

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

---

# Sincronización explosiva y percolación en redes complejas

---

*Autor:*

Cristian Emanuel  
BOGHIU

*Director:*

Dr. Jesús  
GÓMEZ GARDEÑES

*Trabajo realizado como requisito para la finalización  
del Máster en Física y Tecnologías Físicas,*

*en el*

Departmento de Física de la Materia Condensada  
Facultad de Ciencias

*a fecha de*

28 de junio de 2019

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

## *Resumen / Abstract*

Facultad de Ciencias  
Departamento de Física de la Materia Condensada

Trabajo Fin de Máster / *Master's Thesis*

**Sincronización explosiva y percolación en redes complejas**  
*Explosive synchronization and percolation on complex networks*

por / by  
Cristian Emanuel  
BOGHIU

Nuestro objetivo en este trabajo es el desarrollo de un modelo nuevo en redes complejas que muestre sincronización explosiva de osciladores de fase en procesos de percolación, uniendo de esta manera procesos de crecimiento de redes con procesos dinámicos. Hemos desarrollado un modelo con un crecimiento acoplado a la dinámica basado en la adición selectiva de enlaces (según una regla probabilística basada en las frecuencias efectivas de los osciladores) que presenta transición explosiva en la sincronización. En la memoria contextualizamos los fenómenos explosivos en los campos de la sincronización y de la percolación y resumimos las características principales de nuestro nuevo modelo.

*Our objective is the creation of a new model in complex networks which shows explosive transitions in the synchronization of phase oscillators in a percolation process, linking together network growth with network dynamics. We have successfully created a model where the growth (based on the selective addition of links based on probabilities which depend on the effective frequencies of the oscillators) is coupled to the oscillator dynamics and the transition to synchronization shows explosive behavior. In this work we contextualize explosive phenomena in both fields of synchronization and percolation and show the main details of our new model.*

## *Agradecimientos*

Me gustaría agradecerle principalmente a Jesús Gómez Gardeñes por el tiempo y el esfuerzo dedicado en dirigirme el trabajo.

También quiero agradecerle a Sergio Faci Lázaro por darme consejos útiles da cara a la realización del proyecto y las simulaciones.

Por último, todo esto no habría sido posible sin el apoyo directo e indirecto de la familia y de los amigos.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Índice general</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo general del trabajo . . . . .	1
1.2. Fundamentos de redes complejas . . . . .	3
<b>2. Percolación</b>	<b>7</b>
2.1. Percolación de segundo orden . . . . .	7
2.2. Percolación explosiva . . . . .	11
<b>3. Sincronización</b>	<b>14</b>
3.1. Modelo de Kuramoto . . . . .	15
3.1.1. Campo medio . . . . .	15
3.1.2. Redes complejas . . . . .	18
3.2. Sincronización explosiva . . . . .	20
<b>4. Modelo de percolación con sincronización explosiva</b>	<b>22</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>29</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>30</b>
<b>A. Herramientas numéricas</b>	<b>31</b>
<b>B. Comentarios sobre la validación de las simulaciones</b>	<b>32</b>
<b>C. Gráficas complementarias</b>	<b>34</b>
C.1. Comprobación del límite inferior para el acoplamiento . . . . .	34
C.2. Extensión del modelo para más valores de alfa . . . . .	35

## Capítulo 1

# Introducción

### 1.1. Objetivo general del trabajo

El estudio de las redes complejas no se puede entender sin la existencia de la mecánica estadística y el estudio de los sistemas no lineales. La mecánica estadística estudia el comportamiento macroscópico de sistemas partiendo de una descripción clara de la naturaleza microscópica de los mismos, que suele tener algún tipo de simetría u homogeneidad espacial que facilita el buen comportamiento en el límite termodinámico (por ejemplo, en estado sólido, las redes periódicas). En cierto sentido, se puede describir como la ciencia de las escalas porque estudia cómo las interacciones locales microscópicas crean efectos no despreciables en las escalas grandes, es decir, remarcando que éstas no están enteramente desacopladas de las escalas pequeñas. Las transiciones de fase son un ejemplo claro, y la mecánica estadística ha sido muy exitosa en el tratamiento de éstas mismas y en la caracterización del comportamiento de los sistemas en el punto crítico a través de, por ejemplo, el grupo de renormalización.

Sin embargo, hay muchos otros sistemas compuestos por multitud de elementos interactivos que no presentan estructuras tan simétricas en los patrones de interacción de sus constituyentes. Ejemplos de estos sistemas son el cerebro, las redes de comunicación, sistemas sociales, etc. Estos sistemas, sin embargo, también presentan cambios a “escalas grandes” como producto de las interacciones a nivel microscópico. Es decir, presentan *propiedades emergentes*. Para diferenciar a estos sistemas de aquellos tratados por la física estadística tradicional, los llamamos sistemas complejos. Un sistema complejo se entiende como un conjunto de elementos que muestran propiedades emergentes que no resultan ser explicables a partir de la mera suma de las propiedades individuales de sus componentes. Dado que en estos sistemas se presenta la interconexión del mundo microscópico (interacciones) con los fenómenos macroscópicos (propiedades emergentes) el uso de las herramientas de la física estadística para su caracterización parece ser natural.

De esta forma nace en la segunda mitad del siglo pasado la física estadística de sistemas complejos, donde se abordan problemas de biología, economía, sociología o neurociencia, entre otros, a través de técnicas y métodos de la física estadística, como, por ejemplo, los desarrollos de campo medio. Sin embargo, la ausencia de los patrones complejos de interacción en los modelos de campo medio hizo esperar a la física estadística de los sistemas complejos hasta la llegada de la era digital y la aparición de Internet para poder validar estos modelos. Así, a inicios de este siglo, multitud de evidencias experimentales señalaron que los patrones de interacción en sistemas complejos distaban mucho de ser descritos por técnicas de campo medio. Al contrario, las interacciones de estos sistemas debían ser descritas como un grafo o red, lo que dio lugar a

la física estadística de redes complejas. Uno de los grandes logros de la nueva física de redes complejas fue la re-elaboración de métodos estadísticos para afrontar el análisis de la emergencia de propiedades colectivas, incorporando la heterogeneidad presente en las interacciones de sistemas complejos reales. Así, herramientas como el campo medio heterogéneo reflejaban la estructura de estas redes en la formulación de diferentes dinámicas de interés (epidemias, sincronización, difusión, etc.). De hecho, una de las preguntas fundamentales abordadas por la física estadística de redes complejas durante las últimas dos décadas ha sido entender cómo la estructura de las interacciones influye en la emergencia de propiedades colectivas.

Uno de los resultados más importantes en este última línea de investigación es la emergencia de transiciones abruptas (llamadas *explosivas*) al acoplar la interacción entre los elementos con las propiedades estructurales de la red compleja. Los ejemplos más paradigmáticos de transiciones explosivas fueron encontrados en el ámbito de la percolación y de la sincronización de osciladores de fase. En ambos contextos las transiciones explosivas surgen al introducir en el acople entre constituyentes ciertas funciones de la estructura local de la red con el propósito de retrasar el punto crítico que, para estos modelos, da lugar a transiciones suaves de segundo orden. Uno de los efectos observados al atrasar el punto crítico es la aparición de transiciones explosivas de forma que las propiedades colectivas (componente gigante y estados globalmente sincronizados) aparecen de forma abrupta.

Además del interés teórico que este tipo de transiciones tiene para entender la interacción entre estructura y dinámica en sistemas complejos, sus consecuencias prácticas también son muy relevantes. Por ejemplo, si entendemos un modelo de percolación como un marco minimal que captura la creación de rutas de contagio en un sistema de agentes, dando lugar a componentes conexas donde los virus se pueden propagar, es fácil entender que el paso abrupto de un sistema donde no hay componentes macroscópicas a otro escenario donde aparece una componente del tamaño del sistema tiene efectos catastróficos, dado que no permite implementar medidas de control al no obtener señales previas de la aparición de esta componente. Otro ejemplo donde las transiciones explosivas pueden tener consecuencias no deseadas es la sincronización. Sabiendo que la sincronización está en la base de patologías epilépticas en el cerebro, el paso abrupto entre un estado no síncrono (saludable) a un estado totalmente síncrono (epilepsia) al cambiar infinitesimalmente el acople entre neuronas refleja la gravedad de tener este tipo de transiciones en fenómenos de sincronización. Además de percolación y sincronización, existen otros ámbitos, como la congestión, donde la relación entre sus constituyentes y las propiedades estructurales dan lugar a transiciones explosivas.

En este trabajo pretendemos considerar modelos que aúnen las dinámicas de sincronización y percolación con el objetivo de estudiar la posibilidad de obtener transiciones explosivas. Por una parte, pretendemos estudiar los dos fenómenos más importantes donde se han observado este tipo de transiciones de manera unificada, y por otro, pretendemos obtener transiciones explosivas de sincronización en redes en crecimiento. Todos los modelos donde se ha observado sincronización explosiva se han basado en redes estáticas, por lo que este objetivo se presenta como un reto ambicioso e innovador.

Dado que este trabajo de fin de máster aborda el estudio de redes complejas, el estudio de procesos de percolación y de sincronización de osciladores de fase, en las páginas sucesivas vamos a hacer una introducción sucinta pero autocontenido de los elementos más importantes para entender el modelo propuesto en el último capítulo de este trabajo.

## 1.2. Fundamentos de redes complejas

En esta sección establecemos las nociones básicas del área de las redes complejas. Para efectuar este resumen, se ha consultado principalmente [1].

