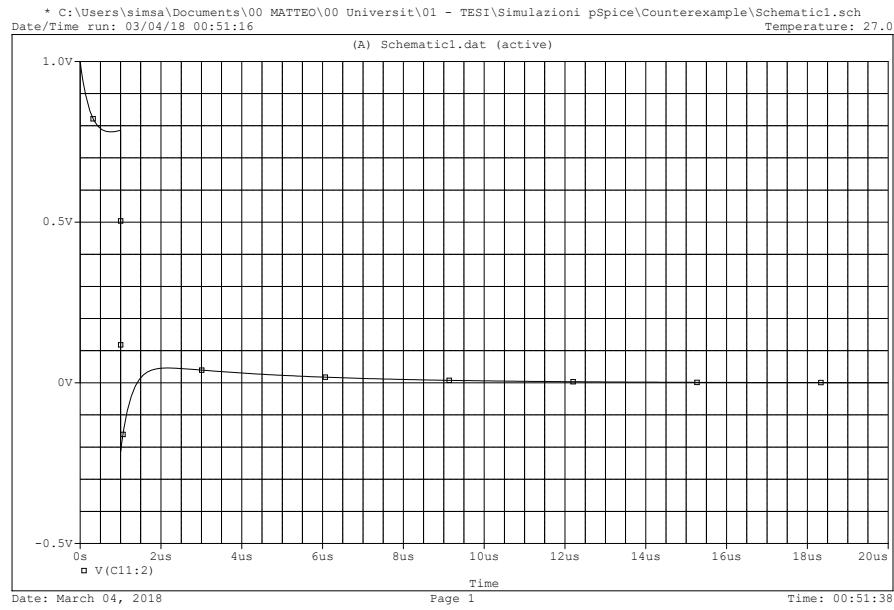


Figura 5.5: $K=0.5$; Step ceiling = 100ns

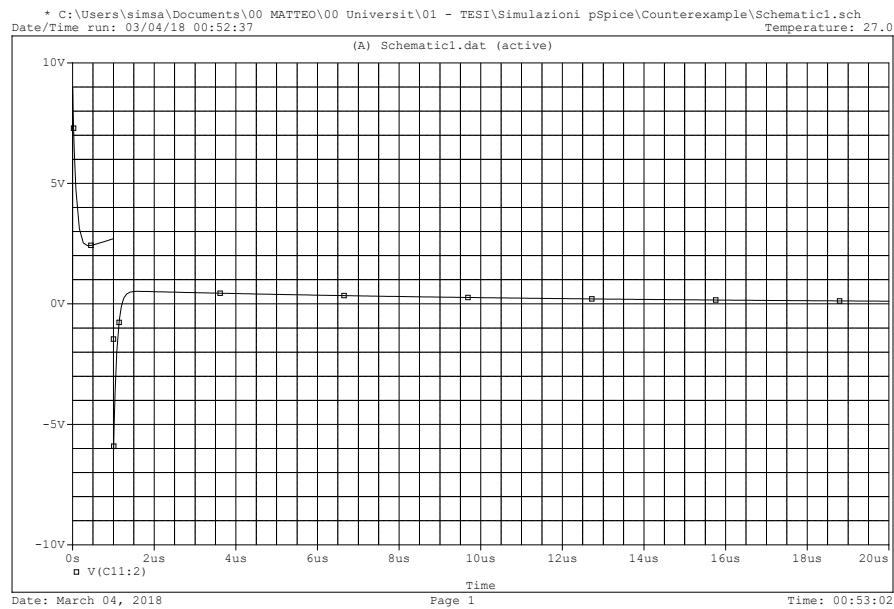


Figura 5.6: $K=0.9$; Step ceiling = 100ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

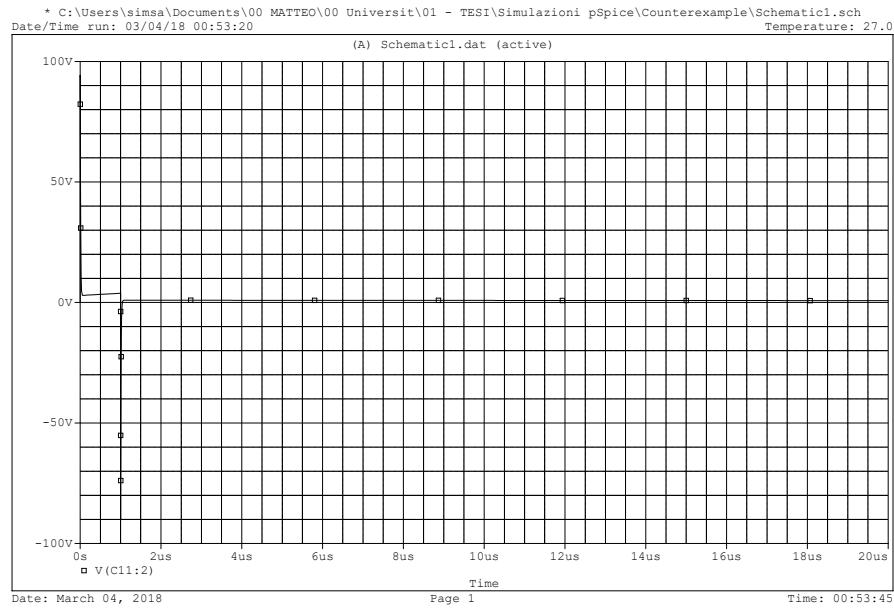


Figura 5.7: $K=0.99$; Step ceiling = 100ns

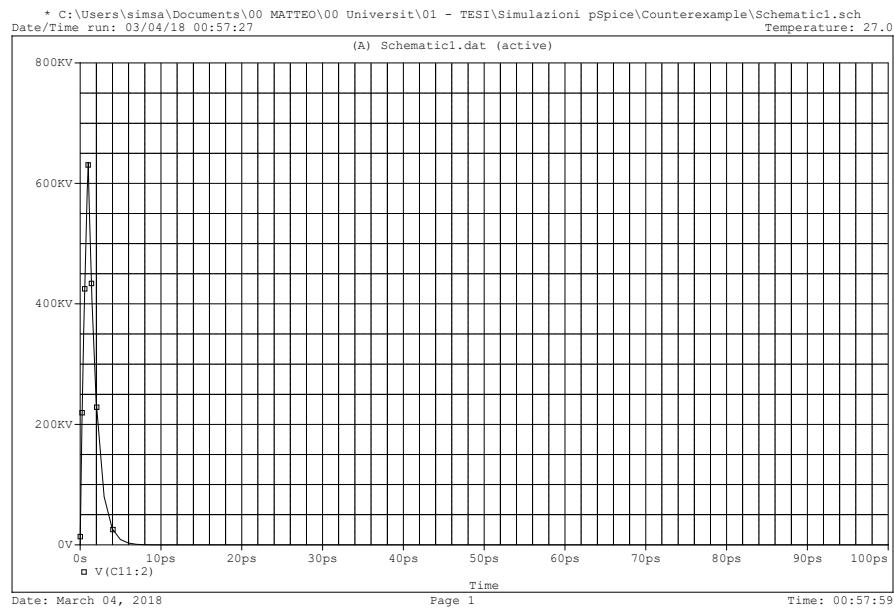


Figura 5.8: $K=0.999999$; Step ceiling = 1ps

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

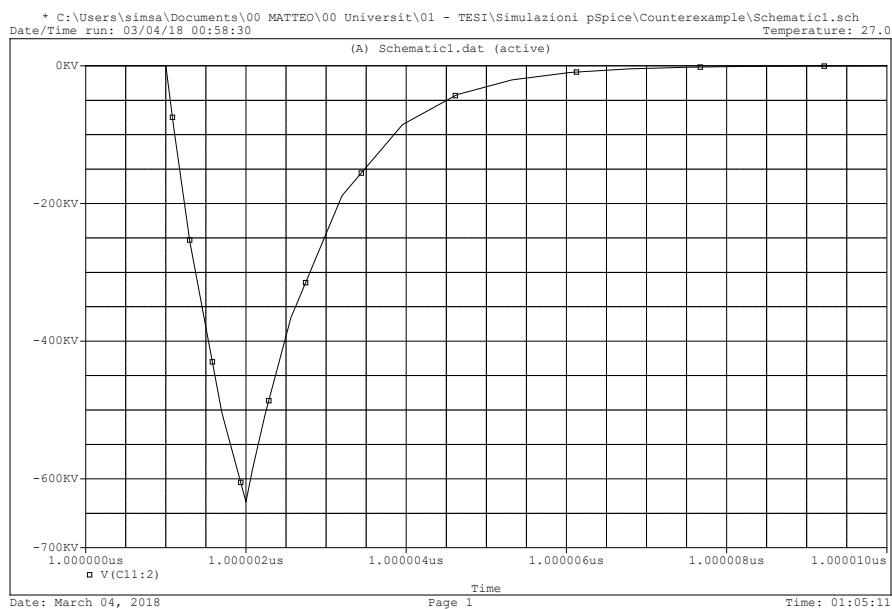


Figura 5.9: K=0.999999; Step ceiling = 1ps

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

Per $K = 1$ non è possibile ottenere una simulazione. Per $K > 1$ si ha un comportamento che sembra semplicemente divergente, mentre si rive-
la essere oscillatorio e divergente via via che si impostano valori di K più
elevati (si faccia riferimento alle figure da 5.10 a 5.35). Il limite a 10 GV
imposto dal simulatore, combinato con la rapidità con cui l'ampiezza dell'u-
scita diverge, non permette di apprezzare l'andamento oscillatorio. Questo
perché, raggiunta tale tensione d'uscita (comunque irrealistica, poiché am-
plificatori reali saturerebbero a poco meno della tensione di alimentazione),
la simulazione si interrompe.

Poiché all'aumentare di K tale crescita esponenziale diventa via via meno
brusca, da $K = 1.26$ (figura 5.14) si riesce a notare un leggero innalzamento
della tensione prima del crollo in negativo. Da $K = 1.27$ (figura 5.15) a
salire, tale andamento si rende sempre più evidente. Per $K = 1.35$ (figura
5.23) si riescono finalmente ad apprezzare due interi periodi della sinusoide.
Via via che K approccia il valore di 1.5, il numero di cicli visibili prima che
il simulatore arrivi al suo limite d'ampiezza cresce, tendendo all'infinito.

