Trabajo Fin de Máster

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Propuesta para un aula inclusiva de 1º de la E.S.O.

Introduction to first degree equations.

Proposal to an inclusive classroom

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas. Especialidad Matemáticas

Autora

Almudena Agudo Carnicer

Directora

Elena Gil

Facultad de Educación

Año 2018

ÍNDICE

A. **Sobre la definición del objeto matemático a enseñar** **Página 3**

B. **Estado de enseñanza-aprendizaje del objeto** **Página 5**

C. **Conocimientos previos del alumno** **Página 9**

D. **Razones de ser del objeto matemático** **Página 11**

E. **Campo de problemas** **Página 15**

F. **Técnicas** **Página 22**

G. **Tecnologías** **Página 30**

H. **Secuencia didáctica y su cronograma** **Página 32**

I. **Evaluación** **Página 38**

J. **Bibliografía** **Página 50**

K. **Anexos** **Página 51**

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

A1. Nombra el objeto matemático a enseñar

El objeto matemático a enseñar es la ecuación de primer grado.

Las ecuaciones son igualdades entre dos expresiones algebraicas que solo se cumplen para ciertos valores de las letras. Estas se encuentran formadas por distintos elementos que pueden ser conocidos o no y que guardan una relación entre ellos. Los elementos conocidos serán números y los desconocidos serán letras a las que denotaremos como incógnitas.

El vocabulario utilizado al hablar de ecuaciones es: miembros, términos, soluciones, resolver y grado.

- Miembros: expresiones algebraicas que se encuentran a cada lado del signo igual.
- Términos: son los sumandos que forman parte de los miembros.

$$\overbrace{3x + 4}^{\text{MIEMBRO}} = \overbrace{2x - 1}^{\text{MIEMBRO}}$$

TÉRMINOS

- Soluciones: son los valores que han de tomar las letras para que se cumpla la igualdad.
- Resolver: encontrar todas las soluciones de una ecuación, es decir, averiguar los valores que deben tomar las incógnitas para que se cumpla la igualdad.
- Grado: es el mayor exponente de los términos que componen la ecuación.

Las ecuaciones se clasifican según el grado y el número de incógnitas. En nuestro caso, el objeto matemático a enseñar serán las ecuaciones de primer grado con una sola incógnita.

Las ecuaciones son útiles para resolver problemas y analizar las relaciones existentes en multitud de campos. Por lo tanto, debemos conseguir una buena comprensión de su significado y precisión al resolverlas.

A2. Indica el curso y la asignatura en la que sitúas el objeto matemático

Situaremos nuestra propuesta didáctica en el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria dentro de la materia de matemáticas. Según el currículo aragonés (la Orden ECD/489/2016, Aragón, 26 de mayo) veamos los contenidos de este curso.

Contenidos 1º ESO – Bloque 1. Números y Álgebra

- *Iniciación al lenguaje algebraico.*
- *Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.*
- *El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades*
- *Valor numérico de una expresión algebraica.*
- *Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias.*
- *Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución. Interpretación de la solución. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.*

Criterios de evaluación - Bloque 2. Números y Álgebra

- *Crit.MA.2.5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales*
- *Crit.MA.2.6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.*
- *Crit.MA.2.7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado, aplicando para su resolución métodos algebraicos.*

A3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Los problemas que introduciremos estarán relacionados con temas conocidos por el alumnado, como puede ser la geometría, las relaciones comerciales o las relaciones numéricas. Además, ya que realizamos una propuesta para un aula inclusiva en la que hay alumnos con necesidades educativas especiales que tienen dificultad con las operaciones aritméticas, nos esforzaremos en graduar las relaciones que aparecen. Para favorecer esta graduación no utilizaremos números grandes, decimales o negativos.

Enseñaremos cuatro técnicas; traducción al lenguaje algebraico, agrupación de términos semejantes, resolución de ecuaciones y resolución de problemas. La técnica de resolución de ecuaciones se explicará de dos maneras diferentes para facilitar la comprensión de los alumnos con necesidades educativas especiales.

En todo momento se justificarán las técnicas empleadas por medio de las siguientes tecnologías; la definición de ecuación, el concepto identidad y de ecuación equivalente y el procedimiento para transformar una ecuación en otra equivalente.

B. Estado de enseñanza-aprendizaje del objeto

B1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Con el fin de estudiar la introducción en la escolaridad de las ecuaciones de primer grado, hemos realizado el análisis de libros de texto como son: ANAYA 1º ESO, SM 1º ESO y SM 2º ESO y sus correspondientes guías didácticas.

La primera justificación encontrada es meramente instrumental. El álgebra es reconocida como una de las herramientas más potentes de las matemáticas porque gracias a ella se han desarrollado grandes ramas tanto de esta ciencia como de física, química, economía y biología. Es una nueva forma de expresar las matemáticas que nos ayuda a resolver una amplia gama de problemas que solo con la aritmética no éramos capaces. Esta justificación es una razón de peso para introducir el álgebra en el currículo.

Pero, también se alude a una segunda justificación formativa debido a que esta rama nos ayuda a visualizar conceptos, a explorar y a relacionarlos. El hecho de utilizar letras nos introduce en un pensamiento más abstracto, que a la larga nos ayuda a ser ordenados y a lograr respuestas razonadas en situaciones complicadas. Podríamos decir que esta justificación es aún más fundamental que la utilitaria, dando al Álgebra un papel esencial en la comprensión de las matemáticas.

Dado que nos encontramos en un aula inclusiva, también es importante responder a la pregunta: ¿Es útil y formativa el álgebra para las personas con necesidades especiales?

> "*Sí, les ayuda igual que a los estudiantes con un desarrollo normal puesto que es formativa, les ayuda a aprender y a razonar en otras materias*." (Monari, 2010, p.14)"

En conclusión, el aprendizaje del álgebra tendrá grandes beneficios para todos ya que ayudará a los alumnos a la comprensión de otras ciencias y a dar respuestas de manera razonada a problemas planteados.

B.2 ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Campos de problemas

Tras analizar los libros anteriormente citados hemos visto que existen varios campos de problemas que pueden ser resueltos por medio de ecuaciones de primer grado. Los principales temas que se abordan son:

- Numéricos: Relaciones de mayor, menor o igual entre cantidades reales.
- Geométricos: Referentes al cálculo de perímetros y áreas de figuras planas.
- Comerciales: Problemas de compraventa que utilizan porcentajes.
- Edades: Relaciones entre las edades de las personas.
- Descomposición de conjuntos: Relación entre dos conjuntos que forman parte de un todo.

Los problemas se van introduciendo atendiendo tanto a la dificultad de planteamiento como a la dificultad a la hora de resolverlos.

Técnicas

En cuanto a las técnicas las podemos dividir en:

1. Técnicas previas a la resolución de problemas
   a) Uso del lenguaje algebraico
   b) Operaciones con términos algebraicos semejantes
2. Técnicas de resolución de ecuaciones
3. Procedimientos para resolver problemas

Las técnicas más utilizadas para comenzar con el uso del lenguaje algebraico son: la representación de números en clave, la expresión de números cualquiera de manera algebraica y la generalización de relaciones o de propiedades numéricas.

En cuanto a la técnica de operaciones con términos semejantes los libros se inician generalmente con la suma, resta, multiplicación y división de monomios. (Véase anexo 1 para encontrar ejemplos de cada una de las técnicas).

Para la resolución de ecuaciones, la técnica más utilizada en los libros de texto es la transposición de términos en la ecuación genérica ax + b = cx + d que se obtiene agrupando términos semejantes en los dos miembros.

- Si un término suma/resta a un lado, este pasa al otro restando/sumando.
- Si un término multiplica/divide a un lado, pasa al otro dividiendo / multiplicando.

Es decir:

- $x + a = b \Rightarrow x = b - a$
- $x - a = b \Rightarrow x = b + a$
- $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$
- $\frac{x}{a} = b \Rightarrow x = ab$

En cuanto a la resolución de problemas la técnica que se propone generalmente es la siguiente:

- Identificar los datos conocidos y los desconocidos
- Asignar nombre a los datos desconocidos
- Expresar la relación de los datos mediante una frase en castellano.
- Traducirla a forma de ecuación
- Resolver la ecuación por las técnicas anteriormente descritas
- Expresar la solución atendiendo al contexto
- Comprobar la solución

(Anaya, 2009, p.188)

Tecnologías

Las tecnologías que sustentan dichas técnicas serían la definición de ecuación y la de ecuaciones equivalentes y el procedimiento para transformar una ecuación en otra equivalente, conocido como la ley de la balanza que solo se justifica mediante ejemplos en el mejor de los casos. (Véase anexo 2).

B.3 ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el alumno?

El álgebra es una parte de las matemáticas cuyo significado no es intuitivo y que necesita cierta abstracción. Los números, se sustituyen por letras para generalizar resultados y esto puede conllevar dificultades de comprensión.

El principal objetivo es que sea entendida y no vista como un conjunto de letras y números sin sentido. Buscamos que la justificación de su introducción sea sólida, pausada y bien secuenciada para que haya una comprensión mayor y cierto interés en aprenderla.

Los pasos que se plantean para la enseñanza parecen adecuados, pero si no se cuidan determinados aspectos se puede producir mecanización y como consecuencia, falta de comprensión. Por ello, algunas de las técnicas que nosotros propondremos serán las ya citadas, pero remarcaremos ciertos aspectos que, a nuestro juicio, hay que atender primordialmente. Los puntos claves serán:

1. Insistir en la resolución de problemas y no en la mera resolución de ecuaciones para poder comprender la utilidad del álgebra.

2. En la resolución de ecuaciones, intentar que la transposición de términos sea razonada y que el alumnado sepa siempre qué hacer y por qué se puede hacer.

3. En el proceso de identificación de los datos desconocidos con las letras, trataremos que los alumnos sean conscientes de a qué llamamos ‘x’ y por qué. No es lo mismo decir que “x es oro” a decir que “x es el precio/kg de oro”.

4. Una vez resuelto el problema es fundamental enseñar la importancia de comprobar que la solución satisface al enunciado; no solo que cumpla la ecuación, sino que el valor obtenido no sea una incongruencia. Por ejemplo, si resolvemos un problema en el que la “x = -5 m es la altura de un edificio”, el alumno ha de comprender que no podemos tener una altura negativa y que o bien el planteamiento o bien el procedimiento que no es correcto.

Cuidar estos aspectos es fundamental, si no se hace de forma correcta puede provocar a corto plazo cierta frustración en el alumno por no poder seguir la clase. Pero a largo plazo, pueden aparecer aspectos no deseados; como, por ejemplo, no saber resolver ecuaciones de grado superior por haber mecanizado la transposición de términos o no saber cómo abordar problemas más complicados.

En los niños con necesidades especiales todas estas dificultades se acentúan, por lo que debemos tener especial cuidado en los puntos ya expuestos.

C. Conocimientos previos del alumno

C1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Teniendo en cuenta que el álgebra es considerada como una generalización de la aritmética, muchos de los procedimientos aritméticos serán útiles para manejarse con ella. El principio de permanencia (Peacock, 2005, p.5) afirma que todas las reglas que se verifican en los números naturales se verifican para los objetos representados por letras.

