



TRABAJO FIN DE MÁSTER
MÁSTER DE PROFESORADO DE SECUNDARIA
ESPECIALIDAD MATEMÁTICAS
FUNCIONES LINEALES Y AFINES (3º ESO)

Autor: CARLOS ALBURQUERQUE MARTÍN

73258239L

Tutora: PILAR BOLEA CATALÁN



Universidad
Zaragoza

ÍNDICE

1. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.	3
2. Sobre los conocimientos previos del alumno.	6
3. Sobre las razones de ser del objeto matemático.	8
4. Sobre los campos de problemas, las técnicas, tecnologías y sus metodologías.	13
5. Sobre la secuenciación de las actividades propuestas.	22
6. Sobre la evaluación.	34
7. Bibliografía.	40

1. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático acerca del cual se va a tratar a lo largo de este trabajo de fin de Máster va a ser las **FUNCIONES LINEALES Y AFINES**, pertenecientes al área de **ANÁLISIS**.

Según se refleja en el BOA, a través del currículo aragonés para la Educación Secundaria Obligatoria, en la Orden del 9 de mayo del 2007, este objeto matemático se va a impartir a los alumnos de 2º de ESO, a los alumnos de 3º de ESO y a los alumnos de 4º de ESO, dentro de los contenidos de la asignatura MATEMÁTICAS. Este objeto matemático no aparece reflejado en ningún curso anterior. Concretamente, aparece de la siguiente manera en el currículo aragonés:

SEGUNDO CURSO ESO

Bloque 5. Funciones y gráficas

—*Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información. Coordenadas cartesianas. Representación de una tabla de valores en unos ejes de coordenadas cartesianas. Construcción de tablas de valores, tanto a partir de una descripción verbal como de una gráfica o de una expresión algebraica.*

—*Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos.*

—***Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales. Relaciones funcionales entre magnitudes directamente proporcionales: expresión algebraica y representación gráfica de las funciones $y = k \cdot x$ e $y = mx + b$***

—*Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla.*

—*Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.*

—*Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.*

TERCER CURSO ESO

Bloque 5. Funciones y gráficas

—*Tablas y gráficas. Relaciones funcionales. Distintas formas de expresar una relación funcional: verbal, tabla, gráfica y simbólica. Representación de tablas numéricas en un sistema de coordenadas cartesianas y obtención de tablas a partir de gráficas.*

TFM: Las funciones lineales y afines.

—Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.

—Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes y de la función polinómica de primer grado. Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.

—Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

—Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.

—Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.

—Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta.

CUARTO CURSO ESO

Bloque 5. Funciones y gráficas

—Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.

—Funciones elementales. Noción de función y de gráfica de una función. Descripción de las gráficas: dominio y recorrido, cortes con los ejes, continuidad, simetrías, periodicidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad.

—Estudio de las propiedades y de las gráficas de las funciones elementales: función polinómica de primer grado (lineal y afín); función valor absoluto; funciones x^n ; función; función de proporcionalidad inversa; funciones cuadráticas; crecimiento y decrecimiento exponencial; funciones definidas a trozos. **Reconocimiento del tipo de función elemental que se ajusta mejor a la descripción de fenómenos naturales y/o cotidianos.**

—Utilización de la representación gráfica de las funciones elementales para la resolución de ecuaciones algebraicas.

—Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis.

A lo largo de este trabajo de fin de Máster, vamos a considerar como asignatura y curso académico objeto de nuestra propuesta didáctica, **MATEMÁTICAS de 3º de la ESO**. Las horas semanales dedicadas a esta asignatura son 3.

Tal y como se indica en el currículo aragonés, las funciones en general, y las lineales y afines en concreto, objeto de estudio de este TFM, constituyen un excelente recurso para expresar los aspectos esenciales de algunos problemas y fenómenos físicos y cotidianos de forma práctica. Así, mediante el uso de estas funciones, se va a mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo de los alumnos. También ayudará a incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana. Va a ser objetivo de esta propuesta el capacitarles y

TFM: Las funciones lineales y afines.

hacerles competentes en el uso correcto del lenguaje matemático con el fin de comunicarse de manera clara, concisa, precisa y rigurosa. Finalmente, podrán reconocer, plantear y resolver situaciones de la vida cotidiana utilizando estrategias, procedimientos y recursos propios de la actividad matemática, como por ejemplo el cálculo de salarios o precios de mercado, llegando hasta la creación de modelos que les ayuden a poder predecir el comportamiento futuro de determinadas variables.

De tal forma, según estas indicaciones, esta propuesta didáctica acerca de las funciones lineales y afines, tendrá como objetivo que, a partir de diversos problemas, los alumnos se den cuenta de la necesidad de nuevas herramientas para la modelización de ciertas situaciones del mundo que les rodea, como la proporcionalidad, para así poder mostrarles a continuación el objeto formal, a partir de esa necesidad. Posteriormente presentaremos un campo de problemas asociado al objeto, y las técnicas y tecnologías necesarias para que vayan profundizando en este conocimiento.

Para cumplir todos estos objetivos, el campo de problemas, las técnicas y tecnologías que vamos a recoger en nuestra propuesta darán respuesta al:

- Reconocimiento de propiedades de una función lineal: a partir de los conocimientos previos adquiridos sobre proporcionalidad (dominio, crecimiento, máximos y mínimos, continuidad y puntos de corte).
- Interpretación de la pendiente de las funciones lineales: obtención numérica e interpretación gráfica.
- Reconocimiento de propiedades de una función afín a partir de la función lineal (dominio, crecimiento, máximos y mínimos y continuidad y puntos de corte).
- Del lenguaje gráfico al lenguaje algebraico: Cómo obtener la expresión algebraica a partir de una gráfica.
- Obtención de la expresión algebraica de una función lineal o afín: en varios casos, a partir de un punto y la pendiente, y a partir de dos puntos.
- Interpretación conjunta de un par de funciones, tanto algebraica como gráficamente.

Este conjunto de conocimientos les permitirán manejar con destreza los conceptos relacionados con el objeto matemático tratado, así como enfrentarse a los problemas relacionados con estas cuestiones. Con este dominio, se podrá proceder al aprendizaje de nuevos objetos, como serán por ejemplo, funciones cuadráticas o vectores en el plano.

2. Sobre los conocimientos previos del alumno.

A la hora de plantear el primer paso de esta propuesta didáctica, va a ser importante durante la primera sesión concretar los conocimientos previos requeridos a los alumnos, y si estos los han visto con anterioridad. De esta manera se determinará si hacen falta ejercicios de refuerzo para recordar o apuntalar dichos conocimientos. En este caso, para afrontar el aprendizaje de las funciones lineales y afines en 3º ESO, el alumno debe tener unos conocimientos previos adquiridos en el mismo curso, o durante cursos anteriores, tales como:

- Conjuntos numéricos.
- Conceptos de intervalos: distinguir entre abiertos, cerrados, semiabiertos y semicerrados.
- Representación de puntos, notación y terminología cartesiana: saber trabajar con coordenadas cartesianas.
- Las funciones: qué son, analizar sus propiedades y su representación gráfica.
- Las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes.
- Magnitudes directamente e inversamente proporcionales.
- Manipulación algebraica.
- Resolución de ecuaciones de una incógnita y sistemas de ecuaciones de primer grado.
- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Geometría sintética: Conceptos básicos de posiciones de dos rectas.

Todos estos conceptos están recogidos como conocimientos previos en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, con lo que deberían ser considerados como conocimientos adquiridos ya por todos los alumnos. De todas formas, como sucede en muchas ocasiones, esto no es así, por lo que procede realizar un diagnóstico previo para determinar las actividades de refresco o repaso más adecuadas a la situación de los estudiantes.

Como las funciones no son un objeto matemático nuevo para los alumnos, éstos van a necesitar los conocimientos previos mencionados, cuya adquisición ha debido propiciar la enseñanza cursada hasta el momento. Revisando pormenorizadamente el currículo, se observa que todos estos conocimientos aparecen en cursos anteriores, o lo que también llamamos, diseño en espiral del currículo, de manera que, durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, se irán añadiendo conocimientos a los alumnos sobre el tema, de forma continua, en cada nivel educativo. Por lo tanto, los alumnos deberían haber adquirido estos conceptos.

Las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes se trabajan desde 1º ESO hasta este mismo curso. El cálculo algebraico y la resolución de ecuaciones de primer grado y de sistemas de ecuaciones de primer grado se imparten en los dos primeros cursos de la ESO. En cuanto a las funciones, sus propiedades, así como la representación gráfica de dichas funciones en coordenadas cartesianas, son introducidas en 2º ESO, así como recordados y ampliados también en la unidad didáctica anterior de este mismo curso.

TFM: Las funciones lineales y afines.

Una vez vistos los contenidos previos necesarios en los que deben ser competentes los alumnos, para comprobar si realmente los poseen o no, se realizará una sesión inicial o evaluación de diagnóstico de manera informal, para conocer cuál es el nivel de competencia curricular que poseen los alumnos, y no para calificar. De este modo, si se detectan grandes dificultades, se repasarían los conceptos previamente o, en caso de que sea posible, a la vez que se fueran desarrollando las actividades que se van a proponer a continuación, dependiendo del momento en que se vayan a utilizar, se potenciaría el uso y comprensión de los campos que provocasen mayor confusión al grupo.

En este caso, para poder observar si recuerdan la proporcionalidad, principal conocimiento previo referido a las funciones lineales, buscaremos numerosos ejemplos relacionados con la proporcionalidad y las TIC, para que los alumnos recuerden el concepto, y les resulte atractivo.

Tipo problema: Conocimientos previos sobre proporcionalidad (Sesión 1).

En la sesión de conocimientos previos, la actividad se centrará en la proporcionalidad, ya que el resto de conocimientos se irán comprobando según se vayan sucediendo las sesiones, y se vayan haciendo necesarios.

Para ello, la metodología consistirá en empezar por una pregunta enunciada por el profesor, referida a cuántos de ellos tienen perfil social en la red Tuenti, y por ejemplo, cuántos suben fotos. De tal forma el objetivo es llegar a ver la necesidad de la comprensión de la proporcionalidad, entender que cuantos más usuarios haya, más fotos y comentarios habrá en la red social. Posteriormente, también nos referiremos al uso de los smartphones, y como hacen que crezca también el uso de las redes sociales. También se tratará la proporcionalidad inversa, con el ejemplo contrario. Cuantos más tipos de dispositivos móviles existan, más repartido estará el número de usuarios que utilicen ese móvil. De esta forma, cuantos más dispositivos haya, menos usuarios compartirán un mismo dispositivo.

Después de esta introducción inicial, se propondrá que, en grupos, busquen ejemplos de proporcionalidad directa relacionados con la vida cotidiana. Por si los alumnos no consiguieran llegar a ninguno, tendríamos preparado el ejemplo de un coche que va a velocidad constante, de forma que podríamos relacionar las variables espacio y tiempo de forma proporcional. Es importante que con estos ejemplos vean la relación entre distintas magnitudes, y seguir el mismo camino se siguió históricamente hasta llegar a las funciones, como relación de dos variables que modeliza una situación. También se podrán comentar si salen a colación otro tipo de relaciones, no sólo la proporcional, como puede ser una escalonada o cuadrática.

Mediante esta actividad, el profesor guiará a los alumnos por los conocimientos previos para poder dar el siguiente paso. Se potenciarán además otras competencias distintas a la matemática, como la lingüística o de interacción con el mundo físico.