El concepto más básico es el de **grafo** (o red), que se entiende como una colección de nodos y enlaces,  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , siendo cada elemento  $i$  de  $\mathcal{V}$  un nodo (también llamado vértice), y los pares  $(i, j)$  contenidos en  $\mathcal{E}$  un enlace. El enlace se puede clasificar como direccional o unidireccional, en función de si  $(i, j) \equiv (j, i)$ , o no. Si los enlaces tienen dirección, en figuras se suelen representar con una flecha  $i \rightarrow j$ . Esto nos permite clasificar las redes en dirigidas y no dirigidas. En la Figura 1.1 tenemos un ejemplo de red dirigida.

Se define una matriz de adyacencia  $A_{ij}$  como una matriz tal que:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{si } (i, j) \notin \mathcal{E} \end{cases}.$$

Definimos dos nodos como vecinos si entre ellos existe un enlace, es decir,  $A_{ij} = 1$ . Usando la matriz de adyacencia para una red dirigida se puede definir el número de vecinos (o *grado*) de un nodo  $i$ :

$$k_{\text{dentro},i} = \sum_j A_{ji}, \quad k_{\text{fuera},i} = \sum_j A_{ij},$$

donde  $k_{\text{dentro},i}$  denota el número de nodos con enlaces que apuntan hacia el nodo  $i$ , y  $k_{\text{fuera},i}$ , el número de enlaces salientes desde el nodo  $i$ . Para una red no dirigida,  $k_{\text{dentro},i} = k_{\text{fuera},i}$ .

También se puede generalizar, aparte de redes dirigidas, a redes *pesadas*, en las cuales cada enlace tiene asociado un peso  $\omega_{ij}$  y se pueden definir grados equivalentes para la red pesada  $s_i = \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} w_{ij}$  donde  $\mathcal{V}(i)$  denota todos los nodos que son vecinos de  $i$ . De la misma manera, muchas de las cantidades definidas para redes dirigidas/no dirigidas tienen su extensión a redes pesadas. Sin embargo, en este trabajo solamente tratamos con redes no dirigidas y sin peso y además, que no permiten auto-enlaces (es decir,  $A_{ii} = 0 \forall i \in \mathcal{V}$ ).

En una red de  $N$  nodos el máximo número de enlaces es  $\frac{N(N-1)}{2} \equiv \binom{N}{2}$ . Si  $E$  es el número de enlaces de una red, definimos la variable  $\ell = E/N$  con valores en  $[0, \frac{N-1}{2}]$  que utilizaremos para cuantificar la carga de enlaces de una red. Lo normalizamos con el número de nodos en vez de la cantidad máxima de enlaces porque las transiciones de percolación, cubiertas en el Capítulo 2, ocurren para  $\ell \in [0, 1]$ .

Es interesante definir el concepto de componente gigante. Para ello, primero definimos el concepto de camino (en inglés, *path*),  $\mathcal{P}_{i_0, i_n}$ , que es un conjunto de  $n + 1$  nodos,  $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ , con enlaces,  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ , que conectan dichos nodos:

$$\mathcal{P}_{i_0, i_n} = \{\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, \mathcal{E}_{\mathcal{P}}\} = \{\{i_0, i_1, \dots, i_n\}, \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{n-1}, i_n)\}\},$$

tal que el primer nodo sea  $i_0$  y el último  $i_n$ . Definiremos dos nodos como alcanzables si se puede establecer un camino entre ellos, y decimos que el camino  $\mathcal{P}_{i_0, i_n}$  conecta los nodos  $i_0$  e  $i_n$ . La longitud del camino es el número de enlaces,  $n$ , que hay en  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ . Una red se dice *conexa* si para cualquier par de nodos de la red, existe un camino que los conecte; una componente se define como un subgrafo conexo. Dos componentes se llaman *disconexas* si no es posible encontrar un

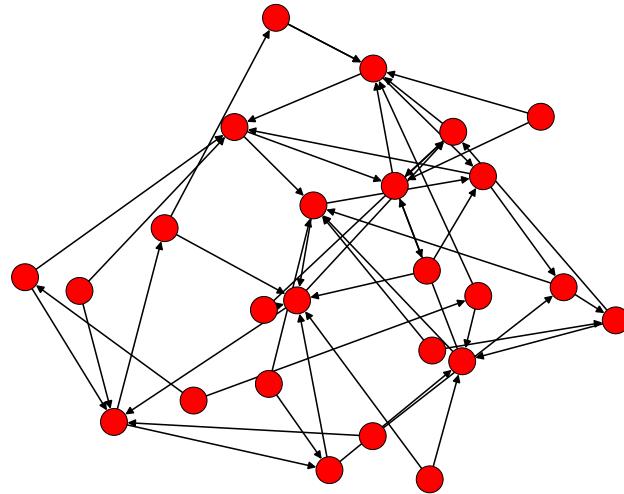


FIGURA 1.1: Un ejemplo de una red dirigida sin peso. La dirección de los enlaces viene representada por una flecha.

camino que une un nodo de una componente con un nodo de la otra, para ningún par de nodos. El *tamaño* de una componente lo definimos como el número de nodos que contiene.

Dadas las anteriores definiciones, definiremos la *componente gigante* como una componente cuyo tamaño escala con  $N$ , el número de nodos de la red. Entonces, en el límite termodinámico, el tamaño de esta componente diverge. La aparición de una componente gigante se denomina transición de percolación. En el Capítulo 2 cubrimos la percolación y la percolación explosiva.

Es muy importante remarcar la necesidad de una descripción *estadística* de las redes complejas si queremos tener resultados generales, que no dependan de una configuración particular de la red. Por ejemplo, y una de las más importantes, es la distribución del grado  $P(k)$  que cuantifica la frecuencia de nodos de un determinado grado,  $k$ . Nos permite calcular con facilidad magnitudes como la media

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i = \sum_k k P(k)$$

o el momento  $n$ -ésimo,  $\langle k^n \rangle = \sum_k k^n P(k)$ . En particular el momento segundo,  $\langle k^2 \rangle$ , va a ser muy importante.

Definimos como parámetro de heterogeneidad, que va a estar presente en varios puntos del trabajo, a la cantidad

$$\kappa = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$$

que cuantifica la dispersión en grado presente en la red. La varianza normalizada con el promedio se puede expresar en función de  $\kappa$  como  $\sigma_k^2 / \langle k \rangle^2 = \kappa / \langle k \rangle - 1$ .

Vamos a llamar una red “heterogénea” si cumple  $\kappa \gg \langle k \rangle$ . Significa la existencia, con probabilidad no trivial, de nodos con un muy alto número de vecinos que denominaremos *hubs*. La presencia de *hubs* es una marca de la heterogeneidad y presencia de colas pesadas en la distribución  $P(k)$ .

Una clase particularmente común de redes con colas pesadas son aquellas cuya distribución de grado sigue una ley de potencias,

$$P(k) \propto k^{-\gamma}$$

llamándose estas redes *libres de escala*, nombre debido a que la forma de la distribución no cambia bajo reescalado. En la práctica, todas las redes heterogéneas se suelen llamar libres de escala. Esencialmente, si una red es libre de escala significa que la magnitud  $\langle k \rangle$  por sí sola no nos aporta suficiente información sobre la red.

Nótese que en el límite termodinámico ( $N \rightarrow \infty$ ) para  $\gamma < 1$ , la suma  $\sum_{k=0}^{\infty} k^{-\gamma}$  es divergente.<sup>1</sup> Necesitamos  $\gamma > 1$  para que la suma sea finita, y por lo tanto, tener una probabilidad bien definida. Para que el primer momento  $\langle k \rangle$  esté definido necesitamos  $\gamma > 2$  y para el segundo,  $\langle k^2 \rangle$ , necesitamos  $\gamma > 3$ . Es un hecho que una gran cantidad de redes libres de escala encontradas en el mundo real tienen un coeficiente  $2 < \gamma < 3$  [2, Sec. 2.2.2].

Ejemplos de redes libres de escala serían la red de internet, redes metabólicas o sociales (redes de e-mail o actores). Una modelo paradigmático de red libre de escala es el de Barabási–Albert [3]. En este modelo se crece una red progresivamente añadiendo nodos; al llegar/añadirse un nodo nuevo, éste lanza  $m$  enlaces que se conectan con el resto de la red con probabilidad proporcional al grado de cada nodo,  $k_j$ . Es decir, se promueve la conexión con nodos “populares”, favoreciendo la existencia de *hubs*.

Otra propiedad interesante es la propiedad del *mundo pequeño*. Habiendo definido el concepto de camino  $\mathcal{P}_{i_0, i_n}$  podemos definir una geodésica  $\hat{\mathcal{P}}_{i_0, i_n}$  como un camino que une dos nodos tal que su longitud sea la mínima posible. La propiedad de mundo pequeño, popularizada por Watts y Strogatz [4], consiste en afirmar que la longitud promedio de las geodésicas crece con el logaritmo,  $\hat{\mathcal{P}} \sim \log N$ . Por ejemplo, para una red de  $10^6$  personas, si ésta tiene la propiedad de mundo pequeño, entonces todas las personas distan en promedio 6 personas entre sí. La universalidad de redes de este tipo es debida a la presencia del ruido en la formación de redes. Dada una red que no muestra esta propiedad, si introducimos suficiente ruido (en el sentido de aleatoriamente<sup>2</sup> escoger un enlace  $i \rightarrow j$  y un nodo  $k$  y cambiar  $j \leftrightarrow k$ ) ésta se va a volver una red con la propiedad de mundo pequeño [4].

Si el parámetro de homogeneidad es del orden  $\kappa \approx \langle k \rangle$  entonces las colas de la distribución decaen rápidamente, normalmente de forma exponencial (por ejemplo, una distribución de Poisson o un gaussiana). Este tipo de redes se clasifican como “homogéneas”. El ejemplo más típico de red homogénea es la red aleatoria, denominada de Erdős–Rényi [5], en la cual se añaden enlaces con probabilidad  $p$ . Se puede construir partiendo de una red de  $N$  nodos vacía (sin enlaces) considerando todos los enlaces posibles y aceptándolos con probabilidad  $p$ . La distribución del número de enlaces es binomial,

$$P(E) = \binom{N_E}{E} p^E (1-p)^{N_E - E}$$

con  $N_E = \binom{N}{2}$ . En el límite de muchos enlaces, se puede aproximar por una distribución de Poisson que a su vez tiende a una gaussiana. En una variación de la misma, se fija el número de enlaces y se distribuyen de manera aleatoria, pero no la vamos a usar en este trabajo.

<sup>1</sup>Para verlo, se puede acotar la suma por la integral continua que es fácil de resolver.

<sup>2</sup>En este trabajo, siempre que no se especifique lo contrario, aleatorio significa muestrear una distribución plana.

Por último mencionamos que en las distribuciones pueden existir correlaciones, es decir, dado un nodo de grado  $k$ , la probabilidad de estar conectado a otro de grado  $k'$  puede no ser independiente de  $k'$ . Por ejemplo, la gente “rica” en relaciones puede tender a relacionarse con otra gente rica, y la pobre con pobres, o viceversa. Estas son muy importantes, pero para todas las consideraciones teóricas se simplifican los desarrollos si las redes son decorrelacionadas. El hecho de que las redes son finitas y no infinitas también impone correlaciones, pero hay algoritmos para generar redes finitas decorrelacionadas.

Existen otras magnitudes relevantes para las redes, por ejemplo, varias medidas de centralidad (como la intermediación), el el coeficiente de agrupamiento (dado un nodo, cuantifica la interconexión entre los vecinos; en inglés, *clustering*) u otras, con sus propias distribuciones asociadas, pero al no ser muy presentes en este trabajo, no nos vamos a centrar en ellas.

## Capítulo 2

# Percolación

La percolación lleva el nombre del fenómeno en el cual un líquido atraviesa un medio poroso o un filtro. Si el material es lo suficientemente poroso como para tener un camino continuo de una superficie a la otra, se dice “percolante” y el líquido lo atraviesa. Modelar el flujo de un fluido en medios porosos no es trivial por la gran cantidad de factores a tener en cuenta, como por ejemplo las fuerzas gravitatorias o de rozamiento viscoso, la capilaridad, la existencia de heterogeneidades, el desconocimiento de muchos parámetros o el gran abanico de escalas involucradas [6]. Para hacer el análisis abordable hay dos extremos: o ir al límite continuo, que no haremos aquí, o simplificar la descripción microscópica. Es muy razonable que el parámetro más importante para este fenómeno sea la conectividad, y la “teoría de la percolación” en física estadística y redes complejas – el estudio de la aparición de componentes gigantes – es el modelo estándar más sencillo que nos permite describir la conectividad.

En la teoría de percolación hay una amplia literatura, tanto de resultados numéricos como analíticos. Una realidad compleja como la descrita anteriormente se reduce a un conjunto sencillo de relaciones algebraicas, y aplicando las herramientas de la física estadística (principalmente sobre redes periódicas) se consiguen resultados “universales”, en el sentido de que no dependen de todos los detalles microscópicos, como por ejemplo, los exponentes críticos de las transiciones de fase. Más allá del ejemplo de la teoría de fluidos y generalizando a redes complejas, la percolación ha tenido aplicación a diversos casos como en redes de comunicaciones, transmisión de enfermedades, estudio de incendios, extracción de petróleo, inundaciones y otros [7, 8, 9].

Una de las aplicaciones más llamativas es el estudio de la robustez de una red. Las redes regularmente sufren daños o crecen. Si la funcionalidad de la red depende de su estructura topológica, es interesante ver cuánto de robusta es esta funcionalidad ante fluctuaciones del número de nodos o enlaces. La percolación se puede entender entonces como una aproximación de orden cero de la influencia de efectos de crecimiento o daño sobre parámetros topológicos, que en el caso de la percolación es el tamaño de la componente gigante.

Las transiciones de percolación suelen ser continuas y reversibles. Sin embargo, cuando se intenta aplazar la aparición de la componente gigante, se llega hasta una situación crítica en la cual no es posible aplazarlo más y tenemos una transición explosiva. En este capítulo repasamos resultados básicos sobre transiciones continua y explosivas.

### 2.1. Percolación de segundo orden

Primero empezaremos esbozando de manera breve el enfoque de la teoría clásica de percolación (métodos de física estadística) sobre redes aleatorias pero periódicas (en inglés, *lattice*).

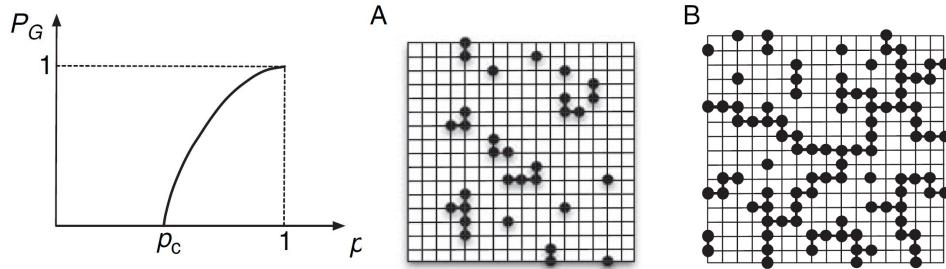


FIGURA 2.1: Imagen izquierda: Una forma típica de una transición de segundo orden en la probabilidad de existencia de una componente gigante  $P_G$  en función de  $p$ , la probabilidad de ocupación. En la imagen intermedia A se observa un caso con  $p < p_c$  y en la imagen B,  $p > p_c$ . Figuras bajo derechos de autor, reproducidas con permiso de la editorial [1] a través de PLSclear.

Hemos consultado principalmente [1, Cap. 6].

Partimos de una red regular aleatoria, como, por ejemplo, una cuadrícula. La aleatoriedad se manifiesta en una probabilidad de ocupación de un sitio, o, alternativamente, de existencia de un enlace. Aunque hay diferencias entre las dos posibilidades, la discusión a nivel cualitativo es la misma y para seguir la bibliografía, trataremos con probabilidades de ocupación. Se define  $n_s$  como el número de componentes de tamaño  $s$  (la componente más pequeña, de tamaño  $s = 2$ , consiste en dos sitios vecinos ocupados). Supongamos la existencia de una única componente gigante/percolante y sea  $P_G$  la probabilidad de que al escoger un nodo aleatoriamente, éste pertenezca a la componente gigante. Entonces, la probabilidad  $p$  de que un nodo escogido aleatoriamente pertenezca a *cualquier* componente es  $p = P_G + \sum'_s s n_s(p)$  (la suma primada es sobre todas las componentes menos la componente gigante). El tamaño medio de una componente se puede expresar como  $\langle s \rangle = \frac{\sum'_s s^2 n_s(p)}{\sum'_s s n_s(p)}$ . La probabilidad  $p$  podemos considerarla como fijada en el modelo.

El punto crítico  $p_c$  es aquel en el cual la probabilidad  $P_G$  pasa de ser cero a no nula. Cerca del punto crítico no hay una escala típica, lo cual nos lleva a unas relaciones de escala de la forma

$$n_s(p) = \begin{cases} s^{-\tau} f_+ (s/s_c), & \text{si } p \geq p_c \\ s^{-\tau} f_- (s/s_c), & \text{si } p \leq p_c \end{cases} \quad \text{con } s_c = |p_c - p|^{-1/\sigma}$$

donde  $f_+$  y  $f_-$  son dos funciones de escalado y  $\sigma, \tau$  exponentes que dependen de características generales del sistema. Utilizando esta expresión, podemos conseguir los exponentes críticos de la transición

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &\sim |p_c - p|^{-\gamma} \\ P_G &\sim (p - p_c)^\beta \end{aligned}$$

donde  $\gamma = (3 - \tau)/\sigma$  y  $\beta = (\tau - 2)/\sigma$ . Para los detalles intermedios, ver [10, Cap. 1]. La probabilidad crítica  $p_c$  depende del modelo y de los detalles microscópicos pero los exponentes críticos  $\beta, \gamma$  son universales, dependiendo de la dimensión y simetrías del sistema.<sup>1</sup> En la Figura 2.1 se puede observar una transición típica de segundo orden en una red aleatoria. Nosotros no nos vamos a centrar en los exponentes críticos, sino en el punto crítico.

<sup>1</sup>Por ejemplo, si en vez de la red cuadrada de la Figura 2.1 usariamos una red hexagonal o triangular, los exponentes críticos serían los mismos. Sin embargo, si rompemos la simetría translacional, sí que se verían afectados.

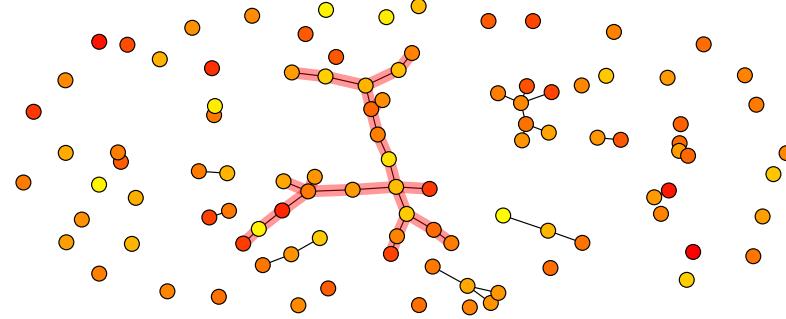


FIGURA 2.2: Un ejemplo de una red de tipo árbol. El color de cada nodo es una elección estética. Se destaca en rojo la mayor componente de la red. Para el argumento de la sección 2.1, lo relevante es la ausencia de ciclos que añaden correlaciones. Para redes crecidas con un alto grado de aleatoriedad, las redes de tipo árbol son una buena aproximación en el régimen subcrítico con  $\ell$  bajo.

Ahora, vamos a considerar considerar una situación más general, donde no tenemos una red periódica sino una compleja. Vamos a dar un argumento sencillo que relaciona el punto crítico con la estructura topológica de la red, en este caso el parámetro de heterogeneidad  $\kappa = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ .

Como parámetro de orden escogemos  $\ell = E/N$ , que nos representa la cantidad de enlaces en la red y como parámetro de control  $|C|/N$ , el tamaño ( $|C|$ ) de la componente gigante ( $C$ ) normalizado. Esta es la elección estándar y la más sencilla<sup>2</sup>. Son muy similares a  $P_G$  y  $p$  (de hecho  $P_G = |C|/N$ ), pero aquí consideramos enlaces en vez de probabilidades de ocupación.

El proceso a tener en cuenta es uno de crecimiento. Partimos de  $N$  nodos sin ningún enlace establecido. Despues procedemos a añadir enlaces aleatoriamente, incrementando  $\ell$ . En el límite de bajo número de enlaces, la estructura de la red es muy próxima a la de una red árbol, como en el ejemplo de la Figura 2.2. Esto se puede ver de manera rigurosa mediante la teoría de grafos, donde para una red aleatoria se pueden determinar funciones umbrales [12] para la densidad de enlaces que nos dicen qué propiedades se esperan ver para una cierta carga de enlaces. En particular, para observar ciclos necesitamos un número promedio de enlaces del orden de  $N$ , es decir,  $\ell \gtrsim 1$ .

Hecha esta suposición, lo que nos interesa es hallar una condición que depende de las características de la red que nos indique cuándo existe esta componente gigante. Llamemos  $q$  a la probabilidad de que, al escoger un enlace al azar, este enlace sea parte de la componente gigante. Consideremos que el enlace se conecta en un extremo a un nodo de grado  $k$ . Entonces, la condición de que no pertenezca a una componente gigante se puede describir de manera recurrente imponiendo que los otros  $k - 1$  enlaces que pertenecen al nodo tampoco sean parte de la componente gigante, es decir,

$$q = \sum_k \frac{kP(k)}{\langle k \rangle} q^{k-1} \equiv f(q), \quad (2.1)$$

<sup>2</sup>Comentamos que tiene su controversia (ver [11, Sec. II.G]). Por ejemplo, con nuestra elección, si queremos un parámetro de orden continuo no podemos añadir varios enlaces simultáneamente (una alternativa sería definir un tiempo y en cada paso temporal tener una probabilidad de añadir un enlace, permitiendo añadir enlaces múltiples). También, mirar únicamente el tamaño de la mayor componente no nos informa de si tenemos múltiples componentes gigantes. Por último, estos dos parámetros no son variables canónicas conjugadas (como por ejemplo, la imanación y el campo magnético) lo cual es importante en física estadística. Sin embargo, mantendremos nuestra elección por simplicidad.

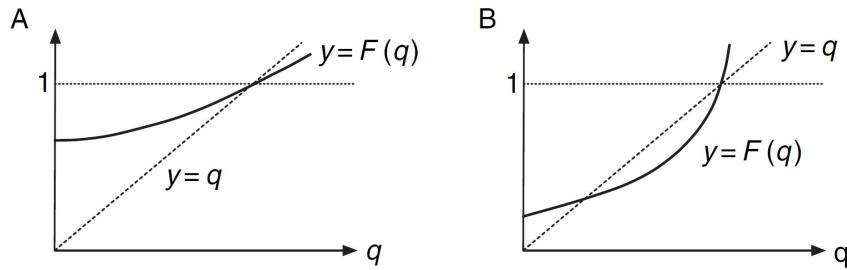


FIGURA 2.3: Se puede razonar que la función  $f(q)$  es convexa, con lo cual la condición de existencia de una solución distinta de  $q = 1$  se puede expresar como desigualdad que manifieste que la pendiente de  $f(q)$  en  $q = 1$  debe ser mayor que 1. Figuras bajo derechos de autor, reproducidas con permiso de la editorial [1] a través de PLSclear.

donde  $P(k)$  representa la probabilidad de tener un nodo escogido aleatoriamente grado  $k$  y  $\langle k \rangle = \sum_k kP(k)$  es el grado medio. Tenemos una componente gigante si la probabilidad de que un nodo pertenezca a esta componente,  $P_G$ , es no nula. Esta probabilidad se puede poner en función de  $q$  porque es la opuesta a la probabilidad de que un nodo al azar *no* forme parte de la componente gigante:

$$1 = P_G + \sum_k P(k)q^k.$$

Para  $q = 1$ , naturalmente tenemos  $P_G = 0$ . ¿Existe alguna otra solución a la Ecuación 2.1? Se puede razonar que la función  $f(q)$  es convexa en el intervalo  $q \in [0, 1]$ ,<sup>3</sup> luego en  $[0, 1]$  existe otra solución si la pendiente de  $f(q)$  es mayor que 1 in  $q = 1$  (ver Figura 2.3):

$$\frac{d}{dq} \left( \sum_{k=1}^K \frac{kP(k)}{\langle k \rangle} q^{k-1} \right) \Big|_{q=1} > 1.$$

Esta desigualdad es equivalente a:

$$\kappa = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} > 2. \quad (2.2)$$

Cuando la anterior desigualdad se cumple, tenemos la existencia de una componente gigante. Recordamos que esta condición es válida únicamente si los ciclos en las redes son estadísticamente irrelevantes.

La Ec. 2.2 nos establece cómo depende la aparición de una componente gigante de la estructura de la red, estableciendo como condición crítica  $\kappa = 2$ . Veamos algunas estructuras en particular. Por ejemplo, para una red tipo Erdős–Rényi añadimos enlaces de manera uniforme con probabilidad  $p$ , luego el número medio de enlaces es  $\langle E \rangle = p \frac{N(N-1)}{2}$  y cada enlace aumenta el grado  $k$  en una unidad a dos nodos, luego  $\langle k \rangle = \frac{2\langle E \rangle}{N} \approx pN$ . La varianza se puede calcular, sabiendo que la distribución de una Erdős–Rényi es binomial, dando un valor crítico de  $p_c = 1/N$ , o equivalentemente,  $\langle k \rangle = 1$ . Para una distribución de Poisson (donde  $\langle k^2 \rangle = \langle k \rangle^2 + \langle k \rangle$ ), que se puede ver como un límite de una binomial, tenemos también  $\langle k \rangle = 1$ . Se puede calcular la probabilidad crítica para las distintas clases de redes [1], pero no vamos a proceder aquí.

<sup>3</sup>Esto es debido a las siguientes propiedades:  $f'(q) > 0$ ,  $f''(q) > 0$  en  $[0, 1]$  lo cual implica que  $f$  es monótona creciente y convexa en dicho intervalo.

En función de la distancia al punto crítico, las redes se clasifican en subcríticas (si  $\langle k \rangle < \langle k_c \rangle$ ), críticas  $\langle k \rangle = \langle k_c \rangle$  y supercríticas ( $\langle k \rangle \gg \langle k_c \rangle$ ), teniendo propiedades distintas en cada régimen.

Por último, comentamos que para analizar la robustez ante fallos o ataques, se puede partir de una red e ir eliminando enlaces hasta llegar al caso crítico  $\kappa = 2$ . Si se eliminan más enlaces, entonces desaparecerá la componente gigante y el funcionamiento de la red se verá afectado.

## 2.2. Percolación explosiva

En el último caso mencionado, de la robustez, hay mucho interés en intentar hacer la probabilidad crítica lo más pequeña posible, para evitar la fragmentación de la red ante daños o ataques. Sin embargo, si por ejemplo estamos estudiando epidemias, nuestro interés es hacer la probabilidad crítica lo más elevada posible para evitar el contacto entre distintas poblaciones, inhibiendo así la propagación. Este intento de aplazar el punto crítico puede llevar a transiciones explosivas. A continuación mostramos un modelo paradigmático que muestra este tipo de transición (como referencia, ver [9]).

La idea fundamental es añadir una competición entre enlaces al crecer la red. En vez de generar un único enlace aleatoriamente, generamos dos y añadimos únicamente uno de ellos, aquel que menos ayude a la componente gigante crecer. Una manera de cuantificar la contribución de un enlace al crecimiento de la mayor componente es mediante los tamaños de las componentes que unen. Sean  $e_{12}$  y  $e_{34}$  dos enlaces que unen los nodos 1 con 2 y 3 con 4 respectivamente (la numeración es arbitraria). Sean  $n_1, n_2, n_3$  y  $n_4$  los tamaños de las componentes a las cuales pertenecen los cuatro nodos. El proceso de Achlioptas consiste en elegir el nodo que minimiza el producto de tamaños de las componentes, es decir, si  $n_1 n_2 < n_3 n_4$ , añadimos  $e_{12}$  y descartamos  $e_{34}$  ( $e_{34}$  puede ser re-elegido en el futuro).

El resultado es una inhibición del crecimiento de la mayor componente, resultando en una transición explosiva, como se puede ver en la Figura 2.4, en el valor  $\ell_c \approx 0.88$ . Observemos que con este proceso competitivo no solamente se puede inhibir, sino favorecer la percolación cambiando el signo de la desigualdad en la elección.

Este proceso se puede generalizar a generar no únicamente  $m > 2$  en cada paso. También, podemos considerar para la elección del enlace cualquier función de las componentes, dando lugar a una gran clase de procesos competitivos. La posibilidad de elección mejora el rendimiento de una gran clase de algoritmos, como por ejemplo relacionados con tiempos de cola en redes de comunicación [11, Sec. II.B.1].

Este tipo de transiciones, a pesar de indicios numéricos de discontinuidad en el límite termodinámico, han resultado ser continuas. Una manera de entenderlo es viendo los efectos de la adición de un único enlace a la red utilizando los algoritmos previos. ¿Cuál es el máximo incremento posible en el tamaño de la mayor componente debido solamente a un enlace? Definimos el incremento como:

$$\Delta C_{\max} \equiv \max_{\{E\}} [ |C(E+1)| - |C(E)| ] / N,$$

siendo  $E$  el número de enlaces. Resulta que  $\Delta C_{\max} \sim N^{-\beta}$ , luego en el límite termodinámico  $\Delta C_{\max} \rightarrow 0$  y es imposible tener una discontinuidad [11, Sec. II.B.2.b]. Sin embargo, aunque la transición es continua, no es una transición típica como en una red aleatoria (ver Figura 2.4),

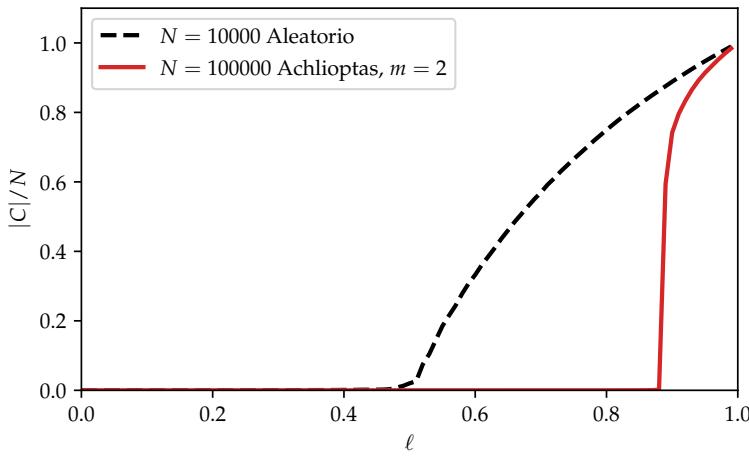


FIGURA 2.4: Se muestran dos transiciones de percolación, una simulada con un crecimiento aleatorio y la otra usando la regla de Achlioptas con  $m = 2$ , que inhibe el crecimiento de la componente gigante en  $\ell_c \approx 0.88$ . Para la simulación de la red aleatoria, se ha usado una variante del algoritmo de Newman-Ziff. [13]

sino que pertenece a otra clase de universalidad [11, Sec. II.B.2.d]. Estos resultados dejan clara la importancia de los parámetros de orden y de control. Tener otro parámetro de control que admite añadir varios enlaces simultáneamente podría evitar este problema, el problema de la continuidad.

Sin embargo, aunque la transición es continua,  $\beta$  tiene valores bajos ( $\beta = 0.065$  para la regla del producto), luego para redes finitas el salto en la percolación es muy significante. Aunque en ciencias de materiales tenemos redes del orden del número de Avogadro, muchas de las redes de comunicación, transporte o relaciones no llegan a tantos nodos.

¿Qué necesitaríamos entonces para una transición discontinua? Un método consiste en crear lo que se denomina un “barril de pólvora” (*powder keg*). Éste consiste en tener varias componentes “grandes” en el sentido de que éstas escalan con el tamaño del sistema, teniendo tamaño  $cN$  (con  $c < 1$ ). Es inmediato ver que si tenemos esta situación, añadir incluso un único enlace crea un salto discontinuo de tamaño proporcional a  $N$ . En el proceso de Achlioptas esto no ocurre, y por esta razón el salto  $\Delta C_{\max}$  tiende a cero en el límite termodinámico. No ocurre porque en el proceso de selección de enlaces, la probabilidad de elegir un enlace que se conecte con la componente gigante es muchísimo mayor que con cualquier otra componente, y esta probabilidad además aumenta con  $\ell$ . Por lo tanto, es mucho más probable tener una única componente gigante y muchas pequeñas en vez de tenerla fragmentada en componentes todas de tamaño similar, escalando con  $N$ . Por razonamientos similares se puede entender por qué una red Erdős-Rényi sólo tiene una componente gigante en el régimen supercrítico. Comentamos que el proceso comentado anteriormente es equivalente a la coalescencia multiplicativa, que se refiere a un conjunto de partículas en suspensión que se agregan entre sí con probabilidad proporcional a su masa; en nuestro caso, la masa es el tamaño de las componentes.

Sobre modelos que muestran transición discontinua, únicamente mencionamos algunos. Uno de ellos [11, Sec. II.B.4] es una modificación de la regla de la elección de enlaces, pasando de

enlaces a *nodos*, de manera que juntamos preferentemente componentes de tamaños similares, resultando en un barril de pólvora. Estos saltos discontinuos en el parámetro de orden son impredecibles, llevando a llamarse este modelo “escalera estocástica”.

Otros modelo introducen una dependencia de  $m$  con el tamaño del sistema,  $m(N)$  [14]. Esencialmente, cuanto más grande es el sistema, elegimos entre más posibilidades. Para entender su funcionamiento, consideremos el límite  $m \rightarrow \infty$ . Entonces tenemos información global del sistema y siempre unimos las componentes óptimas para nuestro objetivo, que es aplazar la transición. La transición se dará en el límite  $\ell \rightarrow 1^-$ , cuando tendremos dos componentes de tamaño  $N/2$  y su fusión creará un salto discontinuo en el tamaño de la componente gigante.

Para finalizar, aparte del ejemplo de las epidemias y su extensión a consideraciones sobre la inmunidad, las transiciones explosivas también tienen aplicaciones en estudios de agregaciones moleculares, redes modulares (de proteínas, sociales o incluso de *wikipedias* en Internet), materiales desordenados o propagación de la información.

## Capítulo 3

# Sincronización

La sincronización es un fenómeno transversal en el campo de la dinámica no lineal, por transversal entendiéndose que no es particular de un único modelo, sino de una clase de ellos. Más en detalle, si tenemos varios sistemas independientes oscilantes, entendiendo la oscilación como la existencia de un ciclo límite en el diagrama de fases, entonces si sus ritmos o frecuencias son similares, la introducción de un acople débil entre ellos suele causar que los sistemas oscilen a una misma frecuencia, con un cierto desfase. [15, Cap. 3]

Llamaremos “fase” de un oscilador a la parametrización del ciclo límite. Es importante remarcar que la existencia de un ciclo límite implica que pequeñas perturbaciones en el sistema no cambian su comportamiento a tiempos largos, volviendo el sistema a su trayectoria estable. Para entenderlo, podemos imaginar que los osciladores tienen una fuente de energía interna y una disipación. El punto en el cual la energía interna y la disipación se compensan define la condición de equilibrio del ciclo límite. La amplitud se puede entender como un grado de libertad perpendicular al ciclo límite, es decir, estable ante pequeñas perturbaciones. Aún así, la introducción del acople débil sí que tiene un efecto sobre la amplitud pero a escalas de tiempo muchísimo más grandes, en comparación con la escala de la fase.

Hay varios sistemas reales que muestran sincronización de este tipo. Por ejemplo, los marcapasos del corazón, los ritmos circadianos, las luciérnagas o el canto de los grillos; formaciones de láseres, generadores eléctricos o uniones Josephson. [16, Sec. 2]

Todos estos ejemplos tienen sus propias particularidades. Nos gustaría elaborar un modelo lo más sencillo posible pero que muestra los efectos de la sincronización. Una simplificación inmediata es considerar a todos los osciladores casi idénticos, es decir, el mismo ciclo límite y frecuencias muy similares. Ahora, entre estos  $N$  osciladores podemos plantearnos la existencia de acoplos genéricos. Si los  $N$  osciladores se representan como nodos, entonces los acoplos se pueden representar como enlaces, aportando una estructura de red. Sobre los acoplos, van a ser acoplos entre las fases de los osciladores, porque las amplitudes son estables bajo perturbaciones. Por sencillez, elegimos que el acople sea lineal respecto de los desfases  $\Delta\psi_{ij} = \psi_i - \psi_j$  cuando  $\Delta\psi_{ij} \rightarrow 0$ , siendo  $\psi_i$  y  $\psi_j$  las fases de los osciladores  $i$  y  $j$  respectivamente. Queremos que el acople sea consistente con la  $2\pi$ -periodicidad de la fase, es decir, también  $2\pi$  periódico y continuo. La elección más sencilla es una función trigonométrica, como por ejemplo, la función  $\sin(\Delta\psi_{ij})$ . Todas estas consideraciones nos llevan al modelo de Kuramoto [17].

Después de analizar el modelo de Kuramoto, exploraremos las transiciones explosivas encontrando que aparecen, análogamente al caso de la percolación explosiva, debido a factores microscópicos que inhiben a la sincronización global.

### 3.1. Modelo de Kuramoto

El modelo de Kuramoto consiste entonces en una dinámica de osciladores sobre una red con acoplos sinusoidales:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \sin(\phi_i - \phi_j),$$

donde  $\mathcal{V}(i)$  denota los vecinos del nodo/oscilador  $i$ ,  $N$  es el número de osciladores,  $K$  es una constante de acople,  $\omega_i$  denota la frecuencia natural del oscilador  $i$  y  $\psi_i$  denota la fase de dicho oscilador. El factor  $N$  para controlar el tamaño del sumatorio en el límite termodinámico para evitar divergencias. Comentamos que el sumatorio se relaciona con la matriz de adyacencia de la forma  $\sum_{j \in \mathcal{V}(i)} = \sum_{j=1}^N A_{ij}$ . También, en el trabajo vamos a definir  $\sigma = K/N$  por simplicidad. Las frecuencias  $\omega_i$  están distribuidas según una distribución  $g(\omega)$ . Definimos  $\Omega = \int \omega g(\omega) d\omega$  como la frecuencia natural promedio, y hacemos un cambio de coordenadas  $\omega_i \rightarrow \omega_i - \Omega$  a un sistema de referencia rotatorio para que, por simplicidad, la frecuencia media sea nula.

#### 3.1.1. Campo medio

A continuación vamos a considerar el caso particular de una red de todos conectados con todos para poder aplicar un análisis de campo medio. Para esta sección, se ha consultado [16]. Para una red completa, un nodo  $i$  es vecino con todo el resto de la red, luego el sumatorio sobre vecinos se convierte en un sumatorio total,  $\sum_{j \in \mathcal{V}(i)} = \sum_{j=1}^N$ . Entonces:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j). \quad (3.1)$$

Ahora, definimos el parámetro de orden como:

$$r(t) e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j(t)}, \quad (3.2)$$

denotando el promedio de todos los fasores<sup>1</sup> de la red.

En la Figura 3.1.A mostramos una red de 25 osciladores todos acoplados con todos, denotando el color las frecuencias naturales y siendo el acople  $K/N = 0.09$ . En la Fig. 3.1.B y la Fig. 3.1.C mostramos los fasores  $e^{i\psi_j}$  dibujados en el plano complejo (la circunferencia denota los números complejos de norma unidad) para el estado inicial (Fig. 3.1.B) y el estado estacionario (Fig. 3.1.C). El punto azul denota  $z = r e^{i\psi}$ , el centro geométrico de todos los fasores. En las dos gráficas de la derecha se muestra la evolución temporal de  $r(t)$  y  $\psi(t)$ . Se observa que después de un periodo transitorio, se llega a una situación con una velocidad angular  $\frac{d\psi(t)}{dt}$  y coherencia  $r(t)$  estables, entendiendo que oscilan en torno a un valor medio estable temporalmente. En la Fig. 3.1.C mostramos esta última situación, y destacamos por un lado una población de osciladores sincronizados y ordenados en desfase según su frecuencia natural (abanico mostrado por la doble flecha), y por otro lado, unos osciladores, con frecuencias naturales más extremas, que no se sincronizan sino que están en deriva. Para un acople  $K/N$  más pequeño, tenemos  $r(t) \approx 0$  y

<sup>1</sup>Un fasor es un número complejo que rota con velocidad angular uniforme. Sus proyecciones sobre los ejes reales o imaginarios llevan al movimiento armónico simple.

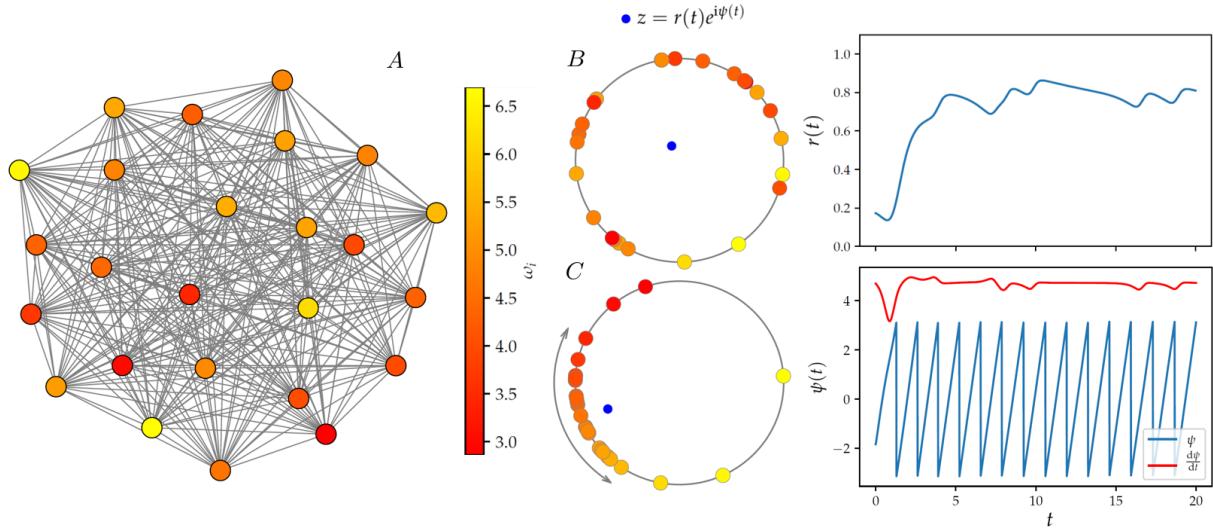


FIGURA 3.1: (Versión digital en color.) En la Imagen A tenemos representada una red Erdős-Rényi de 25 osciladores con  $p = 1$ . La frecuencia natural de cada oscilador viene representada por un color; se han generado con una distribución gaussiana centrada en  $\omega = 5$  con varianza unidad. El acople es  $K/N = 0.09$ . En la Imagen B, mostramos la situación inicial, con phases iniciales aleatorias. El punto azul denota el parámetro de control complejo,  $z = re^{i\psi}$ ; ver su dependencia temporal en las las gráficas de  $r(t), \psi(t)$ . En la Imagen C, después de una fase de termalización, tenemos una población de osciladores sincronizados (abanico marcado por la doble flecha) y otros en deriva, teniendo frecuencias naturales más distantes de la media. Obsérvese que el desfase de cada oscilador sincronizado depende de su frecuencia (la población sincronizada está ordenada en la fase según su frecuencia).

para acoplos más grandes, tenemos sincronización total y los osciladores en deriva desaparecen. Mediante un análisis de campo medio vamos a poder hallar el acople crítico que marca esta transición marcada por la aparición de la población de osciladores sincronizados.

Empezamos en análisis aplicando el complejo conjugado a la Eq. 3.2 y multiplicando ambas partes de la ecuación por  $e^{i\psi_i}$ . Si nos quedamos con la parte imaginaria, recuperamos el sumatorio de senos de la Ec. 3.1. Sustituyendo, llegamos a:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + Kr \sin(\phi_i - \psi) .$$

Estamos describiendo la dinámica de un oscilador mediante parámetros de campo medio  $\psi$  y  $r$ , que son efecto promedio de todos los demás osciladores de la red. Notamos que no hemos hecho ninguna aproximación todavía.

Busquemos ahora puntos estacionarios, que son aquellos que anulan la derivada. Supongamos que en el límite  $t \rightarrow \infty$  los parámetros  $\psi, r$  se vuelven constantes,  $\psi(t) \rightarrow \psi^*$  y  $r(t) \rightarrow r^*$ . Entonces hacemos un cambio de coordenadas,  $\psi_i \rightarrow \psi_i + \psi^*$ , para eliminar  $\psi^*$  de la ecuación. Igualando la velocidad a cero llegamos a:

$$\omega_i = Kr^* \sin \psi_i . \quad (3.3)$$

Si  $|\omega_i| \leq Kr^*$ , entonces existe una solución a la ecuación y el oscilador  $i$  acabará sincronizándose, con un desfase  $\psi_i$  respecto de la fase  $\psi^*$  de equilibrio. Como el desfase es constante, entonces todos los osciladores sincronizados oscilan a la misma frecuencia. Si  $|\omega_i| > Kr^*$ , entonces no

existe solución y el oscilador estará en deriva. Este resultado afirma que cuanto más similares son las frecuencias, más rápidamente se sincronizarán porque habrá sincronización para valores menores de  $r^*$  (recuérdese que  $\omega_i$  representa la diferencia respecto a una frecuencia media  $\Omega$ ).

¿Para qué valores de  $K$  existe sincronización? Podemos usar lo que acabamos de descubrir. Tenemos dos poblaciones, unos osciladores están sincronizados con un desfase constante, y otros están en deriva. Entonces:

$$r^* = \left\langle e^{i\psi_j^*} \right\rangle_{\text{Sinc}} + \cancel{\left\langle e^{i\psi_j(t)} \right\rangle_{\text{Deriva}}},$$

donde hemos anulado el término correspondiente a los osciladores en deriva debido a que la suma de osciladores desfasados se anula al estar distribuidos uniformemente en el círculo unidad del plano complejo. Ahora vamos a aproximar mediante un paso al continuo para calcular el promedio sobre los osciladores sincronizados:

$$\begin{aligned} r^* &= \left\langle e^{i\psi_j^*} \right\rangle_{\text{Sinc}} = \int_{-Kr^*}^{+Kr^*} g(\omega) e^{i\psi^*(\omega)} d\omega \\ &= \int_{-Kr^*}^{+Kr^*} g(\omega) \cos(\psi^*(\omega)) d\omega + i \int_{-Kr^*}^{+Kr^*} g(\omega) \sin(\psi^*(\omega)) d\omega, \\ &= \int_{-Kr^*}^{+Kr^*} g(\omega) \cos(\psi^*(\omega)) d\omega \end{aligned}$$

donde hemos supuesto que la distribución  $g(\omega)$  es simétrica para cancelar la parte imaginaria. Nótese que aquí  $\psi^*$  no denota el valor del campo medio estacionario, sino la fase estacionaria de un cierto nodo con frecuencia  $\omega$ . Ahora usando la Ec. 3.3 podemos sustituir las frecuencias  $\omega$  en función de  $\psi^*$  llegando a la siguiente ecuación:

$$r^* = Kr^* \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g(Kr^* \sin \psi^*) \cos^2(\psi^*) d\psi^*.$$

Por un lado está la solución trivial,  $r^* = 0$ . Si  $r^* \neq 0$ , entonces, suponiendo que estamos cerca del punto crítico, podemos aproximar  $Kr^* \approx 0$ , obteniendo:

$$1 = K_c g(0) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2(\psi^*) d\psi^* = K_c g(0) \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, el acople crítico para la sincronización en campo medio es:

$$K_c = \frac{2}{\pi} \frac{1}{g(0)}.$$

También se puede demostrar que cerca del punto crítico la forma del parámetro obedece:

$$r = \begin{cases} 0 & K < K_c \\ (K - K_c)^\beta & K \geq K_c \end{cases},$$

con  $\beta = \frac{1}{2}$ , una transición de segundo orden corriente en física estadística, poniendo de manifiesto el carácter de campo medio usado en el análisis.

Hagamos unos breves comentarios sobre el análisis hecho. Por un lado, se ha supuesto que  $r(t) \rightarrow r^*$ , siendo  $r^*$  un valor constante. Es un hecho que para ningún  $N$  finito es constante, sino que sufre fluctuaciones. Demostrar rigurosamente que las fluctuaciones de tamaño finito se comportan bien en el límite termodinámico no es trivial. Por ejemplo, tendríamos que tener en cuenta que la población de osciladores en deriva y sincronizados cambia continuamente. Por otro lado, no hemos tratado la estabilidad de la solución, que se calcularía mediante perturbaciones en torno al punto crítico. En resumen, resulta ser estable, pero no es trivial de razonar debido al enorme número de grados de libertad. Para profundizar ver [16].

El modelo de Kuramoto presentado es uno de los primeros intentos de entender la sincronización. Aparte de la sincronización, ha tenido varias aplicaciones interesantes, como caso límite de un modelo cuántico de varios cuerpos [18] o como aproximación a la dinámica de redes biológicas [11, Sec. III.A].

### 3.1.2. Redes complejas

Ahora vamos a explorar un caso más realista en el cual los osciladores no están conectados todos con todos, sino en forma de red general con fluctuaciones en el grado. El método utilizado será el uso de campo medio *local* o heterogéneo. El uso del campo medio local es similar a la sección anterior, luego sólamente mencionamos los pasos superficialmente. La ecuación de Kuramoto para redes es:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \sin(\phi_i - \phi_j) . \quad (3.4)$$

Definimos un parámetro local:

$$r_i(t) e^{i\Psi_i(t)} = \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} e^{i\psi_j(t)}$$

que se relaciona con el global mediante  $r(t) = \frac{\sum_{i=1}^N r_i(t)}{\sum_{i=1}^N k_i}$ , es decir, tenemos  $r_i \approx rk_i$ . Sustituyendo en la Ec. 3.4 llegamos a  $\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + Kr_i \sin(\Psi_i(t) - \psi_i(t))$ . Usamos el mismo razonamiento que en la Sección 3.1.1 y buscamos puntos estacionarios, obteniendo así una condición local en función de las frecuencias:

$$\omega_i = Kr_i \sin(\psi_i(t)) , \quad (3.5)$$

que nos muestra la existencia de osciladores en deriva y sincronizados. Podemos dividir la contribución a  $r_i^*$  de los dos tipos de osciladores obteniendo:

$$r_i^* = \left\langle e^{i\psi_j(t)} \right\rangle_{j \in \mathcal{V}(i), \text{ Sinc}} + \overbrace{\left\langle e^{i\psi_j(t)} \right\rangle_{j \in \mathcal{V}(i), \text{ Deriva}}} .$$

El segundo término se anula únicamente en la aproximación de grado medio alto, porque necesitamos un número suficiente de vecinos para que la suma de éstos esté próxima a cero. Pasamos al continuo la suma sobre osciladores sincronizados e imponemos simetría en  $g(\omega)$  para anular la parte imaginaria. Para la parte real, tendremos un factor  $\cos \psi_j$  en la integral, que

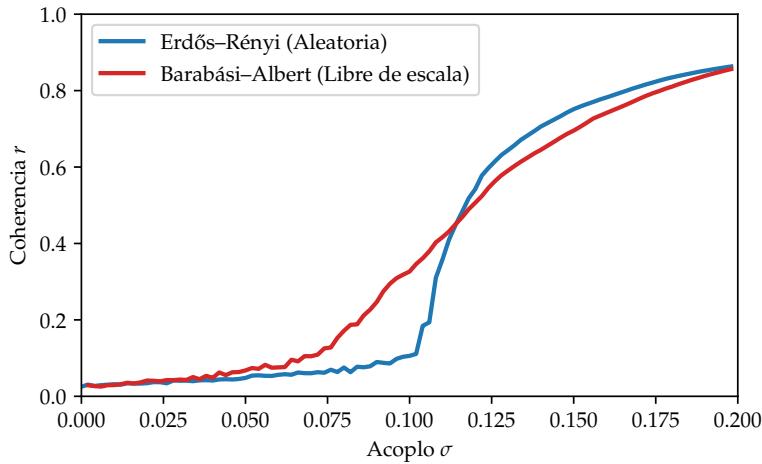


FIGURA 3.2: (Version digital en color). Un ejemplo de transición continua en dos tipos de redes, una homogénea (Erdős-Rényi,  $p = 0.06$ ) y otra heterogénea/libre de escala (Barabási-Albert con  $m = 3$ ). Ambas tienen  $\langle k \rangle = 6$ . Para la simulación, se ha usado  $N = 1000$ , frecuencias naturales generadas de manera uniforme en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  y fases iniciadas aleatoriamente en  $[-\pi, \pi]$ . Las barras de error de promediado temporal son más pequeñas que el punto de la gráfica. Para la dinámica se ha usado un algoritmo RK4 con paso temporal  $h = 0.01$ . Esta simulación reproduce correctamente los resultados de [19] validando en primera aproximación la simulación. Se observa que la transición empieza antes para la libre de escala, consistente con el valor teórico, al tener un  $\kappa$  mayor que la homogénea.

escribimos en función del seno para poder usar la Ec. 3.5 para simplificar, resultando en:

$$\begin{aligned} r_i^* &= \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \int_{-K r_j^*}^{+K r_j^*} \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_j}{K r_j^*} \right)^2} g(\omega) d\omega \\ &= K \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} r_j^* \int_{-1}^1 g(x K r_j^*) \sqrt{1 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $r_i = r^* k_i$ , sumando sobre  $i$ , dividiendo entre  $N$  y tomando el límite  $r^* \rightarrow 0$ , llegamos a la expresión para el umbral crítico de sincronización:

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = K_c^{\text{medio}} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = \frac{K_c^{\text{medio}}}{\kappa}.$$

Observamos que aparece de nuevo el parámetro de heterogeneidad renormalizando el acople crítico obtenido en el campo medio.

En la Figura 3.2 mostramos transiciones para dos tipos de redes complejas, una red aleatoria homogénea y otra libre de escala. Observamos que la transición empieza antes para una red libre de escala, y razonamos que es coherente con el resultado anterior, al ser  $\kappa$  es mayor. Es importante remarcar que no lo podemos afirmar rigurosamente porque este resultado es únicamente válido para un grado medio alto (en las gráficas,  $\langle k \rangle = 6$ ), para que la aproximación de campo medio local sea válida.

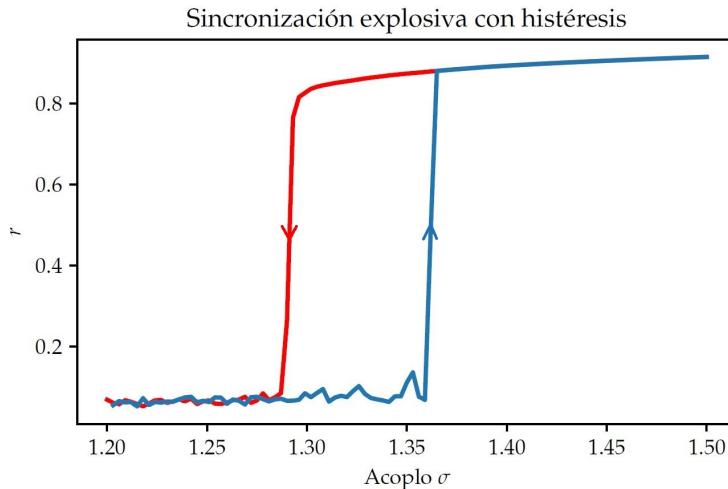


FIGURA 3.3: (Versión digital en color.) Ejemplo de transición explosiva en una red libre de escala de tipo Barabási-Albert con  $m = 3$ ,  $N = 1000$ . Las barras de error de promediado temporal son más pequeñas que el punto de la gráfica. Se tienen las mismas condiciones iniciales que en la simulación de la Figura 3.2, pero en este modelo el acople  $\sigma$  depende del grado de la red,  $\sigma \sim k$ . Este acople perjudica la sincronización de los *hubs*, aplazando la sincronización hasta que aparece otra vez de manera abrupta. Se observa un ciclo de histéresis.