Todo cálculo algebraico se puede realizar basándonos en el conocimiento de las operaciones aritméticas básicas y las cinco propiedades características del sistema numérico que los alumnos deben conocer; la conmutativa y asociativa de la suma y el producto y la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

Por lo tanto, esperamos que el alumnado posea como conocimientos previos los hechos relativos a la suma y al producto, las propiedades anteriormente mencionadas y que se maneje con ellas sin mucha dificultad. Además de esto, necesitamos que conozcan aspectos geométricos básicos como; las áreas de figuras planas o el cálculo de perímetros, así como fórmulas de la física como pueden ser: $v = \frac{e}{t}$

C2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Dado que la educación matemática durante la etapa de Primaria versa fundamentalmente sobre la aritmética, se espera que así sea. Para comprobarlo, durante la primera clase realizaremos una evaluación inicial, detallada en apartado H, en la que veremos cuales son los conocimientos que el alumnado posee, prestando especial atención a los alumnos con necesidades educativas especiales. Gracias a esa evaluación, nosotros podremos adaptar la programación preparada en relación con el objeto a enseñar.

C3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean estos conocimientos previos?

Atendiendo a los resultados obtenidos en la evaluación inicial, realizaremos un mayor énfasis en aquellos conceptos que no se encuentran lo suficientemente asimilados.

En particular, afianzaremos las cinco propiedades características del sistema numérico, porque gracias a ellas podremos introducirnos de manera satisfactoria en los primeros pasos del tema en los que se requiere un manejo de las operaciones. Si observamos un déficit en el manejo de las operaciones con números enteros en los alumnos con necesidades educativas especiales, les permitiremos el uso de la calculadora.

D. Razones de ser del objeto matemático

D.1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón de ser que vamos a tener en cuenta para la introducción de este objeto matemático tan potente no será la generalización de la aritmética, sino la resolución de problemas, relacionados con campos que el alumno conozca.

Los problemas son tareas creativas, exigentes e interesantes para la mente humana que nos ayudan a ser capaces de entender los conceptos que utilizamos mediante ejemplos concretos. Por ello, disponer de una herramienta más para resolverlos será motivador.

D.2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Efectivamente así es. El álgebra apareció como instrumento para resolver problemas de manera eficaz y efectiva. Si bien es cierto, que algunos de los problemas que resolvemos por medio del álgebra pueden ser resueltos con modelos aritméticos, el familiarizarse con esta terminología ayudará a avanzar en otros campos matemáticos. Incluso antes de la introducción del simbolismo tal y como lo conocemos, el álgebra ha estado muy orientada hacia la resolución de problemas por lo que, podemos decir que esta razón de ser histórica coincide con la nuestra. Algunos hitos históricos que pueden ser iluminadores para la enseñanza son:

- La aritmética egipcia (resolvían problemas mediante ecuaciones lineales)
- La matemática Babilonia (resolvían ecuaciones cuadráticas)
- El álgebra de Diofanto de Alejandría conocido como "el padre del álgebra" (utilizó las letras para denotar los valores desconocidos)
- La matemática árabe (resolvían ecuaciones cuadráticas de manera geométrica)
- La matemática europea (comienza el simbolismo moderno y el papel de los números negativos en el álgebra)

(The Learning and Teaching of Algebra, 2017, p. 25)

D.3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Dado que nuestra razón de ser es la resolución de problemas, elegiremos para introducir el tema problemas que puedan ser fácilmente entendidos por los alumnos de un aula inclusiva y que conduzcan a hacerse una idea de la introducción de las ecuaciones y su manejo. Utilizaremos para ello recursos visuales o teatrales, que pueden ayudar a todos los alumnos.

Problema 1.

Esta primera serie de problemas se presenta para repasar las cinco operaciones básicas aprendidas en Primaria.

Un mago, que puede ser cualquier alumno de la clase, presenta la siguiente adivinanza: “Pensad un número, el que más os guste, sumadle 2, restadle 1, decidme el resultado y yo adivinaré qué número habíais pensado inicialmente”.

Otro alumno, hará ahora de mago y presentará este otro acertijo un poco más complicado: “Pensad un número, ¡pero no me lo digáis! multiplicarlo por dos sumarle uno, decidme el resultado y yo lo adivinaré”

Finalmente, otro mago nos dirá: “Tomad un número, coged su siguiente y multiplicarlo por dos decídmelo, y yo adivinaré el número que habéis elegido”

Problema 2.

Este tipo problema se presenta para introducir la idea de dato desconocido.

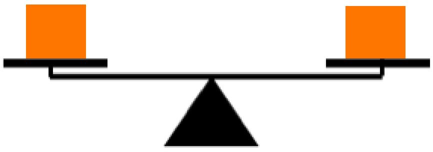
1. Tomemos un rectángulo de altura[1] 3 cm. Sabemos que su base es el doble de la altura. ¿Cuánto medirá la base?

2. Tenemos dos cartulinas cuadradas y las colocamos una junto a la otra como muestra la figura. ¿Qué relación hay entre los lados del rectángulo formado?

[1]Llamaremos base al lado sobre el que se apoya el rectángulo y altura al lado perpendicular a la base.

Problema 3.

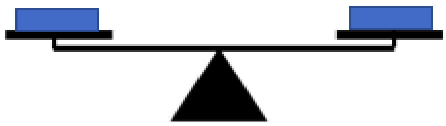
Seguiremos una secuencia marcada en la que trataremos de introducir de manera pausada el concepto de “equilibrar la balanza”. Para ello, llevaremos a clase una balanza real y les haremos pensar sobre las siguientes cuestiones. Supongamos que tenemos una balanza equilibrada.



- ¿Qué podemos hacer para desequilibrar la balanza?

- ¿Qué podemos hacer para volverla a equilibrar?

- Y si quisiéramos equilibrarla de otra manera, ¿qué deberíamos hacer?



Nuestra intención es transmitir la idea de equilibrio y desequilibrio y hacer que el alumnado comprenda qué debemos hacer para equilibrar o desequilibrar una balanza. Estas preguntas son orientativas ya que podríamos formular más, como, por ejemplo:

- ¿De qué otra forma podemos equilibrar una balanza ya equilibrada?
- ¿Qué dos maneras hay para desequilibrar una balanza equilibrada?

Problema 4.

Por último, presentaremos las ecuaciones de una manera visual con este problema:

- Entre dos amigos tenemos 4 lápices, si yo tengo el triple que mi compañero. ¿Cuántos tenemos cada uno?

D.4 Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Nos encontramos en un aula inclusiva y nuestro principal objetivo es que los alumnos aprendan de manera comprensiva y no de manera mecánica. Perseguimos, entre otras cosas, el fomentar la motivación y aumentar la autoestima de las personas con necesidades especiales. De ahí que cuidemos especialmente los problemas iniciales.

Debido a que puede que algún alumno con necesidades especiales no sepa leer, los problemas planteados contarán con ayuda visual o incluso podrán ser representados.

Con el primer problema queremos que el alumnado descubra las operaciones inversas; es decir, la suma y la resta o la multiplicación y la división. Este será introducido de manera teatral ya que un alumno hará de mago y tratará de adivinar el número que sus compañeros habían pensado inicialmente. Este "mago" ha de ser cuidadoso y comprender bien que si al resto de la clase le pedimos que piense un número y que le sume uno, él, para obtener el número inicial, deberá realizar el proceso contrario, es decir, restar uno.

Con este problema trataremos de introducir las técnicas a utilizar para resolver ecuaciones de manera intuitiva.

Con el segundo, queremos de introducir la idea de lo desconocido de forma reducida, inicialmente lo haremos con números para que vean que habrá veces que los datos podrán estar en función de otros y que por medio de operaciones algebraicas podemos obtener la solución y después, con el segundo problema queremos transmitir la idea de relación de dos cosas que se encuentran completamente desconocidas.

El problema de la balanza nos introducirá en la técnica de resolución de ecuaciones que través de la manipulación de la balanza buscamos entender a grandes rasgos. Distribuiremos a los alumnos en grupos utilizando cada grupo una balanza. Queremos que, por medio de las preguntas realizadas, sean capaces de entender la idea de equilibrar y desequilibrar la balanza al menos de una manera intuitiva para que posteriormente comprendan más fácilmente la técnica de resolución de ecuaciones.

El cuarto problema será realizado por parejas para introducir al alumnado en el mundo de las ecuaciones de una manera simple y visual. Para ello, planteamos un problema en el que, para su resolución, es necesaria una ecuación pero que a su vez se puede resolver de manera manipulativa con los bolis que ellos mismos tienen en estuche.

E. Campos de problemas

E.1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Estableceremos una clasificación dividiendo los problemas tanto por temática como por dificultad de ecuación. En cuanto a la temática, que suele ser uno de los principales problemas del alumnado, intentaremos que estén relacionados con actividades que ellos conozcan o con temas trabajados en otras asignaturas.

Según la temática los dividiremos en:

T1. Problemas numéricos: problemas en los que se realicen operaciones con los números, ya que estos han sido trabajados en profundidad.

T2. Problemas geométricos: problemas en los que se usen relaciones geométricas en las que nos falte un dato. Es claro que las figuras empleadas han de ser conocidas de Primaria.

T3. Problemas de descomposición de conjuntos: problemas en los que trabajaremos la relación entre dos conjuntos que forman parte de un todo.

T4. Problemas de distancias y velocidades: problemas en los que utilizaremos fórmulas de la velocidad y de distancias. Estos serán los más complicados por lo que no se propondrán a alumnos con necesidades educativas especiales. Al igual que los geométricos se espera que las relaciones a utilizar hayan sido vistas con anterioridad, esta vez en la asignatura de ciencias.

Según la dificultad de la ecuación a resolver estipularemos el siguiente orden:

D1. Ecuaciones con operador aditivo: $x + a = b$

D2. Ecuaciones con operador multiplicativo: $ax = b$

D3. Ecuaciones con operador aditivo y multiplicativo: $ax + b = c$

D4. Ecuaciones con operador aditivo y multiplicativo en ambos miembros:

$ax + b = cx + d$

D5. Ecuaciones en las que haya que reducir para llegar a una de tipo D4.

Se podría matizar todavía más, viendo si “a, b, c, d” son números naturales, enteros o racionales. No lo haremos inicialmente para no complicar la clasificación, aunque lo tendremos en cuenta para la graduación de los problemas.

Los problemas que plantearemos para las personas con necesidades educativas especiales serán aquellos de dificultades D1 y D2 en los que “a”, “b” y las soluciones que obtengamos serán siempre números naturales, de esta manera evitaremos dificultades que puedan surgir por el uso de la aritmética. Estos problemas irán acompañados de un recurso visual para facilitar todavía más la comprensión del enunciado.

Los problemas de dificultades D3 y D4 serán realizados por el resto de la clase o aquellas personas que, aunque tengan necesidades educativas especiales, sepan desenvolverse sin dificultad en el contexto de las ecuaciones. En estos problemas “a, b, c y d” podrán pertenecer a los números reales, algo que complicará más su resolución.

Proponemos ahora una colección de problemas para resolver en el transcurso de la unidad y los clasificaremos atendiendo a los dos criterios anteriormente descritos. Algunos de estos problemas contarán con recursos visuales para ayudar a la comprensión del alumnado con necesidades educativas especiales.

Problemas T1. Problemas numéricos:

D1. Si a un número le sumo 12 obtengo como resultado 14. ¿Qué número es? ($x + 12 = 14$)

D1. Sumándole a un número 5, obtengo como resultado 20. ¿Qué número tenia originalmente? ($x + 5 = 20$)

D2. A un número le sumo él mismo obtengo 16 ¿Qué número es? ($x + x = 16$)

D2. Si a un número le sumo su doble obtengo 21. ($2x + x = 21$)

D3. Un número más su siguiente es 13 ¿Qué número es? ($x + x + 1 = 13$)

D3. Tres números consecutivos suman 27. ¿Qué números son? ($3x + 3 = 27$)

D3. La suma de dos números es 30. Sabemos que uno es 10 unidades mayor que el otro. ¿Qué número es? ($x + 10 + x = 30$)

D4. Dividir un número entre 2 es igual que restarle 5. ¿Qué número es? ($\frac{x}{2}$ = x–5)

D5. Si consideramos un número y a este le sumamos 5, esto es igual al triple de su consecutivo. ¿Cuál es el número? (x + 5 = 3 (x + 1))

Problemas T2. Problemas geométricos:

D1. Desconocemos la altura del rectángulo, pero sabemos que, si le sumamos 2, mide igual que la base que vale 5 unidades. ¿Cuánto mide el lado?

