Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Una propuesta para la introducción de la derivada en el primer curso de Bachillerato de Ciencias Sociales

A Proposal on Introducing the Derivative in 11th Grade – Social Studies

Autor

Pedro Martín Navarro

Director

Dr. D. José María Muñoz Escolano

Facultad de Educación

Noviembre 2019

Contenido

Comentario preliminar

En las hojas siguientes se presenta una propuesta didáctica para la introducción del concepto de derivada en el currículo de los alumnos de primero de Bachillerato de la rama de Ciencias Sociales. Se presenta como aportación personal y culminación del Máster de Profesorado de Secundaria de la Universidad de Zaragoza bajo la forma de Trabajo Fin de Máster.

Por un lado, se trata de analizar y traducir el contenido bajo los términos técnicos de *objeto matemático* (y su *razón de ser*), *campos de problemas*, *técnicas*, y las *tecnologías que las justifican*; por otro lado, se busca recoger "la experiencia personal y vital" (Guía docente TFM, 2017) de haber aplicado las unidades pedagógicas durante el *prácticum* con los alumnos de bachillerato. En este punto hay que resaltar que parte de esta propuesta ha sido refrendada satisfactoriamente con dichos alumnos.

Así, voy a tratar en las posteriores líneas de aunar los dos discursos: uno con pretensiones "objetivas – objetualizantes" (recordemos que tratamos con *objetos* matemáticos) e "institucionalizantes", y otro discurso en el entorno de la psicología – pedagogía (es decir, de lo subjetivo) donde, más allá de tratar con contenidos epistemológicos, nos las estamos viendo con oportunidades de lograr captar la atención de los alumnos, explorar nuevas formas de motivarlos, crear cohesión entre ellos, detectar posibles mejoras en la convivencia y en las eventuales necesidades educativas especiales, etc.

Y al mismo tiempo, y rodeando al conjunto cuando no ofuscándolo, la cuestión casi imperativa que, para bien o para mal, se ha convertido en *conditio sine qua non*: la *innovación*. Nuestra propuesta ha de ser, por tanto, objetiva y subjetiva al mismo tiempo y además, innovadora. Han pasado ya trescientos años desde que Newton y Leibniz (por separado) asentaran las bases del cálculo diferencial y muchas generaciones de matemáticos han elucubrado sobre la cuestión; ya solo desde que se implantó el máster de profesorado de secundaria en la Universidad de Zaragoza en septiembre de 2009, estimamos que se habrán desarrollado más de cuatrocientas propuestas (solo en la rama de Matemáticas), y todas concebidas con una promesa innovadora. En todo caso, me han resultado iluminadoras, entre ellas, las de Marc Gómez (Gómez, 2013), Ángela Hernández (Hernández, 2017) e Inmaculada Guzmán (Guzmán, 2017).

A. Sobre la definición del objeto matemático que enseñar

A.1. Objeto matemático y su ubicación

El *objeto matemático* del que aquí vamos a tratar es la derivada en un planteamiento que pretende introducir al alumnado, de una manera razonada y gradual, en una serie de conceptos vinculados entre sí: tasa media de variación, tasa instantánea de variación, pendiente, función derivada de una función, etc.

Como se planteará en las páginas que siguen, la introducción se realizará por medio de, entre otras, la cuestión de la pendiente de la recta a una curva en un punto. Esta curva representará en un inicio trayectorias a lo largo del tiempo, y de aquí la idea de la velocidad instantánea (es decir, del instante en el *tiempo*) surgirá inmediatamente. Se ampliará el paradigma a otros ejemplos sin el tiempo como variable independiente, pero desde la base asimismo de la tasa de variación.

El currículo asociado a este curso de 1º de Bachillerato en la rama de Ciencias Sociales, y en concreto para el tema de la derivada, aparece en la Orden de 1 de julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón (BOA 17/07/08), y muy concretamente en el bloque de Análisis, donde se explicitan entre otros, los siguientes contenidos:

- Tasa de variación media y tasa de variación instantánea. Aplicación al estudio de fenómenos económicos y sociales. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Recta tangente a una función en un punto.

- Función derivada. Reglas de derivación de funciones elementales sencillas que sean suma, producto, cociente y composición de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.

En la misma orden se expresa una serie de criterios, entre los que destaca para nuestro objetivo:

Crit.MCS.3.5. Conocer e interpretar geométricamente la tasa de variación media en un intervalo y en un punto como aproximación al concepto de derivada y utilizar las reglas de derivación para obtener la función derivada de funciones sencillas y de sus operaciones.

Y trae parejos unos estándares de aprendizaje:

- Est.MCS.3.5.1. Calcula la tasa de variación media en un intervalo y la tasa de variación instantánea, las interpreta geométricamente y las emplea para resolver problemas y situaciones extraídas de la vida real.

- Est.MCS.3.5.2. Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función y obtener la recta tangente a una función en un punto dado.

También podemos fijarnos qué criterios han sido asignados al curso siguiente (2º de Bachillerato):

- Crit.MCS.3.1. Analizar e interpretar fenómenos habituales de las ciencias sociales de manera objetiva traduciendo la información al lenguaje de las funciones y describiéndolo mediante el estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características.

- Crit.MCS.3.2. Utilizar el cálculo de derivadas para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función, para resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social y extraer conclusiones del fenómeno analizado.

Vemos que los problemas de optimización han sido pospuestos a este segundo curso.

A.2. Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático que se pretenden enseñar

Basándonos en los contenidos del currículo que se ha indicado arriba, podemos pensar en los siguientes campos de problemas, que se detallarán más adelante: (1) tasa de variación media de una función espacio-tiempo (fase de "pre-cálculo"), (2) tasa de variación instantánea y tangente de una función , (3) cálculo de la derivada en un punto por aproximación numérica, (4) cálculo *algebraico* de la derivada en un punto y de la función derivada, y (5) relación entre la representación gráfica de una función y su función derivada.

A los que hemos estudiado la derivada partiendo de su definición a través del límite nos pareció una forma coherente y analíticamente impecable de introducirla. Esto no quitaba, por otra parte, a que fueran bien recibido los ejemplos y situaciones cotidianas que lo ilustrasen al mismo tiempo, con la accesoriedad de una nota a pie de página.

Sin embargo, los estudios coetáneos de Azcárate, Casadevall, Casellas, y Bosh (1996) revelan que este comienzo con el formalismo del límite (sobre todo por tratarse de uno de cocientes incrementales) asusta al alumnado y lo restringe a un ámbito algebraico donde se ve la resolución del límite como el fin último de la derivada. De esta manera se habrían soltado los puentes con la realidad física, y con ellos las ideas intuitivas que podrían conservar intacta esa idea de derivada como medida de variación de cosas tan frecuentes como la velocidad instantánea de un coche o el incremento de la superficie de una esfera que se va hinchando.

Quizá por una cuestión de solemnidad, rigor de notación, o por pura inercia histórica de la enseñanza tradicional basada en aspectos formales, las propuestas que aportaron los del Grup Zero barcelonés o el Grupo Cero valenciano (1977) no pudieron ver la luz, o no gozaron de popularidad en su momento. En concreto nos apoyaremos en las propuestas de este último grupo en este trabajo.

Se van a seguir aquí, de esta manera, la propuesta de Azcárate *et al.* (1996) que intenta superar el límite funcional como conocimiento previo y la derivada como el conocimiento adquirido, y en la que podríamos distinguir cinco "campos de problemas":

I. Campo de problemas que se ocupa del "pre-cálculo" o cálculo de tasas de variación.
II. Campo de problemas que ponen el foco de la derivada como la función pendiente de una curva, que es la de la tangente en un punto.
III. Campo de problemas donde se calcula la derivada en un punto como una aproximación numérica.
IV. Campo de problemas que se encargan del cálculo algebraico de la derivada en un punto y de la función derivada.
V. Campo de problemas donde se relacionan las expresiones gráficas de las funciones y de sus funciones derivadas.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

B.1. Justificación habitual de la introducción escolar del objeto matemático

Vamos a fijarnos en cómo introducen la derivada en el curso de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales en tres de las editoriales españolas más importantes: Edelvives, SM y Santillana.

Tanto Edelvives como SM utilizan la estampa del coche para utilizar la velocidad instantánea como paradigma del cálculo de la derivada. Parten, por tanto, de una aplicación física completamente extendida en nuestra vida real. Es una imagen potente del progreso moderno que queda lejos de las indagaciones del mundo clásico en torno a las propiedades de las curvas, aunque quizá también de aquellos alumnos que optan por una rama social en un intento por soslayar cuestiones de mecánica y de la física en general.

El salto a la derivada ocurre, por tanto, desde la tasa de variación media: como un límite que simplifica una operación más o menos engorrosa de irnos acercando en la operación de calcular una tasa de variación que cada vez cuenta con un denominador más pequeño.

Así, se empieza dando la expresión para la tasa de variación media, TVM, de una función *f*, en un intervalo [a, b] como

$$TVM = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

De aquí se pasa a definir la tasa de variación instantánea (de f en x=a), incluyendo un límite:

$$TVI = \lim_{a \to b} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

que más tarde se introduce en su forma equivalente, realizando el cambio de variable de $h=b-a$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Se le da más tarde una interpretación geométrica, como la tangente de la curva de *f*. Tanto en Edelvives como en SM se plantea la expresión de esa curva, en concreto, mediante la pendiente:

$$m=f'(a)$$

y una expresión genérica de la recta tangente:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

Después se presenta la *función* derivada, como aquella *f'(x)* que asigna a cada *x*, su correspondiente derivada. En Edelvives aprovechan, además, para presentar la segunda derivada como una derivación, a su vez, de esta primera derivada. No se adelantan las implicaciones del cálculo de esta segunda derivada en la valoración de máximos o mínimos, sino que simplemente se deja abierta la posibilidad a que podemos seguir derivando n-ésimamente.

Pero en todo caso tampoco se explicita que la magnitud que aparece en el cuadro de mandos del coche está calculada por aproximación y que no es exacta. O en todo caso, no más exacta que el cálculo que podamos tomar mediante una tasa de variación media muy refinada, en cuyo cálculo hacemos tender el intervalo de tiempo a algo muy pequeño pero que nunca será cero. Este carácter "escurridizo" de la derivada comprendo que lo intenta recoger la propuesta de Santillana cuando incluyen la derivada como un apartado de un tema que sí contiene a la derivada en su título ("Continuidad y *derivabilidad*") pero que empieza presentando el concepto de límite. O dicho de otro modo, aunque se introduzca el límite en los tres planteamientos, en este de Santillana aparece la derivada como consecuencia natural del límite; y no el límite como herramienta para calcular derivadas, aun cuando la historia indica que el límite surge por el interés en el cálculo de derivadas (Ortega y Sierra, 1998).

Así, si comparamos la disposición de las unidades de derivadas en los tres textos, podemos hacer un esfuerzo por seguir el desarrollo en cada una de las tres propuestas, elaborando el siguiente esquema:

Edelvives	**SM**	**Santillana**
		9.1. Límite de una función
		9.2. Límites infinitos y en el infinito
		9.3. Propiedades de los límites
		9.4. Indeterminaciones
		9.5. Continuidad de una función en un punto
9.1. Tasas de variación	13.1. Tasa de variación	
	13.2. Tasa de variación media	9.6. Variación media de una función
	13.3. Tasa de variación instantánea	9.7. Variación instantánea de una función
9.2. Derivada de una función en un punto	13.4. Derivada de una función en un punto	
9.3. Función derivada		9.8. Derivada. Función derivada
		9.9. Interpretación geométrica
		9.10. Derivabilidad y continuidad
		9.11. Derivadas aplicando los cuatro pasos
9.5. Ecuación de la recta tangente a una curva en un punto	13.5. El problema de la tangente	9.15. Recta tangente y recta normal

	14.1. Derivada del producto de un número por una función	9.13. Derivadas de operaciones con funciones
	14.2. Derivada de la suma y diferencia de funciones	9.14. Regla de la cadena
	14.3. Derivada de funciones compuestas	
	14.4. Derivada de la función recíproca	
	14.5. Derivada del producto de funciones	
	14.6. Derivada del cociente de funciones	
9.4. Derivada de funciones elementales	13.6. Dos derivadas fundamentales	9.12. Tabla de derivadas
	14.7. Derivada de la función potencial	
	14.8. Derivada de la función logarítmica	
	14.9. Derivada de la función exponencial	
	14.10. Derivada de la función seno	
	14.11. Derivada de la función coseno	
9.6. Monotonía y extremos relativos		

En la tabla anterior vemos que, prácticamente, en Edelvives y SM se trata del contenido en un mismo orden. En SM se pormenorizan las funciones elementales, otorgándoles una sección a cada una de ellas, mientras que en Edelvives se comprimen todas en una tabla. También en Edelvives aparecen las propiedades de las operaciones con derivadas en los márgenes, mientras que en SM ocupan una sección propia (“derivada del producto de funciones”, “derivada del cociente de funciones”, etc).

La monotonía y los extremos relativos son incluidos solo por Edelvives, en Santillana se posponen para 2º de Bachillerato, y en SM se proponen para la unidad siguiente (“Monotonía y curvatura”).

El planteamiento desde Santillana es distinto, y considera la derivación un caso de estudio dentro del límite. No es menos cierto que en Edelvives aparecen los límites justo en la unidad anterior a la de las derivadas, pero considero que la propuesta de Santillana logra convertir a la derivada en una consecuencia lógica del límite, y no en un apartado estanco como en Edelvives o SM. Aunque en los tres textos se hable de la tasa de variación, en Santillana parece que se ponga el acento en la propiedad de que las funciones varíen, y no en la tasa en sí. Si no, parece que la derivada haya sido posible por la tasa (“operativamente” solo, si se quiere), cuando lo que la posibilita es la variación en sí de la función.

Sin embargo, este ejercicio de abstracción por parte de Santillana queda algo oscurecido por la algo sentenciosa propuesta de la sección 11: “Derivadas aplicando los cuatro pasos”. Desconozco si se debe a un intento de motivar al alumno asegurándole que bastará con *exactamente* cuatro pasos para saber derivar, o a un impulso irrefrenable por *hacer listas* (algo que más que tener rédito pedagógico, impide trabar el discurso). Ciertamente no le ha pasado desapercibido el caso a un catedrático de universidad de análisis matemático (Córdoba, 2007), que ha preferido contenerse y dejar el asunto en “perogrullesco”.

B.2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente

Sigamos, por ejemplo, la propuesta de Santillana. Como se acaba de ver, aun difiriendo en la manera de agrupar el contenido, este como tal es común con las otras de Edelvives y SM. Se trata, sobre todo, de *ejercicios*.