3. Sobre las razones de ser del objeto matemático.

La razón de ser de las funciones sería el actuar como instrumento de modelización de relaciones entre variables, con lo que la razón de ser principal de nuestro objeto matemático, la función lineal y afín, y que vamos a tener en cuenta para su introducción escolar, sería la de:

Instrumento modelizador de la relación de proporcionalidad entre variables.
--

De hecho, a la función lineal también se le denomina en algunos textos escolares como función de proporcionalidad. Este va a ser el hilo introductor para mostrar a los alumnos el objeto matemático, para que desde el primer momento tengan claro cuál es la utilidad de las funciones lineales y afines, relacionándolo además en todo momento con situaciones cotidianas de la vida real que pueden ser objeto de modelización y estudio. En nuestra propuesta didáctica vamos a utilizar la razón de ser original, como se podrá observar en las diferentes sesiones que van a ser propuestas. La razón de ser histórica de las funciones lineales, como se ha comentado anteriormente, sería la de modelizar las relaciones de proporcionalidad directa, para más adelante saltar del concepto de magnitud (contextualizado) al de variable (abstracto).

De hecho, la razón de ser general de las funciones sería la de modelizar fenómenos de la naturaleza de una forma matemática. Según se observa en diversos autores, como por ejemplo Lourdes Bacallao en *Apuntes sobre el surgimiento del concepto función en la historia*, quién introdujo por primera vez en las matemáticas el término de función como actualmente lo conocemos fue *Leibniz*, así como notaciones y términos tales como constante, variable y parámetro, usados hoy en día.

Para encontrar los primeros pasos en la construcción del concepto de funciones, el germen más remoto podría ser considerado las tablillas de cálculo de las matemáticas babilónicas referidas principalmente a la astronomía, del año 2500 a.C., y años después, en 150 d.C., también las tablas astronómicas del Almagesto, de *Ptolomeo de Alejandría*, que llega a introducir con su tabla de cuerdas la función seno. De todas formas, en la antigüedad, durante la época griega no se llegó a desarrollar el concepto de función debido a la disociación que había entre número y magnitud, el carácter eminentemente geométrico de la matemática griega, así como los problemas derivados del simbolismo, inexistente en lo que se refiere al establecimiento de expresiones algebraicas, a excepción de los intentos de *Diofanto*.

Respecto a los orígenes de la proporcionalidad, hay muchos ángulos desde los que la humanidad ha intentado comprenderla. Por ejemplo, ésta ha estado muy relacionada con el arte, ya que ha estado presente en los cánones estéticos, usados tanto en pintura como en escultura a lo largo de la historia. De hecho, encontrar la razón de la proporcionalidad del cuerpo humano ha sido uno de los principales focos de estudio desde la época de los griegos. Remontándonos al antiguo Egipto, como comenta Rubén Sánchez Gil en *El principio de proporcionalidad* (2007), podemos encontrar las primeras referencias a la proporcionalidad, entre cada parte del cuerpo y su todo. La unidad de referencia utilizada en este caso era la longitud de los dedos. Esto indica que

TFM: Las funciones lineales y afines.

desde los principios de la humanidad, el hombre siempre buscó algo absoluto, alguna ley de proporcionalidad o principio de armonía, un ideal que intentase expresar plenamente lo visual de la figura humana.

Los griegos, al igual que los egipcios, y quizá también influenciados por ellos, utilizaban la proporción para valorar los distintos cánones de belleza. Este pueblo definió los cánones ideales de belleza en función de las proporciones corporales. Como ejemplo, leyendo a *Polikletos*, podemos observar como el cuerpo humano, si era proporcionado, debía tener una longitud de siete cabezas, mientras que su compatriota, *Praxiteles*, en sus escritos, aumenta esta relación a ocho cabezas. Así, de una civilización a otra, se pasó de la unidad de longitud del dedo a la cabeza. De esta forma, ya van tratando la relación de magnitudes para poder ‘cuantificar’ esta proporcionalidad.

Esta búsqueda de proporcionalidad en el cuerpo humano se trasladó al campo de las matemáticas, donde por ejemplo, *Tales de Mileto* avanzó de una forma notable en el estudio geométrico, apoyándose principalmente en medidas proporcionales. Sin embargo, este significado predominantemente geométrico de la comprensión de la proporcionalidad significó un obstáculo para el desarrollo del concepto de función, debido a que las magnitudes que comparaban eran siempre longitudes con longitudes, o áreas con áreas, ya que una relación entre magnitudes distintas no tenía significado en aquellos momentos. Se podría concluir que estaban más centrados en el estudio de la matemática pura, que en el estudio de la cinemática y la variación. Este esquema se siguió manteniendo durante muchos años.

Avanzando en el tiempo, en el siglo XIV, el matemático *Nicolás Oresme*, se interesó por el estudio del cambio y la velocidad del cambio. Para representarlos utilizó unos ejes coordenados parecidos a los sistemas de coordenadas cartesianas que utilizamos hoy en día. Se puede considerar la semilla que hizo que matemáticos posteriores desarrollaran de forma completa el concepto de función como lo entendemos hoy en día.

En el Renacimiento, siguiendo con el estudio de la proporcionalidad en el cuerpo humano, nos encontramos con *Leonardo da Vinci*, autor altamente cualificado en casi la totalidad de las ciencias del renacimiento. Este autor describe en sus escritos las reglas de proporcionalidad del cuerpo humano en movimiento, con el *Hombre de Vitrubio*, como expresión del canon estético renacentista. Aún en esta época, seguía el mismo esquema utilizado por los griegos para representar de forma matemática la proporcionalidad, como comparación entre magnitudes del mismo tipo. De hecho, *Galileo*, en sus estudios sobre movimiento, establecía siempre las proporciones de forma homogénea, de la manera $e:e'=t:t'$ para caracterizar un movimiento, es decir comparando por un lado las magnitudes de espacio, y por otro las magnitudes de tiempo, mientras que en la actualidad, ya mediante el uso de las funciones, podemos expresar la velocidad constante de un movimiento uniforme como una función del espacio y el tiempo, de tal forma que $e:t=e':t'$.

El concepto de función como un objeto matemático, a ser considerado de forma independiente, y susceptible de ser estudiado por sí solo, no apareció hasta los inicios

TFM: Las funciones lineales y afines.

del cálculo en el siglo XVII. Uno de los mayores avances para llegar al concepto actual de función fue la creación del álgebra simbólica por parte de *Francisco Vieta*, que permitió superar el obstáculo de la falta de un simbolismo matemático adecuado. Posteriormente se fueron desarrollando matemáticas basadas en variables, con *René Descartes* y *Pierre de Fermat*. *Isaac Newton*, con las magnitudes fluyentes, y *Gottfried Leibniz*, establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables. Como se ha comentado anteriormente, *Leibniz* acuñó los términos función, variable, constante y parámetro.

En 1748, el matemático *Euler* en su obra *Introductio*, define una función como una expresión analítica formulada a partir de una cantidad variable y constantes, incluye los polinomios, las expresiones trigonométricas y logarítmicas, que además denominó $f(x)$. Sin embargo, esta definición tenía algunas limitaciones que hicieron que se tuviera que profundizar en la forma de entender las funciones: expresiones distintas podían arrojar los mismos valores, y no todas las dependencias entre dos cantidades podían expresarse de esta manera. Esto derivó en 1837, en la definición moderna que *Dirichlet* propuso de función numérica como una correspondencia cualquiera entre dos conjuntos de números, que asocia a cada número en el primer conjunto un único número del segundo.

La intuición sobre el concepto de función siguió evolucionando con el tiempo. Inicialmente, la dependencia entre dos cantidades se imaginaba como un proceso físico, de modo que su expresión algebraica capturaba la ley física que correspondía a este, dando lugar a la razón de ser, funciones como modelización de fenómenos físicos. Sin embargo, la tendencia a una mayor abstracción se vio reforzada a medida que se encontraron ejemplos de funciones sin expresión analítica o representación geométrica sencillas, o sin relación con ningún fenómeno natural; y por ejemplos como funciones continuas sin derivada en ningún punto.

El siguiente paso importante, durante los siglos XIX y XX, vino dado mediante el desarrollo de la teoría de conjuntos. A raíz de dicha teoría, surgió la definición actual y más concreta de función, como una correspondencia entre dos conjuntos de objetos cualesquiera, no necesariamente numéricos. También pasó a ser asociada con otros conceptos vinculados, como el de relación binaria.

Analizando las potencialidades del concepto función, para las diferentes situaciones de la vida cotidiana, se considera, tanto para alcanzar competencia matemática, como la competencia para conocer el mundo que rodea a los alumnos, que es muy importantes interiorizar de manera coherente la trascendencia histórica del concepto de función y la utilidad del mismo en la interpretación del mundo y los fenómenos actuales. De esta necesidad surge a su vez el conocer y distinguir el porqué de cada uno de los distintos tipos de funciones, como en la propuesta que estamos llevando a cabo sobre funciones lineales y afines, en cuyo caso sería la proporcionalidad. Por ello, a las funciones lineales también se les denomina a veces funciones de proporcionalidad.

Esto es mostrado en la sesión 1 de la propuesta didáctica, dedicada a la introducción de la razón de ser de las funciones lineales. En ella, el profesor es el

TFM: Las funciones lineales y afines.

encargado de proponer distintos casos reales a los alumnos para que reflexionen sobre ellos, de tal forma, que guiándolos, y de forma participativa, lleguen a la necesidad del objeto matemático en cuestión. En ese momento el profesor lo institucionalizará, enunciándolo de una forma más precisa.

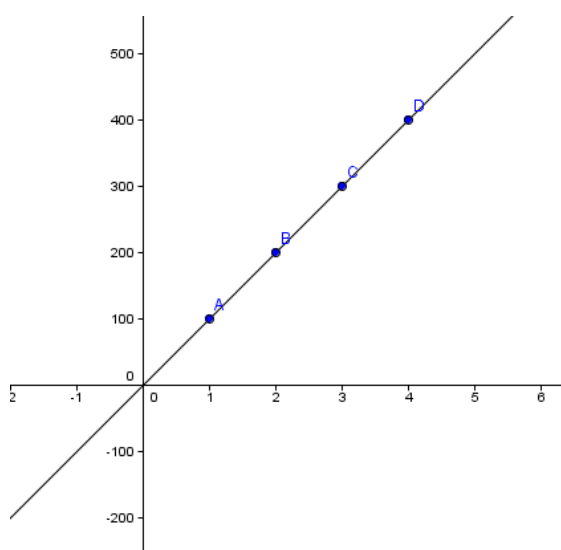
La actividad que se prepara basada en la razón de ser de las funciones lineales, a impartir en la sesión 1, será como sigue:

Tipo problema: Razón de ser de las funciones lineales (Sesión 1).

La razón de ser de las funciones lineales es modelizar la proporcionalidad, de ahí que también se les llame función de proporcionalidad. Por ello, a partir de los ejemplos que hayan encontrado anteriormente expresados de forma oral, en la actividad de conocimientos previos, el profesor explicará como a través de una representación gráfica de una recta se va a poder identificar esa proporcionalidad, dejándoles claro el uso de las funciones lineales e institucionalizando el concepto.

La metodología de esta actividad consistirá en que el profesor pueda ver los ejemplos que han ideado los alumnos, viendo si han asentado bien los conocimientos sobre proporcionalidad, y a partir de ahí, poder hacerles ver como algunas de las proporcionalidades que han trabajado durante toda la clase, se pueden modelizar mediante funciones lineales, dando lugar a la representación de una recta.

Si de los ejemplos mencionados por los alumnos hay alguno interesante, se utilizará ese mismo. Si no es así, se continuaría con el ejemplo mencionado de un coche con velocidad constante. El problema planteado sería, si un coche va a 100 km/hora, qué distancia habrá recorrido cuando lleve una hora, dos horas, tres horas y cuatro horas. Los alumnos deberán pensar las cantidades y ponerlas en una tabla. Cuando lo tengan, el profesor pedirá que lo representen en ejes cartesianos, con lo que también se aprovechará para repasar ese conocimiento previo. Un alumno saldrá a la pizarra y lo dibujará, dando lugar a la siguiente gráfica:



TFM: Las funciones lineales y afines.