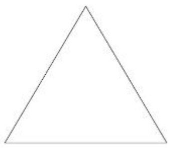
Altura

Base = altura + 2

Si la BASE= 5 centímetros

¿Cuánto mide la **altura**? (5 = x + 2)

D2. Un triángulo equilátero tiene un perímetro de 15 cm ¿Cuánto mide cada lado?



Equilátero

Perímetro = 15 centímetros

¿Cuánto mide **cada lado?** (3x = 15.)

D2. En un rectángulo un lado mide el doble que el otro, sabemos que su perímetro es 24cm. ¿Cuánto mide cada lado?

Lado a

doble de lado a

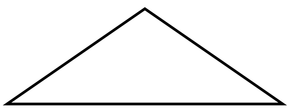
Perímetro = 24 centímetros

¿Cuánto mide **cada lado**?

(x + x + 2x + 2x= 24)

D3. En un triángulo isósceles el lado desigual mide 3 cm más que los lados iguales. Si el perímetro mide 27 cm ¿Cuánto mide cada lado?

Isósceles



Perímetro = 27 centímetros

¿Cuánto mide **cada lado**?

(x + x + x + 3= 27)

D3. Cada lado de un triángulo mide 2 cm más que su anterior. Su perímetro es 12 cm ¿Cuánto mide **cada lado**? (x + x + 2 + x + 4 = 12)

D4. Sabiendo que la altura de un rectángulo mide 6 cm y que si a su área le sumamos 4 cm nos da el perímetro ¿Cuánto vale **cada lado**? $(12 + 2x = 6x + 4)$

D4. Queremos calcular **la altura** de un rectángulo. Sabemos que su base es 5 cm y que su área mide 1 cm más que el perímetro. $(10 + 2x + 1 = 5x)$

D5. Sabemos que el doble de la base menos 3 cm, es igual a la altura de un rectángulo. Si la altura mide 10 cm. ¿Cuánto vale la **base**? $(2(x – 3) = 10)$

D5. Para construir un prisma de base cuadrada con varillas de alambre se ha utilizado 1 metro de alambre. La altura del prisma es tres veces mayor que el lado de la base. Cuantos cm mide cada **arista**. $(2\ (x + x + x + x) + 3*4x = 100)$

Problemas T3. Problemas de repartos:

D2. María gasta 20€ en un pantalón y una camisa. No sabe cuánto le cuesta cada prenda, pero sabe que la camisa vale 3 veces más que el pantalón. ¿Cuánto cuesta **cada prenda**? $(3x + x = 20)$

 +  = 32€

CAMISA	TRES VECES MAS QUE EL PANTALON
PANTALÓN	¿?

D2. A una fiesta asistieron 51 personas. Sabemos que fueron el doble de hombres que de mujeres. ¿Cuántos **hombres** fueron? $(2x + x = 51)$

D3. Tenemos 56 peces distribuidos en dos peceras. En la primera hay 10 peces más que en la segunda. ¿Cuántos **peces** hay en cada una? $(x + 10 + x = 56)$

PRIMERA PECERA	
SEGUNDA PECERA	

D3. Repartimos 43 caramelos entre Juan, Mateo y Pedro. Juan tendrá 3 caramelos más que Mateo. Pedro tendrá el doble que Mateo. ¿Cuántos **caramelos** tendrá cada uno? (4x + 3 = 43)

JUAN	
MATEO	
PEDRO	

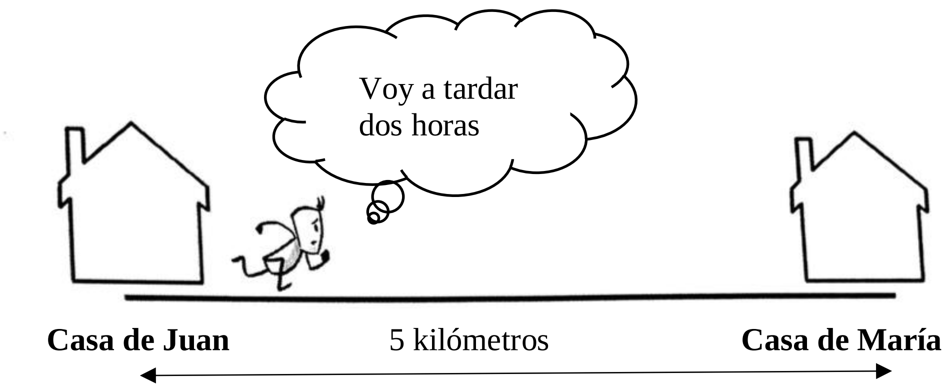
D4. En una clase sabemos que el doble de chicas más 5 es igual al número de chicos menos 1. ¿Cuántos **chicos** hay? (2x + 5 = x – 1)

D5. En una granja hay conejos y gallinas. En total tenemos 46 cabezas y 142 patas. ¿Cuántos **conejos** y cuantas **gallinas** hay? (4x + 2 (46 – x) = 142)

D5. En un comedor hay sillas de 4 patas y taburetes de 3 patas. Sabemos que hay 100 taburetes más que sillas y que en total hay 800 patas. ¿Cuántos **taburetes** hay? (4x + 3(x +100) = 800)

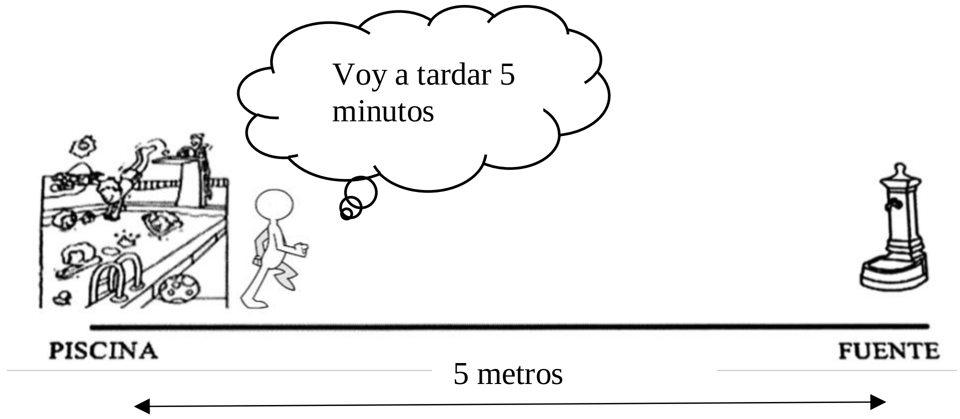
Problemas T4. Problemas de distancias y velocidades:

D2. Juan quiere ir a casa de María. Tarda 2h en recorrer los 10km que hay. ¿A qué velocidad va? (10 = 2x)



¿A qué **velocidad** voy?

D2. En el pueblo para ir de la piscina a la fuente tardas 5 minutos. Sabemos que hay 500 metros. ¿A qué velocidad vamos? (x = 500 / 5)



¿A qué **velocidad** voy?

D3. Un ciclista recorre 1600 metros en tres etapas. En la primera recorre 100 metros. Y en la segunda recorre el doble de la tercera. ¿Cuánto **ha recorrido** en cada una? (100 + x + 2x =1600)

D4. Un nadador hace dos pruebas diferentes. En la primera tarda el doble que en la segunda menos 22 segundos. ¿Cuánto tarda en **la primera**? (2x – 22 = x)

D5. Dos pueblos están separados a 2000 metros. Una persona sale del pueblo A con velocidad constante de 30m/s. Otra persona sale de B con una velocidad constante de 20m/s. ¿A qué **distancia** del pueblo A se encontrarán?

D.5. En una maratón de 45km, el ganador corrió a una velocidad media de 16km/h mientras que el ultimo clasificado lo hizo a 7,5 km/h. ¿Cuánto **tiempo** tardaron en llegar a meta cada uno de ellos?

E.2 ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

En los problemas introductorios permitíamos utilizar el tanteo y la intuición. Pero, para la resolución de estos problemas es necesario conocer bien la técnica de resolución de problemas propuesta en el apartado B, atendiendo a los aspectos claves para evitar la mecanización y la de resolución de ecuaciones presentada en el apartado F.

Tendremos que realizar especial énfasis en la traducción al lenguaje algebraico para facilitar la comprensión por parte de todos los alumnos.

E3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Recordando que nos encontramos en un aula inclusiva y que queremos fomentar que todos los alumnos tengan una oportunidad de aprender, hemos realizado una graduación en el nivel de dificultad de los problemas. Sabemos que el poder estudiar lo mismo que el resto de sus compañeros es una fuente de motivación para las personas con necesidades educativas especiales que les ayuda a aumentar su autoestima. (Monari, 2011). Por lo tanto, es importante garantizar que estos alumnos tengan algún éxito.

El principal problema de las personas con necesidades educativas especiales es el uso del lenguaje y como consecuencia, el comprender textos escritos. Hemos intentado adaptar algunos problemas por medio de un lenguaje visual para favorecer la comprensión e incluso hemos resaltado el dato que estamos buscando en negrita. Ayudarles por medio de mensajes concisos, preguntas cortas y problemas que puedan ser entendidos fácilmente es un punto de apoyo clave para ellos.

Como herramientas de apoyo para todos los alumnos utilizaremos: material manipulativo, calculadoras y en los casos en los que sea posible profesores de apoyo.

Gracias al material manipulativo podremos convertir los conceptos más abstractos en elementos tangibles y de esta manera, realizar problemas de manera más visual que puede ser un elemento eficaz para favorecer la comprensión.

Permitiremos el uso de las calculadoras porque el cálculo de operaciones básicas de la aritmética suele ser un problema para los alumnos con necesidades especiales y no queremos que esto sea un impedimento para su desarrollo cognitivo del álgebra.

Si es posible contar con profesores de apoyo esto será fundamental para que estos alumnos vean que no se encuentran solos. De esta manera podríamos favorecer el autocontrol y la socialización con el resto de los alumnos de la clase. Si no es posible, haremos una agrupación del aula que tenga el mismo objetivo.

Inicialmente, presentaremos los mismos problemas para todos, pero como la dificultad que perseguiremos para los alumnos con necesidades educativas especiales es menor, deberemos adaptarnos a ello esto se recogerá en el apartado G.

F. Técnicas

F.1 Diseña los distintos tipos de ejercicios que vas a presentar en el aula.

Los ejercicios presentados van a seguir la siguiente clasificación:

TE1. Traducir al lenguaje algebraico

TE2. Agrupar términos semejantes

TE3. Resolver ecuaciones

Graduaremos las técnicas adaptándolas para las personas con necesidades educativas especiales. Para ello, haremos una transición entre el uso de los números y el de las letras, utilizando unas tarjetas cuyo uso explicaremos en el apartado F2.

