MASTER EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
PARA ESO Y BACHILLERATO.
ESPECIALIDAD:MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MASTER

INTRODUCCIÓN A LA DERIVADA PRIMERA

Oreste D'Alessio

Indice

1 Presentación

En este trabajo mi objeto matemático es la derivada primera; en particular voy a tratar su introducción. Antes voy a hablar del curso y de la asignatura en la que sitúo el objeto matemático. A continuación, se hablará de los conocimientos previos en cuestión y se introducirán las razones de ser del objeto matemático. Veremos que las razones de ser del objeto matemático en líneas generales coinciden con las razones de ser históricas; se introducirá un campo de problemas relacionados con la velocidad en el gráfico espacio tiempo y otros problemas puramente matemáticos. Se introducirán ejercicios, que se resuelven con las técnicas, en este caso, las reglas de derivación y otras más que trataremos después.
La idea es de presentar la derivada primera en 12-14 sesiones de una hora, mas una para la evaluación final. El número de sesiones dependerá también del nivel de aprendizaje que tiene el alumnado, es decir que el profesor tiene que adaptarse al ritmo de aprendizaje de la clase.

1.1 Introducción. (Sobre la definición del objeto matemático a enseñar)

El objeto matemático de mi trabajo fin de máster es la derivada primera. Yo trataré este tema utilizando Geogebra, un software open source (gratuito), muy útil para la enseñanza de las matemáticas, que en este caso nos permite dibujar las funciones, las derivadas primeras etc.
Mi propósito es tratar este tema en el primer curso de un bachillerato científico, como está previsto en la *ORDEN de 1 de julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón.*
Según dicha Orden, este objeto matemático pertenece al bloque de contenidos de análisis matemático.
En este trabajo, se hará una breve introducción histórica de la derivada, después se introducirá el concepto de Tasa de Variación Media de una función, hasta llegar al concepto de derivada y su significado geométrico, todo eso con ejemplos y ejercicios para el alumnado.

1.2 Introducción Histórica. (Sobre las razones de ser del objeto matemático)

El *concepto de derivada* surgió como resultado de algunos siglos de esfuerzo dirigidos a resolver dos problemas: determinar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y encontrar velocidades instantáneas en movimiento no uniformes. Estos problemas interesaron a los matemáticos desde tiempos antiguos, pero hasta el siglo XVI, la resolución de cada problema particular se hacía mediante un método específico no generalizable a otros problemas similares.

En el siglo XVII, los conocimientos acumulados hasta entonces permitieron a Newton y Leibnitz dar una respuesta teórica y completa a todos estos tipos de problemas, mediante la invención de la derivada.
Un siglo después, Euler contribuyó a mejorarla. No obstante, la base lógica y, por tanto, los conceptos formales desarrollados por estos matemáticos fueron insuficientes para que el cálculo de derivadas fuera un proceso claro y sistemático. Fue Cauchy, a comienzos del siglo XIX, quien, al relacionar de forma clara el concepto de derivada con el del límite, consiguió un respaldo formal básico gracias al cual el cálculo de derivadas se redujo a sencillas operaciones formales.

1.3 Conocimientos previos

Los conocimientos previos necesarios para empezar el estudio de la derivada primera son los siguientes:
a) Conocer la definición de coeficiente angular de una recta.
b) Conocer las propiedades de las funciones.
c) Conocer el concepto de límite
d) Saber calcular los límites de funciones en casos elementales
e) Conocer el concepto de tangente a una circunferencia.
Trataremos de asegurar que los alumnos posean estos conocimientos previos, con una evaluación escrita.

1.4 Sobre el campo de problema

El campo de problemas es el siguiente:

- Encontrar la tasa de variación instantánea de una función.
- Encontrar la ecuación de la tangente de una función en un punto.

Del campo de problemas y sus ejercicios asociados se hablará en el capítulo 2.

1.5 Sobre las técnicas

Las técnicas son las siguientes:

- Cálculo de la ecuación de la tangente de una función en un punto.
- Cálculo de la tasa de variación media.
- Cálculo de la derivada de una función en un punto utilizando la definición.
- Cálculo de la función derivada utilizando las reglas de derivación.
- Cálculo de la función derivada de una función.
- Cálculo de la derivada de una función en un punto utilizando las reglas de derivación.
- Cálculo de las abscisas de los puntos de derivada 0
- Cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

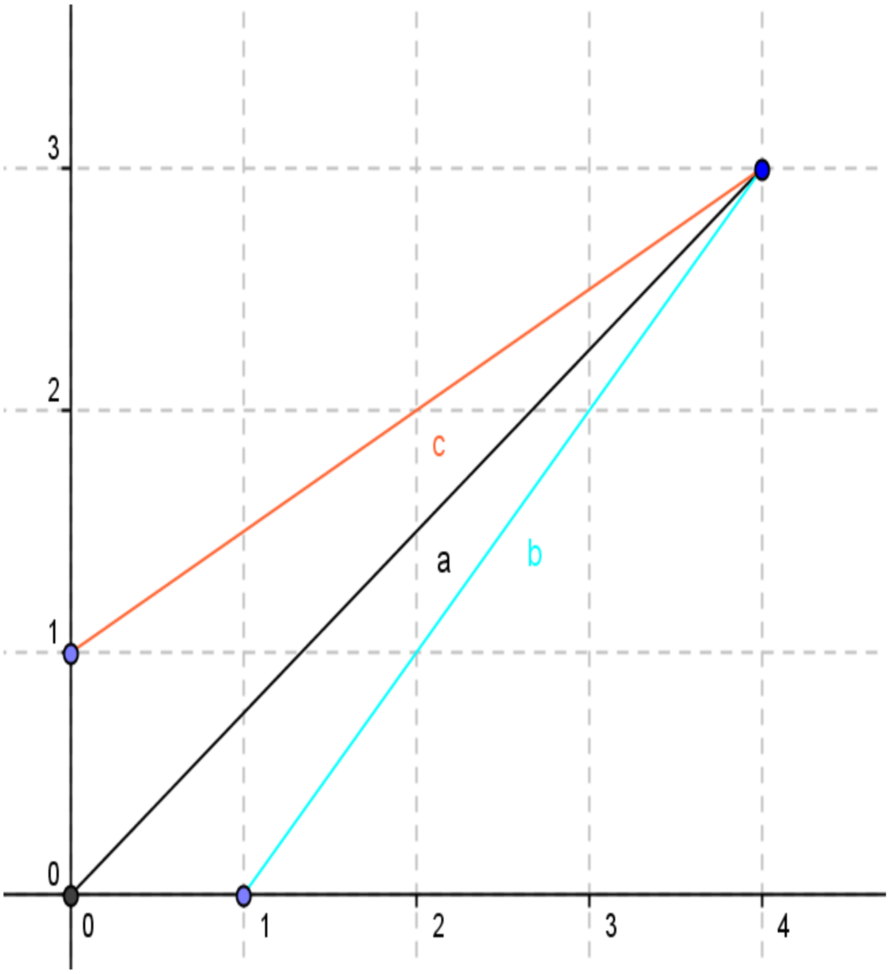
2 Contenidos

2.1 Introducción del concepto de derivada

Se presentarán en los siguientes subpárrafos las situaciones para introducir el concepto de derivada

2.1.1 Situación 1: Problema introductorio 1

Este problema introductorio sirve para introducir el concepto de derivada, para repasar y al mismo tiempo averiguar los conocimientos previos.



En este gráfico el eje horizontal representa el tiempo (en segundos), y el eje vertical representa el espacio recorrido (en metros). Los segmentos representan las trayectorias de tres personas.

a) ¿Qué persona sale mas tarde?
b) ¿Qué persona recorre menos metros?
c) Calcula la velocidad media de cada persona.
d) Escribe las ecuaciones de las rectas que aparecen en el gráfico y exprésalas en forma explícita ($y = ax+b$).
e) Relaciona la velocidad media con la ecuación de la recta.