A partir de esta gráfica, y de una forma intuitiva, el profesor les hará ver mediante técnicas de observación visual como se está modelizando esa relación proporcional entre las variables distancia y tiempo, con lo que quedará institucionalizado el hecho de que mediante una función lineal se representa una proporción directa. A partir de ahí se procederá a la construcción del modelo algebraico de la función lineal, y como se traduce de una expresión algebraica a una tabla de puntos y de ahí a una gráfica.

Tipo problema: Razón de ser de la función afín y construcción de modelo algebraico (sesión 3).

Después de ver la utilidad de la función lineal como modelización de la proporcionalidad, en esta actividad ya se entrará de lleno en la búsqueda de la expresión algebraica de la función afín mediante un ejemplo concreto.

Para ello, nos referiremos a precios de un taxi, donde hay un fijo inicial y después se cobra por kilómetro recorrido. Por ejemplo, un taxi que cobre de inicio 3 € y 0,5 € por cada km.

X (km)	1	2	3	4	5
$3+0,5x$ (€)	3,5	4	4,5	5	5,5

Después, los alumnos deberán trabajar distintos ejemplos con distintas rutas, para que vean la evolución de los precios en cada uno de los casos, realizando las tablas correspondientes, y llegando a la expresión algebraica correspondiente en cada uno de los casos. Para el primero de ellos, sería $y=0,5x+3$.

De esta forma, se llegará a la expresión algebraica de una función afín, institucionalizada por el profesor como tal, $y=mx+n$. Especial hincapié se realizará en la adecuada interpretación de cada una de las letras, en función del problema, por los inconvenientes que puedan aparecer al pasar del enunciado a una expresión algebraica, así como las diferencias que puedan observar con una función lineal, principalmente dada por la letra n de la expresión.

4. Sobre el campo de problemas, las técnicas, tecnologías y sus metodologías.

En esta propuesta didáctica, el modelo de aprendizaje significativo va a orientar las actividades hacia problemas o situaciones que analizar y resolver. Además, el pensamiento matemático es un proceso mediante el cual es posible aumentar el entendimiento de aquello que nos rodea, por lo que se pretende que las matemáticas no tengan un mero carácter repetitivo, sino que sirvan al alumno para comprender y resolver situaciones del mundo real. Por ello, se propondrán actividades de manera que el alumno pueda comprobar el interés y la utilidad de lo aprendido.

La resolución de problemas es uno de los ejes fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En este sentido conviene destacar que las actividades basadas en la resolución de problemas deben sustentarse en situaciones de la vida real y estar contextualizadas, ya que los problemas redactados lejos de la realidad más inmediata del alumno no resultan interesantes por su propio contenido y hacen que cunda más rápidamente el desánimo.

De esta forma, se diseñarán problemas variados, promoviéndose la utilización de las nuevas tecnologías, que es fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y a la que dedicamos un apartado específico, el uso de actividades donde predomina el carácter lúdico, que constituyen un buen instrumento para interiorizar los procesos propios del pensar matemático y tienen un atractivo añadido para los alumnos y la introducción de la historia de las matemáticas, que proporciona contextos apropiados para abordar o afianzar determinados contenidos. Con el desarrollo de actividades variadas, dinámicas, motivadoras, adaptadas y que utilicen distintos recursos se pretende además responder a la diversidad del grupo.

El aprendizaje no debe quedar restringido al aula, sino que también se debe dar fuera, por lo que se propondrán problemas donde los alumnos tengan que buscar en ‘el mundo exterior’ elementos en los que vean reflejados los objetos matemáticos estudiados. Por otro lado, también habrá problemas contextualizados donde los alumnos deberán demostrar que saben aplicar las técnicas ejercitadas mediante ejercicios. En estos problemas, la técnica a utilizar no quedará mostrada de forma explícita. Los alumnos deberán saber extraer de los datos dados en el problema cuáles son las variables x e y , con las que normalmente se trabaja en los ejercicios de forma algebraica. Va a ser realmente importante esta traducción que hagan los alumnos, la construcción del modelo algebraico, ya que a partir de estos momentos el álgebra cada vez va a ser más importante en el planteamiento y resolución de problemas, con lo que es importante que adquieran y ejerciten esa habilidad de forma adecuada.

Para la resolución de estos problemas, se aplicará un método participativo, de forma que los alumnos vayan saliendo a la pizarra y expliquen a sus compañeros que pasos han dado para su resolución, respondiendo a las dudas que surjan en el grupo. El profesor, por supuesto, siempre estará al tanto para comprobar que todo se hace correctamente. El campo de problemas propuesto se puede observar a lo largo de las sesiones de clase, donde se combinan ejercicios y problemas y se presentan además las diferentes técnicas y tecnologías.

TFM: Las funciones lineales y afines.

Los distintos ejercicios que se van a presentar en el aula van a corresponder con los distintos tipos de técnicas que se vayan mostrando durante las sesiones. De esta forma, los alumnos entenderán y practicarán dichas técnicas, para posteriormente empezar con problemas, más complejos que los ejercicios.

Se pueden observar distintos tipos de ejercicios a lo largo de la secuenciación de sesiones. En estos casos, al contrario que con los problemas, el encargado de su corrección será de forma general el profesor, para avanzar de forma más rápida, y en continuo diálogo con la clase, pero desde su sitio, sin salir a la pizarra, como sería el caso de los problemas, y atendiendo a las dudas que puedan surgir durante su corrección.

Los razonamientos que van a justificar las técnicas van a ser, en primer lugar, para las funciones lineales, las funciones y la proporcionalidad. Esto entronca con la razón de ser explicada anteriormente de las funciones lineales como funciones que modelizan la proporcionalidad. El estudio de la pendiente vendrá justificado por el análisis de la representación gráfica de la función, en este caso lineal o afín. La obtención de la expresión algebraica de las funciones lineales y afines en diversas situaciones vendrá dada mediante el estudio de la estructura de dichas expresiones. El estudio conjunto de dos funciones viene justificado mediante la resolución de sistemas de ecuaciones y la representación gráfica de dos funciones y sus posibles interpretaciones.

La metodología a seguir para introducir las tecnologías en el aula será la demostración mediante un ejemplo concreto de la técnica para su posterior generalización. En primer lugar se realizarán ejercicios que requieran la necesidad de dicha técnica, para que los alumnos puedan pensar y descubrirlas por ellos mismos. Cuando los alumnos hayan podido reflexionar sobre ellas, el profesor las institucionalizará, organizándolas de forma adecuada y utilizando la nomenclatura propia de las matemáticas, es decir, desarrollando la tecnología. Tras la corrección de ejercicios se dará un momento importante, ya que ahí se desarrollará principalmente la institucionalización del conocimiento presentado, de las técnicas usadas y la tecnología.

A continuación se muestran diversas actividades, compuestas por distintos tipos de ejercicios y problemas, que muestran como se explicarán las diversas técnicas a los alumnos, así como sus justificaciones.

Tipo 1: Reconocimiento de variables y construcción de la expresión algebraica de la función lineal (sesión 2).

Cuando se haya visto la utilidad de la función lineal como modelización de la proporcionalidad, en esta actividad ya se entrará de lleno en la técnica de construcción del modelo algebraico de la función lineal.

En esta actividad el profesor planteará a los alumnos el problema de un precio de un producto de mercado por peso, y estos deberán decir cuál será el precio para 1 kg, 2 kg, 3 kg,... que al ser proporcional, no les supone ningún conocimiento nuevo.

TFM: Las funciones lineales y afines.

Después, se les pedirá que con esos valores hagan una tabla, donde pongan en un lado el peso del producto, y en otro el precio, identificando claramente cuál es la constante de proporcionalidad. En este caso el producto serán kilos de manzanas, y el precio 3 € por kilo. La tabla deberá ser como sigue:

Peso (kg)	1	2	3	4	5
Precio (€)	3	6	9	12	15

En este momento se introducirá la técnica de reconocimiento de variables, trasladando el lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Como ya se han visto anteriormente las funciones, se hará ver a los alumnos que tanto precio como peso del producto son las dos variables con las que están trabajando, con lo que a la variable independiente, que sería el peso, se le puede llamar variable x , y a la variable dependiente, que sería el precio, se le puede llamar variable y .

$x \rightarrow$ Peso(kg)	1	2	3	4	5
$y \rightarrow$ Precio(€)	3	6	9	12	15

El siguiente paso sería preguntar a los alumnos qué relación une las dos variables, esperando como respuesta una expresión oral del tipo “una es el triple de la otra”, con lo que usando las letras, sería $y=3 \cdot x$. De esta forma el profesor les habrá guiado en la técnica de la creación de un modelo algebraico de la función lineal.

A partir de aquí, el profesor institucionalizará la función lineal mediante elementos tecnológicos, tales como la generalización de $y=kx$, donde k es la constante de proporcionalidad, a $y=mx$, con m distinta de 0, justificándola mediante la proporcionalidad directa, es decir, toda relación entre variables que se produzca mediante una razón de proporcionalidad directa de razón m , podrá verse reflejada mediante una función lineal de la forma $y=mx$. En el caso particular de $m=1$, estaríamos hablando de la función identidad.

Una vez vista la técnica de construcción del modelo algebraico de la función lineal y su tecnología asociada, se les propondrá como ejercicio a los alumnos que, para familiarizarse con su uso, identifiquen las funciones lineales con su expresión analítica para distintos valores y distintos elementos, como por ejemplo, ternera, merluza y leche con sus respectivos precios de mercado, que deberán ir a comprobar después de clase. De esta forma desarrollarán la técnica expuesta viendo distintos valores de m , y con otro caso de la vida real como podría ser el precio por litro, y no sólo por kilogramo.

Para completar esta técnica se trabajará también con un ejemplo donde la constante de proporcionalidad sea negativa, y así hacer ver a los alumnos que, mientras el valor de x crece, el valor de y decrece, pero dejando clara la diferencia con la proporcionalidad inversa.

Ejemplo: En invierno nos encontramos a una temperatura de 0° . La previsión es que cada hora que pase ésta disminuye en 2° . Representa la temperatura en función del tiempo durante diez horas.

TFM: Las funciones lineales y afines.

Tipo 2: Representación gráfica de la función lineal, traducción de los diferentes lenguajes (sesión 2).

En esta actividad ya se entrará de lleno en las técnicas referidas a la traducción de lenguajes, de la tabla o expresión algebraica a la gráfica, y viceversa.

Una vez vista la expresión analítica con los diversos ejemplos anteriores, el siguiente paso será su representación gráfica. Para ello utilizaremos las tablas que han obtenido en la actividad de construcción de funciones lineales. Se les indicará a los alumnos que cojan cada par de puntos de x e y , y los asocien entre paréntesis, con la forma (x, y) , dándole la importancia que se merece a la notación adecuada de elementos.

Aquí podría plantearse el caso de que los alumnos cuestionen cuantos puntos deben coger. Para que practiquen con expresiones algebraicas, se les indicará que cojan 5 valores de x , incluyendo siempre $x=0$, para así obtener los valores de y , y con ello las coordenadas del punto cartesiano. Independientemente, se les hará notar, que al estar hablando de rectas, con sólo dos puntos, estas ya quedarían determinadas, concepto básico de geometría. Pero en este caso, se les hará ver al menos 5 puntos, para que vean claro el dibujo de la función.