TE1. Traducir al lenguaje algebraico

<u>Ejercicio 1. Inicio de traducción:</u>

Traducir las siguientes frases en los casos:

a) Si el número es 3
b) Si representamos el número con una tarjeta roja (ver apartado F2.)
c) Si llamamos “x” al número

- Un número más 4 unidades
- El triple de un número más 2 unidades
- La mitad del número
- Doble de un número más 5 unidades
- El cuádruple de un número dividido entre
- Sumamos 3 unidades a un número y lo multiplicamos por 2
- Quintuplicamos un número y le sumamos 1 unidad
- El número menos 2 unidades
- Elevamos al cuadrado un número
- Cuadruplicamos un número
- El número más una unidad

Ejercicio 2. Traducción en un contexto

Traducir a lenguaje algebraico las siguientes frases en los casos:

a) Si la magnitud vale 2
b) Si representamos la magnitud con una tarjeta roja (ver apartado F2.)
c) Si llamamos “x” a la magnitud

- La base de un rectángulo mide 4 centímetros más que la altura

ALTURA	
BASE	

- Hallar el perímetro de un cuadrado

LADO	
PERIMETRO	

- Antonio tiene 5 manzanas más que Juan

JUAN	
ANTONIO	

- Si tengo un número de cabras:
    - ¿Cuántas patas tengo?
    - ¿Cuántas cabras hay después de nacer 18?
    - ¿Cuántas cabras tengo después de regalar 15?

Ejercicio 3. Traducción de igualdades en expresiones algebraicas

Traducir las siguientes expresiones:

a) Si representamos el número con una tarjeta roja (ver apartado F2.)
b) Si llamamos “x” al número

- El doble de un número más uno es 13

- El triple de las galletas de Juan es 18
- Cuatro libros más que Pedro es lo mismo que tener 5 libros

TE2. Agrupar términos semejantes

Ejercicio 4. Agrupar en términos semejantes

A continuación, vamos a jugar al dominó, este tendrá dos niveles. (Para encontrar el segundo nivel véase anexo 3).

Reescribe cada una de las expresiones algebraicas de manera simplificada obteniendo identidades.

x + 2	0	2x – x - 3	5	2x – x + 1	5x
x + 3	x - 3	x – x	x + 1+2	x + 5 - x	x + 1

TE3. Resolver ecuaciones

Ejercicio 5. x + a = b

1. x + 7 = 12
2. x + 4 = 15
3. x + 3 = 11
4. x + 8 = 11
5. x + 3 = 2
6. x + 5 = 3
7. 6 + x = 5
8. x $-\frac{1}{2}$ = 1
9. x - $\frac{2}{3}$ = $\frac{2}{3}$

Ejercicio 6. ax = b

1. 4x = 16
2. $\frac{x}{2}$ = 4
3. – 5x = - 25
4. 3x = 9
5. -7x = 49
6. $\frac{x}{5} = -10$
7. 6x = -30
8. 3x = $\frac{3}{2}$
9. $\frac{x}{5} = -\frac{1}{10}$

Ejercicio 7. ax + b = c

1. 11 = 4x + 7
2. 3x + 1 = 55
3. 5x + 2 = 7
4. 2 + 3x = 3
5. 2 - $\frac{4x}{3}$ = -2
6. 4x + 5 = -11
7. 3 + $\frac{x}{5}$ = -4
8. 2 = 3 + 4x
9. 5- 2x = 1

Ejercicio 8. ax + b = cx + d

1. 2x – 1 = x + 2
2. 4x + 2 = 12 - x
3. 5 – x = 4 – 3x
4. 5 – 3x = -2x + 4
5. 8x + 3 = 5x
6. 2 – 6x = x + 16

Ejercicio 9. Operaciones con paréntesis.

1. 7 – 2(5x – 1) = 5+12 – 8x
2. x – 4 = 3 – (2x + 4)
3. 3(x – 1) – 4(x + 1) + 1 = 0
4. 2($\frac{x}{3}$ - $\frac{x}{4}$)= 5 + $\frac{5x}{6}$

F.2 ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Las técnicas las elegiremos con especial cuidado ya que nos encontramos en un aula inclusiva. Incidiremos en técnicas que supongan una comprensión de lo que se está haciendo y no una mecanización y, sobre todo propondremos técnicas que sean adaptables a alumnos con necesidades especiales.

Para introducir la idea de lo desconocido nos hemos basado en una idea propuesta por una especialista en educación especial (Véase anexo 4) y la hemos desarrollado. Nuestro objetivo es que gracias a la potencia visual de dicha propuesta todos los alumnos den un paso en el proceso de abstracción de los números a las letras.

Para ello, hemos diseñado una serie de tarjetas de tres colores. (Véase anexo 5):

1. Rojo para los números desconocidos.
2. Verde para los números conocidos.

3. Azul para el signo igual.

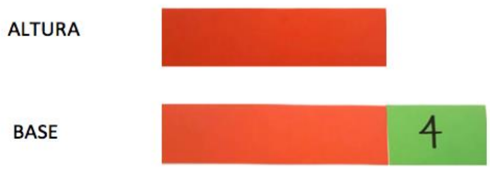
Las tarjetas rojas que juegan el papel de las “x” serán del mismo tamaño. Para representar $\frac{x}{2}$ o $\frac{x}{3}$ tendremos preparadas otras tarjetas rojas de la mitad o de la tercera parte de la longitud de una tarjeta roja completa.

Las tarjetas verdes serán los números conocidos y están inspiradas en las regletas de Cuisenaire. Los alumnos ya conocen dichas regletas y únicamente verán una diferencia; que aquí todos los números tienen el mismo color y lo único que variaremos será su longitud, siendo esta proporcional al número representado.

Las reglas para el uso de las tarjetas serán las siguientes:

1. Una tarjeta a continuación de otra significa que sumamos su valor, sean rojas o verdes.
2. Una tarjeta numérica debajo de otra significa que restamos su valor.
3. Para expresar multiplicaciones “nx”, necesitaremos n tarjetas rojas.
4. Si queremos dividir la “x” entre un número tendremos otras tarjetas rojas de tamaño menor. Solo tendremos $\frac{x}{2}$ o $\frac{x}{3}$.

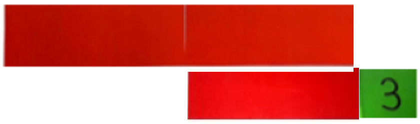
- Para los ejercicios TE1. en lugar de sustituir directamente por números desconocidos, haremos un paso intermedio para los que lo necesiten y estos números serán sustituidos por tarjetas rectangulares rojas. Veamos algún ejemplo.

La base de un rectángulo mide 4 cm más que la altura	
Un número menos 2 unidades	
El doble de un número	El doble 
La mitad de un número	Número  Mitad 

El doble de un número más uno es igual a trece	

Tras realizar este paso intermedio, aquellos alumnos que puedan comenzarán a utilizar la “x”.

- Los <u>ejercicios TE2</u>. pueden ser realizados con tarjetas. Veamos algún ejemplo:

x + 1 + 2		
2x – x - 3		

Del mismo modo, el objetivo es hacer más comprensible la transición hacia el uso de la “x”.

- En cuanto a los <u>ejercicios TE3</u>. propondremos la aplicación explicita de la ley de la balanza para resolver las ecuaciones, primero con tarjetas y después con “x”. Con esto nos referimos a que en cada paso señalaremos la cantidad que vamos a sumar, restar, multiplicar o dividir a ambos lados de la ecuación. Veamos un ejemplo. (Para más ejemplos de ecuaciones véase anexo 6):

Ejemplo 1: x + a = b

x + 3 = 4	
-3 **x = 1**	

Es cierto, que esta técnica cuenta también con una serie de limitaciones que describiremos a continuación.

Las tarjetas verdes son números naturales del 1 al 10 por lo que:

1. Las soluciones han de ser positivas y enteras para que se pueda realizar la ecuación.
2. Números mayores que 10 no pueden ser escritos con una única tarjeta por lo que será un poco mas costosa su resolución.
3. Las tarjetas verdes solo son números naturales por lo que no podemos trabajar con números fraccionarios.

En cuanto a las tarjetas rojas, sus limitaciones serían las siguientes:

1. Para escribir ecuaciones en las que aparezca "nx": si "n" es grande, se hará costosa la traducción y si "n" es menor $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ no tendremos tarjetas preparadas.
2. Ecuaciones del estilo "ax = b", se podrán realizar cuando "b" sea múltiplo de "a". (Veremos la razón en el anexo 6).

Estas limitaciones no se refieren a la comprensión del proceso de resolución de ecuaciones, sino al tipo de números que se pueden utilizar. Por ello no nos parecen importantes en un momento en el que primamos la comprensión.

Además, para favorecer todavía más la comprensión hemos desarrollado una versión de esta técnica en Geogebra. (Véase anexo 7).

F.3 Dichas técnicas, ¿Están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Sí. El campo de problemas propuesto se puede resolver utilizando las tres técnicas que estamos trabajando.

Y gracias al uso de las tarjetas podemos tener una mejora del aprendizaje de los alumnos a los que les cueste más el proceso de abstracción.

F4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Los ejercicios se encontrarán secuenciados y con unos pasos muy marcados para que no pueda existir confusión entre ellos. Como vemos en el ejercicio 1, hemos dividido la tarea en tres para que no se trabajen muchas cosas a la vez:

“*Las personas con necesidades educativas especiales tienen dificultad en trabajar con muchas cosas a la vez puesto que tienen debilidad en recordar”*

(Monari, 2011, p.5 33)

En el ejercicio 2 como podemos ver, para fomentar que el alumnado trabaje de manera más precisa, realizaremos unas tablas que favorecerán al orden y la concentración, en ellas se verá de manera explícita qué datos están siendo buscados favoreciendo a que la traducción sea más sencilla.

En los ejercicios 3 y 4 trabajaremos con las tarjetas la traducción de igualdades y el concepto de identidad, favoreciendo la comprensión por medio de recursos visuales.

Por último, a partir del ejercicio 5 se proponen ejercicios de ecuaciones para reforzar la técnica y ayudar a resolver posteriormente problemas. Estos se encontrarán secuenciados de manera que, en cada apartado vemos qué tipo de ecuación ha de resolverse, pero dentro de cada uno de los ejercicios podemos obtener soluciones: naturales, enteras o racionales. En los ejercicios 5, 6 y 7 los apartados del 1 al 4 trabajarán soluciones en los naturales, los del 5 al 8 en los enteros y los restantes en los racionales. Trataremos de que todos sean capaces de resolver y de entender la mayor parte de estos ejercicios propuestos, aunque las personas con necesidades especiales únicamente deberán realizar aquellas ecuaciones cuya solución sea natural o entera. En cuanto a los ejercicios 8 y 9, solamente serán realizados por aquellas personas cuyo ritmo sea más avanzado, no obligando a aquellas con necesidades educativas especiales a realizarlos.

En el aula convivirán las dos técnicas planteadas; la resolución de ejercicios por medio de tarjetas y la resolución de manera algebraica. Es cierto, que implementar dos técnicas puede tener ciertas dificultades. Supondremos que contamos con profesores de apoyo y sino se propondrían grupos cooperativos. La explicación ha de ser siempre para todos los alumnos, aunque esto nos lleve a tener diferentes velocidades en el aula:

- Alumnos que tengan más dificultades para comprender qué realizamos.
- Alumnos que entiendan de manera rápida la utilización de las tarjetas, pero, les cueste dar el paso a la utilización de la “x”.
- Alumnos a los que el uso de las tarjetas les permita una comprensión algebraica.

Para tratar de manejar esta situación, cuando creamos que el alumno es capaz de dejar a un lado las tarjetas y comenzar a escribir en el papel, le daremos la opción. Por lo tanto, debemos ser flexibles a la hora de la introducción de técnicas y dejar que sea el alumno el que finalmente decida cuál de las dos le es más útil.

Nuestro objetivo es la comprensión más que la complejidad de los cálculos, por lo que al igual que en los problemas el uso de la calculadora se encontrará permitido.

G. Tecnologías (justificación de las técnicas)

G1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

La tecnología que sustenta a la técnica TE1. es un nuevo lenguaje universal de las matemáticas, el álgebra. Algunas de las palabras de nuestro lenguaje ordinario tienen un significado distinto al significado matemático. Por lo que, de esta insuficiencia nace la necesidad de generar propias palabras y reglas en las matemáticas.

