

MASTER UNIVERSITARIO EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN  
SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL  
Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS ARTÍSTICAS Y DEPORTIVAS

## ÁLGEBRA 2º E.S.O.

### Ecuación de primer grado

---

TRABAJO FIN DE MASTER

Especialidad “Matemáticas”

ESTRELLA OLIVÁN AVILÉS

CURSO 2011/2012



Universidad  
de Zaragoza



## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	3
DISEÑO DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	4
A - Sobre la definición del objeto matemático a enseñar	4
B - Sobre los conocimientos previos del alumno	6
C - Sobre las razones de ser del objeto matemático	8
D - Sobre el campo de problemas	10
E - Sobre las técnicas	18
F - Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)	24
G - Sobre la secuencia didáctica y su cronograma	29
EVALUACION DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	39
H - Sobre la evaluación	39
Bibliografía	42
Anexo I - Dominó campos T1, T2 y T3	43
Anexo II - Dominó campo T4	44

## INTRODUCCIÓN

Presento en este trabajo fin de máster mi propuesta didáctica para el curso de 2º de Educación Secundaria Obligatoria, en la materia de matemáticas y dentro del bloque de introducción al álgebra.

Para los alumnos de esta edad, el álgebra sigue siendo una parte de las matemáticas cuyo significado no es intuitivo. La aritmética que hasta entonces han practicado y asimilado durante toda la etapa de primaria, la tienen muy afianzada en el pensamiento y cuesta en un principio conseguir la abstracción necesaria para que el álgebra llegue a un nivel de comprensión que esté más allá de la simple repetición metódica de unos simples pasos.

Los problemas de base que plantea la iniciación al lenguaje algebraico son (1) el simbolismo, (2) la generalización: hay que traducir del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico, (3) las ecuaciones y (4) las destrezas algebraicas.

Es por ello que en esta propuesta, incido en la comprensión y deducción del objeto, por encima de la repetición constante de “tipos de ejercicios”.

## DISEÑO DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

### A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

#### *Nombrá el objeto matemático a enseñar*

El objeto matemático a enseñar es la ecuación de primer grado.

Las ecuaciones son identidades algebraicas, que tienen un miembro a la izquierda del operador igual y otro miembro a la derecha del mismo. En cada miembro hay 1 o más términos; éstos pueden contener solo números o números y letras. Las ecuaciones permiten establecer relaciones entre valores conocidos, los datos (números), y valores desconocidos, las incógnitas (letras). Son una potente herramienta para resolver problemas y como tal las presentamos en esta propuesta didáctica.

Las ecuaciones se clasifican según el término de mayor grado y el número de incógnitas. El objeto matemático a enseñar en esta propuesta didáctica son las ecuaciones de una incógnita, que nombraremos como  $x$ , y de primer grado, lo que implica que son aquellas en las que el exponente de la incógnita es siempre 1.

Resolver una ecuación de primer grado con una incógnita es encontrar el valor numérico de la incógnita que hace que se verifique la igualdad. Este valor es la solución de la ecuación.

Las expresiones algebraicas y las ecuaciones, aparecen en multitud de campos: geometría, física, economía... Por ejemplo:

- Área de una rectángulo  $A = b \cdot h$
- Velocidad media  $V_m = \frac{x}{t}$
- Ingresos por ventas  $I_{total} = Precio_{unidad} \cdot N_{vendidas}$

#### *Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático*

El objeto matemático presentado se sitúa en el segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria y en la materia de matemáticas. En algunos centros se presenta ya en el primer curso de esta etapa educativa, pero según el currículo aragonés (BOA nº 65, del 1 de junio de 2007) se considera objetivo mínimo para el segundo curso.

*Contenidos 2º ESO - Bloque 3. Álgebra Temario de 2º ESO: Expresiones algebraicas; Ecuaciones y sistemas de ecuaciones*

- *El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Utilización del lenguaje algebraico para la expresión de propiedades, relaciones o regularidades de los números y de las figuras.*
- *Lectura, interpretación y escritura de fórmulas y expresiones algebraicas. Valor numérico de una expresión algebraica.*
- *Identidades y ecuaciones. Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución.*
- *Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas.*
- *Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.*

#### *Criterios de evaluación - Bloque 3. Algebra Temario de 2º ESO*

*Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar también la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver problemas. Asimismo, se ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.*

#### *Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático que pretendo enseñar*

El campo de problemas que voy a presentar es el de la experiencia y el entorno del alumno, un niño de 12 a 13 años, que conoce y le resulta fácil comprender problemas sencillos de operaciones, cantidades monetarias, edades y geometría sencilla. Lo he clasificado en base al entorno y a la técnica que se emplea en su resolución una vez modelizado el enunciado. Queda explicado en detalle en el apartado D de esta propuesta didáctica.

Las técnicas y procedimientos (justificación de la técnica) asociadas permiten ver cómo se resuelve la ecuación y su justificación, por ejemplo, trasponer un término, es decir que un término sumando pasa al otro miembro se justifica porque para poder cancelarlo en el primer miembro que es donde está sumando, restamos a los dos miembros ese término de manera que en el primer miembro se produce la cancelación del término.

## B. Sobre los conocimientos previos del alumno

*Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático*

El álgebra se introduce por primera vez en el primer ciclo de la educación secundaria obligatoria. Según el currículo aragonés (BOA nº 65, del 1 de junio de 2007) estos son los contenidos y criterios de evaluación de los mismos para la introducción al álgebra durante el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria:

*Contenidos 1º ESO - Bloque 3. Algebra Temario de 1º ESO: Lenguaje algebraico*

- *Empleo de letras para simbolizar números y cantidades de magnitud inicialmente desconocidos y sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos. Lectura y escritura de fórmulas. Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.*
- *Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. Obtención de expresiones algebraicas en procesos sencillos de generalización: valor numérico de la expresión. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa.*
- *Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.*

*Criterios de evaluación - Bloque 3. Algebra Temario de 1º ESO*

*Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas.*

*Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido y un criterio que permita ordenar sus elementos. Forma parte de este criterio también la competencia del alumnado para interpretar y utilizar expresiones literales con las que se formula una característica (por ejemplo, los números pares) y el resultado de un proceso inductivo sencillo de generalización (por ejemplo, el término general de una progresión aritmética) o de una fórmula, valorando el uso del signo igual y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones.*

Por su importancia, en esta propuesta volveremos a incidir especialmente en los anteriores contenidos de aspecto más conceptual como la simbolización y los procesos de modelización algebraica (traducción al lenguaje algebraico de expresiones del lenguaje común y viceversa).

Sin embargo, consideramos que para que el alumnado curse con aprovechamiento la secuencia didáctica debe tener al menos un aceptable dominio de las siguientes técnicas que han debido de ser adquiridas en cursos anteriores:

- Reducción de polinomios
- Eliminación de paréntesis
- Producto de un número por una fracción
- Operaciones con fracciones y enteros
- Hallar el mínimo común múltiplo

*La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?*

Es de esperar que así sea. Para comprobarlo mi intención es realizar una prueba de evaluación inicial que me permita comprobar en qué situación de partida está el grupo de alumnos. A partir de ella es cuando realmente se pueden adaptar la programación preparada de actividades en relación con el objeto matemático a enseñar (apartado G de esta memoria).

*¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?*

En función de los resultados de la evaluación inicial se pueden plantear una o dos sesiones de repaso. El repaso consistiría en, al mismo tiempo que se van corrigiendo los ejercicios de la evaluación inicial en público, ir haciendo énfasis en los conceptos que parece no hayan quedado suficientemente asimilados.

En particular consideramos fundamentales los siguientes conocimientos para que los alumnos aborden satisfactoriamente los primeros pasos, por lo que haremos incidencia en los mismos al comenzar la unidad:

- 1) Traducir expresiones del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico.
- 2) Describir en lenguaje ordinario expresiones escritas algebraicamente
- 3) Recordar la importancia de simplificar las expresiones algebraicas
- 4) Obtener expresiones algebraicas en procesos sencillos a partir de problemas.

### C. Sobre las razones de ser del objeto matemático

*Cuál es la razón de ser que voy a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático.*

La razón de ser del álgebra que voy a presentar es la resolución de problemas, en múltiples campos de la vida cotidiana. Como ejemplo voy a presentar una adivinanza, algo que los alumnos puedan inicialmente resolver de manera intuitiva, con el método de prueba y error, pero que al terminar el tema puedan comprobar que aplicando las ecuaciones se presenta una resolución mucho más sencilla.

Problema 1: Un mago presenta la siguiente adivinanza a su público: “*Pensad un número y multiplicadlo por 6, al resultado le quitáis 5, y me decís lo que os da y yo adivinaré el número inicial*”

*¿Coincide con la razón de ser histórica que dio origen al objeto?*

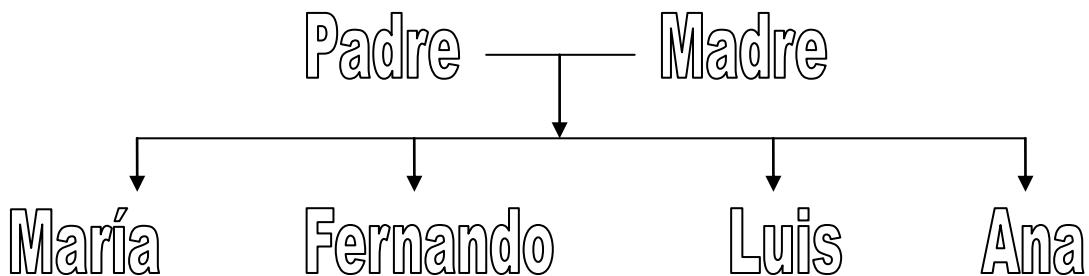
El álgebra apareció a lo largo de la historia como instrumento para la resolución de problemas. Luego lo que coincide es que el objeto matemático es un medio, una forma de pensar y de actuar, que permite resolver distintos tipos de problemas de forma más sencilla y efectiva. Y esta es la razón de ser que voy a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático.

Diofanto de Alejandría, famoso matemático griego, vivió 84 años entre el 200 a.C. y el 400 d.C. (libro “Las aritméticas de Diofanto”) y fue un pionero en utilizar letras para los valores desconocidos e introducirlos en las operaciones (razón de ser histórica que dio origen al objeto) aunque parece ser que ya en el antiguo Egipto y Babilonia (2000 años a.C.) fueron capaces de resolver problemas que con la notación actual se solucionarían mediante ecuaciones de primer grado. La palabra “arithme” significa “incógnita”. Sin embargo la “idea” de Diofanto no cuajó hasta unos mil años después, en la Baja Edad Media, los árabes retomaron sus textos. En esta época (siglo IX) destaca el matemático al-Jwrizm; quien escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra, una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas. Pero no es hasta el siglo XVII, cuando Descartes, maneja la notación actual. De alguna manera fue él quien concluyó la tarea que catorce siglos antes había iniciado Diofanto.

*Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar:*

Ya se ha presentado el problema 1 en un apartado anterior. Además se presentan otros dos problemas que servirán de introducción a la unidad dando sentido al trabajo que realizaré en la misma.

- ❖ Problema 2: Se presenta un árbol genealógico, a partir del cual se puede calcular la edad de cada uno de sus miembros, siguiendo una serie de instrucciones:



María: Mi padre tiene tres años más que mi madre, pero hace 34 años tenía el doble de años que ella.

Fernando nació dos años antes que Luis y dos años después que María. Ana es la pequeña y se lleva 8 años con María. Las edades de los cuatro hermanos suman 26 años.

Solución (Padre 40 años, madre 37 años, María 10, Fernando 8, Luis 6 y Ana 2)

- ❖ Problema 3: Se presenta el epitafio de la tumba de Diofanto

En la tumba de Diofanto, había un curioso epitafio escrito en forma de problema algebraico que daba detalles sobre su vida.

*¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar ¡oh milagro! cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando de vello cubriose su barbilla. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan solo la mitad que la de su padre. Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo. Dime cuántos años había vivido Diofanto cuando llegó su muerte.*

*Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula:*

Para el problema 1 dejamos a los alumnos trabajar el ensayo – error, para que ellos vayan intentando deducir que pueden traducir la adivinanza a un lenguaje algebraico, y que al final la adivinanza puede plantearse con una ecuación.

En el problema 2, presentamos la edad de los padres, que pueden calcular también a base del ensayo - error, de nuevo pueden llegar hasta traducir el lenguaje escrito del problema a un lenguaje algebraico.

Esta misma metodología es la que voy a seguir en el problema 3, que consiste principalmente en ir traduciendo el epitafio a lenguaje algebraico. Si nos fijamos en las frases poco a poco y las vamos transcribiendo a la columna de la izquierda vemos que lo que aparece en el epitafio, puede expresarse algebraicamente tal y como ponemos en la columna de la derecha.

Este ejercicio puede presentarse a los alumnos como ejercicio de motivación en el que se practican varias técnicas:

- Traducción del lenguaje escrito al lenguaje algebraico.
- Presentar la última ecuación que nos llevará al final de esta unidad a resolver cuántos años vivió Diofanto. (Ver apartado G de esta memoria)

¡Caminante! En esta tumba yacen los restos de Diofanto, al terminar de leer este texto podrás saber la duración de su vida	$x$
Su infancia ocupó la sexta parte de su vida	$\frac{x}{6}$
Después transcurrió una doceava parte de su vida hasta que su mejilla se cubrió de vello.	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12}$
A partir de ahí, pasó la séptima parte de su existencia en un matrimonio estéril.	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7}$
Pasó un quinquenio y le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5$
Su hijo murió al alcanzar la mitad de los años que su padre llegó a vivir	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2}$
Tras cuatro años de profunda pena por la muerte de su hijo, Diofanto murió.	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$
Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.	$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$

## D. Sobre el campo de problemas

*Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula*

El tipo de problemas que se van a presentar en el aula, siempre han de estar relacionadas con actividades que el alumno conozca bien o con experiencias que pueda vivir y aplicar en su entorno, ya que esto facilita su comprensión.

Los problemas tienen casi todos la misma estructura semántica y funcional, ecuaciones con coeficientes primero en N, luego en Z y luego ecuaciones con coeficientes en Q. El grado de contextualización va variando, desde situaciones propias del entorno de los alumnos, hasta situaciones hipotéticas y familiares a los alumnos. Se hará énfasis en que es importante en todos ellos: leer despacio, identificar datos, identificar la incógnita, plantear la ecuación.

Tal y como ya hemos adelantado vamos a clasificar los problemas según dos criterios:

- 1) El entorno en el que éstos se presentan y en el que aparece la ecuación

Campo PE1 – Edades

Campo PE2 – Problemas con números: por ejemplo adivinanzas

Campo PE3 – Fórmulas ya estudiadas: geometría, física...

Campo PE4 – Compras e intercambios

- 2) Atendiendo a la técnica que se emplea en su resolución una vez que se modeliza el enunciado

Campo PT1 – Operador aditivo  $x + a = b$

Campo PT2 – Operador multiplicativo  $ax = b$

Campo PT3 – Operador aditivo y multiplicativo  $ax + b = c$

Campo PT4 – Operador aditivo y multiplicativo en ambos miembros de la ecuación  $ax + b = cx + d$

Donde  $a, b, c$ , y  $d$  son coeficientes que pertenecen primero a N, después a Z, y por último a Q (se incrementa paulatinamente la dificultad)

## Campo PE1-PT1

1. Juan tiene 4 años y su padre 34. ¿Cuántos años tiene la madre de Juan, si la edad de Juan más la de su madre es igual a la edad de su padre?

( $4+x=34$  Solución: la madre tiene 30 años)

2. Jorge tiene 12 años y dos más que su hermana Beatriz. ¿Cuántos años tiene Beatriz?

( $2+x=12$  Solución: Beatriz tiene 10 años)

## Campo PE1-PT2

3. Pedro tiene el doble de edad que su hija Ana y entre los dos tienen tantos años como la abuela de Ana, doña Pilar que tiene 72 años. ¿Cuál es la edad del padre y la hija?

( $2x+x=72$  Solución Ana 24 y Luis 48)

4. Las edades de cuatro hermanos suman 80 años. Marina y Guillermo son mellizos y le doblan la edad a Carlos, mientras que Sofía triplica la edad de Carlos. Averigua cuántos años tiene cada uno.

( $2x+2x+3x+x=80$  Solución Marina y Guillermo 20, Carlos 10 y Sofía 30 años)

## Campo PE1-PT3

5. Un padre tiene 33 años que son el doble de años que su hijo más 3, ¿Cuántos años tiene el hijo?

( $2x+3=33$  Solución el hijo tiene 15 años)

6. La suma de las edades de dos hermanos que se llevan 4 años es igual a 20. ¿Cuántos años tiene cada hermano?

( $x+x+4=20$  Solución un hermano 8 años y el otro 12 años)

## Campo PE1-PT4

7. Carmen tiene 25 años más que su hija Laura, y dentro de 10 años le doblará la edad. ¿Cuál es la edad actual de ambas?

( $x+25+10=2(x+10)$ ) Solución Laura 15 años y Carmen 40 años)

8. Una señora tiene 80 años y su hijo la mitad. ¿Cuántos años hace que la madre tenía tres veces la edad del hijo?

( $80-x=3(40-x)$ ) Solución hace 20 años)

## Campo PE2-PT1

1. Si a un número le sumo 10 obtengo el 17 ¿De qué número se trata?  
( $x + 10 = 17$ ) Solución: el número es el 7)

2. Calcula el número que tengo si al restarle 3 me queda 25.  
( $x - 3 = 25$ ) Solución: el número es el 28)

## Campo PE2-PT2

3. Si a un número le sumamos el doble de sí mismo, obtenemos el 24 ¿Cuál es el número?

( $x+2x=24$ ) Solución: el número es el 8)

4. Calcula el número que tengo si sumando su doble y su triple obtengo 50. (  $2x+3x=50$ ) Solución: el número es el 10)

## Campo PE2-PT3

5. Calcula dos números enteros consecutivos cuya suma sea 61.  
( $2x+1=61$ ) Solución 30 y 31)

6. Calcula tres números enteros consecutivos sabiendo que su suma es 45.  
( $3x + 3 = 45$ ) Solución 14, 15 y 16)

## Campo PE2-PT4

7. La suma de dos números es 440, y uno de ellos es 20 unidades menor que el triple del otro. Calcula los dos números. ( $3x-20+x=440$ ) Solución 115 y 325)

8. Dividiendo un número entre 3, se obtiene el mismo resultado que restándole 16

¿de qué número se trata? ( $\frac{x}{3} = x - 16$  Solución 24)

#### Campo PE3-PT3

1. Cada lado de un triángulo mide 5 más que el anterior. Si el perímetro mide 37.5 m. ¿cuánto mide cada uno de los lados?  
( $x + x + 5 + x + 10 = 37.5$  Solución 7.5, 12.5 y 17.5)
2. El perímetro de un rectángulo mide 26 m. El lado mayor mide 3 m más que el menor. ¿Cuánto mide cada lado? ( $x + x + 3 + x + x + 3 = 26$  Solución 5 y 8)

#### Campo PE3-PT4

1. Queremos calcular la altura de un rectángulo y sabemos que la base es 5 cm., y que si a su área le sumamos uno, obtenemos su perímetro. ( $5x + 1 = 2x + 10$   
Solución: la altura es 3 cm.)
2. A 30 km. de la frontera entre España y Francia se comete un atraco. Los ladrones huyen a una velocidad de 90 km/h . Cuatro minutos más tarde sale la policía en su persecución a una velocidad de 120 km/h. ¿Conseguirá alcanzar a los ladrones antes de que atraviesen la frontera?  
( $6 + 90x = 120x$  Solución: Sí, los alcanzan a 6 km de la frontera)

#### Campo PE4-PT1

1. Tengo un dinero ahorrado en mi hucha, y con los 3 euros que me da mi abuela consigo tener 10 euros. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente en la hucha?  
( $x + 3 = 10$  Solución: Tenía 7 euros)
2. Mi madre me manda a comprar el pan, me cuesta 1 euro, dos kilos de patatas que me cuestan 2 euros, y un paquete de hamburguesas que me cuestan 3 euros. Si cuando vuelvo a casa le devuelvo 4 euros, ¿Cuánto dinero me ha dado?  
( $x - 1 - 2 - 3 = 4$  Solución: Tenía 10 euros)

## Campo PE4-PT2

3. Un grupo de amigos prepara una fiesta y gasta el triple en comida que en bebida. El presupuesto total asciende a 100 euros. ¿Cuánto gastarán en comida y cuánto en bebida? ( $3x + x = 100$  Solución comida 75 € y bebida 25 €)
4. Entre cuatro ganaderos tienen 165 vacas. Si el segundo posee el doble de cabezas que el primero; el tercero, el triple que el segundo, y el cuarto, el cuádruple que el tercero, ¿cuántas vacas tiene cada uno? ( $x + 2x + 6x + 24x = 165$  Solución 5, 10, 30, 120)

## Campo PE4-PT3

5. La pandilla ha entrado a merendar en una bocatería. Un bocadillo cuesta 1 € más que un sándwich. Por tres sándwiches y dos bocadillos, pagan 11 €. ¿Cuánto cuesta un sándwich? ¿Y un bocadillo? ( $3x + 2(x+1) = 11$  Solución el sándwich 1,80 euros y el bocadillo 2,80 euros)
6. Si al dinero que tengo le añado la mitad y, además, otros 6 euros, tendría 60 euros ¿cuánto dinero tengo? ( $x + \frac{x}{2} + 6 = 60$  Solución tengo 36 euros)

## Campo PE4-PT4

7. Nacho tiene el doble de cromos que Berta, pero si le da uno, solo tiene dos más. ¿Cuántos cromos tiene cada uno? ( $2x-1=x+3$  Solución Berta 4 y Nacho 8)
8. Una bodega exportó en enero la mitad de sus barriles, y a los dos meses, un tercio de los que le quedaban. ¿Cuántos barriles tenía al comienzo si ahora hay 40.000 barriles? ( $x - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} = 40000$  Solución 120.000)

*¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?*

Se presenta una técnica inicial, el ensayo – error, dependerá del entorno, campo PEn y de la ecuación resultante tras modelizar el enunciado, campo PTn, introduciendo las técnicas de resolución de manera secundada, para que una vez comprendida la T1 y la T2, éstas puedan ser utilizadas como referencia en las siguientes. De la misma manera

se introduce la técnica T3.2, tras haber afianzado la T3.1, la T3.3 tras haber comprendido la T3.2 y la T3.4 para terminar, de manera que se pueda hacer siempre referencia a las técnicas anteriores.

*Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.*

Los problemas se plantean como fomento del pensamiento del alumno; considero necesario valorar que los alumnos modelen, exploren, comenten, supongan y pongan a prueba sus ideas, además de practicar sus habilidades de cálculo. Para ello y como profesor se ha de introducir en las clases preguntas como:

- Explícame cómo lo has pensado
- ¿Lo has resuelto de manera distinta?
- ¿Cómo sabes que es cierto?
- ¿Siempre funciona así?

Es por ello que se plantean a continuación una secuencia de ideas acerca de la metodología a seguir que juzgamos importantes y necesarias para que los alumnos sean capaces de resolver estos problemas en el aula:

1. Hacer especial énfasis en la comprensión lectora del alumno, incidir en que es preferible leer despacio el problema y si es necesario, que repita la lectura. Para ello, yo como docente puedo servir de ejemplo a la hora de leer en voz alta, vocalizando claramente y subrayando aquello que voy a expresar algebraicamente.
2. El alumno ha de modelizar, identificar los datos, tal y como se supone aprendió ya en el curso anterior. Para ello se repasara tras la evaluación inicial, la técnica de traducción del lenguaje normal al algebraico.
3. El alumno ha de identificar la incógnita ( $x$ ) especificando claramente qué nos están pidiendo.
4. En el caso de que se tratara de problemas geométricos, aconsejar al alumno a utilizar figuras o esquemas gráficos en los que aparezcan los datos y las incógnitas, para presentarlos con mayor claridad. Es importante recordar al

alumno que en ocasiones ha de recurrir a conocimientos que ya tiene (suma de los ángulos de un triángulo, número de patas de un conejo ...)

5. Tras haber realizado todo este proceso reflexivo, el alumno ya puede plantear la ecuación.
6. El siguiente paso sería resolver la ecuación utilizando las técnicas que describiré en el apartado siguiente. Una vez encontrada la solución, siempre hay que recomendar al alumno que compruebe si está resuelta correctamente, para ello solo tendrá que sustituir el valor solución hallado en la lectura inicial del problema. Considero importante que los alumnos adquieran unas rutinas desde el principio, que les facilitarán la resolución de problemas más complejos en cursos superiores. Se ha de expresar correctamente la respuesta, esto significa que si son años hay que decirlo, si es una medida de longitud hay que indicarla, si son euros y céntimos también, aunque se trate de matemáticas también hay que escribir.

Y por último y a lo largo de todas las clases, de manera transversal, creo importante que los alumnos capten el mensaje de que en matemáticas, el éxito depende de la constancia y de la capacidad de repasar, reflexionar y razonar. Que no se debe tener prisa y que se han de tomar el tiempo necesario.

## E. Sobre las técnicas

*Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula*

- Introducimos primero las técnicas de repaso que ya deberían conocer:

### T1 - Traducir del lenguaje normal al lenguaje algebraico

Podemos plantear un juego en el que vamos avanzando casillas con cada expresión que traducimos. El resultado de una casilla ha de ser el punto de partida de la siguiente casilla.

Casilla 1.  $x = 6$

Casilla 2.  $x$  menos cuatro.

Casilla 3. El resultado anterior menos siete.

Casilla 4. El doble del resultado anterior.

Casilla 5. El triple del resultado anterior más 32.

Casilla 6. La mitad del resultado anterior.

Casilla 7. El doble del resultado anterior menos seis.

Casilla 8. El resultado anterior menos su doble.

Casilla 9. El doble del resultado anterior menos tres.

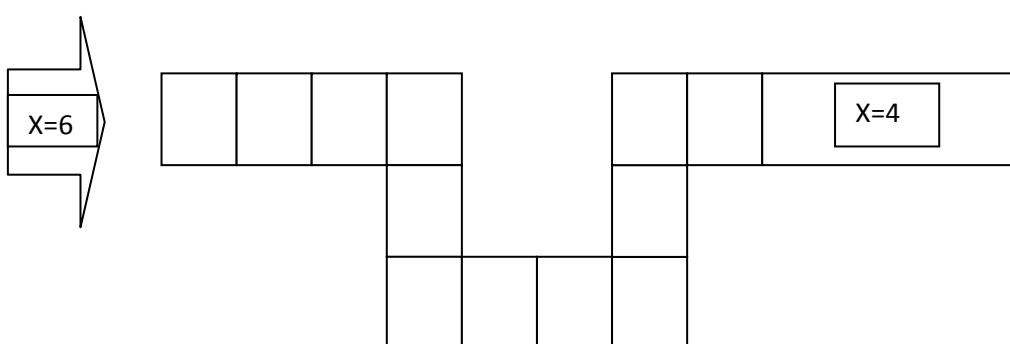
Casilla 10. La quinta parte del doble del resultado anterior.

Casilla 11. La mitad del resultado anterior más el doble del resultado anterior.

Casilla 12. La quinta parte del resultado anterior menos el resultado anterior.

Casilla 13. El triple del resultado anterior dividido por la mitad del resultado anterior.

Casilla 14. El doble del resultado anterior más tres, menos el resultado anterior aumentado en cinco unidades.



Al llegar a este punto debes haber conseguido que  $x = 4$ . Si no es así, busca tu error.

## T2 – Trabajar con expresiones algebraicas

En este tipo de técnicas recordamos procedimientos aprendidos en el curso anterior, pero que consideramos fundamentales como conocimiento previo a las técnicas que vamos a introducir a continuación.

### T2.1 - Comparaciones de expresiones algebraicas:

$2x + 1$  es mayor o menor que  $3x + 1$

$2x + 1$  es mayor o menor que  $3x - 1$  (En este caso lo que queremos es que el alumno piense con esta comparación que hay un punto de inflexión y que lo encuentre a partir del método de ensayo error)

### T2.2 - Simplificar expresiones algebraicas:

$2x + 1 + 5x - 3$

$3x + 1 - 5x + x - 10 - 1 + 5x$

➤ Para ahora comenzar con las técnicas propias de las ecuaciones de primer grado:

## T3 – Resolver la ecuación

Recogemos todas las rutinas para resolver ecuaciones de primer grado, aunque no son presentadas como técnicas separadas sino secuenciales. El procedimiento de las técnicas viene expresado en el apartado F de “Tecnologías”.

### T3.1 - Despejar la “x”, operador aditivo $x + a = b$

$$x + 5 = 10$$

### T3.2 - Despejar la “x”, operador multiplicativo $ax = b$

$$3x = 9$$

### T3.3 – Resolver ecuaciones de operador aditivo y multiplicativo $ax + b = c$

Se reduce la ecuación a alguna de operador aditivo o multiplicativo para así aplicar las técnicas previamente expuestas.

- i) Según el operador la resolución puede ser comenzando por los términos aditivos o por los términos multiplicativos

Aditivos  $2x + 3 = 11$

Multiplicativos  $3(x - 5) = 3$

- ii) Según el coeficiente de la incógnita, puede ser mónico (coeficiente 1)  $x + 3 = 10$

no mónico en  $\mathbb{Z}$   $4x + 3 = 10$

o coeficiente en  $\mathbb{Q}$   $\frac{2}{3}x + 3 = 10$

- iii) Según el tipo de solución las ecuaciones puede ser con solución en  $\mathbb{N}$ , en  $\mathbb{Z}$  o en  $\mathbb{Q}$

#### T3.4 – Operador aditivo y multiplicativo en ambos miembros de la ecuación

$$ax + b = cx + d$$

Se reduce la ecuación a alguna de operador aditivo o multiplicativo para así aplicar las técnicas previamente expuestas.

- i) Según el operador la resolución puede ser comenzando por los términos aditivos o por los términos multiplicativos

Aditivos  $2x + 3 = 10 - x$

Multiplicativos  $3(x - 5) = 2x + 3$

- ii) Según el coeficiente de la incógnita, puede ser mónico (coeficiente 1)  $x + 3 = 10 + x$

no mónico en  $\mathbb{Z}$   $4x + 3 = 10 - 2x$

o coeficiente en Q  $\frac{2}{3}x + 3 = \frac{3-x}{5}$

- iii) Según el tipo de solución las ecuaciones puede ser con solución en N, en Z o en Q

*¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?*

La definición de técnica es qué hacemos para resolver los problemas. La técnica fundamental que queremos usar es explicar conceptos y proponer actividades, aunque en la mayoría de los casos me gustaría primero que fuesen los alumnos los que de manera intuitiva intentasen llegar a alguna conclusión.

Enumeración de las técnicas:

Introducir el simbolismo de las letras: Los alumnos tienden a olvidar que las letras representan números, es necesario asimilar dos conceptos: (1) la generalización, es decir pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas y (2) la simbolización, es decir, utilizar letras para expresarlo de forma abreviada.

Introducir el símbolo de operación: En aritmética los signos de operación indican una acción a realizar con números, mientras que en álgebra, son una representación en la que hay operaciones que no hay que realizar.

Introducir la noción de igualdad: Hasta la introducción del álgebra, en aritmética el alumno considera el igual como un operador de resultado. A la izquierda del operador igual hay una operación que ha de realizar y a la derecha del operador igual escribe el resultado. En álgebra es importante que el alumno entienda que el signo de igual representa una relación entre los números que hay a su izquierda y los que hay a su derecha, por ejemplo  $8+4= \underline{\hspace{2cm}} + 5$ . Y no un indicador de que han de realizar una operación aritmética. Antes de introducir el álgebra donde tendremos cantidades conocidas y cantidades desconocidas, es recomendable que los alumnos aprendan a situarse en una relación de igualdad entre cantidades conocidas aplicando el cálculo mental a la totalidad de la relación, es decir, para resolver  $34 + 25 = \underline{\hspace{2cm}} + 26$ , no es necesario sumar primero  $34 + 25$  y luego restar 26, si no que hay que observar que 26 es  $1 + 25$  por lo que el resultado se calcula como 34 menos 1

Los alumnos han de comprender que la igualdad es una relación que expresa que dos expresiones matemáticas, una a la derecha y otra a la izquierda, tienen el mismo valor.

Introducir el concepto de reducir, simplificar: En toda expresión algebraica hay que intentar reducir o simplificar términos para así simplificarla. Por ejemplo  $3x - 5 - 2x + 7$  se puede simplificar como  $x+2$  quedando de esta forma mucho más simple y con menor probabilidad de error en su posterior manipulación.

Introducir el concepto de identidad equivalente:

Si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos los dos miembros de una identidad por el mismo número, la identidad permanece.

Introducir el concepto de transponer y el procedimiento, es decir su aplicación:

A partir del concepto de identidad equivalente vamos a poder transponer términos, para poder despejar el valor de la incógnita ¿cómo?

- Un término que suma en un miembro pasará al otro miembro restando. Si restamos en los dos miembros la misma cantidad, la identidad permanece.
- Un término que resta en un miembro pasará al otro miembro sumando. Si sumamos en los dos miembros la misma cantidad, la identidad permanece.
- Un coeficiente que multiplica en un miembro, pasará al otro miembro dividiendo. Si dividimos los miembros por el mismo número la identidad permanece.
- Un coeficiente que divide en un miembro, pasará al otro miembro multiplicando. Si multiplicamos los miembros por el mismo número la identidad permanece.

Dejar clara la diferencia entre identidad y ecuación:

- ✓ Una identidad es una igualdad que se cumple siempre, sea cual sea el valor de la incógnita  $x$ , por ejemplo  $3x+1=2x+3+x-2$
- ✓ Mientras que una ecuación es una igualdad que se cumple solo para cierto valor de  $x$ , por ejemplo  $3x+1=4$  solo se cumple cuando a  $x$  le damos el valor de 1,  $x=1$

*Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?*

Sí, ya que todas ellas se van a transmitir a través de la misma resolución de problemas. Se plantea una clasificación de problemas relacionada con las técnicas.

*Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula*

Procesos: traducción del lenguaje natural al algebraico y viceversa. Identificación de problemas que se pueden resolver mediante ecuaciones (resolución de problemas de la vida real mediante ecuaciones).

Dominio conceptual: el alumno debe ser capaz de comprender el concepto de ecuación como una igualdad en la que hay que hallar el valor de la incógnita que la hace verdadera.

Simplificación: hacer énfasis en que la simplificación facilita siempre la resolución, luego a la hora de aplicar una técnica quiero incidir en que siempre se ha de intentar primero simplificar.

El alumno ha de mantener siempre en mente, que antes de comenzar con la resolución propia de la ecuación hay que “mirar” la ecuación y “pensar” cuál de todas las técnicas nos va a llevar a una resolución más sencilla:

1. Se ha de fijar en la prioridad de operaciones, si existen paréntesis, primero quitarlos, atendiendo siempre al signo de los términos.

2. Pensar si se pueden simplificar términos:

i) dentro del mismo miembro

ii) entre los dos miembros

aplicando el concepto de identidades equivalentes, y la técnica de simplificación de expresiones algebraicas

3. Operar, para simplificar la expresión algebraica de cada miembro de la ecuación, atendiendo siempre a las técnicas del grupo T3. Todas las técnicas tienen que poder aplicarse en un campo de problemas.

## F. Sobre las tecnologías

*¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?*

Las tecnologías propias de las técnicas T1 y T2 ya han tenido que ser presentadas en el curso anterior, por lo que centramos nuestra atención a las propias de esta propuesta didáctica.

➤ Tecnologías de las técnicas de las ecuaciones de primer grado:

T3.1 - Despejar la “x”, operador aditivo  $x+a=b$ :

$$x + 5 = 10$$

$x + 5 - 5 = 10 - 5$  para simplificar el término que suma a la incógnita, 5, restamos 5 unidades a ambos miembros, de esta forma mantenemos el valor de la identidad por el principio de identidades equivalentes: si sumamos o restamos la misma cantidad a los dos miembros de una igualdad, la igualdad permanece

$$x = 5$$

T3.2 - Despejar la “x”, operador multiplicativo:  $ax=b$

$$3x = 9$$

$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$  para simplificar el término que multiplica a la incógnita, +3, dividimos por (+3) a ambos miembros, de esta forma mantenemos el valor de la identidad por el principio de identidades equivalentes: si multiplicamos o dividimos por la misma cantidad a los dos miembros de una igualdad, la igualdad permanece

$$x = 3$$

T3.3 – Operador aditivo y multiplicativo  $ax+b=c$

T3.3.i) Según el operador la resolución puede ser comenzando por los términos aditivos o por los términos multiplicativos

Aditivos  $2x + 3 = 11$

En este caso la operación con prioridad es la suma, por lo que agrupamos los términos (sumandos) dejando en un miembro de la igualdad todas las

incógnitas y en el otro miembro de la igualdad el resto. Para ello aplicamos la técnica T3.1 del operador aditivo

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 11 \\ 2x + 3 - 3 &= 11 - 3 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

A partir de este resultado aplicamos la técnica T3.2 del operador multiplicativo

$$\begin{aligned} 2x &= 8 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{8}{2} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

T3.3.ii) Multiplicativos  $3(x - 5) = 3$

En este caso la operación con prioridad es la multiplicación del paréntesis, por lo que primero hacemos la operación:

$$\begin{aligned} 3(x - 5) &= 3 \\ 3x - 15 &= 3 \end{aligned}$$

Para ahora aplicar la técnica T3.3.i

\*En este ejemplo concreto podemos presentar también la importancia de simplificar. Si nos hubiéramos fijado antes de realizar la operación del paréntesis si era posible simplificar, hubiésemos obtenido una ecuación resultado mucho más sencilla de resolver, aplicando simplemente la técnica T3.2

$$\begin{aligned} 3(x - 5) &= 3 \\ \frac{3(x - 5)}{3} &= \frac{3}{3} \\ x - 5 &= 1 \end{aligned}$$

T3.3.iv) Coeficiente en Q  $\frac{2}{3}x + 3 = 10$

En este caso hemos de señalar al alumno que si el coeficiente de x es un número racional, hemos de recordar cómo se suman números racionales.

Para ello se le recuerda que hemos de buscar el mínimo común múltiplo de todos los denominadores. Es por ello necesario expresar lo primero de todo, todos los términos de la ecuación como números racionales:

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{1} = \frac{10}{1}$$

$$\text{m.c.m.(3,1)}=3$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{9}{3} = \frac{30}{3}$$

Y ahora que todos los racionales tienen el mismo denominador, en este caso 3, y por identidades equivalentes, si multiplicamos los dos miembros de la ecuación por este número, conseguiremos simplificarlo:

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{2}{3}x + \frac{9}{3}\right) &= 3\left(\frac{30}{3}\right) \\ \frac{3 \cdot 2}{3}x + \frac{3 \cdot 9}{3} &= \frac{3 \cdot 30}{3} \\ 2x + 9 &= 30 \end{aligned}$$

Y a partir de ahora podemos aplicar la técnica T3.3.i

T3.4 – Operador aditivo y multiplicativo en ambos miembros de la ecuación  
 $ax + b = cx + d$

iv) Según el operador la resolución puede ser comenzando por los términos aditivos o por los términos multiplicativos

- Aditivos  $2x + 3 = 10 - x$

En este caso lo primero que recomiendo es mirar la ecuación para ver si podemos simplificar términos, tanto numéricos como términos con incógnita; no es el caso así que aplicamos el siguiente paso que es la transposición de términos para así tener todas las incógnitas en el mismo miembro de la ecuación:

$$2x + 3 = 10 - x$$

$$2x + x + 3 = 10 - x + x$$

$$3x + 3 = 10$$

Y a partir de aquí podemos aplicar la técnica T3.3.i

- Multiplicativos  $3(x - 5) = 2x + 3$

De nuevo lo primero que recomiendo es mirar la ecuación para ver si podemos simplificar términos, podría ocurrir que no fuese necesario multiplicar el paréntesis y que el coeficiente pudiera simplificarse. De nuevo no es el caso así que aplicamos el siguiente paso que es quitar el paréntesis para así llegar a una ecuación del tipo T3.4 aditivo:

$$3(x - 5) = 2x + 3$$

$$3 \cdot x - 3 \cdot 5 = 2x + 3$$

$$3x - 15 = 2x + 3$$

Hago mención en este apartado a la resolución de una ecuación que combina todas las técnicas mencionadas, como si al alumno me dirigiera:

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{5} = 2\left(\frac{3-x}{5}\right)$$

- Miramos la ecuación, ¿es posible simplificar algo en el miembro a la izquierda de la igualdad? No
- ¿es posible simplificar algo en el miembro a la derecha de la igualdad? No
- Pensamos, ¿qué resolvemos primero, la suma de coeficientes racionales o el paréntesis? En este caso es mejor resolver primero el paréntesis, ya que hay coeficientes racionales en los dos miembros.

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot (3-x)}{5}$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3 - 2 \cdot x}{5}$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} - \frac{2x}{5}$$

Ahora tenemos sumandos todos racionales, luego para poder sumarlos necesitamos encontrar el m.c.m. de los denominadores 3 y 5: m.c.m.(3,5)=15

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot 2}{15}x + \frac{3 \cdot 2}{15} &= \frac{3 \cdot 6}{15} - \frac{3 \cdot 2x}{15} \\ \frac{10}{15}x + \frac{6}{15} &= \frac{18}{15} - \frac{6x}{15} \\ 15 \cdot \left(\frac{10}{15}x + \frac{6}{15}\right) &= 15 \cdot \left(\frac{18}{15} - \frac{6x}{15}\right) \\ 15 \cdot \frac{10}{15}x + 15 \cdot \frac{6}{15} &= 15 \cdot \frac{18}{15} - 15 \cdot \frac{6x}{15} \\ 10x + 6 &= 18 - 6x \end{aligned}$$

Y a partir de aquí ya podemos aplicar la técnica T3.4 de términos aditivos.

*¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?*

Mi idea es comenzar con una reflexión grupal, de manera que los alumnos vayan expresando cómo pueden justificarlas, e ir aceptando aquellas que sean aplicables y explicando aquellas que no lo son, haciendo hincapié en que de los errores aprendemos todos. La responsabilidad final caerá sobre el docente haciendo una recopilación al terminar la sesión de todos los conceptos tratados.

*Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.*

La metodología es la ya expuesta en el apartado D sobre las técnicas. Se presenta un nuevo problema en el que los alumnos deberían aplicar una técnica nueva, se les permite dialogar en grupos, buscar distintas posibilidades para resolver la ecuación, se pone en común sus reflexiones y conclusiones si llegan a alguna, y a partir de ellas se reconduce la explicación hacia la técnica en sí.

Quiero dar prioridad a que el alumno piense, a que encuentre caminos alternativos para llegar a la solución, a que aplique las técnicas y tecnologías expuestas de la manera que más sencillo le parezca, siempre y cuando al terminar compruebe que la solución obtenida es la correcta, sustituyendo el valor hallado para la incógnita que hace que se cumpla la igualdad.

## G. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

*Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.*

### 1ª Sesión, de iniciación: Repaso o evaluación inicial

Durante esta sesión comprobaremos el dominio que tienen los alumnos de las técnicas T1, traducir del lenguaje normal al algebraico, y T2, trabajar con expresiones algebraicas.

#### a) Repaso de lenguaje algebraico:

Actividad 1: planteo una serie de expresiones que los alumnos han de traducir a lenguaje algebraico, introduzco aquí unos ejemplos

Un número una unidad mayor	$x+1$
El doble del primer número	$2x$
El triple de un número	$3x$
El número menos tres	$x-3$
Suma de dos números consecutivos	$x + (x+1)$
La mitad de un número más cuatro	$x/2 + 4$
El triple de un número menos cinco	$3x - 5$
La mitad del triple de un número menos tres	$3x/2 - 3$

Actividad 2: Por parejas, cada 2 alumnos, uno de ellos comienza con el rol de profesor y ha de plantear al compañero 5 expresiones en lenguaje normal para que el que mantiene el rol del alumno las traduzca a lenguaje algebraico, el primero habrá de corregirlas si no son correctas las expresiones. A continuación se intercambian los roles dentro de la pareja y se ejecuta el mismo ejercicio de nuevo.

#### b) Expresar en lenguaje verbal expresiones algebraicas

Actividad 1: planteo una serie de expresiones en la pizarra que los alumnos han de escribir en lenguaje normal

$$5x$$

$$x + 7$$

$$3x - 5$$

$$\frac{2}{3}x - 4$$

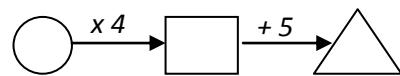
Actividad 2: De nuevo volvemos al juego de parejas y los alumnos han de plantear cada uno 5 expresiones al compañero y éste ha de traducirlas. A continuación volvemos a intercambiar los roles.

- c) Introducir problemas a modo de motivación para captar la atención del alumno.

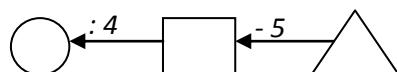
Comenzamos con el “juego del mago”. Les proponemos a los alumnos primero en grupo que, siguiendo el diagrama que podemos dibujar en la pizarra:

- Piensen un número (círculo)
- Lo multipliquen por 4
- Sumarle 5
- ¿Qué número se ha obtenido? (triángulo)

Apoyarnos en la pizarra para escribir varios casos concretos y comprobar si podemos expresar la generalidad que nos dará lugar a expresar la ecuación y que nos permitirá (como al mago) conocer en cualquier situación el número originalmente pensado:



Intentar que sea el alumno el que descubra cómo sabemos el número inicial. Que ellos mismos se prueben en parejas. Primero les dejamos que vayan tanteando y luego les orientamos para que realicen las operaciones inversas:



- d) Para introducir el concepto de ecuación, como un equilibrio entre los dos miembros, como si de una balanza se tratara, les planteo una actividad por grupos contextualizada:

*Tenemos 2 amigos que tienen sobres de cromos sin abrir y cromos sueltos. Los 2 amigos tienen en total los mismos cromos. ¿Puedes decirme cuántos cromos hay en cada sobre? ¿Cómo lo has calculado?*

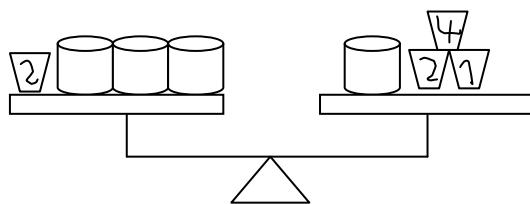


En caso de comprobar que las técnicas T1 y T2 no estuvieran muy adquiridas se podría plantear una sesión extra.

## 2<sup>a</sup> sesión

Introduciremos el concepto de ecuación, pero no a partir de unas definiciones si no a partir del concepto de balanza, donde los dos miembros de la igualdad son iguales cuando la balanza está equilibrada. Partiendo de este símil, comenzamos la sesión con una pregunta a los alumnos:

*Si la balanza está en equilibrio ¿cuál de las siguientes acciones la mantendría en equilibrio?*



- a) *pasar 3 kg. del platillo de la izquierda al de la derecha*
- b) *añadir 4 kg. a cada platillo*
- c) *quitar 2 kg. de cada platillo*
- d) *pasar un bote del platillo de la izquierda al de la derecha*
- e) *quitar dos botes del platillo de la izquierda y un bote del derecho.*
- f) *quitar un bote de cada platillo*

Tras una puesta en común con los razonamientos de los alumnos se presentan:

Significado de una identidad algebraica – igualdad que se verifica siempre cualesquiera que sean los valores de la incógnita, por ejemplo  $3a + b - 5 + 3b = 4b + a - 3 + 2a - 2$

Significado de una ecuación – identidad algebraica que se cumple solo para algunos valores numéricos de las letras, por ejemplo  $4x - 2 = 2$  se cumple solo para  $x = 1$

Qué es resolver una ecuación. Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita  $x$  para la que se cumple la igualdad.

Todas las sesiones las voy a comenzar planteando un problema sobre el que los alumnos puedan pensar, e intentar descubrir cómo resolverlo.

*"Tengo un dinero ahorrado en mi hucha, y con los 3 euros que me da mi abuela consigo tener 10 euros. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente en la hucha?"*

Lo normal será que por tanteo los alumnos den directamente la solución. Lo primero será encauzar la puesta en común para aplicar primero la técnica T1, traducir al lenguaje algebraico, y luego plantear la ecuación, haciendo referencia al equilibrio de la balanza y a qué ponemos en cada platillo. Luego como si de la balanza se tratara ir viendo con los alumnos que hemos de poner o quitar en los dos platillos para mantener el equilibrio de la balanza y dejar la incógnita sola en un platillo.

☆ Introducir la técnica T3.1 (despejar la “ $x$ ”, operador aditivo) a partir del problema sobre el que ya han trabajado:

$\begin{aligned} x + 3 &= 10 \\ x + 3 - 3 &= 10 - 3 \\ x &= 7 \end{aligned}$	<p>El coeficiente de <math>x</math> es 1, y solo tenemos la <math>x</math> a un lado de la ecuación luego solo hemos de aislarlo.</p> <p>Si restamos a los dos miembros de la ecuación la misma cantidad, 3, la igualdad permanece (balanza). Ecuaciones equivalentes (se mantiene el equilibrio en la balanza). De esta forma el 3 que suma con el 3 resta nos queda 0, y ya hemos aislado la <math>x</math>.</p>
$7 + 3 = 10$	<p>El último paso y uno de los más importante, comprobar que efectivamente si sustituimos el valor hallado en la ecuación, se cumple la igualdad.</p>

Continúo introduciendo un nuevo problema en el que se aplica la técnica recién vista del campo PE4-PT1 (edades, operador aditivo)

*“Mi madre me manda a comprar el pan, me cuesta 1 euro, dos kilos de patatas que me cuestan 2 euros, y un paquete de hamburguesas que me cuestan 3 euros. Si cuando vuelvo a casa le devuelvo 4 euros, ¿Cuánto dinero me ha dado?”*

$\begin{aligned}x - 1 - 2 - 3 &= 4 \\x - 6 &= 4 \\x - 6 + 6 &= 4 + 6 \\x &= 10\end{aligned}$	Planteo la ecuación. Ahora he de simplificar, para ello junto todos los números que acompañan a la x, $-1-2-3=-6$ , y ya tengo la ecuación reducida. Para dejar la x sola tengo que anular el 6 que está restando ¿cómo lo hago? Sumando a los dos miembros de la igualdad 6, y de esta forma obtengo la solución del problema: mi madre me ha dado 10 euros.
$10 - 1 - 2 - 3 = 4$	Sustituyo el valor hallado en la ecuación y compruebo que se cumple la igualdad.

A continuación hacemos más problemas del mismo campo de problemas PT1 y distintos entornos PE1, PE2, PE3 y PE4.

Actividad → Les pido a los alumnos que ahora intenten plantear ellos un problema que se pueda resolver con una ecuación como la que hemos escrito. Planteamos la ecuación todos juntos y la resolvemos.

Para terminar la sesión introduzco un poco de lenguaje matemático. Lo que hemos estado haciendo se llama “transposición de términos para despejar la incógnita” y en definitiva es mantener el equilibrio en la balanza, poner en los dos platillos o quitar de los dos platillos, para dejar sola la incógnita en uno de los platillos, siempre manteniendo su equilibrio “ecuaciones equivalentes”:

- Lo que suma en un miembro pasa al otro miembro restando. (Para anularlo en un miembro, si está sumando tenemos que restarlo en los dos miembros de la ecuación para que la igualdad se mantenga). Aplicamos que la resta es la operación inversa a la suma.
- Lo que resta en un miembro pasa al otro miembro sumando. (Para anularlo en un miembro, si está restando tenemos que sumarlo en los dos miembros de la ecuación para que la igualdad se mantenga). Aplicamos que la suma es la operación inversa a la resta.

3<sup>a</sup> sesión

★ Introducir ecuaciones con coeficientes no mónicos en  $\mathbb{Z}$  para introducir la técnica T3.2 (despejar la “x”, operador multiplicativo). Lo hacemos de nuevo a partir de un problema, de manera que puedan ir deduciéndo poco a poco el planteamiento de la ecuación. Campo de problemas PE4:

*“Un grupo de amigos prepara una fiesta y gasta el triple en comida que en bebida. El presupuesto total asciende a 100 euros. ¿Cuánto gastarán en comida y cuánto en bebida?”*

Les dejamos un tiempo para que ellos puedan pensar cómo plantear la ecuación (qué ponemos en cada platillo de la balanza) y luego qué podrían hacer para despejar la incógnita (para manteniendo el equilibrio, dejar la x sola en uno de los platillos). Lo ponemos en común y reconduciendo sus respuestas llegamos a exponer la técnica 3.2

Gasto en bebida → x Gasto en comida → 3x $x + 3x = 100$ $4x = 100$ $\frac{4x}{4} = \frac{100}{4}$ $x = 25$ Gasto en bebida 25 € Gasto en comida 75 €	Identificar en el texto que datos nos dan y que variables nos piden: gasto en bebida y gasto en comida Plantear la ecuación Como tenemos más de un término con x, los agrupamos, y en este caso los sumamos (técnica T2). Nos quedan todas las x a un lado de la ecuación. La x está multiplicada por 4 y queremos dejarla sola, hemos de aplicar la operación inversa de la multiplicación, si algo multiplica para anularlo tenemos que dividir, así que para que la ecuación se mantenga igual dividimos los dos miembros de la ecuación por 4. Ya hemos despejado la x. Ahora hemos de dar la solución al problema, el gasto en bebida y el gasto en comida
$25 + 3 \cdot 25 = 100$	Sustituyo el valor hallado en la ecuación y compruebo que se cumple la igualdad.

Seguimos planteando problemas del mismo campo PT2 y distintos entornos PE1, PE2, PE3 y PE4, en los que se incluyan operadores aditivos y multiplicativos, y coeficientes no mónicos en  $\mathbb{Z}$ .

Cuando llevemos ya varios problemas resueltos en la pizarra, es preferible que comiencen a practicar por su cuenta para luego pedir simplemente la solución.

Volvemos a hacer referencia al lenguaje matemático “Transposición de términos para despejar la incógnita” (recordamos que para hallar ecuaciones equivalentes hemos de mantener el equilibrio de la balanza)

- Lo que suma en un miembro pasa al otro miembro restando.
- Lo que resta en un miembro pasa al otro miembro sumando.
- Lo que multiplica en un miembro pasa al otro miembro dividiendo.
- Lo que divide en un miembro pasa al otro miembro dividiendo.

★ Para introducir la técnica T3.3 elegimos un problema del campo PE1-PT3, donde aparece el operador aditivo y multiplicativo, con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  y así combinar las técnicas T3.2 y T3.1 en el mismo problema. Campo PE1-PT3:

*Un padre tiene 33 años que son el doble de años que su hijo más 3, ¿Cuántos años tiene el hijo?*

Seguimos planteando problemas del mismo campo PT3 y distintos entornos PE1, PE2, PE3 y PE4, en los que se incluyan operadores aditivos y multiplicativos, y coeficientes no mónicos en  $\mathbb{Z}$ .

Es el momento de “romper” un poco la dinámica habitual de la clase, cambiar la rutina, introducimos un juego. Un dominó. Hacemos grupos de 4 alumnos, y a cada grupo le repartimos un dominó. Todos iguales. El juego trata de hacer corresponder cada ecuación con su solución o con una ecuación equivalente a ella. En su afán por jugar y por ganar los alumnos se esmerarán en resolver más ecuaciones que los de los demás grupos, y así podemos trabajar las técnicas de resolución hasta ahora presentadas.

El dominó aparece en el anexo I.

#### 4<sup>a</sup> sesión

★ Seguimos practicando con la misma técnica T3.3 pero incrementamos la dificultad. Ahora he de introducir ecuaciones con coeficientes no mónicos en  $\mathbb{Q}$ . Lo hacemos de nuevo a partir de un problema, de manera que puedan ir deduciendo poco a

poco el planteamiento de la ecuación. El campo de problemas PE2-PT4 tiene varios que nos pueden servir:

*Dividiendo un número entre 3, se obtiene el mismo resultado que restándole 16 ¿de qué número se trata?*

De nuevo les dejamos pensar primero a ellos. Primero que planteen la ecuación (técnica T1), y una vez que tienen la balanza equilibrada y saben lo que hay en los platillos, que piensen cómo pueden manteniendo el equilibrio, dejar la  $x$  sola en uno de los platillos. Tras la puesta en común, recopilamos ideas y se las presentamos en orden, para afianzar:

$\frac{x}{3} = x - 16$ $\frac{x}{3} \cdot 3 = (x - 16) \cdot 3$ $x = 3x - 3 \cdot 16$ $x = 3x - 48$ $x + 48 = 3x - 48 + 48$ $x + 48 = 3x$ $x + 48 - x = 3x - x$ $48 = 2x$ $\frac{48}{2} = \frac{2x}{2}$ $24 = x$	<p>Una vez planteada la ecuación, hemos de resolvérsla poco a poco. Aplicamos la trasposición de términos con el operador multiplicativo, es decir, cuando la un miembro está dividido por un número (3), para conseguir que el coeficiente sea 1, hemos de multiplicarlo por ese número (3), y para que la igualdad se mantenga (equilibrio de la balanza) multiplicamos los dos miembros por 3.</p> <p>De esta forma nos desaparece el denominador y ya no tenemos ningún coeficiente racional, tenemos una ecuación con coeficientes no monicos en <math>\mathbb{Z}</math> que ya sabemos resolver.</p>
$\frac{24}{3} = 24 - 16$	<p>Sustituyo el valor hallado en la ecuación y compruebo que se cumple la igualdad.</p>

Aumentamos un poco el grado de dificultad introduciendo un problema del mismo campo PE2-PT4 en el que haya más de 1 coeficiente racional de manera que tengamos que buscar denominador común para poder resolver la ecuación:

*Calcula un número sabiendo que dicho número más su mitad, más su tercera parte es igual a 22.*

$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 22$ $mcm(2,3) = 6$ $\frac{6x}{6} + \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = 22$ $\frac{6x + 3x + 2x}{6} = 22$ $\frac{11x}{6} = 22$ $\frac{11x}{6} \cdot 6 = 22 \cdot 6$ $11x = 22 \cdot 6$ $\frac{11x}{11} = \frac{22 \cdot 6}{11}$ $x = 2 \cdot 6$ $x = 12$	<p>Planteo la ecuación.</p> <p>Tenemos coeficientes racionales. Recordamos la suma de fracciones, hemos de calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones que queremos sumar. En nuestro caso es 6, escribimos las fracciones que queremos sumar equivalentes con denominador 6, de manera que podemos sumar los numeradores.</p> <p>El denominador, 6, pasa al otro miembro multiplicando. Y si me fijo en la ecuación antes de hacer las operaciones veo que el coeficiente de x que me queda, 11, va a pasar al otro miembro dividiendo y se podrá simplificar con el 22. De esta manera me ahorro operar. Puedo simplificar la fracción resultante del miembro de la derecha del igual y obtener así fácilmente el resultado.</p>
$12 + \frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 22$	Sustituyo el valor hallado en la ecuación y compruebo que se cumple la igualdad.

Podemos continuar haciendo problemas (de los presentados en el apartado D de esta memoria). Y también podemos introducir de nuevo el juego del dominó, pero esta vez incluyendo ya ecuaciones del campo de problemas PT4. Este dominó aparece en el anexo II.

Actividad → Como broche final a este bloque de problemas podemos plantear resolver el epitafio de la tumba de Diofanto para calcular el número de años que éste vivió.

Actividad → A continuación y por parejas les pedimos que piensen y preparen un problema para que lo resuelva el compañero. Una vez terminado les pedimos que se intercambien los papeles y vuelvan a hacer la misma actividad.

### 5ª sesión

Recopilamos todo lo aprendido. Podemos llamarlo “Procedimiento general para resolución de ecuaciones de primer grado”. Incidimos en que no aplicamos unos pasos metódicos, si no que siempre pensamos en la ecuación como en una balanza, donde cada miembro es un platillo, y que hemos de aplicar operaciones a los dos platillos para

siempre mantener el equilibrio de la balanza (ecuaciones equivalentes) y conseguir dejar la x sola en uno de los platillos (despejar la incógnita):

- Mirar la ecuación para comprobar si se puede simplificar o reducir términos (T2)
- Si los hay, quitar paréntesis o denominadores (el orden dependerá de lo que resulte más sencillo en cada ecuación y también para cada alumno)
- Volver a mirar la ecuación para comprobar si se puede simplificar o reducir términos (T2)
- Transponer términos: a un miembro todas las incógnitas y al otro miembro los números ¿cómo decidir? Lo mejor es que las incógnitas se queden en el miembro donde el coeficiente sea entero positivo, ya que lleva a un menor número de equivocaciones.
- Volver a mirar la ecuación para comprobar si se puede simplificar o reducir términos (T2)
- Despejar la incógnita
- Comprobar el resultado: sustituir el valor obtenido para la incógnita, en la ecuación inicial y comprobar que se cumple la igualdad.

Resolver dudas, hacer más problemas, corregir ejercicios.

#### 6ª sesión

Examen

*Establece la duración temporal aproximada.*

Siendo esta parte del temario, la introducción al álgebra, una parte de las matemáticas que resulta al alumnado poco intuitiva, considero que es preferible introducirla lentamente para que ellos mismos puedan ir deduciéndo poco a poco las construcciones. Es por ello que las 6 sesiones que planteo deberían impartirse en un mínimo de 3 semanas lectivas, lo que supone 12 horas, de las cuales, la última hora está dedicada a la evaluación del proceso de aprendizaje, por lo que el proceso de enseñanza cubriría 11 horas lectivas.

## EVALUACIÓN DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

### H. Sobre la evaluación

*Diseña una prueba escrita de una hora aproximada de duración que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.*

La prueba constará de 10 problemas de manera que estimo que como máximo el alumno ha de invertir 5 minutos en cada problema. Dado el grado de dificultad, en general medio, de los problemas presentados, considero el tiempo suficiente para la resolución total de la prueba escrita.

Incido en la resolución de problemas, ya que la totalidad de esta propuesta didáctica está basada en los mismos.

1. Si al triple de un número le restas 8, obtienes 25. ¿Qué número es?
2. Busca un número cuyo doble más tres unidades sea igual a su triple menos cinco unidades?
3. Calcula el número que se triplica al sumarle 26.
4. Calcula el número que sumado con su anterior y su siguiente dé 114.
5. Hemos sumado 13 a la mitad de un número y hemos obtenido el mismo resultado que restando 11 a su doble ¿De qué número se trata?
6. Si a cierta cantidad le restas su tercera parte y le sumas su quinta parte, obtienes 13 como resultado ¿Cuál es esa cantidad?
7. Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. Entre los tres suman 98 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?
8. Un padre tiene 42 años y su hijo 7 ¿Dentro de cuántos años la edad del hijo será la cuarta parte que la del padre?
9. ¿Cuál es la edad actual de un padre que duplica la de su hijo, y que hace 24 años su edad era 10 veces mayor que la de su hijo?
10. Un rectángulo tiene un perímetro de 16 metros y la base es 3 metros mayor que la altura. Halla su área.

*¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendas evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?*

- i) Traducción del lenguaje normal al lenguaje algebraico
- ii) Simplificar expresiones algebraicas
- iii) Despejar la incógnita

iv) Interpretar el resultado

*¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?*

Para todos los problemas planteados:

*Conocimiento mínimo:* traducción al lenguaje algebraico

*Conocimiento adquirido:* además del conocimiento mínimo

- Concepto de ecuación equivalente: es necesario que los alumnos no reduzcan su aprendizaje de ecuaciones a meras tareas mecánicas, si no que es preciso que tengan claro el concepto de ecuaciones equivalentes, para obtener ecuaciones cada vez más sencillas de resolver.
- Proceso de resolución de la ecuación:
  - a) Diferenciar el cambio del concepto del signo igual de mandato operacional, usado hasta ahora en aritmética, por el concepto algebraico de igual como equilibrio específico (balanza) entre los dos miembros de la ecuación.
  - b) Identificar la relación entre una operación y su inversa. Mayormente los alumnos identifican la resta como la inversa de la suma, pero no ocurre lo mismo a la hora de identificar la suma como la inversa de la resta, ya que operativamente el signo - les plantea dificultades añadidas.
  - c) Aplicar los criterios para operar con fracciones; en ocasiones al encontrarse un denominador los alumnos resuelven la situación prescindiendo del denominador u olvidándose de que para operar fracciones dentro del mismo miembro han de igualar denominadores en primer lugar para todos los términos del miembro.
- Concepto de comprobar la solución de la ecuación, que implica saber qué es una ecuación y qué significa su solución

*Objetivo de la enseñanza del álgebra:* para conseguir un aprendizaje significativo es necesario que el alumno conecte las expresiones algebraicas que se le han enseñado con los conocimientos previos que ya poseía, para poder trasladar los conocimientos aprendidos a otros contextos diferentes de los de partida.

*¿Qué criterios de calificación vas a emplear?*

Los criterios de calificación van a ser homogéneos para todos los problemas, independientemente de su dificultad.

1. Todos los problemas se califican sobre un punto
2. La traducción al lenguaje algebraico, es decir, llegar a plantear la ecuación de manera correcta, 40% del problema

3. La resolución de la ecuación correcta, 40 % del problema
4. Expresar la solución al problema de manera correcta, 20% del problema (es decir, si nos piden una edad, damos el número de años; si nos piden 2 números consecutivos, hemos de dar los dos números)
5. Una vez entregado el examen corregido, se les entrega a los alumnos una nueva tarea. Sobre los problemas erróneos a todos aquellos que reflexionen sobre sus fallos y entreguen en un escrito a parte, explicando dónde han fallado y por qué, y al mismo tiempo solucionen el problema de manera correcta, se les subiría un punto sobre la calificación final del examen. Más importante que hacer algo es reflexionar sobre lo que has hecho.

## BIBLIOGRAFIA

GRUPO AZARQUIEL (1991) Ideas y actividades para enseñar álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid. Editorial Síntesis

Mª A CARRASCO, R MARTIN, JM OCAÑA. Propuesta didáctica 2º ESO Matemáticas. Madrid. Editorial Edelvives

M ALVAREZ y otros. Miríada XXI, Matemáticas 2. Madrid. Editorial Mc Graw Hill

*Páginas web consultadas:*

Taller de matemáticas para 2º ESO del profesor Mauricio Contreras. Ecuaciones. En [http://www.mauriciocontreras.es/TALLER%20DE%20MATEMATICAS\\_archivos/TALLER%202%20TEMA%203.pdf](http://www.mauriciocontreras.es/TALLER%20DE%20MATEMATICAS_archivos/TALLER%202%20TEMA%203.pdf)

Sociedad andaluza de educación matemáticas Thales. Recursos didácticos para matemáticas. Ecuaciones de primer grado.

<http://thales.cica.es/files/glinex/practicas-glinex05/matematicas/ecuaciones/practica.pdf>

Xarxa telemática educativa de Catalunya. Recursos. Matematiques per a l'ESO. Equations. [http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas\\_cat/2quincena6/index\\_2\\_6.htm](http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas_cat/2quincena6/index_2_6.htm)

**ANEXO I – Dominó campos PT1, PT2 y PT3**

$2 \bullet x + 3 = 5$	$-2 \bullet x + 4 = 2$	$-4 \bullet x - 3 = 0$
$x + 5 = 1 \bullet x + 4 = 6$	$-2 \bullet x - 2 = 2$	$4 \bullet x - 2 = 2$
$4 \bullet 2x = 4$	$-2x = 4 \bullet x + 5 = 10$	$5 \bullet 3x = 15$
$-2 \bullet x + 2 = 4$	$-2 \bullet 2x = 6$	$4 \bullet x + 4 = 9$
$2 \bullet x + 5 = 10$	$3 \bullet x + 2 = 2$	$-4 \bullet x - 3 = 1$
$-3 \bullet 3x - 1 = 1$	$-2 \bullet x - 2 = 2$	$-4 \bullet x + 4 = 8$
$3x = 9 \bullet 4x = 8$	$5x = -10 \bullet x + 2 = 2$	$-4 \bullet 2x = 10$
$5 \bullet 3x = 9$	$5 \bullet x + 2 = -1$	$-3 \bullet 3x = 9$
$3 \bullet -7 + x = 11$		
$-3 \bullet x + 9 = 13$		
$-3 \bullet x + 2 = 5$		
$5x = 15 \bullet x - 3 = 0$		

**ANEXO II – Dominó campos PT4**

$$7 \quad | \quad 2x - 1 = 1$$

$$\frac{2}{3} \quad | \quad \frac{x+1}{6} - \frac{x+3}{4} = -1$$

$$5 \quad | \quad 8 - 5x = 8 + 2x$$

$$1 - 2(2x - 1) = 5x - 5(5 - 3x) \quad | \quad 2$$

$$\frac{x+5}{2} = \frac{2x+3}{3} \quad | \quad 0$$

$$-2 \quad | \quad \frac{x-2}{4} - \frac{3x-1}{8} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{-3}{5} \quad | \quad \frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$$

$$4(x-10) = -6(2-x) - 6x \quad | \quad 7$$

$$1 \quad | \quad x - 7 = 6 - (x - 3)$$

$$x + 3 = 5x + 11 \quad | \quad 9$$

$$1 - (3x - 9) = 5x - 4x + 2 \quad | \quad 1/2$$

$$8 \quad | \quad 7x - 15 = 1 - (7x + 9)$$