A continuación, se les pedirá a los alumnos que dibujen un eje de coordenadas, quedando claro cuál es el eje x y cuál es el eje y . A partir de ahí deberán poner los puntos que han obtenido de las tablas en la gráfica, unirlos, y ver que obtienen. Mediante esta actividad se podrá comprobar si recuerdan bien la representación de puntos en coordenadas cartesianas. Una vez representados los ejemplos anteriores, se orientará a los alumnos para que ellos mismos observen características propias de las funciones lineales, como por ejemplo que son una recta que siempre van a pasar por el punto $(0,0)$, se den cuenta que la inclinación es importante, para analizarla en la siguiente actividad, ver su dominio y recorrido, si se trata de funciones crecientes o decrecientes, si tienen máximos o mínimos y si son continuas, todo ello de forma visual. Para que repasen la representación gráfica de la función lineal y sigan analizando estas propiedades por ellos mismos se les propondrá los siguientes ejercicios:

Representa las siguientes funciones, observa su inclinación y si son crecientes o decrecientes, e identifica cada una de ellas con una situación de la realidad:

- a) $y=x$
- b) $y=3x$
- c) $y=-x$
- d) $y=-2x$
- e) $y=1/3x$
- f) $y=-1/3x$
- g) $y=3/2x$
- h) $y=-3/2x$
- i) $y=2x+1$

Mediante estos ejercicios el propósito es que el alumno aplique la técnica del paso de la expresión analítica a la gráfica, y además pueda ver como la pendiente influye en la función lineal. Al corregir estos ejercicios el profesor institucionalizará el significado de la pendiente y las propiedades de la función lineal como:

TFM: Las funciones lineales y afines.

- Función que tiene por expresión algebraica $y=m \cdot x$
- Se representa mediante una recta que pasa por el punto $(0, 0)$
- La constante de proporcionalidad m , se denomina pendiente de la recta. Cuanto mayor es su valor absoluto, mayor es su inclinación. Si es positiva la recta es creciente, mientras que si es negativa, la recta es decreciente.

Con las gráficas ya dibujadas, también se trabajará el camino inverso, es decir, obtener la pendiente a partir de la gráfica. Para ello, se les hará ver a los alumnos que tendrán que coger un punto de la gráfica, sustituir en la expresión algebraica, y despejar m , es decir, si tenemos por ejemplo el punto $(1, 2)$ que pertenece a una gráfica, la pendiente se podrá despejar como $m=y/x=2/1=2$. De esta manera, mediante este ejercicio podrán interiorizar las técnicas asociadas al análisis tanto gráfico como algebraico del significado y valor de la pendiente.

Además, en el último apartado, se presenta una modificación, que será introductoria para las funciones afines, y será presentada de forma análoga.

Tipo 3: Reconocimiento de funciones lineales y afines en el contexto de la realidad (sesión 2 y 3).

Para practicar todo lo visto hasta el momento, y como refuerzo de la razón de ser de las funciones lineales y afines, los alumnos deberán buscar en la prensa ejemplos de funciones lineales y afines que modelicen algún fenómeno de la vida real, e intenten calcular su expresión analítica, su pendiente y sepan interpretar sus resultados.

Mediante esta actividad se potenciará en los alumnos la identificación de los conceptos matemáticos adquiridos en el aula con sucesos cotidianos de la vida real, de forma que suponga una mayor motivación para ellos las clases matemáticas. También mediante esta actividad se conseguirá que los alumnos se acerquen a la prensa, busquen en ella, y puedan sacar conclusiones derivadas de lo aprendido en clase. Una vez encontrado el ejemplo y estudiado, deberán prepararlo para poder exponerlo en clase. De esta forma se les va preparando para la exposición de resultados de su propio trabajo ante un público, por la necesidad de que se vayan acostumbrando a este tipo de experiencias.

En esta actividad saldrán varios alumnos a exponer la solución al problema que se les indicó sobre buscar en la prensa un ejemplo de función lineal o afín. En este caso, la metodología a la hora de evaluar la actividad será importante. Estos serán los pasos y los criterios de evaluación:

Irán saliendo a la pizarra uno por uno los alumnos exponiendo la noticia que han encontrado, y explicando sus conclusiones a partir de las propiedades de la función lineal. El resto de alumnos valorarán si realmente se trata de una función lineal y si se ha interpretado correctamente. El profesor valorará:

- La exposición que el alumno haga a sus compañeros.
- La correcta elección de la noticia, correspondiente a función lineal.
- Las conclusiones que obtenga.

TFM: Las funciones lineales y afines.

Se intentará dedicar 3-4 minutos por alumno, para que salgan todos a la pizarra, y esta actividad será importante para poder ver la comprensión de los objetos matemáticos explicados y además obtener una calificación sobre participación en clase y trabajo de exposición.

Posibles ejemplos que se pueden encontrar en la prensa para mostrar a los alumnos:

Función lineal: El AVE aumentará la velocidad a 320 km/hora, luego se reduce al tiempo Madrid-Barcelona en 15 minutos.

Función afín: Un modelo de facturación de ADSL con llamadas, con una cuota fija y tarificación por minutos de llamada.

Tipo 4: Cómo obtener la expresión algebraica de una función afín a partir de un punto y su pendiente (sesión 4).

Para el desarrollo de la técnica apropiada para el caso en el que tengamos como datos un punto y la pendiente de una función afín, se utilizarán varios ejemplos en los que el profesor irá dando los pasos a los alumnos para que, tanto dando un punto y su pendiente, como a partir de una gráfica, obtener la expresión algebraica correspondiente.

Por ejemplo, tenemos el punto $P(3,7)$ y la pendiente es 2. En primer lugar los alumnos deben notar que si la pendiente es 2, ya tenemos la m de la expresión de la función afín, $y=mx+n$, $m=2$. Por otro lado, si tenemos el punto $(3, 7)$, tenemos también valores para sustituir x e y , con lo que ya podremos obtener el valor de n , que será la única incógnita que nos quede de la expresión.

Se realizará también el caso contrario, en el que a partir de una gráfica, el alumno obtendrá un punto y la pendiente, ya trabajado anteriormente, y así, sustituyendo, llegará a la expresión algebraica.

Se propondrán un campo de ejercicios en clase para que practiquen con puntos y coordenadas cartesianas y se vayan familiarizando con notaciones x e y . También de forma inversa, que vean como de una gráfica se puede obtener la expresión de la función afín. Los ejercicios propuestos serán:

Escribe la expresión de la función afín que pasa por el punto P y tiene por pendiente a m .

- $P(-3,0)$, $m=1/5$
- $P(4,-3)$, $m=4$
- $P(0,2)$, $m=-1/2$
- $P(-3,1)$, $m=5/4$
- Escribe la expresión algebraica de varias gráficas que el profesor presentará en la pizarra.

Esta técnica podría ser explicada mediante la siguiente modificación: a partir de una situación en la que conocemos un punto y la pendiente de una recta se obtendrá la

TFM: Las funciones lineales y afines.

ecuación punto pendiente $y=y_0+m(x-x_0)$, que será explicada por el profesor de forma analítica. Pero esta propuesta no es partidaria de ello, puesto que supone el aprender una fórmula nueva, que no les aporta nada a los alumnos, pudiendo solucionar los problemas de este tipo con los conocimientos ya adquiridos en sesiones anteriores.

Tipo 5: Como obtener la expresión de la función afín cuya gráfica pasa por dos puntos (sesión 4).

Para mostrar esta técnica, se planteará el problema a los alumnos para que ellos mismos puedan llegar a la solución. En primer lugar se les dará dos puntos, y partir de ahí se les pedirá que hallen la expresión de la función afín cuya gráfica pasa por esos dos puntos. Deberían obtenerla mediante la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, donde en primer lugar deberían sustituir x e y por los valores de los puntos conocidos, obteniendo las dos ecuaciones con las dos incógnitas m y n .

Una modificación de la técnica supondría que algún alumno, mediante la fórmula de la pendiente, hallara el valor de m , y posteriormente sustituyendo, el valor de n . Este método ya es bastante más complicado para que lo vean por ellos mismos. Así, el profesor les hará ver la interpretación gráfica de la pendiente de nuevo, para hacerles ver el otro método de resolución del problema propuesto.

Se plantearán un par de ejercicios para que los resuelvan en clase:

Dados los puntos A y B, escribe la expresión algebraica de la función que pasa por ambos mediante los dos métodos propuestos:

- a) A (3,2) y B (7,1)
- b) A(-1,0) y B(5,-2)

Tipo 6: Representar dos funciones lineales a la vez. ¿Qué sucede? Relaciones entre funciones lineales (sesión 6).

A partir de los problemas planteados sobre espacio, tiempo y velocidad, los alumnos deberán traer las dos funciones que obtuvieran representadas. En clase, el profesor les pedirá que analicen lo que sucede, que interpreten el significado de esa representación, con el objetivo que los alumnos identifiquen el punto de corte, como punto importante por su significado en el contexto. A partir de sus reflexiones se verá las posibles interpretaciones que podemos dar a estos resultados, tanto gráficos como algebraicos. En el caso de algebraicos se mostrará a los alumnos que la técnica a seguir es la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Seguidamente, se les preguntaría que pasaría si dos rectas no se cortan nunca, para ver si algún alumno se da cuenta de que para ello sus pendientes deben ser iguales, y estaríamos hablando de rectas paralelas.

A partir de ahí se analizarán los distintos casos en función de la solución del sistema de ecuaciones.

- Si existe una solución, se trata del punto de corte.
- Si no existe solución, se trata de rectas paralelas.
- Si existe más de una solución, se trata de rectas coincidentes.

Tipo 7: Problemas en contexto de la realidad: Aplicaciones.

Para esta unidad se desarrollará un campo de problemas contextualizado en aplicaciones de la vida real a funciones lineales y afines. Se muestran aquí varios ejemplos, cuyos enunciados están basados en una adaptación de diversos libros de texto, y el total del campo se encuentra en la sexta y séptima sesión de la secuencialización. En ellos los alumnos deberán mostrar su destreza con todas las técnicas aprendidas hasta el momento durante la propuesta didáctica. Algunos de estos problemas serán corregidos por el profesor y otros por los alumnos en la pizarra, según el tiempo que vaya quedando disponible.

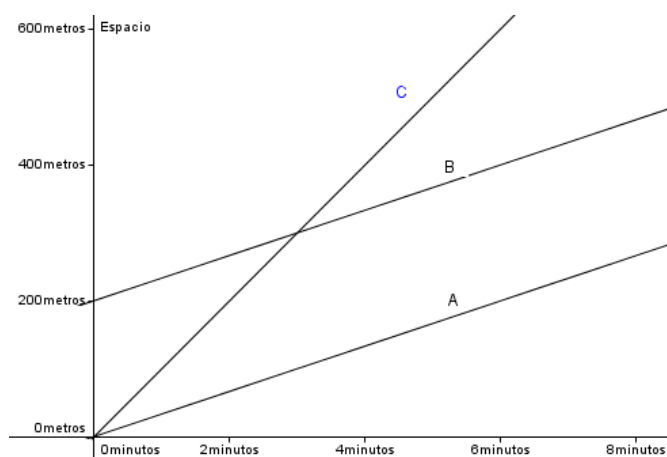
Problema 1: Un tren AVE sale de Sevilla hacia Zaragoza, que está a 800 km, y va a 300 km/h. Expresar mediante una expresión algebraica la distancia a la que se encontrará de Zaragoza dentro de t horas.

Problema 2: Fernando Alonso está haciendo pruebas de F1. Salió de Zaragoza hace dos horas y media yendo a 350 km/h. Obtener la ecuación que relaciona la distancia a la que está de nosotros con el tiempo transcurrido hasta ahora.

Problema 3: la velocidad de la luz en el aire es constante y tarda en llegar, desde el Sol a la Tierra, 8 minutos 20 segundos:

- Si la Tierra se encuentra aproximadamente a 150 millones de kilómetros (1 unidad astronómica), calcula la velocidad de la luz en kilómetros por hora.
- Si un rayo de luz enviado desde la Tierra tarda 2,6 segundos en llegar a la Luna y volver a la Tierra, ¿a qué distancia se encuentra la Luna de nuestro planeta?
- Escribe la relación de la distancia recorrida por la luz en función del tiempo empleado mediante una expresión algebraica.
- Las ondas electromagnéticas, las ondas radio y de televisión se propagan a la misma velocidad que la luz. ¿Con cuánto tiempo de retraso vemos la imagen en el televisor si nos encontramos a 400 km de distancia de la emisora?