La técnica TE2 se justificará mediante hechos numéricos, las cinco propiedades dadas en Primaria y la definición de identidad algebraica:

"*Igualdad algebraica que se verifica siempre, independientemente de los valores que tomen las letras.*"

La técnica TE3 se basará en el enunciado de la ley de la balanza:

"Si sumamos, restamos, multiplicamos, dividimos lo mismo en los dos miembros de una ecuación, obtendremos una expresión equivalente."

Gracias al cual definiremos el concepto de ecuación equivalente:

"Diremos que dos ecuaciones son equivalentes si poseen la misma solución."

De esta manera se justifica la técnica usada para resolver ecuaciones tanto de forma algebraica como por medio de las tarjetas.

G2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Lo ideal sería que la justificación de las técnicas fuera surgiendo a lo largo de la utilización de estas. Si bien es cierto que, para favorecer la justificación de la resolución de ecuaciones, hemos presentado de manera introductoria ejercicios en los que son ellos mismos los que deben utilizar la balanza con el objetivo de que al usar este material manipulativo se realicen una idea fiel de lo que estamos buscando.

Por otra parte, tecnologías como la definición de ecuación equivalente deberán ser introducidas por el profesor o al menos, el profesor deberá realizar su institucionalización.

Y finalmente, las cinco propiedades aritméticas ya han sido justificadas en Primaria. Por lo tanto, no incidiremos sobre ellas.

G3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Nuestro principal objetivo es que todo el alumnado aprenda y que lo haga a su propio ritmo. Antes de enunciar una definición, una ley o de imponer una manera de realizar algo, trataremos de enseñarle al alumno a pensar por sí mismo buscando un sentido lógico de lo que realizamos. Por ello, para explicar la ley de la balanza usaremos material manipulativo y mediante las preguntas propuestas, llamaremos a la reflexión acerca de este fenómeno.

El institucionalizar las propiedades o definiciones, no lo haremos en un primer momento, sino que esperaremos a tener la necesidad de explicarlas para que así el alumno tenga el tiempo necesario para reflexionar acerca de ellas.

G4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Trataremos que sea el alumno quien vaya descubriendo los conceptos matemáticos para que exista una necesidad para su institucionalización.

Al encontrarnos en un aula inclusiva deberemos ir adaptándonos a los diferentes ritmos que se nos planteen, por lo que, el contar con personal de apoyo en el aula será una buena manera de hacerlo.

H. Secuencia didáctica y su cronograma

H1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores. Establece la duración temporal aproximada.

Trataremos de establecer una secuencia didáctica lo más adaptada posible a todos los ritmos y que permita cierta flexibilidad. Dicha flexibilidad la conseguiremos por medio de ejercicios más fáciles o más difíciles para aquellas personas que necesiten más tiempo o vayan más avanzadas, así nadie pasará tiempo sin tarea que realizar.

Supondremos que los alumnos con necesidades especiales cuentan con profesores de apoyo y más tiempo para profundizar en lo que queremos enseñarles ya que no han de realizar todos los ejercicios propuestos.

Desglosemos cada una de las sesiones:

SESIÓN 1	Evaluación inicial
SESIÓN 2	Plantear los problemas iniciales que son la razón de ser.
SESIÓN 3	Traducción al lenguaje algebraico. Ejercicio TE1 • Método de las tarjetas • Uso de la "x"
SESIÓN 4	Ejercicios TE2
SESIÓN 5	Definición de identidad algebraica Ley de la balanza y ecuación equivalente
SESIÓN 6,7,8	Resolución de ecuaciones
SESIÓN 9	<u>Personas con n.e.e.:</u> Problemas D1 <u>Resto de la clase:</u> Problemas D1 y D2

SESIÓN 10	Personas con n.e.e.: Problemas D1 y comienzo D2 Resto de la clase: Problemas D3
SESIÓN 11	Personas con n.e.e.: Problemas D2 Resto de la clase: Problemas D4
SESIÓN 12	Personas con n.e.e.: Problemas D2 y D3 Resto de la clase: Problemas D5
SESIÓN 13	Síntesis y dudas
SESIÓN 14	Prueba de evaluación
SESIÓN 15	Corrección del examen

Teniendo en cuenta que para cada una de las sesiones contamos con 55 minutos distribuyamos el tiempo y las tareas a realizar.

Sesión 1.

Esta sesión será dedicada únicamente a la evaluación inicial. En ella queremos comprobar si los alumnos recuerdan las operaciones aritméticas básicas y las cinco propiedades características del sistema numérico; la conmutativa y asociativa de la suma y el producto y la propiedad distributiva del producto respecto a la suma. Queremos también comprobar su nivel de abstracción, pese a que no hayan visto nunca nada de álgebra. Describamos dicha evaluación inicial.

Comenzaremos con un ejercicio que se realizará en el cuaderno. Escribiremos una serie de igualdades en la pizarra que los alumnos deberán ir diciéndonos si son ciertos o no:

- 5 + 2 = 7
- 3 -1 = 2
- 2 (3 + 1) = 7
- 3 (2 – 1) = 3x2 – 3x1
- 7 (4 – 2) =7 x 2
- 4 / (2 + 1) = 2 + 1
- 0 / 1 = 1
- 3 + 2 (1-1) = 5 (1-1)
- (3+4) / 7 = 1

En grupos deberán encontrar los fallos de las siguientes operaciones:

- 3 – 2 (2-1) = 3 - 4 – 2 =3 – 6 = 3
- (4 + 3) – (2x3) + 1 = 7 + 6 +1 = 15
- (7 – 1) + (3 - 2) = 7 – 1 – 6 = 0

Y para finalizar plantearemos el siguiente tipo de ejercicio para conocer cual es su nivel de abstracción:

- 4 + 2 = $\boxed{}$
- 2 x $\boxed{}$ = 6
- 3 + $\boxed{}$ = 4
- 7 x $\boxed{}$ + 1 = 15

<u>Sesión 2.</u>

Esta sesión se dedicará a trabajar los problemas iniciales. Como los problemas son nuestra razón de ser queremos que el alumno comprenda que el Álgebra es una herramienta fundamental para resolverlos.

Trabajaremos 10 minutos de la sesión los problemas de magia; un alumno saldrá enfrente del resto realizando lo ya expuesto en el apartado D3. Este problema se puede repetir con diferentes alumnos y de diversas maneras, incluso aumentando su dificultad.

Continuaremos con los problemas geométricos con los que los alumnos se introduciran en la idea de lo desconcido y las relaciones, dispondremos de 15 minutos.

Posteriormente, llegará una de las partes más interesantes; la manipulación de la balanza. A esta actividad le dedicaremos 20 minutos, ya que debe quedar clara la idea de equilibrar o desequilibrar la balanza.

Finalmente, plantearemos el problema de los bolis con el que introduciremos la idea de ecuación.

<u>Sesión 3.</u>

En esta sesión se introducirá la técnica de traducción al lenguaje algebraico. Para ello, trataremos de realizar los ejercicios TE1. sin haber dado ninguna explicación formal.

Comenzaremos con el ejercicio 1, al que le dedicaremos 20 minutos. Este comienza con una mera traducción aritmética que esperamos que el alumnado sepa realizar y que sirva de repaso. Seguiremos con una traducción en la que será necesaria el uso de las tarjetas, la idea es decir que ahora el “número” es la tarjeta roja y que deben sustituirlo por ello. Finalmente, esa tarjeta roja se convierta en una “x”.

Una vez realizado esto, se dará una breve explicación de qué significa la “x” en el lenguaje matemático, de aproximadamente 10 minutos.

Seguiremos realizando los demás ejercicios de TE1, para el ejercicio 2 será suficiente con 10 minutos y al ejercicio 3 le dedicaremos el resto de la clase.

Sesión 4.

En esta sesión realizaremos los ejercicios de TE2., es decir, trabajaremos las identidades algebraicas, aunque la institucionalización de este concepto la realizaremos en la sesión siguiente. El ejercicio inicialmente se basará en sumar y restar monomios, para poder realizarlos será necesaria una explicación a la que dedicaremos 15 minutos. Posteriormente, se realizará el primer nivel del ejercicio, se tendrá preparado el segundo nivel para aquellas personas cuyo ritmo sea mayor.

Sesión 5.

Esta sesión se institucionalizará la definición de identidad. Comenzaremos la sesión retomando el ejercicio realizado el día anterior y realizaremos las siguientes preguntas:

- ¿Inicialmente hay alguna ficha igual a otra?
- Una vez realizadas las operaciones, ¿hemos conseguido fichas iguales?
- Cuando operamos escribimos la expresión de otra manera, por lo tanto ¿la manera inicial de escribirla y la final tienen alguna relación?

Dedicaremos a ello 20 minutos tanto para las preguntas como para la institucionalización, pero si el debate da pie a continuar más tiempo porque surgen conceptos interesantes continuaremos con él.

Para finalizar la clase, utilizaremos el programa creado en Geogebra, para explicar la ley de la balanza y a su vez, podremos explicar también el uso de las tarjetas. Una vez entendidos estos ejemplos básicos, los alumnos por medio de la manipulación de las tarjetas tratarán de comprender la ley de la balanza. Recordamos que las tarjetas tienen limitaciones explicadas en el apartado F2., por lo tanto, realizaremos las traducciones que las tarjetas permitan. Veamos qué ejercicio propondremos en clase:

1. Escribir con las tarjetas: x + 3 = 5
2. Si añado 2 unidades en uno de los miembros de la ecuación, ¿Qué debo hacer para que la ecuación se equilibre?
3. Si quito 1 unidad de uno de los miembros ¿Se encuentra equilibrada la ecuación?

Esto nos servirá para institucionalizar la definición de ecuación equivalente y explicar la diferencia existente con identidad.

Sesión 6, 7 y 8.

En estas sesiones nos dedicaremos a resolver las ecuaciones propuestas en TE3., tendremos en cuenta que estos ejercicios se encuentran secuenciados por tipo de ecuaciones y por niveles, como se explica en F4. Así pues, cada alumno llevará su ritmo y siempre se contará con más ejercicios por si alguien termina los propuestos.

Para las personas con necesidades educativas especiales realizaremos la siguiente secuenciación; la sesión 6 será dedicada al ejercicio 5, la 7 al ejercicio 6 y la 8 al ejercicio 7. Y para las personas cuyo ritmo sea más rápido seguiremos la siguiente; la sesión 6 será dedicada a los ejercicios 5 y 6, la sesión 7 al ejercicio 7 y el comienzo del 8 y la sesión 8 a lo que nos falte del ejercicio 8 y el ejercicio 9.

Atendiendo a cada ritmo antes de iniciarnos en un tipo de ecuación plantearemos un problema sobre el que los alumnos puedan pensar. Lo que buscamos es que vean una cierta utilidad en las ecuaciones.

Para las ecuaciones del ejercicio 5 el problema que plantearemos será el siguiente:

- "El dinero de mi hucha más 10€ que me ha dado mi madre hacen 20€ ¿Cuánto dinero hay en mi hucha?" (x + 10 = 20)

Para las ecuaciones del ejercicio 6 utilizaremos el siguiente problema:

- "Si duplicase el número de bolis que tengo, tendría 14 bolis. ¿Cuántos bolis tengo?" (2x = 14)

Para las ecuaciones del ejercicio 7 el problema será:

- "Si hubiera comprado el doble de barras de pan más una, hubiera tenido 3 barras. ¿Cuántas compré?" (2x + 1 = 3)

Para las ecuaciones del ejercicio 8 el problema planteado será:

- "Con el doble de la cantidad de dinero que llevaba menos 10€ podía comprar un libro y con la cantidad de dinero que llevaba más 5€ podía comprar el mismo libro. ¿Cuánto dinero llevaba?" ($2x - 10 = x + 5$)

Iniciaremos las clases proponiendo el problema y pidiendo al alumnado que lo traduzca al lenguaje algebraico. Posteriormente, nosotros explicaremos cómo se resuelve cada uno de los tipos de ecuaciones. Para el ejercicio 9 no plantearemos problema porque esperamos que el alumno sea capaz de resolverlas con los conocimientos ya adquiridos.