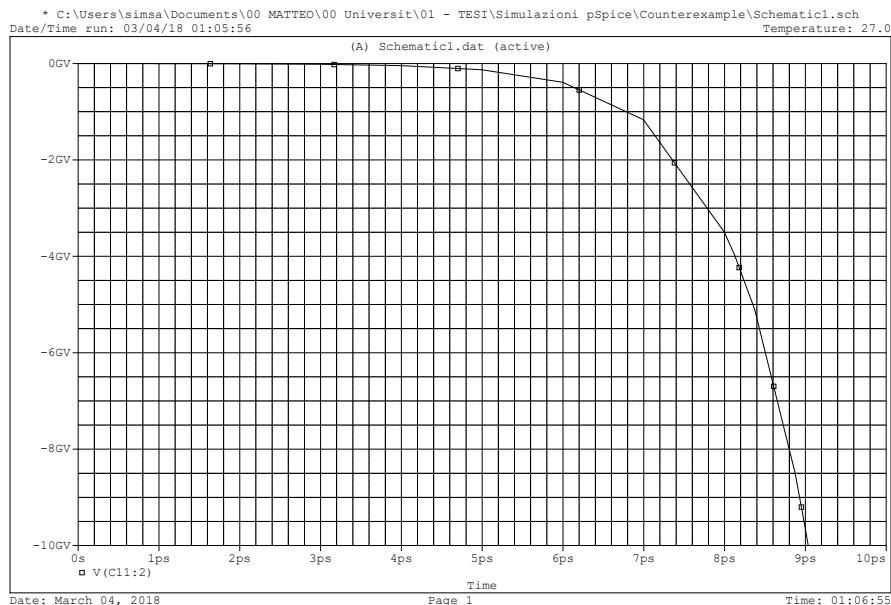


Figura 5.10: $K=1.000001$; Step ceiling = 1ps

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO



Figura 5.11: $K=1.1$; Step ceiling = 50ns

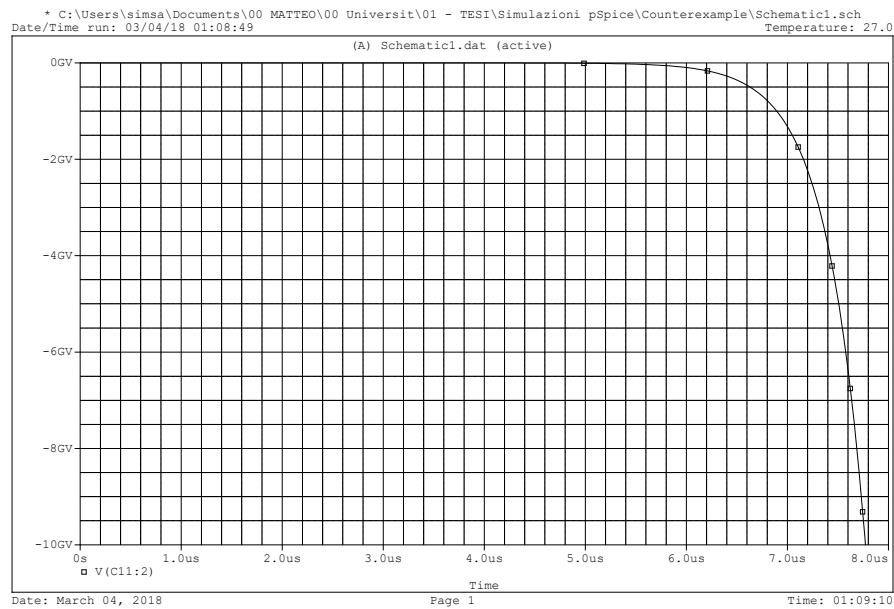


Figura 5.12: $K=1.2$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

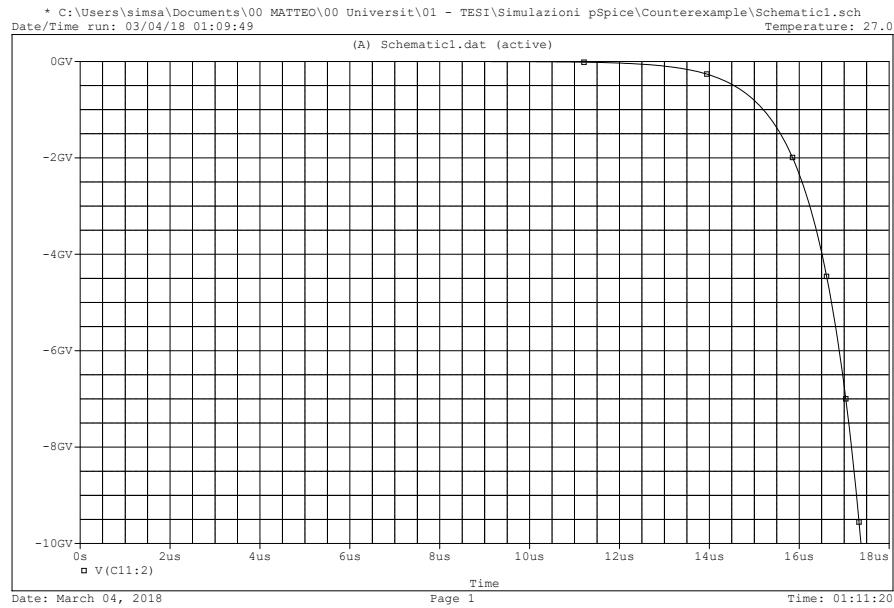


Figura 5.13: $K=1.25$; Step ceiling = 50ns

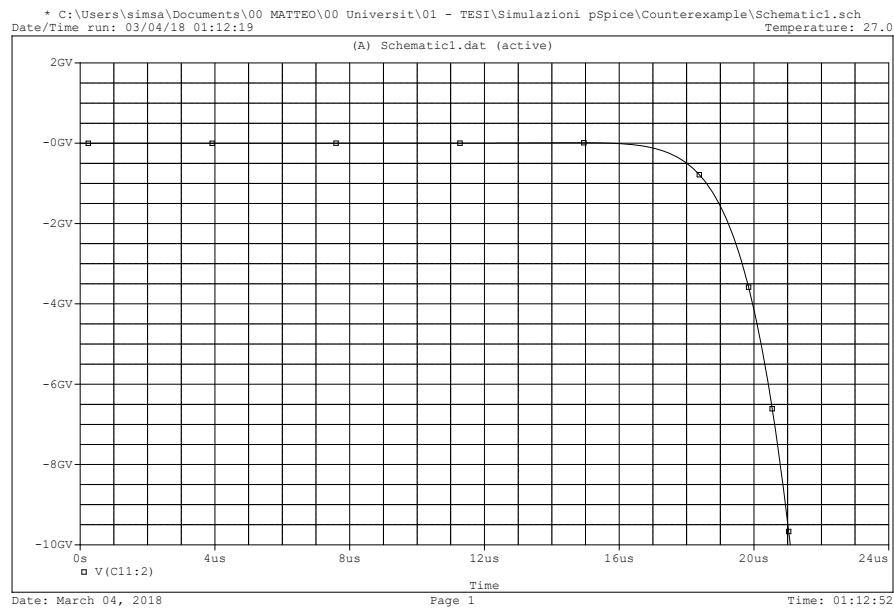


Figura 5.14: $K=1.26$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

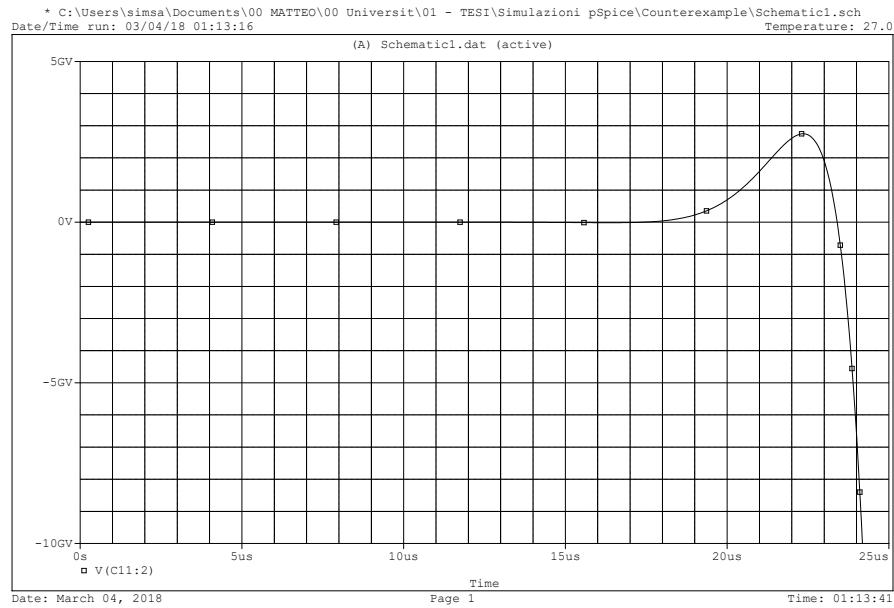


Figura 5.15: $K=1.27$; Step ceiling = 50ns

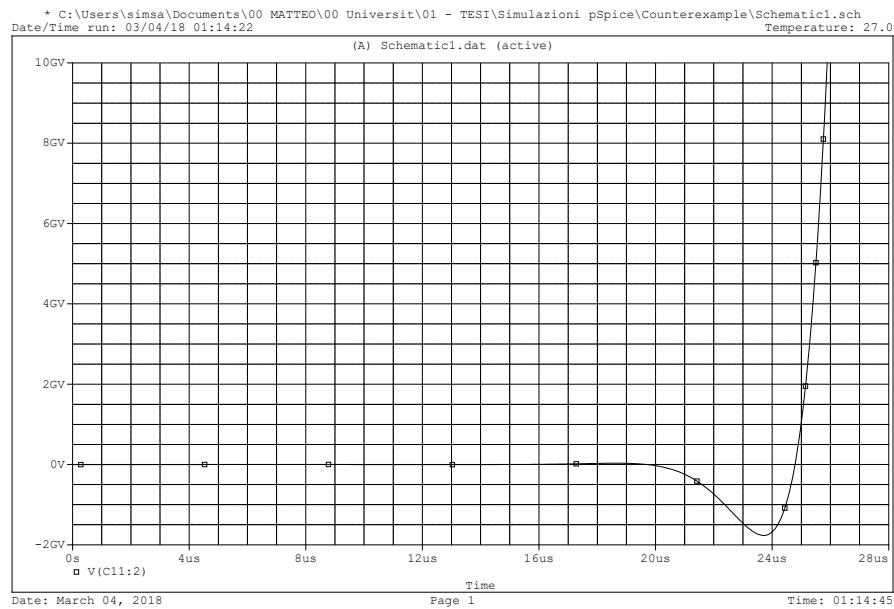


Figura 5.16: $K=1.28$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

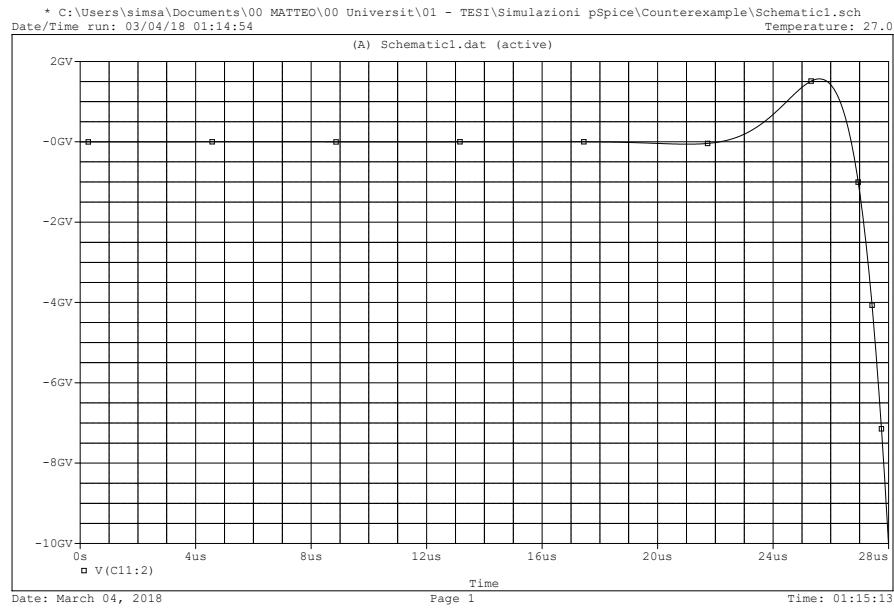


Figura 5.17: $K=1.29$; Step ceiling = 50ns

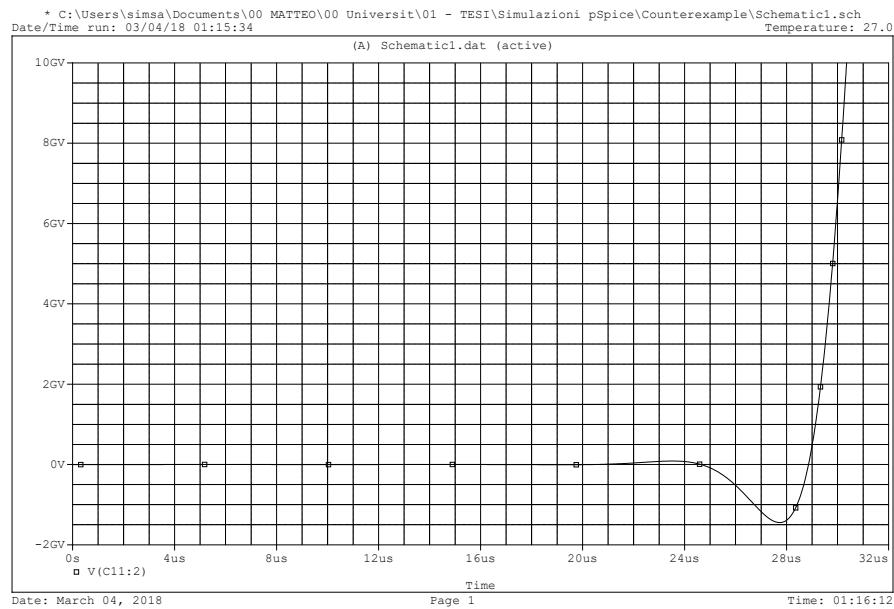


Figura 5.18: $K=1.30$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

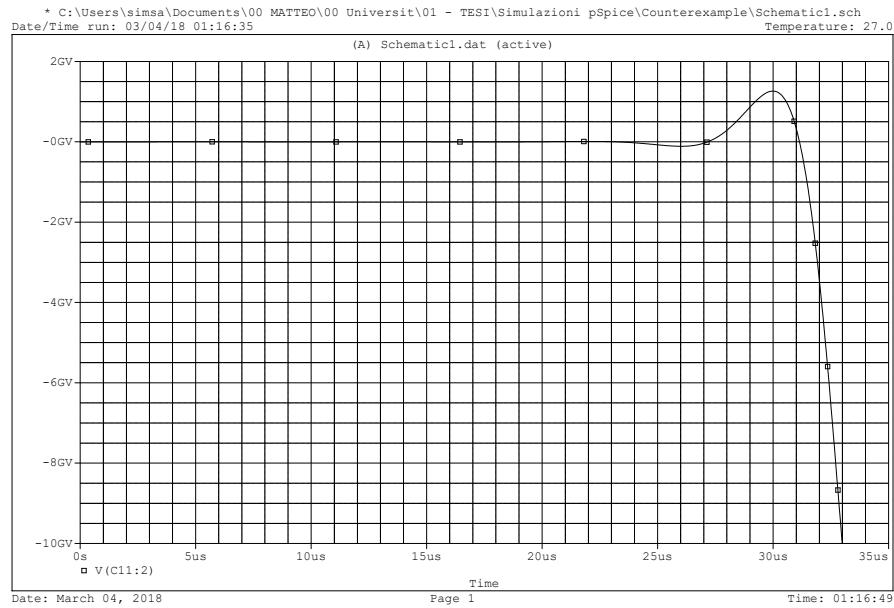


Figura 5.19: $K=1.31$; Step ceiling = 50ns

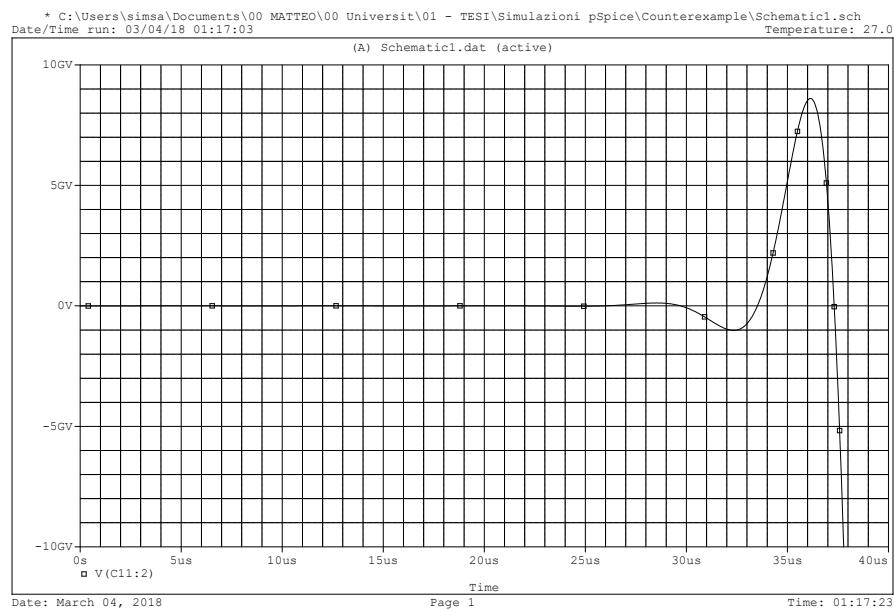


Figura 5.20: $K=1.32$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO



Figura 5.21: $K=1.33$; Step ceiling = 50ns

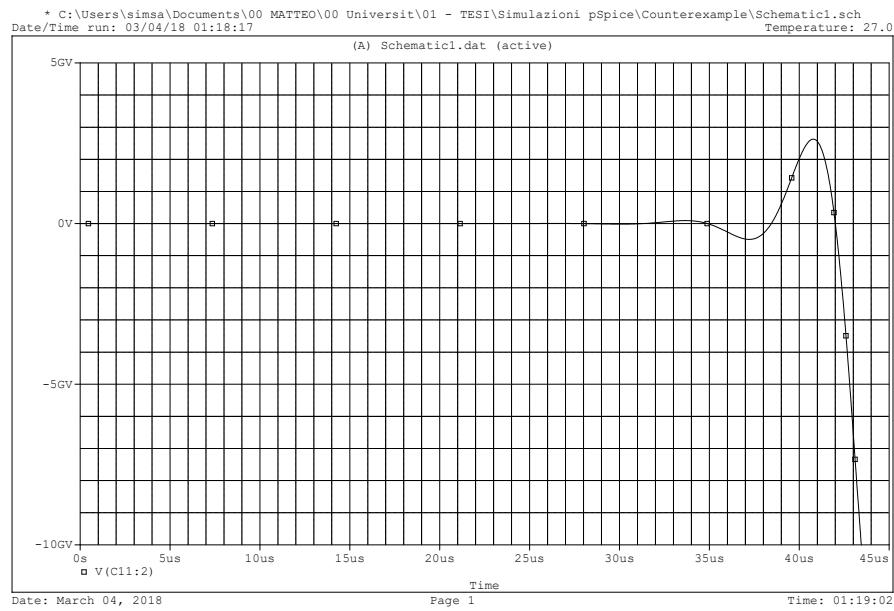


Figura 5.22: $K=1.34$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

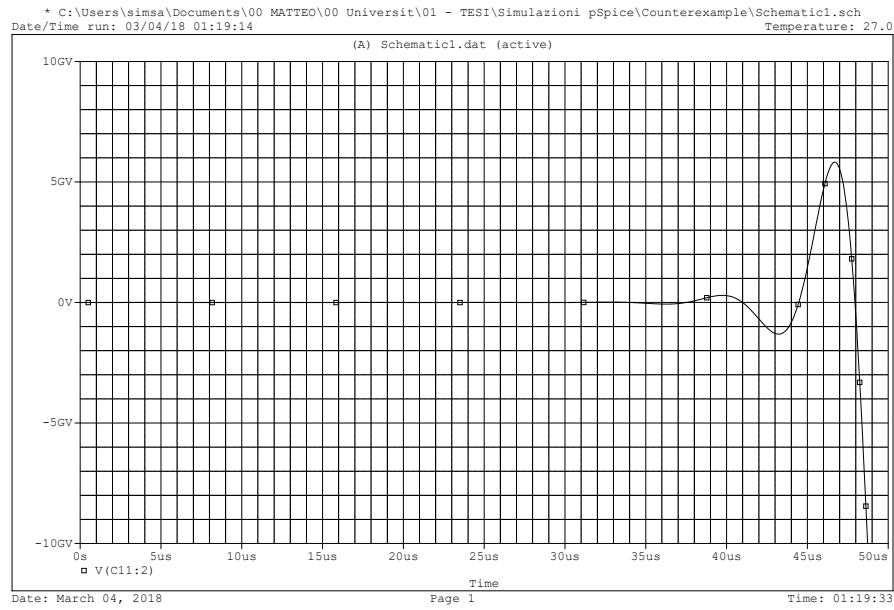


Figura 5.23: $K=1.35$; Step ceiling = 50ns

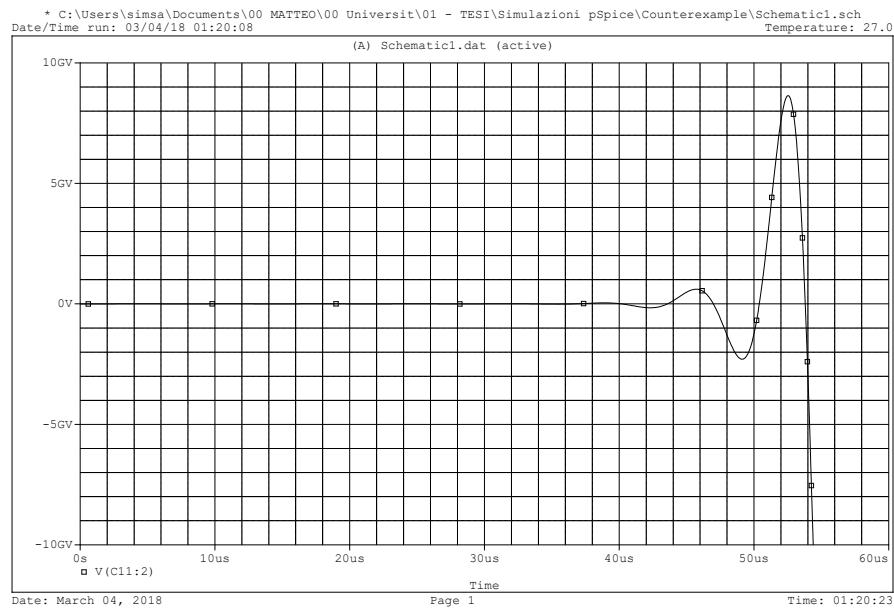


Figura 5.24: $K=1.36$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

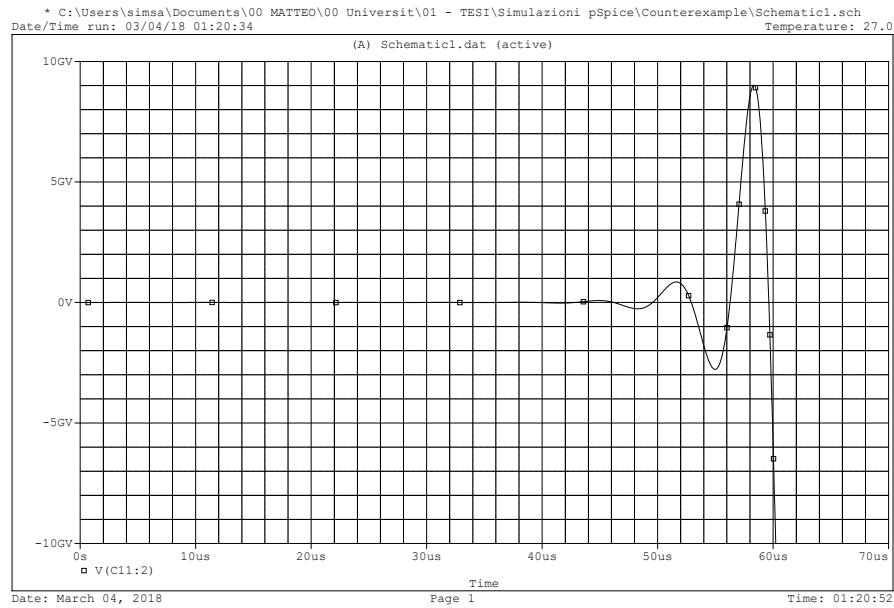


Figura 5.25: $K=1.37$; Step ceiling = 50ns

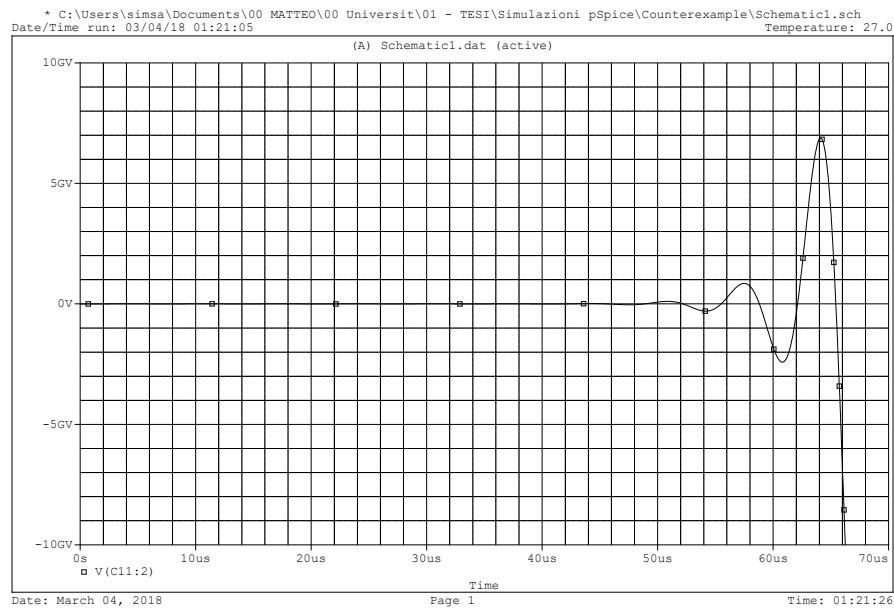


Figura 5.26: $K=1.38$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

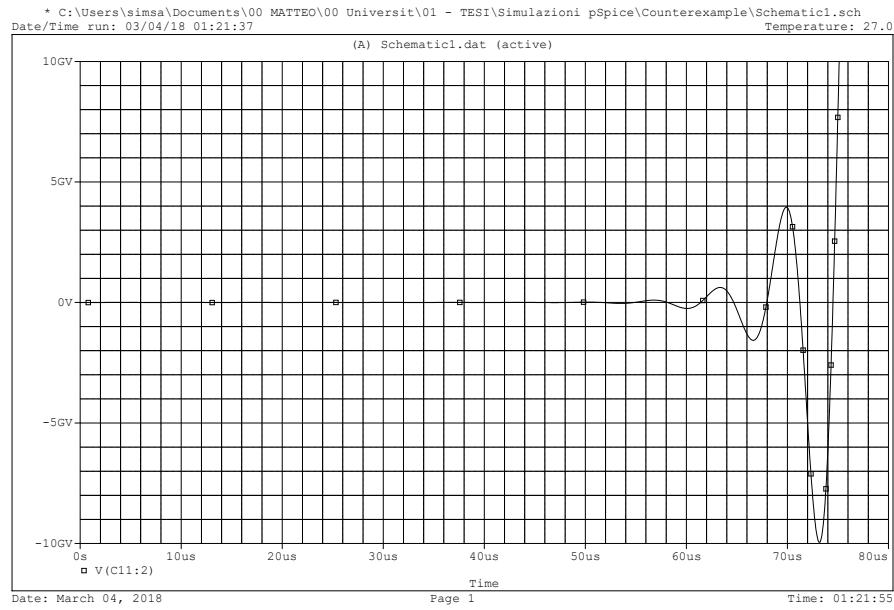


Figura 5.27: $K=1.39$; Step ceiling = 50ns

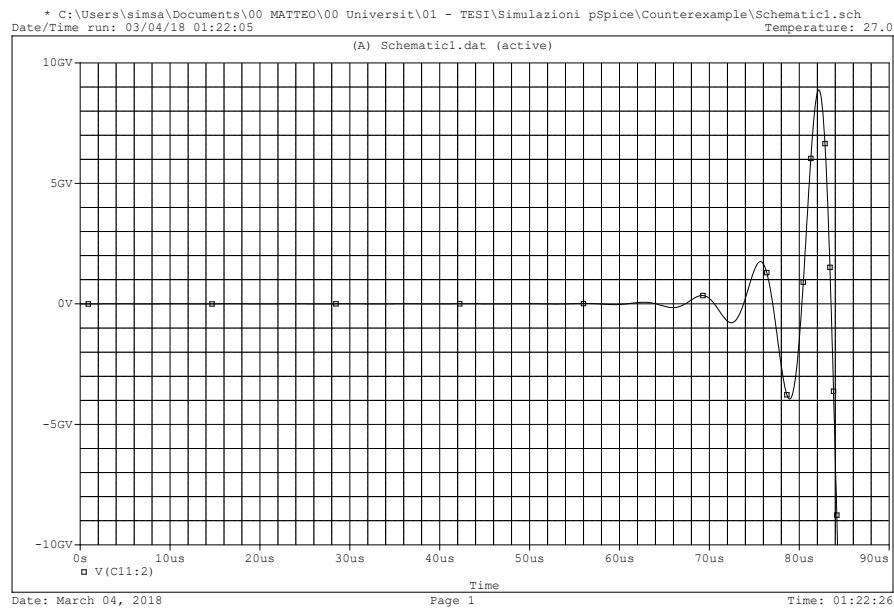


Figura 5.28: $K=1.40$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

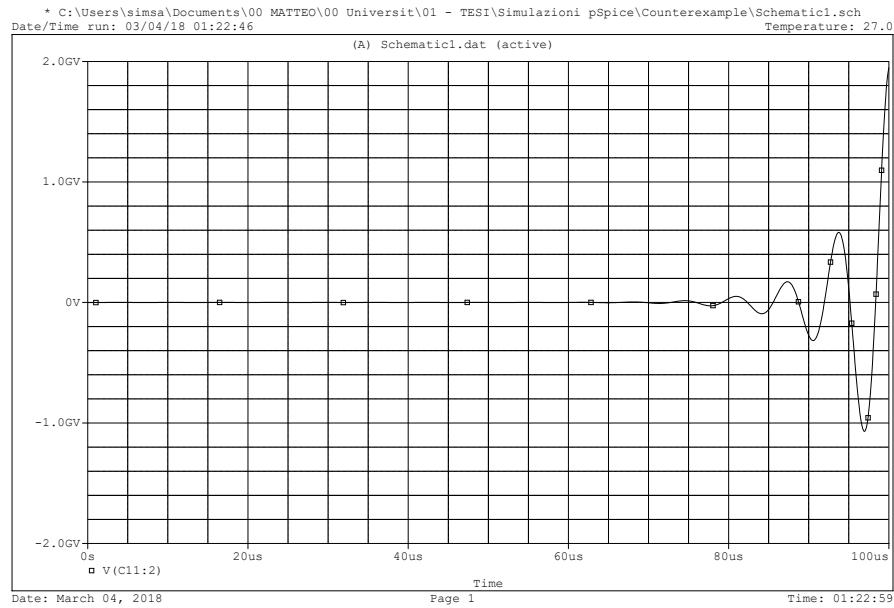


Figura 5.29: $K=1.42$; Step ceiling = 50ns

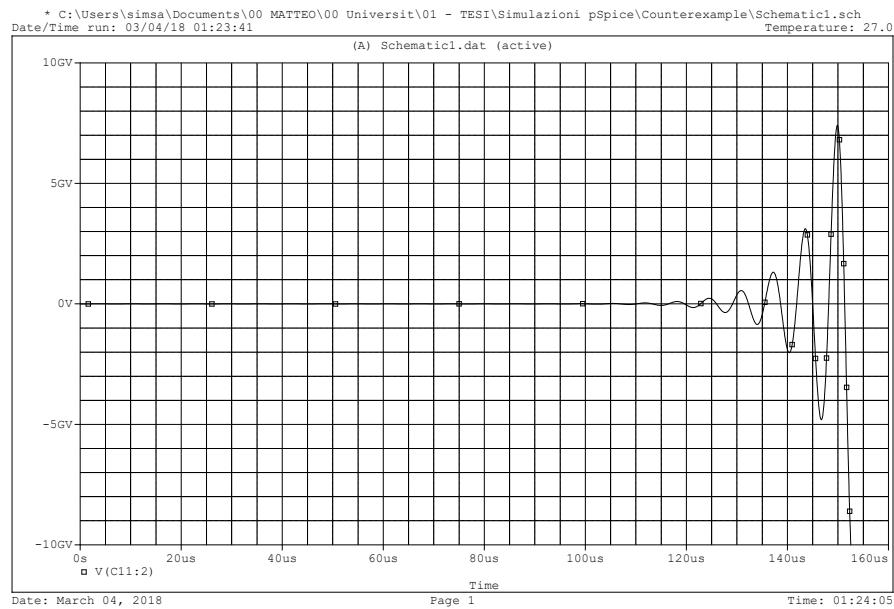


Figura 5.30: $K=1.44$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

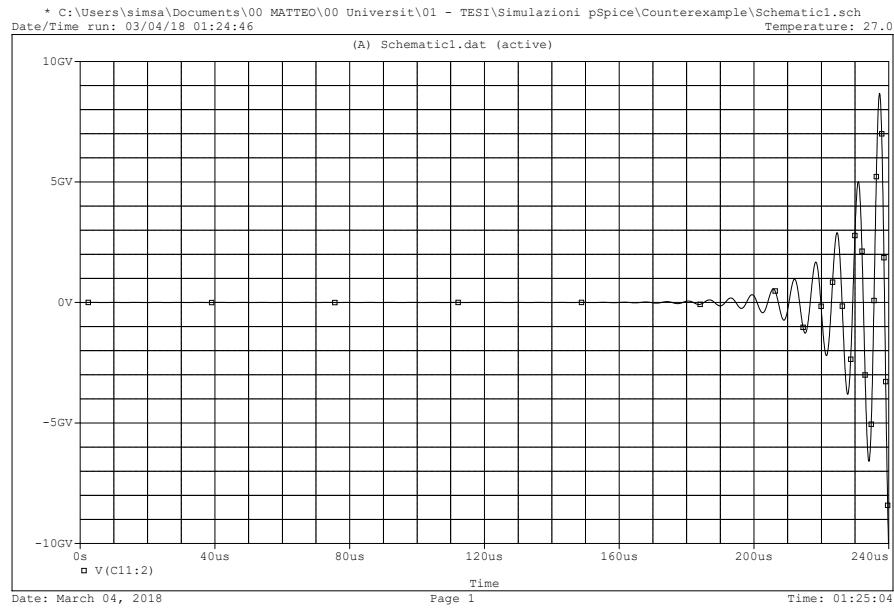


Figura 5.31: $K=1.46$; Step ceiling = 50ns

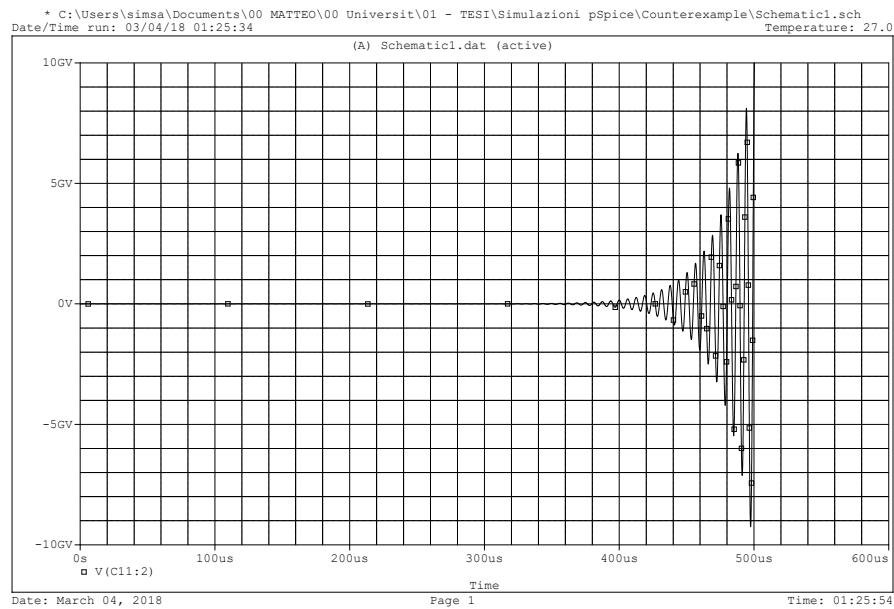


Figura 5.32: $K=1.48$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

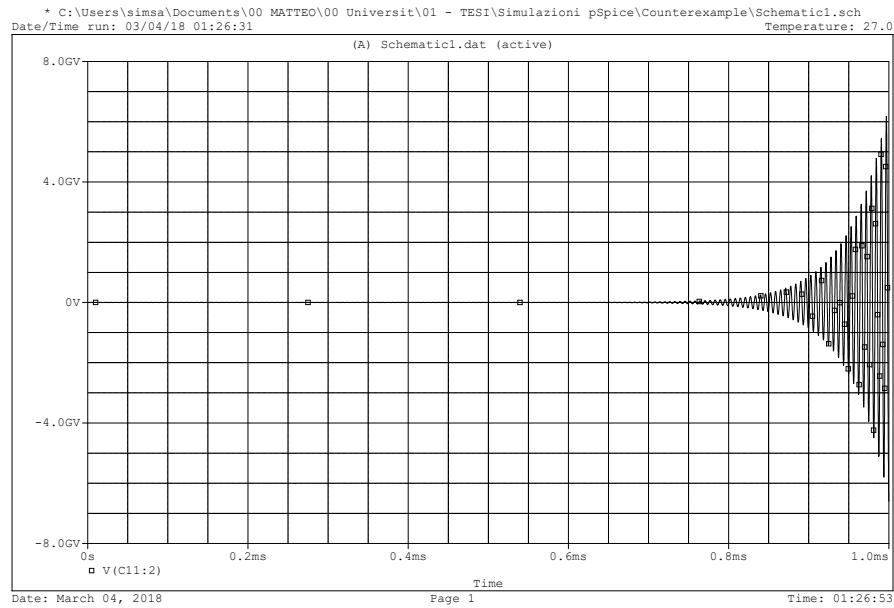


Figura 5.33: $K=1.49$; Step ceiling = 50ns

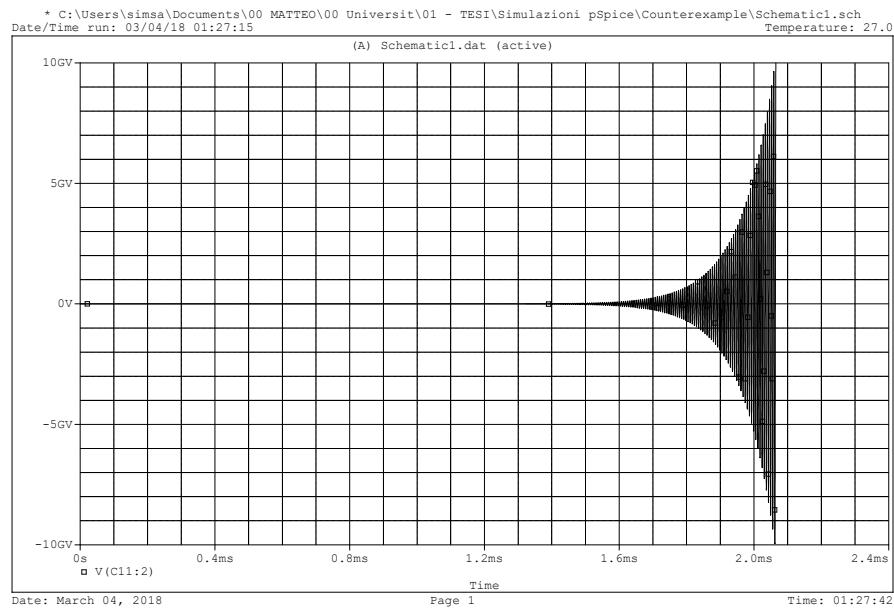


Figura 5.34: $K=1.495$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

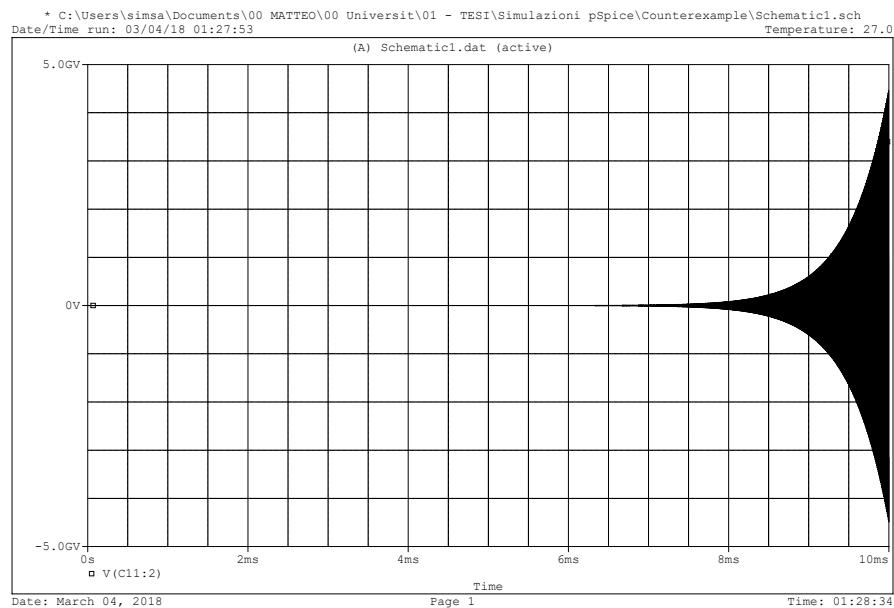


Figura 5.35: $K=1.499$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

Prevedibilmente, per il valore di 1.5 (figure 5.36 e 5.37), si ha un'oscillazione ad ampiezza costante. Siamo dunque in regime di marginale stabilità. Per $K > 1.5$ si può apprezzare un'uscita oscillatoria ma tendente asintoticamente a zero. Tale convergenza a zero dell'ampiezza è via via più marcata, al punto da non riuscire più a notare visivamente l'oscillazione. Si osservano, per $K \gg 1.5$, i picchi di risposta ai fronti dell'impulso d'ingresso, prontamente smorzati.