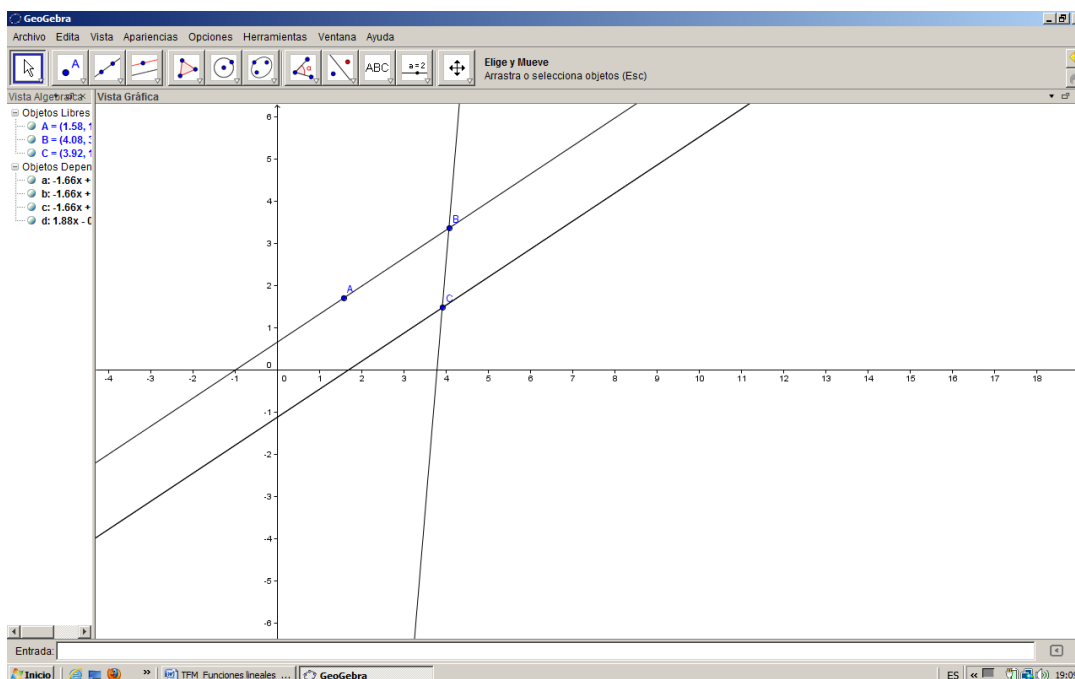
Problema 4: Esta es la gráfica de la altura que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:



TFM: Las funciones lineales y afines.

- ¿Qué velocidad lleva cada uno? ¿Quiénes se cruzarán?
- Escribe la expresión analítica de estas funciones.

Para problemas como el último, de representar dos funciones lineales a la vez, se utilizará el programa Geogebra. Para ello, el profesor enseñará a los alumnos a dibujar puntos y rectas con el programa, para que posteriormente, representen los resultados que ellos obtengan y puedan comprobar si lo han hecho de forma correcta. Por ejemplo, en los casos de rectas secantes, podrán ver si el punto de corte se da donde los alumnos habían previsto, o en el caso de rectas paralelas, podrán pintarlas con el programa y ver si realmente se trata de rectas paralelas, observando como se muestra a continuación:



Tal como se ha mostrado en esta serie de ejemplos, todas las técnicas llevarán asociados ejercicios y problemas para asegurar la destreza de los alumnos. Los ejercicios serán propuestos de tal forma que sean una introducción a las nuevas técnicas, para que los alumnos puedan ser conscientes de que les hacen falta herramientas para resolver las propuestas que vaya realizando el profesor. De esta manera las sesiones se desarrollarán de una manera más fluida, con la intervención tanto de profesor como de alumnos. Una vez se haya mostrado la técnica, se desarrollará un campo de ejercicios y problemas asociado a la técnica. Normalmente los ejercicios serán mecánicos, donde únicamente se necesitará por parte del alumno destreza con el uso de la técnica, y los problemas requerirán por parte del alumno, pensar, extraer información del enunciado del problema y poder exponer conclusiones de forma razonada. Además estos últimos serán contextualizados, mientras los ejercicios no tienen por qué.

5. Sobre la secuenciación de las actividades propuestas.

Esta propuesta didáctica se desarrollará a lo largo de nueve sesiones de unos cincuenta minutos cada una, estructurada como se detalla a continuación:

- Sesión 1: NOCIONES PREVIAS Y RAZÓN DE SER FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN.
- Sesión 2: QUÉ ES UNA FUNCIÓN LINEAL.
- Sesión 3: QUE ES UNA FUNCIÓN AFÍN.
- Sesión 4: OBTENCIÓN DE FUNCIÓN AFÍN A PARTIR DE PUNTO Y RECTA Y DE DOS PUNTOS.
- Sesión 5: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.
- Sesión 6: RESOLUCIÓN E INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE DOS FUNCIONES LINEALES O AFINES EN CONJUNTO.
- Sesión 7: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CON TICS.
- Sesión 8: EVALUACIÓN: REALIZACIÓN DEL EXAMEN.
- Sesión 9: CORRECCIÓN EXAMEN.

A continuación, se concreta en cada una de las sesiones, los problemas, técnicas, y actividades que se realizarán para que los alumnos alcancen los objetivos propuestos para el objeto matemático:

SESIÓN 1: NOCIONES PREVIAS Y RAZÓN DE SER FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN.

A la hora de plantear el primer paso de la unidad didáctica es importante concretar los conocimientos previos requeridos y si los alumnos los han visto con anterioridad, así como si harían falta ejercicios de refuerzo para recordar o apuntalar dichos conocimientos.

En la primera sesión se dedicarán los primeros 15 minutos a recordar los conceptos previos expuestos anteriormente, referidos principalmente a la proporcionalidad, que será lo que más falta haga en un principio, para comprobar que los alumnos los recuerdan y tienen claros, mediante ejemplos en la pizarra de la vida diaria.

Después se completará la primera sesión exponiendo la razón de ser del objeto matemático mediante ejemplos cotidianos, que les haga ver y entender su utilidad. En nuestra propuesta estos ejemplos estarán relacionados con las TIC. También se les mostrará algo de historia, para que puedan ir conociendo nombres ilustres, relacionados con el tema, como por ejemplo Descartes.

Actividad tipo conocimientos previos: Repaso conocimientos previos centrados en proporcionalidad.

TFM: Las funciones lineales y afines.

Esta actividad está desarrollada en el apartado sobre conocimientos previos del objeto matemático. Se buscarán numerosos ejemplos relacionados con la proporcionalidad y las TIC, para que los alumnos recuerden el concepto, y les resulte atractivo. Después de esta introducción inicial, se propondrá que, en grupos, busquen ejemplos de proporcionalidad directa relacionados con la vida cotidiana.

Mediante esta actividad, el profesor guiará a los alumnos por los conocimientos previos para poder dar el siguiente paso. Se potenciarán además otras competencias distintas a la matemática, como la lingüística o de interacción con el mundo físico.

Actividad tipo razón de ser: Razón de ser de las funciones lineales.

Esta actividad está desarrollada en el apartado sobre la razón de ser del objeto matemático. Como ya hemos comentado anteriormente, la razón de ser de las funciones lineales es modelizar la proporcionalidad, de ahí que también se les llame función de proporcionalidad. Por ello, a partir de los ejemplos que hayan encontrado anteriormente, el profesor explicará como a través de la representación gráfica de una recta se va a poder representar esa proporcionalidad, dejándoles claro el uso de las funciones lineales.

La metodología de esta actividad, tal como se ha concretado en apartados anteriores, consistirá en que el profesor pueda ver los ejemplos que han ideado los alumnos, viendo si han adquirido bien los conocimientos, y a partir de ahí, poder hacerles ver como algunas de las proporcionalidades que han trabajado durante toda la clase se pueden modelizar mediante una recta, dando lugar a las funciones lineales. Para ello se realizarán tablas de datos de relación entre dos magnitudes proporcionales.

SESIÓN 2: QUÉ ES UNA FUNCIÓN LINEAL

Después de asegurarnos en la primera sesión que los conceptos previos están bien asentados y de haber explicado la utilidad de las funciones lineales, nos vamos a centrar en su estudio, y concretamente en el paso de expresar de forma algebraica esa relación entre magnitudes, es decir, la construcción del modelo algebraico.

Esta sesión consistirá en una primera parte en la que el profesor expondrá a los alumnos varios ejemplos de función lineal en la vida real, de tal forma que ellos la relacionen con la proporcionalidad directa. Posteriormente se procederá a su representación gráfica, de tal forma que preguntando, ellos encuentren cuáles son sus principales características.

Actividad tipo 1: La función lineal, construcción con reconocimiento de variables y ejemplos.

Después de ver la utilidad de la función lineal como modelización de la proporcionalidad, en esta actividad ya se entrará de lleno en un ejemplo concreto.

TFM: Las funciones lineales y afines.

Este ejemplo estará referido a los precios y peso de determinados productos en el mercado. Se trabajará con distintos elementos tales como fruta, carne, etcétera, para a partir de ellos, ya trabajar con la expresión analítica $y=mx$.

Una vez identifiquen las funciones lineales con su expresión analítica, para familiarizarse con su uso, tendrán que hacer tablas para distintos valores y distintos elementos, como por ejemplo, ternera, merluza y leche con sus respectivos precios de mercado, que deberán ir a comprobar después de clase.

Actividad Tipo 2: Representación gráfica de la función lineal, traducción de los diferentes lenguajes.

Una vez vista la expresión analítica con los diversos ejemplos anteriores, el siguiente paso será su representación gráfica. Para ello utilizaremos las tablas que han obtenido en la actividad anterior. Una vez representadas, se orientará a los alumnos para que ellos mismos observen características propias de las funciones lineales, como por ejemplo que siempre van a pasar por el punto $(0,0)$, se den cuenta que la inclinación es importante, para analizarla en la siguiente actividad y si se trata de funciones crecientes o decrecientes. A partir de los distintos ejercicios analizados anteriormente se explicará el significado de pendiente de la recta, viendo las propiedades e interpretación gráfica.

Ejercicios para la práctica: Representa las siguientes funciones, determina su pendiente y expón sus propiedades razonadas (dominio, creciente/decreciente, máximos y mínimos, periodicidad...) e identifica cada una de ellas con una situación de la realidad:

- a) $y=x$
- b) $y=3x$
- c) $y=-x$
- d) $y=-2x$
- e) $y=1/3x$
- f) $y=-1/3x$
- g) $y=3/2x$
- h) $y=-3/2x$
- i) $y=2x+1$

El objetivo de estos ejercicios es que el alumno adquiera destreza con el manejo de funciones lineales y en su representación, así como en propiedades generales de las funciones. El último apartado incluye una función afín, con intención de que el alumno se pregunte que variaciones puede mostrar, y entroncar con la sesión que tratará este tema. Para esta actividad se les dará 15 minutos de clase. Posteriormente, el profesor comentará los ejercicios junto a los alumnos, para comprobar que todo lo han entendido correctamente, y las reflexiones acerca de las propiedades de las funciones han sido las adecuadas. Especial hincapié se hará en la distinción de las pendientes, según su signo, o cómo influyen que sean mayores o menores.

Actividad tipo 3: Reconocimiento de funciones lineales en el contexto de la realidad.

TFM: Las funciones lineales y afines.

En esta actividad, los alumnos deberán buscar en la prensa ejemplos de funciones lineales que modelicen algún fenómeno de la vida real, e intenten calcular su expresión analítica, su pendiente y sepan interpretar resultados a partir de ella.

Mediante esta actividad se potenciará en los alumnos la identificación de los conceptos matemáticos adquiridos en el aula con sucesos cotidianos de la vida real, de forma que suponga una mayor motivación para ellos las clases de matemáticas. También mediante esta actividad se conseguirá que los alumnos se acerquen a la prensa, busquen en ella, y puedan sacar conclusiones derivadas de lo aprendido en clase. Una vez encontrado el ejemplo y estudiado, deberán prepararlo para poder exponerlo en clase. De esta forma se preparan para la exposición de resultados de su propio trabajo ante un público, por la necesidad de que se vayan acostumbrando a este tipo de experiencias.

SESIÓN 3: QUE ES UNA FUNCIÓN AFÍN

Con la función lineal explicada, será más fácil proceder a la explicación de la función afín. La metodología será similar a la de la segunda sesión, con una primera actividad centrada en ejemplos de las funciones afines, y después otra actividad dedicada a su representación gráfica y sus características.

Tipo problema: Razón de ser de la función afín y construcción de modelo algebraico.

Después de ver la utilidad de la función lineal como modelización de la proporcionalidad, en esta actividad ya se entrará de lleno en la definición algebraica de la función afín mediante un ejemplo concreto.

Para ello, nos referiremos a precios de un taxi, donde hay un fijo inicial y después se cobra por kilómetro recorrido. En este caso se trabajará desde el primer momento con la expresión analítica, $y=mx+n$, por no diferir mucho de la de la función lineal, trabajada en anteriores sesiones. Especial hincapié se realizará en la adecuada interpretación de cada una de las letras, en función del problema, por los problemas que puedan aparecer al pasar del enunciado a una expresión algebraica.

Después, los alumnos deberán trabajar distintos ejemplos con distintas rutas, para que vean la evolución de los precios en cada uno de los casos, realizando las tablas correspondientes.

Actividad Tipo 2: Representación gráfica de la función afín, traducción de los diferentes lenguajes.

Una vez realizadas las tablas estas se representarán en la pizarra, viendo ellos mismos sus características principales, y comentando las diferencias que ven con la función lineal vista anteriormente:

- Su pendiente es m , al igual que en las lineales.

TFM: Las funciones lineales y afines.

- Su ordenada en el origen es n , por lo tanto cortará a al eje Y en el punto $(0, n)$.

Ejercicios para la práctica: Representa las siguientes funciones, determina su pendiente y expón sus propiedades razonadas (dominio, creciente/decreciente, máximos y mínimos, periodicidad...) e identifica cada una de ellas con una situación de la realidad:

- $y=2x-5$
- $y=6-3x$
- $y=x+2$
- $y=3$
- $y=-3/5x+2$

El objetivo de estos ejercicios es que el alumno adquiera destreza con el manejo de funciones afines y en su representación, así como seguir trabajando propiedades generales de las funciones. Se observará los casos particulares de función afín en base a los ejercicios resueltos:

- Si $n=0$, la función afín será una función lineal ($y=mx$).
- Si $m=0$, la función afín se convierte en una función constante paralela al eje de abscisas con pendiente nula ($y=k$)
- El caso de $x=k$ será una recta paralela al eje de ordenadas, pero no se tratará de una función, puesto que a un valor de x , le corresponde infinitos valores de y .

Actividad tipo 3: Reconocimiento de funciones afines en el contexto de la realidad.

Esta actividad para casa, los alumnos deberán buscar en la prensa ejemplos de funciones afines que modelicen algún fenómeno de la vida real, e intenten calcular su expresión analítica, su pendiente y sepan interpretar resultados a partir de ella.

Al igual que en la actividad análoga que se preparó para funciones lineales, mediante esta actividad se potenciará en los alumnos la identificación de los conceptos matemáticos adquiridos en el aula con sucesos cotidianos de la vida real, de forma que suponga una mayor motivación para ellos las clases matemáticas. También mediante esta actividad se conseguirá que los alumnos se acerquen a la prensa, busquen en ella, y puedan sacar conclusiones derivadas de lo aprendido en clase. Una vez encontrado el ejemplo y estudiado, deberán prepararlo para poder exponerlo en clase. Como en el caso de la función lineal, así se preparan para la exposición de resultados de su propio trabajo ante un público, por la necesidad de que se vayan acostumbrando a este tipo de experiencias.

SESIÓN 4: OBTENCIÓN DE FUNCIÓN AFÍN A PARTIR DE PUNTO Y RECTA Y DE DOS PUNTOS.

Actividad tipo 4: Como obtener la expresión algebraica de una función afín a partir de un punto y su pendiente.

TFM: Las funciones lineales y afines.

Para el desarrollo de la técnica apropiada para el caso en el que tengamos como datos un punto y la pendiente de una función afín, se utilizarán varios ejemplos en los que el profesor irá dando los pasos a los alumnos para que, tanto dando un punto y su pendiente, como a partir de una gráfica, obtener la expresión algebraica correspondiente. Los ejercicios propuestos serán:

Escribe la expresión de la función afín que pasa por el punto P y tiene por pendiente m .

- a) $P(-3,0)$, $m=1/5$
- b) $P(4,-3)$, $m=4$
- c) $P(0,2)$, $m=-1/2$
- d) $P(-3,1)$, $m=5/4$
- e) Escribe la expresión algebraica de las gráficas que el profesor presentará en la pizarra.

Actividad tipo 5: Como obtener la expresión de la función afín cuya gráfica pasa por dos puntos.

En este punto, los alumnos ya han trabajado con las funciones lineales, afines y sus propiedades. Para seguir manejando estos términos se trabajarán problemas en los cuales conociendo dos puntos, obtengan la función inicial, relacionándolo con el concepto de pendiente visto en las sesiones anteriores, lo que ayudará a que vean mejor su utilidad. Se propondrán varios ejercicios en clase:

Se plantearán un par de ejercicios para que los resuelvan en clase:

Dados los puntos A y B , escribe la expresión algebraica de la función afín que pasa por ambos mediante los dos métodos propuestos:

- a) $A(3,2)$ y $B(7,1)$
- b) $A(-1,0)$ y $B(5,-2)$

Actividad: El espacio, tiempo y velocidad.

Como aplicación importante se realizará un problema en el que se traten los conceptos de velocidad, espacio y tiempo y relacionarlos entre sí.

Para ello se utilizarán contextos familiares a ellos como la fórmula 1 y los trenes AVE. Posteriormente, dejaremos este problema planteado para que en la siguiente sesión, los alumnos vean los resultados que podemos obtener trabajando con dos funciones a la vez.

Problemas en contexto de la realidad: Aplicaciones.

Problema 1: Un tren AVE sale de Sevilla hacia Zaragoza, que está a 800 km, y va a 300 km/h. Expresar mediante una expresión algebraica la distancia a la que se encontrará de Zaragoza dentro de t horas.

TFM: Las funciones lineales y afines.

Problema 2: Fernando Alonso está haciendo pruebas de F1. Salió de Zaragoza hace dos horas y media yendo a 350 km/h. Obtener la ecuación que relaciona la distancia a la que está de nosotros con el tiempo transcurrido hasta ahora.

Problema 3: La velocidad de la luz en el aire es constante y tarda en llegar, desde el Sol a la Tierra, 8 minutos 20 segundos:

- Si la Tierra se encuentra aproximadamente a 150 millones de kilómetros (1 unidad astronómica), calcula la velocidad de la luz en kilómetros por hora.
- Si un rayo de luz enviado desde la Tierra tarda 2,6 segundos en llegar a la Luna y volver a la Tierra, ¿a qué distancia se encuentra la Luna de nuestro planeta?
- Escribe la relación de la distancia recorrida por la luz en función del tiempo empleado mediante una expresión algebraica.
- Las ondas electromagnéticas, las ondas radio y de televisión se propagan a la misma velocidad que la luz. ¿Con cuánto tiempo de retraso vemos la imagen en el televisor si nos encontramos a 400 km de distancia de la emisora?

Problema 4: Tenemos dos tarifas de coste de internet. En una se paga un fijo de 20 euros y por las llamadas de tño. 0,01 € por minuto, mientras que en la otra se paga 0,04 € por minuto de teléfono sin ningún fijo. Representa en ambos casos la función tiempo de uso \rightarrow gasto.

Problema 5: Vamos a planificar un viaje a Inglaterra, y tenemos que cambiar euros por libras. A mi hermano le han dado 161 libras por 289 euros y a mí me han dado 233 libras por 346 euros. Halla la ecuación de la función que nos permita obtener cuántas libras obtenemos en función de los euros que tengamos. ¿Cuántas libras nos entregarían por 300 euros? ¿Cuántos euros tendríamos en nuestro bolsillo si nos hubieran dado 205 libras?

Problema 6: Al nivel del mar, el agua hierve a 100 °C (punto de ebullición PE). A medida que se asciende, el PE disminuye a razón de una décima de grado por cada 100 metros de elevación. Escribe la expresión analítica de la función que relaciona a (altura, en metros) con T (temperatura de ebullición). Construye la gráfica.

Problema 7: La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0°C, y en la de Fahrenheit es 32 °F. La ebullición del agua es de 100°C, que equivale a 212 °F.

- Encuentra la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas y representala.
- Expresa en grados Fahrenheit las temperaturas siguientes: 25 °C, 37,5 °C; 10 °C.
- Pasa a grados centígrados 96 °F y 61,5 °F.

Problema 8: En una prueba de natación, el campeón A ha cubierto los 50 metros de la piscina en 18 segundos, mientras que el subcampeón, B, ha necesitado 20 segundos. Sin embargo, mientras B estuvo siempre al mismo ritmo, para A la carrera tuvo dos fases. Salió muy mal, a un ritmo de un metro por segundo, y a partir de los 10 metros incrementó el ritmo de forma constante, llegando a alcanzar a B y ganando la carrera.

TFM: Las funciones lineales y afines.

- Construye en los mismos ejes las gráficas que reflejan la relación entre el tiempo empleado, t , y la distancia recorrida d , para ambos nadadores.
- ¿Cuáles son las expresiones analíticas de estas relaciones? Ten en cuenta que para A tienes que distinguir entre si t está por encima o por debajo de 10 segundos.
- ¿A qué distancia de la salida alcanzó A a B? ¿Cuántos segundos de carrera llevaban hasta ese momento?

Actividad: Corrección busca en contexto de la realidad, funciones lineales y afines.

A lo largo de las sesiones, se les habrá propuesto a los alumnos buscar ejemplos de la vida real en la prensa referidos a las funciones lineales y afines. En este momento las comentaremos. En este caso, la metodología a la hora de evaluar la actividad será importante.

SESIÓN 5: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esta sesión estará centrada en corregir ejercicios y problemas que los alumnos hayan tenido que resolver en casa, para poder observar si han alcanzado los objetivos propuestos hasta el momento.

SESIÓN 6: RESOLUCIÓN E INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE DOS FUNCIONES LINEALES O AFINES EN CONJUNTO.

Hasta el momento se han estudiado las funciones de forma individual, pero se les planteará a los alumnos que sucede cuando hay dos funciones a la vez, qué información y conclusiones se pueden sacar de ellas en conjunto. A partir de ahí se plantearán problemas relacionados también con la velocidad, espacio y tiempo, vistos en la sesión anterior.

Actividad tipo 6: Representar dos funciones lineales a la vez. ¿Qué sucede? Relaciones entre funciones lineales.

A partir del problema que planteamos sobre espacio, tiempo y velocidad, los alumnos deberán traer las dos ecuaciones que obtuvieran representadas, habiendo pensado que sucede y por qué. A partir de sus reflexiones se verá las posibles interpretaciones que podemos dar a estos resultados.

Problemas en contexto de la realidad: Estudio conjunto de dos funciones.

Se plantearán y corregirán nuevos problemas donde tengan que practicar estos conceptos, donde hayan tenido que analizar varios casos donde tengan que estudiar aplicaciones de funciones lineales y análisis de dos funciones de forma conjunta.

TFM: Las funciones lineales y afines.