Sesión 9, 10, 11 y 12.

Estas sesiones serán dedicadas a la realización de problemas. Gracias a contar en el aula con profesores de apoyo podremos hacer frente a todos los ritmos que se nos planteen. Por lo tanto, la distribución es la ya dada y cada día iremos mezclando los diversos campos de problemas atendiendo a la dificultad. Recordemos que los alumnos con necesidades educativas especiales no realizarán problemas de tipo D4 y D5, ni problemas de velocidades y distancias.

Sesión 13.

En esta sesión trabajaremos las dudas que pueda tener el alumnado, aunque durante las sesiones ya hayamos ido atendiendo a todas las que hayan ido surgiendo. Se tratará de una clase en la que esperamos tener feedback y donde esperamos ver el progreso de cada alumno.

Si no surgieran dudas estableceríamos un debate o propondríamos preguntas para explicar conceptos que hayamos percibido que no han quedado muy claros.

Sesión 14.

Realización del examen que se encontrará en el apartado I1.

Sesión 15.

Dedicaremos la última sesión de la unidad a la corrección del examen y a recalcar aquellos aspectos que al corregir hemos observado que no han quedado claros.

I. Evaluación

I1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

Al encontrarnos en un aula inclusiva debemos tener en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje que podemos tener. Por lo tanto, diseñaremos un examen con diez preguntas. Se darán cinco minutos por ejercicio, comprendiendo que habrá algunos más difíciles que otros.

A los alumnos con necesidades especiales les pediremos solamente los cinco primeros para que dispongan aproximadamente de 10 minutos por ejercicio. Si terminan propuestos podrán continuar haciendo, pero les advertiremos que preferimos ejercicios entendidos que muchos mal hechos.

El modelo del examen será el siguiente:

P1. <u>Traduce los siguientes enunciados en expresiones algebraicas</u>

- Juan tiene 9 caramelos más que Carmen

CARMEN	
JUAN	

- María tiene el doble de lápices que Alicia

ALICIA	
MARÍA	

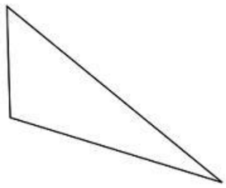
- Carlos y Mateo tienen los mismos vasos que Javier más uno

JAVIER	
CARLOS Y MATEO	

P2. Si a un número le sumo su triple obtengo 24. ¿Qué **número** es?

P3. Cada lado de un triángulo mide 1 cm más que su anterior. Su perímetro son 12 cm ¿Cuánto mide **cada lado**?

Cada lado 1 centímetro más que el otro



Perímetro 12 centímetros

¿Cuánto **cada lado**?

P4. Juan y Marta han pagado 26€ en una librería. Juan ha pagado 10€ más que Marta. ¿Cuánto ha pagado **cada uno**?

P5. En una papelería nos dicen que una calculadora vale 5 veces más que un boli. He pagado 36€ por los dos ¿Cuánto vale **cada uno** de ellos?

P6. Calcular el **número** que al sumarle 10 unidades se triplica.

P7. Los lados de un rectángulo distan 2 unidades. Su perímetro es 64cm. ¿Cuánto mide **cada lado**?

P8. Si a un número le sumo su siguiente obtengo 15. ¿Cuál es el **número** buscado?

P9. Mario tiene el doble de cromos que Julia. Si a los cromos de Mario le sumo 1, sé que tiene 11. ¿Cuántos tiene **cada uno**?

P10. Dos familias se encuentran a 100 kilómetros de distancia. La primera familia sale a una velocidad constante de 80 kilómetros por hora. La segunda familia sale a velocidad constante de 70 kilómetros por hora. ¿Dónde **se encontrarán**?

I2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretender evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Clasificaremos los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías que queremos evaluar en cada pregunta.

Los campos de problemas

<u>T1. Problemas numéricos:</u> (P2, P6, P8)

<u>T2. Problemas geométricos:</u> (P3, P7)

T3. Problemas de descomposición de conjuntos: (P4, P5, P9)

T4. Problemas de distancias y velocidades: (P10)

Las técnicas

Para la pregunta P1: Técnicas previas a la resolución

a) Uso del lenguaje algebraico, traducción
b) Simplificar expresiones algebraicas

Para los problemas del 2 al 10 las técnicas a utilizar son las mismas:

T1. Técnicas previas a la resolución de problemas

a) Uso del lenguaje algebraico
b) Simplificar expresiones algebraicas

T2. Técnicas de resolución de ecuaciones

T3. Procedimientos de resolución de problemas

- Identificar los datos conocidos y los desconocidos
- Asignar nombre a lo que no conoces mediante una frase en castellano
- Traducir a forma de ecuación
- Resolver, realizándolo por las técnicas anteriormente descritas
- Expresar la solución atendiendo al contexto
- Comprobar

Las tecnologías

Para P1. al ser una pregunta de traducción al lenguaje algebraico, las tecnologías que lo sustentan son la justificación de un nuevo lenguaje en el que a lo desconocido lo llamamos "x".

En cuanto a las tecnologías de P2. hasta P10. encontraremos dos; la definición de ecuación equivalente y la ley de la balanza. Definamos ecuación equivalente:

"*Diremos que dos ecuaciones son equivalentes si poseen la misma solución*."

Y enunciemos la ley de la balanza:

"Si sumamos, restamos, multiplicamos, dividimos lo mismo en los dos miembros de una ecuación, obtendremos una expresión equivalente."

I3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

A continuación, se expondrán las posibles respuestas de cada apartado y los posibles errores que podemos encontrarnos. No obstante, no incluiremos los errores referentes a operaciones, errores que surjan al aplicar mal una fórmula o errores que vengan de una mala comprensión de los pasos de resolución de la ecuación.

<u>Pregunta 1.</u>

Resolución: En esta pregunta lo que queremos comprobar es si nuestros alumnos han comprendido la traducción al lenguaje algebraico. Las respuestas esperadas son las siguientes:

CARMEN	x	x - 9
JUAN	x + 9	x

ALICIA	x	x/2
MARÍA	2x	x

JAVIER	x	x - 1
CARLOS Y MATEO	x + 1	x

Posibles errores: Puede haber fallos de comprensión del enunciado. Los enunciados 1 y 2 son bastante claros. Se les facilita la elección de la x porque en primer lugar está escrito el nombre de la persona que es más fácil tomar como referencia. No obstante, el apartado 3 exige una comprensión mayor porque el enunciado no es tan claro.

Por lo tanto, es posible que las respuestas obtenidas sean que Javier tiene un vaso más que Carlos y Mateo.

Pregunta 2.

Resolución: En este problema buscamos primero la traducción a lenguaje algebraico indicando inicialmente que "x = número desconocido" para posteriormente llegar a la traducción completa de la ecuación, es decir:

"un número + su triple = 24"

"$x + 3x = 24$"

Seguirían con el proceso de resolución de la ecuación pasando por ecuaciones equivalentes. El problema debe terminar cuando el alumno interprete su resultado y sea capaz de ver si verdaderamente lo ha resuelto de manera apropiada y si concuerda con la solución esperada.

Posibles errores: La mayor parte de estos podría venir por la mala comprensión del enunciado o por su no comprensión. Los errores que prevemos son:

- Traducción incorrecta del triple de un número escribiendo "$x + 3$".
- Errores en el manejo de ecuaciones equivalentes: "$x + 3x = 3x^2$ o $4x^2$".

Pregunta 3

Resolución: Principalmente, ha de existir una comprensión de qué significa que cada lado mide 1cm más que el anterior. Por lo que, el primer paso a realizar es la traducción a lenguaje algebraico, "x = la medida de $lado_1$" y "x + 1 = la medida del $lado_2$" y "x + 2 = medida del $lado_3$". Posteriormente pasamos a utilizar la relación que nos dice que el perímetro es la suma de todos sus lados:

"$x + x + 1 + x + 2 = 12$"

Una vez escrita, se debe resolver la ecuación y comprobar en el contexto si puede darnos dicha solución.

También es cierto que podríamos llamar a los lados "x -2, x-1 y x o x -1, x, x + 1", pero tal y como se encuentra planteado el problema no creemos que esto suceda.

Posibles errores: El punto más delicado podría encontrarse en la interpretación del contexto y saber traducir *"*cada lado mide 1 cm más que su anterior*"*. Veamos cuáles son los errores que pueden cometerse:

- La traducción de "x= la medida de un lado*"* y "lado anterior más una unidad".
- No conocer la fórmula del perímetro.
- Errores que provienen de operaciones con monomios: "x + x + x = x^3"
- Dejar el valor de la x como solución al problema siendo que se pide cada uno de los lados.

<u>Pregunta 4.</u>

Resolución: El primer paso para la resolución es saber quien es "x". En este caso podríamos definirla de dos maneras diferentes:

- "x = Dinero que pagar Marta" y, por lo tanto, "x + 10 = dinero que paga Juan"
- "x = Dinero que paga Juan" y, por lo tanto, "x -10 = dinero que paga Marta"

Por lo realizado en clase, será más frecuente la primera manera de traducir a lenguaje algebraico, por lo que la escritura de la ecuación es sencilla: "x + x + 10 = 26". Una vez resuelta la ecuación utilizando ecuaciones equivalentes y operaciones aritméticas es necesario recordar quien es "x" para deducir cuánto dinero pagó Marta y cuánto Juan.

Si se eligiera la otra manera de resolución, la ecuación sería "x + x – 10 = 26".

Posibles errores: Los errores pueden venir en este problema por otros factores no vistos anteriormente ya que hemos introducido la idea de reparto. Los que creemos que serán más frecuentes serán:

- La no comprensión del enunciado, confundiendo los 26€ con la cantidad que ha pagado uno de los dos.
- Errores de operaciones con monomios, por ejemplo: $x + x = x^2$
- Confusión al interpretar el resultado por saber a qué habíamos llamado "x"

Pregunta 5.

Resolución: Este ejercicio es parecido al anterior, la diferencia se encuentra a la hora de realizar los repartos. En este caso, “x = el precio del boli” y “5x = precio de la calculadora”.

De la misma manera que antes se planteará la ecuación “x + 5x = 36” y se resolverá por medio de ecuaciones equivalentes y operaciones aritméticas. Finalmente, el alumno deberá ser capaz de valorar si los resultados obtenidos son los correctos. Podría darse el caso de que algún alumno planteara que “x = precio de la calculadora” y “x/5 = precio del boli”. Sus operaciones se complicarían, aunque este planteamiento no es el esperado.

Posibles errores: Los posibles errores que serían encontrados fácilmente en este problema serían:

- La traducción de 5 veces más que el boli, ya que algún alumno puede interpretarlo como 5 unidades más que el boli, “5 + x”, en vez de “5x”
- Operaciones entre monomios como “x + 5x = $6x^2$ o $5x^2$”
- Confundir quién es la “x”

Pregunta 6.

Resolución: Se comenzará con la traducción al lenguaje algebraico diciendo que “x= número desconocido”, por lo que “3x = triple del número desconocido” para poder escribir la traducción completa de la ecuación, es decir:

“número + 10 = triple de si mismo”

“x + 10 = 3x”

Desde aquí se realizará la resolución de la ecuación obteniendo el número desconocido, dicha solución deberá ser interpretada correctamente.