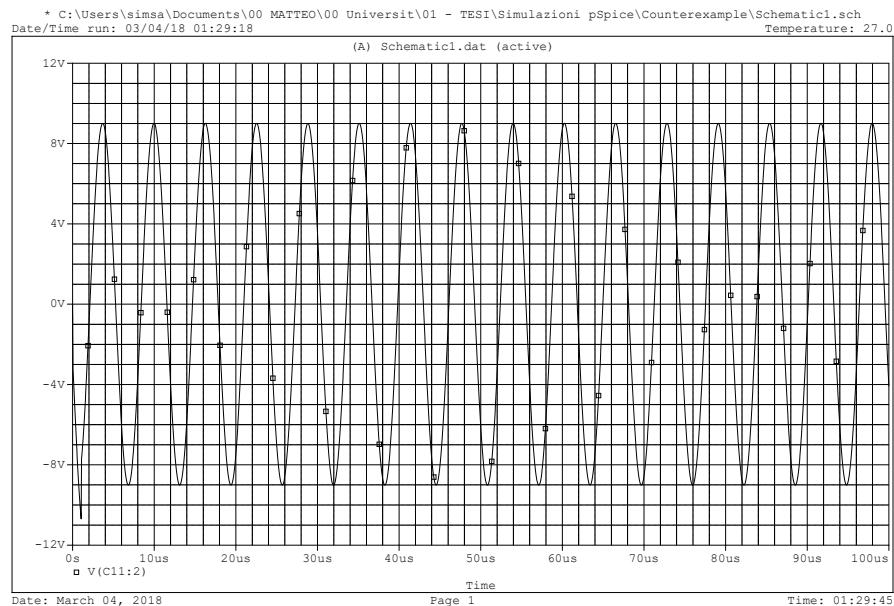


Figura 5.36: $K=1.5$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

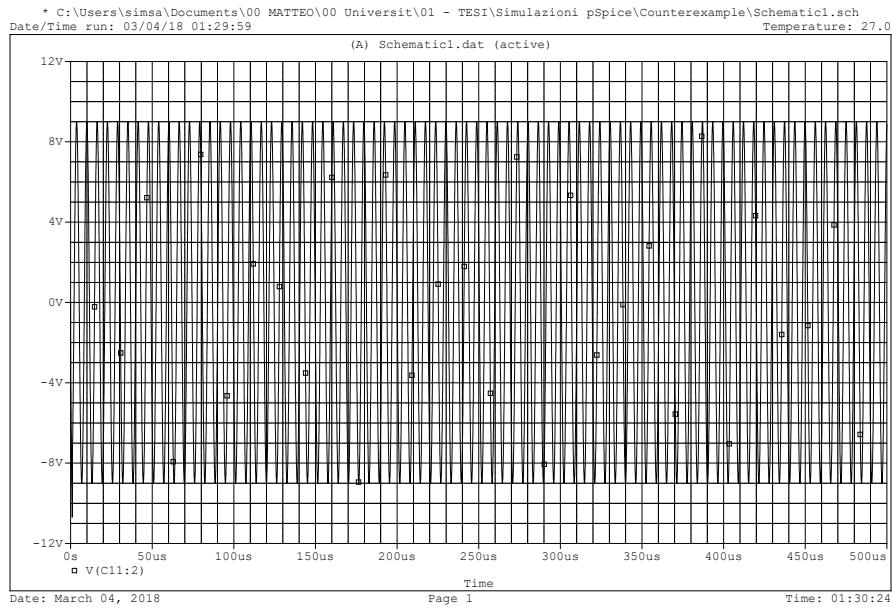


Figura 5.37: $K=1.5$; Step ceiling = 50ns

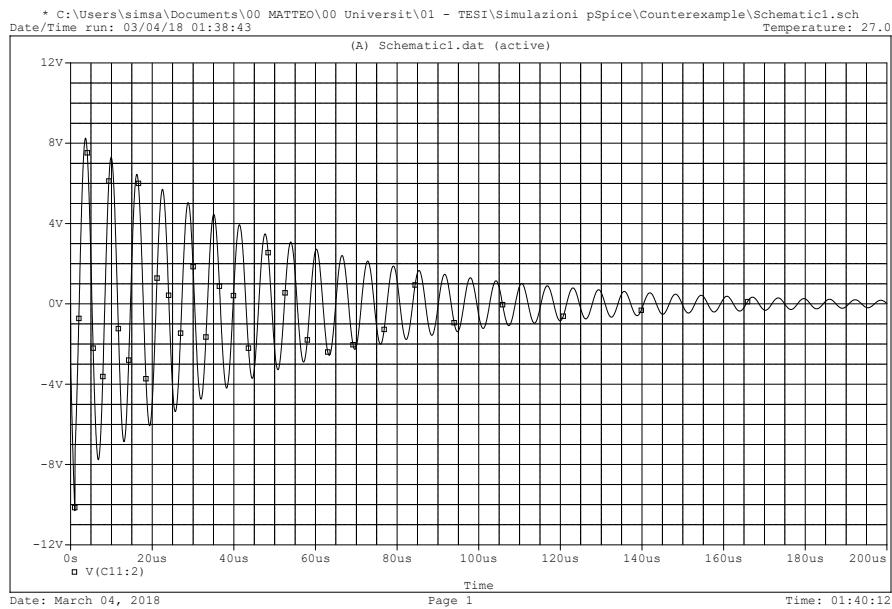


Figura 5.38: $K=1.51$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

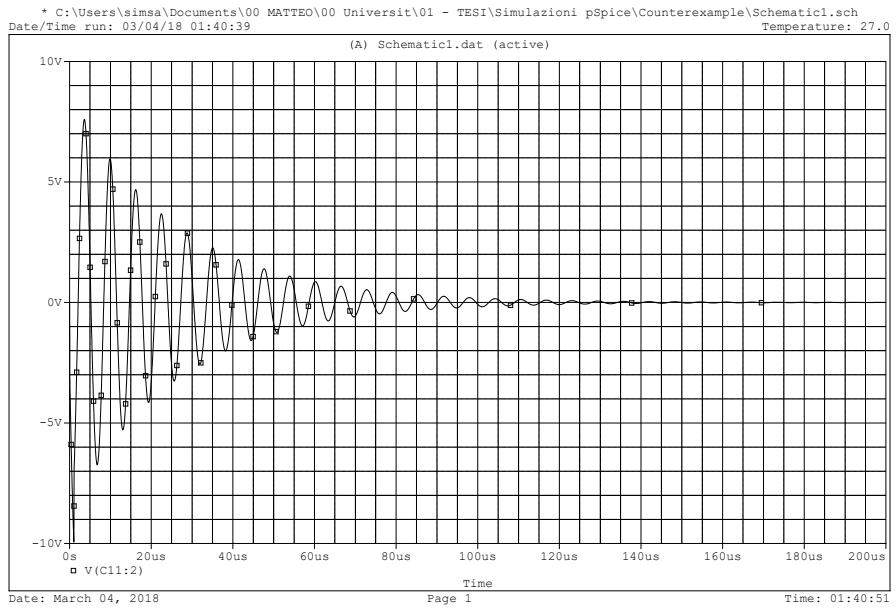


Figura 5.39: $K=1.52$; Step ceiling = 50ns

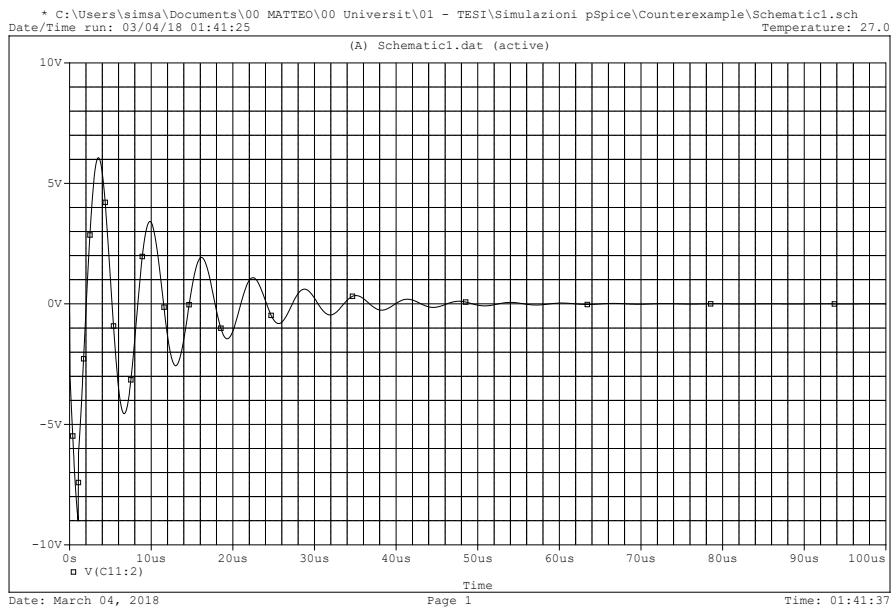


Figura 5.40: $K=1.53$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

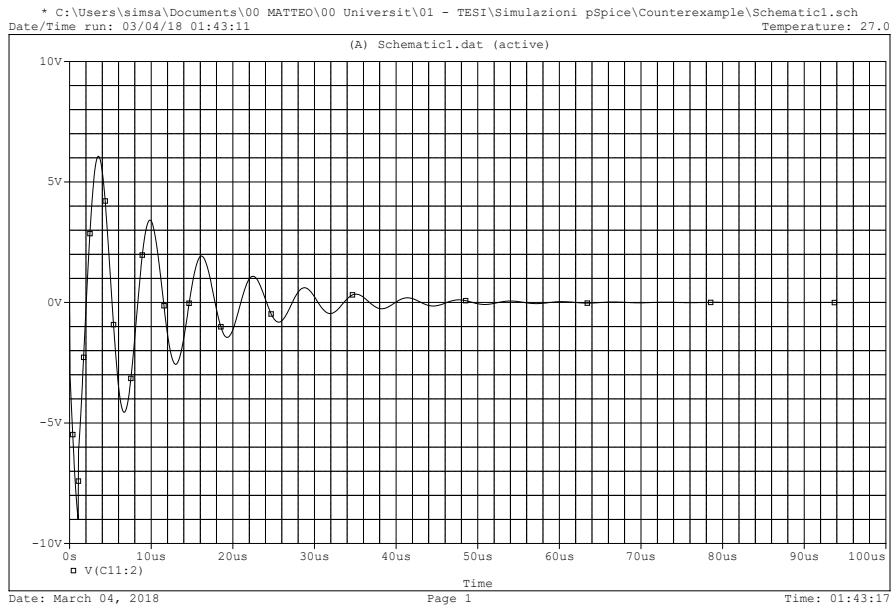


Figura 5.41: $K=1.55$; Step ceiling = 50ns

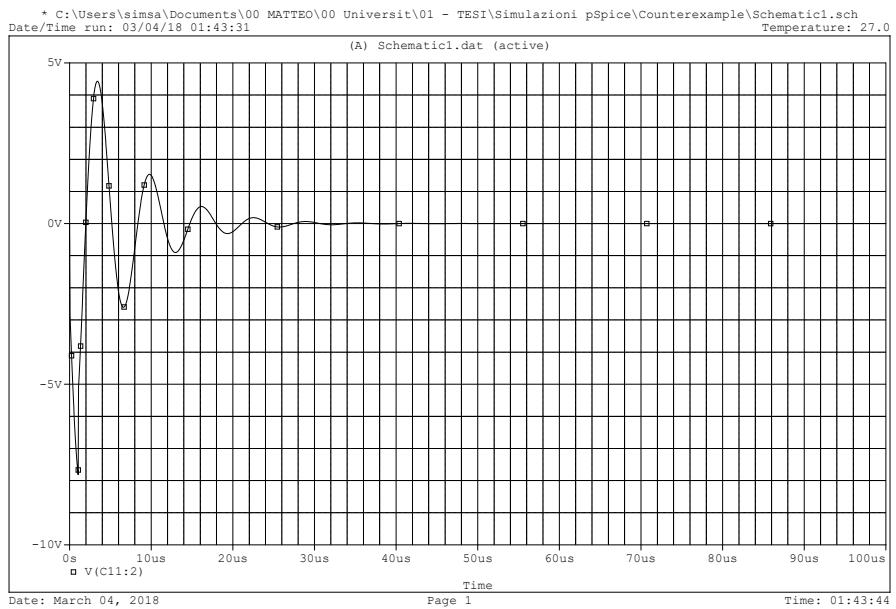


Figura 5.42: $K=1.6$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

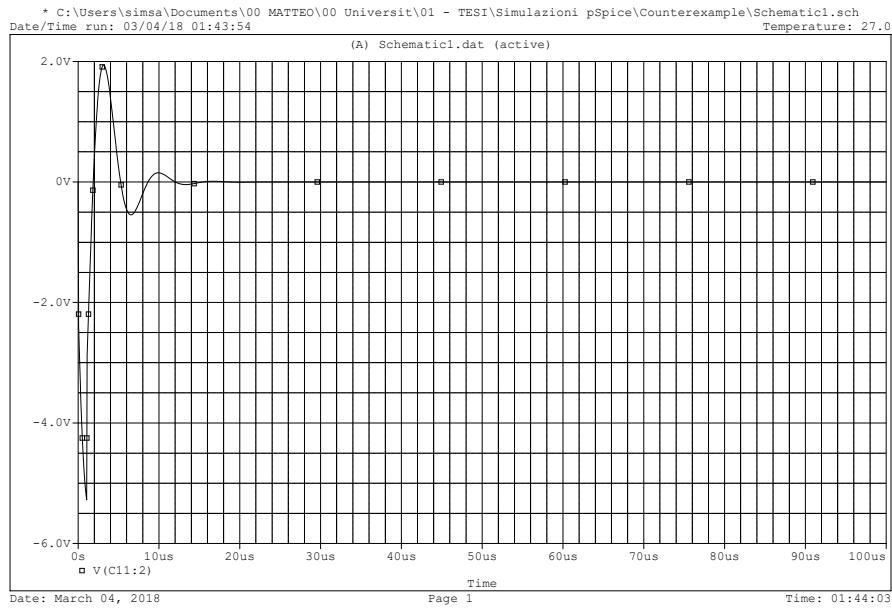


Figura 5.43: $K=1.8$; Step ceiling = 50ns

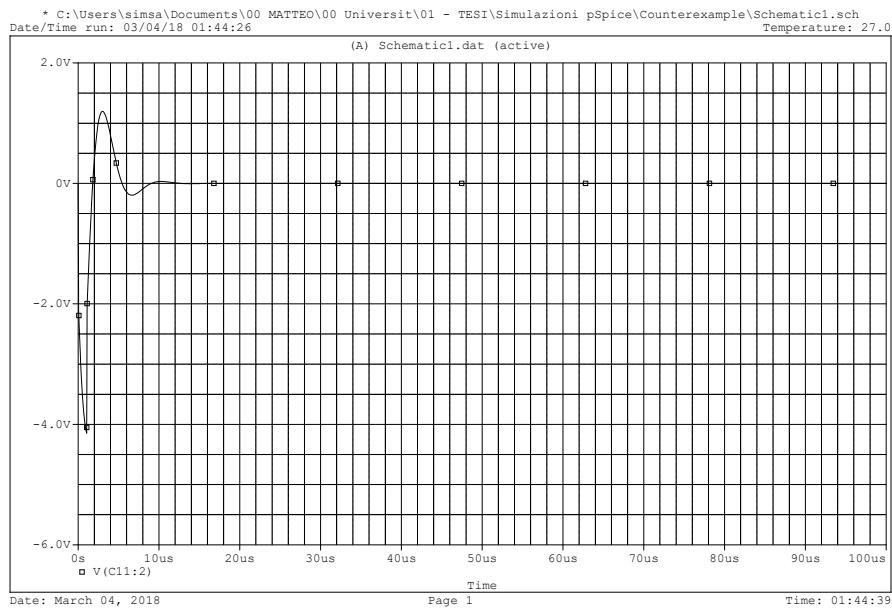


Figura 5.44: $K=2$; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

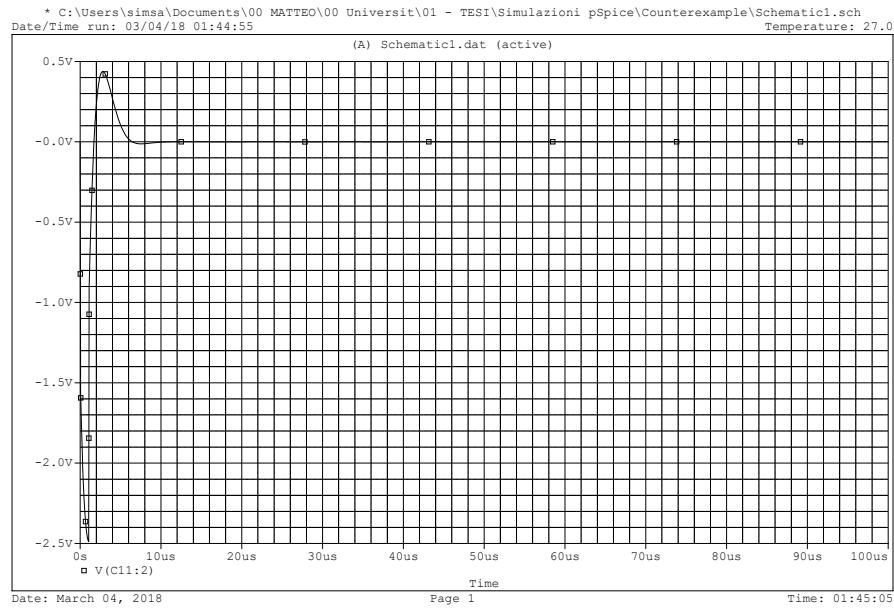


Figura 5.45: K=3; Step ceiling = 50ns

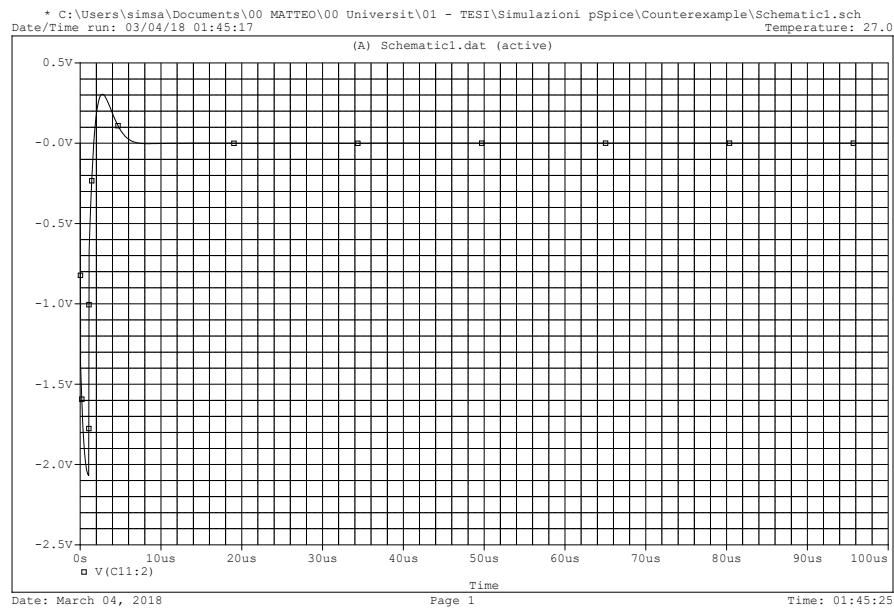


Figura 5.46: K=4; Step ceiling = 50ns

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

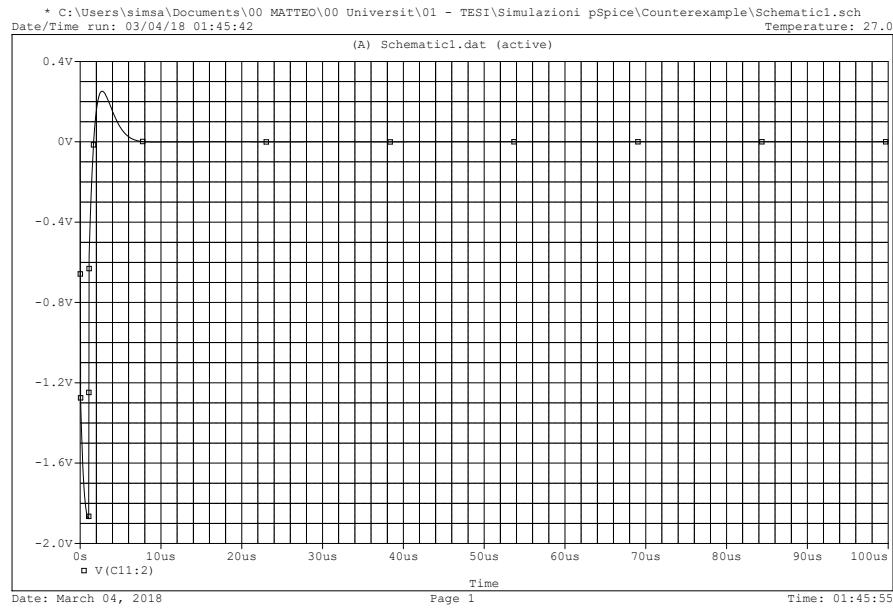


Figura 5.47: K=5; Step ceiling = 50ns

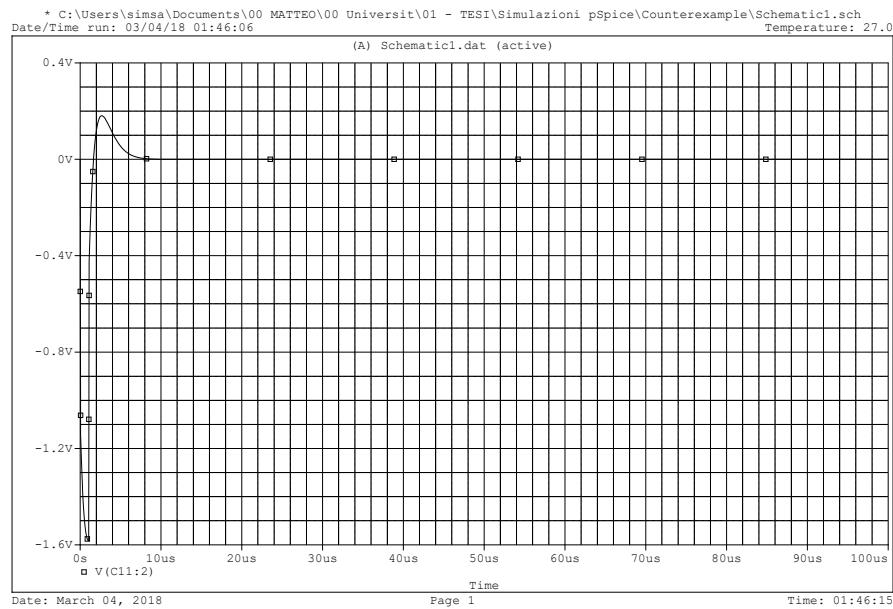


Figura 5.48: K=10; Step ceiling = 50ns

5.2 Il circuito

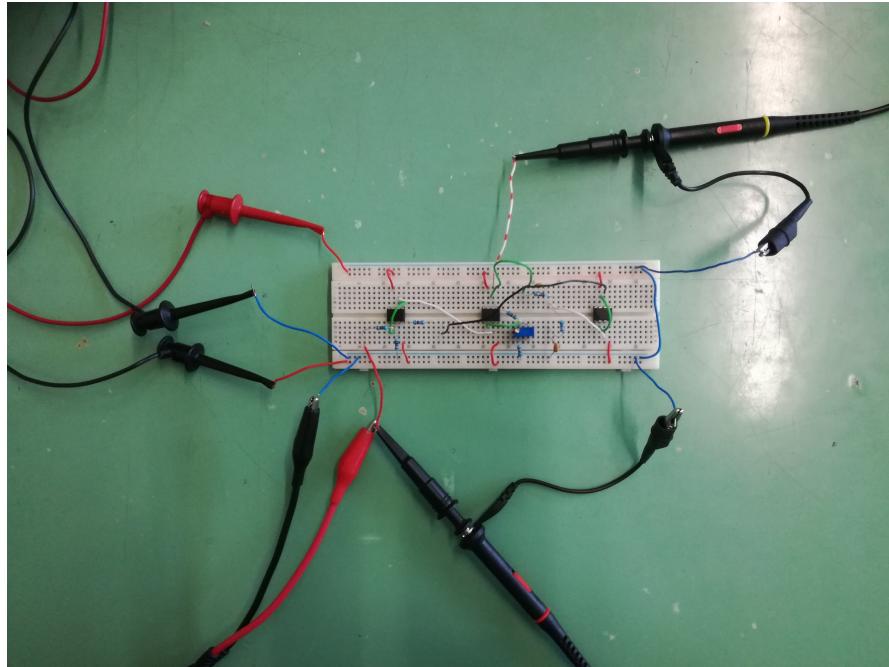


Figura 5.49: Il circuito reale, realizzato su breadboard

Anche in questa sezione ricordiamo che qualora il lettore stesse visualizzando l'elaborato in formato pdf, per la visualizzazione corretta dei grafici delle risposte nel tempo si consiglia un fattore di zoom del 150% o superiore.

Il circuito è stato realizzato su breadboard (figura 5.49) con tre operazionali del tipo UA741CP, e collegato come in figura 5.50. Sono stati utilizzati i seguenti strumenti:

- Generatore di segnali GW INSTEK SFG-1013
- Alimentatore duale Ningbo FTZ Hopewell PS23023DL
- Oscilloscopio PeakTech 1265

Le prove sono state eseguite sia senza segnale d'ingresso, sia con segnale in ingresso ad onda quadra di periodo 100ms, ampiezza 1 V e duty-cycle del 10%, in modo da sollecitare il circuito e leggerne la risposta sull'oscilloscopio. Al segnale è stato aggiunto anche un opportuno offset di 1 V in modo che assumesse i valori di 0 V e 1 V, invece di -0.5 V e 0.5 V, replicando quindi l'impulso fornito nelle simulazioni.

I blocchi *S* e *A* della simulazione sono divenuti il blocco *A* di questo circuito: infatti esso fa sia da amplificatore che da sommatore. È immediato

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

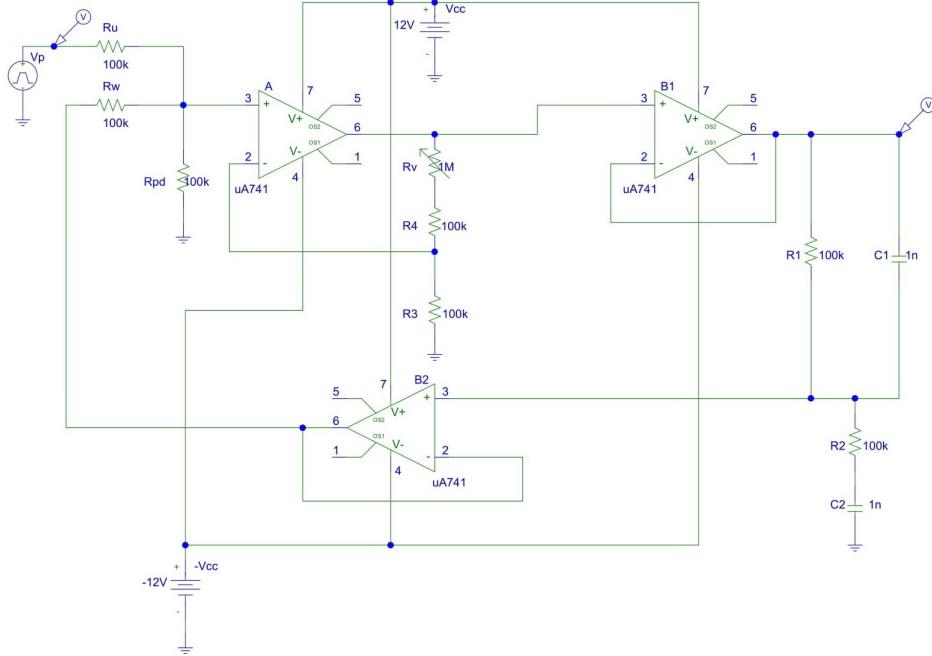


Figura 5.50: Il circuito reale, riprodotto su pSpice 9.1

vedere che, complessivamente, il blocco A ha amplificazione minima di $\frac{2}{3}$ e massima di $\frac{11}{3}$. In questo modo è possibile studiare il comportamento del circuito sia per $K < 1$ che per $K > 1.5$. Il buffer non invertente B_1 e il buffer non invertente B_2 servono ad adattare le impedenze tra un blocco e l'altro, in modo che il blocco composto da R_1 , R_2 , C_1 e C_2 veda a monte un'impedenza d'uscita prossima a zero, e a valle un'impedenza d'ingresso elevata.

Con R_1 ed R_2 pari a $1\text{k}\Omega$ si ottiene un comportamento stabile del circuito per $K < 1$ come da previsioni teoriche e dalla simulazione del circuito in figura 5.4. Cortocircuitando a massa l'ingresso, si ha risposta nulla finchè K non supera l'unità. Superata l'unità, tuttavia, non si innesca come sperato un'oscillazione, bensì si ha una saturazione dell'uscita a $+12\text{V}$. Inoltre, con K anche molto maggiore di 1.5 non si ottiene nuovamente risposta nulla del circuito. Quest'ultimo fatto si spiega facilmente: i sistemi reali hanno sempre poli causati da capacità parassite alle alte frequenze. Ciò fa sì che il diagramma di Nyquist vada inesorabilmente verso l'origine degli assi quando ω tende a $+\infty$. Si osservi ad esempio il diagramma in figura 5.51, tracciato per la f.d.t. 5.1.1 con l'aggiunta di un polo in $s = -10^6$. Per $K > 1$, in un caso come questo, si avrà sempre $\frac{1}{K}$ interno al diagramma di Nyquist, e dunque instabilità del sistema.

Applicando il segnale d'ingresso come precedentemente specificato, si ha

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

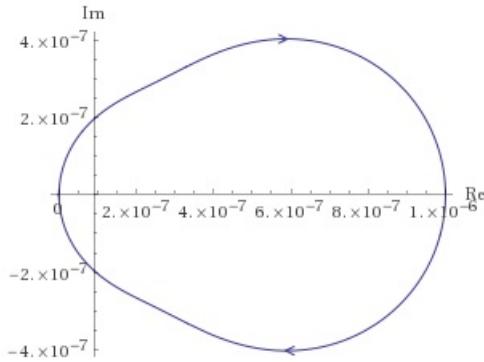


Figura 5.51: Il circuito reale, riprodotto su pSpice 9.1

una risposta analoga a quella di un filtro passa basso (si veda figura 5.52 per il fronte di salita, 5.53 per fronte di discesa). Per K maggiori di 1, nuovamente, si ha uscita costante a 12 V.

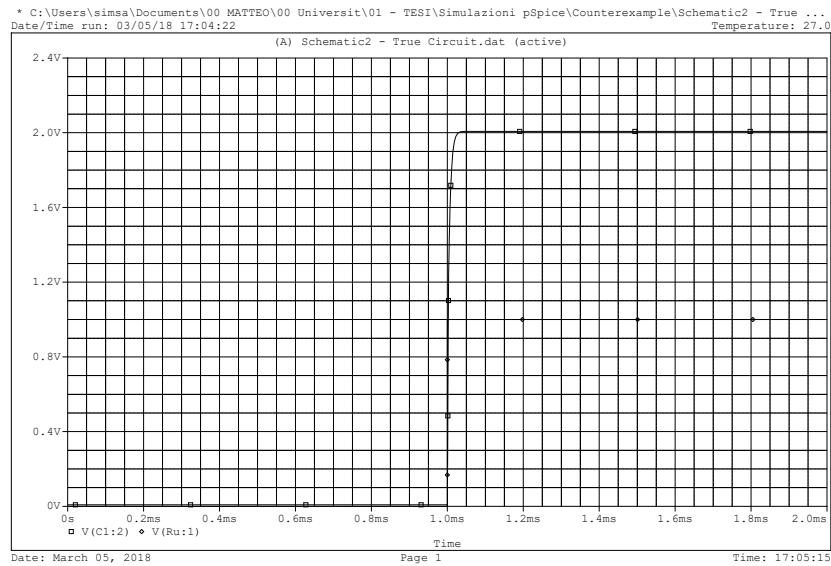


Figura 5.52: Risposta del circuito al fronte di salita dell'impulso per $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $K < 1$

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

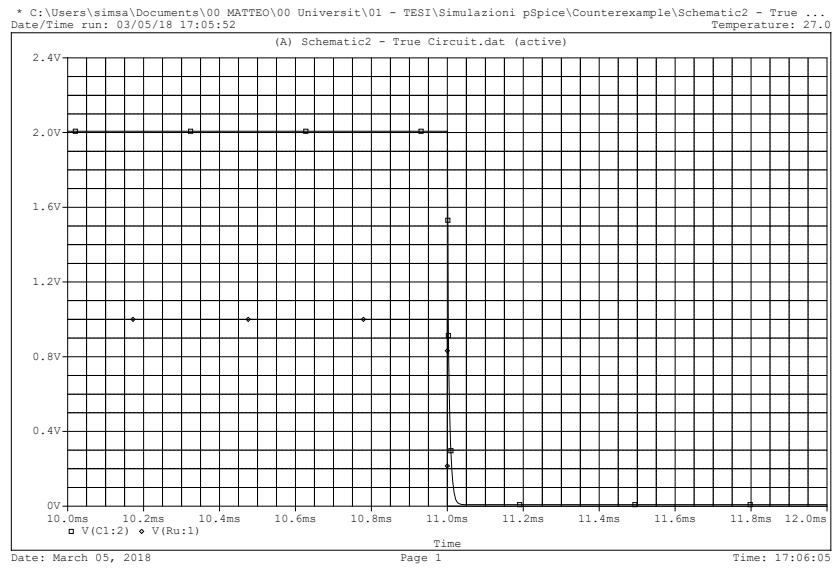


Figura 5.53: Risposta del circuito al fronte di discesa dell'impulso per $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $K < 1$

Con R_1 ed R_2 pari a $100 \text{ k}\Omega$ si ottiene lo stesso comportamento in termini di stabilità, ma si può apprezzare un comportamento oscillatorio. Tuttavia, tale comportamento si presenta per $K < 1$ e per alcuni valori di $K > 1$, mentre nella sezione 5.1 si riporta che l'oscillazione del circuito deve avvenire per $K > 1$ soltanto.

Nella fattispecie, quando $R_v + R_4$ è pari a $185 \text{ k}\Omega$, ossia $K = 0.95$, si osserva un andamento del tipo riportato in figura 5.54 in risposta al fronte di discesa dell'impulso in ingresso. Inoltre, togliendo l'offset dal segnale d'ingresso e aumentando $R_v + R_4$ a $210 \text{ k}\Omega$, arrivando dunque a $K = 1.03$, si osserva l'insorgere di un'oscillazione ben più evidente (vedi figure 5.55 e 5.56).

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO



Figura 5.54: Risposta del circuito al fronte di discesa dell'impulso per $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, $K < 1$

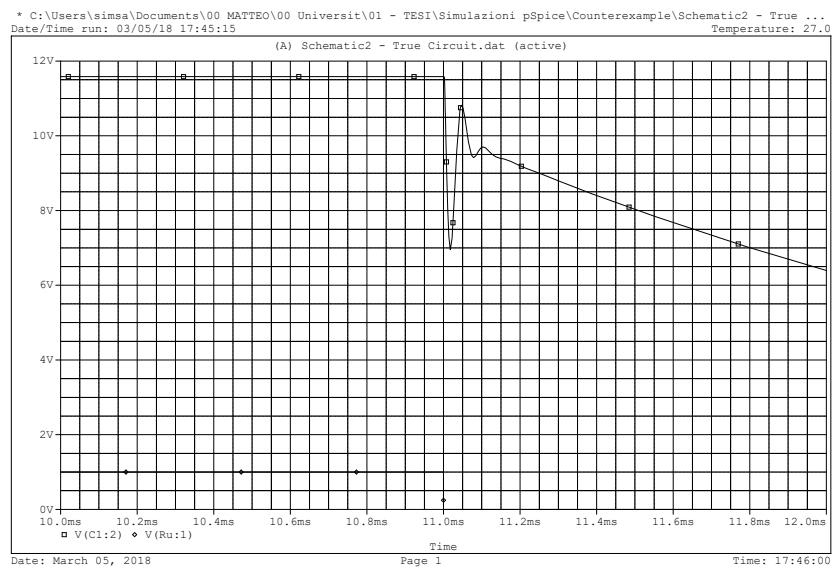


Figura 5.55: Risposta del circuito al fronte di discesa dell'impulso per $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, $K = 1.03$

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

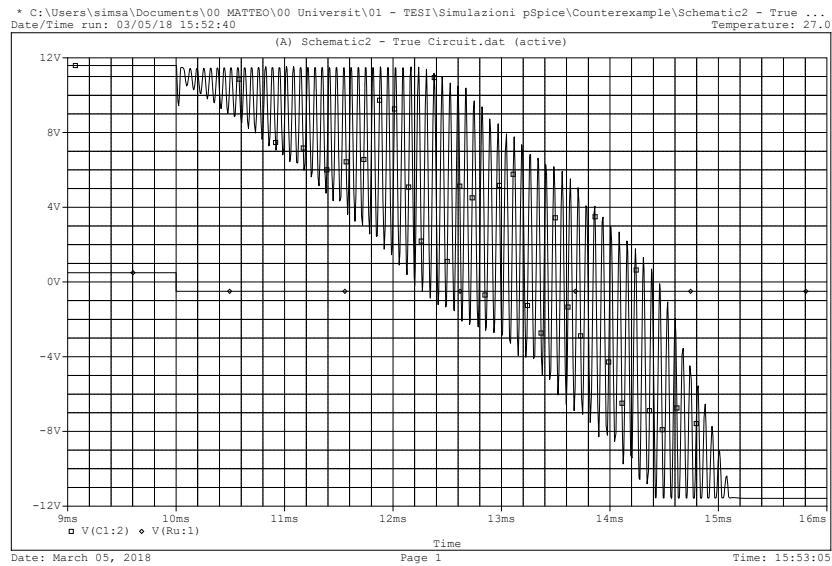


Figura 5.56: Risposta del circuito al fronte di discesa dell'impulso senza offset per $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, $K = 1.03$

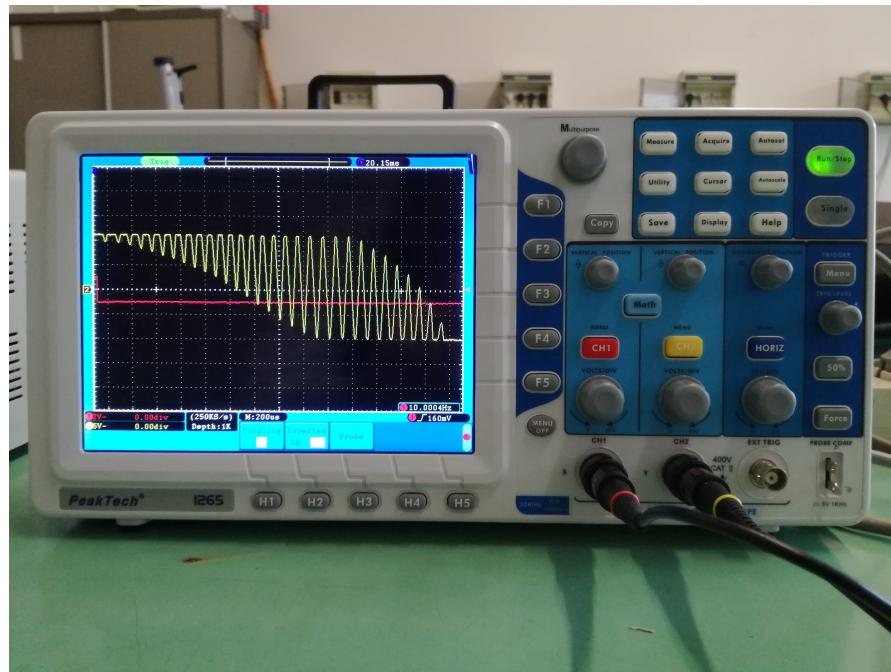


Figura 5.57: Risposta del circuito al fronte di discesa dell'impulso senza offset per $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, K di poco superiore a 1, visualizzata sull'oscilloscopio in laboratorio

CAPITOLO 5. UN CONTROESEMPIO

Il discostamento del comportamento del circuito da quello previsto in 5.1 può essere dovuto a vari fattori. Innanzitutto, le oscillazioni che si riescono a visualizzare sono sempre sommate ad esponenziali decrescenti che si possono associare alla scarica dei condensatori. In particolare, si osservi figura 5.56. In essa appare evidente che il clipping introdotto dagli amplificatori operazionali occorre troppo presto, essendo il valore medio della sinusoide molto elevato. Di fatto, il duty-cycle del segnale onda quadra è troppo alto, seppure fosse il minimo consentito dal generatore di segnali. Per prove future, si rende necessario lo sviluppo di un generatore di impulsi di durata ridotta. Questo si può realizzare inserendo in cascata al generatore di segnali un semplice derivatore, seguito da un raddrizzatore che elimini i picchi negativi.

In secondo luogo, sarà necessario scegliere una più affidabile tecnica realizzativa del circuito. Al di là del già discussso effetto delle proprietà passa basso degli amplificatori reali, il sospetto è che le capacità parassite introdotte dal montaggio su breadboard siano tali da modificare sensibilmente il comportamento del sistema.

Capitolo 6

Feedback positivo, instabilità e frequenza di oscillazione

In questo capitolo analizzeremo diversi circuiti, il loro feedback e instabilità e la loro risposta nel dominio della frequenza per confrontare i risultati con il criterio di Barkhausen e ottenere le condizioni sufficienti per l'oscillazione.

6.1 Ponte di Wien

L'oscillatore Ponte di Wien è un oscillatore comunemente usato, specialmente nei generatori di frequenza audio commerciali.

6.1.1 Circuito 1

L'oscillatore Ponte Wien, utilizza un circuito risonante nella rete di retroazione B, come mostrato nella parte blu della figura 6.1 e una rete A come amplificatore di guadagno no invertente, parte verde della figura 6.1. La funzione di trasferimento ha due poli e feedback positivo.

A partire del schema del ponte di Wien:

$$A = 1 + \frac{R2}{R1} \quad (6.1.1)$$

E la rete di feedback è formata da un circuito risonante RC dove:

$$Vi = Vo \cdot \frac{R||(-jXc)}{(R - jXc)||R||(-jXc))} con Xc = \frac{1}{\omega c} \quad (6.1.2)$$

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

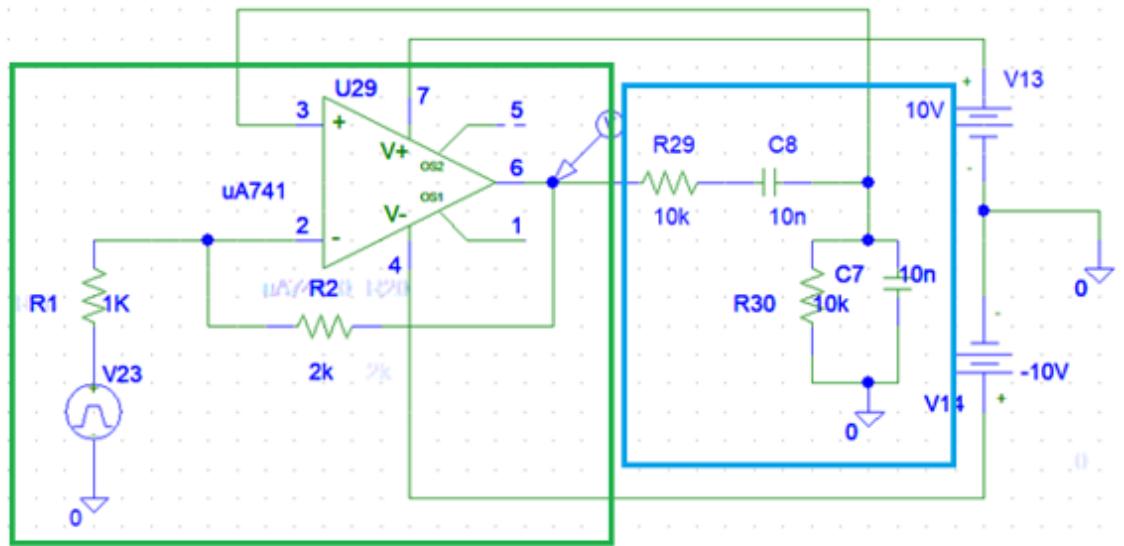


Figura 6.1: Schema del ponte di Wien

Il risultato della funzione di trasferimento è:

$$T(s) = \left(1 + \frac{R2}{R1}\right) \cdot \left(\frac{RCs}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1}\right) \quad (6.1.3)$$

Dove il primo termine corrisponde alla rete di guadagno A (s) e il secondo alla rete di retroazione B (s).

La funzione di trasferimento nel dominio della frequenza è data da:

$$T(j\omega) = \left(1 + \frac{R2}{R1}\right) \cdot \left(\frac{RCj\omega}{-R^2C^2\omega^2 + 3RCj\omega + 1}\right) \quad (6.1.4)$$

Applicando il criterio di Barkhausen,

$$T(j\omega) = 1 \quad (6.1.5)$$

$$\phi = -\text{arcotg}\left(\frac{3RC\omega}{-R^2C^2\omega^2 + 1}\right) = 0^\circ \quad (6.1.6)$$

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA
DI OSCILAZIONE

il circuito oscilla alla frequenza ω_0 :

$$\operatorname{Im}(T(j\omega)) = 0 \rightarrow 1 - R^2 C^2 \omega^2 = 1 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (6.1.7)$$

Quando:

$$T(j\omega_0) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \geq 1 \rightarrow R_2 \geq 2R_1 \quad (6.1.8)$$

Cioè, quando il loro guadagno è uguale o maggiore di 3, le oscillazioni inizieranno. Facendo riferimento al già citato sulla situazione dei poli, possiamo osservare che per $R_2=2R_1$ ($A=3$), i poli si trovano sull'asse immaginario. Per i valori di A superiori a 3 i poli si troveranno nella metà destra.

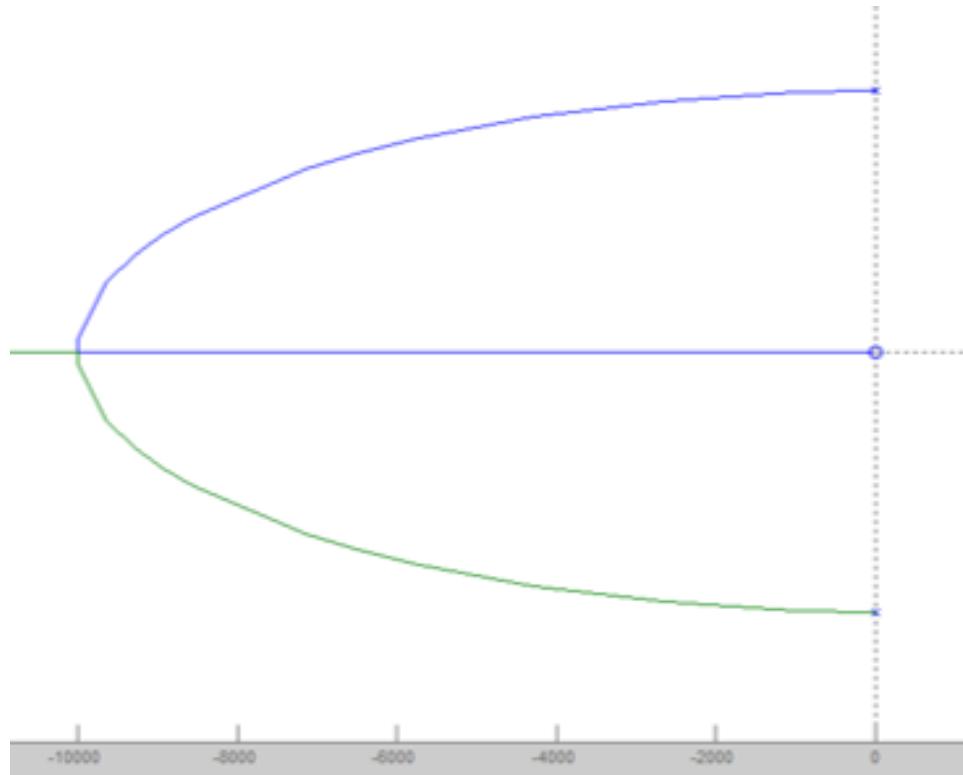


Figura 6.2: Rlocus $A=3$

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

Nel dominio della frequenza, analizzando il diagramma di Nyquist osserviamo che i valori di A maggiori o uguali a 3 circondano il punto critico 1, e quindi si conclude che il sistema è instabile (Figura 6.3). Il circuito oscilla.

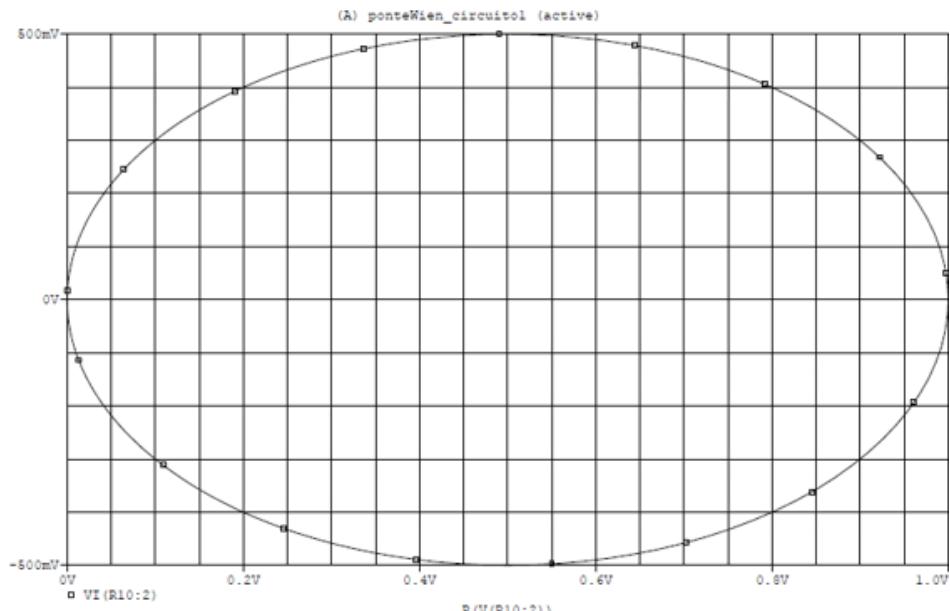


Figura 6.3: Diagramma di Nyquist per $A=3$

Per valori di guadagno inferiori, il diagramma di Nyquist non circonda il punto critico 1 e quindi il sistema è stabile, ovvero il circuito non oscilla.

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

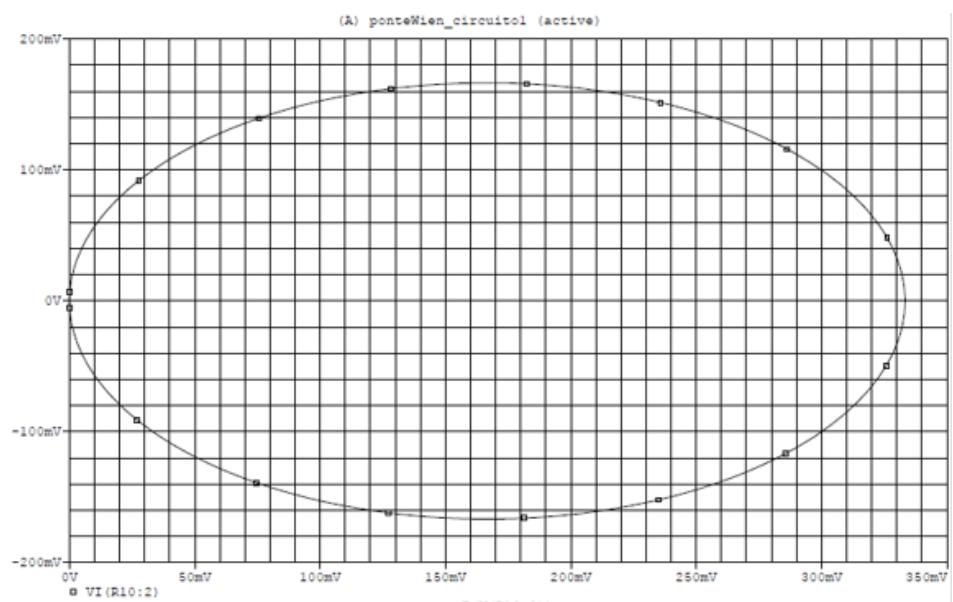


Figura 6.4: Diagramma di Nyquist per $A=1$

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

Analizzando il diagramma di Bode, la rete di feedback è un filtro passabanda, che produce uno sfasamento di 0° alla frequenza ω_0 .

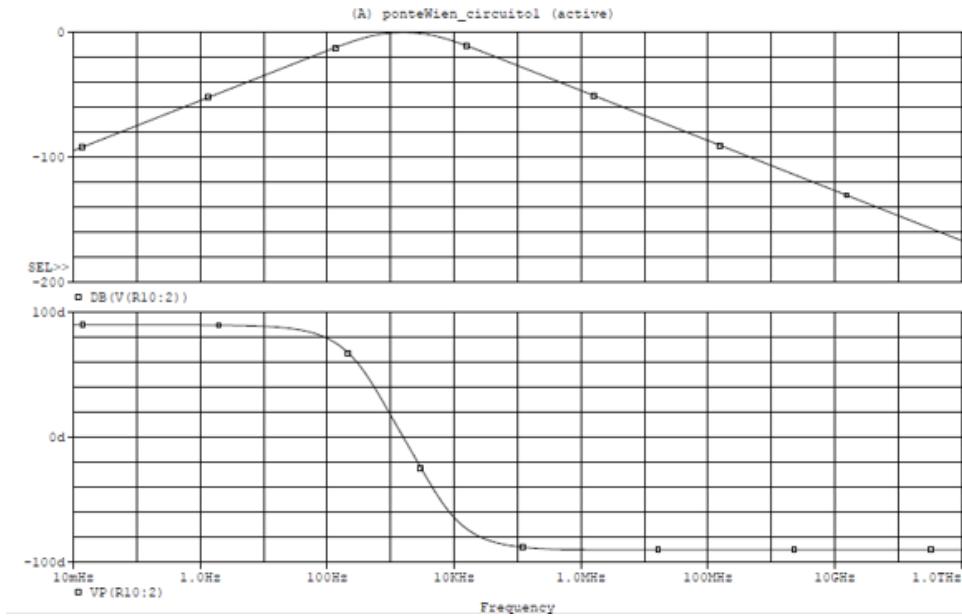


Figura 6.5: Diagramma di Bode per $A=3$

*** I risultati ideali coincidono con le simulazioni con OPAMP.*

Nel diagramma Bode possiamo osservare come la fase varia da 90° a -90° e come la frequenza di taglio (frequenza per ampiezza di 0dB) corrisponde alla frequenza teorica $f_0 = 1/2\pi RC = 1.591 \text{ kHz}$ e quella ottenuta nelle simulazioni, e lo sfasamento è uguale a zero, in modo che il segnale all'uscita del circuito di retroazione abbia uno sfasamento di 0° .

Il segnale all'uscita della rete di retroazione, quando entra attraverso il terminale positivo dell'amplificatore (retroazione positiva e sfasamento di 0°), farà sì che il segnale sia in fase e oscile.

Analizzando intuitivamente il circuito, vediamo che alle basse frequenze il condensatore in serie si comporta come un circuito aperto, quindi l'uscita V_r sarà zero.

Tra questi estremi l'uscita V_r raggiunge un valore massimo, precisamente per la frequenza di risonanza f_0 del circuito. Per questa frequenza il feedback raggiunge il suo valore massimo, come vediamo nel diagramma di bode.

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

6.1.2 Circuito 2

Analizzando lo stesso circuito, Ponte di Wien, ma adesso cambiando i suoi componenti di posto e il segno del feedback abbiamo i seguenti circuiti.

Il circuito della figura 6.6 è formato per un filtro passa-banda eliminata come rete di feedback

$$B(s) = \frac{1 + 2RCs + R^2C^2s^2}{1 + 3RCs + R^2C^2s^2} \quad (6.1.9)$$

e la rete di guadagno A è

$$A = 1 + \frac{R2}{R1} \quad (6.1.10)$$

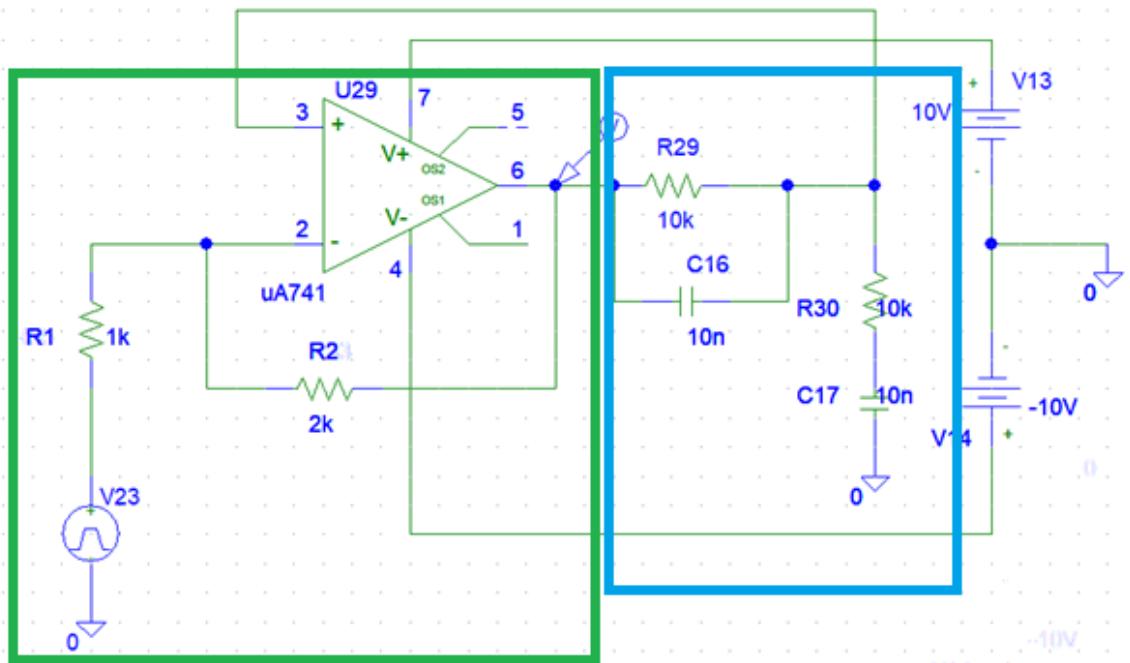


Figura 6.6: Ponte di Wien scambiando i suoi componenti e feedback positivo

La funzione di trasferimento dell'anello aperto del circuito è:

$$T(s) = \left(1 + \frac{R2}{R1}\right) \cdot \left(\frac{R^2C^2s^2 + 2RCs + 1}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1}\right) \quad (6.1.11)$$

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

Dalla funzione di trasferimento e applicando il criterio di Barkhausen otteniamo che per il circuito di oscillare a una frequenza ω_0 , $\omega_0 = 1/RC$, deve essere soddisfatto che $R1 \geq 2R2$. Nelle simulazioni in PSpice, sia ideali che reali, si osserva che il circuito non oscilla per nessun valore di guadagno.

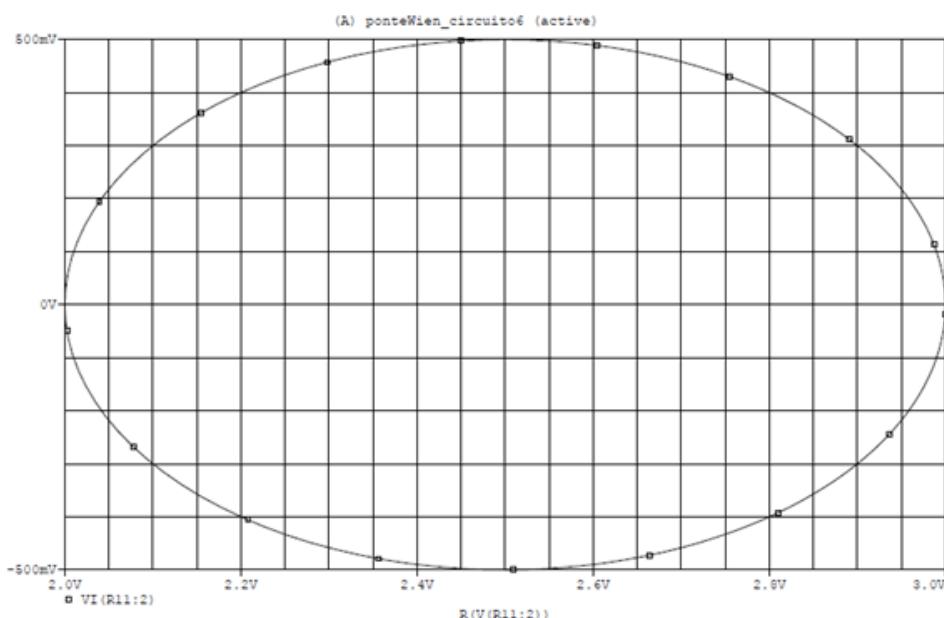


Figura 6.7: Diagramma di Nyquist per $A=3$ del circuito 6.6

Analizzando i diagrammi di Nyquist, osserviamo che per guadagni maggiori o uguali a 3 (guadagni per i quali il criterio di Barkhausen e la condizione di partenza sono soddisfatti), non circonda il punto critico $+1$, di conseguenza, il circuito è stabile e non oscillerà.

Le simulazioni nel tempo coincidono con i risultati ottenuti nell'analisi nel dominio del tempo. Il circuito non oscilla indipendentemente dal fatto che il criterio di Barkhausen sia soddisfatto.

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

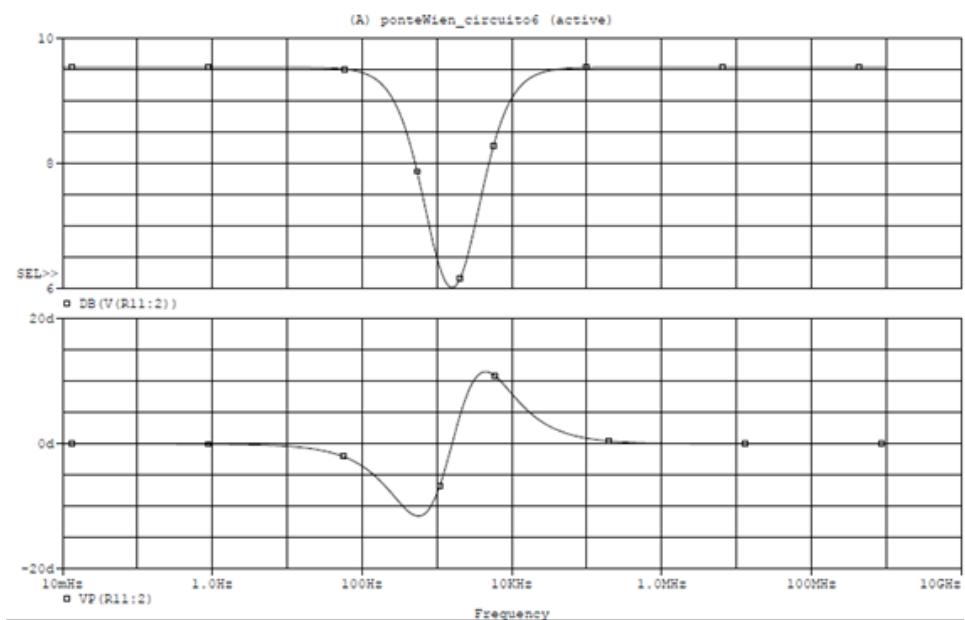


Figura 6.8: Diagramma di Bode del circuito 6.6

Alla frequenza di oscillazione $f=1/(2\pi RC)=1.59$ kHz lo sfasamento è di 0° .

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA
DI OSCILAZIONE

6.1.3 Circuito 3

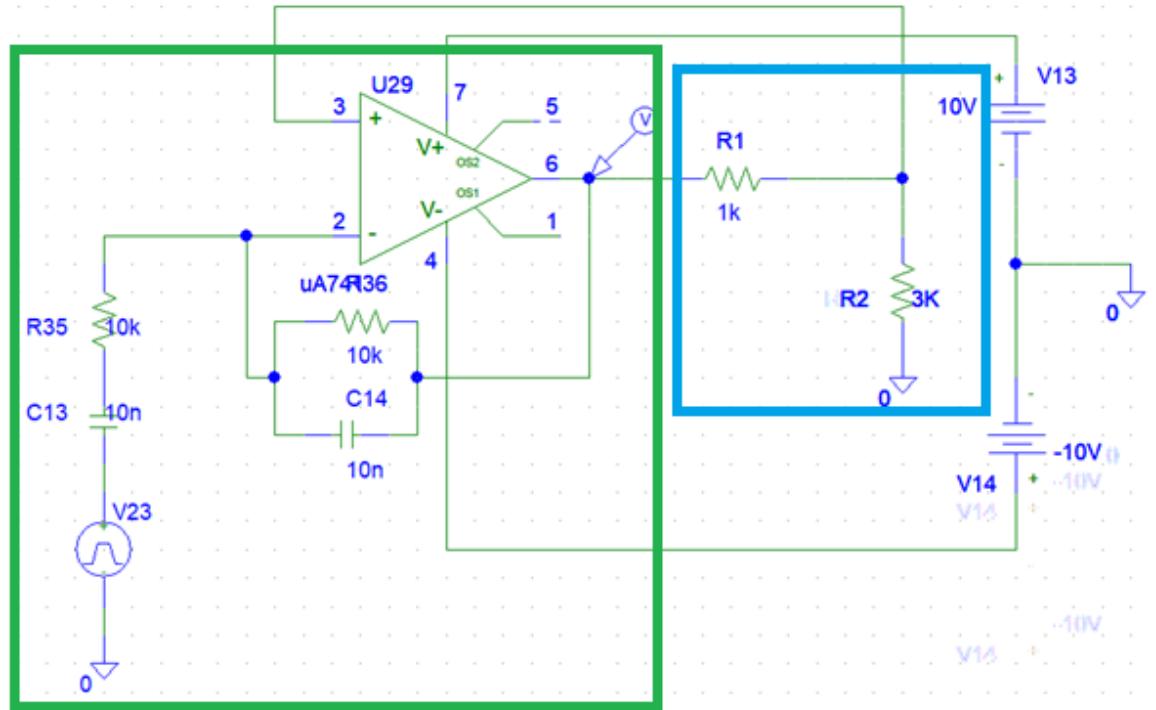


Figura 6.9: Circuito 6.6 con feedback negativo

La funzione di trasferimento di questo circuito dell'anello aperto è:

$$T(s) = \left(1 + \frac{R2}{R1}\right) \cdot \left(\frac{R^2 C^2 s^2 + 3RCs + 1}{R^2 C^2 s^2 + 2RCs + 1}\right) \quad (6.1.12)$$

Nel dominio della frequenza:

$$T(j\omega) = A \cdot \left(\frac{-R^2 C^2 \omega^2 + 3RCj\omega + 1}{-R^2 C^2 \omega^2 + 2RCj\omega + 1}\right) \quad (6.1.13)$$

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA
DI OSCILAZIONE

Applicando il criterio di Barkhausen:

$$|T(j\omega)| = 1 \quad (6.1.14)$$

$$\phi = -\operatorname{arcotg}\left(\frac{-R^2C^2\omega^2 + 1}{-2RC\omega}\right) = -180^\circ \quad (6.1.15)$$

dalla seguente uguaglianza, avviamo che la frequenza di oscillazione è:

$$\operatorname{Im}(T(j\omega)) = 0 \rightarrow 1 - R^2C^2\omega^2 = 0 \rightarrow \omega_0 = 1/RC \quad (6.1.16)$$

$$T(j\omega_0) = \left(1 + \frac{R2}{R1}\right) \cdot \left(\frac{-\frac{R^2C^2}{R^2C^2} + 3\frac{RC}{RC}j + 1}{-\frac{R^2C^2}{R^2C^2} + 2\frac{RC}{RC}j + 1}\right) \geq 1 \rightarrow R2 \geq 2R1 \quad (6.1.17)$$

e che il circuito oscilla quando il guadagno sia $A \geq 3/4$.

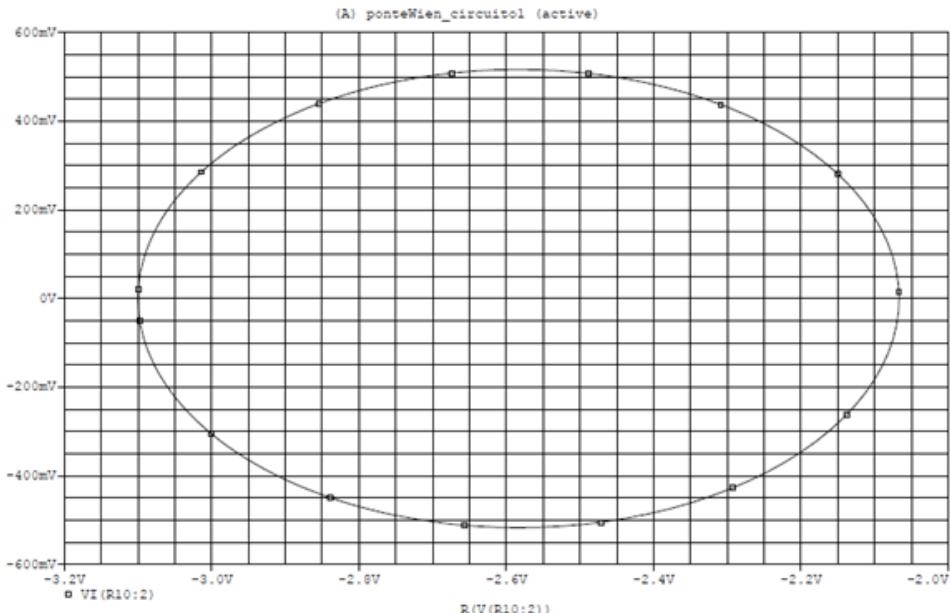


Figura 6.10: Diagramma di Nyquist per $A=3/4$ del circuito 6.9

Analizzando il diagramma di Nyquist, per valori di guadagno superiori a $3/4$ notiamo che questo circonda il punto critico -1 e perciò il sistema

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

oscilla. Per valori menori, il circuito non oscila e il suo diagramma di Nyquist non circonda il punto critico. Il sistema è stabile., non si produrrà nessuna oscillazione.

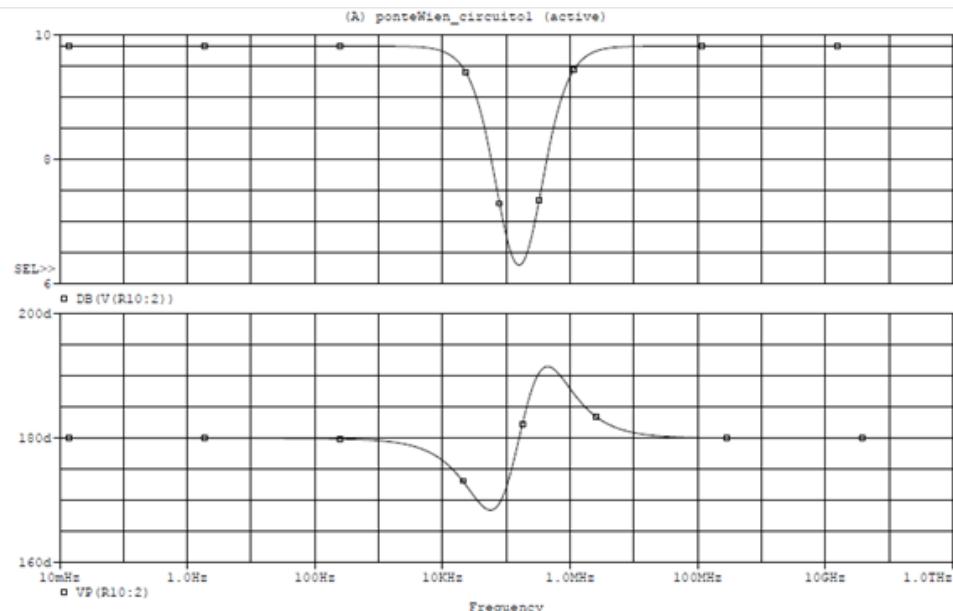


Figura 6.11: Diagramma di Bode per $A=3/4$ del circuito 6.9

Lo sfasamento è 180° a causa di la realimentazione negativa.

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

6.1.4 Circuito 4

L'oscillatore Wien Bridge, ma di nuovo scambiando i suoi componenti come mostrato nella figura:

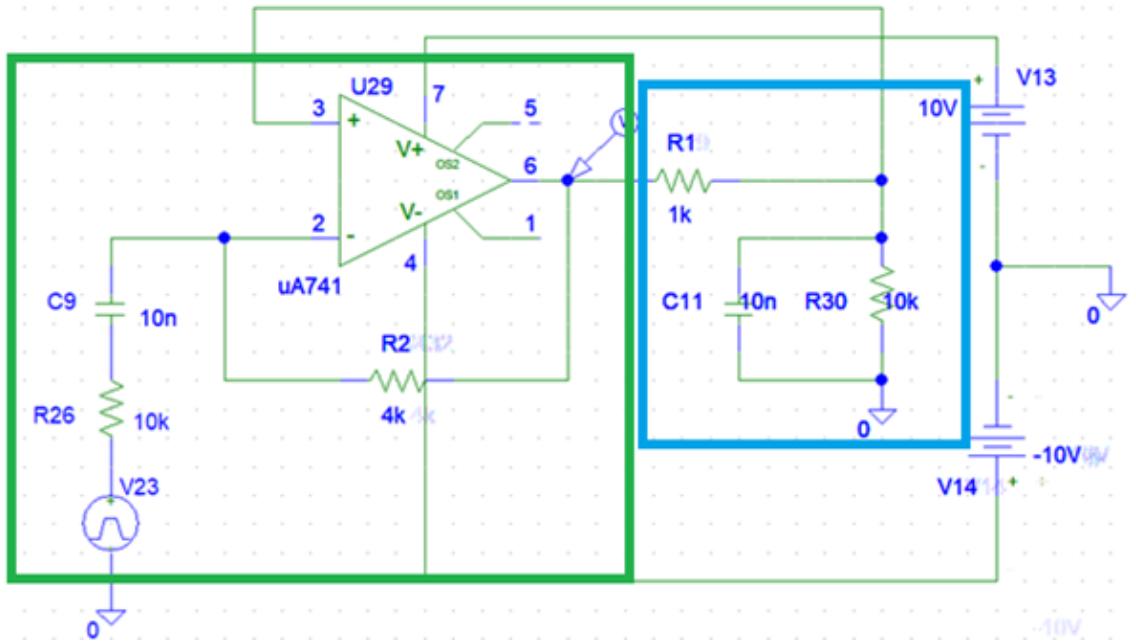


Figura 6.12: Schema del Ponte di Wien scambiando i suoi componenti

La funzione di trasferimento del circuito è:

$$T(s) = \left(1 + \frac{R2Cs}{1 + RCs}\right) \cdot \left(\frac{R^2Cs + R}{(RCs + 1)(R1RCs + R1 + R)}\right) \quad (6.1.18)$$

$$T(j\omega) = \left(1 + \frac{R2Cj\omega}{1 + RCj\omega}\right) \cdot \left(\frac{-R^2C\omega^2 + R}{(RCj\omega + 1)(R1RCj\omega + R1 + R)}\right) \quad (6.1.19)$$

Applicando il criterio di Barkhausen, dobbiamo rispettare la seguente uguaglianza per oscillazione:

$$\frac{Z1}{Z2} = \frac{Z3}{Z4} \rightarrow \frac{R1(1 + RCs)}{R} = \frac{R2Cs}{1 + RCs_0} \rightarrow R1(1 + RCs)^2 = R2RCs \quad (6.1.20)$$

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA
DI OSCILAZIONE

$$R1 + 2R1RCs + R1R^2C^2s^2 = R2RCs \quad (6.1.21)$$

$$R1 + 2R1RCj\omega - R1R^2C^2\omega^2 = R2RCj\omega \quad (6.1.22)$$

Raggruppando le parti reali e immaginarie otteniamo che:

La frequenza di oscillazione sarà: $\omega_0=0$ y $R2 \geq 2R1$

I risultati ottenuti dopo le simulazioni con VCV e OPAMP indicano che il sistema oscillatorà, ma si saturerà rapidamente.

Analizzando il diagramma di Nyquist, circonda il punto critico +1 quando viene soddisfatta la condizione precedente $R2 \geq 2R1$.

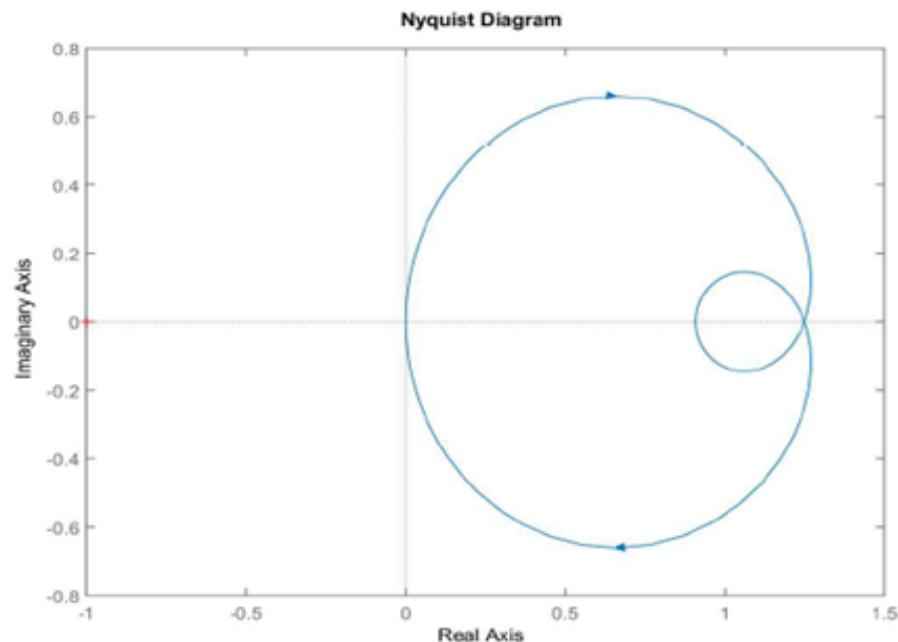


Figura 6.13: Diagramma di Nyquist del circuito 6.12

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

Per quanto riguarda il diagramma di bode, ha una pendenza negativa da 0 a -90° , contribuito dall'ampiezza, e per la frequenza di risonanza $f_0=1/2\pi RC$ lo sfasamento è 0° .

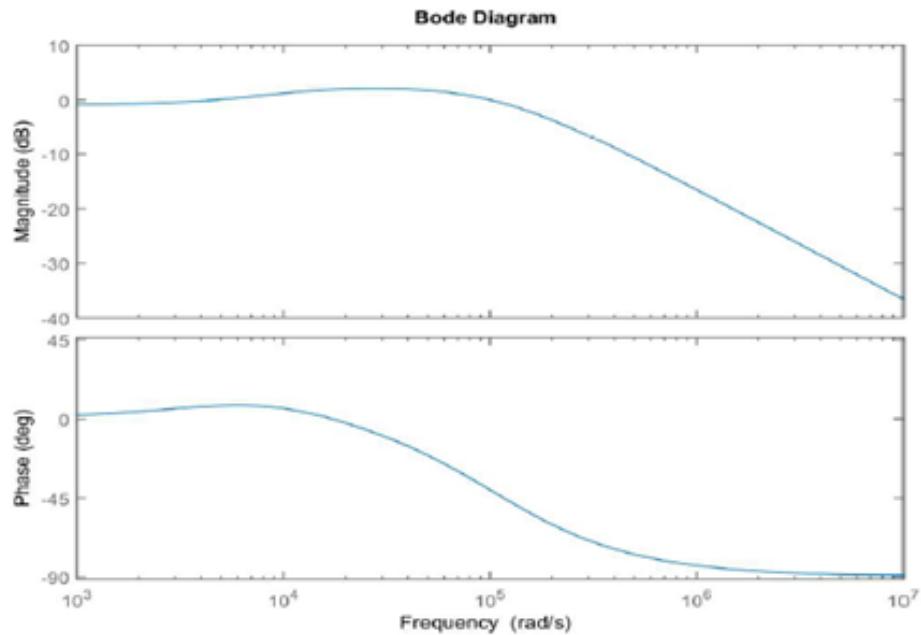


Figura 6.14: Diagramma di Bode del circuito 6.12

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

6.1.5 Conclusione

Come conclusione quindi all'analisi dell'oscillatore Ponte di Wien possiamo concludere che per esso l'oscillazione, indipendentemente dalla connessione dei suoi componenti, deve soddisfare i seguenti requisiti:

1. Il criterio di Barkhausen ci dà un risultato teorico del valore del guadagno per l'oscillazione del circuito, ma questo non è sempre vero. Inoltre, questo criterio ci serve solo idealmente poiché in pratica vogliamo che i poli si trovino nella metà destra, a causa dell'impossibilità di posizionare i poli nell'asse complesso.

Se il feedback è positivo, il segnale all'uscita della rete di retroazione B deve avere un sfasamento di 0° e -180° in caso di feedback negativo.

2. Il diagramma di Nyquist dovrebbe circondare il punto critico 1 in senso orario.
3. La fase del diagramma di Bode deve avere una pendenza negativa.

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

6.2 Phase shift

Successivamente, analizzeremo lo sfasamento o l'oscillatore phase-shift con 3 poli, che oscilla con feedback negativo e non con feedback positivo.

Ciò è dovuto al fatto che la rete di retroazione $B(s)$ introduce uno sfasamento di -180° (60° per ogni RC). Pertanto, il segnale sinusoidale con frequenza ω_d ad una certa ampiezza all'ingresso della rete di retroazione $B(s)$, si sposterà di -180° all'uscita di questo, e più avanti di 180° quando passerà at-traverso il loop $A(s)$ a causa della feedback negativo, tornando alla sua forma originale per conti-nuare a oscillare.

Questo è importante poiché, considerando tutte le frequenze nel segnale di ingresso, se una delle sue frequenze soddisfa le condizioni di $|A(s) \cdot B(s)| \geq 1$ e modulo -180° indefinitamente sarà amplifi-cata a passare attraverso il ciclo in passaggi successivi, ottenendo una risposta divergente e instabi-le.

Pertanto, se alimentiamo il circuito in modo positivo, avremo un segnale sfasato di -180° all'ingresso dell'oscillatore e all'uscita avremo 0V.

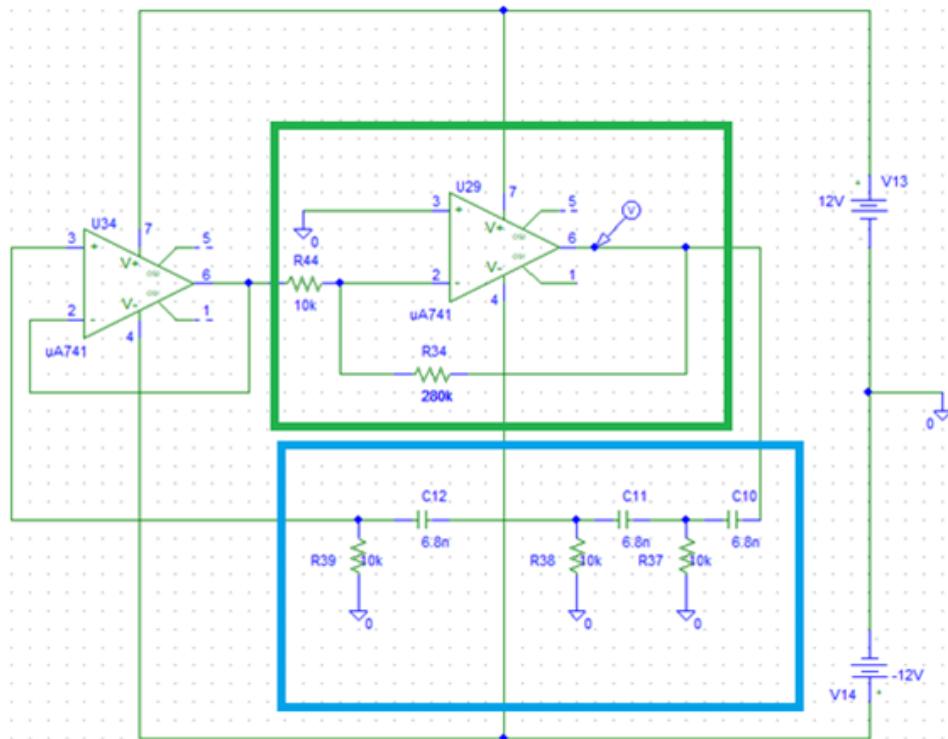


Figura 6.15: Schema del oscillatore Phase shift

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

Analizzando il circuito abbiamo che la sua funzione dell'anello aperto è:

$$T(s) = \left(\frac{A \cdot R^3 C^3 s^3}{R^3 C^3 s^3 + 6R^2 C^2 s^2 + 5RCs + 1} \right) \quad (6.2.1)$$

$$T(j\omega) = \left(\frac{A \cdot R^3 C^3 j\omega^3}{R^3 C^3 \omega^3 - 6R^2 C^2 j\omega^2 - 5RC\omega + j} \right) \quad (6.2.2)$$

Di dove otteniamo la frequenza di oscillazione:

$$\text{Im}(T(j\omega)) = 0 \rightarrow 6R^2 C^2 \omega^2 = 1 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{6RC}} \quad (6.2.3)$$

Sostituendo nella funzione di trasferimento la frequenza di oscillazione ottenuta, il circuito oscillatorà quando il guadagno sia $A \geq 29$ con una frequenza $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{6RC}}$

Analizzando il diagramma di Nyquist, osserviamo che per guadagni superiori a 29, circonda il punto -1 e quindi il sistema è instabile. Viceversa, quando il guadagno è inferiore a 29, il diagramma di Nyquist non circonda il punto critico -1.

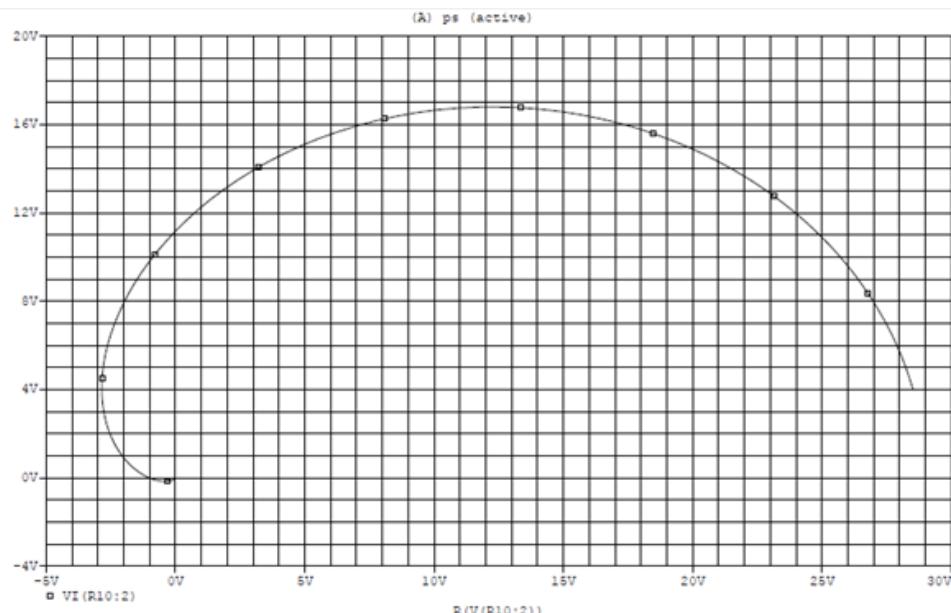


Figura 6.16: Diagramma di Nyquist per $A=29$ del circuito 6.15

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

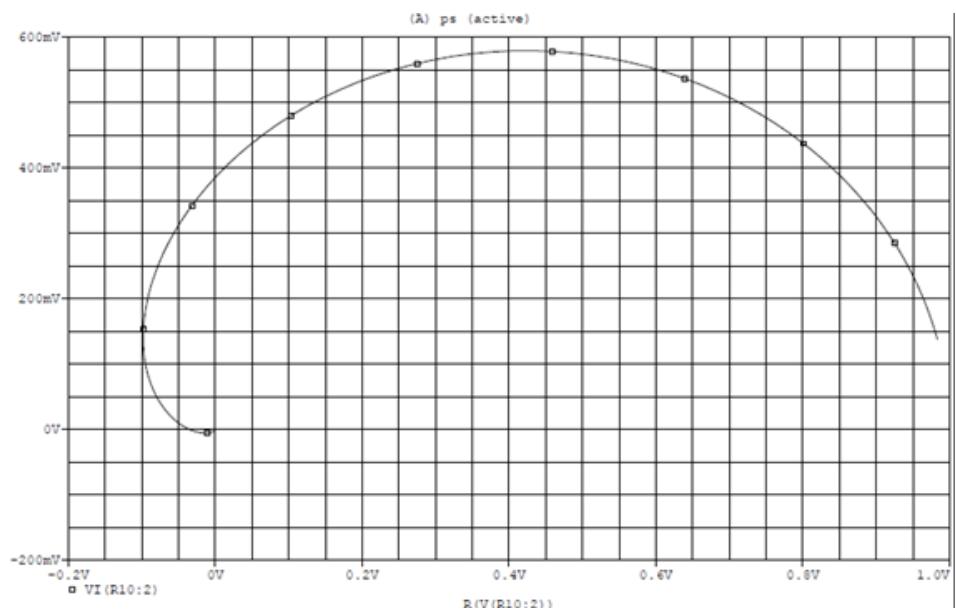


Figura 6.17: Diagramma di Nyquist per $A=1$ del circuito 6.15

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

Analizzando il diagramma di Bode, la fase alla frequenza di oscillazione $f_0=1/(2\pi\sqrt{6}RC)=995.5$ Hz ha un sfasamento da 0° , in relazione all'introduzione di -180° della rete di retroazione e 180° in più rispetto alla retroazione negativa. $(-180+180=0)$.

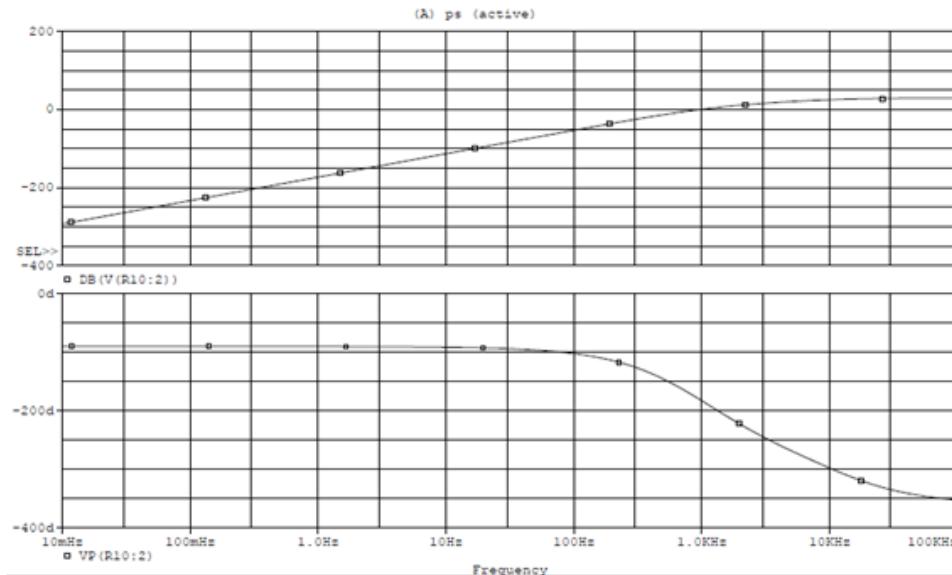


Figura 6.18: Diagramma di Bode per $A=29$ del circuito 6.15

Con realimentazione positiva, lo sfasamento è di -180° a causa di la rete di realimentazione; alla frequenza di oscillazione $f_0=995.5$ Hz, lo safasamento è di -180° .

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

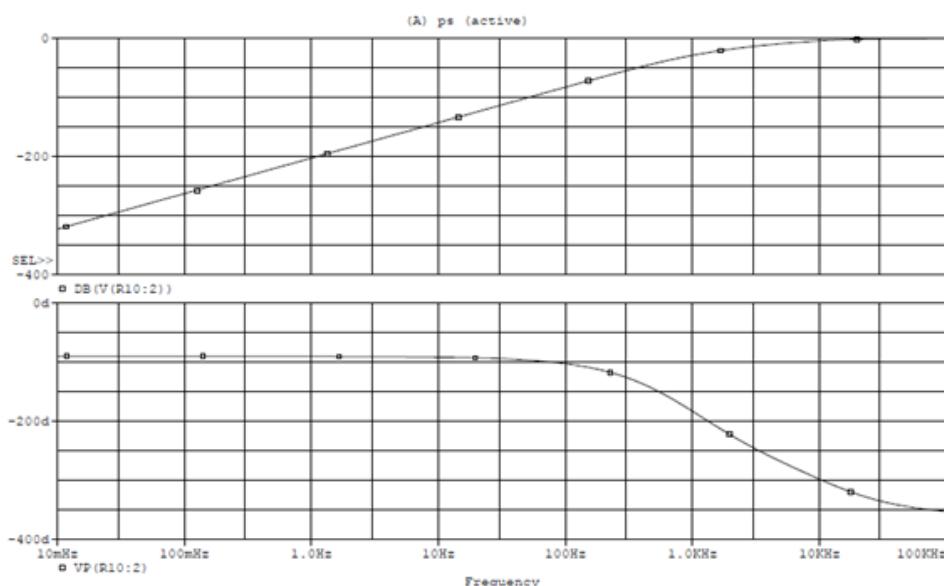


Figura 6.19: Diagramma di Bode per $A=1$ del circuito 6.15

Finora abbiamo analizzato i circuiti ipotizzando che la loro frequenza di oscillazione fosse quella ottenuta dal criterio di Barkhausen.

Tuttavia, analizzando sia le simulazioni reali che quelle ideali, si osserva che la frequenza di oscillazione varia in funzione del guadagno.

Questi risultati potrebbero essere la causa del comportamento effettivo degli amplificatori e dei componenti, ma non dovrebbero esserlo se il circuito viene idealmente analizzato, poiché, come accennato in precedenza, lo scopo del progetto di un oscillatore è di ottenere una frequenza di oscillazione indipendente del suo guadagno, dal ciclo di feedback.

Successivamente, la tabella con i valori del periodo e la frequenza, ottenuti dalla simulazione in PSpice viene mostrata usando un amplificatore ideale per l'oscillatore di sfasamento quando il guadagno del circuito aumenta.

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA
DI OSCILAZIONE

A	T [s]	f=1/T [Hz]
29	1.031e-3	970.628
30	1.085e-3	921.591
31	1.104e-3	905.371
32	1.123e-3	890.686
33	1.137e-3	878.974
34	1.155e-3	865.456
35	1.319e-3	853.555
45	1.319e-3	758.265
55	1.401e-3	713.852
65	1.583e-3	631.672
75	1.636e-3	611.037
85	1.733e-3	577.027

Figura 6.20: Frequenza del circuito 6.15 VCVS ottenuta con PSpice

** I valori ottenuti sono la media di 10 valori.

Analizzando i diagrammi di bode, si osserva che la frequenza di taglio o la frequenza di crossover, cioè il valore della frequenza quando si verifica il crossover del guadagno ($|A(j\omega) \cdot B(j\omega)| = 1 = 0 \text{ dB}$), corrisponde ai valori precedenti (le frequenze alle quali il circuito oscilla in funzione del guadagno, che difiere della teorica). La frequenza diminuisce per valori più grandi di guadagno, per tanto la frequenza di oscillazione del oscillatore dipende del guadagno e non de la rete di realimentazione come sia ha studiato nel criterio di Barkhausen.

Pertanto, la frequenza di oscillazione dipende dal guadagno del circuito. Analizzando la funzione di trasferimento in anello chiuso,

Dove $F(j\omega)$ è la funzione in anello chiuso:

$$F(j\omega) = \frac{-AR^6C^6\omega^6 + 6AR^2C^2\omega^2 + 5RCj\omega + 1}{-(1+A)R^3C^3j\omega^3 - 6R^2C^2\omega^2 + 5RCj\omega + 1} \quad (6.2.4)$$

$$Im(j\omega) = 0 \rightarrow -(1+A)R^3C^3\omega^3 + 5RC\omega = 0 \rightarrow \omega_01 = 0; \omega_02 = \frac{\sqrt{5}}{RC\sqrt{(1+A)}} \quad (6.2.5)$$

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

I valori ottenuti teoricamente con $\omega_0 = (\sqrt{5}) / (RC\sqrt{1+A})$ sono i seguenti, dove E.assoluto è l'errore assoluto $|Valore\ medio - Valore\ reale| = |f.\simulazioni - f.\teorica|$ e E.relativo è l'errore relativo $|(\text{Errore assoluto}) / (\text{Valore reale})| = (|E.\text{assoluto}|) / (|f.\text{teorica}|)$. L'errore relativo è inferiore a 1 in tutti i casi e i valori di frequenza ottenuti teoricamente sono simili a quelli ottenuti nelle simulazioni VCVS. [Figura 6.21]

Guadagno	f. teorica [Hz]	f. simulazioni [Hz]	E. assoluto	E. relativo [%]
29	955.510	970.628	15.118	1.582
30	939.972	921.628	18.344	1.951
31	925.169	905.371	19.798	2.139
32	911.043	890.686	20.357	2.234
33	897.546	878.974	18.572	2.069
34	884.631	865.465	19.166	2.166
35	872.258	853.555	18.703	2.144
45	771.644	758.265	13.379	1.733
55	699.362	713.852	14.49	2.071
65	644.205	631.672	12.533	1.945
75	600.329	611.037	10.708	1.783
85	564.348	577.027	12.679	2.246

Figura 6.21: Relazione tra frequenza di simulazione e frequenza ottenuta della funzione di trasferimento dell'anello chiuso

Possiamo dire che la frequenza di oscillazione degli oscillatori dipende dalla retroazione positiva o negativa del circuito e quindi dalla funzione di trasferimento ad anello chiuso, dove l'ingresso sarebbe il rumore presente nei componenti del circuito.

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

Di seguito è mostrato lo schema del circuito dettagliato precedente.

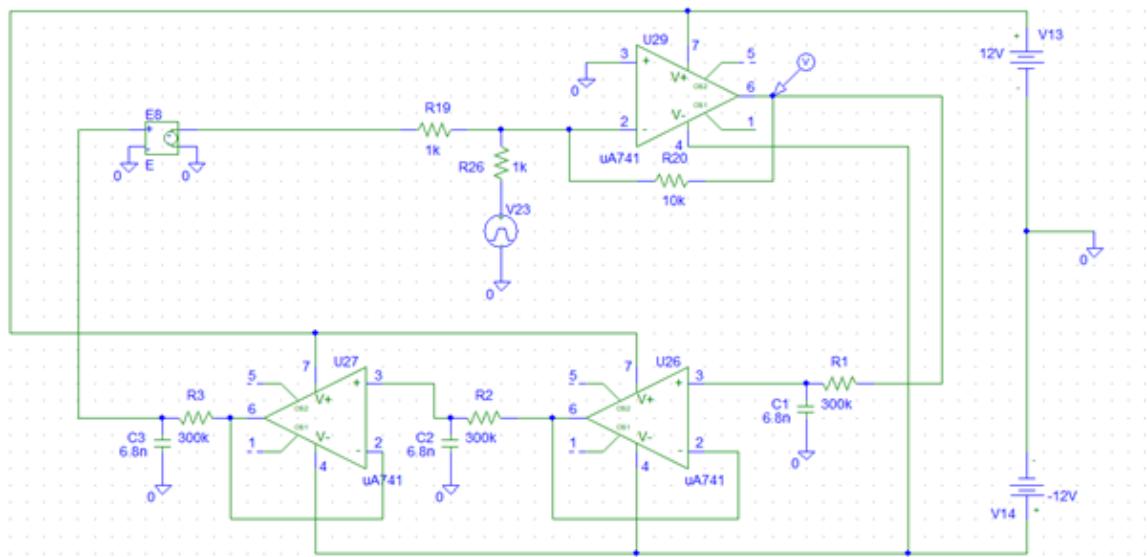


Figura 6.22: Schema del oscillatore a 3 poli

La funzione di trasferimento dell'anello aperto per questo circuito è:

$$T(s) = \frac{A}{R^3 C^3 s^3 + 5R^2 C^2 s^2 + 6RCs + 1} \quad (6.2.6)$$

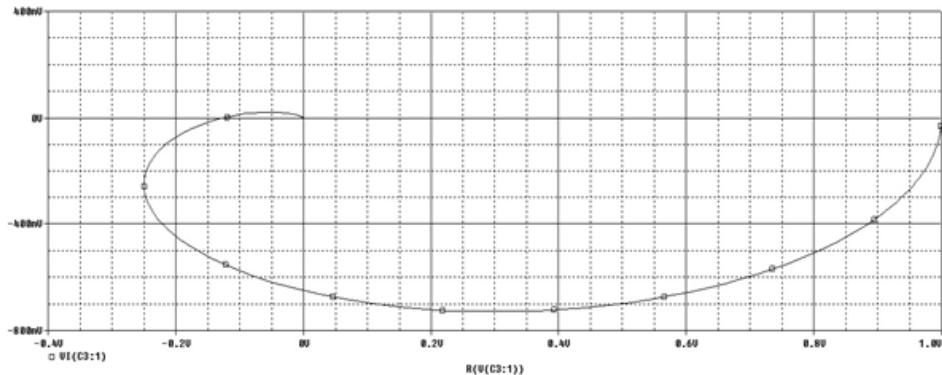


Figura 6.23: Diagramma di Nyquist per A=1 del circuito 6.22

Il diagramma di Nyquist del circuito, sia VCV ideali che OPAMP, conferma le previsioni di stabilità. Instabile quando A è maggiore del valore critico e stabile al contrario.

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

Dai diagrammi di Bode, relativi al diagramma di Nyquist, come prima viene evidenziata l'introduzione di una fase aggiuntiva nella simulazione con OPAMP a causa dei poli ad alte frequenze dovuti agli amplificatori. Nel diagramma Bode VCVs si osserva come ci sia uno sfasamento di 180° dovuto alla rete di feedback, che inverte il segnale.

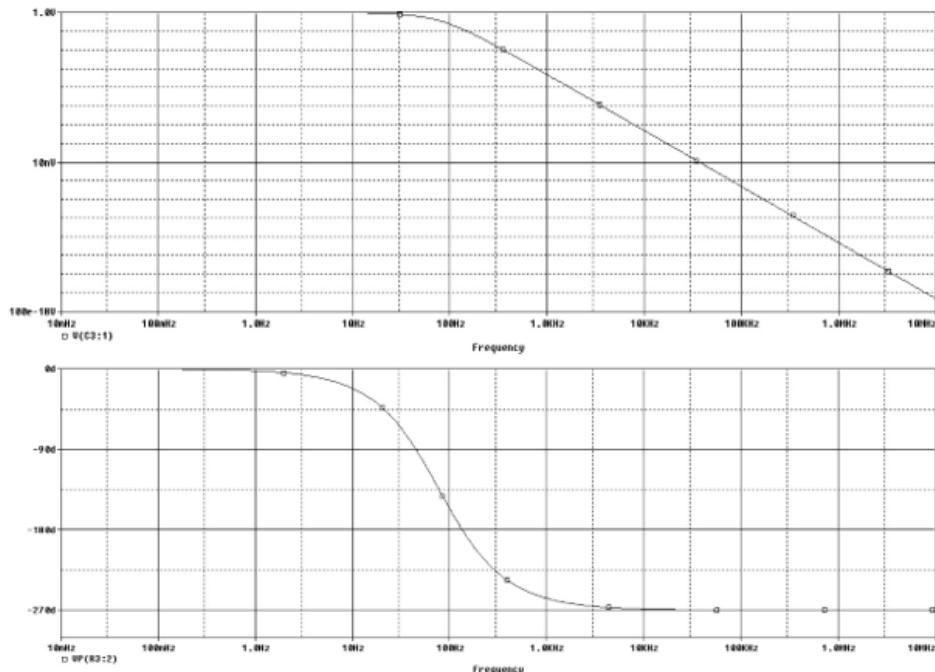


Figura 6.24: Diagramma di bode VCVS per $A=1$ del circuito 6.22

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

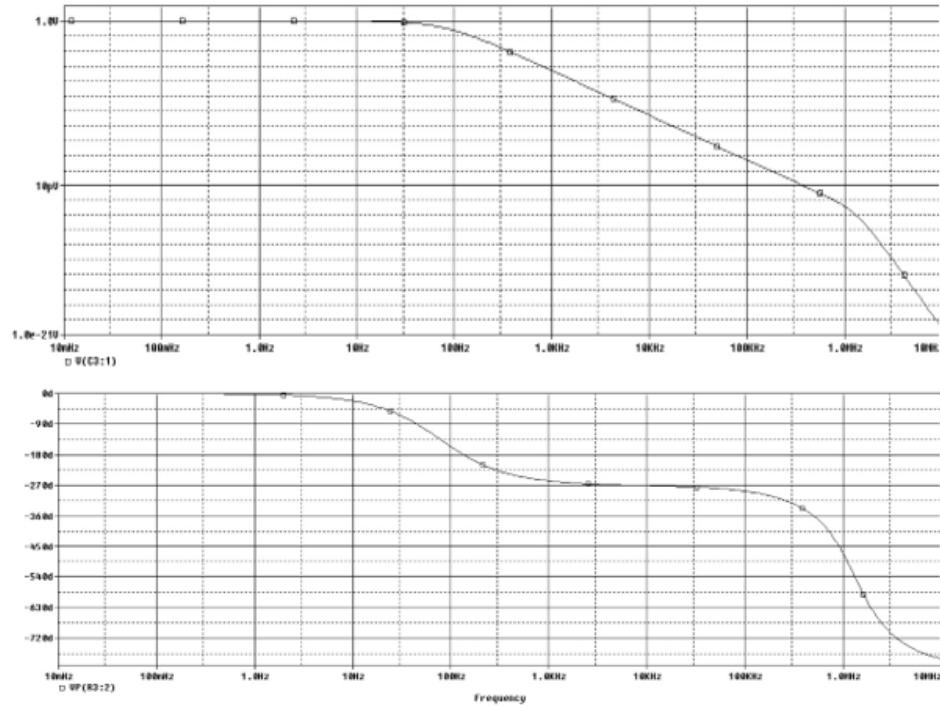


Figura 6.25: Diagramma di bode OPAMP per $A=1$ del circuito 6.22

Come si può vedere, a differenza del diagramma di Bode VCVs, con uno sfasamento di 270° , con il diagramma di bode che utilizza un amplificatore operazionale, lo sfasamento è di 450° poiché vi è un’ulteriore variazione di fase causata dai poli alle alte frequenze a causa degli amplificatori operazionali utilizzati. 2 poli = 1 amplificatore operazionale.

6.3 Sistema condizionalmente stabile

Un sistema è definito condizionalmente stabile quando è stabile per valori critici. Le sue proprietà di stabilità possono cambiare più volte al crescere del guadagno.

Sono sistemi che hanno diversi incroci di fase. Un sistema condizionalmente stabile è uno che diventa instabile quando il guadagno ad anello aperto viene variato tra valori critici e stabile se aumenta o diminuisce.

Il circuito mostrato sotto è un oscillatore condizionalmente stabile, poiché, per un intervallo di guadagno, sarà instabile e quindi oscillatorà. D’altra parte, se il guadagno supera questo margine o è inferiore, il sistema sarà stabile e di conseguenza non oscillatorà. Pertanto, per ottenere le oscillazioni

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

in questo tipo di circuito, sarà necessario progettarlo con un'ampiezza di guadagno il cui valore è compreso tra alcuni valori limite.

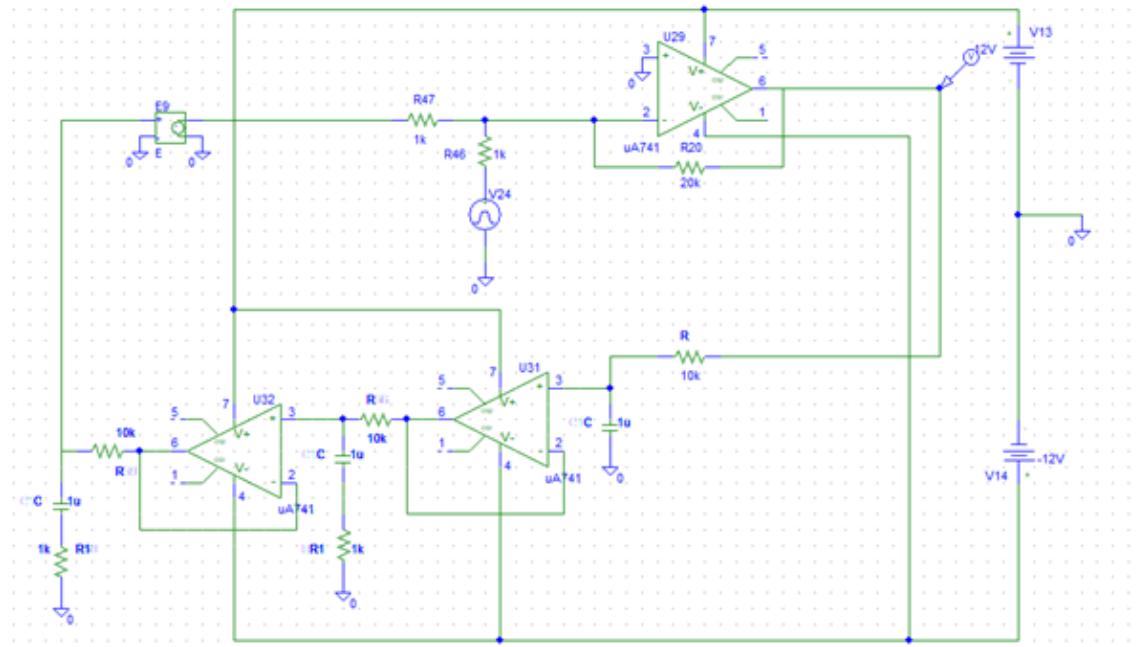


Figura 6.26: Schema di un oscillatore condizionalmente stabile

Si tratta di un circuito di 3 poli, cui funzione di trasferimento dell'anello aperto è:

$$T(s) = \frac{A(R^2C^2s^2 + 2R1Cs + 1)}{(R1^2RC^3 + R1R^2C^3)s^3 + (R1^2C^2 + R^2C^2 + R^2C^2 + 4R1RC^2 + R1R^2C^2 + R^3C^2)s^2 + (2R1C + 3RC + 3R1RC + 4R^2C)s + 3(1+R)} \quad (6.3.1)$$

Il nostro sistema, oscillerà quando il valore del guadagno si trova tra due valori critici $22 < A < 230$.

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

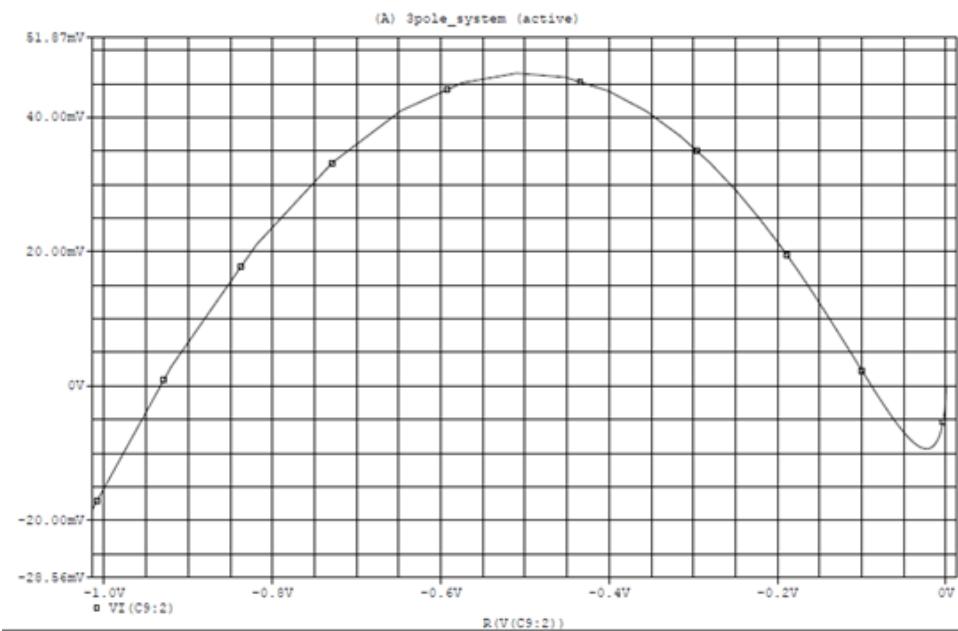


Figura 6.27: Diagramma di Nyquist per $A=20$ del circuito 6.26. Il sistema non oscilla

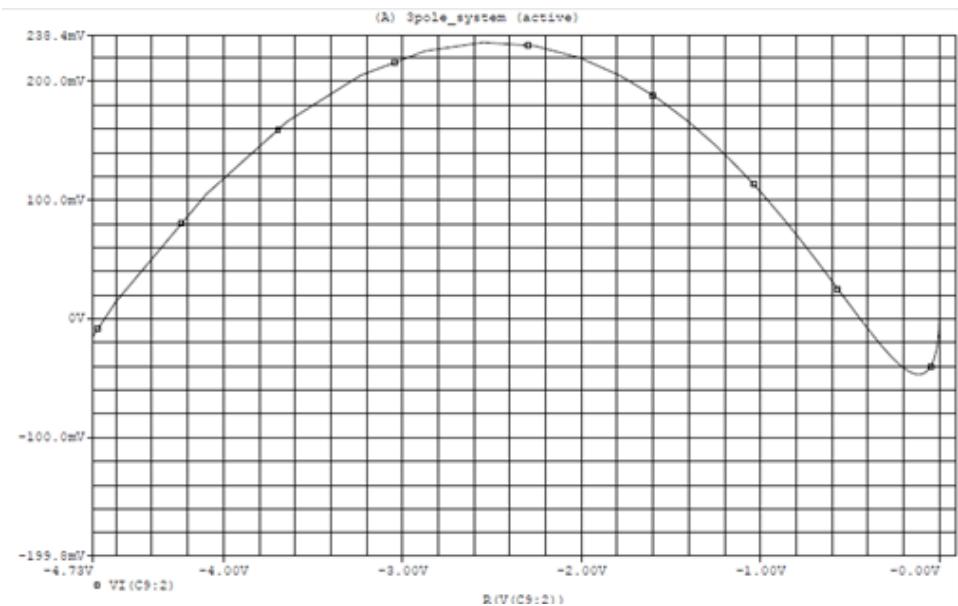


Figura 6.28: Diagramma di Nyquist per $A=100$ del circuito 6.26. Il sistema oscilla

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

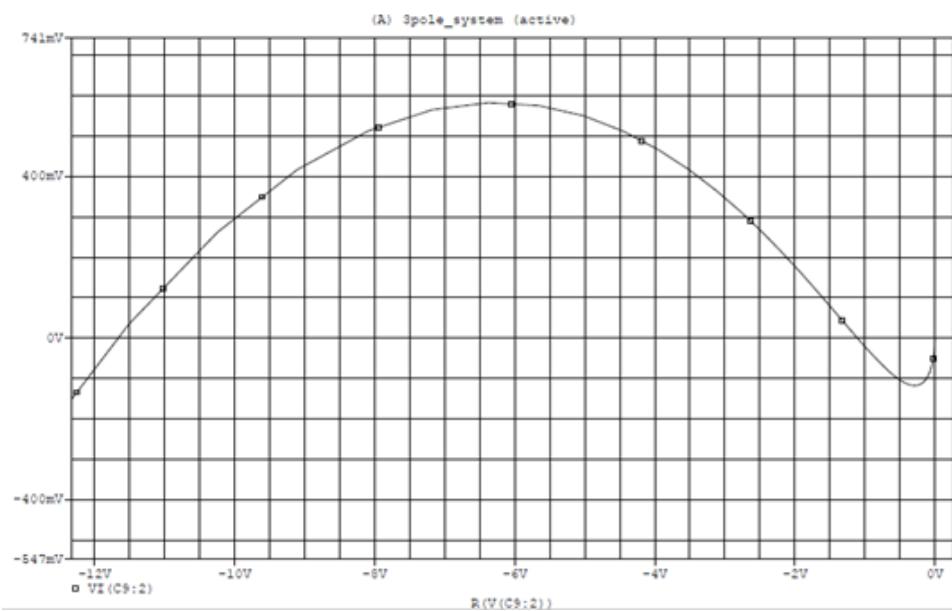


Figura 6.29: Diagramma di Nyquist per $A=250$ del circuito 6.26. Il sistema non oscilla

I risultati mostrati coincidono con ciò che è teoricamente previsto poiché per i valori di guadagno tra 22 e 230 il diagramma di Nyquist circonda il punto critico -1 ed è instabile. Se il guadagno aumenta (esempio $A = 250$) o diminuisce (esempio $A = 20$) il diagramma di Nyquist non circonda il punto -1 e il sistema diventa stabile.

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

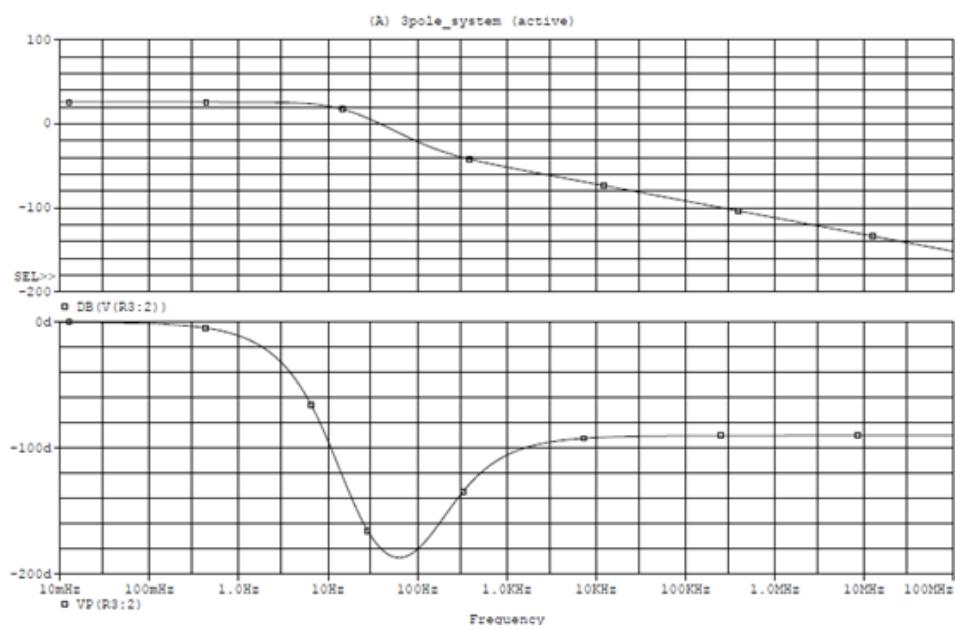


Figura 6.30: Diagramma di Bode per $A=20$ del circuito 6.26. Il sistema non oscilla

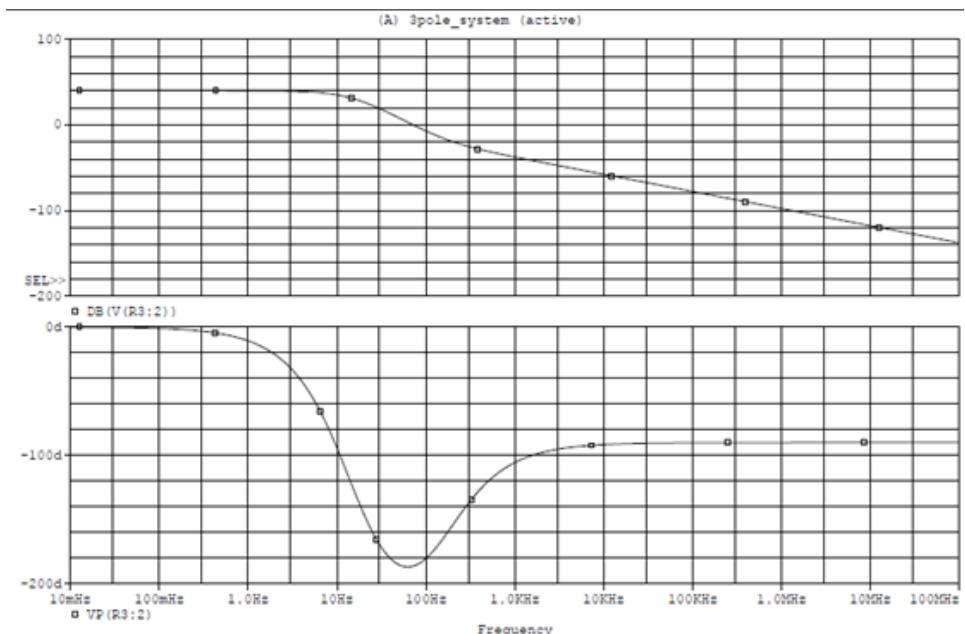


Figura 6.31: Diagramma di Bode per $A=100$ del circuito 6.26. Il sistema oscilla

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

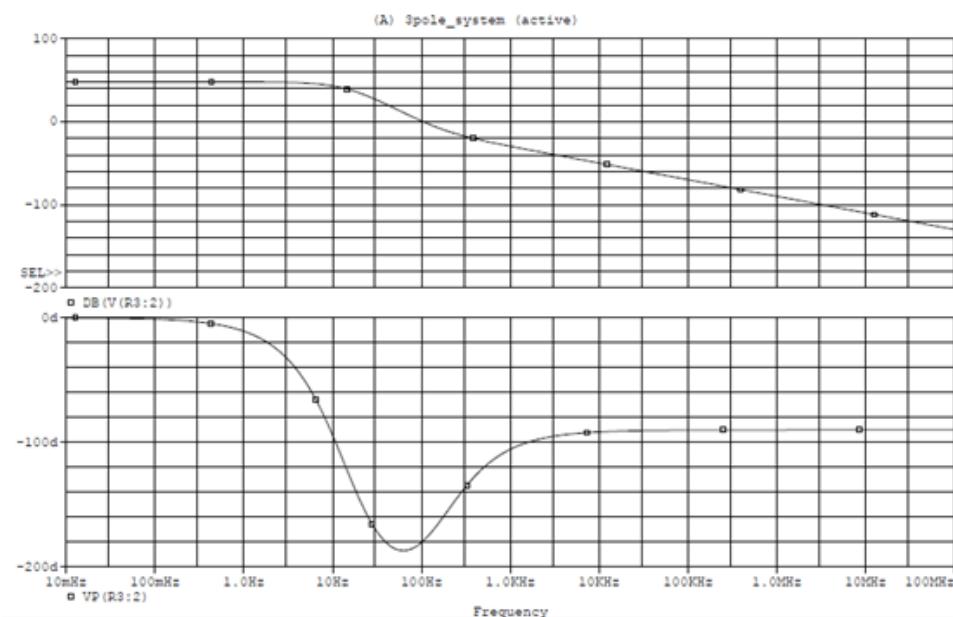


Figura 6.32: Diagramma di Bode per $A=250$ del circuito 6.26. Il sistema non oscilla

Analizzando i diagrammi di Bode, basati sulla traccia di Nyquist e analizzando i margini di guadagno e di fase, possiamo concludere che se il margine di guadagno è negativo e il margine di fase è inferiore a -180° , il sistema è instabile. D'altra parte, se il margine di guadagno è positivo e il margine di fase anche il sistema è stabile.

Come nello studio dell'oscillatore di sfasamento, la frequenza del circuito varia al variare del guadagno: (f: risultati ottenuti con PSpice).

Dalla funzione di trasferimento in anello chiuso, la frequenza di oscillazione dipende dal guadagno e i suoi valori sono simili a quelli ottenuti nelle simulazioni PSpice. Pertanto, possiamo concludere, con questi risultati e

CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA DI OSCILAZIONE

quelli ottenuti nel circuito phase-shift, che la frequenza di oscillazione degli oscillatori dipende dalla retroazione e quindi dalla funzione di trasferimento ad anello chiuso e non solo della rete di feedback che volevamo.

Della funzione di trasferimento che in anello chiuso è:

$$F(s) = \frac{A}{1 + T(s)} \quad (6.3.2)$$

otteniamo:

$$\omega_o = \frac{2R1C + 5RC + 2AR1C}{R1^2RC^3 + 3R1R^2C^3 + R^3C^3} \quad (6.3.3)$$

Nel nostro circuito:

$$\omega_o = \frac{0.068 + 2 \exp^{-3} + A}{1.31 \exp^{-6}} \quad (6.3.4)$$

Nella seguente tabella possiamo osservare i risultati della frequenza delle simulazione e della frequenza teorica ottenuta della funzione di trasferimento dell'anello chiuso e il suo errore, in funzione del guadagno. Come avviamente detto nel oscillatore di displazamento di phase o phase shift, la relazione tra la frequenza ottenuta attraverso la funzione di trasferimento dell'anello chiuso è più prossima a la frequenza di simulazione che la ottenuta dell'anello aperto.

Per tanto, come conclusione possiamo dire che la frequenza di oscillazione dipende del guadagno e del feedback.

**CAPITOLO 6. FEEDBACK POSITIVO, INSTABILITÀ E FREQUENZA
DI OSCILAZIONE**

Guadagno (A)	f. simulazioni [Hz]	f. teorica [Hz]	Errore asso- luto	E. relativo [%]
22	45,051	46,536	1.485	3.191
32	49,980	50,521	0.517	1.130
42	51,282	54,213	2.931	5.723
52	55,865	57,669	1.804	3.128
62	59,135	60,930	1.795	2.946
72	63,291	64,025	0.734	1.146
82	64,935	66,977	2.042	3.048
92	69,930	69,804	0.126	0.181
102	71,428	72,521	1.093	1.507
112	80,424	75,141	5.283	7.031
122	78,740	77,671	1.069	1.376
132	81,301	80,122	1.179	1.471
142	83,333	82,501	0.832	1.008
152	86,206	84,811	1.395	1.644
162	87,7192	87,061	0.658	0.756
172	89,285	89,255	0.03	0.0336
182	92,592	91,395	1.197	1.309
192	94,339	93,487	0.852	0.911
202	96,153	95,533	0.62	0.648
212	98,039	97,536	0.503	0.515
222	99,978	99,499	0.479	0.481

Figura 6.33: Relazione tra le frequenze di simulazione VCVS e la ottenuta della funzione di trasferimento in anello chiuso per il circuito 6.26

Capitolo 7

Analisi in laboratorio

I precedenti circuiti sono stati analizzati in laboratorio.

7.1 Ponte di Wien

Per il circuito oscillatore di Ponte di Wien, i risultati in laboratorio coincidono con quelli teorici e con le simulazioni in PSpice.

Per la sua realizzazione abbiamo usato, come in PSpice, due resistori R di 10K e due condensatori C di 10nF come rete B di retroazione e un amplificatore operazionale UA741 [12], un potenziometro di 100K e una resistenza di 47K (Rete A del circuito).

Il circuito inizia ad oscillare quando il valore del potenziometro è 87 k, con una frequenza di circa 1.6 kHz.

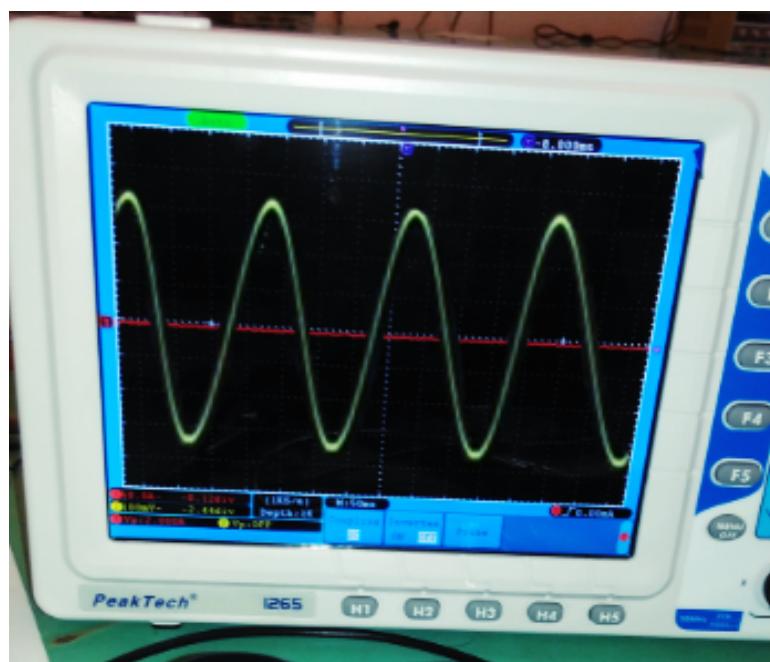


Figura 7.1: Oscillazioni

La saturazione inizia quando il potenziometro è 92K con una frequenza di circa 1.061 KHz.

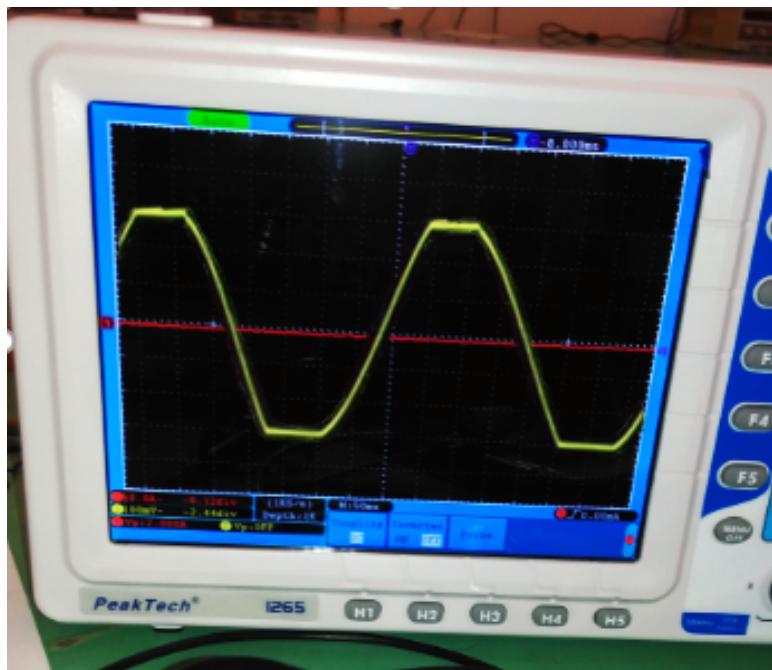


Figura 7.2: Saturazione

Teoricamente, il circuito oscillarà quando il valore del potenziometro sia $2.47\text{ k} = 94\text{ k}$ e la frequenza di oscillazione è 1.59 kHz .

7.2 Phase shift

I valori dei componenti utilizzati in questo circuito oscillatore sono 3 condensatori da 10 nF, 3 resistenze da 6,2 k e un potenziometro da 500 k.

Il circuito di feedback negativo inizia ad oscillare quando il suo guadagno è approssimativamente 38.7

$$A = \frac{\text{Valorepotenziometro}}{\text{Valore}R1} = \frac{240k}{6.2k} \quad (7.2.1)$$

con una frequenza di circa 0.988 kHz.

I risultati ottenuti delle simulazioni con PSpice e OPAMP sono che il circuito inizierà le oscillazioni quando il valore del potenziometro sia 180 k con una frequenza di 970 kHz. Quando il valore del potenziometro è di 240 k la frequenza di oscillazione è 772.5 kHz.

Da questo momento, all'aumentare il valore del potenziometro, l'uscita aumenta in ampiezza e la frequenza diminuisce.

La saturazione inizia per un guadagno di circa 45.16, quando il valore del potenziometro è 280 k. La frequenza del segnale di uscita è 0.880 kHz e la distorsione è molto piccola.

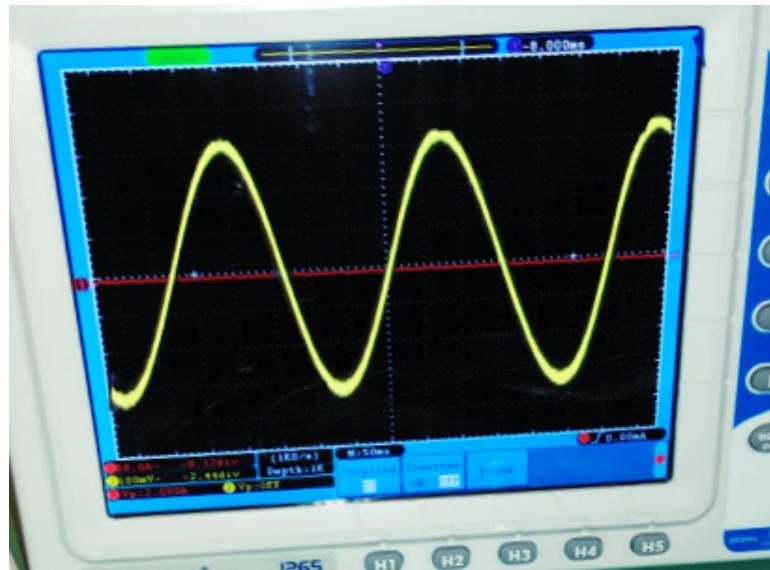


Figura 7.3:

La frequenza di oscillazione ottenuta con PSpice e OPAMP per Rpotenziometro di 280 k è di 772.5 kHz.

Per valori maggiori del potenziometro, 480K, che equivale ad un guadagno teorico di circa 77.419, la frequenza di oscillazione è 0.716311 kHz e la distorsione è maggiore. Il segnale ha un taglio più grande.

I risultati ottenuti teoricamente sono:

- Una frequenza di oscillazione

$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi RC\sqrt{6}} \quad (7.2.2)$$

di circa 1 kHz.

- Il circuito oscillara per $A \geq 29$.

Attraverso simulazioni in PSpice per valori di Rpot = 240 k, l'uscita satura nel tempo e la frequenza di oscillazione è di 1.012 kHz.

Per Rpot = 280 k, la frequenza di oscillazione è di 1.008 KHz e l'uscita satura. I risultati ottenuti sia nel circuito dell'oscillatore di Ponte di Wien che nel circuito Phase Shift sono simili a quelli ottenuti nelle simulazioni. La non uguaglianza tra questi risultati è dovuta alle derive termiche dei componenti, alla non idealità dell'amplificatore e agli alimentatori, ecc.

7.3 Condizionalmente stabile

Non abbiamo osservato alcuna oscillazione in questo circuito. L'introduzione di un seguitore di tensione e la variazione del potenzionmetro non funzionano.

Se cambiamo il valore dei componenti per ottenere oscillazioni, il circuito smette di avere un comportamento condizionalmente stabile. Ciò può essere dovuto alle tolleranze dei condensatori utilizzati, poiché come è osservato nel diagramma di Nyquist la curva che circonda il punto critico -1 è molto piccola.

D'altra parte, il piccolo margine di guadagno per il sistema di essere instabile e oscillare (idealmente tra 22 e 230) potrebbe anche influenzare questi risultati.

Capitolo 8

Una condizione aggiuntiva

Nell'articolo [11] si illustra una possibile condizione necessaria aggiuntiva da affiancare al criterio di Barkhausen affinché un sistema sia oscillante e marginalmente stabile (ossia affinché abbia poli complessi coniugati sull'asse complesso). La condizione è $\frac{d\phi}{d\omega}(\omega_0) < 0$, dove $\phi(\omega)$ è la fase della f.d.t. considerata valutata in $j\omega$, mentre ω_0 è la pulsazione alla quale vale il criterio di Barkhausen. L'analisi svolta in [11] si basa sullo studio del luogo delle radici di alcuni sistemi, e mostra che tutti i sistemi esaminati che oscillino alla frequenza alla quale Barkhausen è soddisfatto, soddisfano anche $\frac{d\phi}{d\omega} < 0$. Viceversa, i sistemi che non oscillano alla frequenza individuata dal criterio di Barkhausen, non soddisfano la suddetta condizione. In questo capitolo si esaminano i diagrammi di Nyquist di sistemi comuni, evidenziando come l'aggiunta di tale condizione, opportunamente modificata, permetta di far funzionare il criterio esteso di Barkhausen in casi in cui esso, in assenza di tale condizione, falliva. Inoltre, si propone un semplice ragionamento fisico a supporto della condizione $\frac{d\phi}{d\omega}(\omega_0) < 0$.

Premettiamo che un sistema retroazionato si dice **a stabilità regolare** se è caratterizzato da un unico valore K_0 tale che il sistema è stabile per $0 < K < K_0$ e instabile per $K > K_0$. Si parla invece di sistema **a stabilità condizionata** (*o condizionatamente stabile*) se vi sono più valori critici di K per cui si passa da una condizione di stabilità a una condizione di instabilità, o viceversa. Queste due classi non coprono tutti i sistemi possibili: ve ne sono di altri, ad esempio, che sono instabili per $0 < K < K_0$ e instabili per $K > K_0$, al contrario di quelli a stabilità regolare. Questi sono di interesse perlopiù teorico [13].

Ove non specificato diversamente, i diagrammi di Nyquist riportati in questo capitolo sono stati tracciati con l'ausilio di Wolfram Alpha.

8.1 Diagramma di Nyquist in funzione di K

I sistemi reali hanno comportamento passa basso, essendo sempre presenti degli effetti capacitivi parassiti che ne limitano la banda. Pertanto, la prima metà dei diagrammi di Nyquist di sistemi F reali ha termine nell'origine, giacché $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow F(j\omega) \rightarrow 0$. Ne è un esempio il sistema di cui il diagramma in figura 8.1, che rappresenta proprio un passa basso ($F(s) = \frac{1}{1+s}$). Inoltre, nelle prossime pagine, non considereremo sistemi con comportamen-

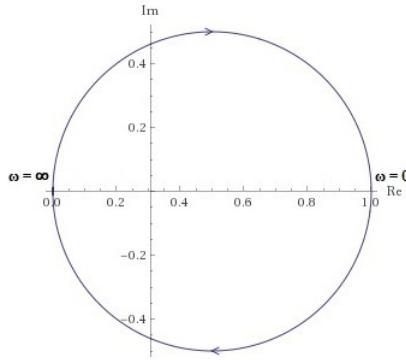


Figura 8.1: Diagramma di Nyquist di un sistema passa basso

to passa alto. Per tali sistemi, l'origine rappresenta il punto di partenza del diagramma, essendo $F(0) = 0$.

Si supponga che il diagramma in figura 8.1 sia il diagramma di una $H(s)G(s)$, in caso di sistema retroazionato *negativamente* (d'ora in poi tale ipotesi sarà implicita per ogni sistema preso in considerazione). Si inserisca nell'anello anche un blocco amplificatore ideale di guadagno K . Per quanto riportato in [22], affinché tale sistema sia stabile, il diagramma non deve girare attorno a $-\frac{1}{K}$. In simboli, il sistema è instabile se:

$$0 < -\frac{1}{K} < 1$$

Ossia, scomponendo in due condizioni:

$$0 < -\frac{1}{K} \iff K < 0$$

$$-\frac{1}{K} < 1 \iff K > -1$$

Tale metodo per valutare la stabilità mediante i diagrammi di Nyquist è molto comodo all'atto pratico, poiché permette di usare un unico diagramma invece di tracciarne uno per ogni valore di K , ma non rende l'idea di come il diagramma del sistema cambi al variare di K . In figura 8.2 (immagine originale in [20], slide n. 26), invece, abbiamo una porzione di un

diagramma di Nyquist di un sistema condizionatamente stabile. Si osservi che, al crescere di K , il diagramma diviene più ampio. Con questa interpre-

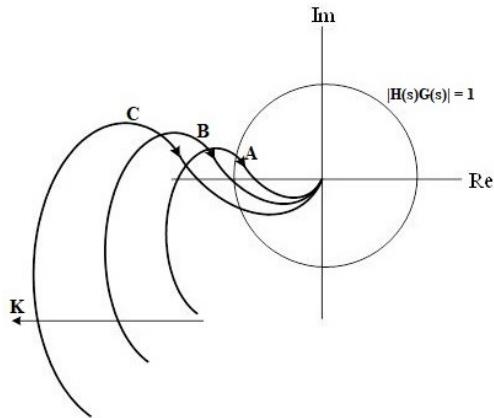


Figura 8.2: Tratto finale del diagramma di Nyquist di un sistema condizionatamente stabile al variare di K

tazione è immediato determinare che, riferendoci alla curva A , aumentando o riducendo opportunamente K si arriverà ad una condizione di stabilità.

Per sistemi non condizionatamente stabili con comportamento passa basso alle alte frequenze si ha un'unica soglia per determinare la stabilità del sistema. Si faccia riferimento al grafico in figura 8.3. Si consideri il diagram-

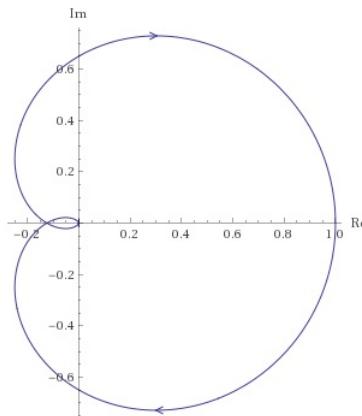


Figura 8.3: Diagramma di Nyquist di $F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$

ma rappresentato quello per $K = 1$. Poiché il diagramma taglia l'asse reale in -0.125 , il sistema sarà stabile per K positivi minori di 8, mentre per K maggiori di 8 il diagramma ingloberà il punto $-1 + j0$ e il sistema diverrà instabile.

Separiamo dunque i sistemi d'interesse, come da definizione in [13] già accennata all'inizio del presente capitolo, in:

- **Tipo A - regolarmente stabili:** sistemi il cui diagramma di Nyquist taglia il semiasse reale negativo una sola volta, ovvero che soddisfano la condizione sulla fase di Barkhausen per una sola pulsazione ω_0
- **Tipo B - condizionatamente stabili** sistemi il cui diagramma di Nyquist taglia il semiasse reale negativo più di una volta, ovvero soddisfano la condizione sulla fase di Barkhausen per più pulsazioni ω_i .

Si tenga a mente la limitazione a sistemi reali, ossia passa basso. Nella prossima sezione sfruttiamo questa categorizzazione e il metodo grafico introdotto per evidenziare come la condizione $\frac{d\phi}{d\omega} < 0$, modificata opportunamente, fornisca previsioni corrette circa la stabilità dei sistemi più comuni.

8.2 Nyquist e $\frac{d\phi}{d\omega} < 0$

Spesso ci si riferisce a $-\frac{d\phi}{d\omega}$ come al *ritardo di gruppo*. Non sarà il nostro caso, poiché il concetto di ritardo di gruppo quale ritardo temporale è valido per segnali modulati, e nella fattispecie si riferisce al ritardo subito dall'inviluppo di una portante nell'attraversare un sistema a fase lineare [28].

Per i sistemi del tipo A di interesse comune sembra sempre essere soddisfatta la condizione sulla derivata della fase. Essendo per ipotesi dei passa basso, qualunque cosa succeda alle basse frequenze, si ha comunque una rotazione in senso orario del diagramma per frequenze tendenti a $+\infty$. In figura 8.4, il diagramma di Nyquist per il sistema con la seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = 10^9 \frac{s + 1}{(s + 10)(s + 100)(s + 1000)^2}$$

Anche casi particolari come questo sono contemplati. È il caso dei sistemi per cui il criterio esteso di Barkhausen era già apparentemente corretto.

Per i sistemi del tipo B, invece, facciamo riferimento alla figura 8.5, versione modificata della 8.2, poiché è ragionevole che il tratto finale del diagramma abbia tale forma. La linea tratteggiata rappresenta l'andamento del diagramma tipo per sistemi con un numero di attraversamenti dell'asse reale superiore a 2. Asseriamo dunque che il sistema è *instabile* se, alla più alta pulsazione ω_0 per cui vale:

$$\begin{cases} |H(j\omega)G(j\omega)| > 1 \\ \angle H(j\omega)G(j\omega) = 0 \end{cases} \quad (8.2.1)$$

vale anche $\frac{d\phi}{d\omega} < 0$. È stabile, viceversa, se $\frac{d\phi}{d\omega} > 0$.

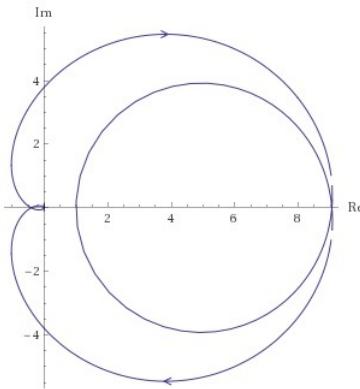


Figura 8.4: Caso particolare di sistema del tipo A

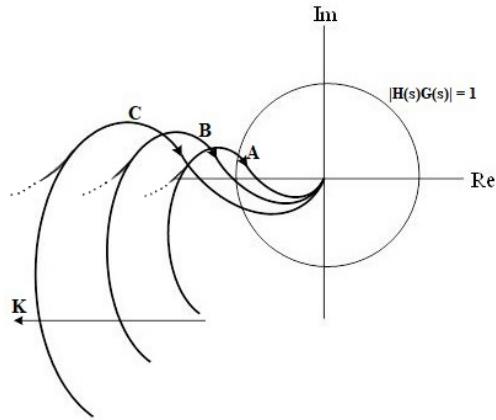


Figura 8.5: Rappresentazione tipica dei sistemi di tipo B

Non si tratta di un criterio di sufficienza poiché non vi è dimostrazione, ma si rimanda alla fine della sezione 8.3 per un collegamento con il concetto in essa presentato. Tuttavia, è interessante notare che anche sistemi condizionatamente stabili come quello in figura 8.6, per cui non vale l'ipotesi di passa basso, valga comunque il nuovo criterio esteso (a patto di poter considerare $+\infty$ come ω_0). Delimitare con rigore le classi di funzioni per cui questa estensione del criterio fornisce risultati corretti sarà uno scopo del proseguimento degli studi sull'argomento, e si dovrà per certo partire dalla ricerca di possibili controsensi.

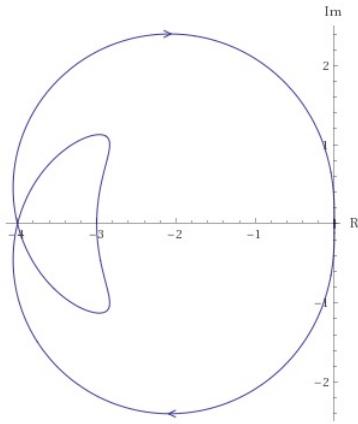


Figura 8.6: Caso particolare di sistema condizionatamente stabile

8.3 Significato fisico della condizione aggiuntiva

Si propone infine una possibile spiegazione fisica del perché la condizione aggiuntiva potrebbe effettivamente rivelarsi una condizione necessaria, assieme al criterio di Barkhausen, affinché il sistema oscilli. In particolare, si vuole sottolineare una sorta di funzione di stabilizzazione della frequenza di oscillazione che tale condizione sembra operare.

Innanzitutto, sia $f(t) = \sin(\omega t + \phi(t))$. Si immagini che la fase ϕ sia una vari bruscamente in un dato istante di tempo t_0 . Allora, in un intorno di t_0 si può scrivere, per Taylor, $\phi(t) \approx \phi(t_0) + \phi'(t_0)(t - t_0)$, ottendendo:

$$f(t) \approx \sin\left((\omega + \phi'(t_0))t + \phi(t_0) - \phi'(t_0)t_0\right)$$

Si osservi che $\phi'(t_0)$ ha le dimensioni di una pulsazione. In altre parole, variazioni istantanee della fase si possono confondere con variazioni istantanee della pulsazione di una sinusoide.

Si consideri un oscillatore, e sia ω_0 la pulsazione per cui è soddisfatto il criterio di Barkhausen. Si supponga che $\frac{d\phi}{d\omega}(\omega_0) < 0$. Se ω dovesse aumentare leggermente in un dato istante, vista l'ipotesi su $\frac{d\phi}{d\omega}(\omega_0)$ si avrebbe una diminuzione istantanea dello sfasamento operato da HG sul segnale nell'anello di retroazione, ossia, per quanto detto sopra, una diminuzione della pulsazione. Viceversa, per decrementi istantanei di ω si ha un incremento istantaneo dello sfasamento introdotto da HG , ossia un incremento della pulsazione. Praticamente, la condizione aggiuntiva fa sì che la frequenza di oscillazione sia una frequenza d'equilibrio alla quale operare per l'oscillatore. Viceversa, se $\frac{d\phi}{d\omega}(\omega_0) > 0$, si ottiene l'effetto opposto, ossia un'enfatizzazione della perturbazione della frequenza di oscillazione. Risulta pertanto che sep-

CAPITOLO 8. UNA CONDIZIONE AGGIUNTIVA

pure idealmente il sistema potrebbe ragionevolmente oscillare alla pulsazione ω_0 , in realtà essa è un equilibrio instabile.