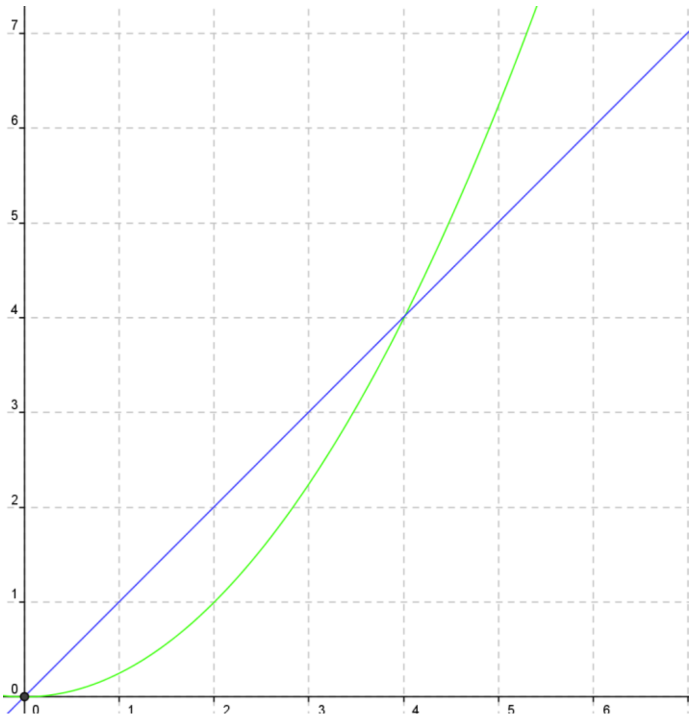
2.1.2 Situación 2: Explicación del profesor sobre el problema introductorio 1.

Si los alumnos tienen dificultades importantes en la situación 1 se les propondrá alguna otra situación parecida.

En física, sabemos que la velocidad media es igual al espacio recorrido partido por el tiempo empleado; es decir velocidad media = Espacio/Tiempo.

Entonces la velocidad media de **a** será 3m/4s = 0,75m/s; la velocidad media de **b** será 2m/4s = 0,5 m/s, mientras la velocidad media de **c** será 3m/3s= 1m/s.
Podemos deducir que las pendientes de las rectas representan las respectivas velocidades medias de las tres personas en cuestión.
Pero, sabemos que la pendiente de una recta es igual al coeficiente angular de la recta, es decir, a la *tangente del ángulo* que forma la recta con el eje OX^+. Entonces podemos concluir que el coeficiente angular de la recta representa su velocidad media en el grafico espacio-tiempo.
Además sabemos que la recta se puede expresar como $y= (tg\alpha)x + b$.

2.1.3 Situación 3:Problema introductorio 2



En este gráfico espacio-tiempo, la línea azul representa el recorrido en función del tiempo de Pedro, mientras la línea verde representa el recorrido en función del tiempo de Roberto.

a) ¿Salen o no simultáneamente? ¿Del mismo punto?
b) ¿Cuántos metros han recorrido los dos después de 2 segundos? ¿Y después de 4 segundos?
c) Calcula la velocidad media de los dos en el intervalo [0s, 2s]:
d) Calcula la velocidad media de los dos en el intervalo [0s, 4s]:
e) Calcula la velocidad media de los dos en el intervalo[2s, 4s]:
f) Qué pasa con la velocidad media en los distintos intervalos? Aumenta, disminuye, se mantiene constante?
g) ¿Cuál es la velocidad de Pedro en el instante t = 2?
h) ¿Cuál es la velocidad de Roberto en el instante t = 2?

2.1.4 Situación 4: Explicación del profesor sobre el problema introductorio 2.

a) Analizando el grafico podemos ver que los dos parten simultáneamente del mismo punto.
b) Después de 2 segundos, Pedro ha recorrido 2 metros, mientras Roberto ha recorrido 1 metro; después de 4 segundos, ambos han recorrido 4 metros; con un tiempo mayor que 4 segundos notamos que el espacio recorrido por Roberto es mayor que el espacio recorrido por Pedro.
c) Velocidad Media de Pedro: 2m/2s = 1m/s
Velocidad Media de Roberto: 1m/2s = 0,5m/s
d) Velocidad Media de Pedro: 4m/4s = 1m/s
Velocidad Media de Roberto 4m/4s = 1m/s
e) Velocidad Media de Pedro: 2m/2s = 1m/s
Velocidad Media de Roberto: 3m/2s = 1,5m/s.
f) Podemos notar que la velocidad media de Pedro es constante, mientras la velocidad media de Roberto cambia según el intervalo que consideremos. Eso se puede traducir en lo siguiente:
Pedro se mueve con velocidad constante, en cuanto el gráfico espacio-tiempo de su movimiento es una recta, mientras Roberto no se mueve con velocidad constante, es decir que la velocidad de Roberto cambia con el tiempo, y en este caso aumenta.
g) Como la velocidad de Pedro es constante, podemos afirmar que también en el instante t = 2 s, la velocidad de Pedro es igual a 1m/s. Por tanto, podemos asumir la existencia de una velocidad instantánea que, en este caso, coincide con la velocidad media.
h) La velocidad de Roberto cambia, según el intervalo, de momento no tenemos ninguna herramienta para calcular la velocidad instantánea de Roberto en ningún instante.

2.1.5 Situación 5: Problema introductorio 3

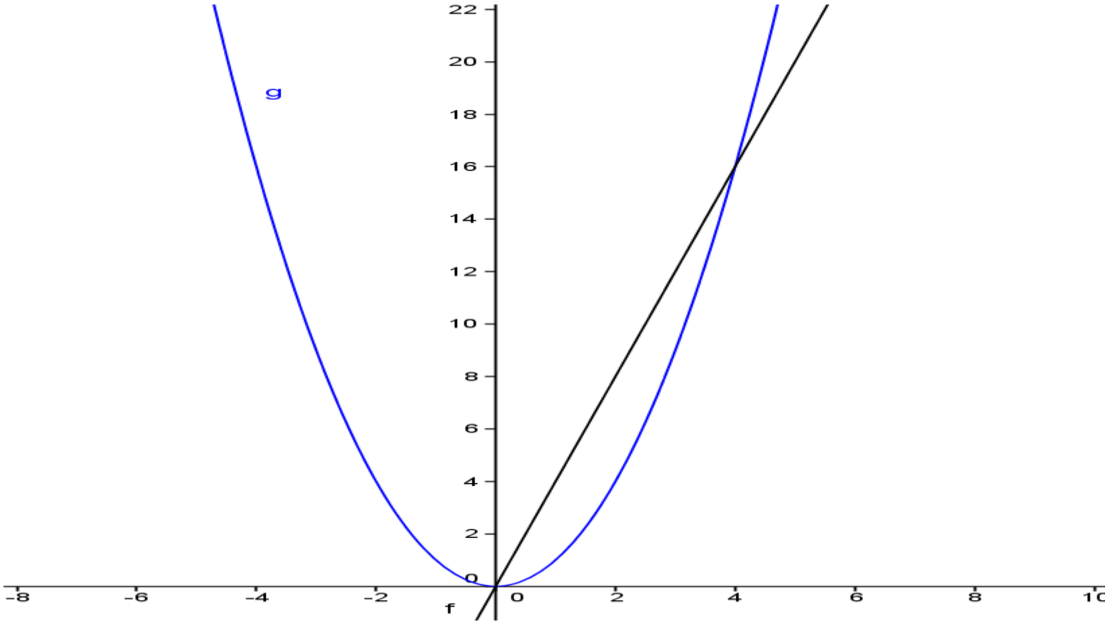
Sean $g(x) = x^2$ y $f(x) = 4x$, dos funciones espacio-tiempo correspondientes a dos móviles

a) Encuentra en qué instante los dos móviles han hecho el mismo recorrido.
b) Calcula la velocidad media de las dos funciones en el intervalo [0, 1].
c) Calcula la velocidad media de las dos funciones en el intervalo [0, 2].
d) Calcula la velocidad media de las dos funciones en el intervalo [0, 3].
e) Calcula la velocidad media de las dos funciones en el intervalo [1, 3].
f) Calcula la velocidad instantánea de los móviles en el instante x = 2.

2.1.6 Situación 6: Explicación del profesor sobre el problema introductorio 3.

Solución:

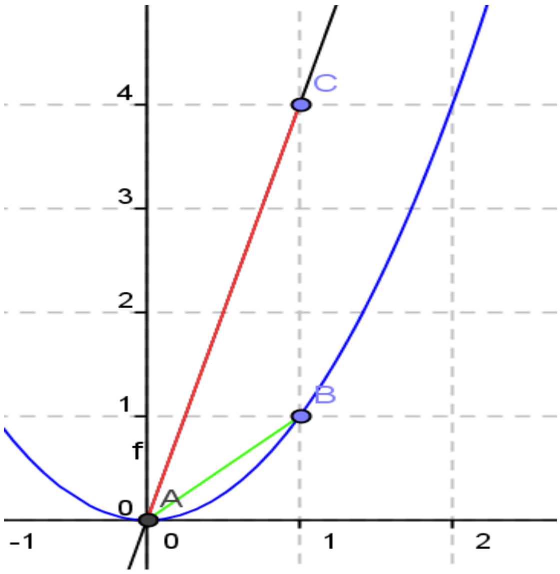
a) Para encontrar la solución hay que poner $g(x) = f(x)$.
Es decir $x^2 = 4x \leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \leftrightarrow x(x-4) = 0$. La ecuación tiene dos soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$
Vamos a representar las dos funciones gráficamente, utilizando geogebra.



Figura

b) La velocidad media de las funciones f(x) y g(x) en el intervalo [0, 1] se calcula de la siguiente manera:

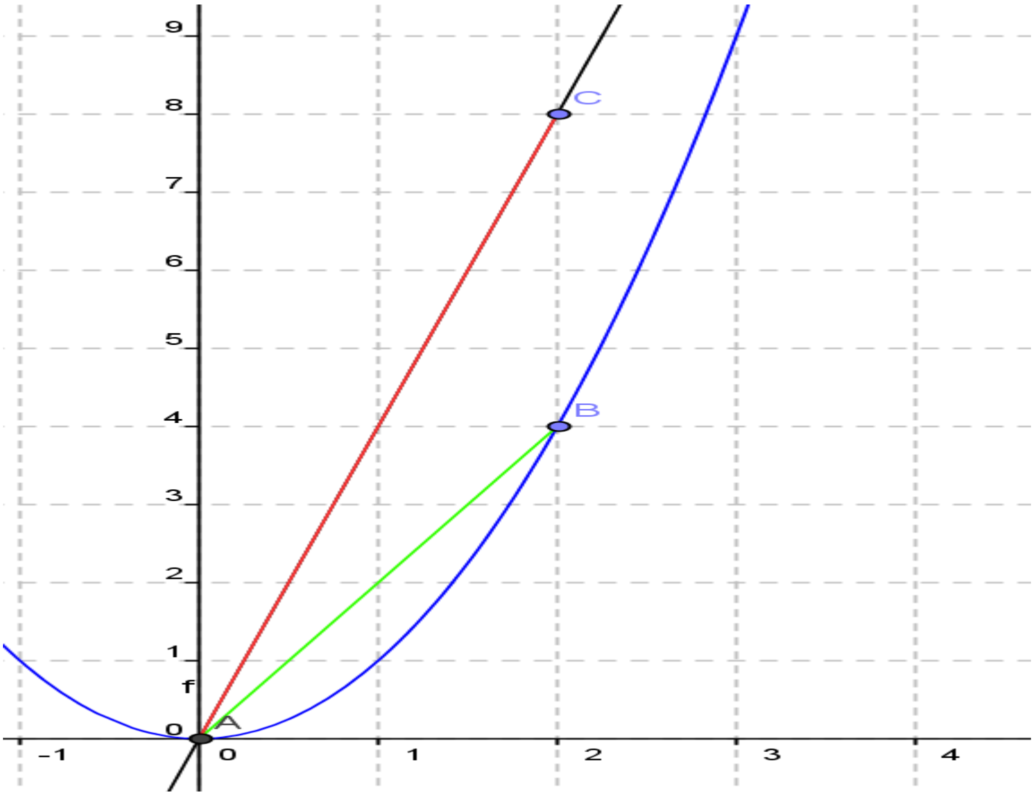
(f(1)-f(0))/(1-0) = 4/1 = 4; (g(1)-g(0))/(1-0) = 1/1 = 1



Gráficamente podemos ver que el coeficiente angular de la recta que pasa por A y B es 1, mientras el coeficiente angular de la recta que pasa por A y C es 4.

c) La velocidad media de las funciones f(x) y g(x) en el intervalo [0, 2] se calcula de la siguiente manera:

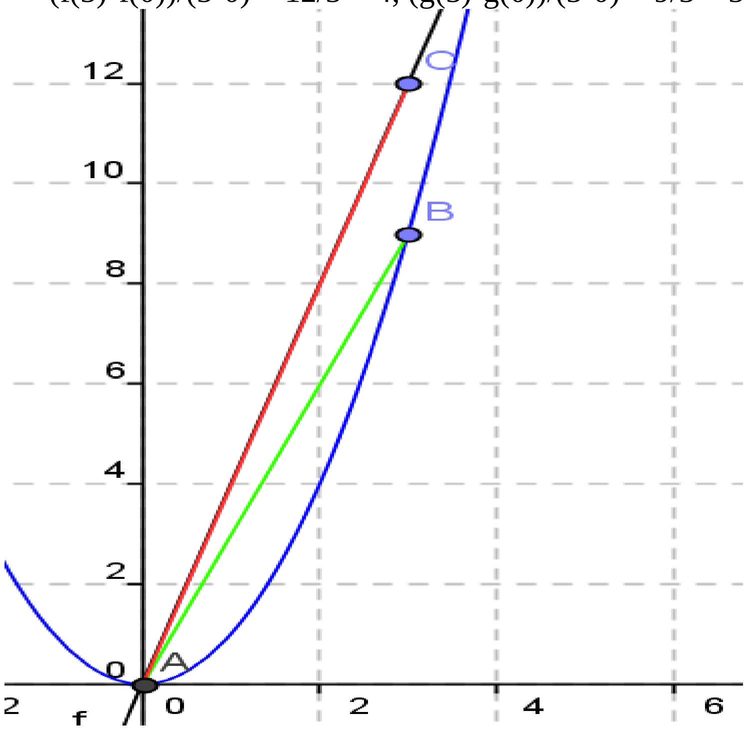
f(2)-f(0))/(2-0) = 8/2 = 4; (g(2)-g(0))/(2-0) = 4/2 = 2



Gráficamente podemos ver que el coeficiente angular de la recta que pasa por A y B es 2, mientras el coeficiente angular de la recta que pasa por A y C es 4.

d) La velocidad media de las funciones f(x) y g(x) en el intervalo [0, 3] se calcula en la siguiente manera:

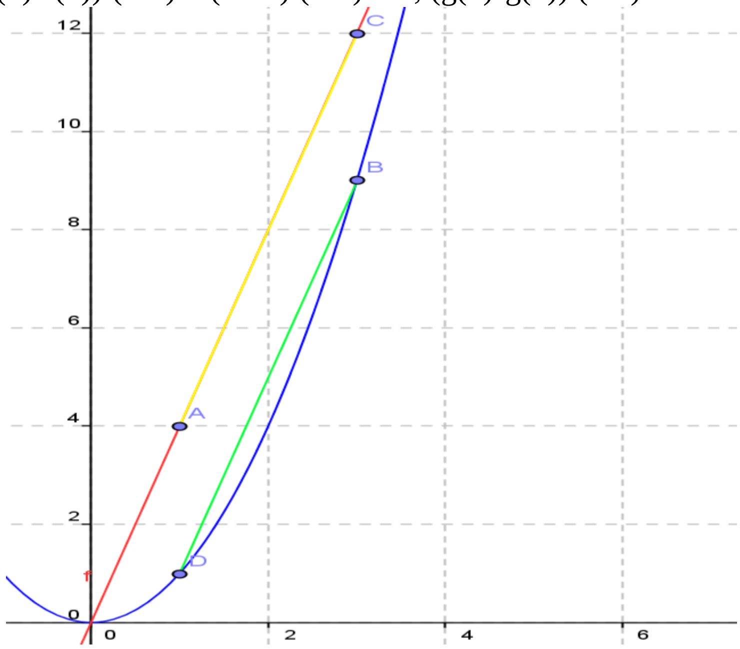
$$(f(3)-f(0))/(3-0) = 12/3 = 4; \quad (g(3)-g(0))/(3-0) = 9/3 = 3$$



Gráficamente podemos ver que el coeficiente angular de la recta que pasa por A y B es 2, mientras el coeficiente angular de la recta que pasa por A y C es 3.

e) La velocidad media de las funciones f(x) y g(x) en el intervalo [1, 3] se calcula en la siguiente manera :

$$(f(3)-f(1))/(3-1) = (12-4)/(3-1) = 4; \ (g(3)-g(1))/(3-1) = 8/2 = 4$$



Gráficamente podemos ver que el coeficiente angular de la recta que pasa por A y C es 2, también el coeficiente angular de la recta que pasa por D y B es 2.

f) La velocidad instantánea del segundo móvil es constante y coincide con la velocidad media, mientras no tenemos medios para encontrar la velocidad instantánea del primer móvil.
Con este problema podemos concluir que en el gráfico espacio-tiempo la velocidad media de una función representada por una recta es constante y depende solo del coeficiente angular de la recta, mientras que cuando la función espacio-tiempo está representada por una curva no rectilínea la velocidad media es variable y coincide con el coeficiente angular de la secante que corta a la función en los dos extremos del intervalo considerado. En el caso de una recta, la velocidad media de cada intervalo coincide con la velocidad instantánea, es decir, con la velocidad, que el móvil tiene en cada punto. En el caso de una curva no rectilínea, no tenemos medios para encontrar esa velocidad instantánea.

2.1.7 Situación 7: ¿Cómo se puede calcular la velocidad instantánea de un objeto que se mueve de manera no uniforme?

Hemos visto que para la recta, en el grafico espacio-tiempo la velocidad instantánea coincide con la velocidad media; en el caso de una curva no rectilínea la situación es distinta.
Para contextualizar el problema vamos a ver cómo funcionan los velocímetros: el velocímetro mide la velocidad media en intervalos de tiempo lo más pequeños posibles. ¿Cómo? Midiendo el espacio recorrido en intervalos de tiempos muy pequeños y la velocidad en función del tiempo es calculada según la fórmula v= s/t.
En definitiva, la velocidad instantánea, matemáticamente, puede ser vista como el límite del cociente espacio/tiempo cuando el tiempo tiende a cero, es decir:

$$\lim_{h\to 0} (s(t_0+h)-s(t_0))/h,$$

con h igual a un intervalo de tiempo mayor que cero y arbitrario.

2.1.8 Situación 8: incrementos negativos. Problema introductorio 4.

Problema

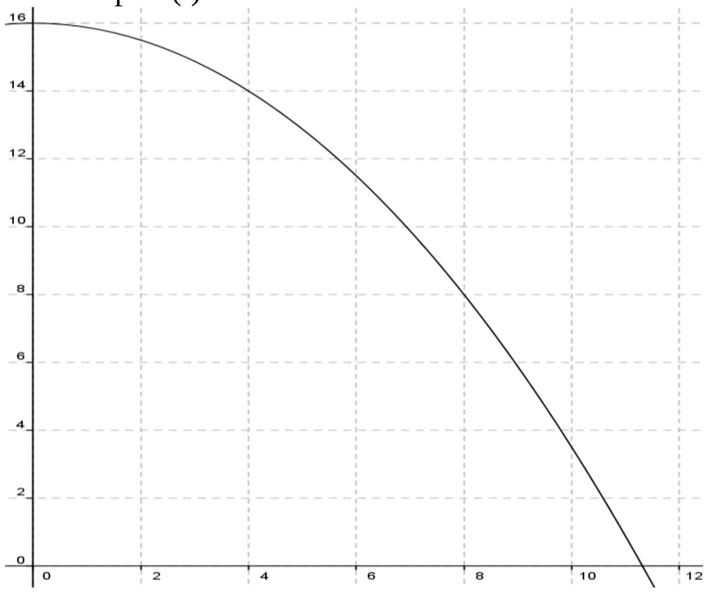
Consideramos la siguiente función velocidad-tiempo, de un coche: $v(t) = -t^2/ 8 + 16$.

a) ¿Cómo varía la velocidad del coche?
b) ¿En qué instante la velocidad es igual a 0?
c) Calcula la aceleración media del coche en el intervalo de tiempo [0, 4].
d) Calcula la aceleración media del coche en el intervalo de tiempo [0, 8].
e) Calcula la aceleración media del coche en el intervalo de tiempo [4, 8].
f) ¿Qué pasa con la aceleración media del coche? ¿Aumenta? ¿Disminuye? ¿Se mantiene constante?

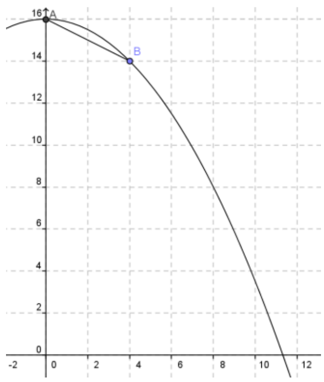
2.1.9 Situación 9: Explicación del profesor sobre el problema introductorio 4.

En los gráficos anteriores, por mayor comodidad hemos considerado solo incrementos positivos de espacios recorridos.

Podemos considerar el grafico velocidad-tiempo de la función v(t), y estudiar como varía la velocidad del coche. Siempre utilizando geogebra, representamos gráficamente, la función velocidad-tiempo $v(t) = -t^2/ 8 + 16$

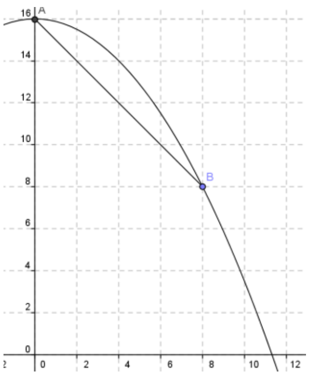


a) Gráficamente, podemos ver que la velocidad disminuye.
b) La velocidad es igual a 0 ↔ $v(t) = -t^2/ 8 + 16 = 0$, entonces $-t^2/ 8 + 16 = 0 \leftrightarrow -t^2/8 = -16 \leftrightarrow -t^2 = -128 \leftrightarrow t^2 = 128 \leftrightarrow t = \pm 8\sqrt{2}$, pero como vamos a considerar solo valores positivos del tiempo, la velocidad será nula en el instante $t = 8\sqrt{2}$.
c) En el intervalo de tiempo [0, 4], la aceleración media se calcula de la siguiente manera:
   $(v(4) – v(0))/ (4–0) = (14 -16)/4 = -1/2$.
   Gráficamente resultará

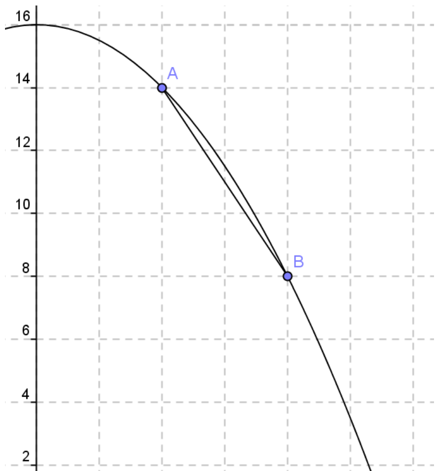


Calculamos la recta que pasa por A(0, 16) y B(4, 14), aplicando la formula
$(y-y_1)/(y_2-y_1) = (x-x_1)/ (x_2-x_1)$.
$(y – 16)/(14 -16) = (x – 0)/(4-0) \rightarrow (y-16)/(-2) = x/4 \rightarrow y - 16 = - x/2 \rightarrow y = -1/2x + 16$.
Podemos notar que la aceleración media del intervalo considerado es igual al coeficiente angular de la recta que pasa por los extremos del intervalo en cuestión.

d) En el intervalo de tiempo [0, 8], la aceleración media se calcula en la siguiente manera:
$(v(8) – v(0))/(8–0) = (8 -16)/8 = -8/8 = -1$.
Gráficamente será



e) Calculamos la recta que pasa por A(0, 16) y B(8, 8), aplicando la formula
$(y-y_1)/(y_2-y_1) = (x-x_1)/ (x_2-x_1)$.
$(y – 16)/(8 -16) = (x – 0)/(8-0) \rightarrow (y-16)/(-8) = x/8 \rightarrow y - 16 = -x \rightarrow y = -x + 16$.
También en este caso podemos notar, que la aceleración media del intervalo considerado, es igual al coeficiente angular de la recta que pasa por los extremos del intervalo en cuestión.
En el intervalo de tiempo [4, 8], la aceleración media se calcula en la siguiente manera:
$(f(8) – f(4))/(8–4) = (8 -14)/4 = -6/4 = -3/2$.
Gráficamente

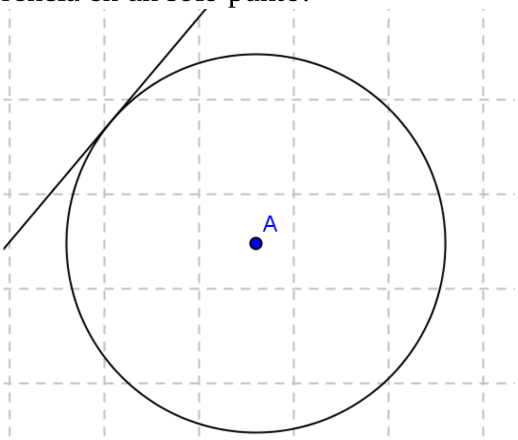


Calculamos la recta que pasa por A(4, 14) y B(8, 8), aplicando la formula
$(y-y_1)/(y_2-y_1) = (x-x_1)/ (x_2-x_1)$.
$(y – 14)/(8 -14) = (x – 4)/(8-4) \rightarrow (y-14)/(-6) = (x-4)/4 \rightarrow y - 14 = -3/2x +6 \rightarrow y = -3/2x + 20$.
También en este caso podemos notar, que la aceleración media del intervalo considerado, es igual al coeficiente angular de la recta que pasa por los extremos del intervalo en cuestión.

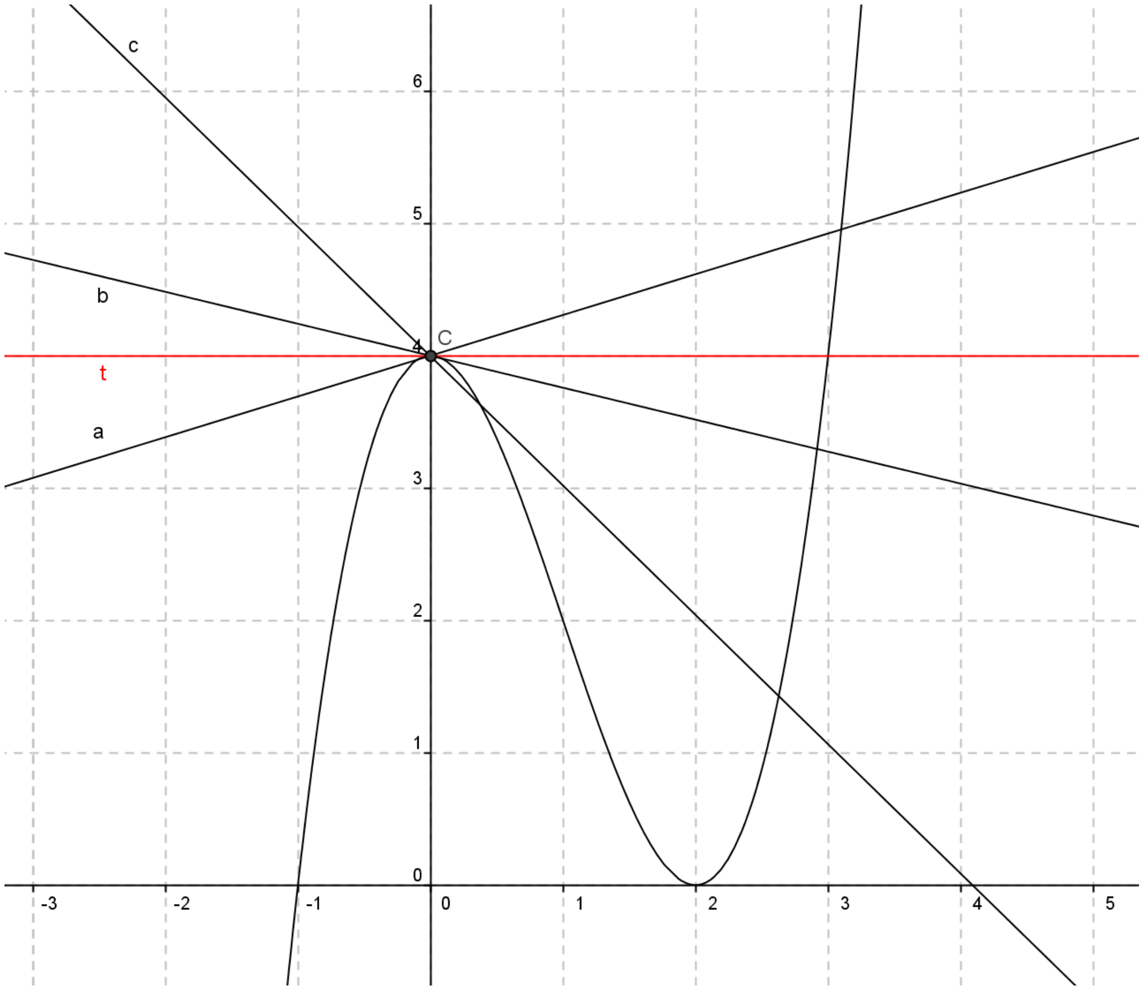
f) La aceleración media del coche disminuye.

2..1.10 Situacion 10 ¿Que es la tangente?

En los cursos anteriores se ha definido la tangente de una circunferencia como la recta que interseca la circunferencia en un solo punto:



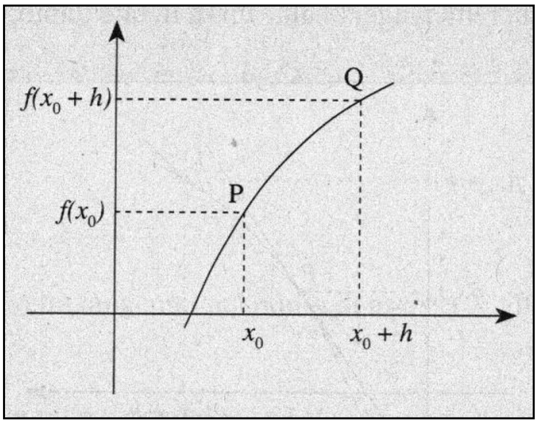
La distancia mínima entre esta recta y el centro de la circunferencia es igual al radio de la circunferencia.
A veces se añade que la tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.
Para estudiar la derivada nos ocurre dar otra definición de tangente:
Definición de tangente: la tangente de una curva en un punto x_0, es la recta que mas se aproxima a la curva en un entorno pequeño de x_0, (x_0-h, x_0+h), con $h>0$ y arbitrario.
En curvas cualesquiera, esta definición nos sirve porque una tangente en un punto puede cortar la curva en otro punto.
Gráficamente:



En este grafico podemos ver que la tangente t es la que más se aproxima a la curva f(x) = x^3-$3x^2$+4 en un entorno de $x_0 = 0$, respecto a las otras rectas a, b, c.
Como se puede ver en el grafico la tangente t puede intersecar la curva en otros punto, pero nos concentramos solo en un entorno pequeño del punto en cuestión.

2.2 Concepto de derivada de función

Sea y=f(x), una función definida en un intervalo [a,b] e indicamos con x_0 un punto interior a este intervalo. Si de x_0 se pasa a otro punto cualquier x_0+h, del intervalo [a,b], se dice que se ha dado a la variable x el incremento positivo, h.
La diferencia f(x_0+h)-f(x_0), entre los valores que la función asume cuando la variable x pasa del valor x_0 al valor x_0+h, se llama incremento de la función y puede tener valor positivo, negativo o nulo.



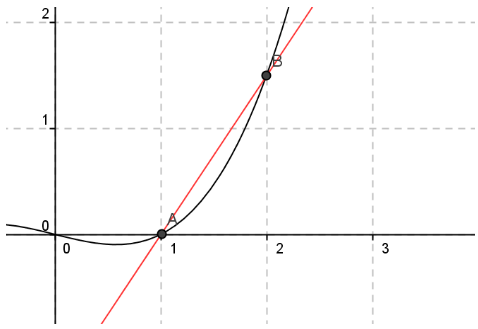
El cociente:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

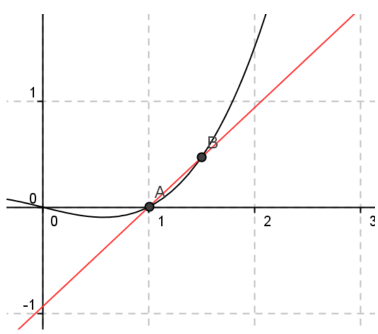
se llama *Tasa de Variación Media* de la función f(x), relativa al punto x_0 y al incremento h. Esta relación una vez fijado x_0, varia al variar h, es decir ella es una función de la variable h definida por cada valor de h diferente de 0, con lo cual, se entiende que el punto x_0+h no sale del intervalo [a,b], en el cual está definida f(x).
La Tasa de Variación Media de la función f(x), correspondiente a un determinado incremento de la variable independiente, nos indica "cómo" varía la función en el entorno del punto x_0.
La Tasa de Variación Media de función, en el grafico espacio-tiempo puede ser vista como la velocidad media, relativa a un intervalo de tiempo dado.
Ahora propongámonos ver qué le sucede a la TVM cuando tomamos valores de h cada vez más pequeños, tendentes a 0. Introducimos por lo tanto una nueva definición:
Se llama derivada de la función f(x), en el punto x_0 al límite, si existe y es igual a un numero finito, de la TVM correspondiente a un intervalo (x_0, x_0+h), cuando h tiende a 0.
La derivada generalmente se indica con las siguientes notaciones: f'(x_0),; y'(x_0),; [Df(x)] x= x_0
y queda definida por la relación:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

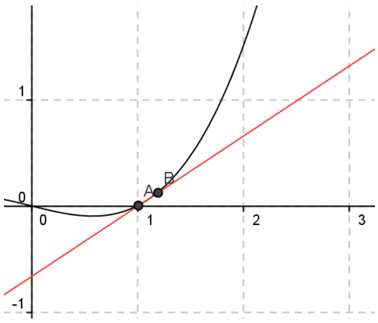
Este resultado puede interpretarse como la tasa de variación instantánea en el instante x_0.
En el caso particular de una función espacio-tiempo, representaría la velocidad instantánea en el instante x_0 y en el caso de una función velocidad-tiempo, la aceleración instantánea en el instante x_0.
Utilizando geogebra vamos a ver que pasa cuando queremos dibujar la recta que pasa por los puntos (x_0, f(x_0)) y (x_0+h, f(x_0+h)), tomando valores de h cada vez más pequeños, es decir aplicando la definición de derivada.
Esto concepto se desarrollará con una demostración de geometría dinámica:
Por ejemplo dada la función f(x) = (x^3-x)/4, queremos calcular la recta que pasa por A (1,0) ∈ f(x), y B = (1+h, f(1+h)) f(x), con h cada vez más pequeño.
Si h =1



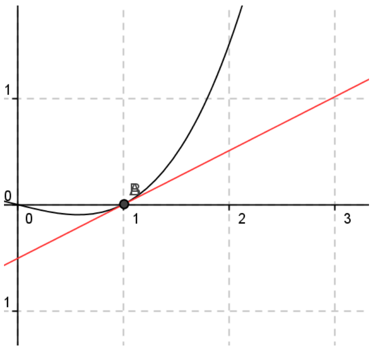
Si h = 0,5



Si h = 0,2



Si h = 0,01



Podemos notar que con valores de h cada vez más cerca del 0 la recta que pasa por A y B, se aproxima a la tangente de la función en el punto A.
Como, hemos dicho antes, la TVM geométricamente está representada por el coeficiente angular de la recta que pasa por los 2 puntos de la función; cuando h tiende a 0, la tasa de variación instantánea (derivada primera) está representada por el coeficiente angular de la tangente a la curva.

2.2.1 Problema contextualizado sobre el cálculo de la derivada de una función en un punto.

Calcula en el instante t = 3, la velocidad instantánea de la función espacio-tiempo f(x) = x^2 - x.
Explicación del profesor
Antes se procede al cálculo de la velocidad media

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=$$

$$=\frac{9+6h+h^2-3-h-6}{h}=\frac{h^2+5h}{h}=\frac{h(h+5)}{h}=h+5.$$

Después se calcula el límite de la tasa de variación media cuando $h\to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+5) = 5.$$

Se concluye afirmando que la velocidad instanténea en t = 3 es igual a 5.
Matemáticamente podemos decir que la derivada primera en el punto x_0= 3, es igual a 5.

2.2.2 Problema introductorio a la función derivada.

Problema

a) Halla la derivada de f(x) = x^2 en los puntos de abscisas, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y 4.
b) Representa los resultados obtenidos en la siguiente tabla

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f'(x)							

c) ¿Qué relación hay entre x y f'(x)? ¿Se podría representar f'(x) en función de x?
d) ¿f' podría ser una nueva función?

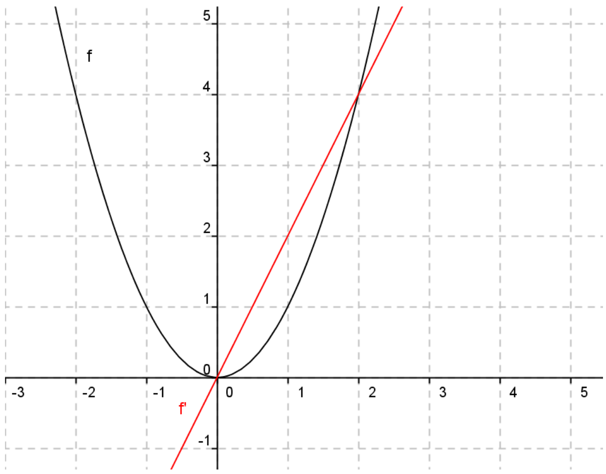
2.2.3 Explicación del profesor sobre problema introductorio a la función derivada.

a) f'(-2) = $\lim_{h\to 0} \frac{(f(-2+\square)-f(-2))\square}{}$ =
$\lim_{h\to 0}$(4-4h+h^2+4)/h = $\lim_{h\to 0}$ (-4h+h^2)/h = -4
f'(-1) = $\lim_{h\to 0} \frac{(f(-1+\square)-f(-1))}{\square}$ =
$\lim_{h\to 0}$ (1-2h+h^2-1)/h = -2
f'(0) = $\lim_{h\to 0} \frac{(f(0+\square)-f(0))}{\square}$ = 0
f'(1) = $\lim_{h\to 0} \frac{(f(1+\square)-f(1))}{\square}$ = 2
f'(2) = $\lim_{h\to 0} \frac{(f(2+\square)-f(2))}{\square}$ = 4
f'(3) = $\lim_{h\to 0} \frac{(f(3+\square)-f(3))}{\square}$ = 6
f'(4) = $\lim_{h\to 0} \frac{(f(4+\square)-f(4))}{\square}$ = 8

b)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f'(x)	-4	-2	0	2	4	6	8

c) Podemos notar que f'(x) = 2x
d) Para probar que f'(x) es una nueva función, vamos a obtener la derivada de f(x) = x^2 en un punto cualquiera, x:
$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+\square)-f(x))}{\square}$ = $\lim_{h\to 0}$ (x^2 +2hx + h^2 –x^2)/h = 2x.
Por lo tanto hemos, hemos obtenido que f'(x) = 2x, como habíamos previsto.
Representamos gráficamente la función f(x) = x^2 y su función derivada f'(x) = 2x.



Definición

Se llama *__función derivada__* de f a una función f' que asocia a cada abscisa x, la derivada de f en ese punto, f'(x) es decir la pendiente de la tangente a la curva y = f(x) en ese punto. A la derivada de f la llamaremos f' o bien Df.

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2.2.4 Funciones Derivadas de algunas funciones elementales

Ejercicio. Calcula:

a) La función derivada de una función constante, f(x)=k.
b) La función derivada de la función f(x) = x.
c) La función derivada de la función $f(x) = x^2+1$.

d) La función derivada del producto de una constante k por una función $y=f(x)$.

Explicación del profesor sobre el ejercicio anterior

a) La derivada de una función constante, f(x)=K, vale cero, es decir:

D(x)=0

De hecho:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

b) La derivada de la función f(x) = x vale 1, es decir: *D(x)=1*

De hecho:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

c) La derivada de la función f(x) =x^2 vale $2x$, es decir: $D(x^2)=2x$

De hecho:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x.$$

d) La derivada del producto de una constante k por una función $y=f(x)$ es igual a la constante por la derivada de la función, es decir: $D[Kf(x)]=KD[f(x)]=kf'(x)$

De hecho:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot f(x+h) - k\cdot f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} = k\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k\cdot \Delta f(x).$$

2.2.5 Derivadas de una suma, de un producto y de un cociente

La derivada de la suma de dos (o más) funciones derivables existe y es igual a la suma de las derivadas de las funciones.

Si es: y = f + g

con f y g funcionas derivables en x, será:

$$y' = f' + g'$$

La derivada del producto de dos funciones derivables existe y es igual al producto de la derivada del primer factor por el segundo, más el producto del primer factor por la derivada del segundo.

Si es: $y = f\cdot g$

con f y g funcionas derivables en x, será:

$$y' = f'\cdot g + f\cdot g'.$$

La derivada del cociente de dos funciones derivables, existe y es igual a un cociente cuyo denominador es el cuadrado del denominador inicial y cuyo numerador es la diferencia entre el producto del denominador por la derivada del numerador y el producto del numerador por la derivada del denominador.

Si es: $y = \frac{f}{g}$

con f y g funcionas derivables en x, será:

$$y = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

2.2.6 Derivada de una función compuesta: regla de la cadena

Dada la función y = $(3x + 5)^2$, ¿cuál sería su función derivada? Calcúlala utilizando la definición de derivada.

Solución.
$\lim_{h\to 0}$ $((3(x+h)+5)^2- (3x+5)^2)/h = \lim_{h\to 0}$ $(9(x+h)^2+25 +30(x+h) – 9x^2-25 -30x)/h=$
$= \lim_{h\to 0}(18xh+9h^2 +30h)/h = 18x +30$.
Podemos notar che la función derivada 18x+30 = 6(3x+5), además sabemos que la derivada de x^2 es igual a 2x. ¿Entonces porque hemos multiplicado por 6 en lugar de multiplicar por 2?
Además, sabemos que D(3x+5) = 3, por eso hemos multiplicado por 6.
Podemos resumir el resultado obtenido con la regla de la cadena:

Dg[f(x)] = g'[f(x)]· f'(x)

2.2.7 Tabla de las fórmulas y reglas de derivación

Para facilitar el cálculo de la derivada de una función, se presenta una tabla de fácil consulta. Se coloca a mano izquierda la función y=f(x), y, a la derecha, la derivada y'=f'(x), en un punto genérico x, dónde la función es derivable:

y=f(x)	***y'=f'(x)***
$y = k$	$y' = 0$
Función potencia:	
$y = f(x)^{\alpha}$	$y' = \alpha f(x)^{\alpha-1} f'(x)$
En particular:	
$y = x$	$y' = 1$
$y = \lvert f(x) \rvert$	$y' = \dfrac{f(x)}{\lvert f(x)\rvert} f'(x)$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{f(x^{n-1})}} f'(x)$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} . f'(x)$
Funciones goniometricas:	
$y = senf(x)$	$y' = \cos f(x) f'(x)$
$y = \cos f(x)$	$y' = -senf(x) f'(x)$

$y = tg(f(x))$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)$

$y = ctgf(x)$ $\qquad$ $y' = -\frac{1}{sen^2 f(x)} f'(x)$

Función logarítmica:

$y = \log_a f(x)$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{f(x)} \log_a e f'(x)$

En particular:

$y = \ln|f(x)|$ $\qquad$ $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Función exponencial:

$y = a^x$ $\qquad$ $y' = a^x \ln a$

$y = a^{f(x)}$ $\qquad$ $y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$

$y = e^{f(x)}$ $\qquad$ y’ = $e^{f(x)}$ f’(x)

En particular:

$y = e^x$ $\qquad$ $y' = e^x$

Inversas de las funciones goniometricas:

$y = arcsenf(x)$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} f'(x)$

$y = \arccos f(x)$ $\qquad$ $-\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} f'(x)$

$y = \text{arctg } x$ $\qquad$ $\frac{1}{1+(f(x))^2} f'(x)$

$y = \text{arcctg } x$ $\qquad$ $-\frac{1}{1+(f(x))^2}$ f’(x)

.

2.2.8 Utilidad de la función derivada: otras técnicas asociadas.

Cuando una función nos viene dada por su expresión analítica, y = f(x), su derivada, f’(x), nos da la inclinación de la curva en cada punto (medida en función de la pendiente de la tangente en ese punto) y nos dice cuando la función crece o cecrece. Veamos, en concreto, algunas de las aplicaciones de las derivadas.

1) Calculo de la derivada de una función en varios puntos.

Para hallar f’(a), f’(b), f’(c),..., se procede así:

a) Se obtiene la expresión general de f’(x).

b) Se sustituye en f’(x) la x por a, b, c.

2) Obtención de las abscisas en las cuales la derivada tiene un cierto valor.
Para averiguar los valores de x tales que f'(x) = k, se procede asì:
a) Se obtiene la expresión general de f'(x).
b) Se resuelve la ecuación f'(x) = k.
3) Obtención de las abscisas de los puntos singulares.
Se llaman puntos singulares a los puntos de tangente horizontal, es decir, a los puntos en los que la derivada es cero. Entre ellos están los máximos y mínimos relativos, pero puede haber otros.
Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de f'(x) = 0.
4) Obtención de tramos en donde la curva crece o decrece.
Si f'(x) > 0, la función es creciente, y si f'(x), la curva es decreciente. Por tanto, resolviendo tales inecuaciones se obtienen los intervalos donde la curva crece o decrece.
Ejercicio
Dada la función $f(x) = x^3-6x^2+9x-2$:
a) Hallar la derivada de la función en los puntos -1, 0, 2, y 4.
b) Hallar la recta tangente en punto de abscisa x = 2.
c) Averiguar las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.
d) ¿En x = 4 es creciente o decreciente?

Resolución
a) La función derivada es $f'(x) = 3x^2- 12x + 9$.
$f'(1) = 3(-1)^2 -12(-1) + 9 = 24$, $f'(0) = 9$, $f'(2) = -3$, $f'(4) = 9$
b) Conocemos f'(2) = -3. Hallamos $f(2) = 2^3- 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 + 2 = 4$.
De la formula $y - f(x_0) = m(x - x_0)$, la ecuación es y = -3x + 10.
Utilizando geogebra podemos representarla en el siguiente grafico

c) Hallamos los puntos de tangente horizontal, puntos singulares, resolviendo f'(x) = 0.
$3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$.
En los puntos de abscisa 1 y 3 puede haber máximo o mínimo relativo.
d) Puesto que $f'(4) = 9 > 0$, la curva es creciente en x = 4.

3 Metodología

Se tratará este argumento con mucho ejemplos, intentando involucrar a la clase; algunas técnicas (reglas de derivación) se han justificado anteriormente con unas demostraciones sencillas como en el caso de la suma o del producto de una función por un número. El profesor asumirá la responsabilidad de justificar las técnicas y sobre todo de utilizar el software geogebra, del cual hablaremos en el siguiente párrafo.
Se supone que en un 1° curso de bachillerato científico el alumnado estará motivado para el estudio. De todos modos, se propondrán unas primeras clases de motivación, considerando los gráficos-espacio tiempo para relacionar el objeto matemático con el mundo real; igual se podrían coordinar las primeras actividades con el profesor de

física,(de hecho en Milán, Italia, yo he dado clase de matemáticas y física, en cuanto trabajaba por la clase A049 de Matemática e Física, pero en España las 2 materias están dadas por dos profesores distintos).
En las otras actividades, además de relacionar el concepto de derivada con el concepto de velocidad instantánea, se procede con un rigor puramente matemático, en cuanto, entiendo que el objetivo del bachillerato es preparar los alumnos para afrontar la universidad.
Después de cada problema introductorio, se institucionalizará el objeto matemático y se harán ejemplos, y se darán ejercidos para resolver en el aula y en casa.

4 Geogebra

GeoGebra es un software para las matemáticas que provee instrumentos para el estudio de geometría, álgebra y análisis, dirigido a la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y secundaria.
De una parte GeoGebra es un sistema de geometría dinámica. Se pueden construir puntos, vectores, segmentos, rectas, cónicas y funciones, modificándolas en tiempo real.
Por otra parte, también pueden insertarse directamente ecuaciones y coordenadas. Así, GeoGebra tiene la posibilidad de tratar variables numéricas, vectores y puntos, calcular derivadas e integrales de funciones y cuenta con varios operadores.
GeoGebra es un programa particularmente interesante por varios motivos que voy en seguida a enumerar:

• Geogebra es un software free, que por lo tanto puede ser libremente aconsejado a los estudiantes, sin que exija un desembolso económico. Además las actualizaciones pueden ser buscadas y descargadas de manera automática del software mismo, y esto evita el tener que estar pendiente de conseguir la última versión. El hecho de que sea un producto gratuito no es sólo importante por motivos económicos, sino también porque difunde una correcta cultura relativa a los recursos para el ordenador, reduciendo el fenómeno de la piratería informática.

• Geogebra tiene una interfaz gráfica que contempla todas aquellas operaciones que ya se han convertido en un estándar en este campo, y al mismo tiempo nos permite realizaciones muy sofisticadas, previendo una serie de instrucciones tratables con la ventana de input.

• La interacción entre las construcciones geométricas, (con "regla y compás"), las operaciones algebraicas, algunas operaciones elementales del análisis, gráficos de funciones, derivadas, integrales, etcétera, además de dar la posibilidad de usar algunos algoritmos, como los que buscan intersecciones entre gráficos, permite producir pequeñas pero reales "aplicaciones matemáticas”.

Por ese motivo creo que este software es muy útil para la enseñanza de las matemáticas.
En el caso específico de la derivada primera, geogebra nos permite dibujar las funciones con una precisión que no se puede conseguir en la pizarra.

5 Evaluación

Prueba de evaluación:

1. Dada la función espacio-tiempo $f(x) = 3x^2+2$. Calcula la velocidad media en los intervalos de tiempo: [0,1]; [3,4]. (vale un punto)
2. Dada la función $f(x) = x^2-1$, halla la tasa de variación media en el intervalo [2, 2+h]. (vale un punto)
3. Aplicando la definición de derivada, calcula f'(2) y f'(3), siendo $f(x) = (2x-3)/5$. (vale 2 puntos)
4. Halla la función derivada de las siguientes funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:
   $f(x) = (5x-2)^3$; $x = 2$ (vale un punto)
   $f(x) = \ln(3x^2-x)$; $x = 3$ (vale un punto)
5. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^3-2$ en $x = 0$, (vale un punto) y en $x = 2$ (vale un punto)
6. Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la siguiente función
   $f(x) = x^3- x$ (vale un punto).
7. Obtén los puntos singulares de la siguiente función $f(x) = 3x^3- 2x +5$. (vale un punto).

En el primero apartado de la prueba se pretende evaluar si los alumnos saben calcular la velocidad media, dada una función espacio-tiempo.
En el segundo apartado se pretende evaluar si el alumnado sabe calcular la TVM en intervalos que tienen un extremo dependiente de una variable independiente.
En el tercero apartado se pretende evaluar si saben aplicar la definición de derivada para calcular la función derivada.
En el cuarto apartado se evalúa si el alumnado sabe aplicar las reglas de derivaciones.
En el quinto apartado se evalúa si el alumnado sabe relacionar el concepto de derivada en un determinado punto con el concepto de coeficiente angular de la recta tangente a la curva en dicho punto y calcular la tangente.
En el sexto apartado de la prueba se pretende evaluar si saben relacionar el signo de la derivada primera con el crecimiento de la función.
En el séptimo apartado se pretende evaluar si el alumnado ha adquirió la técnica para encontrar los puntos singulares de una función.
En línea general, se espera que la prueba de evaluación de resultados positivos.

6 Referencias Bibliográficas

J. Colera, M.J. Oliveira, R. García, E. Sanatnella; Bachillerato 1, Anaya, 2008
G. Zwirner, L. Scaglianti – Procedimenti Matematici Vol. 2, Cedam 1998.

Prodi G., Bastianoni A., Scoprire la Matematica, Ghisetti Corvi, 2003.