Posibles errores: En este problema podemos predecir los siguientes errores:

- Error a la hora de hallar la “x”, debido a que la resolución esta ecuación es ligeramente más complicada que el resto.

- También creemos que los errores de traducción serán frecuentes ya que este enunciado no es tan intuitivo como lo era el resto de los enunciados.

Pregunta 7.

Resolución: Este problema tiene múltiples maneras de plantearse. Veamos mediante una tabla las diferentes formas llamar a las incógnitas:

cm de lado uno	x	x	x + 2	x - 2
cm de lado dos	x + 2	x - 2	x	x

Por lo que las ecuaciones planteadas pueden ser diversas. Teniendo en cuenta que nos dan el perímetro la ecuación que surge de la primera relación:

“$2x + 2 (x + 2) = 64$”

La resolución de esta ecuación requiere manejo de operaciones más complicadas como los paréntesis. Una vez obtenida la solución es necesario interpretarla y tener en cuenta quien ha sido llamado “x” y cómo hemos denotado al otro lado.

Posibles errores:

- En este problema hay un error muy esperado que será la dificultad para entender “que dista dos unidades”.
- Otro error puede venir de la dificultad a la hora de trabajar con los paréntesis y que escriban que “$2(x + 2) = 2x + 2$”
- La interpretación incorrecta del valor de la “x” puede también ser un problema que los lleve a error.

Pregunta 8.

Resolución: Al igual que en problemas numéricos anteriores llamaremos “x= número desconocido” y al hablar de su siguiente escribiremos “x + 1”. Por lo que, la traducción de:

“un número + su siguiente = 15”

“x + x + 1 = 15”

Posteriormente, por medio de ecuaciones equivalentes y operaciones aritméticas resolveremos la ecuación. Interpretando el resultado obtenido.

Posibles errores: Los errores que se pueden dar en este problema son:

- Error al escribir “el siguiente a un número”
- Error a la hora de interpretar la solución obtenida.
- Error al realizar la suma de monomios.

<u>Pregunta 9.</u>

Resolución: Para la resolución de este problema identificaremos la x diciendo que “x = número de cromos de Julia” y “2x = número de cormos de Mario”, pero podría haber otras formas de traducción que implicaran una mayor dificultad; “x= número de cromos de Mario” y “x/2 = número de cromos de Julia”. Utilizaremos la primera.

Pero realizada esta primera interpretación del problema, será necesario continuar con la traducción al lenguaje:

“Cromos de Mario + 1 = 11”

“2x + 1 = 11”

Una vez aquí únicamente se debe resolver la ecuación e interpretar el enunciado dándonos cuenta qué es la “x”.

Posibles errores: Este problema tiene una dificultad añadida que es una traducción al lenguaje algebraico inicial. Luego los errores serán:

- Problemas a la hora de traducir y de encontrar la ecuación a resolver, suponiendo que el dato de María no nos sirve o no llegando a entender la expresión “los cromos de Mario mas uno…”
- Errores a la hora de interpretar el resultado por no saber a qué hemos llamado “x”.
- Errores a la hora de responder a la pregunta, porque piensen que con haber obtenido la “x” es suficiente.

Pregunta 10.

Resolución: Este problema se resuelve con la ecuación de la velocidad constante. El tiempo recorrido para las dos familias es el mismo y llamaremos "x= la distancia a la que se encontrarán de la primera familia" y pues "100 – x= la distancia a la que se encontrarán de la segunda familia".

Luego, las ecuaciones que se nos plantearán serán:

$$\text{“}80 = \frac{x}{t} \text{ y } 70 = \frac{100-x}{t}\text{”}$$

Luego despejando las "t" que son iguales en ambas ecuaciones obtendremos la ecuación a resolver. Finalmente, se deberá interpretar el resultado.

Posibles errores: Este problema es el más complicado que hemos planteado, con el queremos atender a las personas con más capacidad. Exige un dominio de las fórmulas físicas y de su correcta interpretación. Los posibles errores podrían venir por:

- La necesidad de imponer condiciones que a priori no vienen dadas en el enunciado, como que los tiempos son iguales o que la distancia a la que se encontrarán será "x y 100 – x" generará fallos.
- El no saber despejar la "t".
- El ejercicio da como solución una fracción, algo que quizás les asuste y les haga plantearse si han realizado mal el ejercicio.
- No saber interpretar la solución.

I4. ¿Qué criterios de evaluación vas a emplear?

Para los criterios de calificación, usaremos el modelo de tercios (Gairín, J.M., Muñoz, J.M, Oller, A.M., 2012) propuesto durante las clases. Veamos de manera general cómo lo realizaremos.

Para P1. únicamente tendremos tareas principales. El problema es la mera traducción a lenguaje algebraico y dicha tarea principal será:

- Traducción al lenguaje algebraico: conocimiento de la ecuación y planteamiento de esta.

De P2. hasta P10. al ser problemas con técnicas y tecnologías parecidas realizaremos la siguiente clasificación:

(T.P.) Tareas principales:

(T.P.) Traducción al lenguaje algebraico: conocimiento de la ecuación y planteamiento de esta.

(T.A.) Tareas auxiliares, clasificándolas en dos subgrupos:

(T.A.E.) Tareas auxiliares específicas:

a) Simplificar expresiones algebraicas.
b) Conocimiento de los pasos para resolver una ecuación.
c) Correcta interpretación de la incógnita y del resultado y detectar incongruencias. Por ejemplo, en un determinado problema el alumno esta hallando los metros de altura de una torre y dicha altura le da negativa. Una correcta interpretación del resultado sería que el alumno fuera capaz de decir que entiende que esto no puede ser así porque una altura no puede ser negativa.

(T.A.G.) Tareas auxiliares generales:

a) Operaciones aritméticas
b) Aplicación de las cinco propiedades características del sistema numérico; propiedad conmutativa y asociativa de la suma y el producto y propiedad distributiva del producto respecto a la suma.
c) Fórmulas necesarias para la resolución

A continuación, describiremos los criterios de calificación teniendo en cuenta que cada pregunta del examen valdrá un punto y para los alumnos con necesidades educativas especiales dos puntos cada pregunta.

El P1. al ser un problema que tiene únicamente tareas principales o se podrá otorgar el máximo de la nota o no se otorgará nada.

Para los problemas de P2. al P10. los criterios de calificación serán homogéneos independientemente de su dificultad. Recordemos que las tareas principales restan hasta un 100% de la nota y se puede parar de corregir, que las tareas auxiliares especificas restas hasta un 66% de la nota y se continúa corrigiendo y las tareas auxiliares generales restan hasta un 33% de la nota y se sigue corrigiendo. Así pues, veamos nuestros criterios de calificación:

- Si se falla en la traducción al lenguaje algebraico (T.P.), el profesor quitará la puntuación del ejercicio y dejará de corregir.

- Si el alumno no conoce o se equivoca al reducir a ecuaciones equivalente por medio de sumas, restas de monomios (T.A.E. a), se quitará un 40% de la puntuación total del ejercicio y se seguirá corrigiendo.

- Si el alumno no conoce o se equivoca en la resolución de la ecuación (T.A.E. b) se le quitará un 40% de la puntuación.

- Si el alumno no realiza una correcta interpretación de la solución o no responde a la pregunta realizada pese a que ha resuelto correctamente el problema (T.A.E. c) se quitará un 40% de la puntuación del ejercicio.

- Si el alumno no realiza correctamente operaciones aritméticas (T.A.G. a) se le quitará un 20% de la calificación.

- Si el alumno escribe de manera incorrecta alguna de las fórmulas necesarias para la realización del problema (T.A.G. c) se le quitará un 20% de la calificación final.

Si el alumno realiza los problemas de una manera completamente diferente a la nuestra, pero el procedimiento es correcto, sus explicaciones y la solución también se le otorgará la máxima puntuación, salvo que esta manera incluya el ir probando números hasta que aparezca el cumple el enunciado, porque sino no podrá resolver problemas con números mas grandes.

J. Bibliografía

Álvarez, A.M., Díaz, M., & García, M. (2008). Ecuaciones. *Proyecto Secundaria 2º ESO Libro del profesor.* (pp. 134-153). Madrid, España: SM.

Arcavi, A., Drivjvers, P & Stacey, K. (2017). Some Lessons From History. *The Learning and Teaching of Algebra: ideas, insights and activities.* (pp. 25-47). Abingdon, Oxon: Routledge.

Baccarin, E., Benedetti, N. & Monari, E. (diciembre 2014). Strategie per avviare gli studenti con disabilità alla matemática avanzata: equazioni e geometría analítica". *Difficoltà di apprendimento.,* 10(2), 25-40.

Benedetti, k. & Monari, E. (30 de agosto de 2011). Learning mathematics in mainstream secondary schools: experiences of students with Down's syndrome. *European Journal of Special Needs education*. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1080/08856257.2011.597179

Colera, J & Gaztelu, I. (2009). Álgebra. *Educación Secundaria Matemáticas.* (pp. 180–200). Madrid, España: Anaya.

De los Santos, I., Gonzales, J.L. & Laca, C. (2007). Ecuaciones. *Proyecto Secundaria 1º ESO Libro del profesor*. (pp. 138-159). Madrid, España: SM.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M & Oller, A.M., (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *En Investigación en Educación Matemática* XVI, pp. 261-274. Jaén.

Gallardo, A. & Torres, O. (2005). El álgebra aritmética de George Peacock: un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica, 2-5. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descargas/articulo/2728898

Monari, E. & Pellegrinim K. (1 de febrero de 2010). Algebra and problema-solving in Down síndrome: a study with 15 teenagers. *European Journal of Special Needs education*. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1080/08856250903450814

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, *por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.*

K. Anexos

(1) B.2 Técnicas

Técnicas previas a la resolución de problemas.

a) Uso del lenguaje algebraico

Expresar y manejar números desconocidos

Empleando una letra, podemos representar un número cuyo valor aún no conocemos, operar con él y relacionarlo con otros números.

- La edad de Juan ⟶ x
- La edad que tendrá dentro de 15 años ⟶ $x + 15$
- El doble de la edad que tenía el año pasado ⟶ $2 \cdot (x - 1)$

(Anaya, p.182)

5. Letras para expresar relaciones

Ejemplo. *El precio de una entrada a un concierto de música es 15 euros. ¿Cuál será el de 7 entradas? ¿Y si quisiéramos saber el precio de un número cualquiera de entradas?*

N.º de entradas	1	2	3	...	7	...	x
Precio (€)	15	$15 \cdot 2 = 30$	$15 \cdot 3 = 45$	...	$15 \cdot 7 = 105$	...	p

Con las letras p y x podemos relacionar dos magnitudes: número de entradas x, y precio p.

El precio p de x entradas será: $p = 15 \cdot x$

Ejemplo. *La tarifa del servicio de información telefónica es de 0,25 euros por la conexión de llamada y 0,50 euros por minuto. ¿Cuánto costará el servicio si la llamada dura 3 minutos? ¿Y si dura t minutos?*

$$\text{Precio del servicio} = 0{,}25 + 0{,}50 \cdot 3 = 1{,}75 \text{ €}$$

Si designamos con t el tiempo y con s el precio del servicio, para calcular este tendremos que utilizar la fórmula:

$$s = 0{,}25 + 0{,}50 \cdot t$$

Las letras permiten expresar de forma concisa **relaciones entre magnitudes**.
Las expresiones literales que las relacionan se llaman **fórmulas**.