- [1] Ejercicios para afianzar las técnicas de cálculo de la tasa de variación media en distintos intervalos:

> 1. Dada la función f(x)=3x-2, halla la variación media en los intervalos:
>   a) [1, 5]
>   b) [-2, 0]
>   c) [2, 7]
>   d) ¿Cómo es siempre esa tasa? ¿Con qué valor coincide?
>
> 2. Halla la tasa de variación media de la función f(x)=4-x^2 en los intervalos:
>   a) [-2, 1]
>   b) [0, 1]
>   c) [-1, 1]
>   d) ¿Es siempre constante? (Santillana, p. 175)

Entendemos que de esta forma se puede introduciendo ya la relación de la tasa de variación con la pendiente de la propia recta.

La técnica se basa en la resolución del ratio o tasa *TVM (a,b)* = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y la tecnología es la propia aritmética de las fracciones.

- [2] Ejercicios con el objetivo de acercar la idea de la tasa de variación al cálculo infinitesimal del límite, que posibilita el cálculo de la derivada, (y a su representación geométrica como la pendiente de la recta tangente a la curva por ese punto, pero por ahora nos quedamos en la técnica del cálculo de los cocientes incrementales):

> 1. Dada la función f(x)=$2x^2+1$ y el punto x=1:
>   a) Completa el siguiente cuadro:

x	2	1,5	1,1	1,01	1,001
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

> b) ¿Cuál es la pendiente de la tangente a la curva en x=1?
>
> (Santillana, p. 178)

En este caso, la técnica es similar al campo de problemas anterior, pero con la variante de que tenemos fijado un extemo (el *1*, y por tanto, también *f(1)*). De nuevo, la tecnología que justifica esta técnica son las operaciones aritméticas con sumas y fracciones.

- [3] Ejercicios sobre el cálculo de las derivadas aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La tecnología en que se apoya son las operaciones con límites y la manipulación de funciones en general, y en concreto, en la tecnología de la potencia, que permite las siguientes expresiones equivalentes:

$$x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

Conejo, Arce y Ortega (2014 y 2015) realizan un concienzudo análisis de la justificación de las técnicas de derivación en los principales libros de texto españoles a través de conceptos de otros autores relevantes: esquema de prueba, pruebas preformales, las funciones de la demostración, las expresiones o el reconocimiento de procesos.

Su interés para nosotros radica en las categorías que nos abre a la hora de definir el tipo de justificación posible, tal y como están definidas en (Conejo, 2015) en referencia a lo que llaman *esquemas de prueba* (EP):

1. No se hace ningún tipo de justificación del enunciado (EP0).
2. EP inductivo de un caso (EPi1): se trata de convencer de la validez de una conjetura mediante la evaluación cuantitativa de un caso particular.
3. EP inductivo de varios casos (EPiV): como en el caso anterior, pero se realiza con varios casos particulares.
4. EP inductivo sistemático (EPiS): como en los casos anteriores, pero los ejemplos particulares se eligen de forma organizada, cubriendo las posibles diferentes casuísticas.
5. EP transformacionales (EPt): se realizan transformaciones de imágenes o signos por medio de la deducción.
6. EP axiomáticos (EPa): se realiza la demostración a partir de axiomas, entendiendo como tales los enunciados primarios y los resultados que se han deducido previamente mediante las correspondientes demostraciones.
7. Pruebas preformales (PP): se incluye como EP por su carácter de convencimiento y persuasión. Refleja la esencia de una demostración formal (EPt y EPa) y, por tanto, hereda el carácter axiomático y transformacional de estos EP.

Entendemos que nos hemos encontrado con esquemas de prueba EP0, es decir, sin justificación, junto con casos de esquemas inductivos y pruebas preformales.

B.3. Efectos que produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno

Esta propuesta quiere incidir en la idoneidad de una enseñanza de la derivada que promueva el cambio de registros, esto es, un método donde el enfoque mediante gráficos, o tablas, tenga tanto peso como el numérico o el algebraico. Arce, Conejo y Muñoz (2019) se refieren a esto mismo cuando aseguran que “tareas en contextos numéricos o gráficos […] son menos habituales, y facilitarían desarrollar esa comprensión más completa” (p. 322).

De ahí que los efectos que produce la enseñanza “tradicional” presentada en el apartado anterior podrían ser entendidos dentro de un marco que *no* facilita la posibilidad de cambiar de contextos. En esta misma línea, González, Múñiz y Rodríguez (2018) recogen la situación de “algebrización del concepto de derivada” de tal manera que “no se analiza con suficiente profundidad su concepción como razón de cambio y como pendiente de la recta tangente”.

Si queremos estudiar estos efectos en el estudiante, no faltan los autores que se han aventurado en la especulativa tarea de analizar sus procesos mentales. Coexisten varios modelos para explicar la comprensión del concepto de derivada, como el “histórico-epistemológico” de Contreras, Luque y Ordóñez (2003), las “teorías de la reificación” de Zandieth (2000), o la “teoría APOE” (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) de Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf (1997).

Además de este esfuerzo por compendiar el estado actual de la cuestión, González et al. (2018) han recopilado también errores y dificultades usuales entre los alumnos de Bachillerato. Se recupera de Radatz (1979, 1980) su clasificación de errores a través de Rico (1998).

Hemos confirmado en los libros de texto presentados un común denominador: los “casos de uso” de la derivada (que podríamos hacer equivaler a “campos de problemas”) de la derivada son presentados brevemente e ilustrados con ejercicios donde ya se muestran las técnicas de su resolución. El alumnado podría pensar que en esa resolución radica la importancia de este nuevo objeto “derivada”, cuando lo que nos parece realmente relevante es cómo vamos a usar la derivada para caracterizar situaciones “cambiantes”.

Frente a esto, en los libros de Grupo Cero (1977) las ilustraciones ocupan a veces toda la página y, si aparece alguna fórmula, está reducida a la mínima expresión. No se acomete desde el principio la tarea de resolver o llegar a alguna solución numérica. Si, como ya se comentó antes, los miedos del alumno se disparaban tan pronto como les era presentado el límite de cociente de incrementos, ahora podríamos suponer que se sientan abrumados por la llamada de “ir a resolver”.

Es evidente que aquí debe surgir la voz del profesor para elegir un relato interesante, trazar un sentido a los contenidos de los libros de texto y darle la justa importancia tanto a esas fórmulas enmarcadas a lo largo de las páginas y que el alumno supone que son importantes, como a esas notas al margen que el alumno puede suponer que no lo son.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

C.1. Conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático

Se recomiendan en Azcárate *et al.* (1996) una serie de conocimientos y habilidades previas, que a su vez recoge Gómez (2013):

1. Dependencia entre dos variables (funciones), que abarca, a su vez: variables dependientes e independientes, dominio, imagen, gráfica, fórmula, crecimiento y decrecimiento, variación entre dos valores del dominio y extremos relativos y absolutos.
2. Función lineal.
3. Función afín.

4. Pendiente de una recta.
5. Velocidad media.
6. Tangente y secante a una circunferencia.
7. Velocidad medida por un velocímetro.
8. Lectura e interpretación de gráficos: gráficos espacio-tiempo, intervalos de crecimiento, extremos.
9. Cálculo de variaciones y de tasas de variación media partiendo de la gráfica o de la fórmula.
10. Cálculo e interpretación de la pendiente de una recta a partir de la ecuación de la misma o de su representación gráfica.
11. Uso de la calculadora.
12. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas: suma, producto y cociente de polinomios.

Podemos ver, además, en qué sucesión de contenidos aparece la derivada dentro del 1º de Bachillerato. Dentro de sus respectivos libros de texto, las unidades anteriores constituyen la unidad 9 de Edelvives: Derivada de una función; las unidades 13 y 14 de SM: Tasas de variación y derivadas, y *Cálculo* de tasas de variación y derivadas; y la unidad 9 en Santillana: Continuidad y derivabilidad.

Edelvives	**SM**	Santillana
1. Números reales I	1. Números reales: operaciones	1. Números enteros y números racionales
2. Números reales II	2. Números reales: ordenación	2. Ecuaciones y sistemas de primer grado
3. Polinomios	3. Polinomios	3. Ecuaciones y sistemas de segundo grado
4. Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	4. Ecuaciones e inecuaciones	4. Números irracionales. Números reales
	5. Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss	5. Progresiones. Matemática financiera
5. Funciones reales de variable real	6. Funciones	6. Funciones
6. Funciones elementales	7. Funciones dadas por tablas	7. Polinomios. Funciones polinómicas
7. Interpolación	8. Progresiones. Matemática financiera	
	9. Transformaciones geométricas y funciones	
	10. Funciones exponenciales y logarítmicas	8. Funciones trascendentes
	11. Funciones periódicas	
8. Límites de funciones. Continuidad	12. Tendencia y continuidad	**9. Continuidad y derivabilidad**
9. Derivada de una función	**13. Tasas de variación y derivadas**	
	14. Cálculo de tasas de variación y derivadas	
	15. Monotonía y curvatura	
	16. Estudio y representación de funciones	10. Funciones y gráficas
10. Introducción a la integral		
		11. Estadística: tablas, gráficos y parámetros
11. Distribuciones bidimensionales	17. Distribuciones unidimensionales y bidimensionales	12. Distribuciones bidimensionales

		13. Encuestas, tasas, índices y precios
12. Combinatoria		
13. Probabilidad		
14. Distribuciones discretas. Distribución binomial	18. Distribuciones discretas. Distribución binomial	14. Distribuciones de probabilidad
15. Distribuciones continuas. Distribución normal	19. Distribuciones continuas. Distribución normal	15. Distribución binomial y normal

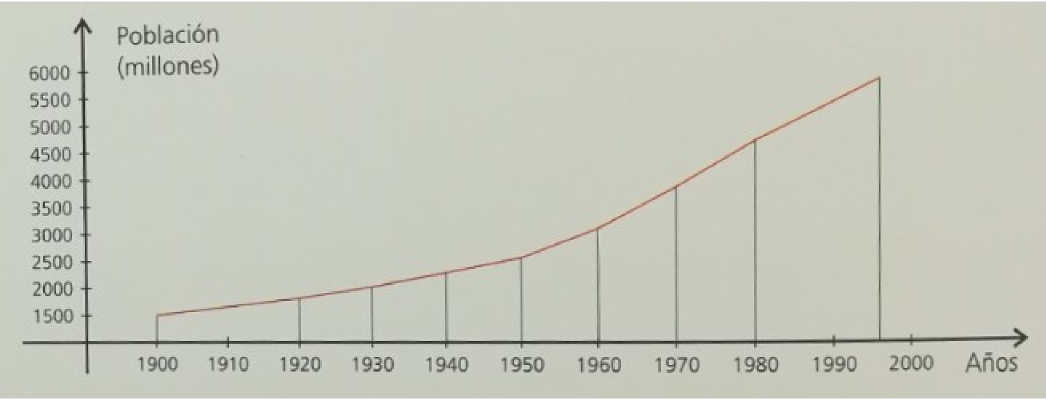
C.2. Cómo de propicia ha sido la enseñanza anterior para que el alumno adquiera esos conocimientos previos

En la tabla anterior podemos observar cómo los contenidos de los primeros temas van a usarse en los siguientes, no ya como objeto principal de estudio, sino como herramienta. De ahí la necesidad de haberlos asentado correctamente en su momento. En concreto, y a la vista de la tabla comparativa que hemos confeccionado, parecen imprescindibles las operaciones con límites y la destreza al manejarse con las funciones habituales (polinómicas, potenciales, exponenciales, logarítmicas).

En la medida que los alumnos hayan aprovechado las clases anteriores, podrán sacar el mismo provecho de la unidad de las derivadas que aquí nos atañe. En todo caso, podemos asegurarnos un aterrizaje más o menos suave con un primer acercamiento intuitivo, tal como proponen los primeros ejemplos que encontramos en los libros de texto, o en autores como en Vrancken, Engler, Müller y de Santa Fe (2008):

- La variación de la población mundial (Edelvives)
- La variación de los decibelios percibidos en un coche (SM)
- La variación de las ganancias en la venta de coches (Santillana)
- La variación de la distancia recorrida por un coche (Vrancken *et al.*)

Los ejemplos anteriores van acompañados de una gráfica que ilustra variaciones en una magnitud a lo largo del tiempo, de manera que se invita al alumno a utilizar la intuición.



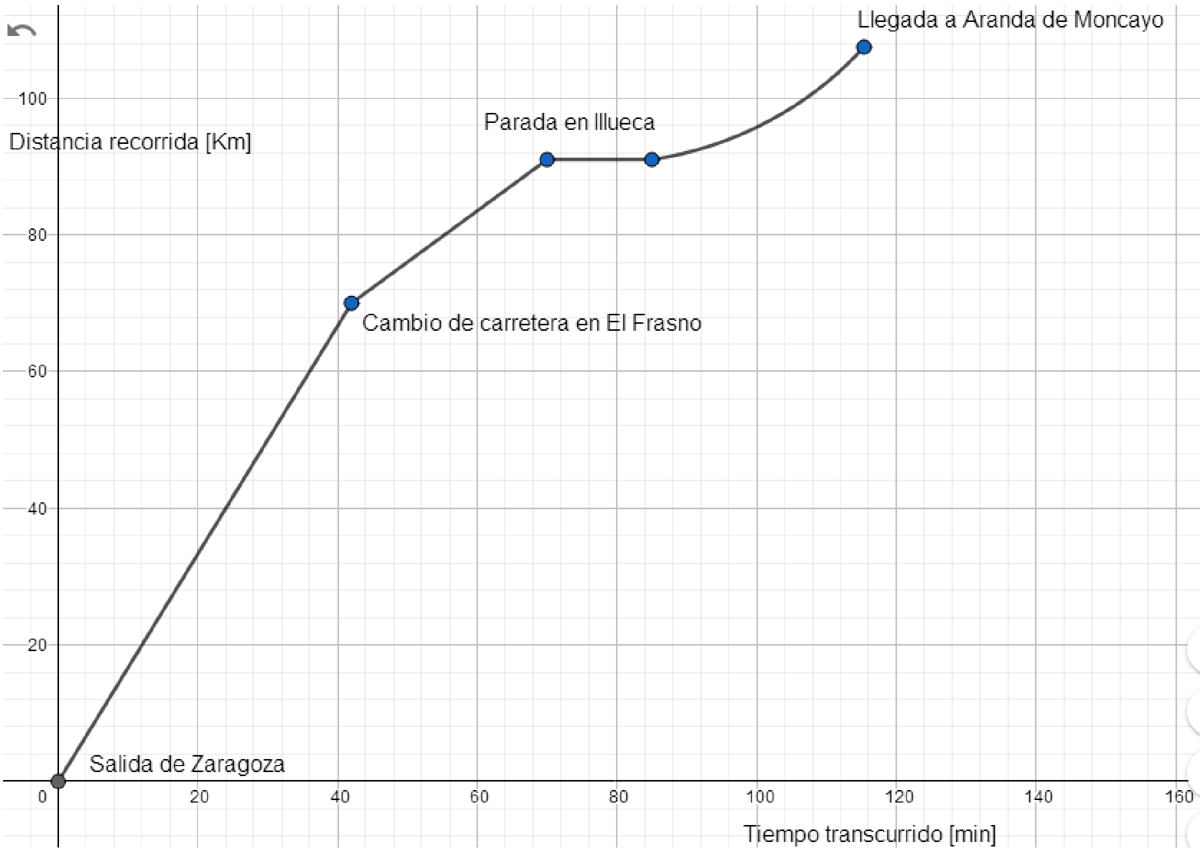
(Edelvives, p. 166)

Como ya habíamos advertido, el coche parece haberse convertido en el paradigma por excelencia de la realidad, entendida en su modernidad más palpable, incluso cuando no sea su velocidad la que da cuenta de la variación (sino también las unidades vendidas, el ruido que produce su motor en decibelios, etc).

C.3. Actividades para asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos

Entiendo que los contenidos aquí presentados empiezan desde un nivel asequible, pero no es menos cierto que es imprescindible cierta destreza con operaciones con polinomios, tener claro lo que se está haciendo en cada paso. En general, este "pensar matemático" ha sido conceptualizado por autores como Niss (2003).

Podemos inspirarnos en el primer problema propuesto por Grupo Cero (1977, p. 49) para activar y consolidar los conocimientos previos, pero con un contexto más local:



Se trata de una gráfica que muestra la distancia recorrida por un coche desde Zaragoza a Aranda de Moncayo. En las abscisas, el tiempo en minutos; en las ordenadas, la distancia en kilómetros medida desde el origen (Zaragoza). Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche durante el recorrido?
b) ¿Cuál ha sido la velocidad media que ha llevado desde que ha salido de Zaragoza hasta que ha salido de Illueca? ¿Y si descuentas el tiempo que ha estado parado?
c) ¿Cuál ha sido la velocidad media de Illueca a Aranda de Moncayo?
d) ¿Cuál ha sido la velocidad media entre el instante que marca 95 minutos y el instante que marca 105 minutos?

La implementación en el aula de este ejercicio "cero" se llevará en la misma línea que se presenta en D. 4. y en general, en las demás resoluciones de problemas.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

D.1. Razón o razones de ser que se van tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático

Para alguien que haya cursado estudios superiores donde volvieran a aparecer las derivadas, habrá encontrado en los problemas de optimización la razón de ser de aquellas. Algo que, sin embargo, no han podido tantear con soltura los alumnos de 1º de Bachillerato para los que ha sido preparado esta unidad.

En esta propuesta, sin embargo, la razón de ser del objeto matemático de la derivada es la posibilidad de cuantificar el cambio "instantáneo", y de permitirnos tener una expresión para la pendiente de la recta que toca a la función en un punto dado de una manera impecable. Se trata de enunciar y resolver problemas elementales que constituye el paso de la tasa de variación media a la derivada.

En resumen, estamos recogiendo la razón de ser histórica del cálculo de la pendiente de la tangente, tal y como se comentará en la próxima sección.

D.2. Grado de coincidencia con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto matemático

La derivada se ha tratado con cantidad de enfoques o aproximaciones distintos a lo largo de la historia. Ante este *factum*, se ha visto en cada intento (que tuvo un sentido concreto en su momento histórico) un significado *parcial*. Es el caso de Pino-Fan, Díaz y Font (2011), que distinguen concretamente nueve "configuraciones epistémicas":

1. la tangente en la matemática griega
2. sobre la variación en la edad media
3. métodos algebraicos para hallar tangentes
4. concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes
5. las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos
6. métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes
7. el cálculo de fluxiones
8. el cálculo de diferencias
9. la derivada como límite

Esta investigación nos permite observar diferentes interpretaciones históricas del concepto de derivada y alumbrar aspectos parciales, y en algunos casos poco conocidos de ella. Los autores las integran bajo el concepto holístico de "significado global de referencia". De las nueve configuraciones anteriores, entendemos que la que más se ajusta a nuestro enfoque ha sido la de "concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes".

Podemos seguir la clasificación de los distintos problemas que apuntan:

- problemas sobre tangentes
- problemas sobre máximos y mínimos
- problemas sobre velocidades

Pineda (2013) señala un recorrido parecido, si bien pone el acento en un “comienzo en el rigor en el cálculo” al referirse al momento histórico cuando Leibniz propone sus *diferenciales* y Cauchy hace lo propio con sus *infinitesimales* (después de señalar a Fermat y a Descartes como autores de varios métodos para hallar máximos, mínimos y tangentes a una curva). De la misma forma señala una serie de aplicaciones, que podemos traducir en campos de problemas:

- el análisis y el trazado de curvas
- hallar los máximos y mínimos de funciones
- hallar la ecuación de la recta tangente en un punto dado
- maximizar la producción y las utilidades en una empresa o minimizar los costos de operación

Por otra parte, uno de los más bellos pasajes por la historia de las matemáticas en general, y de cómo se vertebraron históricamente los estudios en torno a la derivada, viene de la mano del que fuera Catedrático de Cálculo Infinitesimal en la Universidad de Zaragoza, Zoel García de Galdeano (Galdeano, 1907).

D.3. Diseño de problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático que se van a enseñar

Vamos a utilizar un problema del Grup Zero de 1980, según se recoge en Azcárate *et al.* (1996), con el fin de presentar la razón de ser del campo de problemas I.

A intervalos de 5 segundos se observa la posición de un coche (respecto a un punto de referencia O) con el fin de observar si en algún momento supera la velocidad máxima permitida. Los datos obtenidos, considerando que el instante en que pasa por el punto *O* es el instante cero, son:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia al punto O (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche durante el intervalo total de tiempo (40 s) y la velocidad media del coche en cada uno de los intervalos de 5 segundos.

b) Haz una estimación de la velocidad del coche en el momento en que el cronómetro indica 20 segundos.

c) Estima durante cuánto tiempo la velocidad fue inferior a 18 m/s. Si la velocidad máxima autorizada es de 72 km/h, ¿ha habido algún momento en que fuese superada?

D.4. Metodología que seguir en su implementación en el aula

En esta propuesta didáctica se va a primar la dedicación de tiempo de clase a reflexionar y resolver, en grupo, sobre los problemas propuestos. Este problema propuesto en el apartado anterior no va a ser la excepción, por lo que propondremos grupos de cuatro/cinco personas donde esperamos que surja el debate.

El profesor irá pasando por las mesas supervisando y descubriendo dónde van apareciendo las dificultades. Después de dedicar unos 15 minutos (unos cinco por apartado) invitará a los alumnos que haya detectado más dubitativos en la resolución que salgan a la pizarra a solucionar los problemas. Se trata de que se genere debate y el trabajo en grupo resulte beneficioso.

En este problema concreto, y por tratarse de los primeros que presentamos en clase, preferimos darle protagonismo a la pizarra, al entender que así se conseguirá trabajar mejor el contexto tabular. Ya tendremos tiempo más adelante de apoyarnos en alguna herramienta tecnológica.

E. Sobre el campo de problemas

E.1. Diseño de distintos tipos de problemas que se van a presentar en el aula

Como ya se adelantó, vamos a trabajar cinco campos de problemas. Para cada uno, propondremos un par que consideremos arquetípico. Uno de los dos lo trabajaremos en clase, y el otro lo propondremos de deberes para el día siguiente.

<u>Campo I</u>: Tasa de variación media de una función espacio-tiempo (fase de "pre-cálculo").

[1. 1] Plantearemos el problema recogido de (Grup Cero 1977, p. 56):

```
Se están haciendo pruebas de un dispositivo que permite a los aviones aterrizar en pistas de corta longitud. Se toma una película desde el momento en que un avión toma tierra hasta que se detiene. Se miden los tiempos y las distancias recorridas, que son estos:
```

Tiempo (segundos): t	0	2	4	6	8	10	12
Distancia (metros): d	0	100	175	230	270	300	325

```
a) Calcúlese la velocidad media durante el intervalo de tiempo total y en cada uno de los intervalos de dos segundos.

b) ¿Es constante la velocidad media?
```

[1. 2] Usaremos el problema que acabamos de presentar en el apartado D. 3.

<u>Campo II</u>: Tasa de variación instantánea y tangente de una función. Se trata de poner el foco en la derivada como la función pendiente de una curva, que es la de la tangente en un punto.

[2. 1] Hemos elaborado el siguiente problema:

Dos motocicletas A y B parten del mismo punto kilométrico. El espacio recorrido (en kms) por cada uno de ellos viene dado por las funciones A(x) = x y B(x) = $0.5*x^2$ respectivamente, según el tiempo expresado en minutos.
a) ¿Cuántos kms han recorrido las motocicletas después de 2 minutos?
b) ¿Cuántos kms han recorrido las motocicletas después de 4 minutos?
c) Calcula la velocidad media de las motocicletas en el intervalo [0, 2] minutos.
d) Calcula la velocidad media de las motocicletas en el intervalo [0, 4] minutos.
e) Calcula la velocidad media de las motocicletas en el intervalo [2, 4] minutos.
f) ¿Qué pasa con la velocidad media en los tres intervalos indicados en c), d) y e)?
g) ¿Cuál es la velocidad de A en el instante 2 minutos?
h) ¿Cuál es la velocidad de B en el instante 2 minutos?
(Puedes utilizar GeoGebra para responder)

[2. 2] Tomamos el siguiente problema de Azcárate et al. (1996, p. 41), que tiene la particularidad de no tener el tiempo como la variable independiente:

Un depósito para líquidos tiene forma de cono invertido con unas dimensiones de 1 m de radio y 1 m de altura:
a) Haz la gráfica de la función que nos da el volumen de agua según la altura del líquido.
b) Calcula la tasa media de aumento de volumen en litros por centímetro de altura cuando el nivel sube de los 20 a los 30 cm. ¿Y cuando sube de los 80 a los 90 cm?
c) Si el depósito está lleno y se vacía completamente, calcula la tasa media de variación de volumen de líquido al descender el primer centímetro y al descender el último centímetro.

Campo III: Cálculo de la derivada en un punto por aproximación numérica.

[3. 1] Tal y como se recoge en Azcárate *et al.* (1996, p. 61), aunque le añadimos la posibilidad de resolverlo con GeoGebra.

Queremos calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa 1. Para ello:

a) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo [0, 1.5]. Hazlo en papel milimetrado (y luego también usando GeoGebra) y escoge la misma unidad para los dos ejes de manera que una unidad sea de 10 cm, procurando hacer la gráfica con la máxima precisión en el entorno del punto de abscisa 1.

b) Traza aproximadamente la recta tangente y calcula su pendiente. Compara el resultado con el obtenido por tus compañeros. ¿Es posible calcular el valor exacto de la pendiente de la tangente? ¿Cuántos puntos de una recta se necesitan para determinar su dirección y por lo tanto para calcular su pendiente? Y en cambio, ¿cuántos puntos de la recta tangente conoces con total precisión?

c) Calcula la pendiente de la recta que corta a la gráfica (recta secante) en los puntos de abscisa 1 y 1,5. Hazlo con toda precisión utilizando las coordenadas de los dos puntos obtenidas mediante la fórmula de la función.

d) Pon el resultado obtenido en el apartado anterior en el lugar que le corresponda en la tabla siguiente. Completa las tablas haciendo lo mismo para otras rectas secantes de modo que todas corten la curva en dos puntos: uno común a todas ellas, el punto de abscisa 1, y el otro, un punto de abscisa x cercano a 1.

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
f(x)					
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

x	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
f(x)					
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

e) Observa las sucesiones de números de la última fila de las dos tablas: ¿hacia qué número tienden esas sucesiones? ¿Cuál crees que es el valor exacto de la pendiente de la recta tangente?

[3. 2] De González et al. (2018) tomamos el siguiente problema:

La gráfica de más abajo corresponde a una función f de la que se conocen además los valores que figuran en la tabla siguiente:

x	f(x)
3	1,25
5	3,25
5,5	4,0625
5,9	4,8025
6	5

En consecuencia, de las afirmaciones que siguen, ¿cuál puede ser cierta?

a) $\lim_{x \to 6} f(x) = 2$

b) $f'(6^-) = 2$

c) $f'(3^-) = -1.25$

d) $\lim_{x \to 3} f(x) = -2.5$

Campo IV: Cálculo algebraico de la derivada en un punto y de la función derivada.

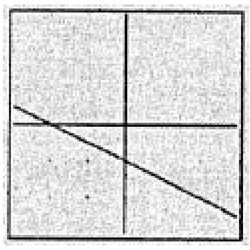
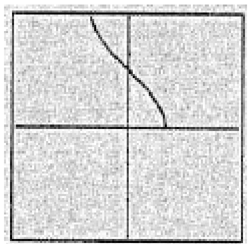
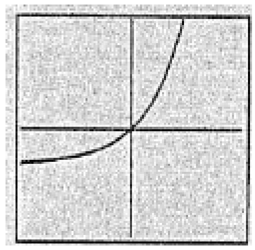
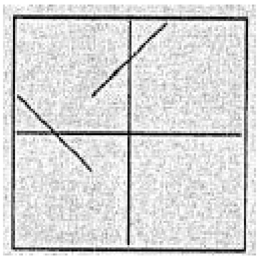
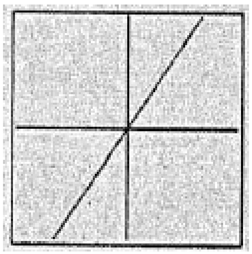
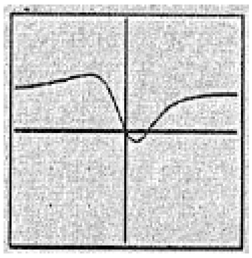
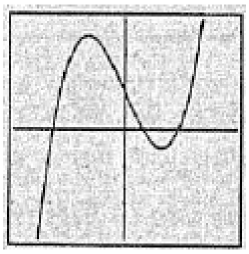
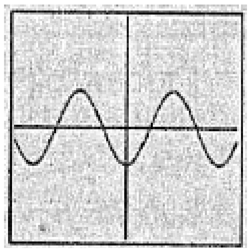
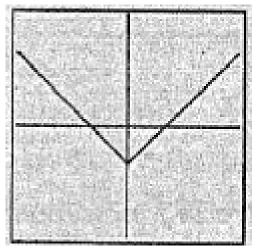
[4. 1] Halla la derivada de $f(x) = (x-1)^2$ en $x = 2$.

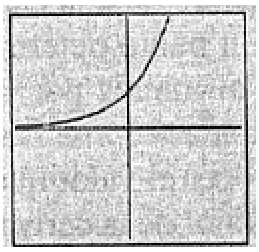
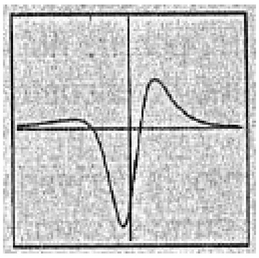
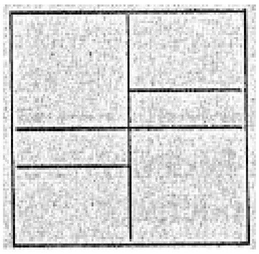
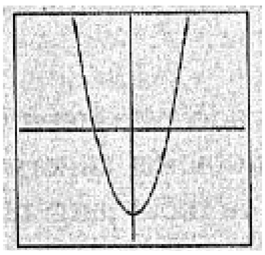
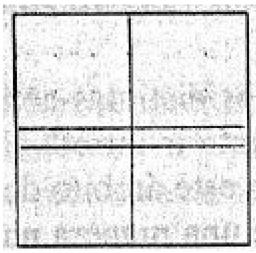
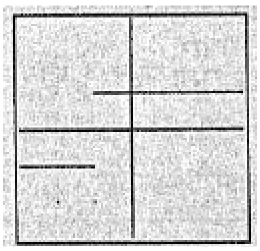
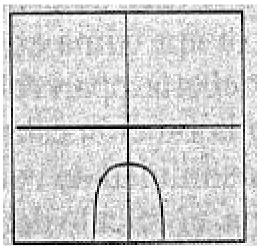
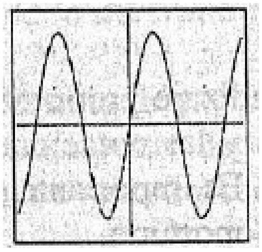
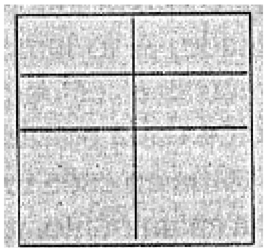
[4. 2] Se realizará el problema propuesto en E. 2.

Campo V: Relación entre la representación gráfica de una función y su función derivada.

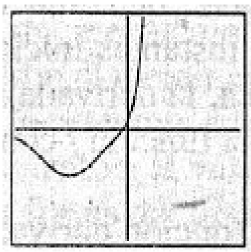
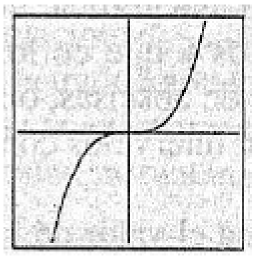
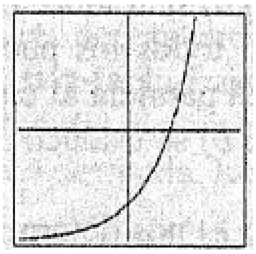
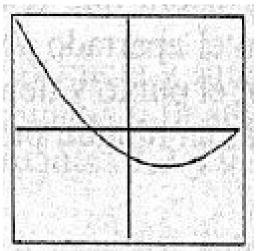
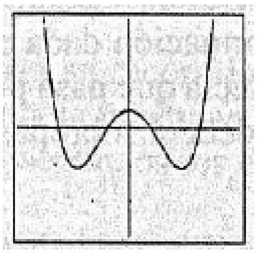
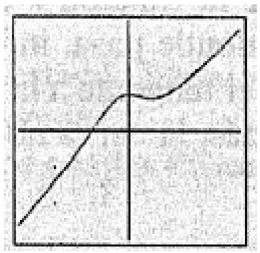
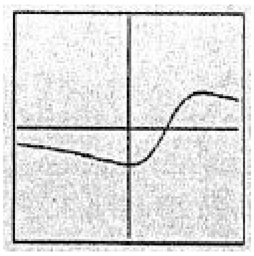
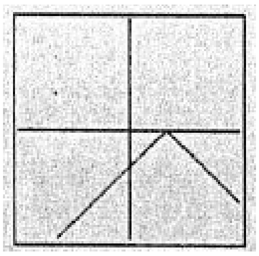
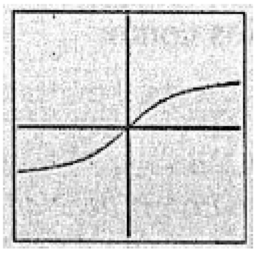
De un problema recogido en Azcárate *et al.* (1996, p. 64), vamos a extraer los dos siguientes:

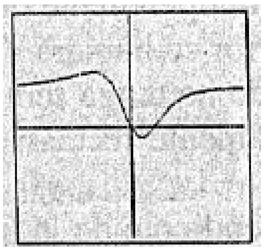
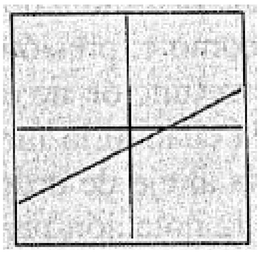
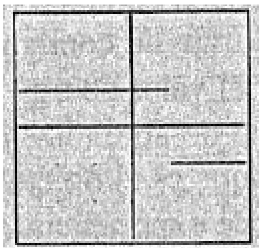
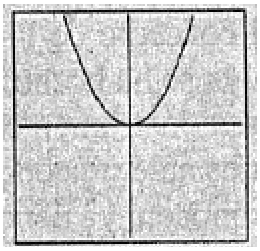
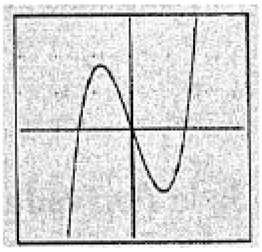
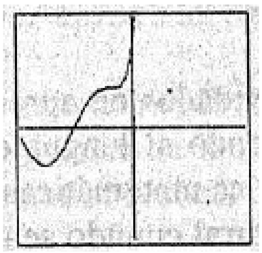
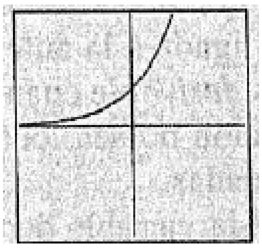
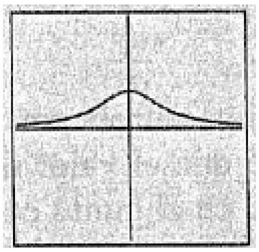
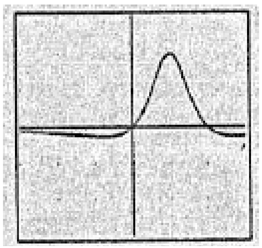
[5. 1] Relaciona cada función (tabla de letras) con su función derivada (tabla de números):

 A	 B	 C
 D	 E	 F
 G	 H	 I

 1	 2	 3
 4	 5	 6
 7	 8	 9

[5. 2] Relaciona cada función (letras) con su función derivada (números):

 J	 K	 L
 M	 N	 P
 Q	 R	 S

 10	 11	 12
 13	 14	 15
 16	 17	 18

E.2. Modificaciones eventuales de la técnica inicial que van a exigir la resolución de dichos problemas

En la medida de lo posible, haré más hincapié en lo provechoso de la comprensión razonada y no del ejercicio memorístico. Intento evitar conceptos o protocolos más o menos mecánicos (“la regla de los cuatro pasos” para derivar, o las “tres condiciones que se deben dar para que la función sea derivable en un punto”) en favor de un razonamiento más natural o espontáneo.

Para el campo de problemas en torno a la aproximación numérica al cálculo de la derivada de una función en un punto (campo de problemas II). Podemos fijarnos en la resolución que sigue para el siguiente ejercicio (Corazonistas, 2017):

EJERCICIO 3 : Halla la derivada de la función f(x)=(x – 1)^2 en x=2, aplicando la definición de derivada

Solución: $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^2-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x=2$

Analizando la resolución podemos señalar las posibles dificultades con los que se puede encontrar el estudiante:

- No acordarse de la fórmula de la definición de derivada en un punto
- Acordarse de la fórmula pero no saber qué hay que restar
- No saber hacia qué número ha de tender el límite
- No resolver el límite correctamente

Ante esta situación, propongo los siguientes remedios, que por otra parte pueden parecer muy evidentes:

- Recordar que la derivada mide la “variación” en un punto. Por lo tanto, podremos pensar en la tasa de variación media como un inicio.
- Recordando el significado de TVM, sabremos que debemos restar los *valores* de la función en los puntos, dividido entre la *distancia* entre los puntos. Si tienen interiorizada la idea de “variación”, pensarán en la idea de “cuánto cambia la función entre dos puntos”, o equivalentemente: “el trozo de lo que hay en el eje de las y” entre “el trozo lo que hay en el eje de las x”.
- El límite ha de tender precisamente al punto en el que queremos calcular la variación. Un ejemplo equivalente se ha propuesto en clase: el de ir en coche desde una localidad a otra. Tomemos, por ejemplo, de Madrid a Barcelona. Podríamos calcular la velocidad *media* (y la tasa de variación media) entre los dos extremos, es decir, Madrid y Barcelona. ¿Pero estando dónde tendríamos que fijarnos para hallar la velocidad *instantánea* cuando pasásemos por Zaragoza? ¡En x=”Zaragoza”! De la misma manera, tenemos que hacer tender nuestro límite al punto donde queremos calcular la derivada.

De esta manera, el alumno se ha enfrentado a un campo de problemas: el de usar la propia definición de derivada, donde sale a relucir su *tecnología*: el cálculo del límite de una variación, para el que hemos construido un intervalo, que cada vez vamos haciendo más pequeño. Es decir, usando la *técnica* del límite propiamente dicho.

Con estas ideas anteriores he concebido el siguiente ejercicio:

Queremos hallar la **pendiente** de la **recta tangente** a la parábola $f(x)=x^2+1$ en x=3.

a) Como una primera aproximación, deseamos calcular el valor de la parábola en x=3 y en x=3,00001.

Como no queremos escribir tantos decimales, vamos a usar la variable “z”, de tal manera que z=3,00001.

Calcula f(3), es decir, el valor de f(x) en x=3.

b) Sabemos que la Tasa de Variación Media de una función f(x) entre x=a y x=b se define como

$$TVM(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Escribe la expresión para la TVM de f(x) entre 3 y z. No calcules f(z), simplemente déjalo expresado como f(z).

c) Expresa la TVM anterior en el **límite** donde “z” tiende a 3.

d) ¿Cómo se conoce la expresión de ese límite? Resuélvelo.

Considero que de esta manera he ahorrado ejercicio “memorístico” y les he dado la ocasión de discurrir:

- He preferido dar un punto “concreto”, el x=3.00001, aun cuando proponga darle el nombre de “z”, para que piensen que es un “número que está muy cerca”.
- Les he recordado la fórmula de la Tasa de Variación Media, pero les hago discurrir sobre qué está pasando en ella.
- Les propongo que eso tiene que “tender” a algún sitio, ahora ellos tienen que pensar hacia dónde.
- No he nombrado la palabra “derivada” porque precisamente les estoy preguntando cómo se conoce todo esto que están haciendo. De ahí que haya empezado hablando de que queríamos hallar la pendiente a una recta.

E.3. Metodología que se va a seguir en su implementación en el aula

La metodología que se ha presentado en el apartado D. 4 para la implementación en el aula del problema que “se constituya en razón de ser” del objeto matemático de derivada, será la que seguiremos también en el resto de clases.

Se trata, por tanto, de presentar un problema característico del campo de problemas concreto y dejar que los alumnos lo resuelvan en grupos de cuatro/cinco alumnos durante unos 15 minutos. Después se pondrá en común en la pizarra, por parte de los alumnos que seleccione el profesor en los que haya detectado dificultades, pero con la participación de toda la clase, en un debate dirigido por el mismo profesor. Se trata, nuevamente, de que resulte provechoso para la totalidad de la clase.

Se busca de esta manera enseñar *desde el error*, de tal forma que los alumnos cuenten con herramientas para razonar y tener criterio para localizar y superar errores. Este enfoque “desde el error” supone que cuando un alumno yerra no es porque “no sepa”, sino porque se ha instalado en una creencia inexacta o incorrecta, que el debate dentro de la clase (y dirigido por el profesor) debería corregir.

Además se les pedirá a los alumnos que resuelvan en casa un problema para la siguiente sesión, del mismo campo de problemas. En esa sesión se corregirá el ejercicio en los primeros 20 minutos aproximadamente.

De esta manera, la clase de 50 minutos constará de unos primeros 20 minutos de resolución del problema para casa, más unos 15 minutos de resolución por grupos del nuevo problema arquetípico del nuevo campo de problemas, más otros 15 minutos de puesta en común en la pizarra de los resultados con su debate correspondiente. Según el criterio del profesor y la naturaleza del problema, se podrá utilizar, además, alguna herramienta tecnológica como GeoGebra para presentar los resultados.

F. Sobre las técnicas

F.1. Diseño de los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula

Vamos a apoyarnos en los problemas propuestos en el anterior apartado, donde se proponían dos para cada campo de problemas. Los hemos concebido para presentarlos en el aula precisamente.

F.2. Técnicas o modificaciones de una técnica que se ejercitan con ellos

Expliquemos ahora la técnica con que vamos a acometer cada campo de problemas. Desarrollar un análisis pormenorizado, como este, en campos, técnicas y tecnologías podría dar la falsa impresión de que la técnica es algo anecdótico, contigente al tipo de problema, cuando en realidad la estamos teniendo en cuenta ya desde el principio, al ir interrelacionada con el campo de problemas.

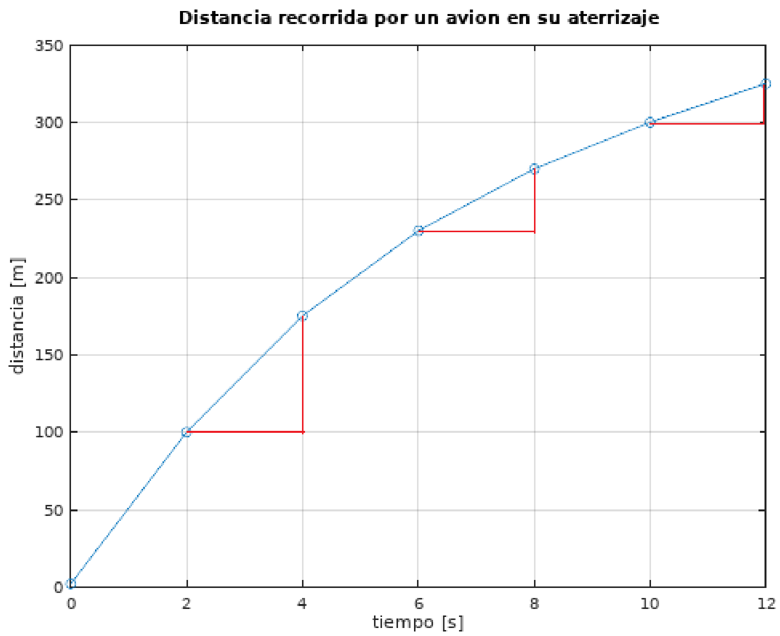
De hecho, entendemos que la técnica lleva en sí entrelazada una percepción concreta de la derivada. Podemos conceder que esa visión va a ser irremisiblemente parcial, pero puede ir enriqueciéndose con otros acercamientos posteriores. Mi punto de vista, tal y como ya he ido desvelando, es el de que esa aproximación a la derivada *es* la derivada, tanto como lo son las que le sigan después. Lo he de mencionar porque he notado mucha preocupación en algunos artículos académicos por revelar a los alumnos en qué consiste *la* auténtica derivada.

Así, si nos centramos en la recta tangente por ejemplo, encontramos en Orts et al. (2016) la propuesta de una "descomposición genética" para poder modelar los procesos mentales de los estudiantes hacia aquel fin. De esta manera, la "descripción del camino conjeturado de construcción de la concepción leibniziana a través de un conjunto de tareas diseñadas para apoyar la interiorización del proceso generado por las acciones del zoom" señala que "aplicar varios zoom sobre una función en un determinado punto" es una *acción*, que luego hay que *interiorizar*, para llegar al *objeto* de "concebir la función como un segmento cuya prolongación se definiría como recta tangente". En suma, según estos autores, hacer *zoom* sobre la función en la pantalla cobra trascendencia porque nos permite el acercamiento a la tangente viéndola como una prolongación del segmento, a la manera leibniziana. Y Arce *et al.* (2019) señalan las implicaciones geométricas de tres posibles visiones de rectas tangentes (euclideana, cartesiana y leibniziana) en tanto que del uso de una técnica u otra va a depender el enfoque que se formen los alumnos.

Centrémonos, entonces, en las técnicas con las que se va a enfrentar el alumnado al resolver los anteriores campos de problemas:

I. Cálculo de la tasa de variación media

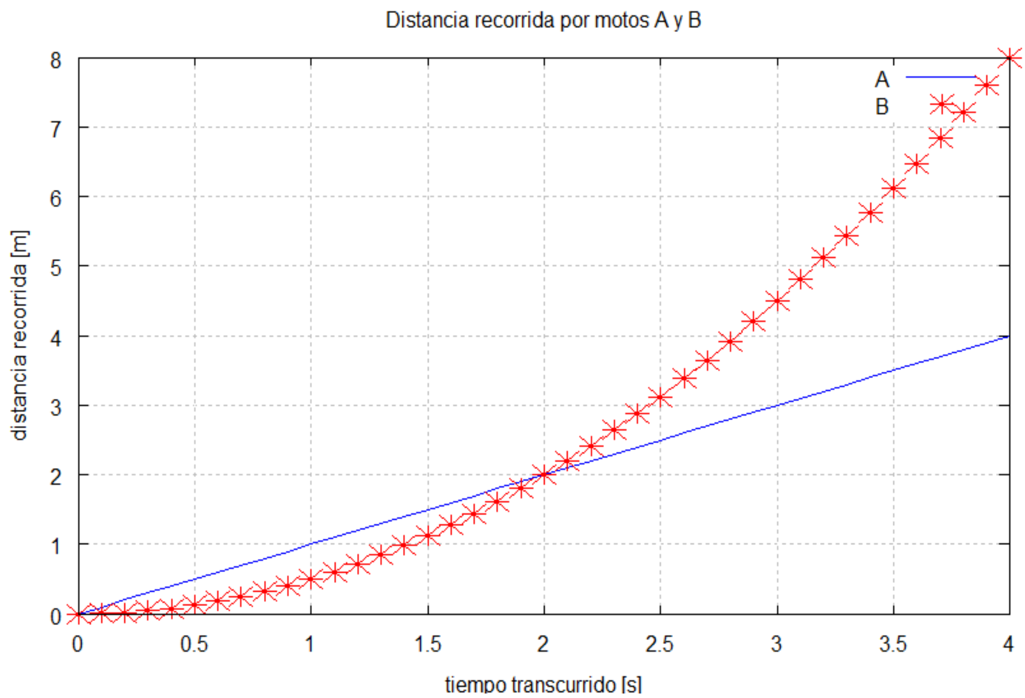
Si nos fijamos en el problema 1.1, y realizamos la gráfica de la distancia que recorre el avión a lo largo del tiempo de aterrizaje, obtenemos



Se busca que el alumno tenga el *feeling* de calcular las tasas de variación medias "sobre el papel": que vaya eligiendo los puntos para calcular la velocidad media en todo el recorrido o la velocidad media de cada segmento, o de varios segmentos…

II. Cálculo de la ecuación de la tangente de una función en un punto

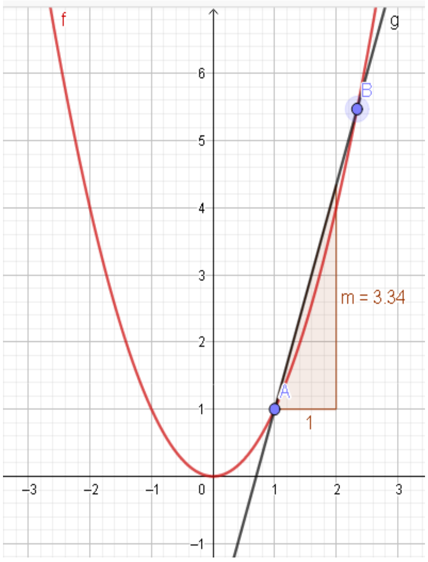
Una vez más, poder representar los datos del problema 2.1 añade un mayor campo de visión:



Vemos que a los 2 segundos, las dos motos han recorrido la misma distancia, pero en cuanto a las velocidades (las derivadas de la curva al fin y al cabo), la moto B lleva una velocidad mayor. De nuevo, los estudiantes pueden tomar los intervalos tan grandes o pequeños como quieran, pero aparece la idea de la velocidad instantánea como tangente a esa curva (en el caso de la moto A es aún más sencillo: la propia recta). Es un buen caso para introducir la variación instantánea (entendida como velocidad).

III. Cálculo de la derivada en un punto como una aproximación numérica.

En la resolución del problema 3.1 vamos a compaginar un contexto tabular y gráfico, y por encima de ambos, un cociente que tiende a un valor: idealmente, para cuando el segmento que une los dos puntos se hace cero. Estos dos puntos no son otros que el A (1,1), y otro que vamos acercando (x, f(x)). De esta manera, la recta que contiene el segmento tiene una pendiente dada por $\frac{f(x)-1}{x-1}$.



La posibilidad de utilizar software matemático que permite "recorrer" la función con un punto (B en la figura) inserto en ella, en este caso GeoGebra, permite una fácil visualización. La tarea del profesor será, por otra parte, que el alumno comprenda que cuanto más cerca estén A y B, más próximo estará ese valor de la pendiente de la recta tangente (idealmente cuando A y B sean el mismo punto).

IV. Cálculo algebraico de la derivada en un punto y de la función derivada.

Aquí la técnica se corresponde con operar con el límite del cociente de las diferencias, en concreto con el de $(x-1)^2$ en x=2 para el problema 4.1.

Se trata de dar herramientas algebraicas al alumno que ha comprendido que la recta tangente en el punto x=2 es "en el límite" el valor de la derivada.

V. Relacionar a representación gráfica de una función y su función derivada.
La técnica consistirá en fijarnos en los cambios que va tomando la función en el gráfico y fijarnos en los puntos donde se producen, y de ahí inferir a qué puntos de la función derivada se pueden corresponder. De esta forma, una función con pendiente negativa tendrá una función derivada negativa, y una función con pendiente positiva, tendrá una función derivada positiva. Ahora bien,

dependiendo de cómo esa esa subida o bajada de la función tendremos un equivalente distinto en la función derivada: si es lineal, tendremos un valor constante en la derivada (con signo positivo si la función crece, con negativo si decrece), cuanto más abrupto sea el cambio mayor será la derivada en valor absoluto.

Otra técnica que podemos utilizar es la de imaginarnos el aspecto de la recta tangente que va cortando por los distintos puntos y pensar en la pendiente que toman en ellos. Así, en los máximos y mínimos de la función tomará el valor de cero en la función derivada.

F.3. Adecuación de esas técnicas al campo de problemas asociado al objeto matemático

Como se acaba de exponer en el apartado anterior, cada tipo de problemas ha necesitado una técnica concreta de abordarlo.

F.4. Metodología que se seguirá en su implantación en el aula

Al estar relacionadas las técnicas para esta unidad tan íntimamente con los campos de problemas respectivos, como ya se ha comentado, la metodología para la implementación de las técnicas es, al fin y al cabo, la metodología para la implementación de los problemas. De esto ya se ha hablado en el apartado E.3.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

Tal y como se espera que ocurra en el trabajo *en grupo* que supone la preparación y corrección de los problemas propuestos, se irán generando unas necesidades que tendrán que ser resueltas por los alumnos. La justificación de las tecnologías correrá, por tanto, de parte de los propios alumnos. La sanción final del profesor a la hora de dar una versión (o versiones) definitivas supondrá la institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Creo que es importante señalar que en esta unidad didáctica de *introducción* a la derivada, la única definición propiamente dicha que aparecerá será la de derivada a través del límite de cocientes de variaciones. Pero esto no implica que técnicas como "elegir el intervalo más pequeño" o "detectar si la función crece o decrece" tengan que estar menos justificadas. El esfuerzo por que la propuesta cuente con un espacio central para la reflexión ha ido en este sentido.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

H.1. Secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores

Para asegurar una buena absorción de los conceptos y técnicas aquí expuestas, vamos a presentar los problemas que aquí se han descrito en sendas clases (de 50 minutos cada una). Más una primera clase donde se comprobarán los conocimientos previos, otra donde se llevará a cabo la prueba de evaluación, y una más donde se corregirá dicha prueba. En total, por tanto, ocho sesiones.

De esta manera, se proponen las siguientes actividades por sesión:

Nº Sesión	Actividades que se desarrollarán en ella	Tiempo estimado (minutos)
1	Se comprueban los conocimientos previos del alumnado, mediante el ejercicio propuesto en C. 3.	30
	Se presenta el primer problema del campo de problemas I (1.1) y se debate por grupos. Los alumnos ya tendrán pautas para poderlo resolver en casa para el día siguiente.	20
2	Se corrige el problema 1.1 propuesto del día anterior, según cómo se describe en el apartado sobre la metodología (E. 3).	20
	Se presenta el primer problema del campo de problemas II (2.1) y se debate por grupos.	15
	Se corrige dicho problema 2.1 y se manda de deberes el problema 2.2 para la próxima sesión.	15
3	Se corrige el problema 2.2 propuesto del día anterior.	20
	Se presenta el primer problema del campo de problemas III (3.1) y se debate por grupos.	15
	Se corrige dicho problema 3.1 y se manda de deberes el problema 3.2 para la próxima sesión.	15
4	Se corrige el problema 3.2 propuesto del día anterior.	20
	Se presenta el primer problema del campo de problemas IV (4.1) y se debate por grupos.	15
	Se corrige dicho problema 4.1 y se manda de deberes el problema 4.2 para la próxima sesión.	15
5	Se corrige el problema 4.2 propuesto del día anterior.	20
	Se presenta el primer problema del campo de problemas V (5.1) y se debate por grupos.	15
	Se corrige dicho problema 5.1 y se manda de deberes el problema 5.2 para la próxima sesión.	15
6	Se corrige el problema 5.2 propuesto del día anterior.	20
	Se aclaran dudas y se recuerda que en la sesión siguiente se realizará una prueba de evaluación.	30
7	Se realizará la prueba de evaluación descrita en el apartado I.1.	50

8	El profesor corregirá la prueba de evaluación, con la participación de, al menos, los alumnos en los que se haya detectado posibilidades de mejora.	50

H.1. Duración temporal aproximada

Tal y como se ha detallado en el apartado anterior, la presente unidad didáctica de introducción a la derivada constará de ocho clases de 50 minutos cada una.

I. Sobre la evaluación

I.1. Diseño de una prueba escrita (duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos

González et al. (2018) incluyen una serie de ejercicios que abarcan una visión muy completa, en tanto que suponen un manejo de diferentes registros (algebraico, pero también tabular y gráfico) y cierto nivel de abstracción. Vamos a recoger dos de ellos para nuestros respectivos ejercicios 2 (con algún añadido), 3 y 4.

Del Grupo Cero (1977, p. 57) tomamos el ejercicio 1. Después añadiremos un ejercicio 5, de tal forma que la prueba de evaluación quedará de la siguiente manera:

Ejercicio 1 (2 puntos):

Se observa la posición de un coche cada 5 segundos (respecto a un punto de referencia P) para comprobar si algún momento supera la velocidad máxima autorizada. Los datos obtenidos, suponiendo que en el instante cero pasa por el punto P, son:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (m)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche durante el intervalo de tiempo total (40 seg.), y la velocidad media en cada uno de los intervalos de 5 segundos.

b) ¿Ha ido a velocidad constante en el intervalo [15, 25]? ¿Y en el [15, 20]?

c) Si la velocidad máxima permitida es de 80 km/h, ¿hay algún momento en que es sobrepasada? ¿Estás seguro?

Ejercicio 2 (2 puntos):

Dados los siguientes datos de la tabla, contesta las siguientes preguntas:

a) Calcula un valor estimado para $f'(1)$. ¿Qué pares de puntos $(x, f(x))$ has tenido en cuenta para hacerlo? ¿Por qué?

b) Elige otros pares de puntos $(x, f(x))$. ¿Qué estimación para $f'(1)$ has obtenido? ¿A qué se puede deber la diferencia con el resultado del apartado a?

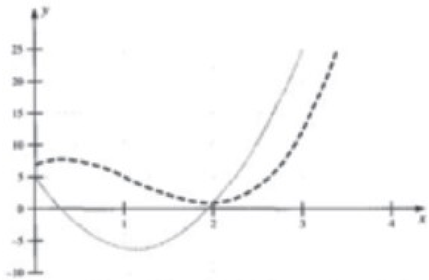
x	$f(x)$
0,8	3,34
0,9	3,81
0,95	3,9025
1	4
1,01	4,0201
1,1	4,21
1,15	4,62

Ejercicio 3:

Halla, mediante la definición, la derivada de $f(x)=x^2-4$ en $x=1$.

Ejercicio 4:

La siguiente figura muestra las gráficas de dos funciones: una es f y la otra su derivada f'. Asocia razonadamente cada función con su gráfica.



Ejercicio 5:

Sea la función de la curva $f(x) = x^2$.

a) Compara el crecimiento de la función f en x=2 con el crecimiento de f en x=4.

b) ¿Qué valor crees que tienen las pendientes de las rectas tangentes que pasan por (2,f(2)) y (4,f(4))?

I.2. Aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático que se pretenden evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba evaluación

La idea ha consistido en recoger problemas de los cinco campos de problemas, cada uno con las características que se han explicado anteriormente.

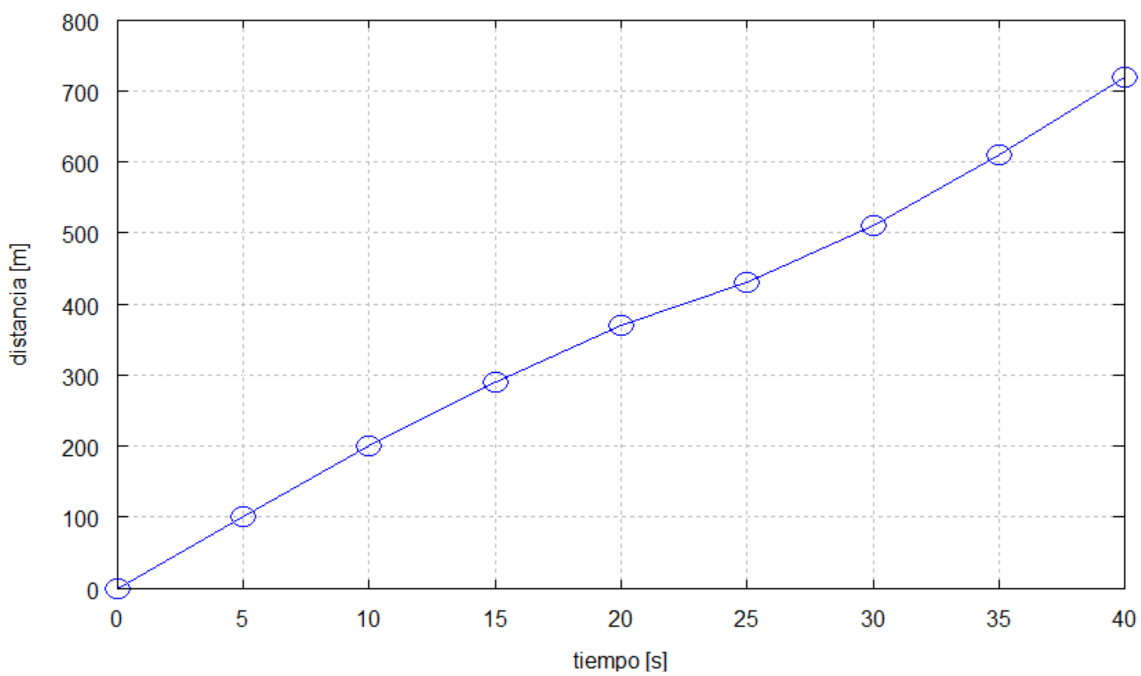
Así, el ejercicio 1 correspondería al campo de problemas I ("Tasa de variación media de una función espacio-tiempo"), el ejercicio 2 al campo de problemas III ("Cálculo de la derivada en un punto por aproximación numérica"), el ejercicio 3 lo haría al campo de problemas IV (" Cálculo *algebraico* de la derivada en un punto y de la función derivada"), el ejercicio 4 pertenecería al campo de problemas V ("Relación entre la representación gráfica de una función y su función derivada"), y el ejercicio 5 correspondería al campo de problemas II ("Tasa de variación instantánea y tangente de una función").

I.3. Respuestas esperables en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos

En el ejercicio 1 se espera de los alumnos que calculen correctamente las tasas de variación media de los intervalos correspondientes: tanto el total, como cada uno de los segmentos. No sería necesario representar la función gráficamente, si bien daría pistas sobre cómo de constante es la velocidad. En verdad, no conocemos la velocidad entre dos mediciones, solamente el espacio recorrido, por lo que este problema se circunscribe a las velocidades medias. Así, cuando se pregunta en el apartado "c" si se ha ido a velocidad constante entre en intervalo [15, 25], la respuesta sería negativa, porque las tasas en el intervalo [15, 20] y [20, 25] directamente ya no coinciden. Aun cuando coincidieran tampoco podríamos conocer estrictamente si la velocidad ha sido constante, puesto que solo tenemos dos puntos. Por tanto, la pregunta de si tendríamos velocidad constante en el intervalo [15, 20] se contestaría de la misma manera: no conocemos la velocidad *instantánea* en los infinitos instantes entre los segundos 15 y 20 para poder asegurarlo.

La velocidad media de cada segmento i en el intervalo [t_i, t_{i-1}], se calcularía fácilmente a partir de las distancias d_i recorridas:

$$TVM_i[t_i, t_{i-1}] = \frac{d_i - d_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$



Gráfica para el ejercicio 1

En cuanto al ejercicio 2, esperamos que los alumnos elijan los dos pares de puntos (x, f(x)) que permitan calcular la derivada en el punto (1,f(1)) con mayor precisión, esto es, decidir el punto con la abscisa más próxima a este. Así, el punto más cercano en abscisa es el (1.01, 4.0201), por lo que la estimación de la derivada es:

$$f'(1) \approx \frac{4{,}0201-4}{1{,}01-1} = 2{,}01$$

Nos gustaría que nos razonase que cualquier otro punto conseguirá un valor más burdo, por estar la abscisa más alejada del punto de la derivada.

En cuanto al ejercicio 3, esperamos que hayan cogido soltura a la hora de escribir con la notación del límite adónde tiene que tender la variable, y cuáles han de ser los incrementos. En todo caso, la respuesta razonable sería

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x^2-1)-f(4)}{x-4} \quad = \quad \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} \quad = \quad \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} \quad = \quad \lim_{x\to 4} (x+4) \quad = \quad 8$$

Podemos plantearnos algunos momentos más o menos decisivos en la resolución del ejercicio anterior. Por una parte, el cálculo del límite de un cociente de variaciones, donde se haga tender la variable x hacia el valor 4 (en tanto que es en este punto donde se quiere calcular la derivada). Por otra parte, se trata de resolver correctamente dicho límite.

En el ejercicio 4 esperemos que se fijen en el hecho de que una de las dos se vuelve cero, precisamente donde la otra alcanza el mínimo. De ahí que aquella es la derivada de esta, es decir, la función de trazo continuo es la derivada de aquella en trazo discontinuo. Nos parece igualmente lícito si el alumno razona con el decrecimiento ("y ahí su función derivada será negativa") y el crecimiento ("y ahí su función derivada será positiva") de la función, aunque no haga mención explícita a la derivada cero en el mínimo que aparece en la gráfica.

Por último, en el ejercicio 5, esperamos que recuerden el concepto de recta tangente, y piensen que cuanto más se apartan del origen de las abscisas, más pendiente va a tener las rectas. En todo caso, en x=2 la pendiente tiene valor 4, y en x=4, valor 8: una es el doble de la otra.

I.4. Criterios de calificación que se van a emplear

Vamos a valorar cada pregunta con 2 puntos, de tal manera que en total suman 10.

Para el ejercicio 1, los dos puntos se obtendrán si contesta correctamente a los tres apartados (cada apartado, $\frac{2}{3}$ = 0,67 puntos).

En el ejercicio 2 habremos de calibrar si el alumno entiende la necesidad de un cálculo en el *entorno* del punto donde queremos hallar la derivada. Somos conscientes de lo parcos que se puede llegar a ser en palabras en un examen de matemáticas, pero es importante que hayamos promovido el razonamiento y la reflexión durante las clases. Si ha razonado por qué elegir el punto con abscisa más cercana a 1 y lo ha calculado como cociente de incrementos, obtiene ya 1 punto. Si además, calcula correctamente otra aproximación cualquier y razona la desviación respecto de la primera calculada, obtendrá los 2 puntos.

En cuanto al ejercicio 3, el planteamiento correcto del límite del cociente de incrementos otorga 1 punto al alumno. Los 2 puntos se consiguen, además, si se resuelve correctamente el límite tras neutralizar el punto singular.

Para el ejercicio 4, si el alumno justifica razonablemente qué función es la derivada de la otra, obtiene los 2 puntos.

En el ejercicio 5, 1 punto se conseguirá si se relaciona que el crecimiento en $x=4$ es el doble que en $x=2$. Si además se razona que el valor de la pendiente en $x=2$ es de 4, y de 8 en $x=4$, dado que estas son equivalentes a la tasa de crecimiento (o derivada) en esos puntos $(x, f(x))$, obtendrá los 2 puntos.

Bibliografía

Anzola González, M., y Vizmanos Buelta, J. R. (2002), *Algoritmo : matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 1*, Madrid, SM.

Arce, M., Conejo, L., y Muñoz, J. M. (2019) *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Síntesis, Madrid.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K. (1997). The development of student's graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, y Bosh, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.

Conejo, L., Arce, M., y Ortega, T. (2014). Justificación de las reglas de derivación en libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 257-266). Salamanca: SEIEM.

Conejo, L., Arce, M., y Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *AIEM*, 8, 51-71

Contreras, A., Luque, L., y Ordóñez, L. (2003). Una perspectiva de la enseñanza aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en Bachillerato y Universidad. *Revista de Educación, 331*, 399-419.

Córdoba, A. (2007), *Libros de texto de Matemáticas en el Bachillerato español*, Colegio Libre de Eméritos, Universidad Autónoma, Madrid.

Cuadernillo de problemas para Bachillerato. (2017). C.P.E.I.P.S. Sagrado Corazón "Corazonistas", Zaragoza.

García de Galdeano, Z. (1907). *Algunas consideraciones sobre Filosofía y Enseñanza de la Matemática*, Zaragoza: https://es.wikisource.org/wiki/Algunas_consideraciones_sobre_filosof%C3%ADa_y_ense%C3%B1anza_de_la_matem%C3%A1tica

Gómez López, M. (2013). *Introducción a la derivada (1º Bachillerato)*. Trabajo Fin de Máster – Máster en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas. Universidad de Zaragoza.

González, A., Múñiz, L., Rodríguez, J. L. (2018) Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta*, 47, 449-462. Universidad de Oviedo.

Grupo Cero (1977). *Matemáticas de Bachillerato*. Valencia: Roberto Guillén, D.L.

Guía docente Trabajo Fin de Máster – Máster en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas. (2017). Universidad de Zaragoza, https://sia.unizar.es/documentos/doa/guiadocente/2017/68500_es.pdf

Guzmán Sancho, I. (2017). *Introducción a la derivada en el primer curso de Bachillerato*. Trabajo Fin de Máster – Máster en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas. Universidad de Zaragoza.

Hernández López, A. (2017). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el Bachillerato de Ciencias Sociales*. Trabajo Fin de Máster – Máster en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas. Universidad de Zaragoza.

Monteagudo Martínez, M. F. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1º Bachillerato: Humanidades y ciencias sociales*, Zaragoza, Edelvives.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En 3rd Mediterranean conference on mathematical education (pp. 115-124).

Nortes, A. (2002). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales : 1 bachillerato :* [Libro/Diario de clase], Madrid, Santillana.

Ortega, T. y Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza, *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, pp. 87-115.

Orts, A., Llinares, S., Boigues, F. J. (2016). Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta tangente. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10, 111-134.*

Pineda, C.E. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria*, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia – Facultad de Ciencias.

Pino-Fan, L. R., Díaz, J., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1).

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: A survey. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 16-20.

Rico, L. (1998). Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. En J. Kilpatrick, L. Rico, y P. Gómez (Eds.), *Educación matemática* (pp. 69-108). Bogotá: Universidad de los Andes.

Vrancken, S., Engler, A., Müller, D., y de Santa Fe, P. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Premisa*. *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática.* 10 (38), pp. 36-46.

Zandieth, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. En E. Dubinsky, A. Shoenfeld, y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. IV CBMS Issues in Mathematics Education* vol. 8, pp. 103-127. Providence, EEUU: American Mathematical Society.

ANEXOS

Resolución de los problemas vistos en clase

1. 1

a) Hallaremos la velocidad media, que es precisamente la TVM para cada segmento *i* de forma que

$$TVM_i[t_i, t_{i-1}] = \frac{d_i - d_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

Tiempo (segundos): t	0	2	4	6	8	10	12
Distancia (metros): d	0	100	175	230	270	300	325

Así, la velocidad media en cada segmento *i* es:

v1 = TVM[0, 2] = $\frac{100-0}{2-0}$ = $\frac{100}{2}$ = 50 m/s

v2 = TVM[2, 4] = $\frac{175-100}{4-2}$ = $\frac{75}{2}$ = 37,5 m/s

v3 = TVM[4, 6] = $\frac{230-175}{6-4}$ = $\frac{55}{2}$ = 27,5 m/s

v4 = TVM[6, 8] = $\frac{270-230}{8-6}$ = $\frac{40}{2}$ = 20 m/s

v5 = TVM[8, 10] = $\frac{300-270}{10-8}$ = $\frac{30}{2}$ = 15 m/s

v6 = TVM[10, 12] = $\frac{325-300}{12-10}$ = $\frac{25}{2}$ = 12,5 m/s

Y la velocidad media total:

vt = TVM[0, 12] = $\frac{325-0}{12-0}$ = 27,08 m/s

b) Vemos que las velocidades medias son distintas en cada segmento. Por tanto, no se mantiene constante.

1. 2

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia al punto O (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Tal y como hemos resuelto en el ejercicio anterior, las velocidades medias totales y en cada intervalo son:

vt = TVM[0, 40] = $\frac{720-0}{40-0}$ = 18 m/s

$$v1 = TVM[0, 5] = \frac{100-0}{5-0} = \frac{100}{5} = 20 \text{ m/s}$$

$$v2 = TVM[5, 10] = \frac{200-100}{10-5} = \frac{100}{5} = 20 \text{ m/s}$$

$$v3 = TVM[10, 15] = \frac{290-200}{15-10} = \frac{90}{5} = 18 \text{ m/s}$$

$$v4 = TVM[15, 20] = \frac{370-290}{20-15} = \frac{80}{5} = 16 \text{ m/s}$$

$$v5 = TVM[20, 25] = \frac{430-370}{25-20} = \frac{60}{5} = 12 \text{ m/s}$$

$$v6 = TVM[25, 30] = \frac{510-430}{30-25} = \frac{80}{5} = 16 \text{ m/s}$$

$$v7 = TVM[30, 35] = \frac{610-510}{35-30} = \frac{100}{5} = 20 \text{ m/s}$$

$$v8 = TVM[35, 40] = \frac{720-610}{40-35} = \frac{110}{5} = 22 \text{ m/s}$$

b) A los 20 segundos, estamos entre los intervalos 3 y 4, es decir, venimos de una velocidad media v3 = 18 m/s y vamos hacia una velocidad media v4 = 16 m/s. Podemos estimarla entonces como la media:

$$v(20 \text{ s}) = \frac{v3+v4}{2} = \frac{18+16}{2} = \frac{34}{2} = 17 \text{ m/s}$$

c) La velocidad media ha sido inferior a 18 m/s en tres intervalos, es decir, durante 15 segundos.

Por otra parte, 72 km/h = $\frac{72000\,m}{3600\,s}$ = 20 m/s. Se ha superado esta velocidad, de media, en el último intervalo.

2. 1

a) A los 2 minutos, la motocicleta A habrá recorrido A(2)=2 Km; y la motocicleta B, $B(2)=0.5*2^2=0.5*4=2$ Km

b) A los 4 minutos, habrán recorrido: A(4)=4 Km y $B(4)=0.5*4^2=0.5*16=8$ Km

c) Las velocidades medias vendrán dadas por el espacio recorrido entre el tiempo utilizado. Por lo tanto: la velocidad media de A en [0, 2]:

$$vA = \frac{A(2)-0}{2-0} = \frac{2}{2} = 1 \text{ Km/min} = \frac{1}{\frac{1}{60}} = 60 \text{ Km/h}$$

la velocidad media de B en [0, 2] coincide con la de A, al haber recorrido el mismo espacio en el mismo tiempo: vB = vA = 60 Km/h.

d) Repetimos el mismo procedimiento del apartado c) para el intervalo [0, 4]:

vA = $\dfrac{A(4)-0}{4-0}$ = $\dfrac{4}{4}$ = 1 Km/min = $\dfrac{1}{\dfrac{1}{60}}$ = 60 Km/h

Ahora el recorrido de B es distinto del recorrido por A, por lo que calculamos vB:

vB = $\dfrac{B(4)-0}{4-0}$ = $\dfrac{8}{4}$ = 2 Km/min = $\dfrac{2}{\dfrac{1}{60}}$ = 120 Km/h

e) Ahora el intervalo es el [2, 4]:

vA = $\dfrac{A(4)-A(2)}{4-2}$ = $\dfrac{4-2}{2}$ = 1 Km/min = $\dfrac{1}{\dfrac{1}{60}}$ = 60 Km/h

vA = $\dfrac{B(4)-B(2)}{4-2}$ = $\dfrac{8-2}{2}$ = 3 Km/min = $\dfrac{3}{\dfrac{1}{60}}$ = 180 Km/h

f) Vemos que las velocidades medias se han mantenido constantes para A (60 Km/h), mientras que para B ha aumentado: de 60 Km/h en el primer intervalo a 180 Km/h en el segundo, de ahí que la velocidad media tomando los dos intervalos haya sido de 120 Km/h.

g) Ahora se trata de estimar la velocidad en el *instante*. Como se nos ha dado la expresión de la distancia, podemos calcular las distancias justo una décima de segundo después (o tan cerca como quisiéramos) del instante que nos piden, y dividir entre el intervalo de tiempo tan pequeño como quisiéramos.

El recorrido a los 2.1 s de A vendrá dado por: A(2.1) = 2.1 Km

por lo que vA(2.1)= $\dfrac{A(2.1)-A(2)}{2.1-2}$ = $\dfrac{0.1}{0.1}$ = 1 Km/min = $\dfrac{1}{\dfrac{1}{60}}$ = 60 Km/h

Era de esperar, puesto que el crecimiento de A se mantiene constante (y lo vemos en la gráfica).

h) En el caso de B, primero calculamos $B(2.1)=0.5*2.1^2=0.5*4.41=2.205$

vB(2 → 2.1) = $\dfrac{B(2.1)-B(2)}{2.1-2}$ = $\dfrac{2.205-2}{0.1}$ = $\dfrac{0.205}{0.1}$ = 2.05 Km/min = $\dfrac{2.05}{\dfrac{1}{60}}$ = 123 Km/h

tomando el intervalo más pequeño, y calculando la distancia para x = 2.001 segundos, obtendríamos:

vB(2 → 2.001) = $\dfrac{B(2.001)-B(2)}{2.001-2}$ = $\dfrac{0.5*2.001^2-2}{0.001}$ = $\dfrac{0.0020005}{0.001}$ = 2.0005 Km/min = $\dfrac{2.0005}{\dfrac{1}{60}}$ = 120,3 Km/h

Efectivamente, el cálculo de la velocidad instantánea se va aproximando a los 120 Km/h “exactos” que conocemos si aplicásemos la definición de derivada.

2. 2

Recordemos la expresión para el volumen del cono dados la altura *h* y la el radio *r*:

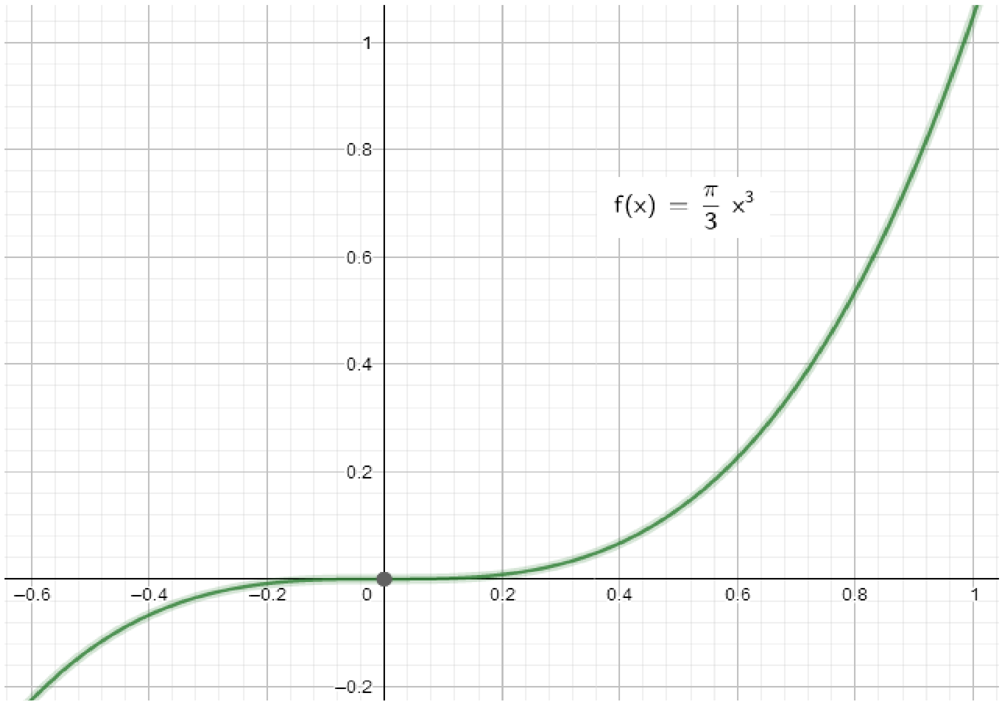
$$V = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$$

Si embargo, el cono que se va "configurando" con cada nivel de agua tiene un radio distinto: r y h son dependientes. Al estar en relación de 1:1, podemos sustituir h por r:

$$V = \frac{\pi * h^2 * h}{3} = \frac{\pi}{3} h^3$$

Tendremos una función cúbica para la que podremos elaborar la siguiente tabla para, al menos los valores de 1, 20, 30, 80, 90 y 99 cm que nos piden en los siguientes apartados.

h [m]	$V = f(h) = \frac{\pi}{3} h^3$ [m^3]
0.01	$\frac{\pi}{3} 0.01^3 = 0.00105$
0.2	$\frac{\pi}{3} 0.2^3 = 0.00838$
0.3	$\frac{\pi}{3} 0.3^3 = 0.02827$
0.8	$\frac{\pi}{3} 0.8^3 = 0.53617$
0.9	$\frac{\pi}{3} 0.9^3 = 0.76341$
0.99	$\frac{\pi}{3} 0.99^3 = 1.01609$
1	$\frac{\pi}{3} 1^3 = 1.04720$



b) La tasa media de aumento de volumen en litros por centímetro de altura cuando el nivel sube de los 20 a los 30 cm:

$$TVM[0.2,0.3]=\frac{V(0.3)-V(0.2)}{0.3-0.2}=\frac{0.02827-0.00838}{0.1}=\frac{0.01989}{0.1}=0.1989\,m^2$$

Las unidades de la TVM son de $\frac{m^3}{m}$ lo cual tiene sentido, porque se puede entender como la variación de superficie que va cambiando en la sección.

Y cuando cuando sube de los 80 a los 90 cm:

$$TVM[0.8,0.9]=\frac{V(0.9)-V(0.8)}{0.9-0.8}=\frac{0.76341-0.53617}{0.1}=\frac{0.22724}{0.1}=2.2724\,m^2$$

c) La tasa media de variación de volumen de líquido al descender el primer centímetro del depósito lleno:

$$TVM[1,0.99]=\frac{V(0.99)-V(1)}{0.99-1}=\frac{1.01609-1.04720}{-0.01}=\frac{-0.03111}{-0.01}=3.111\,m^2$$

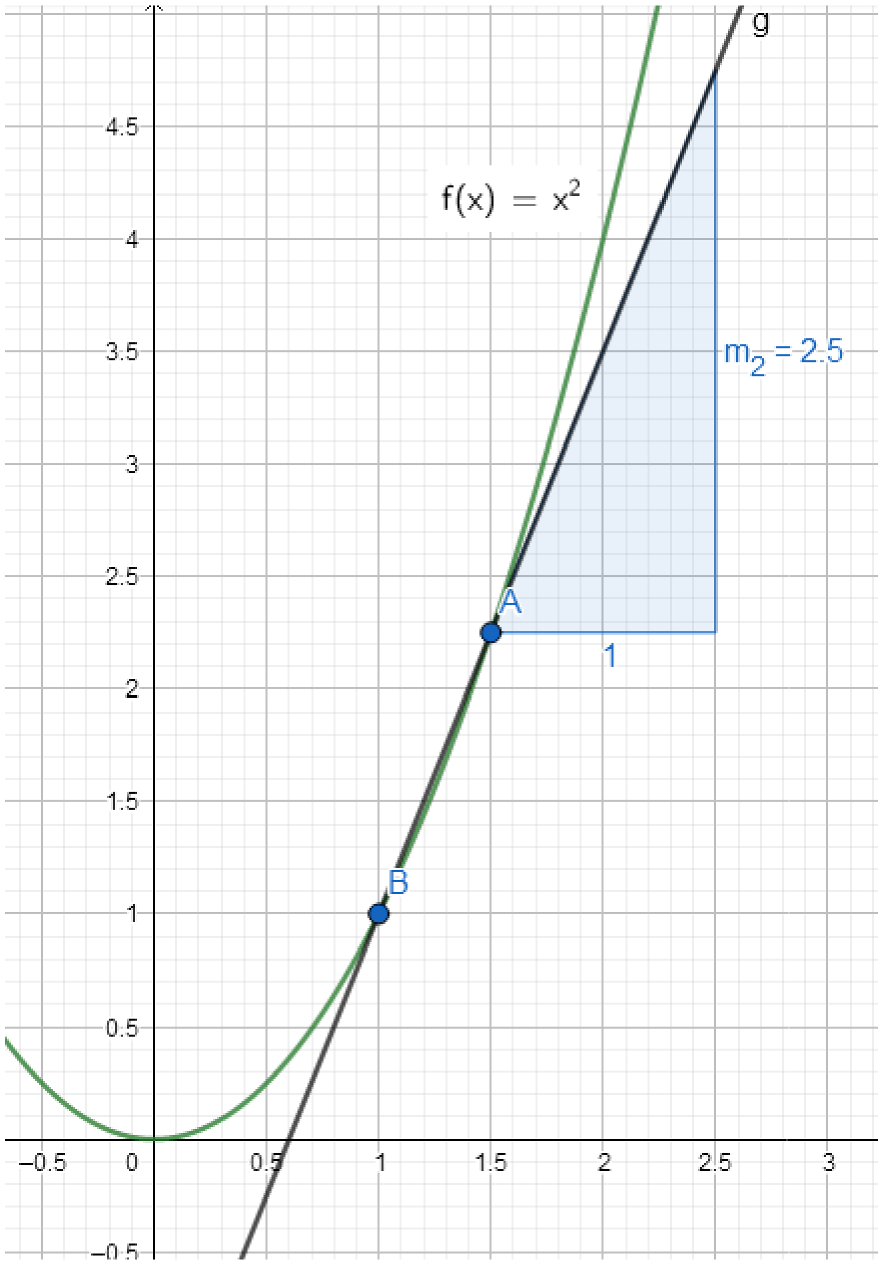
Y al descender el último centímetro:

$$TVM[0.01,0]=\frac{V(0)-V(0.01)}{0-0.01}=\frac{0-0.00105}{-0.01}=0.105\,m^2$$

Vemos así que cambia el volumen de agua mucho más rápido cuando se vacía el primer centímetro que el último: casi 30 veces más rápido. Y en general, para una misma altura, cambiará más cuanto más cerca estemos del borde superior del depósito.

3. 1

a) y b)



c) La pendiente de la recta secante que corta a la gráfica en los puntos de abscisa 1 y 1.5 viene del cálculo de $\frac{f(1.5)-f(1)}{1.5-1}=\frac{2.25-1}{1.5-1}=\frac{1.25}{0.5}=2.5$

Nos fijamos que GeoGebra nos ha vertido este mismo resultado al utilizar su herramienta “pendiente”.

d) Lo que vamos a calcular en las tablas siguientes son, precisamente, las pendientes de las rectas secantes que corta a x^2 en los puntos de abscisa 1 y otro número que se acerca a 1, por la derecha (primera tabla) y por la izquierda (segunda tabla).

x	$f(x)$	$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
1.5	$1.5^2=2.25$	$\frac{2.25-1}{1.5-1}=\frac{1.25}{0.5}=2.5$
1.1	$1.1^2=1.21$	$\frac{1.21-1}{1.1-1}=\frac{0.21}{0.1}=2.1$
1.01	$1.01^2=1.0201$	$\frac{1.0201-1}{1.01-1}=\frac{0.0201}{0.01}=2.01$
1.001	$1.001^2=1.002001$	$\frac{1.002001-1}{1.001-1}=\frac{0.002001}{0.001}=2.001$
1.0001	$1.001^2=1.002001$	$\frac{1.00020001-1}{1.0001-1}=\frac{0.00020001}{0.0001}=2.0001$

x	$f(x)$	$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
0.5	$0.5^2=0.25$	$\frac{0.25-1}{0.5-1}=\frac{-0.75}{-0.5}=1.5$
0.9	$0.9^2=0.81$	$\frac{0.81-1}{0.9-1}=\frac{-0.19}{-0.1}=1.9$
0.99	$0.99^2=0.9801$	$\frac{0.9801-1}{0.99-1}=\frac{-0.0199}{-0.01}=1.99$
0.999	$0.999^2=0.998001$	$\frac{0.998001-1}{0.999-1}=\frac{-0.001999}{-0.001}=1.999$
0.9999	$0.9999^2=0.99980001$	$\frac{0.99980001-1}{0.9999-1}=\frac{-0.00019999}{-0.0001}=1.9999$

e) Observamos que las sucesiones tienden hacia 2, y este es precisamente el valor exacto de la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa 1.

3. 2

a) $\lim_{x\to 6} f(x)=2$ es FALSO: sabemos que la función f es continua por mera inspección en la gráfica, y además nos dan el valor de $f(x)$ en x=6 y es 5.

b) ¿ $f'(6^-)$ = 2 ? Nos dan el valor de f(5.9), por lo que podremos hacer una estimación de $f'(x)$ en x=6 acercándonos por la izquierda, tal y como nos piden:

$$f'(6-)\approx\frac{f(6)-f(5.9)}{6-5.9}=\frac{5-4.8025}{0.1}=\frac{0.1975}{0.1}=1.975$$

Si conociéramos más valores de f para puntos con la abscisa más cercana a 6, podríamos calcularlo con mayor precisión, aunque 1.975 podría ser una buena aproximación a 2 y, por tanto, (b) podría ser VERDADERA.

c) $f'(3^-)$ = – 1.25 es FALSO: en la gráfica vemos que f siempre es creciente, y por tanto su derivada no puede ser negativa.

d) $\lim_{x\to 3} f(x)=-2.5$ es FALSO porque vemos en la gráfica que la función f es continua y sabemos que $f(3)$ = – 1.25, y no – 2.5.

4. 1

La derivada de $f(x)=(x-1)^2$ en x = 2 la calculamos mediante:

$$f'(x)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^2-(2-1)^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+1-1^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x=2$$

4. 2

a) $f(3)=3^2+1=10$

b) $TVM(3,z)=\frac{f(z)-f(3)}{z-3}=\frac{z^2+1-10}{z-3}=\frac{z^2-9}{z-3}$

c) $\lim_{z\to 3}\frac{f(z)-f(3)}{z-3}$

d) La expresión anterior se conoce como la *derivada* de $f(z)$ en z=3, es decir, $f'(3)$.

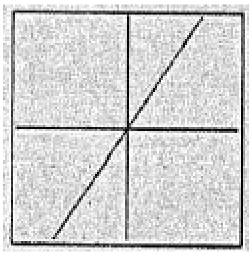
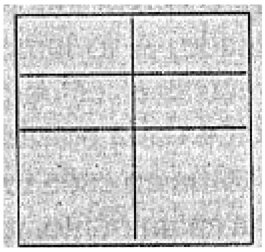
$$\lim_{z\to 3}\frac{f(z)-f(3)}{z-3}=\lim_{z\to 3}\frac{z^2-9}{z-3}=\lim_{z\to 3}\frac{(z+3)(z-3)}{z-3}=\lim_{z\to 3}z+3=6$$

Hubiera sido equivalente haber escrito x que z, puesto que estamos trabajando con una sola variable.

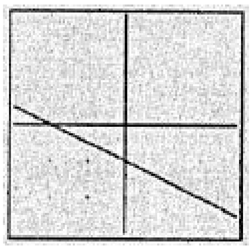
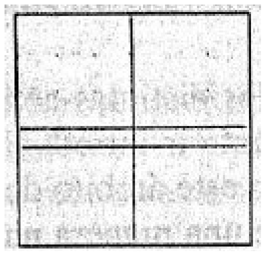
5. 1 y **5. 2**

Podemos resolver los dos ejercicios a la vez. Fijémonos en las gráficas de funciones que consideramos más “simples” a más “complicadas”.

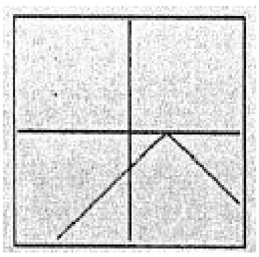
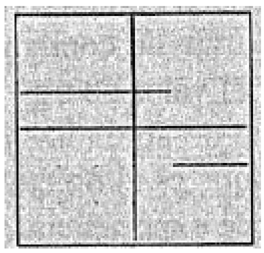
En el caso *E* observamos una función que crece linealmente. Por tanto, su derivada será un valor constante positivo. Le asignamos la derivada 9:

 E	 9

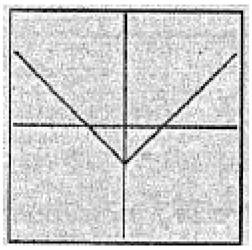
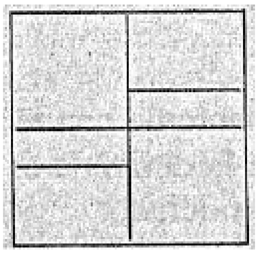
En el caso *A* observamos que la función decrece linealmente, por lo que su derivada habrá de ser negativa y constante, y esta es la número 5:

 A	 5

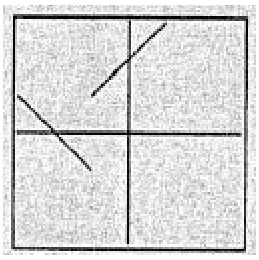
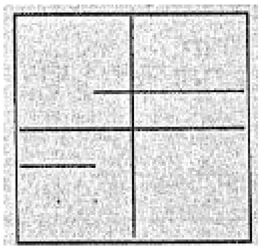
En el caso *R*, la función crece linealmente hasta llegar a un punto desde donde el cual empieza a decrecer también linealmente. Por tanto, buscamos una función derivada de valor constante hasta la abscisa donde se produce el decrecimiento, donde mostrará un valor constante pero negativo, con un salto discontinuo: es el cuadro 12:

 R	 12

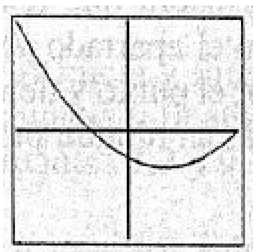
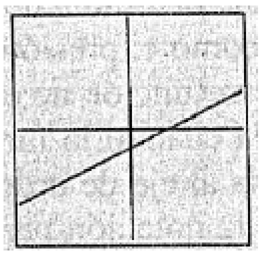
El caso *I* muestra un patrón con “pico” parecido al anterior, pero primero decrece y luego crece. Además, el cambio se produce en x=0. Le asignamos la derivada 3:

 I	 3

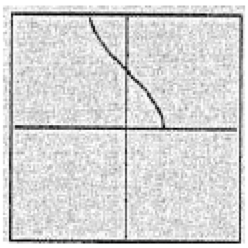
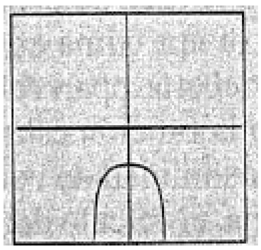
Por las mismas razones que los dos anteriores, aunque esta vez con una discontinuidad en la propia función, asignamos al caso *D* la derivada 6:

 D	 6

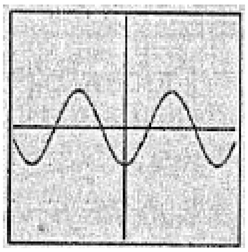
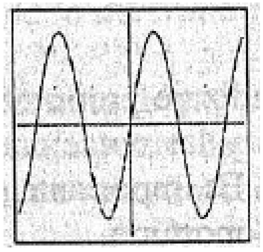
Fijémonos ahora en la parábola del caso *M*. Decrece, pero no linealmente como hasta ahora, sino cada vez "menos", por lo que su derivada será negativa pero cada vez se irá acercando más a cero, hasta que la función empieza a crecer y su derivada empezará a ir tomando valores positivos (y cada vez más positivos). Le corresponde como derivada la recta del cuadro 11:

 M	 11

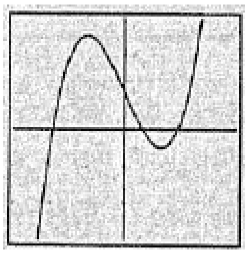
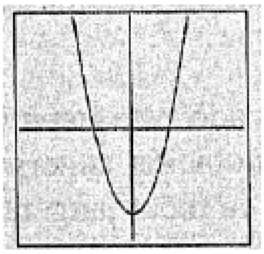
En el caso *B*, contamos con una curva que siempre decrece (por lo que su derivada ocupará el eje negativo de las ordenadas) y además lo hace más rápidamente en los laterales (y su derivada será ahí más negativa). Además está acotada en una parte muy concreta. Su derivada es la 7:

 B	 7

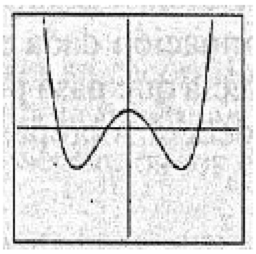
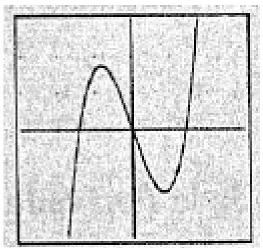
Nos encontramos con el caso *H*, una función ondulada: cuando crezca tendrá una derivada positiva, cuando decrezca la tendrá negativa, y en los máximos y en los mínimos tendrá un valor cero. Es decir, tendrá la misma forma pero desplazada. Su derivada es la 8:

 H	 8

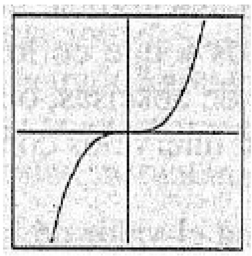
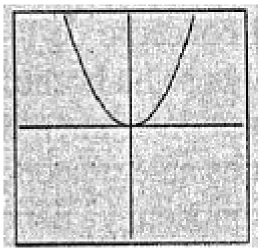
El caso *G* es una curva cúbica que va creciendo, cada vez menos (y su derivada será al principio positiva, pero cada vez menos positiva también), hasta que empieza a decrecer y su derivada pasa a ser negativa. El mayor decrecimiento se da en el origen, lo que se corresponde con el valor más negativo de su derivada, la número 4:

 G	 4

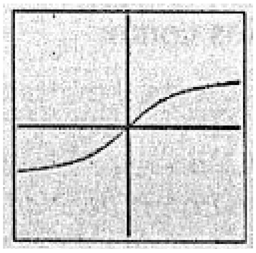
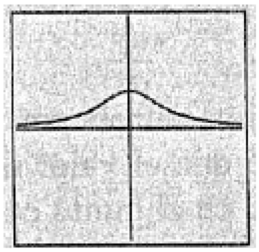
Para el polinomio de grado cuatro del caso *N* podríamos aducir las mismas razones que para el caso anterior. El profesor se dará cuenta, además, de que la derivada "baja" un grado al polinomio original. Los alumnos, por ahora, tendrán que fijarse en las zonas que crece, y los cortes por el eje de las abscisas. Le corresponde la derivada 14:

 N	 14

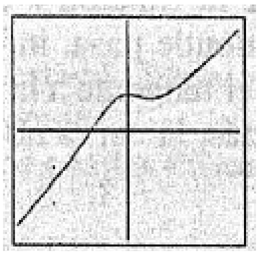
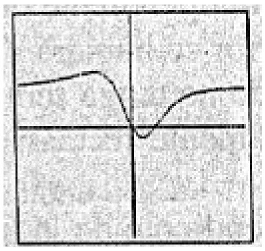
El caso *K* es otra curva cúbica que, por crecer siempre, va a tener una derivada situada completamente en las ordenadas positivas. Además, se hace cero en el origen. Le asignamos el caso 13:

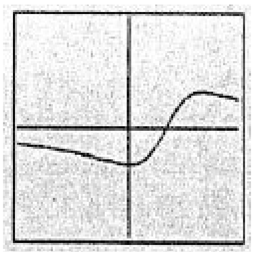
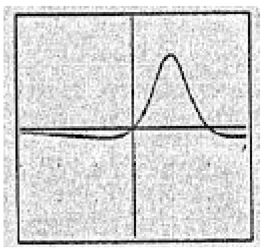
 K	 13

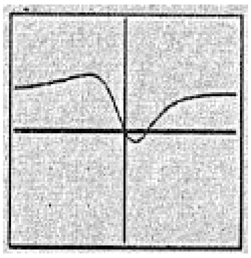
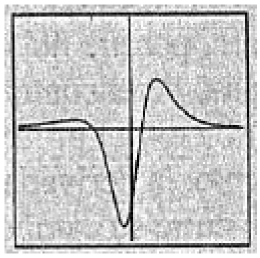
Este caso *S* guarda parecidos con el anterior: es siempre creciente, por lo que su derivada será siempre positiva. Pero aquí es en el origen donde el crecimiento es mayor, por lo que su derivada será máxima en este punto. Es el caso 17:

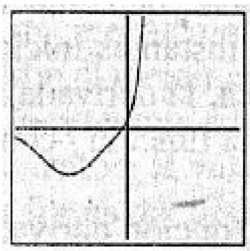
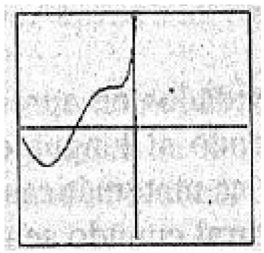
 S	 17

Ahora nos podemos fijar dónde se dan los máximos o mínimos, y buscaremos las derivadas que corten también el eje x en esas mismas abscisas. Miraremos además que los intervalos crecientes en las curvas se correspondan con valores positivos en las derivadas, y de valores negativos en las derivadas cuando la función decrezca. De esta manera, asociamos así a *P* con 10, *Q* con 18, *F* con 2 y *J* con 17:

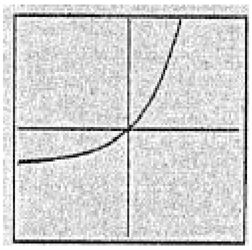
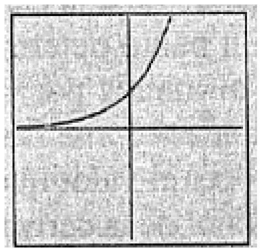
 P	 10

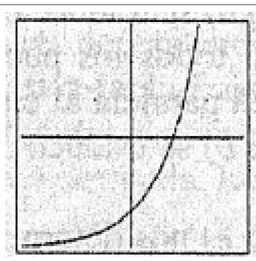
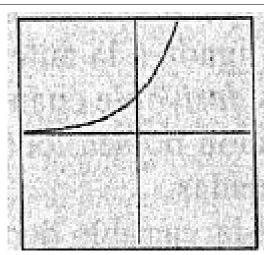
 Q	 18

 F	 2

 J	 17

Los casos *C* y *L* los dejamos para el final: ambas funciones, aunque de aspecto ligeramente distinto, tienen la misma derivada. Esto es lógico, puesto que *C* no es más que *L* con el añadido de una constante; y la derivada de una constante es nula, por lo que las derivadas de las dos funciones serán idénticas. Podemos asociarlos indistintamente a los casos 1 o 16:

 C	 1/16

 L	 1/16