Nei casi teorici di sistemi che non esibiscono un comportamento passa basso, si può ottenere attraversamento dell'asse reale da parte del diagramma di Nyquist anche per $\omega = \infty$ (vedasi figura 8.6). Mentre per gli attraversamenti per $\omega = 0$ si può parlare di "oscillazione" a frequenza nulla, ossia di marginale stabilità con un segnale d'uscita costante, non è del tutto chiaro se abbia senso considerare gli attraversamenti per $\omega = \infty$ dal punto di vista fisico. Nello specifico, bisogna indagare il comportamento teorico di sistemi del tipo suddetto qualora l'attraversamento avvenga proprio in $-1 + j0$, che negli altri casi corrisponde a una situazione di marginale stabilità.

Infine, si voglia osservare come potrebbe non essere un caso che il criterio esteso di Barkhausen sulla stabilità funzioni per sistemi marginalmente stabili che soddisfino la condizione aggiuntiva. Se questa si rivelasse essere, assieme al criterio di Barkhausen, una condizione *necessaria e sufficiente* affinché il sistema marginalmente stabile oscilli, allora la presenza di segnali oscillanti renderebbe sensato il ragionamento fisico dietro al criterio esteso di Barkhausen, motivandone la correttezza sotto tali ipotesi. Questo spiegherebbe il nuovo criterio esteso di Barkhausen (8.2.1) da un punto di vista fisico - pur lasciando in ombra metà del criterio. Non sarebbe chiaro, in tale prospettiva e sempre da un punto di vista puramente fisico, perché per casi di stabilità marginale in cui $\frac{d\phi}{d\omega}(\omega_0) > 0$ si debba avere un'inversione del criterio (i.e., stabilità al diminuire di K , e viceversa).

Capitolo 9

Analisi del Group Delay

Il ritardo di gruppo esprime il ritardo di un segnale dovuto al suo passaggio attraverso il circuito e viene definita come:

$$\tau_g = -\frac{d\phi}{d\omega} \quad (9.0.1)$$

Quando un segnale attraversa un sistema, può apparire una distorsione nella forma d'onda del sistema, ma se il segnale di uscita coincide con il segnale di ingresso, significa che il sistema non distorce il segnale, sebbene possa esserci un ritardo o un'amplificazione.

Sulla base al comportamento previsto di un circuito in anello chiuso, si presume che l'ingresso per la rete di feedback B sia una tensione sinusoidale in aumento esponenziale.

$$V(x) = e^{\sigma \cdot t} \cdot e^{j\omega st} \quad (9.0.2)$$

La tensione all'uscita dell'amplificatore, $V(y)$ (dell'anello aperto) avrà una forma simile a $V(x)$, ma con un ritardo di tempo, un sfasamento e un'ampiezza leggermente maggiore di $V(x)$.

Per tanto possiamo scrivere $V(y)$ come:

$$V(y) = To \cdot e^{\sigma(t-\tau)} \cdot e^{j\omega(t-\tau)+\phi} \quad (9.0.3)$$

$$T(j\omega) = \frac{V(x)}{V(y)} = \frac{e^{\sigma \cdot t} \cdot e^{j\omega st}}{To \cdot e^{\sigma(t-\tau)} \cdot e^{j\omega(t-\tau)+\phi}} > 1 \quad (9.0.4)$$

Risolvendo l'equazione Eq 4.0.7,

$$To \cdot e^{-\sigma\tau} = 1 \rightarrow To = e^{\sigma\tau} \quad (9.0.5)$$

$$e^{-j\omega s\tau} \cdot e^{j\phi} = 1 \rightarrow e^{j\phi} = e^{j\omega s\tau} \rightarrow \phi = \omega s\tau \quad (9.0.6)$$

Questo dimostra che τ e σ dipendono dal guadagno dell'anello aperto To e che il ritardo di gruppo deve essere positivo per soddisfare l'equazione Eq. 4.0.5.

Per tanto:

$$\tau g = -\frac{d\phi}{d\omega} > 0 \quad (9.0.7)$$

Per lo studio del Group Delay abbiamo creato un semplice programma in Matlab che riproduce l'esponenziale dell'uscita divergente di un oscillatore a sfasamento o Phase shift.

Questo programma riproduce i punti di uscita dell'anello aperto $(AB)^n$, dove n è il numero di volte in cui il valore di uscita viene convertito in ingresso per attraversare nuovamente il ciclo aperto AB, per un tempo $t+\tau g(\omega)$.

Descripción de programa:

$t = 0$; Tempo iniziale

$i = 0$; $j = 0$; $n = 0$; lunghezza del vettore

$t = [0: i]$; Vettore di tempo

$x = [0: j]$; vettore di tensione

while ($t1 < 0.1$) Mentre il tempo è inferiore a 0,1 secondi verrà riprodotto il ciclo while

$x1 = 30 \cdot (30/29)^n$; $x1$ è la tensione di uscita quando si attraversa AB; n sono le volte che il segnale passa attraverso il blocco AB. Inizialmente il segnale di uscita sarà A poiché la frequenza iniziale è 0. Quindi il segnale passerà ripetutamente attraverso il ciclo AB

CAPITOLO 9. ANALISI DEL GROUP DELAY

$t(i+1) = t1$; viene salvato nella posizione $i+1$ del vettore il valore del tempo

$x(j+1) = x1$; nella posizione $j+1$ del vettore di tensione viene salvato il valore della tensione.

$t1 = t1 + (1.688e-4)$; tempo iniziale più ritardo del gruppo

$i = i+1$; aumenta la posizione del vettore temporale

$j = j+1$; aumento della posizione del vettore di tensione

$n = n+1$; aumento del numero di volte che il segnale passa attraverso AB

`plot (t, x, 'o')` Ritorna il plot della risposta ottenuta.

Per il circuito Phase shift (Figura 3.15), il ritardo di gruppo, derivato dalla fase rispetto alla frequenza, per la frequenza di oscillazione ω_0 , è $1,69e-4$ secondi. Per la frequenza di oscillazione, la funzione dell'anello aperto AB è $30/29$.

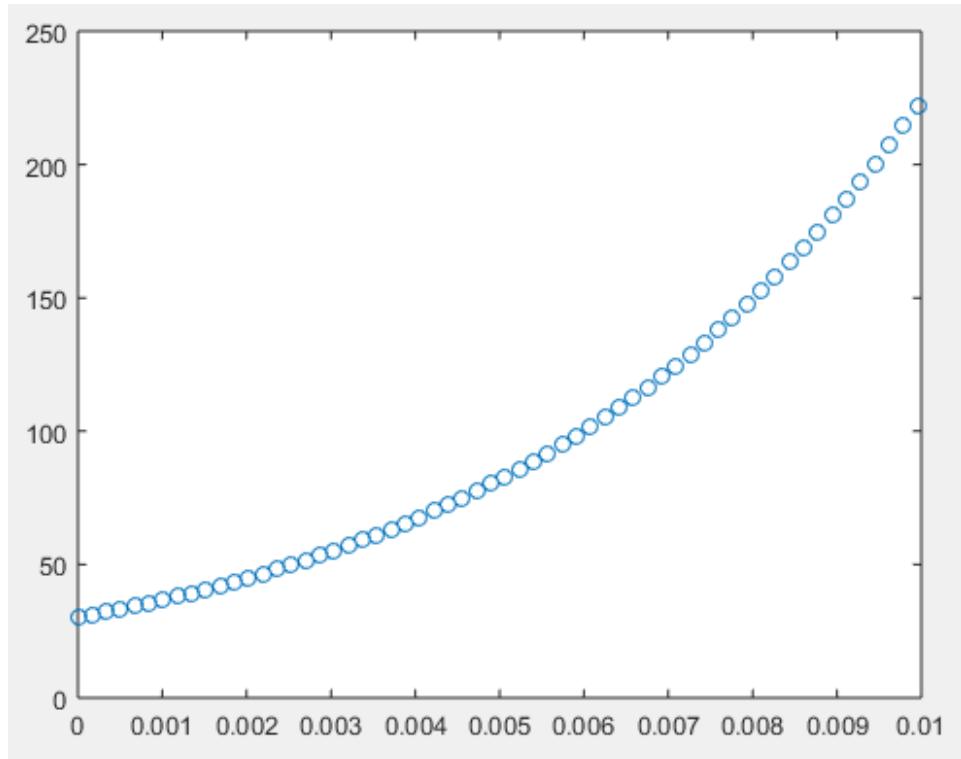


Figura 9.1: Esponenziale ottenuto con Matlab per il circuito Phase shift con $A = 30$

Dai valori ottenuti e con l'uso di Excel possiamo ottenere l'esponenziale all'uscita del circuito dell'anello aperto.

CAPITOLO 9. ANALISI DEL GROUP DELAY

t(x)	v(y)	0,0025	49,885	0,0052	85,8109	0,0079	147,6095
0	30	0,0027	51,6052	0,0054	88,7698	0,0081	152,6995
0,0002	31,0345	0,0029	53,3847	0,0056	91,8309	0,0083	157,965
0,0003	32,1046	0,003	55,2255	0,0057	94,9975	0,0084	163,4121
0,0005	33,2117	0,0032	57,1299	0,0059	98,2732	0,0086	169,047
0,0007	34,3569	0,0034	59,0999	0,0061	101,662	0,0088	174,8762
0,0008	35,5416	0,0035	61,1378	0,0062	105,1676	0,0089	180,9064
0,001	36,7672	0,0037	63,246	0,0064	108,794	0,0091	187,1445
0,0012	38,0351	0,0039	65,4269	0,0066	112,5455	0,0093	193,5978
0,0014	39,3466	0,0041	67,683	0,0068	116,4264	0,0095	200,2736
0,0015	40,7034	0,0042	70,0169	0,0069	120,4411	0,0096	207,1796
0,0017	42,107	0,0044	72,4312	0,0071	124,5943	0,0098	214,3237
0,0019	43,5589	0,0046	74,9289	0,0073	128,8906	0,01	221,7141
0,002	45,0609	0,0047	77,5126	0,0074	133,3351		
0,0022	46,6148	0,0049	80,1855	0,0076	137,9329		
0,0024	48,2222	0,0051	82,9505	0,0078	142,6892		

Figura 9.2: Tabella con i valori ottenuti in Matlab

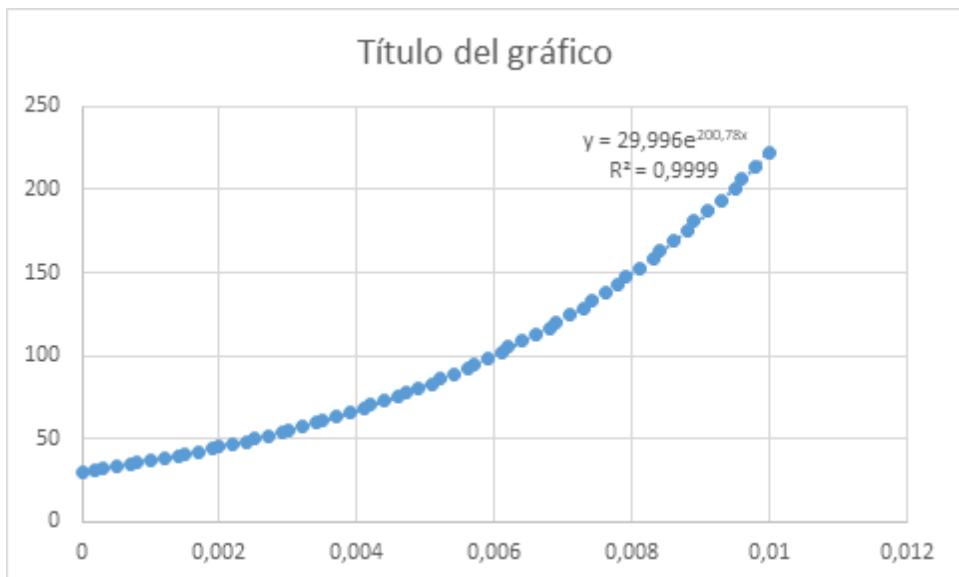


Figura 9.3: Esponenziale all'uscita del circuito Phase shift con Matlab

Questo risultato dovrebbe coincidere con il valore ottenuto nelle simulazioni in PSpice come risultato di un ritardo di gruppo nel circuito. L'esponenziale ottenuto con PSpice utilizzando come amplificatore un VCVS e un guadagno di 30, $R=10\text{ k}$ e $C=6,8\text{ n}$:

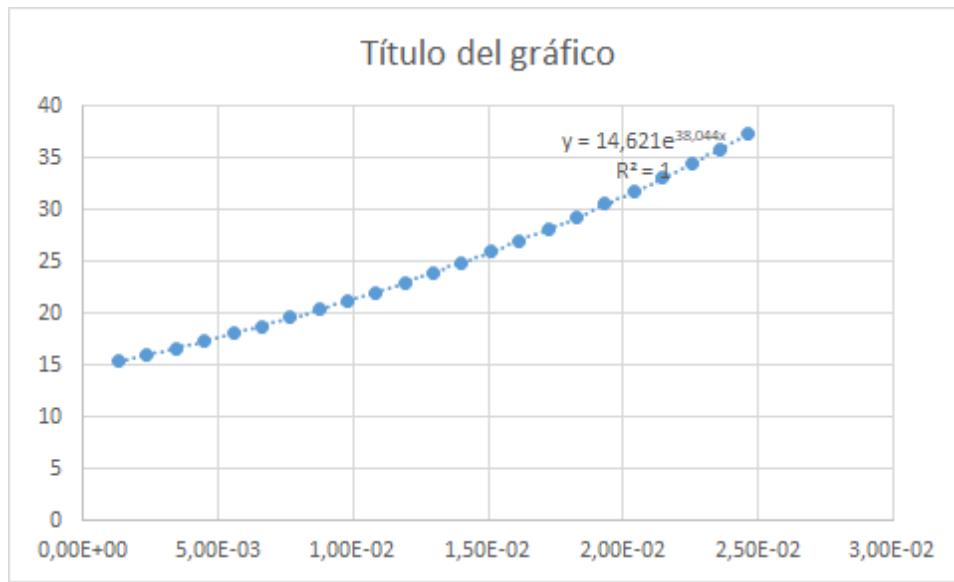


Figura 9.4: Esponenziale all'uscita del circuito Phase shift con PSpice

I risultati ottenuti con Matlab e le simulazioni in PSpice ideali non sono equale. La esponenziale ottenuta con Matlab è $29.996\exp 200.78t$ e con PSpice VCVS $14.621\exp 38.044t$.

Lo stesso, ma per un filtro RC del primo ordine. Il ritardo de grupo per questo circuito con $R=1\text{ k}$, $C=1\text{ nF}$ e $A=1.1$ è $1\exp(-6)$ con una frequenza di oscillazione $\omega_0=0\text{ rad/s}$.

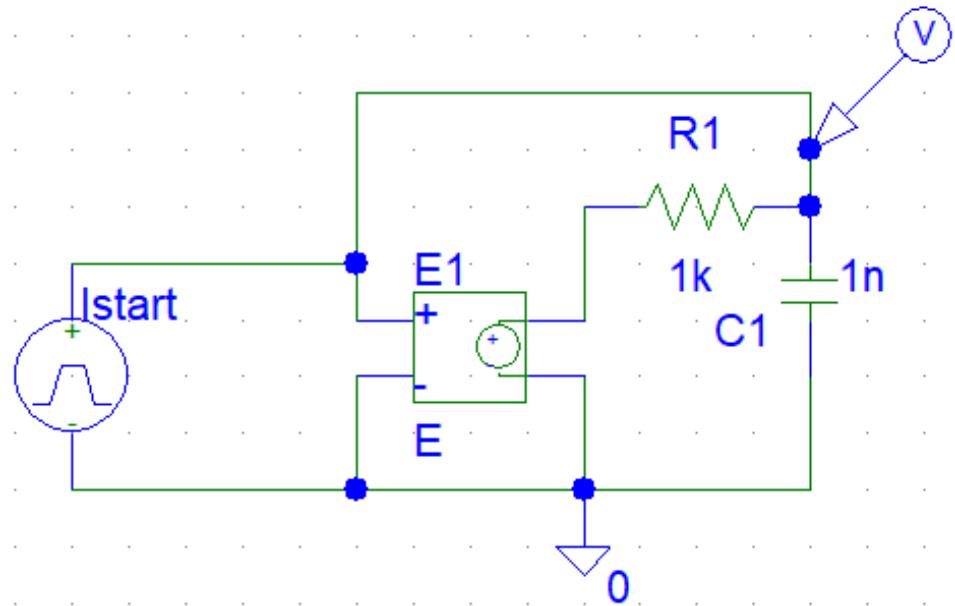


Figura 9.5: Circuito RC

CAPITOLO 9. ANALISI DEL GROUP DELAY



Figura 9.6: Esponenziale all'uscita del circuito RC con matlab

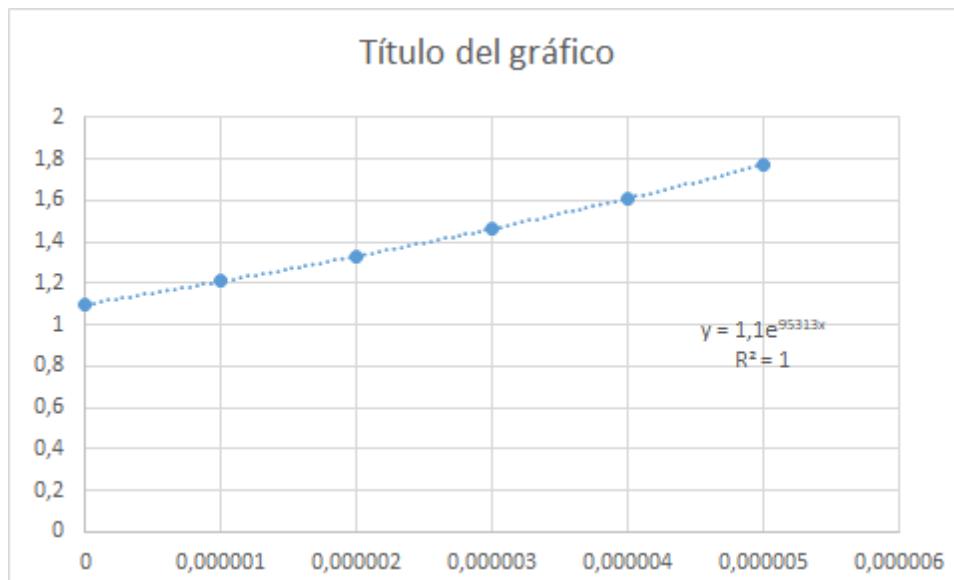


Figura 9.7: Esponenziale all'uscita del circuito RC con PSpice

In conclusione, possiamo assicurare che esiste un ritardo di gruppo ma che questo non coincide per la funzione dell'anello aperto con la derivata dell'argomento rispetto alla derivata della frequenza.

Conclusioni

Il criterio di Barkhausen è stato studiato come criterio che ci permette di costruire circuiti elettronici che oscillano per una certa frequenza, modellandone l'ampiezza, attraverso il guadagno e la sua frequenza attraverso una rete di feedback e più volte usando una fonte esterna fornire un impulso per controllare lo stato iniziale.

Come abbiamo detto prima, le condizioni necessarie per far oscillare un sistema o un circuito sono il feedback e l'instabilità. È per quest'ultima ragione una delle condizioni in base alle quali il criterio di Barkhausen non può essere considerato come una singola condizione per l'oscillazione.

Pertanto, alla condizione del criterio di Barkhausen per l'oscillazione degli oscillatori, dobbiamo aggiungere la condizione di instabilità nella progettazione degli oscillatori, cioè che il criterio di Nyquist circonda il punto critico -1.

Il diagramma di bode ha una pendenza negativa e uno sfasamento di 0° alla frequenza di taglio, così come una rete di feedback che produce uno sfasamento di -180° quando la retroazione è negativa. Come conseguenza di quest'ultimo $-180^\circ + 180^\circ$ (a causa del feedback negativo) = 0° . Se, d'altra parte, la rete B introduce uno sfasamento di -180° e la retroazione è positiva, l'uscita sarà fuori fase e, di conseguenza, non si verificheranno oscillazioni.

Dal criterio di stabilità (criterio Nyquist semplificato), se la retroazione è negativa, lo sfasamento deve essere inferiore a 180° per la frequenza di crossover con 0 dB, in modo che il sistema sia instabile.

Inoltre, idealmente, quando si costruiscono gli oscillatori, non intendiamo fornire al circuito ulteriori mezzi per controllare lo stato iniziale e ogni circuito è sempre soggetto a disturbi e rumore. Ecco perché il suo stato iniziale incontrollato (rumore e perturbazioni degli elementi del circuito) renderà il suo stato stazionario imprevedibile. Pertanto, vi è l'impossibilità di poter posizionare esattamente i poli sull'asse immaginario $j\omega$, a causa delle tolle-

CONCLUSIONI

ranze non nulle dei componenti del circuito, sempre presenti, che contengono componenti a tutte le frequenze.

Quindi sorge la necessità di un’ulteriore condizione, nota come condizione di partenza o condizione di start-up condition, per cui $|A \cdot B| > 1$, in modo che i poli si trovino inizialmente nel semipiano destro. A causa della retroazione, il segnale di uscita verrà amplificato indefinitamente fino a quando l’amplificatore si saturazione o fino a quando un circuito ausiliario raggiunge quello per la frequenza di oscillazione $A \cdot B = 1$. Da allora l’ampiezza dell’oscillazione viene mantenuta (il sistema diverge). In questo modo, i poli inizialmente posizionati nella metà destra del piano s, in conseguenza dell’aumento dell’ampiezza del segnale e della diminuzione del guadagno, si sposteranno alla posizione $j\omega$ di steady state.

Sebbene in generale il funzionamento dell’oscillatore sia non lineare, la condizione di partenza può essere studiata con un modello lineare dell’amplificatore perché funziona con segnali molto piccoli.

Infine, è necessario prestare particolare attenzione, in quanto la frequenza di oscillazione dal criterio di Barkhausen viene calcolata dalla rete di feedback. Dai risultati ottenuti teoricamente e in laboratorio, possiamo concludere che la frequenza della rete di retroazione non coincide con la frequenza ottenuta da la funzione di trasferimento dell’anello aperto $|A \cdot B| = 1$, e man mano che il guadagno aumenta questa frequenza aumenterà o diminuirà (filtro passo-basso e filtro passo-alto usato como rete di feedback rispettivamente)

Pertanto, la frequenza di oscillazione dipende dal guadagno del circuito e quindi dalla sua funzione di trasferimento in anello chiuso, a causa del feedback.

Quest’ultimo non dovrebbe essere corretto poiché in un oscillatore l’uscita e l’ingresso sono uguali e quindi l’uscita del circuito dovrebbe dipendere solo dal guadagno dell’anello aperto $T(j\omega) = A(j\omega) \cdot B(j\omega)$. Ma se consideriamo che un circuito dell’oscillatore può essere simile a un circuito con retroazione, dove x_i e x_o sono i segnali di ingresso e di uscita, e x_f e x_e rispettivamente i segnali di retroazione e di errore. E il comportamento del circuito può essere previsto conoscendo il modulo $|A \cdot B|$ e la fase ϕ del guadagno del loop, eccetto per il calcolo della sua frequenza di oscillazione.

Per quanto riguarda il ritardo di gruppo, studi precedenti indicano che questo coincide con la derivata dell’argomento dell’anello aperto rispetto alla derivata della frequenza di oscillazione, ω . Tuttavia, sia in teoria

CONCLUSIONI

che nella pratica questo non è vero. Il ritardo del gruppo non dipende solo dalla frequenza di oscillazione, dipende anche dal guadagno.

Bibliografia

- [1] Anonymous. Osciladores. http://dfs.uib.es/GTE/education/telematica/sis_ele_comunicacio/Apuntes/Capitulo%206.pdf, 05-Feb- 2018.
- [2] Anonymous. Failure of barkhausen oscillation building up criterion: Further evidence. 5:127–132, 2007.
- [3] Anonymous. Osciladores senoidales Electrónica analógica ii. Bioingeniería. <https://docplayer.es/37252017-Osciladores-senoidales-electronica-analogica-ii-bioingenieria.html>, 2018.
- [4] Panos J. Antsaklis and Anthony N. Michel. *Linear Systems*. Birkhauser, 1st edition, 1997.
- [5] E. Antón Barco. Osciladores electrónicos no lineales. <https://es.scribd.com/document/55741698/Osciladores-Electronicos-No-Lineales>, 2010.
- [6] A. Lázaro Blanco. Osciladores senoidales. <http://www.cartagena99.com/recursos/alumnos/apuntes/E2%202013-2014%20Tema%204%20OSCILADORES.pdf>, 04- Feb- 2018.
- [7] A.S. Elwakil and A.M. Solimon. A family of wien-type oscillators modified for chaos. *Int. J. Circuit Theory*, 25:561–579, 1997.
- [8] C. Lahuec F. He, R. Ribas and M. Jezequel. Discussion on the general oscillation startup condition and the barkhausen criterion. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 59:215–221, May 2009. DOI 10.1007/s10470-008-9250-1.
- [9] I. Mártil de la Plaza Francisco J. Franco Peláez and Germán González Díaz. Osciladores, universidad complutense de madrid. https://cv3.sim.ucm.es/access/content/group/portal-uatducma-43/webs/material_original/apuntes/PDF/10_Osciladores.pdf, 2004.
- [10] A.R. Hambley. *Electronics*. Prentice-Hall, 2nd edition, 2000.

BIBLIOGRAFIA

- [11] M. Minarik V. Kudjak I. Balaz, Z. Brezovic and V. Stofanik.
- [12] Texas Instrument. Ua741 - general purpose operational amplifiers. <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/ua741.pdf>.
- [13] A. Lepschy and A. Ruberti. Studio della stabilità - caso dei sistemi a un solo ciclo. In *Lezioni di Controlli Automatici*, chapter 10, pages 354–355. Siderea Edizioni Scientifiche, 2nd edition, February 1967.
- [14] E. Lindberg. Oscillator-an approach for a better understanding.
- [15] E. Lindberg. The barkhausen criterion. *IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, pages 15–18, 2010.
- [16] E. Lindberg and K. Murali. On the modified barkhausen criterion. *Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, Reykjavik, Iceland. 2016.
- [17] Kent H. Lundberg. Barkhausen Stability Criterion. <http://web.mit.edu/klund/www/weblatex/node4.html>, November 2002.
- [18] F. Miyara. *Osciladores. Electrónica III*. Univeristy of Rosario, 2000.
- [19] F. Miyara. *Estabilidad de amplificadores realimentados*. Petrocelli, 2nd edition, 2004.
- [20] F. Miyara. *Osciladores Senoidales*. Petrocelli, 2nd edition, 2004.
- [21] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, and S. Hamid Nawab. The Encirclement Property. In *Signals & Systems*, chapter 11, pages 847–850. Prentice-Hall, 2nd edition, 1997.
- [22] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, and S. Hamid Nawab. The Nyquist Criterion for Continuous-Time LTI Feedback Systems. In *Signals & Systems*, chapter 11, page 852. Prentice-Hall, 2nd edition, 1997.
- [23] B.V. Rao P. Raadhakrishnan, A.E. Yagle and J.E. Dorband. On upper bounds of the equivalent oscillator and notch-filter circuits : A non-commutative group theoretic approach. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 39:756–759, 1992.
- [24] E. Paperno. Positive-feedback oscillators. http://www.ee.bgu.ac.il/~paperno/Positive_Feedback_Oscillators.pdf, 2004.
- [25] T. Parisini. Fondamenti di Automatica. <http://control.units.it/it/downloads-it/category/44-fa-lezioni-9cfu.html>, March 2013. Slides from the course.
- [26] J. Polanía. Osciladores electrónica básica, 2018.

BIBLIOGRAFIA

- [27] J. Willem Polderman and J. C. Willems. *Introduction to the Mathematical Theory of Systems and Control*. Springer, 2nd edition, October 2008.
- [28] Q. Zhang R. Das and J. Murkherjee. Synthesis of negative group delay. ussing lossy coupling matrix. <https://ieeexplore.ieee.org/document/7970325/>, May 2017.
- [29] A. Sedra and K. Smith. *Microelectronic circuits*. Oxford University Press, Inc, 5th edition, 2004.
- [30] R. Senani. On equivalent forms of single op-amp sinusoidal rc oscillators. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 41:617–624, 1994.
- [31] V. Singh. Discussion on barkhausen and nyquist stability criteria. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 62:327–332, 2010.
- [32] Vimal Singh. A note on determination of oscillation startup condition. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 48:251–255, May 2006. DOI 10.1007/s10470-008-9250-1.
- [33] L. von Wangenheim. On the barkhausen and nyquist stability criteria. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 66:139–141, July 2011. DOI 10.1007/s10470-008-9250-1.
- [34] H. Voss. A simple predictor based on delay-induced negative group delay. *New York: Weill Cornell Medical College, Citigroup Biomedical Imaging Center*, 2016.
- [35] Wikipedia. Laplace Transform. https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata_di_Laplace.