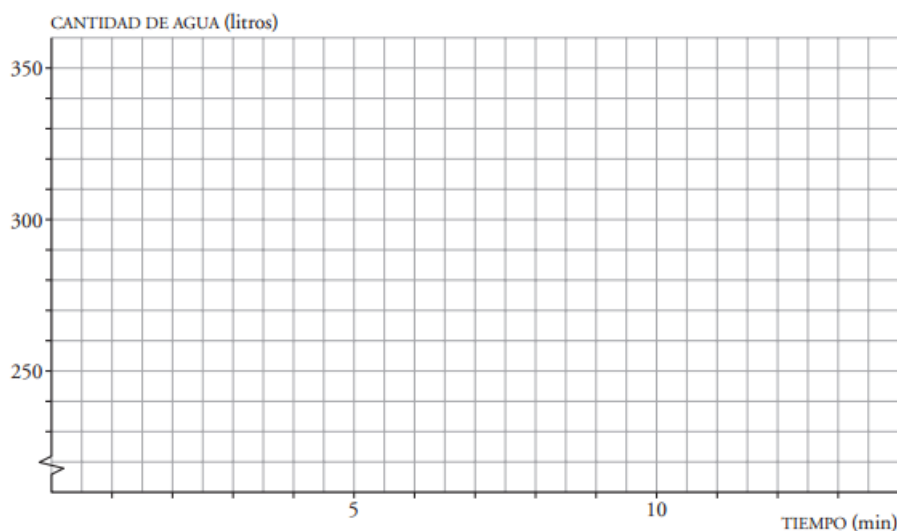
Problema 1: Un depósito contiene 260 l de agua y recibe el caudal de un grifo que aporta 91 por minuto. Un segundo depósito contiene 320 l y recibe el caudal de un grifo que aporta 42 por minuto. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que ambos depósitos tengan la misma cantidad de agua?

Cantidad de agua (l) en el primer depósito, y , en función del tiempo (m) transcurrido x .

$$y = \boxed{} + \boxed{}x \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & 0 & 5 & 10 \\ \hline y & & & \\ \hline \end{array}$$

Cantidad de agua (l) en el segundo depósito, y , en función del tiempo (m) transcurrido x .

$$y = \boxed{} + \boxed{}x \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & 0 & 5 & 10 \\ \hline y & & & \\ \hline \end{array}$$



La reserva de agua se iguala en ambos depósitos transcurridos ___ minutos.

Problema 2: Halla la expresión algebraica de la función que pasa por el punto (2, -1) y es paralela a la que pasa por los puntos (3, 0) y (2, 5).

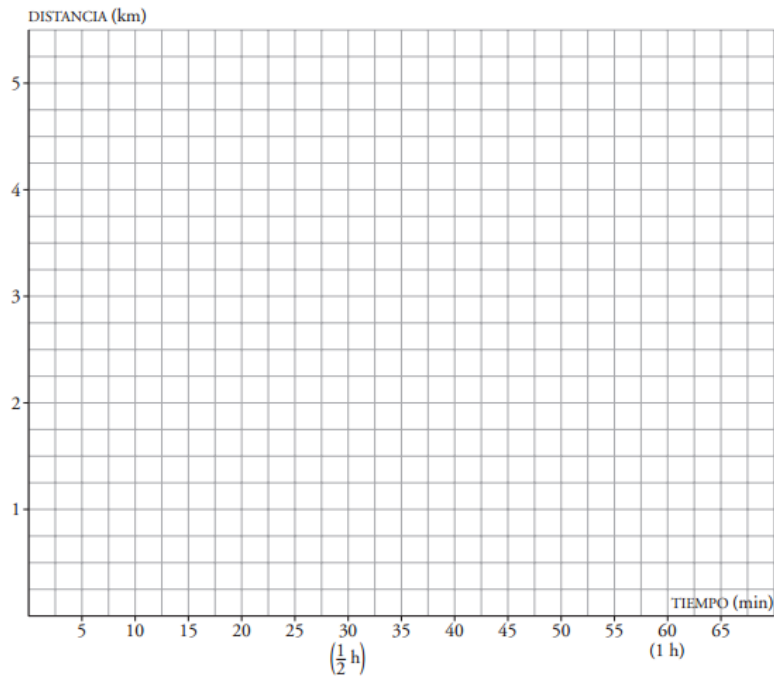
Problema 3: Un peatón sale a dar un paseo caminando a 5 km/h. Media hora más tarde sale en su busca un ciclista a 10 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?
Espacio recorrido por el peatón, y , en función del tiempo transcurrido x , en horas.

$$y = \boxed{}x \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 0 & 1 \\ \hline y & & \\ \hline \end{array}$$

TFM: Las funciones lineales y afines.

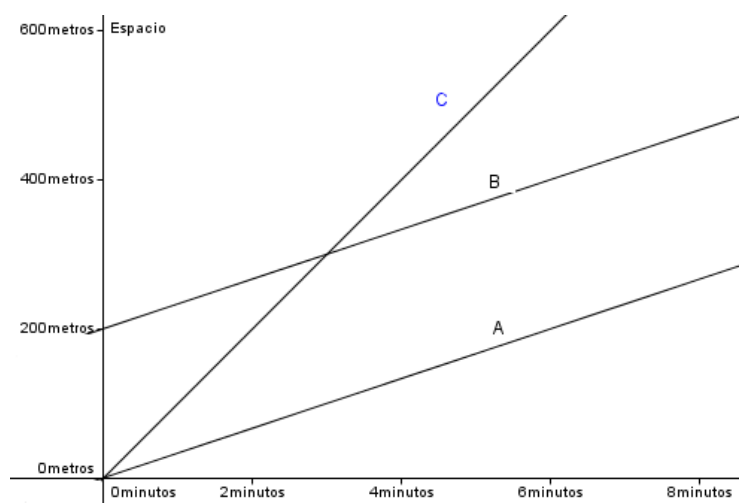
Espacio recorrido por el ciclista, y , en función del tiempo transcurrido x , en horas.

$$y = \square \left(x - \frac{\square}{\square} \right) \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 1/2 & 1 \\ \hline y & & \\ \hline \end{array}$$



El encuentro se produce cuando ambos hayan recorrido la misma distancia. Por tanto, el encuentro se produce a los minutos ____ de la salida del peatón.

Problema 4: Esta es la gráfica de la altura que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:



- ¿Qué velocidad lleva cada uno? ¿Quiénes se cruzarán?
- Escribe la expresión analítica de estas funciones.

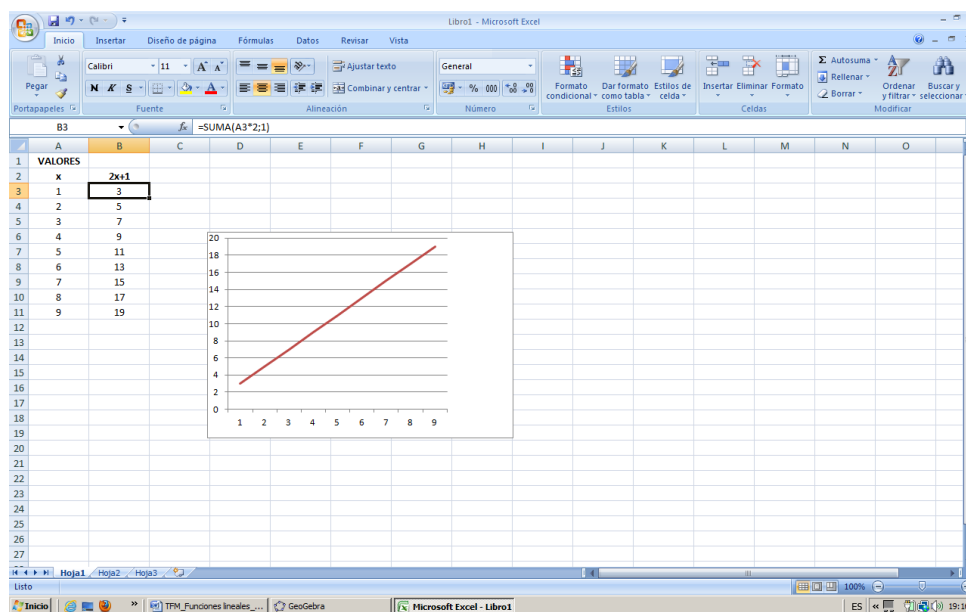
TFM: Las funciones lineales y afines.

SESIÓN 7: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CON TICS

En esta sesión se acudirá al aula de ordenadores con todos los alumnos para, mediante programas informáticos diversos, poder ver la representación de funciones lineales y su resolución. De esta manera los alumnos se familiarizarán con el uso de programas matemáticos para la representación gráfica de funciones. En estas actividades los alumnos se pondrán por parejas en cada ordenador para resolver problemas planteados por el profesor con las herramientas informáticas que disponen.

Actividad TIC: Representación de función lineal con Excel.

Las hojas de cálculo Excel van a permitir a los alumnos representar distintos tipos de funciones de una forma más atractiva y novedosa. A partir de esta representación gráfica podrán estudiar las características de esa función. Se utilizarán ejercicios previos para que los alumnos comprueben si la solución a la que han llegado ha sido la adecuada.



Actividad TIC: Representación de funciones con Geogebra.

La aplicación Geogebra permitirá a los alumnos una visualización mucho más geométrica de la representación de funciones, siendo muy útil para ver puntos de corte o variaciones en las funciones. Es muy útil que se familiaricen con esta herramienta con vistas a la geometría.

Mediante el uso de esta herramienta corregiremos de forma visual los problemas de análisis de dos funciones de forma conjunta. De esta forma, aprenderán a pintar puntos y rectas con el programa y verán si se cumple la solución a la que ellos han llegado en su resolución.

SESIÓN 8: EVALUACIÓN

Se establecerá una evaluación por escrito donde se pueda ver si los alumnos han alcanzado los objetivos especificados para esta unidad. Esta evaluación durará toda la sesión. Los ejercicios y problemas propuestos se muestran en el apartado sobre la evaluación.

SESIÓN 9: CORRECCIÓN EXAMEN

Se corregirá el examen con los alumnos, haciendo hincapié en fallos generalizados, para que intenten ver por qué está mal y aprendan de los errores cometidos. Se intentará que corrijan el examen los alumnos que han tenido menos aciertos, para que así, con la ayuda de sus compañeros y del profesor puedan comprender en qué han fallado, y, sobre todo, por qué.

6. Sobre la evaluación.

La evaluación va a ser parte fundamental de la propuesta didáctica, debido a que es la forma palpable por la que vamos a saber si los alumnos han adquirido los conocimientos necesarios del objeto matemático en cuestión. Además, la evaluación no viene marcada únicamente por criterio del profesor, sino que la LOE, los Decretos del Currículo y las Órdenes de Evaluación van a constituir el marco de referencia obligado para el desarrollo del proceso de evaluación en las aulas. Dicho marco normativo determina que la evaluación debe abarcar tanto el proceso de enseñanza como el de aprendizaje, de manera que se analicen y mejoren constantemente, al mismo tiempo que se valora el grado de consecución de los objetivos previstos en el currículo del curso en cuestión. Es decir, por un lado, la evaluación nos va a orientar como profesores acerca de sus líneas de avance y sobre las modificaciones necesarias en su programación y, por otro, ayuda a identificar la evolución del desarrollo y aprendizaje del alumnado atendiendo a todos los ámbitos de la persona, y no sólo a los aspectos puramente cognitivos.

A lo largo de la propuesta didáctica, la evaluación va a constituir un proceso continuo, sistemático, flexible e integrador, con un papel fundamental tanto de profesores como de alumnos.

Dado que el aprendizaje de las matemáticas es un proceso acumulativo que va incrementando y modificando las estructuras conceptuales del alumnado, lo que vamos a pretender con la evaluación es conseguir una imagen válida y fiable, en cada momento, de la adquisición y la modificación de las estructuras conceptuales y de las destrezas procedimentales del alumnado.

Pese a su carácter eminentemente continuo, la evaluación se manifiesta en determinados momentos, pudiendo clasificarse en evaluación inicial, formativa y final. En este apartado, vamos a centrarnos en la evaluación final.

La evaluación final va a permitir comprobar el grado de consecución de objetivos por parte del alumno y del propio proceso de enseñanza y aprendizaje a la finalización de un recorrido didáctico. En cuanto a los conocimientos, el alumno realizará una prueba escrita, que incluirá los contenidos de las sesiones tratadas en clase sobre las funciones lineales y afines, contemplando tanto cuestiones teóricas, como ejercicios de aplicación directa y problemas de planteamiento. Se realizará durante la penúltima sesión de clase, siendo su duración de 60 minutos.

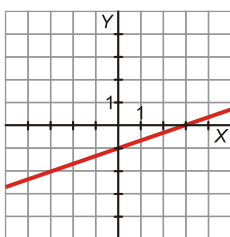
Como parte final, se procederá durante la última sesión a la corrección del examen en grupo con toda el aula, haciendo especial hincapié en los fallos que se hayan podido cometer de forma generalizada, para que en la medida de lo posible, los alumnos se den cuenta de los motivos de sus errores, y darle sentido completo a la evaluación. En vista de estos fallos, esta propuesta didáctica debería modificarse en sucesivos años, intentando fortalecer la metodología mediante más ejercicios y problemas sobre los conceptos que hayan generado más confusión a los alumnos.

TFM: Las funciones lineales y afines.

A continuación, se expone la prueba junto con los objetivos y criterios de evaluación de cada uno de los ejercicios. En ella se abarcan todas las técnicas expuesta a lo largo de las sesiones de clase. Se ha buscado que la dificultad esté compensada, de tal forma que haya ejercicios de dificultad baja, media y alta. Así mismo, también se le ha dado gran peso a los problemas, con 4 puntos, realizados de forma contextualizada, tal y como se habrán realizado a lo largo de las clases.

PRUEBA DE FUNCIONES LINEALES 3º ESO

1. *Analiza todas las propiedades de la siguiente función:*



- Dominio de la función.*
- Recorrido de la función.*
- Simetría respecto de los ejes y del origen.*
- Continuidad.*
- Crecimiento y decrecimiento.*
- Máximos y mínimos.*
- Periodicidad.*
- Puntos de corte.*

CALIFICACIÓN: 1 PUNTO; TIEMPO ESTIMADO: 5 MIN

RESPUESTA ESPERADA: En este caso los alumnos deben demostrar que tienen dominados los conocimientos de unidades anteriores, y que han adquirido un aprendizaje significativo, con lo que son capaces de relacionar las propiedades que se estudiaron previamente en la unidad de funciones con las funciones concretas estudiadas en esta propuesta.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN: Por cada apartado que no esté respondido correctamente se descontará 0,25 puntos, hasta un máximo de 1 punto.

La dificultad del ejercicio es relativamente sencilla, ya que las propiedades de las funciones afines son siempre muy similares, con lo que el objetivo principal es que los alumnos tengan claras las propiedades de las funciones y su definición, observándolas a través de su representación gráfica.

Para calificar el apartado como correcto, los alumnos deberán responder de forma concreta sobre cada uno de los conceptos preguntados en cada apartado, sin ningún tipo de error.

TFM: Las funciones lineales y afines.

2. *Representa gráficamente las siguientes funciones:*

- a. $y = \frac{3}{4}x + 1$
- b. $x = 4$
- c. $2x + 3y = 4$
- d. $y = -3$

CALIFICACIÓN: 1 PUNTO; TIEMPO ESTIMADO: 5 MIN

RESPUESTA ESPERADA: Los alumnos deberán representar gráficamente de forma adecuada las funciones, sabiendo distinguir de forma clara las funciones que son paralelas a los ejes de coordenadas (casos b y d). En los otros dos casos deberán valerse o de tabla de valores, con lo que necesitarán más tiempo, o de las propiedades de las funciones lineales y afines. Sobre esta técnica se habrán realizado diversos ejercicios en clase.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN: Por cada apartado que no esté respondido correctamente se descontará 0,25 puntos, hasta un máximo de 1 punto.

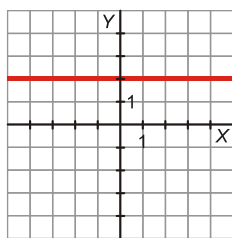
La dificultad del ejercicio es relativamente sencilla, ya que la representación gráfica de las funciones lineales y afines no debe resultar muy complicada. El objetivo principal es que los alumnos tengan claro como representar este tipo de funciones.

Para considerar un apartado correcto, debe estar claramente representada de forma cartesiana la gráfica, mostrando claramente todos los puntos de corte con los ejes de abscisas.

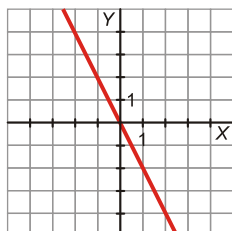
3. *Realiza los siguientes ejercicios:*

a. *Indica las expresiones algebraicas que cumplen las siguientes condiciones:*

- i. *Tiene pendiente -5 y ordenada en el origen 2.*
- ii. *Tiene pendiente 2 y pasa por el punto P(3, 5).*
- iii. *Pasa por los puntos A(-1, 7) y B(3, 4).*
- iv. *Pasa por los puntos A(3/4, 6/9) y B(13/3, 4/17).*



v.



vi.

vii. *Pasa por $P(2, -4)$ y es paralela a $y=3x$*

viii. *Es paralela al eje Y y pasa por el punto $Q(3, 1)$*

CALIFICACIÓN: 4 PUNTOS; TIEMPO ESTIMADO: 15 MIN

RESPUESTA ESPERADA: los alumnos deberán demostrar en todos los apartados que han comprendido las diferentes técnicas para obtener la expresión algebraica de las funciones lineales y afines en diferentes situaciones que se han ido trabajando a lo largo de las sesiones de clase, en función de los datos iniciales que se aporten en los ejercicios.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN: Por cada apartado que no esté respondido correctamente se descontará 0,5 puntos, hasta un máximo de 4 puntos.

La dificultad del ejercicio es normal. El objetivo principal es que los alumnos tengan claro cómo utilizar las técnicas empleadas en clase para la obtención de la expresión algebraica de las funciones.

Para considerar un apartado correcto, debe estar claramente expresado el resultado final, así como los pasos efectuados para llegar a dicho resultado. En el caso de que haya un fallo numérico, pero los pasos estén bien expuestos y razonados, se valorará con 0,25 puntos de los 0,5 posibles.

4. *En el contrato de trabajo, a un vendedor de enciclopedias se le ofrecen dos alternativas:*

A: Sueldo fijo mensual de 1000 €

B: Sueldo fijo mensual de 800 € más el 20 % de las ventas que haga.

a) Haz la gráfica que muestre lo que ganaría en un mes según la modalidad del contrato. Toma como x , las ventas que haga, y como y , el sueldo.

TFM: Las funciones lineales y afines.

- b) *Escribe la expresión analítica de cada función.*
- c) *¿A cuánto tienen que ascender sus ventas mensuales para ganar lo mismo con las dos modalidades del contrato? ¿Qué ganancias obtendrá?*

CALIFICACIÓN: 2 PUNTOS; TIEMPO ESTIMADO: 10 MIN

RESPUESTA ESPERADA: En este problema el alumno deberá saber interpretar el enunciado y obtener los datos de tal forma que pueda ir respondiendo a las preguntas planteadas. Para que sea más comprensible se ha contextualizado en una situación real, con cantidades que se podrían dar hoy en día.

El alumno deberá saber modelizar la situación planteada, representarla gráficamente, e interpretar las conclusiones a las que llegue para poder expresar de forma correcta el resultado final.

Se habrán realizado varios problemas de este tipo en clase, siempre con el objetivo de que el alumno se familiarice con la misión principal de las funciones, su razón de ser, que es modelizar situaciones de la vida cotidiana, y poder utilizarlo para sacar conclusiones útiles.

Las técnicas que el alumno necesitará dominar para resolver el problema serán planteamiento de funciones lineales, obtención de la expresión algebraica e interpretación de dos funciones afines de forma conjunta. En este caso además deberán trabajar con porcentajes, concepto visto anteriormente.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN: El primer apartado contará por 0,75 puntos, el segundo 0,5 puntos, y el tercero 0,75 puntos.

Se valorará tanto los resultados, como los pasos que el alumno efectúe para llegar a ellos, la expresión correcta de estos pasos y las conclusiones.

5. *Pedro quiere contratar una póliza de seguros para su vivienda y tiene dos ofertas:*

La empresa A le cobraría 400 € el primer año, con un descuento de 50 € por año durante los 5 siguientes, y a partir de ahí la cuota sería fija.

La compañía B le cobraría 300 € el primer año, con un descuento de 25 € por año, hasta el cuarto, y, a partir de este, no habría más reducciones.

Pedro quiere analizar que oferta le es más ventajosa para los próximos 10 años.

- a) *Construye las tablas que relacionan el tiempo transcurrido t , con el coste de la póliza, C , para los próximos 10 años. Dibuja las gráficas para ambos casos, en los mismos ejes.*
- b) *Encuentra la expresión analítica que relaciona t con C en ambos casos. ¿En qué momento se igualan ambas cuotas?*

TFM: Las funciones lineales y afines.

- c) *Calcula cuánto pagaría Juan durante los 10 primeros años en cada compañía. ¿Cuál debe elegir?*

CALIFICACIÓN: 2 PUNTOS; TIEMPO ESTIMADO: 15 MIN

RESPUESTA ESPERADA: En este problema el alumno deberá saber interpretar el enunciado y obtener los datos de tal forma que pueda ir respondiendo a las preguntas planteadas. Para que sea más comprensible se ha contextualizado en una situación real, con cantidades que se podrían dar hoy en día.

El alumno deberá saber modelizar la situación planteada, representarla gráficamente, e interpretar las conclusiones a las que llegue para poder expresar de forma correcta el resultado final.

Se habrán realizado varios problemas de este tipo en clase, siempre con el objetivo de que el alumno se familiarice con la misión principal de las funciones, su razón de ser, que es modelizar situaciones de la vida cotidiana, y poder utilizarlo para sacar conclusiones útiles.

Las técnicas que el alumno necesitará dominar para resolver el problema serán planteamiento de funciones lineales, obtención de la expresión algebraica e interpretación de dos funciones afines de forma conjunta. En este caso, como dificultad añadida, no se va a tratar de una simple función lineal, sino combinaciones de funciones lineales, lo cual requerirá de una correcta comprensión por parte del alumno para la correcta resolución del problema, y no aplicar cálculos de forma mecánica.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN: El primer apartado contará por 0,75 puntos, el segundo 0,75 puntos, y el tercero 0,5 puntos.

Se valorará tanto los resultados, como los pasos que el alumno efectúe para llegar a ellos y la expresión correcta de estos pasos y las conclusiones.

7. Bibliografía.

Carrasco, A.; Martín, R.; Ocaña, J.M.; Sánchez, J. (2010): Matemáticas 3º ESO, Ed. EDELVIVES

Cólera, J.; García, R., Gaztelu, I., M.J. Oliveira (2010): Matemáticas 3º ESO, Ed. ANAYA

Arias, J.M.; Maza, I. (2010): Matemáticas 3º ESO, Ed. BRUÑO

Sánchez Gil, Rubén (2007): *“El principio de proporcionalidad.”*, Ed. Instituto de Investigaciones Jurídicas (UNAM)

Bacallao Hernández, Ada Lourdes: *“Apuntes sobre el surgimiento del concepto función en la historia.”* Universidad pedagógica "Juan Marinello", Matanzas

Azcárate, Carmen; Deulofeu, Jordi Matemáticas (1990): *“Cultura y aprendizaje, número 26: Funciones y gráficas.”* Editorial Síntesis