(Proyecto Secundaria 1º ESO Libro del profesor, p.145)

Técnicas previas a la resolución de problemas.

b) Operaciones de términos semejantes

Suma y resta de monomios

Los monomios solo se pueden sumar (o restar) cuando son semejantes, es decir, cuando tienen la misma parte literal.

Cuando no son semejantes, la operación se deja indicada.

Observa los distintos casos que se presentan en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 $a + a + a = 3a$	EJEMPLO 2 $4x + 2x = 6x$
EJEMPLO 3 $5x - 3x = 2x$	EJEMPLO 4 $a^2 + a^2 = 2a^2$
EJEMPLO 5 $3a + 2b \Rightarrow$ queda indicada	EJEMPLO 6 $x^2 + x \Rightarrow$ queda indicada
EJEMPLO 5 $7x - (2x + x) = 7x - 3x = 4x$	EJEMPLO 6 $5a - (a - 4a) = 5a - (-3a) = 5a + 3a = 8a$

Como puedes ver, las expresiones algebraicas se operan con las mismas leyes y propiedades que las expresiones numéricas.

(Anaya, p. 185)

Multiplicación de monomios

Un monomio es un producto. Por tanto, al multiplicar dos monomios obtendrás otro producto con más factores; es decir, otro monomio.

▶ **Ejemplos**

- $(2x) \cdot (4y) = 2 \cdot x \cdot 4 \cdot y = 2 \cdot 4 \cdot x \cdot y = 8xy$
- $(-2a) \cdot 5a = (-2) \cdot a \cdot 5 \cdot a = (-2) \cdot 5 \cdot a \cdot a = -10a^2$
- $\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot (6xy) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot 6 \cdot x \cdot y = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot y = \frac{6}{3}x^2y = 2x^2y$

El producto de dos monomios es siempre otro monomio.

(Anaya, p. 186)

División de monomios

Para dividir dos monomios, seguiremos aplicando lo que sabemos sobre operaciones con números, sin necesidad de aprender procedimientos nuevos.

Como comprobarás en los ejemplos que siguen, se pueden obtener diferentes tipos de resultados.

Ejemplos

- $(2a):(8a) = \frac{2a}{8a} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{a}}{\cancel{2}\cdot 4\cdot\cancel{a}} = \frac{1}{4}$ → El cociente es un número.
- $(12x^2y):(-4xy) = \frac{3\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{x}\cdot x\cdot\cancel{y}}{(-1)\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{y}} = -3x$ → El cociente es un monomio.
- $(5a):(a^2) = \frac{5\cdot\cancel{a}}{\cancel{a}\cdot a} = \frac{5}{a}$
- $(-10xy):(-2y^2) = \frac{\cancel{(-2)}\cdot 5\cdot x\cdot\cancel{y}}{\cancel{(-2)}\cdot\cancel{y}\cdot y} = \frac{5x}{y}$

→ El cociente es una fracción algebraica.

Al dividir dos monomios, se puede obtener:
- Un número.
- Otro monomio.
- Una fracción algebraica.

(Anaya, p. 186)

Dos expresiones algebraicas son **semejantes** si sus partes literales son iguales.

Para sumar o restar expresiones algebraicas es necesario que sean semejantes.

Para **sumar** se suman los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Para **restar** se restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

(Guía didáctica SM 1º ESO, p. 144)

(2) B2. Tecnologías

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando sus soluciones coinciden.

▶ **Ejemplo**

$5x = 2x + 15$ $\qquad\qquad$ $3x = 15$

Ambas ecuaciones son equivalentes porque tienen la misma solución: $x = 5$.

(Anaya, p. 188)

<u>Ley de la balanza</u>

Regla de la suma

Si a los dos miembros de una ecuación se suma o resta un número o una expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente.

$$x + 5 = 10 + 5$$
$$x + 5 - 5 = 10 + 5 - 5$$
$$x = 10$$

Con la regla de la suma se pueden **simplificar ecuaciones**; es decir, a partir de una ecuación se pueden obtener otras ecuaciones equivalentes más sencillas.

(Guía didáctica SM 1º ESO, p. 149)

Regla del producto

Si a los dos miembros de una ecuación se los multiplica o divide por un número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente.

$$4x = 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{4} = \frac{20}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

Aplicando la regla del producto también se pueden simplificar ecuaciones.

(Guía didáctica SM 1º ESO, p. 150)

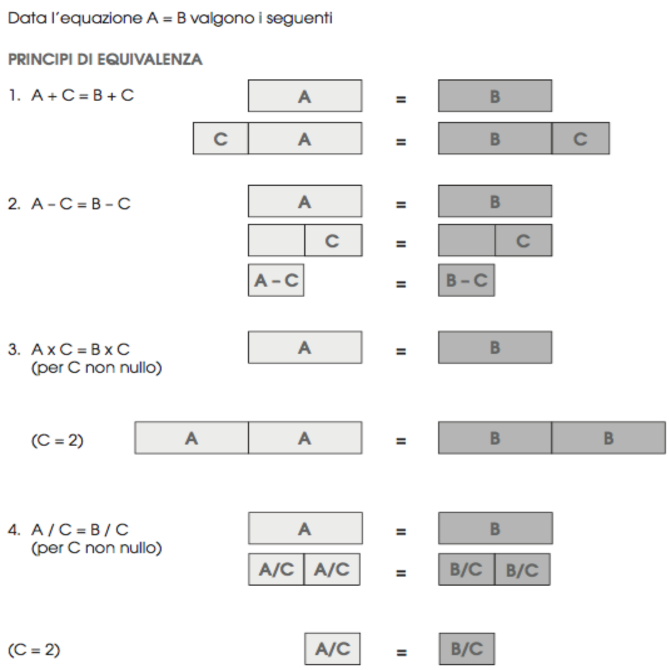
(3) F1. TE2. Agrupar términos semejantes

Nivel dos del Ejercicio 4. Agrupar términos semejantes

$x - 2 + 2$	9	$2\,(x + 1)$	$3x$	$x - x + 5$	0
$2x - 2x + 2$	3	$x - 5$	$2x + 1$	$3(x + 1) - 3x$	x
$x + 2x$	2	$2x - 2x$	$2x + 2$	$x + x + 1$	5

(4) F2. Modelo propuesto por especialista en educación especial.

Presentamos el modelo propuesto por una especialista en educación especial. A partir de él hemos desarrollado la técnica de resolución de ecuaciones explicada en el apartado F.



(Monari, p. 30)

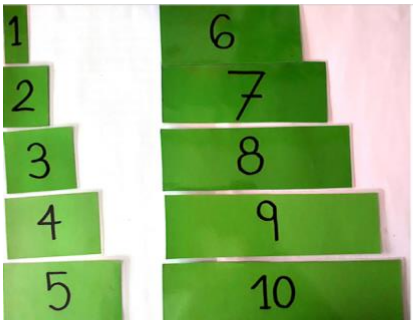
(5) F2. Técnica o modificaciones de ella

Veamos como son las tarjetas de colores.

- Tarjetas rojas:

Representación de “x”
Representación de $\frac{x}{2}$
Representación de $\frac{x}{3}$

- Tarjetas verdes:

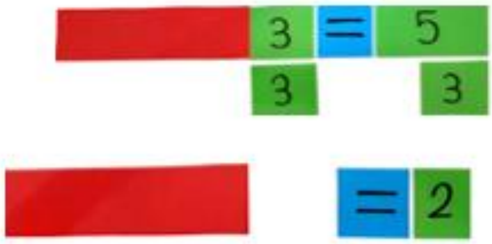


- Tarjeta azul: el igual

(6) F2. Ejemplo de la técnica TE3

Veamos otros ejemplos de como deberemos realizar con tarjetas las ecuaciones algebraicas teniendo en cuenta que las soluciones siempre deben ser positivas.

Ecuación: x + a = b

<table>
<tr><td>x + 3 = 5</td><td>
</td></tr>
<tr><td>-3 x = 2</td><td>
</td></tr>
</table>

Ecuación: ax = b.

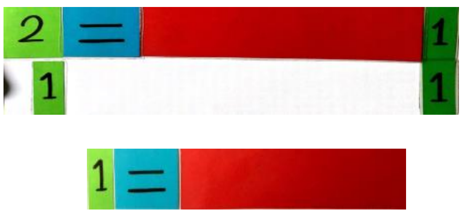
En estas ecuaciones tendremos una limitación ya que no contamos con tarjetas que permitan realizar la división. Sin embargo, si “b” es múltiplo de “a”, que serán el único tipo de ecuaciones que resolveremos con estas tarjetas, podemos descomponer “b” en n grupos de tamaño “a”, de manera que este “n” será la solución a nuestra ecuación. Veámoslo con un ejemplo.

<table>
<tr><td>2x = 6</td><td>
</td></tr>
<tr><td>:2 x = 3</td><td>
</td></tr>
</table>

Ecuación: ax + b = c

2x + 4 = 6	
-4 2x = 2	
:2 x=1	

Ecuación: ax + b = cx + d

x + 2 = 2x + 1	
-x 2 = x + 1	
-1 1 = x	

(7) F2. Geogebra

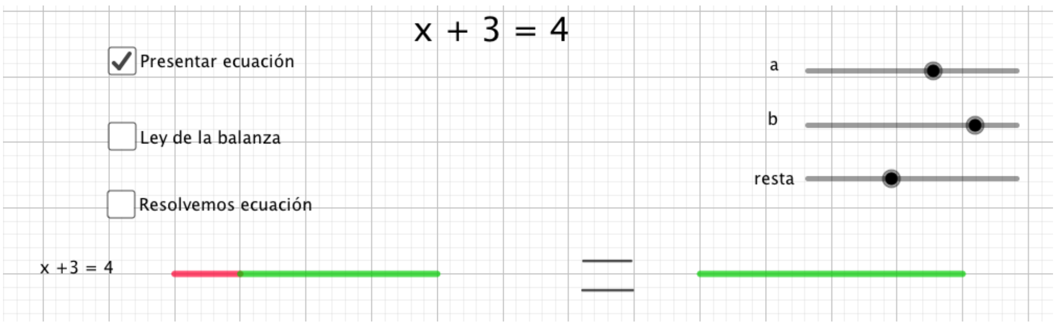
Para ayudar a la comprensión del uso de las tarjetas, es decir, qué representan y cómo debemos colocarlas, hemos creado un programa en Geogebra que permite resolver ecuaciones básicas. Este será utilizado únicamente de manera inicial puesto que solo permite trabajar con ecuaciones de este estilo:

$$x + a = b$$

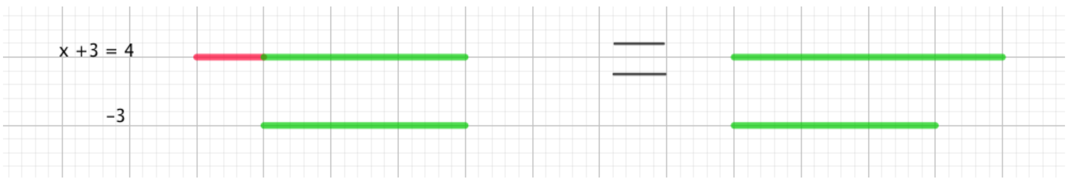
Donde “a” y “b” solamente podrán ser números del 0 al 5 para cuidar que cada unidad sea un cuadrado en la pantalla de Geogebra, ya que si llegásemos hasta el 10 la ecuación no cabria en la pantalla. Dicha limitación no nos parece importante en un momento en el que primamos la comprensión.

Veamos un ejemplo de resolución de una ecuación:

Paso 1: Traducir la ecuación



Paso 2: Ley de la balanza



Paso 3: Resolver la ecuación:

Veamos ahora, otro ejemplo de cómo se vería de manera global en la pantalla de Geogebra una ecuación resuelta: