

Anexos

Anexos A

Desarrollo del modelo matemático

A.1. Ecuaciones bicapa en aguas poco profundas

En la Figura A.1 adjunta se muestra el esquema del flujo bicapa. Para la obtención de las expresiones utilizadas para el cálculo numérico se toman de partida las ecuaciones de conservación de la masa y la cantidad de movimiento en 2D en el plano vertical (direcciones x y z) promediadas en el tiempo:

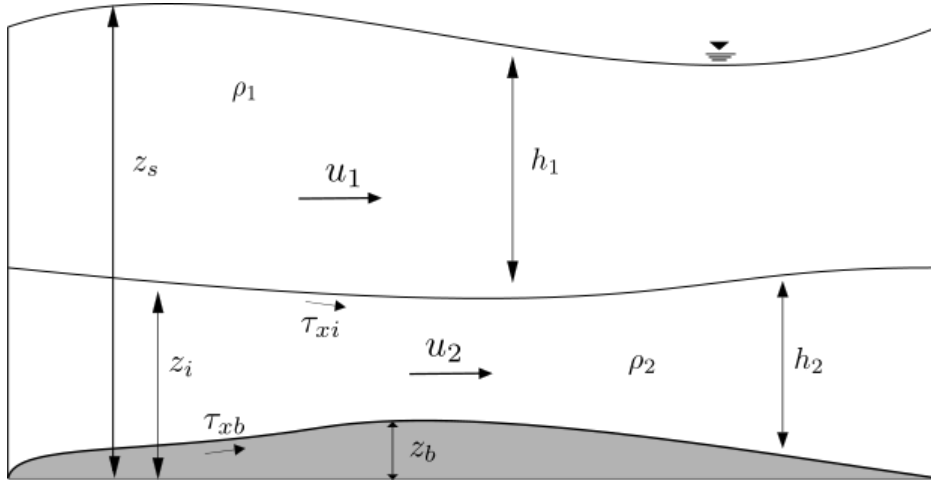


Fig. A.1: Esquema del flujo bicapa.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x \rho) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z \rho) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial x}(u_x \rho u_x) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z \rho u_x) &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_z) + \frac{\partial}{\partial x}(u_x \rho u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z \rho u_z) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde ρ es la densidad, u_i y F_i la velocidad y las fuerza volumétrica en la componente i , p la presión, t el tiempo y τ_{ij} las componentes del tensor de los esfuerzos viscosos τ .

A.1.1. Capa superior

Las condiciones cinemáticas de contorno para la capa superior (capa 1), considerando que en la superficie $z_s = z_s(t, x)$ y en la interfaz $z_i = z_i(t, x)$ se pueden expresar como:

$$u_{zs} = \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial z_s}{\partial x} u_{xs} \quad (\text{A.2})$$

$$u_{zi} = \frac{\partial z_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial x} u_{xi} \quad (\text{A.3})$$

Ecuación de conservación de la masa

La ecuación de la masa se integra a lo largo de la columna de agua $z_i \leq z \leq z_s$:

$$\int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dz + \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial (u_{x1} \rho_1)}{\partial x} dz + \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial (u_{z1} \rho_1)}{\partial z} dz = 0 \quad (\text{A.4})$$

Aplicando la regla de Leibniz a cada uno de los términos de la ecuación A.4 tomando la densidad ρ_1 como constante a lo largo de la columna:

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_i}^{z_s} \rho_1 dz + \rho_1 \frac{\partial z_i}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial z_s}{\partial t} \\ \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial (u_{x1} \rho_1)}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_i}^{z_s} u_{x1} \rho_1 dz + \rho_1 u_{xi} \frac{\partial z_i}{\partial x} - \rho_1 u_{xs} \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial (u_{z1} \rho_1)}{\partial z} dz &= u_{zs} \rho_1 - u_{zi} \rho_1 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Sumando, agrupando los términos (A.5) y aplicando las condiciones (A.2) y (A.3), queda:

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(-\frac{\partial z_s}{\partial t} - u_{xs} \frac{\partial z_s}{\partial x} + u_{zs} \right) + \rho_1 \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} + u_{xi} \frac{\partial z_i}{\partial x} - u_{zi} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_i}^{z_s} \rho_1 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_i}^{z_s} u_{x1} \rho_1 dz = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Definiendo la media en la vertical de una variable ϕ como:

$$\bar{\phi}_1 = \frac{1}{h} \int_{z_i}^{z_s} \phi_1 dz \quad (\text{A.7})$$

Aplicando (A.7) a (A.6) y despejando ρ_1 , se puede reformular la ecuación de conservación de la masa con los términos promediados:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial (h_1 \bar{u}_{x1})}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

En la componente z de (2.1) se desprecian los efectos derivados de las aceleraciones $\frac{\partial(\rho_1 u_{z1})}{\partial t} = \frac{\partial(u_{x1}\rho_1 u_{z1})}{\partial x} = \frac{\partial(u_{z1}\rho_1 u_{z1})}{\partial z} = 0$ así como los esfuerzos $\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} = \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} = 0$. Las fuerzas volumétricas F_x y F_z se consideran:

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_z &= -\rho_1 g \end{aligned} \tag{A.9}$$

Por tanto la componente z se simplifica a la ecuación de la presión hidrostática:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial z} &= -\rho_1 g \\ p_1(z) &= p_a + \rho_1 g(z_s - z) \end{aligned} \tag{A.10}$$

donde la presión atmosférica de referencia se toma nula $p_a = 0$. Planteando la derivada de la presión respecto de x :

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \rho_1 g \frac{\partial z_s}{\partial x} \tag{A.11}$$

La componente x de la ecuación de la cantidad de movimiento de 2.1 se integra en la columna $z_i \leq z \leq z_s$:

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial(\rho_1 u_{x1})}{\partial t} dz + \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial(u_{x1}\rho_1 u_{x1})}{\partial x} dz + \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial(u_{z1}\rho_1 u_{z1})}{\partial z} dz = \\ \int_{z_i}^{z_s} \rho_1 g \frac{\partial z_s}{\partial x} dz + \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial\tau_{xx1}}{\partial x} dz + \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial\tau_{xz1}}{\partial z} dz \end{aligned} \tag{A.12}$$

Aplicando nuevamente la regla de Leibnitz a los términos de A.12:

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial(u_{x1}\rho_1)}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_i}^{z_s} u_{x1}\rho_1 dz + u_{xi}\rho_1 \frac{\partial z_i}{\partial t} - u_{xs}\rho_1 \frac{\partial z_s}{\partial t} \\ \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial(u_{x1}\rho_1 u_{x1})}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_i}^{z_s} u_{x1}\rho_1 u_{x1} dz + u_{xi}\rho_1 u_{xi} \frac{\partial z_i}{\partial t} - u_{xs}\rho_1 u_{xs} \frac{\partial z_s}{\partial t} \\ \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial(u_{z1}\rho_1 u_{z1})}{\partial z} dz &= u_{zs}\rho_1 u_{zs} - u_{zi}\rho_1 u_{zi} \\ \int_{z_i}^{z_s} \rho_1 g \frac{\partial z_s}{\partial x} dz &= \rho_1 g h_1 \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial\tau_{xx1}}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_i}^{z_s} \tau_{xx1} dz + \tau_{xxi} \frac{\partial z_i}{\partial x} - \tau_{xxs} \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ \int_{z_i}^{z_s} \frac{\partial\tau_{xz1}}{\partial z} dz &= \tau_{xzs} - \tau_{xzi} \end{aligned} \tag{A.13}$$

Sumando, considerando los esfuerzos en la superficie libre derivados del viento como despreciable $\tau_{xzs} = \tau_{xxs} = 0$, agrupando los términos de (A.13) y aplicando las condiciones

de (A.2) y (A.3), queda:

$$\begin{aligned}
 & \cancel{\rho_1 u_{xs} \left(-\frac{\partial z_s}{\partial t} - u_{xs} \frac{\partial z_s}{\partial x} + u_{zs} \right)} + \cancel{\rho_1 u_{xi} \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} + u_{xi} \frac{\partial z_i}{\partial x} - u_{zi} \right)} \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_i}^{z_s} u_{x1} \rho_1 dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_i}^{z_s} u_{x1} \rho_1 u_{x1} dz = \rho_1 g h_1 \frac{\partial z_s}{\partial x} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_i}^{z_s} \tau_{xx1} dz + \tau_{xxi} \frac{\partial z_i}{\partial x} - \tau_{xzi}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Se reformulan las expresiones integrales de (A.14) con la definición de la media establecida en (A.7) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_i}^{z_s} u_{x1} \rho_1 dz = \rho_1 \frac{\partial (h_1 \bar{u}_{x1})}{\partial t} \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_i}^{z_s} u_{x1} \rho_1 u_{x1} dz = \frac{\partial}{\partial x} [h_1 (\rho_1 \bar{u}_{x1}^2 + \rho_1 \int_{z_i}^{z_s} (u_{x1} - \bar{u}_{x1})^2 dz)] \\
 & = \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 \bar{u}_{x1}^2) - \frac{\partial}{\partial x} (h_1 D_{xx}) \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_i}^{z_s} \tau_{xx1} dz = \frac{\partial}{\partial x} (h_1 T_{xx}) \\
 & \tau_{xzi} - \tau_{xxi} \frac{\partial z_i}{\partial x} = \tau_{xi}
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

donde los términos asociados a la dispersión $D_{xx} = 0$ y a la turbulencia $T_{xx} = 0$ se desprecian y τ_{xi} representa a los esfuerzos en la interfaz entre los dos fluidos en la dirección x . Se reordenan los términos asociados a la presión aplicando que $z_s = z_i + h_1$:

$$\rho_1 g h_1 \frac{\partial z_s}{\partial x} = \rho_1 g h_1 \frac{\partial (z_i + h_1)}{\partial x} = \rho_1 g h_1 \frac{\partial z_i}{\partial x} + \rho_1 g \frac{1}{2} \frac{\partial (h_1^2)}{\partial x} \tag{A.16}$$

Además se puede expresar $z_i = z_b + h_2$. Resultando entonces la expresión de la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento horizontal promediada en la vertical:

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \frac{\partial (h_1 \bar{u}_{x1})}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 \bar{u}_{x1}^2) = -\rho_1 g h_1 \frac{\partial z_i}{\partial x} - \rho_1 g \frac{1}{2} \frac{\partial (h_1^2)}{\partial x} - \tau_{xi} \Rightarrow \\
 & \frac{\partial (h_1 \bar{u}_{x1})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 \bar{u}_{x1}^2 + g \frac{1}{2} h_1^2) = -g h_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} - g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\tau_{xi}}{\rho_1}
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

A.1.2. Capa inferior

El cálculo de la capa inferior (capa 2) es para la ecuación de la conservación de la masa idéntico al procedimiento seguido para la capa superior, considerando la condición de no deslizamiento en el fondo:

$$u_{zb} = \frac{\partial z_b}{\partial x} u_{xb} = 0 \tag{A.18}$$

En la conservación de la cantidad de movimiento las diferencias se registran en los esfuerzos (en la superficie superior, la interfaz, son τ_{xi} y no despreciables, mientras que en contacto con el lecho fijo se tiene τ_{xb}) y en la distribución de la presión:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_2}{\partial z} &= -\rho_2 g \\ p_2(z) &= p_i + \rho_2 g(z_i - z)\end{aligned}\tag{A.19}$$

donde la presión en la interfaz viene dada por la columna de agua de la capa 1 $p_i = \rho_1 g h_1$, es decir que:

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \rho_2 g \frac{\partial z_i}{\partial x} + \rho_1 g \frac{\partial h_1}{\partial x}\tag{A.20}$$

Resultando entonces la expresión de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento promediada en la vertical para la capa inferior:

$$\frac{\partial(h_2 \bar{u}_{x2})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 \bar{u}_{x2}^2 + g \frac{1}{2} h_2^2) = -g h_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\rho_1}{\rho_2} g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\tau_{xi}}{\rho_2} - \frac{\tau_{xb}}{\rho_2}\tag{A.21}$$

A.1.3. Formulación del sistema

Agrupando las ecuaciones obtenidas en A.1, por simplicidad se obvia la nomenclatura del promedio $\bar{\phi}_i$, se obtiene el siguiente sistema en derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1^2 + g \frac{1}{2} h_1^2) &= -g h_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} - g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2^2 + g \frac{1}{2} h_2^2) &= -g h_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\rho_1}{\rho_2} g h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} - \frac{\tau_{xb}}{\rho_1}\end{aligned}\tag{A.22}$$

El sistema (A.22) se puede reformular agrupando los términos vectorialmente. Por un lado en el vector \mathbf{U} , llamado de variables conservadas, las derivadas temporales y por otro en los vectores \mathbf{F} y \mathbf{S} , llamados respectivamente de flujos y de términos fuente, las restantes derivadas espaciales y los términos de rozamiento. La decisión de que términos pasan a formar parte de los vectores \mathbf{F} y \mathbf{S} no es aleatoria y responde a la necesidad de separar los términos conservativos (en \mathbf{F} , aquellos que se mantienen con la aparición de discontinuidades y cambios de régimen) de aquellos que no lo son, como es el caso de los que aparecen en \mathbf{S} . Aplicando lo enunciado se obtiene la siguiente formulación vectorial:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}\tag{A.23}$$

Con:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_1 u_1 \\ h_2 \\ h_2 u_2 \end{pmatrix} & \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} h_1 u_1 \\ h_1 u_1^2 + g \frac{1}{2} h_1^2 \\ h_2 u_2 \\ h_2 u_2^2 + g \frac{1}{2} h_2^2 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} - gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} \\ 0 \\ -gh_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\rho_1}{\rho_2} gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\tau_{xi}}{\rho_2} - \frac{\tau_{xb}}{\rho_2} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

donde los términos $gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x}$, $\frac{\tau_{xi}}{\rho_1}$, $\frac{\rho_1}{\rho_2} g \frac{\partial h_1}{\partial x}$, $\frac{\tau_{xi}}{\rho_2}$ son los denominados de acoplamiento, que no aparecen en la formulación habitual de las ecuaciones de aguas poco profundas o flujo superficial (*Shallow water*) en 1D.

Aplicando la regla de la cadena a (A.23) y sustituyendo por la definición del jacobiano $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$ se obtiene un sistema cuasi-lineal de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S} \tag{A.25}$$

Cuando \mathbf{J} tiene m valores y vectores propios reales se dice que el sistema es hiperbólico, en tal caso \mathbf{J} es diagonalizable

A.2. El acoplamiento en la formulación del problema bicapa

En el paso del sistema de ecuaciones en derivadas parciales a un sistema hiperbólico, desarrollado en el apartado 2.1 es fundamental el manejo adecuado del vector fuente \mathbf{S} y en concreto de los términos vinculados al acoplamiento entre capas. Reflexionando sobre las posibles estrategias a seguir, aparecen tres caminos distintos en lo que a su integración (nula, parcial o total) en el vector de flujos \mathbf{F} refiere:

- La formulación **acoplada**, esto es integrando los términos asociados al acoplamiento entre capas en el vector de flujos \mathbf{F} . La matriz jacobiana que se obtiene \mathbf{J} tiene un polinomio característico sin solución analítica, lo que plantea dificultades desde el punto de vista de la conservación de la hiperbolicidad del sistema y lógicamente, de su estricta resolución. Para corregirlo se han planteado la resolución numérica de los valores propios [40] o aproximada a través del análisis de raíces [8] [9] [10] [12] [33] [11].
- La formulación **pseudo-acoplada**, añadiendo al flujo \mathbf{F} exclusivamente la componente asociada a la presión de la capa superior sobre la inferior $\frac{\rho_1}{\rho_2} g \frac{\partial h_1}{\partial x}$, que es la que distingue a un monocapa de un bicapa, siendo en ambos casos el término asociado al fondo (ya

sea interfaz o lecho fijo) un elemento común. Se obtiene de este modo una jacobiana \mathbf{J} con solución analítica, pero con vectores propios \mathbf{e} susceptibles de que se produzcan indeterminaciones al anularse su denominador.

- La formulación **desacoplada**, es la más simple entre los expuestos y que guarda mayor similitud con la formulación habitual monocapa 1D de las aguas poco profundas. Dado que el objetivo es utilizar un esquema fiable, sencillo y robusto desde el punto de vista de la implementación, se ha elegido esta opción para continuar con el desarrollo del modelo bicapa.

En los siguientes apartados se muestra el desarrollo y resultados que se obtienen de plantear la formulación acoplada, pseudo-acoplada y desacoplada del problema bicapa.

A.2.1. Formulación acoplada

En este caso se descomponen los términos fuente en dos submatrices \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 para integrar los términos de acoplamiento en el cálculo de la jacobiana, denominada ahora pseudo-jacobiana \mathbf{J}^* .

La formulación vectorial es:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \quad (\text{A.26})$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_1 u_1 \\ h_2 \\ h_2 u_2 \end{pmatrix} & \mathbf{S}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} \\ 0 \\ -gh_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\tau_{xi}}{\rho_2} - \frac{\tau_{xb}}{\rho_2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} h_1 u_1 \\ h_1 u_1^2 + g \frac{1}{2} h_1^2 \\ h_2 u_2 \\ h_2 u_2^2 + g \frac{1}{2} h_2^2 \end{pmatrix} & \mathbf{S}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} \\ 0 \\ -\frac{\rho_1}{\rho_2} gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Se descompone el vector \mathbf{S}_2 :

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \quad (\text{A.28})$$

donde:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -gh_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_1}{\rho_2} gh_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

La matriz Jacobiana, denotada \mathbf{J} , se define analíticamente como:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Queda entonces el sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}_1 \quad (\text{A.31})$$

La pseudo-jacobiana \mathbf{J}^* :

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & c_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\rho_1}{\rho_2} c_2^2 & 0 & c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Esta matriz \mathbf{J}^* sin embargo no tiene ni valores propios ni vectores propios con expresión analítica.

A.2.2. Formulación pseudo-acoplada

En este caso se descomponen los términos fuente en dos submatrices \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 diferentes para únicamente la componente de la columna de la capa superior sobre la inferior en el cálculo de la jacobiana, denominada ahora pseudo-jacobiana \mathbf{J}^* .

La formulación vectorial es:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \quad (\text{A.33})$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_1 u_1 \\ h_2 \\ h_2 u_2 \end{pmatrix} & \mathbf{S}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} - gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} \\ 0 \\ -gh_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\tau_{xi}}{\rho_2} - \frac{\tau_{xb}}{\rho_2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} h_1 u_1 \\ h_1 u_1^2 + g \frac{1}{2} h_1^2 \\ h_2 u_2 \\ h_2 u_2^2 + g \frac{1}{2} h_2^2 \end{pmatrix} & \mathbf{S}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\rho_1}{\rho_2} gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Se decompone el vector \mathbf{S}_2 :

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \quad (\text{A.35})$$

donde:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_1}{\rho_2}gh_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

La matriz Jacobiana, denotada \mathbf{J} , se define nuevamente analíticamente como:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Queda entonces el sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \quad (\text{A.38})$$

La pseudo-jacobiana \mathbf{J}^* :

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ rc_2^2 & 0 & c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

donde el cociente de densidades es $r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$. En este caso y a diferencia del anterior ,donde la jacobiana no tenía solución , existe solución analítica para los valores y los vectores propios. Para los valores propios:

$$\lambda_I = u_1 - c_1 \quad \lambda_{II} = u_1 + c_1 \quad \lambda_{III} = u_2 - c_2 \quad \lambda_{IV} = u_2 + c_2 \quad (\text{A.40})$$

Los vectores propios:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_I &= \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 - c_1 \\ \frac{rc_2^2}{(u_2^2 - c_2^2) + 2u_2(c_1 - u_1) + (u_1 - c_1)^2} \\ \frac{rc_2^2(u_1 - c_1)}{(u_2^2 - c_2^2) + 2u_2(c_1 - u_1) + (u_1 - c_1)^2} \end{pmatrix} & \mathbf{e}_{III} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ u_2 - c_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_{II} &= \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 + c_1 \\ \frac{rc_2^2}{(u_2^2 - c_2^2) + 2u_2(c_1 - u_1) + (u_1 - c_1)^2} \\ \frac{rc_2^2(u_1 + c_1)}{(u_2^2 - c_2^2) - 2u_2(c_1 + u_1) + (u_1 + c_1)^2} \end{pmatrix} & \mathbf{e}_{IV} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ u_2 + c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Se evidencia que los vectores propios tienen denominadores susceptibles de anularse, y que por tanto aparezca una indeterminación, dificultando el uso en la práctica de esta formulación.

A.2.3. Formulación desacoplada

La última formulación posible es la desacoplada donde todos los términos de acoplamiento siguen formando parte del vector de términos fuente. La formulación vectorial es:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (\text{A.42})$$

donde:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_1 u_1 \\ h_2 \\ h_2 u_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} h_1 u_1 \\ h_1 u_1^2 + g \frac{1}{2} h_1^2 \\ h_2 u_2 \\ h_2 u_2^2 + g \frac{1}{2} h_2^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} - gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} \\ 0 \\ -gh_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\rho_1}{\rho_2} gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\tau_{xi}}{\rho_2} - \frac{\tau_{xb}}{\rho_2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.43})$$

La matriz Jacobiana, denotada \mathbf{J} , se define nuevamente analíticamente como:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Los valores propios de la matriz jacobiana \mathbf{J} existen y son reales:

$$\lambda_I = u_1 - c_1 \quad \lambda_{II} = u_1 + c_1 \quad \lambda_{III} = u_2 - c_2 \quad \lambda_{IV} = u_2 + c_2 \quad (\text{A.45})$$

Los vectores propios:

$$\mathbf{e}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 - c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_{III} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ u_2 - c_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 + c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_{IV} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ u_2 + c_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

Las expresiones de los valores λ_i y vectores propios \mathbf{e}_i son las mismas que se obtienen para la formulación monocapa de las ecuaciones en aguas poco profundas y a diferencia de los dos casos anteriores están siempre definidas desde el punto de vista matemático.

Anexos B

Desarrollos del esquema numérico

B.1. Reconstrucción hidrostática en FORCE

Los esquemas numéricos son diseñados para leyes de conservación (sistemas homogéneos sin términos fuente) y por tanto no son necesariamente equilibrados, esto es que no respetan el balance entre flujos y términos fuente en los estados de equilibrio, produciéndose una perturbación de dichos estados en forma de errores proporcionales al de truncación [42]. Los esquemas *well-balanced* [44], o correctamente equilibrados son aquellos que toleran una versión discreta del balance flujos-términos fuente y que, como consecuencia de ello, son capaces de cumplir con una serie de estados de equilibrio. En el campo de *shallow water* es habitual el caso particular del tipo *lake at rest* donde para un fondo de geometría aleatoria la lámina de agua se deba mantener constante y en reposo [27].

El método aquí propuesto aplica el concepto de la reconstrucción hidrostática [25] particularizado al método FORCE por [45]. Se formular el término fuente promediado en la celda como la versión discreta del gradiente del flujo de momento hidrostático para lograr que $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^* - \Delta x \mathbf{S}_i^* = 0$,

Mientras que en el caso de la capa superior la aplicación es casi directa dado que la definición de la *superficie libre* es clara, en el caso de la capa inferior es necesario reflexionar sobre el significado de este concepto y la influencia que tiene en el momento de equilibrar el cálculo.

Desde el punto de vista más general, como el aquí expuesto, el modelo bicapa debería ser capaz de mantener el equilibrio en un caso con relación de densidades unitaria $r = 1$ con una interfaz arbitraria (situación correspondiente al caso test simulado en 3.2.1), como el mostrado en la Figura B.1.

B.1.1. Capa superior

En las ecuaciones mostradas en (2.21) el vector de variables conservadas se ha definido a ambos lados de la pared $i + \frac{1}{2}$ como \mathbf{U}^- y \mathbf{U}^+ , vectores transformados de los originales \mathbf{U}_i

y \mathbf{U}_{i+1} , cuyas primera componente son $h_{1,i+\frac{1}{2}}^-$ y $h_{1,i+\frac{1}{2}}^+$ respectivamente:

$$\begin{aligned} h_{1,i+\frac{1}{2}}^- &= \eta_{1,i} - z_{1,i+\frac{1}{2}} \\ h_{1,i+\frac{1}{2}}^+ &= \eta_{1,i+1} - z_{1,i+\frac{1}{2}} \\ \eta_{1,i} &= h_{1,i} + h_{2,i} + z_{b,i} \\ \eta_{1,i+1} &= h_{1,i+1} + h_{2,i+1} + z_{b,i+1} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

donde $\eta_{1,i}$ y $\eta_{1,i+1}$ son valores de la superficie libre a ambos lados de la pared $i + \frac{1}{2}$, con $z_{1,i+\frac{1}{2}}$ la media de los valores de la interfaz :

$$z_{1,i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [(h_{2,i} + z_{b,i}) + (h_{2,i+1} + z_{b,i+1})] \quad (\text{B.2})$$

Por su parte, los términos de los vectores de variables conservadas asociados a la velocidad :

$$\begin{aligned} (hu)_1^- &= (hu)_{1,i} \\ (hu)_1^+ &= (hu)_{1,i+1} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En condiciones de equilibrio hidrostático $(hu)_1 = 0$, *lake at rest* la superficie libre es uniforme (constante en todo el dominio) a ambos lados de las paredes de todas las celdas $\eta_{1,i} = \eta_{1,i+1}$. Resulta inmediato que en este caso, que en cada pared los *calados transformados* a ambos lados son los mismos $h_{1,i+\frac{1}{2}}^{+-}$ y $h_{1,i-\frac{1}{2}}^{+-}$:

$$\begin{aligned} h_{1,i+\frac{1}{2}}^{+-} &= \eta_{1,i} - z_{1,i+\frac{1}{2}} = \eta_{1,i+1} - z_{1,i+\frac{1}{2}} \\ h_{1,i-\frac{1}{2}}^{+-} &= \eta_{1,i} - z_{1,i-\frac{1}{2}} = \eta_{1,i-1} - z_{1,i-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Aplicando y sustituyendo en la definición de los flujos mostrada en (2.21), se obtiene la siguiente expresión del momento del flujo hidrostático, para la capa superior, en la celda i :

$$\mathbf{F}_{1,i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{1,i-\frac{1}{2}}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g [(h_{1,i+\frac{1}{2}}^{+-})^2 - (h_{1,i-\frac{1}{2}}^{+-})^2] \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Para que el sistema quede en equilibrio es necesario que el vector de flujos discretizado cumpla con la igualdad $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^* - \Delta x \mathbf{S}_i^* = 0$. Para ello:

$$\begin{aligned} h_{i,1}^* &= \frac{1}{2}(h_{1,i+\frac{1}{2}}^{+-} + h_{1,i-\frac{1}{2}}^{+-}) \\ \Delta z_{i,1} &= h_{1,i+\frac{1}{2}}^{+-} - h_{1,i-\frac{1}{2}}^{+-} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Se demuestra que se puede definir $\Delta z_{1,i}$ de forma equivalente como:

$$\Delta z_{1,i} = z_{1,i+\frac{1}{2}} - z_{1,i-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.7})$$

Conviene recordar que en condiciones de reposo, con $(hu)_i = 0$, los términos asociados al rozamiento son nulos (2.11) y (2.12).

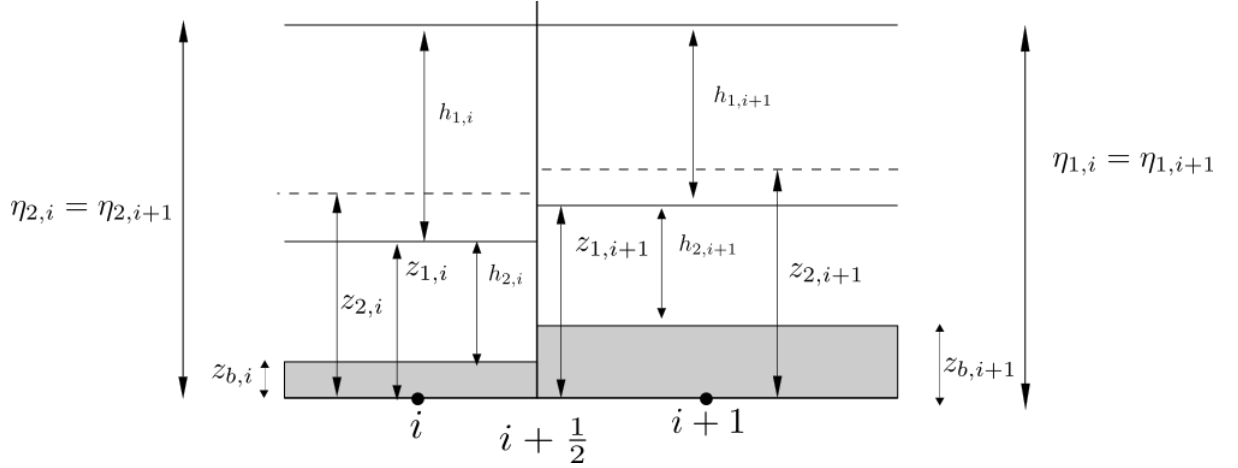


Fig. B.1: Esquema del estado hidrostático en el caso $r = 1$.

B.1.2. Capa inferior

El procedimiento seguido para la capa superior se repite para la capa inferior. Las componentes de los vectores \mathbf{U}^- y \mathbf{U}^+ de la capa inferior en la pared $i + \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} h_{2,i+\frac{1}{2}}^- &= \eta_{2,i} - z_{2,i+\frac{1}{2}} \\ h_{2,i+\frac{1}{2}}^+ &= \eta_{2,i+1} - z_{2,i+\frac{1}{2}} \\ \eta_{2,i} &= h_{2,i} + \frac{\rho_1}{\rho_2} h_{1,i} + z_{b,i} \\ \eta_{2,i+1} &= h_{2,i+1} + \frac{\rho_1}{\rho_2} h_{1,i+1} + z_{b,i+1} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde $\eta_{2,i}$ y $\eta_{2,i+1}$ son los valores de la *pseudo-superficie libre* a ambos lados de la pared $i + \frac{1}{2}$, con $z_{2,i+\frac{1}{2}}$ la media de los valores de la *pseudo-interfaz*. La diferencia importante en este caso es que para el equilibrio de los flujos es necesario que se incluya en la definición del término de pendiente el acoplamiento entre capas asociado al intercambio de momento $\frac{\rho_1}{\rho_2} h_{1,i}$:

$$z_{2,i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} h_{1,i} + z_{b,i} \right) + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} h_{1,i+1} + z_{b,i+1} \right) \right]. \quad (\text{B.9})$$

Por su parte los términos asociados a la velocidad son:

$$\begin{aligned}(hu)_{2,-} &= (hu)_{2,i} \\ (hu)_{2,+} &= (hu)_{2,i+1}\end{aligned}\tag{B.10}$$

De nuevo en condiciones de equilibrio estático $(hu)_2 = 0$ donde la superficie libre es constante a ambos lados de las paredes de una celda. El sistema debe quedar en reposo de manera que $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^* - \Delta x \mathbf{S}_i^* = 0$. Se comprueba que en cada pared los calados a ambos lados son los mismos $h_{2,i+\frac{1}{2}}^{+-}$ y $h_{2,i-\frac{1}{2}}^{+-}$, por tanto la diferencia de flujos en la capa superior:

$$\mathbf{F}_{2,i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{2,i-\frac{1}{2}}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g \left[(h_{2,i+\frac{1}{2}}^{+-})^2 - (h_{2,i-\frac{1}{2}}^{+-})^2 \right] \end{pmatrix}\tag{B.11}$$

Los valores $h_{2,i}^*$ y $\Delta z_{2,i}$ del vector de términos fuente \mathbf{S}_i^* se definen en consecuencia:

$$\begin{aligned}h_{2,1}^* &= \frac{1}{2}(h_{2,i+\frac{1}{2}}^{+-} + h_{2,i-\frac{1}{2}}^{+-}) \\ \Delta z_{2,i} &= h_{2,i-\frac{1}{2}}^{+-} - h_{2,i+\frac{1}{2}}^{+-}\end{aligned}\tag{B.12}$$

Se demuestra que se puede definir $\Delta z_{2,i}$ de forma equivalente como:

$$\Delta z_{2,i} = z_{2,i+\frac{1}{2}} - z_{2,i-\frac{1}{2}}\tag{B.13}$$

B.2. Problema de Riemann

En este apartado se muestran brevemente los principios que se encuentran tras los esquemas numéricos basados en resolver el Problema de Riemann, en el caso de este trabajo el *solver* empleado de esta familia de métodos es el de Roe.

El problema de Riemann es un PVI (Problema de Valor Inicial), cuya condición de partida es una discontinuidad.

Las discontinuidades, al igual que la discretización son aspectos inherentes a cualquier método numérico. En el caso de problemas hidrodinámicos es además de vital importancia, ya que permite reproducir fenómenos como ondas de choque y rarefacción, que se propagan a través de las llamadas rectas características.

Planteado el problema de Riemann para una ecuación lineal advectiva:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \quad -\infty < x < \infty \\ w(x, 0) &= \begin{cases} w_L & \text{si } x \leq 0 \\ w_R & \text{si } x \geq 0 \end{cases}\end{aligned}\tag{B.14}$$

La discontinuidad se transporta a través de la curva característica, de manera que divide el espacio x en dos estados, w_L y w_R a su izquierda $x - \lambda t \leq 0$ y derecha $x - \lambda t \geq 0$, como se muestra en la Figura B.2. Para un instante de tiempo t , la solución queda:

$$w(x, t) = \begin{cases} w_L & \text{si } x - \lambda t \leq 0 \\ w_R & \text{si } x - \lambda t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

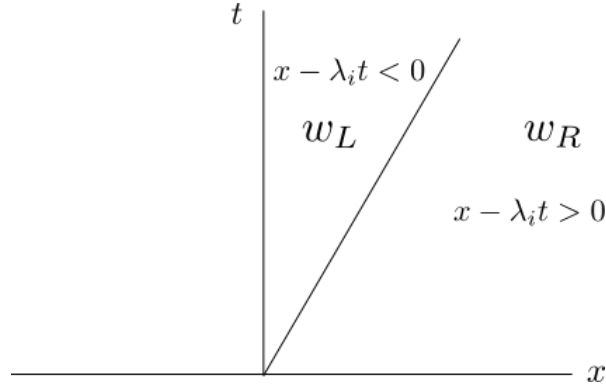


Fig. B.2: Solución del problema de Riemann para la ecuación lineal advectiva con $x_0 = 0$ y discontinuidad formada por los estados w_L y w_R .

El resultado es inmediatamente extensible a la versión homogénea del sistema (A.25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} &= 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbf{U}_R & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

La solución al problema da lugar a un espacio formando por n estados separados por los valores propios λ_i de la matriz (\mathbf{J}). Se pueden escribir los estados iniciales (y la diferencia entre ellos) como combinación lineal de los vectores propios de (\mathbf{J}) e_i :

$$\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k \quad (\text{B.17})$$

Resulta de interés en estado comprendido en la región entre las ondas $\mathbf{U}^*(0, t)$, mostrado en la Figura B.3, que puede expresarse como función de los saltos entre sucesivos estados intermedios y alguno de los estados iniciales en los extremos [39]:

$$\mathbf{U}^* = \begin{cases} \mathbf{U}_L + \sum_{\lambda_k < 0} \alpha_k e_k \\ \mathbf{U}_R - \sum_{\lambda_k > 0} \alpha_k e_k \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

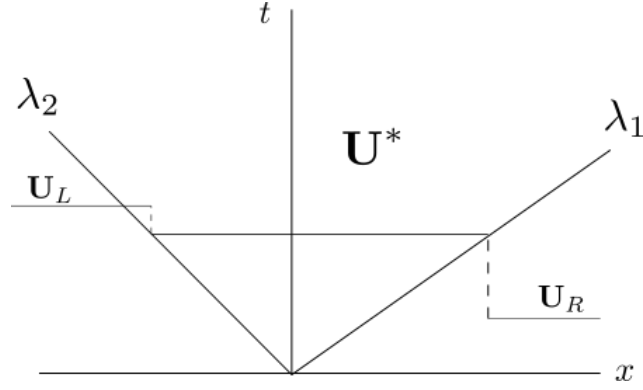


Fig. B.3: Definición del estado intermedio para un caso particular U^* en un caso particular con únicamente dos ondas λ_1 y λ_2 .

A partir de las anteriores expresiones es posible definir las variaciones δU_+ y δU_- como:

$$\begin{aligned}\delta U_- &= U^* - U_L = \sum_{\lambda_k < 0} \alpha_k \mathbf{e}_k \\ \delta U_+ &= U_R - U^* = \sum_{\lambda_k > 0} \alpha_k \mathbf{e}_k\end{aligned}\tag{B.19}$$

La definición de U^* será de utilidad en el desarrollo de la *formulación en flujos*, donde empleando la teoría desarrollada por Godunov se puede obtener un flujo numérico \mathbf{f}^* en cada una de las paredes de la celda como función de dicho estado $\mathbf{f}^* = F(U^*)$ [18].

B.3. Esquema de Roe ampliado

En el presenta apartado se muestran los desarrollos que complementan el esquema básico de Roe aplicado a la formulación desacoplada del modelo bicapa, que son absolutamente fundamentales para el uso práctico del método numérico en simulaciones.

B.3.1. Cálculo de los valores y vectores propios

Partiendo del sistema diferencial de ecuaciones a resolver:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}\tag{B.20}$$

Se empieza por calcular la matriz Jacobiana, denotada \mathbf{J} , que se define analíticamente como:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ gh_1 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & gh_2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix}\tag{B.21}$$

Habitualmente la notación seguida es $c_i = \sqrt{gh_i}$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Aplicando el método de Roe se define una matriz aproximada $\tilde{\mathbf{J}}$ con la misma estructura que J , formada por una serie de valores propios $\tilde{\lambda}_k$ que se cumplen para un par de celdas $(i, i + 1)$:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_1^2 - \tilde{u}_1^2 & 2\tilde{u}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_2^2 - \tilde{u}_2^2 & 2\tilde{u}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Los valores propios son:

$$\tilde{\lambda}_I = \tilde{u}_1 - \tilde{c}_1 \quad \tilde{\lambda}_{II} = \tilde{u}_1 + \tilde{c}_1 \quad \tilde{\lambda}_{III} = \tilde{u}_2 - \tilde{c}_2 \quad \tilde{\lambda}_{IV} = \tilde{u}_2 + \tilde{c}_2 \quad (\text{B.24})$$

Cuyos vectores propios asociados son:

$$\tilde{\mathbf{e}}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u}_1 - \tilde{c}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{e}}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u}_1 + \tilde{c}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{e}}_{III} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \tilde{u}_2 - \tilde{c}_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{e}}_{IV} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \tilde{u}_2 + \tilde{c}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

donde las definiciones $\tilde{u}_1, \tilde{c}_1, \tilde{u}_2, \tilde{c}_2$ derivan de la propiedad de preservación de las discontinuidades:

$$\Delta \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{J}} \Delta \mathbf{U} \quad (\text{B.26})$$

Operando y simplificando oportunamente:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \frac{u_{1,i+1} \sqrt{h_{1,i+1}} + u_{1,i} \sqrt{h_{1,i}}}{\sqrt{h_{1,i+1}} + \sqrt{h_{1,i}}} & \tilde{c}_1 &= \sqrt{g \frac{h_{1,i+1} + h_{1,i}}{2}} \\ \tilde{u}_2 &= \frac{u_{2,i+1} \sqrt{h_{2,i+1}} + u_{2,i} \sqrt{h_{2,i}}}{\sqrt{h_{2,i+1}} + \sqrt{h_{2,i}}} & \tilde{c}_2 &= \sqrt{g \frac{h_{2,i+1} + h_{2,i}}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Se discretiza ahora la diferencia entre los estados, $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i$, expresándola en la base de los vectores propios $\tilde{\mathbf{e}}_k$ con coeficientes $\tilde{\alpha}_k$:

$$\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i = \sum_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \quad (\text{B.28})$$

La expresión de los coeficientes $\tilde{\alpha}_k$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_I &= \frac{(h_{1,i+1} - h_{1,i})(\tilde{u}_1 + \tilde{c}_1) - (u_{1,i+1}h_{1,i+1} - u_{1,i}h_{1,i})}{2\tilde{c}_1} \\
 \tilde{\alpha}_{II} &= \frac{(u_{1,i+1}h_{1,i+1} - u_{1,i}h_{1,i}) - (h_{1,i+1} - h_{1,i})(\tilde{u}_1 - \tilde{c}_1)}{2\tilde{c}_1} \\
 \tilde{\alpha}_{III} &= \frac{(h_{2,i+1} - h_{2,i})(\tilde{u}_2 + \tilde{c}_2) - (u_{2,i+1}h_{2,i+1} - u_{2,i}h_{2,i})}{2\tilde{c}_2} \\
 \tilde{\alpha}_{IV} &= \frac{(u_{2,i+1}h_{2,i+1} - u_{2,i}h_{2,i}) - (h_{2,i+1} - h_{2,i})(\tilde{u}_2 - \tilde{c}_2)}{2\tilde{c}_2}
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

De forma homóloga se discretiza el término fuente \mathbf{S}_i^* , proyectando sobre la base de los vectores propios:

$$\Delta x \mathbf{S}_i^* = \sum_k \tilde{\beta}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \tag{B.30}$$

La expresión de los coeficientes $\tilde{\beta}_k$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_I &= \frac{1}{2\tilde{c}_1} (g\tilde{h}_1 \Delta z_b + g\tilde{h}_1 \Delta h_2 + \Delta x \frac{\tau_{xi}}{\rho_1}) & \tilde{\beta}_{II} &= -\tilde{\beta}_I \\
 \tilde{\beta}_{III} &= \frac{1}{2\tilde{c}_2} (g\tilde{h}_2 \Delta z_b + \frac{\rho_1}{\rho_2} g\tilde{h}_2 \Delta h_1 - \Delta x \frac{\tau_{xi}}{\rho_2} + \Delta x \frac{\tau_{xb}}{\rho_2}) & \tilde{\beta}_{IV} &= -\tilde{\beta}_{III}
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

Es preciso definir con claridad como se discretizan tanto las variaciones como algunos de los términos que aparecen en (B.31) y que son grados de libertad en el esquema, esto se consigue imponiendo las condiciones *well-balanced* sobre el esquema de Roe. Las variaciones de las magnitudes $\Delta\phi : z_b, h_1$ y h_2 , se definen como $\Delta\phi = \phi_{i+1} - \phi_i$. Los términos de altura promedio \tilde{h}_j , se calculan como la media aritmética de los valores en las celdas adyacentes:

$$\tilde{h}_j = \frac{h_{j,i} + h_{j,i+1}}{2} \tag{B.32}$$

Para los esfuerzos de fricción definidos en (2.11) y (2.12), a excepción de la velocidad que se tomará \tilde{u}_1 y/o \tilde{u}_2 según corresponda, el resto de valores implicado se calcularán también como la media aritmética de éstos en las celdas, al igual que se procede con \tilde{h}_j .

Es preciso comentar dada la formulación completamente desacoplada desarrollada, que se han obtenido los mismos resultados en cuanto a valores propios $\tilde{\lambda}_k$ y vectores propios $\tilde{\mathbf{e}}_k$ que para la formulación habitual de monocapa 1D en aguas poco profundas.

B.3.2. Problema de la entropía

El método de Roe, al definir la matriz jacobiana aproximada $\tilde{\mathbf{J}}$, linealiza el problema de Riemann. Esto genera dificultades al intentar reproducir con una secuencia de discontinuidades fenómenos como las ondas de rarefacción [18].

Desde un punto de vista práctico se requiere únicamente correcciones en los casos de ondas de rarefacción sónicas o transónicas, es decir cuando $\tilde{\lambda}_I \approx 0$ en el caso de que la onda viaje hacia la derecha $\tilde{u} > 0$ (onda de rarefacción izquierda) o si $\tilde{\lambda}_{II} \approx 0$ cuando la onda viaje hacia la izquierda $\tilde{u} < 0$ (onda de rarefacción derecha).

Onda de rarefacción izquierda

La corrección de Harten-Hyman [18] establece la necesidad de definir un estado intermedio $\lambda_{I,i} < 0 < \lambda_{I,i+1}$ de manera que el valor promedio $\tilde{\lambda}_I \approx 0$. En tal caso la onda se descompone dando lugar a una nueva onda que circula hacia la celda de la izquierda $i + 1$ cuya nueva velocidad es:

$$\bar{\lambda}_{I,i} = \lambda_{I,i} \left(\frac{\lambda_{I,i+1} - \tilde{\lambda}_I}{\lambda_{I,i+1} - \lambda_{I,i}} \right) \quad (\text{B.33})$$

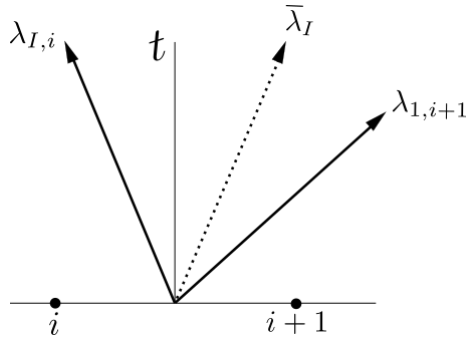


Fig. B.4: Problema de la entropía asociado a una onda de rarefacción izquierda, se produce un cambio de régimen de subcrítico en la celda de la izquierda $\lambda_{I,i} < 0$ a supercrítico en la de la derecha $\lambda_{I,i} > 0$.

De la onda que viaja hacia la derecha:

$$\hat{\lambda}_{I,i+1} = \lambda_{I,i+1} \left(\frac{\tilde{\lambda}_I - \lambda_{1,I}}{\lambda_{I,i+1} - \lambda_{I,i}} \right) \quad (\text{B.34})$$

Para evitar la aparición de inestabilidades y soluciones incorrectas [27] se asigna $\tilde{\beta}_I$ en función de la dirección de la onda original. Es decir si $\tilde{\lambda}_I < 0$ las contribuciones en la pared para la celda izquierda y derecha quedarían:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_I &= \tilde{\beta}_I \\ \hat{\beta}_I &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Onda de rarefacción derecha

Es necesario formular un estado intermedio si $\lambda_{II,i} < 0 < \lambda_{II,i+1}$ de manera que el valor promedio $\tilde{\lambda}_{II} \approx 0$. En tal caso la onda se descompone dando lugar a una nueva onda que

circula hacia la celda de la izquierda $i + 1$ cuya nueva velocidad es:

$$\bar{\lambda}_{II,i} = \lambda_{II,i} \left(\frac{\lambda_{II,i+1} - \tilde{\lambda}_{II}}{\lambda_{II,i+1} - \lambda_{II,i}} \right) \quad (\text{B.36})$$

De la onda que viaja hacia la derecha:

$$\hat{\lambda}_{II,i+1} = \lambda_{II,i+1} \left(\frac{\tilde{\lambda}_{II} - \lambda_{II,i}}{\lambda_{II,i+1} - \lambda_{II,i}} \right) \quad (\text{B.37})$$

Nuevamente el término β_{II} se descompone en $\bar{\beta}_{II}$ y $\hat{\beta}_{II}$ en función de la dirección original de λ_{II} . El procedimiento a seguir para las corrección hacia la izquierda y la derecha es análogo para los valores λ_{III} y λ_{IV} pertenecientes a la capa inferior.

B.3.3. Tratamientos de los términos fuente. Estados intermedios

La integración de los términos fuente en el sistema homogéneo implica cambios en la estructura de los estados intermedios expuesta en (B.18). Sustituyendo en (2.29) $\theta_k = 1 - \frac{\tilde{\beta}_k}{\tilde{\alpha}_k \tilde{\lambda}_k}$, se obtiene de un modo más compacto:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{k^-} ((\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \theta_k) \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i+\frac{1}{2}} + \sum_{k^+} ((\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \theta_k) \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{B.38})$$

El coeficiente θ_k es una medida de la importancia relativa de los términos fuente sobre el caso original homogéneo [28]. Del mismo modo que se ha incluido este término en el paso de la formulación del sistema homogéneo en (2.27) al que incluye los términos fuente (B.38), es razonable considerar la necesidad de añadirlo también a la definición de la diferencia entre estados intermedios que aparecen entre las ondas λ_k al resolver el problema de Riemann. La consecuencia directa de ello es la aparición de $n + 2$ estados intermedios en lugar de n , al existir en $x = 0$ una nueva discontinuidad [39], generada por una onda $\lambda_k = 0$ asociada a los términos fuente.

Recuperando (B.39), en lugar de registrar un único estado central $\mathbf{U}^*(0, t)$ aparecen dos nuevos a cada lado de la pared $i + \frac{1}{2}$, denominados \mathbf{U}^{**}_{i+1} y \mathbf{U}^*_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{**}_{i+1} &= \mathbf{U}_{i+1} - \left(\sum_{k^+} (\tilde{\alpha}_k \theta_k) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{U}^*_i &= \mathbf{U}_i + \left(\sum_{k^-} (\tilde{\alpha}_k \theta_k) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

La descripción de los estados intermedios realizada servirá ahora para formular el tratamiento de los términos fuente. A partir de dichos estados intermedios se estudian las condiciones a imponer para lograr que el esquema numérico resulte estable, reproduzca

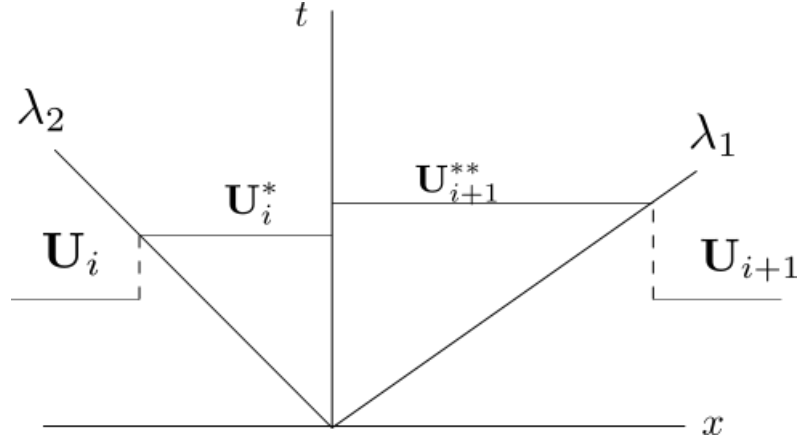


Fig. B.5: La integración del término fuente supone la aparición de una nueva discontinuidad en $x = 0$ como consecuencia de la aparición de una onda asociada con velocidad de propagación $\lambda_i = 0$.

correctamente los esfuerzos de rozamiento sin que se dé lugar a situaciones físicamente imposibles, conserve la positividad de la altura en ambas capas y sea capaz de manejar situaciones seco-mojado. El desarrollo aquí expuesto parte de los realizados en [29] [28] [46] y los particulariza al caso bicapa.

Por simplicidad y dado que el modelo es desacoplado se mostrarán los desarrollos en una sola, siendo en la mayor parte de los casos inmediatamente extensibles a la homóloga. En aquellos casos donde esta conversión no sea directa se referirán las modificaciones que deben llevarse a cabo.

Términos de fricción

Para evitar situaciones físicamente imposibles donde los términos asociados a la fricción modificaran el sentido del flujo es necesario comprobar que para una pared $i + \frac{1}{2}$ se cumplen que los términos $q_{i,1}^*$ y $q_{i+1,1}^{**}$ asociados a U_i^* y U_{i+1}^{**} no presenten cambios de signo asociados a la fricción. Se demuestra que en este caso los estados cumple $q_{i,1}^* = q_{i+1,1}^{**}$ [46], quedando éstos definidos como:

$$q_{i,1}^* = q_{i,1} + \tilde{\alpha}_I \tilde{\lambda}_I - \tilde{\beta}_I \quad (\text{B.40})$$

Se define un nuevo término $q_{i,1}^\bullet$ donde solo se estudia la contribución del término de la pendiente con $\tilde{\beta}_{I,s} = \frac{1}{2\tilde{c}_1} (gh_1 \Delta z_b + gh_1 \Delta h_2)$. En el caso de la capa 2, inferior, también incluye el término de acoplamiento debido a la presión de la capa 1, superior.

$$q_{i,1}^\bullet = q_{i,1} + \tilde{\alpha}_I \tilde{\lambda}_I - \tilde{\beta}_{I,s} \quad (\text{B.41})$$

Si $q_{i,1}^* q_{i,1}^\bullet < 0$ se ha producido un cambio del signo del flujo debido a la fricción y debe

corregirse $\tilde{\beta}_{I,f}$ del siguiente modo:

$$\tilde{\beta}_{I,f} = \begin{cases} q_{i,1}^\bullet & \text{si } q_{i,1}^* q_{i,1}^\bullet < 0 \\ \frac{1}{2\tilde{c}_1} \Delta x \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad \tilde{\beta}_I = \tilde{\beta}_{I,f} + \tilde{\beta}_{I,s} \text{ y } \tilde{\beta}_{II} = -\tilde{\beta}_I \quad (\text{B.42})$$

Cuando hay coexistencia de ambas capas es necesario completar el análisis para el término de rozamiento en la interfase, es decir considerando también los estados intermedios de la capa 2:

$$\begin{aligned} q_{i,2}^* &= q_{i,2} + \tilde{\alpha}_{III} \tilde{\lambda}_{III} - \tilde{\beta}_{III}^* \\ q_{i,2}^\bullet &= q_{i,2} + \tilde{\alpha}_{III} \tilde{\lambda}_{III} - \tilde{\beta}_{III,s} \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{III,s} &= \frac{1}{2\tilde{c}_2} (gh_2 \Delta z_b + gh_2 \Delta h_1) \\ \tilde{\beta}_{III} &= \frac{1}{2\tilde{c}_2} (gh_2 \Delta z_b - \Delta x \frac{\tau_{xi}}{\rho_2}) \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Para este análisis no se incluyen los efectos del rozamiento del lecho fijo sobre la capa inferior. El procedimiento para la vigilancia completa del rozamiento en la capa inferior es análogo al de la capa superior donde únicamente deben tomarse en consideración las expresiones (B.31) de los términos $\tilde{\beta}_{III}$ y $\tilde{\beta}_{IV}$.

Si $q_{i,2}^* q_{i,2}^\bullet < 0$ se ha producido un cambio del signo del flujo debido a la fricción en la interfase y debe corregirse $\tilde{\beta}_{III,f}^*$ del siguiente modo:

$$\tilde{\beta}_{III,f}^* = \begin{cases} q_{i,2}^\bullet & \text{si } q_{i,2}^* q_{i,2}^\bullet < 0 \\ -\frac{1}{2\tilde{c}_2} \Delta x \frac{\tau_{xi}}{\rho_2} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

Con los dos términos calculados $\tilde{\beta}_{I,f}$ y $\tilde{\beta}_{III,f}^*$ se debe elegir el valor más restrictivo de τ_{xi} . Despejando:

$$\begin{aligned} \tau_{xi} &= \frac{2\tilde{c}_1 \rho_1 \tilde{\beta}_{III,s}}{\Delta x} \\ \tau_{xi}^* &= \frac{-2\tilde{c}_2 \rho_2 \tilde{\beta}_{III,f}^*}{\Delta x} \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Se elige el mínimo de los valores anteriores τ_{xi} y τ_{xi}^* .

Control de la positividad

Caso subcrítico

Para evitar que se alcancen alturas negativas con la aparición de una pendiente es necesario garantizar que $h_i^* > 0$ y $h_{i+1}^{**} > 0$. Esta condición establece una limitación sobre los valores de $\tilde{\beta}_I$ y $\tilde{\beta}_{II}$:

$$\begin{aligned} h_i^* = h_i + \tilde{\alpha}_I - \frac{\tilde{\beta}_I}{\tilde{\lambda}_I} \geq 0 \text{ entonces } \tilde{\beta}_I &\geq (h_i + \tilde{\alpha}_I)\tilde{\lambda}_I = \tilde{\beta}_{I,min} \\ h_{i+1}^{**} = h_{i+1} - \tilde{\alpha}_{II} + \frac{\tilde{\beta}_{II}}{\tilde{\lambda}_{II}} \geq 0 \text{ entonces } \tilde{\beta}_I &\leq (h_i - \tilde{\alpha}_{II})\tilde{\lambda}_{II} = \tilde{\beta}_{I,max} \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

En consecuencia si $h_i^* < 0$ y $h_{i+1}^{**} > 0$ o $h_i^* > 0$ y $h_{i+1}^{**} < 0$ se redefine $\tilde{\beta}_I$:

$$\tilde{\beta}_I = \begin{cases} \tilde{\beta}_{I,min} & \text{si } \tilde{\beta}_I \leq \tilde{\beta}_{I,min} \\ \tilde{\beta}_{I,max} & \text{si } \tilde{\beta}_I > \tilde{\beta}_{I,max} \end{cases} \text{ con } \tilde{\beta}_{II} = -\tilde{\beta}_I \quad (\text{B.48})$$

Caso supercrítico

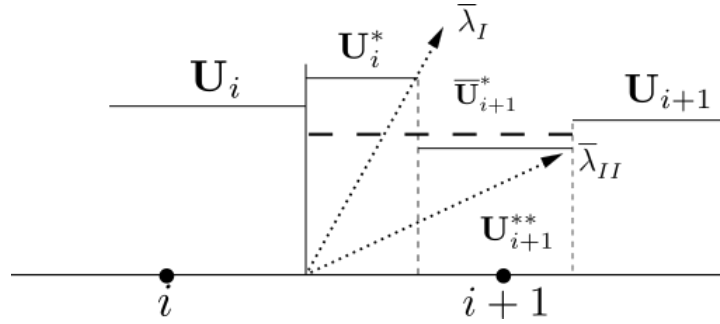


Fig. B.6: En el caso supercrítico es preciso definir un nuevo estado \bar{U}_{i+1}^* función de los estado intermedios U_i^* y U_{i+1}^{**} .

Suponiendo un caso donde $\tilde{\lambda}_I > 0$ y $\tilde{\lambda}_{II} > 0$ (como el de la Figura B.6), es necesario definir un estado intermedio \bar{U}_{i+1}^* que permita formular h_{i+1}^* en función de las ondas $\tilde{\lambda}_I$ y $\tilde{\lambda}_{II}$. Es decir:

$$\bar{h}_{i+1}^* = h_{i+1} - e_{i+1}^* \quad (\text{B.49})$$

donde:

$$\begin{aligned} e_{i+1}^* &= e_{i+1}^{*,II} + \frac{\tilde{\lambda}_I}{\tilde{\lambda}_{II}} e_{i+1}^{*,I} \\ e_{i+1}^{*,I} &= \tilde{\alpha}_I - \frac{\tilde{\beta}_I}{\tilde{\lambda}_I} \\ e_{i+1}^{*,II} &= \tilde{\alpha}_{II} - \frac{\tilde{\beta}_{II}}{\tilde{\lambda}_{II}} \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Desarrollando queda:

$$\bar{h}_{i+1}^* = h_{i+1} - \tilde{\alpha}_{II} - \frac{\tilde{\lambda}_I}{\tilde{\lambda}_{II}} \tilde{\alpha}_I \quad (\text{B.51})$$

En la celda contigua no aparecen ondas:

$$h_i^* = h_i \quad (\text{B.52})$$

Por tanto no es necesario modificar los términos $\tilde{\beta}_k$. Se produce una situación semejante cuando $\tilde{\lambda}_I < 0$ y $\tilde{\lambda}_{II} < 0$, donde:

$$\begin{aligned} \bar{h}_i^* &= h_i + \tilde{\alpha}_I + \frac{\tilde{\lambda}_{II}}{\tilde{\lambda}_I} \tilde{\alpha}_{II} \\ h_{i+1}^* &= h_{i+1} \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Caso subcrítico con corrección de la entropía

A diferencia de los casos anteriores en la corrección de la entropía se generan tres ondas diferentes en lugar de dos, por tanto es necesario definir de nuevos estados intermedios función de dos de las ondas.

Si se produce corrección de la entropía para $\tilde{\lambda}_I$, se tiene:

$$\begin{aligned} h_i^* &= h_i + \tilde{\alpha}_I - \frac{\tilde{\beta}_I}{\tilde{\lambda}_I} \\ h_{i+1}^* &= h_{i+1} - \tilde{\alpha}_{II} + \frac{\tilde{\beta}_{II}}{\tilde{\lambda}_{II}} - \frac{\lambda_{I,i+1}}{\tilde{\lambda}_{II}} \tilde{\alpha}_I \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Para evitar que se alcancen alturas negativas es necesario garantizar que $h_i^* > 0$ y $h_{i+1}^{**} > 0$, lo que limita nuevamente los valores de $\tilde{\beta}_I$ y $\tilde{\beta}_{II}$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} h_i^* &= h_i + \tilde{\alpha}_I - \frac{\tilde{\beta}_I}{\tilde{\lambda}_I} \geq 0 \text{ entonces } \tilde{\beta}_I \geq (h_i + \tilde{\alpha}_I) \tilde{\lambda}_I = \tilde{\beta}_{I,min} \\ h_{i+1}^{**} &= h_{i+1} - \tilde{\alpha}_I + \frac{\tilde{\beta}_{II}}{\tilde{\lambda}_{II}} - \frac{\lambda_{I,i+1}}{\tilde{\lambda}_{II}} \tilde{\alpha}_I \geq 0 \text{ entonces } \tilde{\beta}_I \leq (h_i - \tilde{\alpha}_{II} - \frac{\lambda_{I,i+1}}{\tilde{\lambda}_{II}} \tilde{\alpha}_I) \tilde{\lambda}_{II} = \tilde{\beta}_{I,max} \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

En consecuencia si $h_i^* < 0$ y $h_{i+1}^{**} > 0$ o $h_i^* > 0$ y $h_{i+1}^{**} < 0$ se redefine $\tilde{\beta}_I$:

$$\tilde{\beta}_I = \begin{cases} \tilde{\beta}_{I,min} & \text{si } \tilde{\beta}_I \leq \tilde{\beta}_{I,min} \\ \tilde{\beta}_{I,max} & \text{si } \tilde{\beta}_I > \tilde{\beta}_{I,max} \end{cases} \text{ con } \tilde{\beta}_{II} = -\tilde{\beta}_I \quad (\text{B.56})$$

Se repite el procedimiento si la corrección de la entropía se lleva a cabo para $\tilde{\lambda}_{II}$:

$$\begin{aligned} h_i^* &= h_i + \tilde{\alpha}_I - \frac{\tilde{\beta}_I}{\tilde{\lambda}_I} + \frac{\lambda_{II,i}}{\tilde{\lambda}_I} \tilde{\alpha}_{II} \geq 0 \text{ entonces } \tilde{\beta}_I \geq (h_i + \tilde{\alpha}_I + \frac{\lambda_{II,i}}{\tilde{\lambda}_I} \tilde{\alpha}_{II}) \tilde{\lambda}_I = \tilde{\beta}_{I,min} \\ h_{i+1}^{**} &= h_{i+1} - \tilde{\alpha}_I + \frac{\tilde{\beta}_{II}}{\tilde{\lambda}_{II}} \geq 0 \text{ entonces } \tilde{\beta}_I \leq (h_i - \tilde{\alpha}_{II}) \tilde{\lambda}_{II} = \tilde{\beta}_{I,max} \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

En consecuencia si $h_i^* < 0$ y $h_{i+1}^{**} > 0$ o $h_i^* > 0$ y $h_{i+1}^{**} < 0$ se redefine $\tilde{\beta}_I$:

$$\tilde{\beta}_I = \begin{cases} \tilde{\beta}_{I,min} & \text{si } \tilde{\beta}_I \leq \tilde{\beta}_{I,min} \\ \tilde{\beta}_{I,max} & \text{si } \tilde{\beta}_I > \tilde{\beta}_{I,max} \end{cases} \text{ con } \tilde{\beta}_{II} = -\tilde{\beta}_I \quad (\text{B.58})$$

El procedimiento es análogo para los valores λ_{III} y λ_{IV} , α_{III} y α_{IV} y β_{III} y β_{IV} de la capa inferior.

Frente seco/mojado

En el caso del frente seco/mojado está garantizada la positividad de la altura con las condiciones anteriormente impuestas sobre los términos $\tilde{\beta}_k$, pero no que se puedan producir saltos (transferencias) imposibles de fluido entre celdas anexas en situaciones donde existe una variación del fondo. Este fenómeno se puede producir tanto en caso subcrítico como supercrítico.

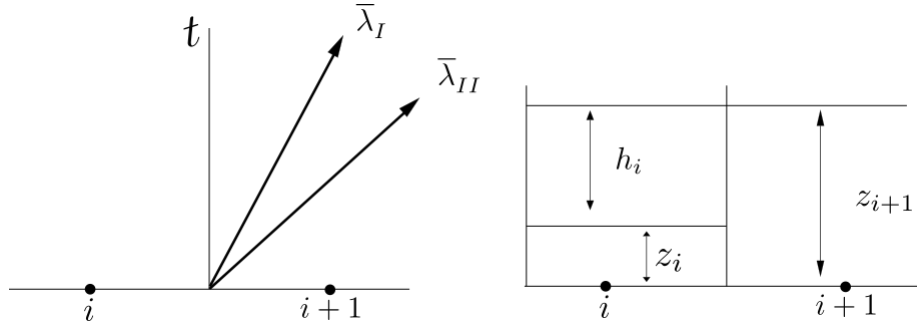


Fig. B.7: Esquema de un caso seco-mojado con $h_{i+1} = 0$ y en régimen supercrítico.

Caso supercrítico

En un caso supercrítico $\tilde{\lambda}_I \tilde{\lambda}_{II} > 0$, Figura B.7, se pueden dar dos situaciones en función del signo de la velocidad \tilde{u} :

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_I \text{ y } \tilde{\lambda}_{II} & \text{ondas hacia } i \text{ si } z_i + h_i < z_{i+1} \text{ con } \tilde{\lambda}_I > 0 \text{ y } h_{i+1} = 0 \\ \tilde{\lambda}_I \text{ y } \tilde{\lambda}_{II} & \text{ondas hacia } i + 1 \text{ si } z_{i+1} + h_{i+1} < z_i \text{ con } \tilde{\lambda}_I < 0 \text{ y } h_i = 0 \end{cases} \quad (\text{B.59})$$

Caso subcrítico

En un caso subcrítico donde $\tilde{\lambda}_I \tilde{\lambda}_{II} < 0$, se debe comprobar que la transferencia de las ondas $\tilde{\lambda}_I$ y $\tilde{\lambda}_{II}$ tiene sentido físico:

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_I \text{ y } \tilde{\lambda}_{II} & \text{ondas hacia } i \text{ si } z_i + h_i^* < z_{i+1} \text{ con } h_{i+1} = 0 \\ \tilde{\lambda}_I \text{ y } \tilde{\lambda}_{II} & \text{ondas hacia } i + 1 \text{ si } z_{i+1} + h_{i+1}^* < z_i \text{ con } h_i = 0 \end{cases} \quad (\text{B.60})$$

El procedimiento es análogo para la capa inferior.

Anexos C

Validación del esquema numérico

C.1. Expresiones analíticas de la rotura de presa ideal

En las roturas de presa ideales, esto es sin fricción y fondo plano las ecuaciones monocapa 1D, tienen solución analítica [30] al resolver el problema de Riemann. Sea el estado inicial el presentado en la Figura C.1, y modelizado por la función matemática:

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_1 & \text{si } x \leq x_1 \\ h_0 & \text{si } x > x_1 \end{cases} \text{ con } u(x, 0) = 0 \quad (\text{C.1})$$

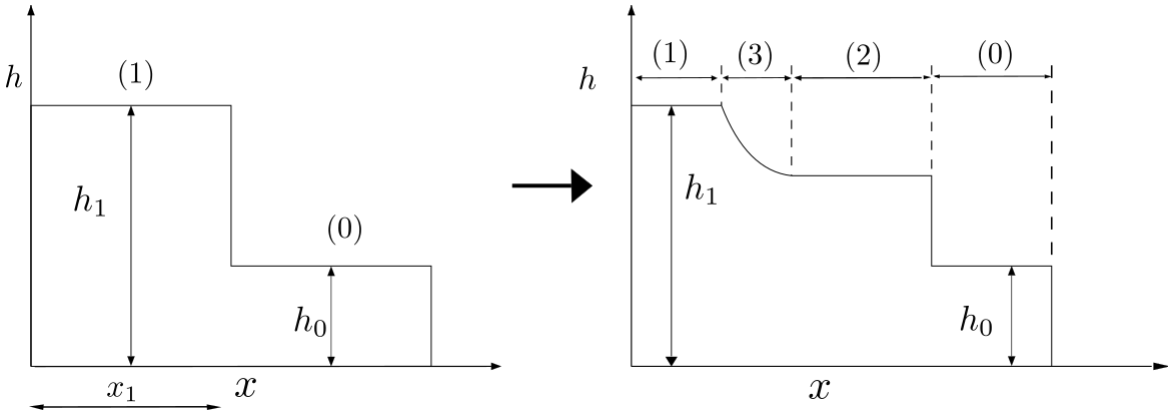


Fig. C.1: Esquema del inicio de la rotura de presa ideal y la evolución de las regiones con el paso del tiempo.

En lo que sigue h^{*i} indica la altura h en la región i , se cumple además que $x_1 = 0$. Al iniciarse la rotura de presa se produce [48] una onda de rarefacción, con la que se distingue la zona no perturbada (1) donde $h^{*1} = h_1$ y $u^{*1} = 0$, de la que avanza con dicha onda (3). Entre la onda de rarefacción, que se forma como consecuencia de que $c^{*1} < u^{*3} - c^{*3} < u^{*2} - c^{*2}$, y la de choque, que avanza con velocidad S cumpliéndose que $u^{*2} + c^{*2} > S > c^{*0}$, se forma la región (2) con velocidad u^{*2} y altura h^{*2} constante. La región (0) permanece sin perturbar con $h^{*0} = h_0$ y $u^{*0} = 0$.

La solución analítica corresponde con:

$$h(x, t) = \begin{cases} h^{*1} & x \leq -c^{*1}t \\ \frac{1}{9g}(2c^{*1} - \frac{x}{t})^2 & -c^{*1}t < x \leq (u^{*2} - c^{*2})t \\ h^{*2} & (u^{*2} - c^{*2})t < x \leq St \\ h^{*0} & St < x \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Con los términos:

$$\begin{aligned} h^{*2} &= \frac{1}{2}h_0 \left(\sqrt{1 + \frac{8S^2}{gh_0}} - 1 \right) \\ u^{*2} &= S - \frac{gh_0}{4S} \left(\sqrt{\frac{8S^2}{gh_0}} + 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Combinados en la siguiente ecuación no lineal para obtener el valor de la velocidad en la onda de choque S :

$$u^{*2} + 2c^{*2} - 2c^{*1} = 0 \quad (\text{C.4})$$

En un caso particular, como en 3.2.2, donde $h_0 = 0$ se obtiene únicamente una onda de rarefacción:

$$h(x, t) = \begin{cases} h^{*1} & x \leq -c^{*1}t \\ \frac{1}{9g}(2c^{*1} - \frac{x}{t})^2 & -c^{*1}t < x \leq (u_{*2} - c_{*2})t \\ h^{*2} & (u_{*2} - c_{*2})t < x \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

C.2. Rotura de presa ideal monocapa sobre el fondo mojado

Para la validación del caso monocapa además de simularse el caso de rotura ideal sobre fondo seco C.2, se ha reproducido el caso particular en fondo mojado, es decir cuyas condiciones iniciales son:

$$h_2(x, 0) = \begin{cases} h^1 & \text{si } x \leq x_1 \\ h^0 & \text{si } x > x_1 \end{cases} \text{ con } u_2(x, 0) = 0 \quad (\text{C.6})$$

donde para este caso particular mostrado en la Figura C.2, la altura $h^1 = 2.0$ m y $h^0 = 1.0$ m. Nuevamente es necesario cancelar la capa superior haciendo $h_1(x, 0) = 0$ m. La posición de la discontinuidad es $x_1 = 0$ m en un dominio de simulación $[-3, 3]$ plano (sin relieve) con condición de estabilidad temporal CFL de 0.7.

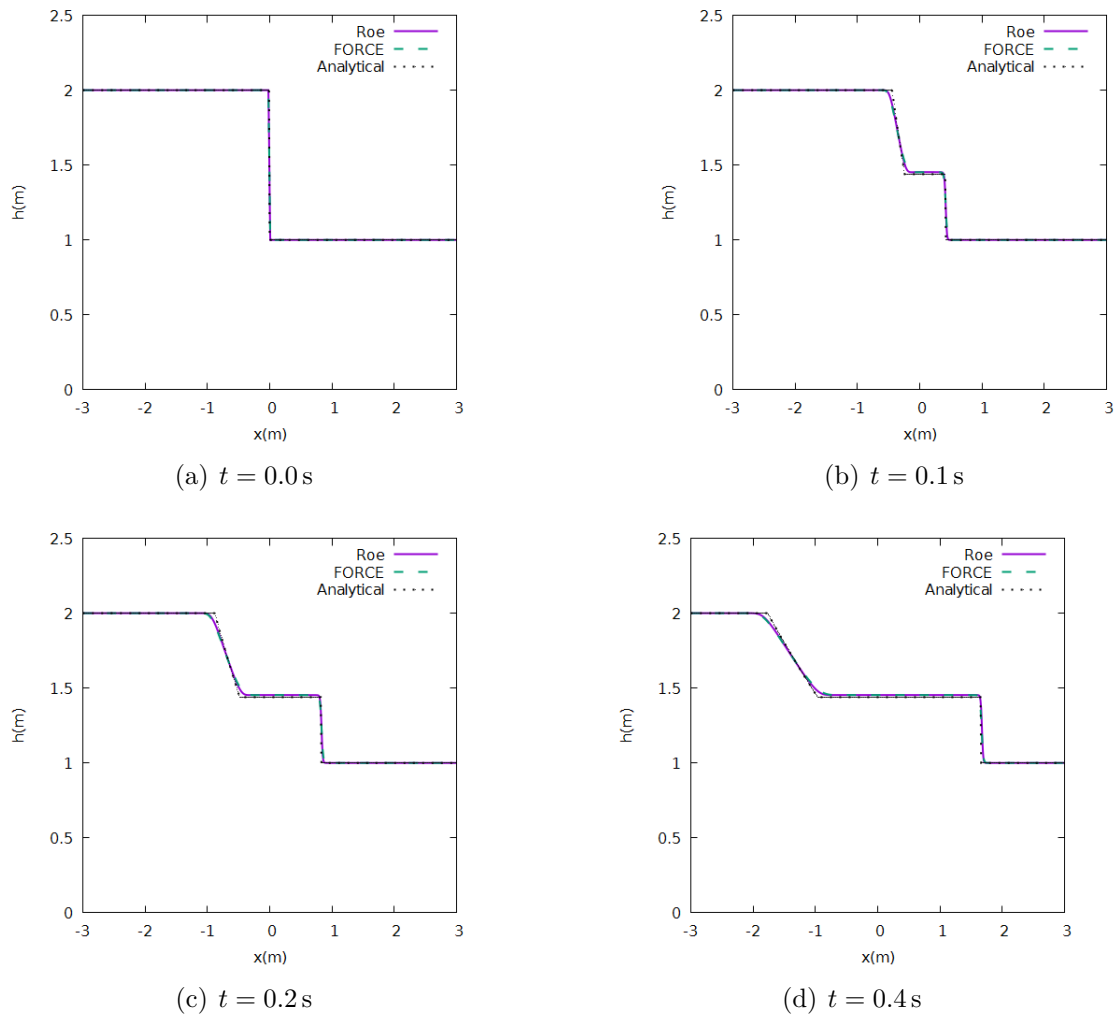


Fig. C.2: Rotura ideal de presa monocapa en mojado.

C.3. Resultados complementarios al caso test experimental del CITEEC

En el presente apartado se muestran los resultados obtenidos por la simulación del caso test 2 (expuesto en 3.1.2) para todo el dominio de cálculo en determinados momentos de la simulación, con el fin de apreciar la onda de presión generada como consecuencia del movimiento del pistón.

Tal y como se ha expuesto previamente en 3.1.2, en el caso de simulación donde la altura inicial es de 0.15 m no se supera el límite del muro final de 0.36 m. Se aprecia en las Figuras C.3 que cuando la onda viaja hacia la derecha con $u > 0$, correspondiente a los instantes de tiempo $t = 1.0\text{ s}$ y $t = 2.0\text{ s}$, el perfil reproducido es mejor que para los dos siguientes $t = 3.0\text{ s}$ y $t = 4.0\text{ s}$ con $u < 0$ donde hay un desplazamiento de los máximos.

Para el método de FORCE no ha sido posible adaptar un tratamiento seco-mojado específico. Esta es la razón por la cual parte de la pendiente aparece bañada por un calado

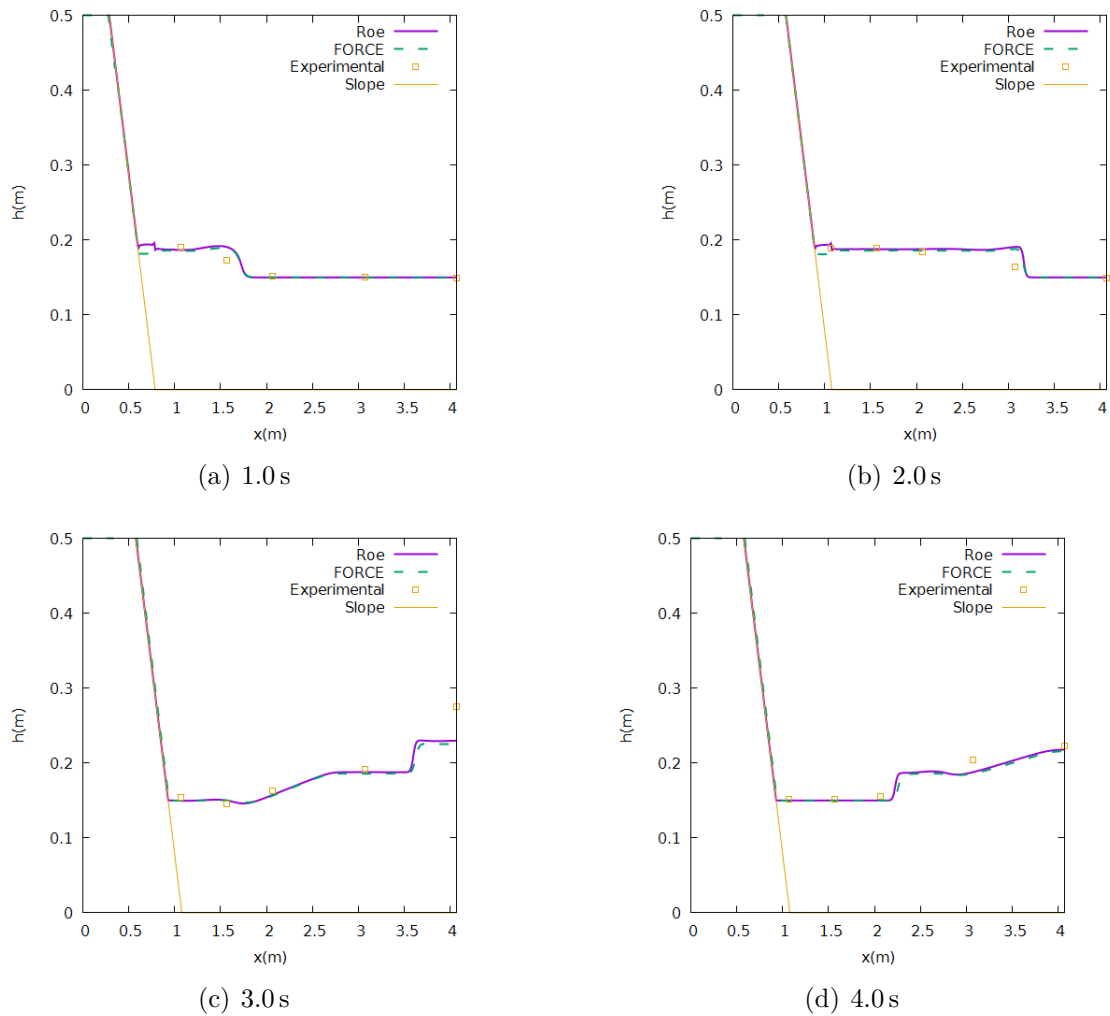
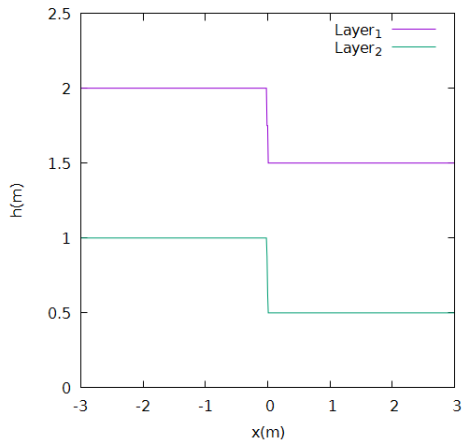


Fig. C.3: Resultados del perfil de la onda de presión del caso test experimental.

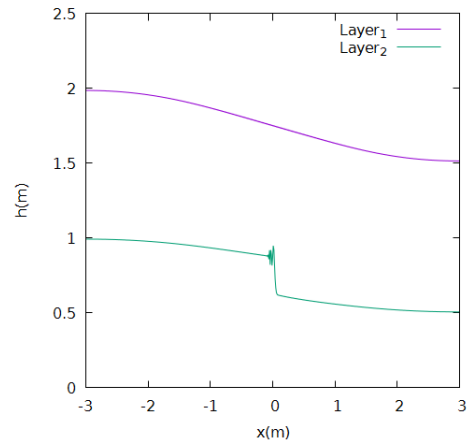
mínimo de tolerancia h_{tol} conFigurado para evitar la aparición de alturas negativas durante el proceso de cálculo.

C.4. Resultados complementarios a los casos test de las condiciones de aplicación de los métodos numéricos de FORCE y Roe

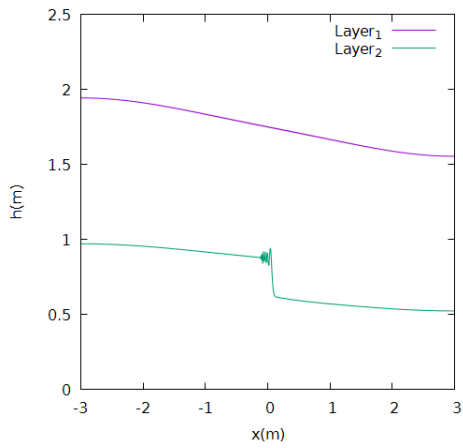
A continuación se muestran los resultados obtenidos, para distintos instantes de tiempo de los test 5,6,7 y 8 empleados en 3.2.3 para estudiar la influencia de los parámetros de simulación en la estabilidad de los esquemas.



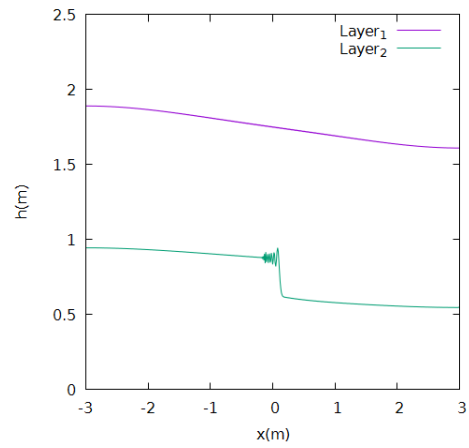
(a) $t = 0.0$ s



(b) $t = 0.2$ s

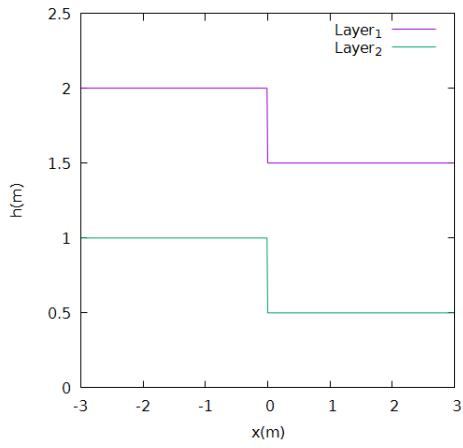


(c) $t = 0.3$ s

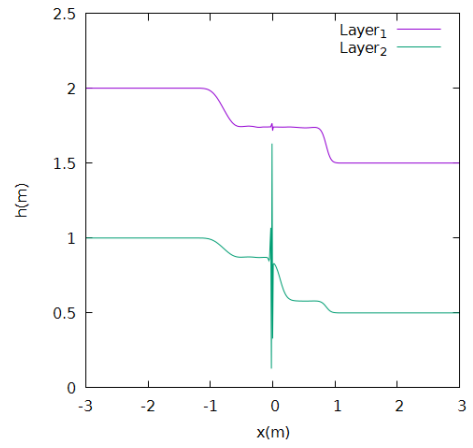


(d) $t = 0.4$ s

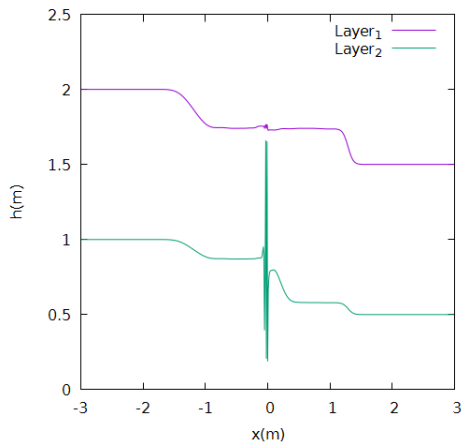
Fig. C.4: Test 5. Rotura de presa bicapa con el método FORCE.



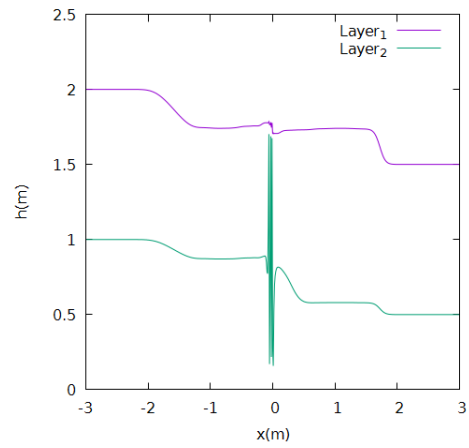
(a) $t = 0.0$ s



(b) $t = 0.2$ s

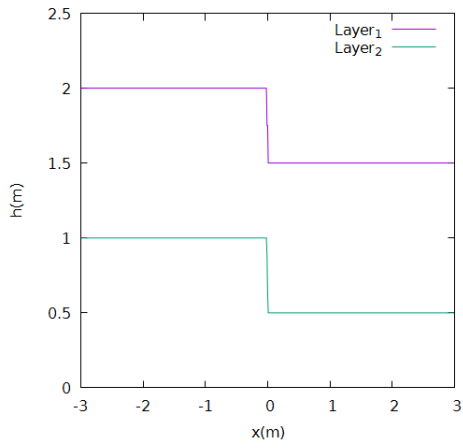


(c) $t = 0.3$ s

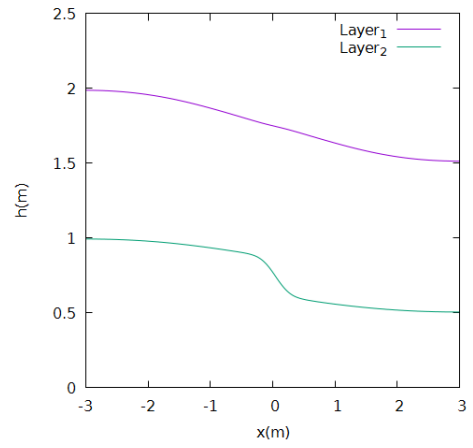


(d) $t = 0.4$ s

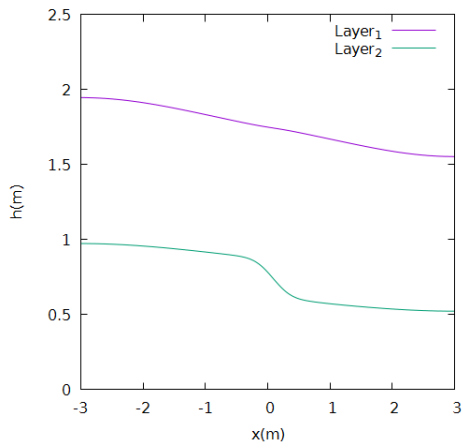
Fig. C.5: Test 5. Rotura de presa bicapa con el método de Roe.



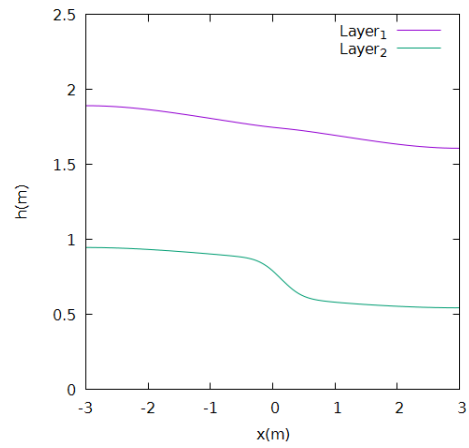
(a) $t = 0.0$ s



(b) $t = 0.2$ s

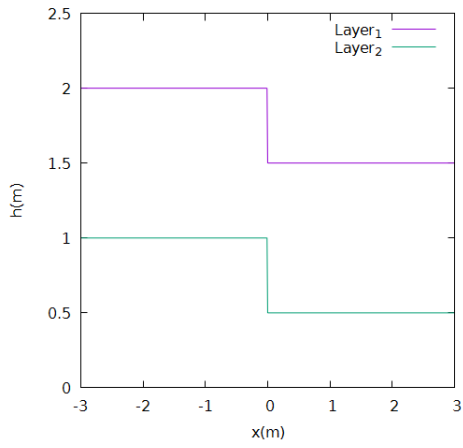


(c) $t = 0.3$ s

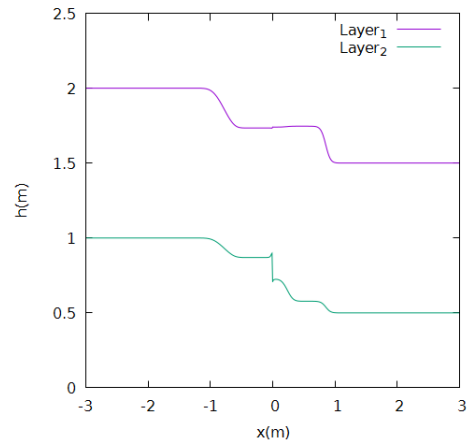


(d) $t = 0.4$ s

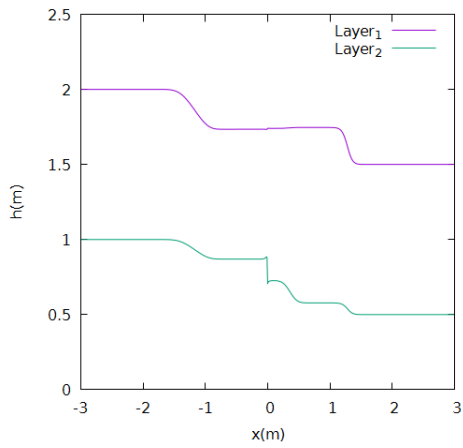
Fig. C.6: Test 6. Rotura de presa bicapa con el método FORCE.



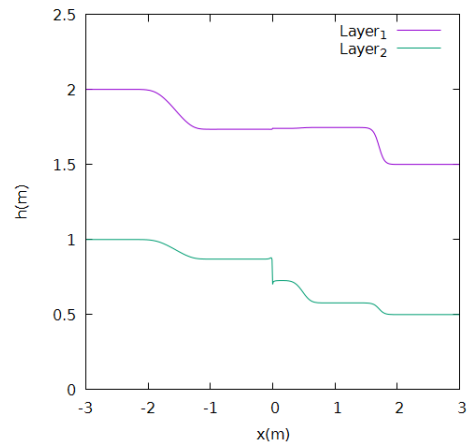
(a) $t = 0.0$ s



(b) $t = 0.2$ s

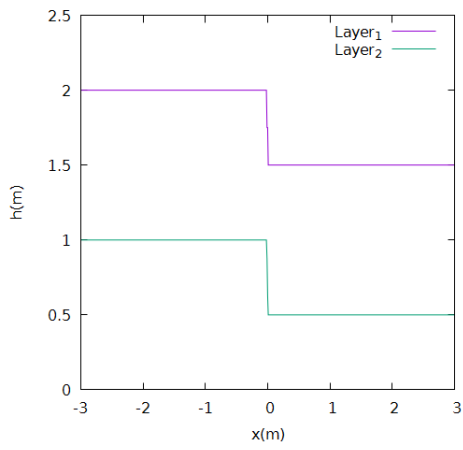


(c) $t = 0.3$ s

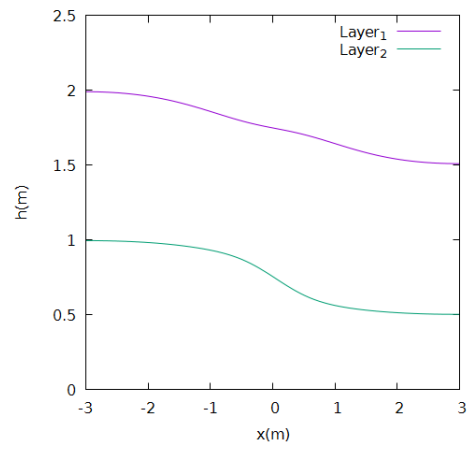


(d) $t = 0.4$ s

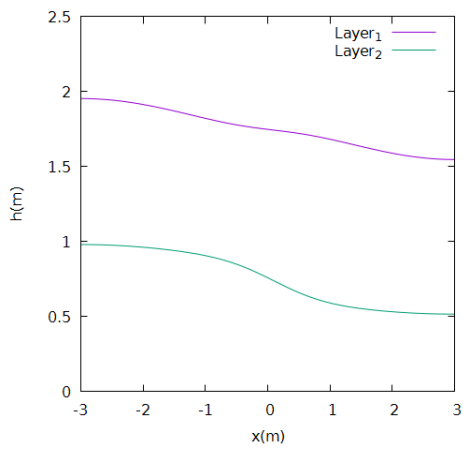
Fig. C.7: Test 6. Rotura de presa bicapa con el método de Roe.



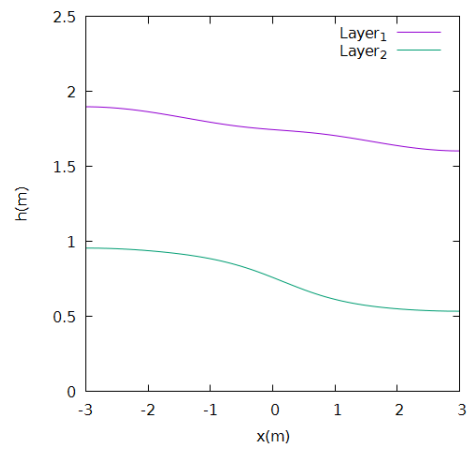
(a) $t = 0.0$ s



(b) $t = 0.2$ s

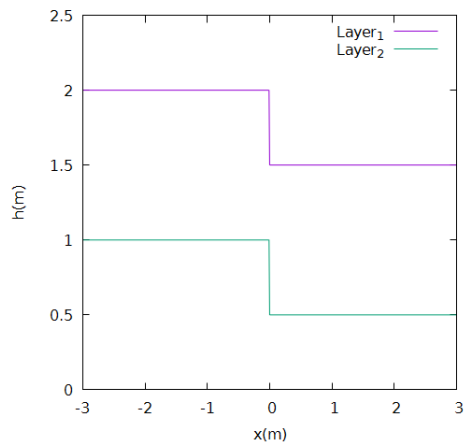


(c) $t = 0.3$ s

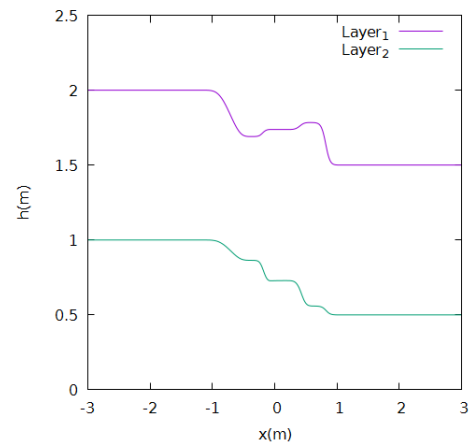


(d) $t = 0.4$ s

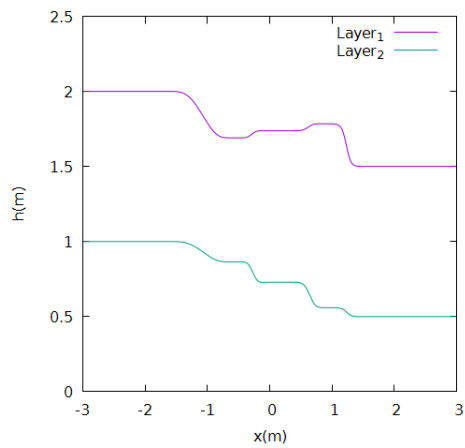
Fig. C.8: Test 7. Rotura de presa bicapa con el método FORCE.



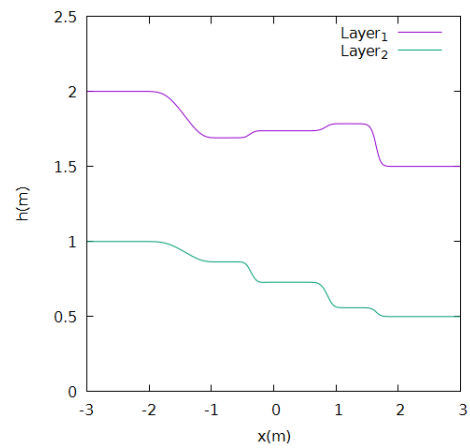
(a) $t = 0.0$ s



(b) $t = 0.2$ s

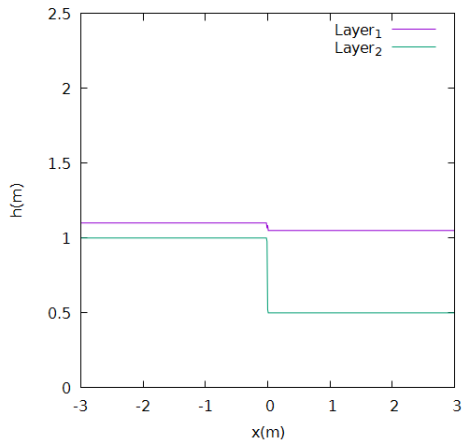


(c) $t = 0.3$ s

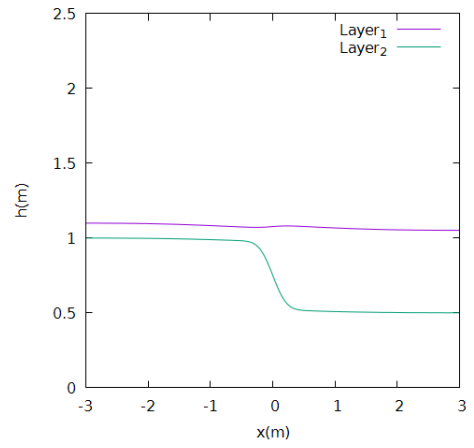


(d) $t = 0.4$ s

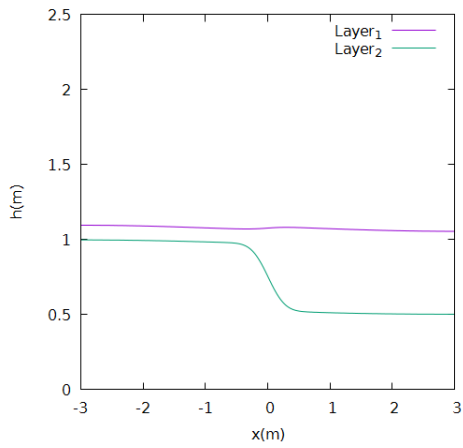
Fig. C.9: Test 7. Rotura de presa bicapa con el método de Roe.



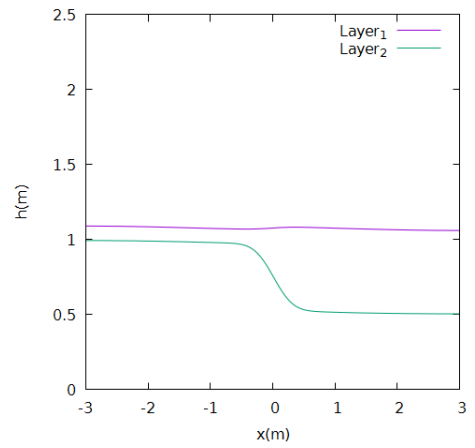
(a) $t = 0.0$ s



(b) $t = 0.2$ s

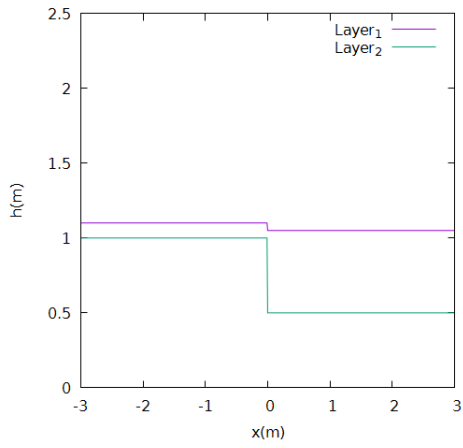


(c) $t = 0.3$ s

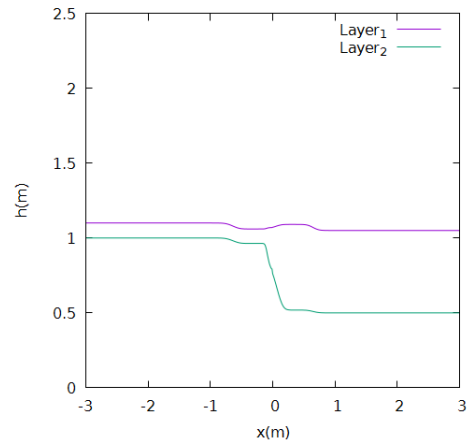


(d) $t = 0.4$ s

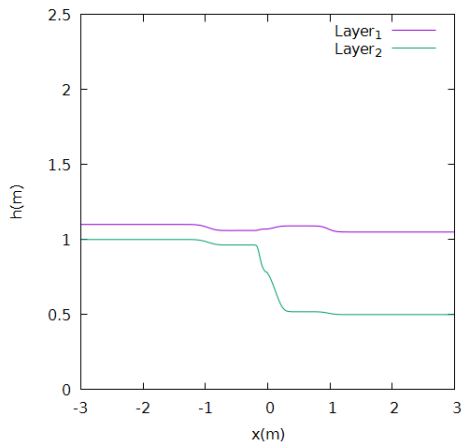
Fig. C.10: Test 8. Rotura de presa bicapa con el método FORCE.



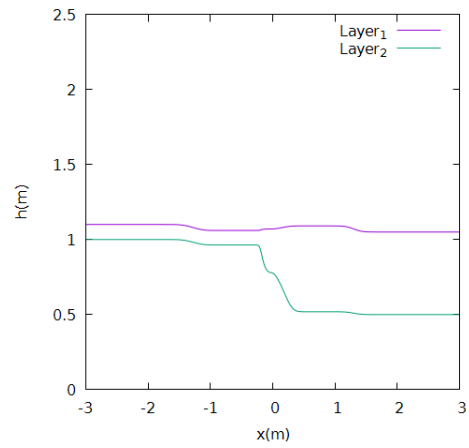
(a) $t = 0.0$ s



(b) $t = 0.2$ s



(c) $t = 0.3$ s



(d) $t = 0.4$ s

Fig. C.11: Test 8. Rotura de presa bicapa con el método de Roe.

Anexos D

Estabilidad en el método numérico

D.1. Estabilidad temporal. Métodos explícitos y la condición CFL

Descritos los dos esquemas numéricos a emplear FORCE y Roe, es determinante establecer las condiciones de intervalo de cálculo que conduzcan a la estabilidad y convergencia de ambos modelos.

Tal y como se establece en [12] la estabilidad es la propiedad necesaria para que un modelo basado tanto en diferencias finitas como volúmenes finitos converja a la solución exacta con el sucesivo refinamiento de la malla espacial. Tanto en FORCE como en Roe la información para la actualización de la variable en la celda U_i^{n+1} depende exclusivamente de la información contenida en el tiempo t^n en la propia celda U_i^n y las colindantes U_{i-1}^n y U_{i+1}^n . Es por ello que ambos esquemas se dicen *explícitos* ya que utilizan únicamente la información del paso temporal anterior t^n para la actualización al siguiente t^{n+1} .

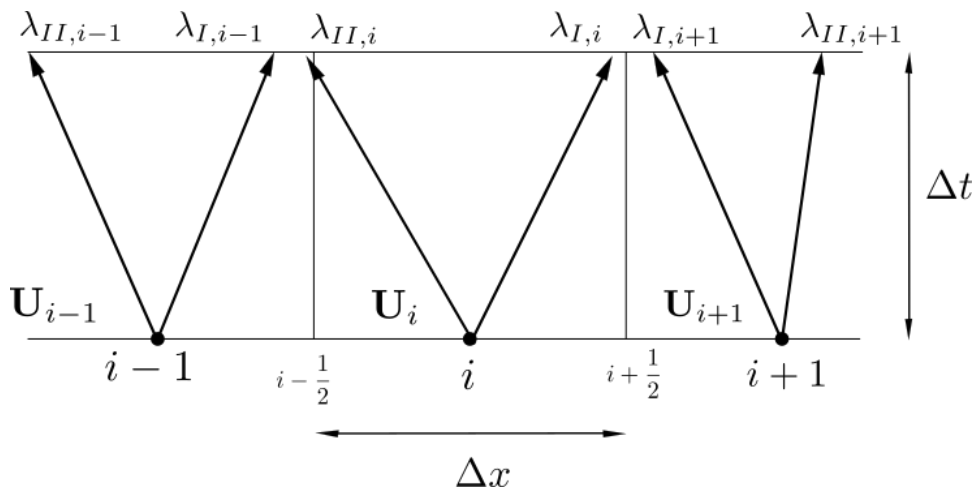


Fig. D.1: La información de U que se transmite con velocidad λ_k no debe viajar más lejos que a las celdas adyacentes.

Dada esta formulación es necesario garantizar que la distancia que viaja la información a velocidad λ_k , Figura D.1, en un intervalo de tiempo Δt es menor la longitud característica

de discretización espacial Δx para que la actualización en la celda i siga dependiendo únicamente de los valores en la mismas y los de las celdas adyacentes. Es decir que:

$$c = \frac{\lambda_k \Delta t}{\Delta x} \quad (\text{D.1})$$

donde se debe cumplir que el número c de la condición CFL (Courant Friedrichs Lewy) cumpla con la desigualdad $0 \leq c \leq 1$. A nivel de un dominio discretizado de celdas Δx el intervalo de tiempo de cálculo Δt que se impone es:

$$\Delta t = c \frac{\Delta x}{\lambda_k^{max}} \quad (\text{D.2})$$

Siendo el valor λ_k^{max} el máximo entre las velocidades de las ondas para las celdas del dominio de cálculo.

El desarrollo expuesto es estrictamente válido para el sistema homogéneo donde la condición CFL sería 1. En un caso como el bicapa con una importante influencia de los términos fuente \mathbf{S} , serán éstos últimos los que impongan la condición de estabilidad temporal. La dificultad reside en que siendo ésta nueva condición mucho más restrictiva no se ha desarrollado un análisis capaz de establecerla explícitamente.

D.2. Condiciones iniciales y de contorno

En el inicio de cualquier problema numérico a resolver es necesario establecer unos valores en $t = 0$, asociados al vector de variables conservadas \mathbf{U} , para cada una de las celdas i del dominio computacional de cálculo. Particularizado al caso del bicapa 1D se deben definir las variables de calado h_2 h_1 y los caudales $h_2 u_2$ y $h_1 u_1$.

Mención aparte reciben las condiciones de contorno. Hasta el momento se ha definido la actualización de la celda \mathbf{U}_i^{n+1} como función de la propia celda \mathbf{U}_i^n y las celdas anexas \mathbf{U}_{i+1}^n y \mathbf{U}_{i-1}^n . Dado que al trabajar, en la práctica se define un dominio finito (x_0, x_N) con un nivel de discretización espacial Δx formado por un número de celdas $N = \frac{x_N - x_0}{\Delta x}$, es necesario establecer la información con la que se deben actualizar las celdas de los límites \mathbf{U}_0 y \mathbf{U}_N . En las simulaciones realizadas en este trabajo se ha aplicado la condición de contorno cerrado.

Contorno cerrado, a través del cual no se produce transferencia de fluido con el resto del entorno, de manera que en la actualización de las celdas solo existe contribución de la (derecha) en el caso de celda inicial 0 y de la (izquierda) para la última celda n . En la práctica esto supone que los flujos numéricos en las paredes $\mathbf{F}_{-\frac{1}{2}}^*$ y $\mathbf{F}_{N+\frac{1}{2}}^*$ (Figura D.2) se hacen nulos, al igual que los caudales $(h_2 u_2)_0$ $(h_1 u_1)_0$ $(h_2 u_2)_N$ y $(h_1 u_1)_N$.

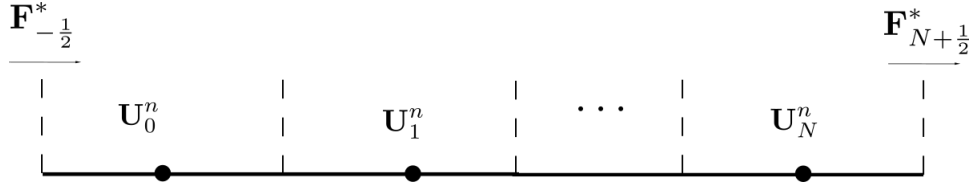


Fig. D.2: Flujos en los extremos del dominio.

D.3. Inestabilidades asociadas al fenómeno bicapa

A pesar de que ha sido la formulación desacoplada la utilizada para la obtención del sistema hiperbólico desarrollada desacoplada, no conviene olvidar su estrecha relación con la completamente acoplada y por tanto también con los fenómenos de inestabilidad en la interfaz que con ambas aparecen al resolver el problema bicapa.

A tal efecto son esclarecedores los estudios pioneros en flujo oceánico bicapa desarrollados por [32] que distinguen cuatro velocidades características de propagación, asociadas a una aproximación de primer orden de la matriz $\tilde{\mathbf{J}}$ del sistema completamente acoplado:

$$\begin{aligned} \lambda_{ext}^{\pm} &= \frac{u_1 h_1 + u_2 h_2}{h_1 + h_2} \pm \sqrt{g(h_1 + h_2)} \\ \lambda_{int}^{\pm} &= \frac{u_1 h_1 + u_2 h_2}{h_1 + h_2} \pm \sqrt{g(1-r) \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} - \frac{(u_2 - u_1)^2 h_1 h_2}{(h_1 + h_2)^2}} \end{aligned} \quad (D.3)$$

Los valores propios anteriores se obtienen bajo la aproximación de $r \simeq 1$. El término λ_{int} , corresponde con la velocidad característica de las ondas internas asociadas al desplazamiento de la interfaz. Se garantiza que $\lambda_{int} \in \mathbb{R}$ siempre que se cumpla la condición:

$$\hat{H} = \frac{(u_2 - u_1)^2}{g(1-r)(h_1 + h_2)} \leq 1 \quad (D.4)$$

Desde el punto de vista matemático ocurre que se rompe con la hiperbolicidad del sistema en su versión acoplada y por tanto no se cumple la condición necesaria para linealizar el sistema con el método de Roe [18]. Es razonable pensar que la formulación desacoplada modelizada en Roe, es en realidad una simplificación del caso acoplado y como tal resulta también afectada de estas inestabilidades matemáticas. En las condiciones simuladas con $r = 1$, de producirse una pequeña perturbación en la interfaz que induzca $|u_2 - u_1| > 0$ el modelo se inestabiliza rápidamente.

El término, llamado hiperbólico \hat{H} , evoluciona:

$$\hat{H} \uparrow = \begin{cases} |u_2 - u_1| \uparrow \\ h_2 + h_1 \downarrow \\ r \downarrow \end{cases} \quad (D.5)$$

Del análisis llevado a cabo por [32] para pequeñas ondas en la interfaz se concluye que para cualquier régimen de velocidad relativa $|u_2 - u_1|$ existen un conjunto de ondas por debajo de un valor crítico, asociadas a perturbaciones en la interfaz que se propagan amplificadas por un factor β . Cuando $\hat{H} > 1$ entonces este valor crítico se extiende hasta las perturbaciones con longitud de onda infinita λ_∞ , de modo que todas las ondas se amplifican a la vez que se propagan.

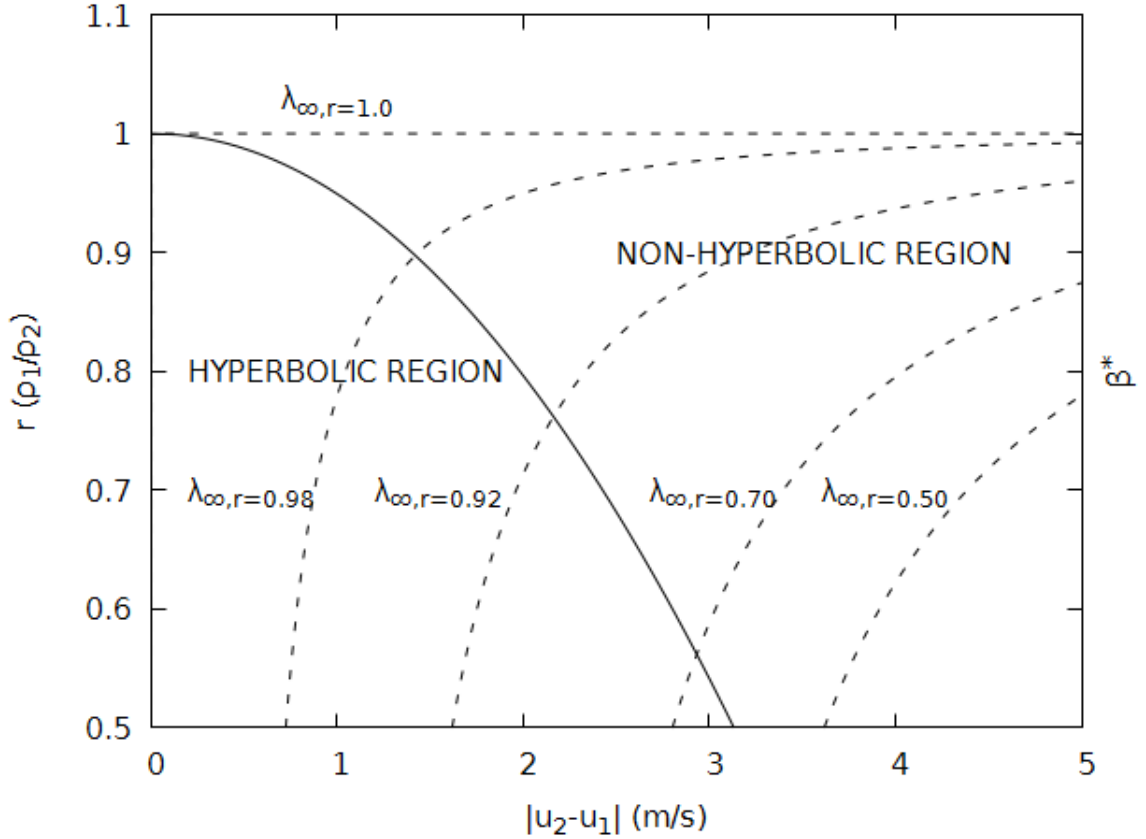


Fig. D.3: Conservación de la hiperbolicidad y curvas de amplificación β^* de una perturbación con longitud de onda infinita λ_∞ , como función de la relación de densidades r y la velocidad relativa entre capas $|u_2 - u_1|$ en un caso con $h_2 = h_1 = 1.0$ m.

A efectos prácticos se ha representado en la Figura D.3 la curva de amplificación de la perturbación con longitud de onda infinita λ_∞ dividida por la amplificación de dicha onda en el caso $r = 1.0$ (donde es la máxima posible), es decir $\beta^* = \frac{\beta_{\infty, r}}{\beta_{\infty, r=1}}$.

Como se muestra en la Figura D.3, en un caso extremo donde $r \rightarrow 1$ entonces $\hat{H} \rightarrow \infty$ y el sistema es hiperbólico de forma inestable, estrictamente solo si $|u_2 - u_1| = 0$. En esta situación todas las ondas se propagan con la máxima amplificación posible para cualquier valor de velocidad relativa $|u_2 - u_1| > 0$.

Al reducirse la relación de densidades r aumenta la velocidad relativa $|u_2 - u_1|$ que establece el punto en el cual se produce la pérdida de la hiperbolicidad y se amplifican todas las longitudes de onda. Es decir, que el fenómeno de inestabilidad global se retrasa y además

la curva de amplificación toma valores más pequeños.

Se puede concluir que este comportamiento inestable estará asociado indefectiblemente a los resolvedores de Riemann como Roe, que emplean de un modo u otro la información asociada a las velocidades características. Se atenúa lógicamente cuando $r \rightarrow 0$ como se evidencia en la Figura 3.7, pero dependerá en todo caso del valor de la velocidad relativa $|u_2 - u_1|$.