Se ha estudiado el proceso en el que surge la sincronización en redes complejas mediante el análisis de “sincronización de enlace”, que nos cuantifica, dado un enlace, cuanto de sincronizados están los nodos a los que une [19]. En resumen, para redes homogéneas, se observa la creación de pequeños clústeres sincronizados, que al incrementar el acople se unen rápidamente llevando a la sincronización global. Para una red heterogénea libre de escala, la sincronización se origina primero en torno a los *hubs*. Éstos se sincronizan primero y después sincronizan a sus vecinos también, que además constituyen una parte significativa en número de la red al ser, los primeros, *hubs*, facilitando de esta manera la sincronización global.

### 3.2. Sincronización explosiva

Para crear una transición explosiva, fundamentalmente buscaremos modificar el modelo de Kuramoto con el fin de inhibir la sincronización. En esta sección se ha consultado [11]. Empezaremos centrándonos en las redes libres de escala en las cuales ya conocemos que los *hubs* juegan un papel fundamental.

Entonces, un primer punto de partida podría ser desincronizar los *hubs* del resto de la red. Con nuestro conocimiento anterior sobre las dos poblaciones de osciladores, en deriva y sincronizados, y su relación con la dispersión en frecuencias, razonamos que si le asignamos una frecuencia muy distinta del resto, éste estará en deriva. Una manera elegante de asignar las frecuencias es relacionándolas con la topología de red, en particular, con la distribución del grado. Como primer intento, podemos suponer una relación lineal  $g(\omega) \sim P(k)$ , es decir, sustituimos  $\omega_i \propto k_i$  en la Ec. 3.4.

Con esta modificación, se encuentra una transición explosiva en la sincronización en la Figura 3.3 perdiendo la suavidad de las anteriores (Figura 3.2). Como se ha mencionado,

la sincronización surge en pequeñas componentes que posteriormente se juntan generando sincronización global. En una red libre de escala, los *hubs* son esenciales para esta “percolación” de las componentes de sincronización, luego imponiendo  $\omega_i \propto k_i$  estamos creando un cuello de botella. Sin embargo, se llega a un acople tan fuerte que hasta las frecuencias muy dispares se sincronizan, pero de manera explosiva.

Este método en particular ha sido uno de los primeros que han mostrado transición explosiva y se ha profundizado con varios análisis teóricos y experimentales en redes estrella y con algunas variaciones, como la introducción de tiempos de retardo o introducción de ruido (ver [11]).

Existe una generalización interesante en la cual no se cambian las frecuencias, sino los *acoplos*, haciéndolos depender tanto de las frecuencias como de la topología, es decir:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \frac{|\omega_i|}{k_i} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \sin(\phi_i - \phi_j) .$$

Esto nos permite generalizar y tratar con distribuciones de frecuencias arbitrarias. Observemos que para  $\omega_i \approx 0$  (cerca del valor medio), estamos disminuyendo la intensidad efectiva del acople, perjudicando la sincronización. Se ha añadido el valor absoluto para que lo único relevante sea la distancia al valor medio y no el signo. Pensando en las redes libres de escala, si el nodo tiene un número de vecinos altos lo queremos perjudicar más todavía, y esto viene reflejado en el factor  $1/k_i$ . En esencia, inhibimos la sincronización de los nodos que más facilidad tienen para sincronizarse. Esto aplaza la transición, y para acoplos altos, surge de manera explosiva.

El último modelo que vamos a comentar es la introducción de un *gap* o saltos en las frecuencias conectadas en la red. Este método enlaza con las ideas del siguiente capítulo. Dada una red, la idea es asignar frecuencias de manera que impidamos que dos osciladores con frecuencias muy próximas estén conectados. Obviamente, si los nodos con frecuencias próximas a la media no se pueden enlazar, estamos perjudicando a la sincronización, y esto lleva también a transiciones explosivas.

Las transiciones de sincronización explosiva comentamos que aparte de estudios teóricos, también se han intentado aplicar a varios fenómenos del mundo real, como a redes eléctricas o en neurociencia, a ataques epilépticos, la transición entre estado consciente e inconsciente o la detección de frecuencias en la cóclea. [11]

## Capítulo 4

# Modelo de percolación con sincronización explosiva

En el Capítulo 1 hemos comentado que nuestro objetivo es la elaboración de un modelo de percolación que muestre sincronización explosiva. Nuestra intención es por un lado ganar intuición sobre nuevos métodos que generen transiciones explosivas y, más generalmente, sobre cómo cambios en la topología afectan la dinámica, o cómo cambia la topología si la cambiamos en función de la propia dinámica.

Nuestra idea es partir del último ejemplo mencionado en el capítulo anterior, en el cual se asignan frecuencias a una red de manera que estén conectados únicamente osciladores con una cierta diferencia o *gap*,  $\Delta$ , entre sus frecuencias, es decir, sólo aceptamos  $|\omega_i - \omega_j| > A_{ij}\Delta$  (donde  $A_{ij}$  aparece para imponer que sean vecinos).

Podemos plantearnos hacer el proceso inverso. En vez de distribuir frecuencias en una red tal que se cumpla la condición del *gap*, podemos fijar unas frecuencias según una distribución y distribuir *enlaces* de manera que se cumpla el *gap*. Esta idea nos permite enlazar con la percolación, porque ahora tratamos con un crecimiento de la red al añadir enlaces según este criterio. Sin embargo, la condición de tener un *gap* lo encontramos algo rígida, preferimos un proceso con una correlación más suave o uniforme.

El proceso propuesto es el siguiente. Partimos de  $N$  nodos no enlazados con frecuencias  $\omega_i$  generadas de una distribución  $g(\omega)$  centrada en  $\omega = 0$ . A cada paso, escogemos un nodo  $i$  aleatoriamente según la distribución  $\propto e^{\alpha|\omega_i^{\text{eff}}|}$  donde  $\omega_j^{\text{eff}}$  denota la frecuencia efectiva de un nodo  $j$ , definida como promedio temporal de la frecuencia instantánea  $\frac{d\psi_j(t)}{dt}$ .

$$\omega_j^{\text{eff}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\psi_j(t)}{dt} dt.$$

El nodo  $i$  lanza un enlace conectándose con otro nodo,  $k$ . Este nodo  $k$  se elige a partir de una distribución análoga a la anterior. Para ello, definimos una función *fitness* que para un nodo,  $i$ , nos especificará la probabilidad de enlazarse con otro nodo,  $j$ :

$$f_i(j) = C(1 - A_{ij})e^{\alpha|\omega_i^{\text{eff}} - \omega_j^{\text{eff}}|} \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^N f_i(j) = 1,$$

donde  $f_i(j)$  denota, dado el nodo  $i$  que lanza un enlace, la probabilidad de que el enlace conecte con el nodo  $j$  y  $C$  es un factor normalizante. El factor  $(1 - A_{ij})$  elimina los vecinos de  $i$ , para no

repetir enlaces. La exponencial es una elección arbitraria tanto aquí como en la generación de  $i$ , lo importante es que sea una función monótona de  $|\omega_i^{\text{eff}} - \omega_j^{\text{eff}}|$  parametrizada por  $\alpha$ .

El objetivo de estas reglas es conseguir que los nodos busquen enlazarse con otros nodos disimilares a ellos en frecuencia natural, y al hacerlo, inhiban la sincronización. Pensando en un  $r \neq 0$ , tendremos una población de osciladores en deriva y otros sincronizados. El método propuesto es equivalente a intentar aumentar la población de osciladores en deriva. Para ello, necesitamos unir osciladores con frecuencias distintas. Supondremos que la frecuencia natural es una variable oculta desde la perspectiva de otros osciladores, éstos solamente ven la velocidad angular, que promediamos para conseguir una frecuencia efectiva.

Usaremos como parámetro de orden el número de enlaces añadidos normalizado,  $\ell = E/N$ . Podemos imaginar a la percolación como un proceso temporal en el cual se añaden enlaces periódicamente. El parámetro  $T$ , que marca el tiempo de promediado, nos controla la diferencia entre las escalas de tiempo de la percolación y sincronización. Una elección de  $T$  grande implica que la dinámica oscilatoria es mucho más rápida que la percolante, de esta manera el proceso de percolación “ve” únicamente un promediado. Nosotros trabajaremos con un  $T$  alto.

Comentamos que nuestros intentos no han sido los primeros en buscar unir la percolación y sincronización en un único modelo. En [20] crean un modelo adaptativo donde dinámicamente, en el tiempo, los nodos tienen una cierta probabilidad de conectarse entre sí dependiendo de una función *fitness*,  $f(\psi_i, \psi_j) = z(1 + \cos(\psi_i - \psi_j))/N$  donde  $z$  es un parámetro del modelo,  $N$  el número de osciladores y  $\psi_k$  la fase de un oscilador  $k$ . Con este modelo consiguen mostrar transiciones tanto de percolación como sincronización y ligeramente más abruptas respecto a las usuales, pero sin embargo no son explosivas.

Nuestro modelo tiene ciertas diferencias respecto a este último. Por un lado, nuestro parámetro de orden no es un tiempo dinámico, sino el número de enlaces  $\ell$  (equivalente a añadir enlaces periódicamente en el tiempo). Asimismo, nosotros no usamos parámetros instantáneos para la función *fitness*, como la fase, sino la frecuencia media. Esto razonamos que es más interesante porque, por un lado, nos da información más estable temporalmente (la fase tiene muchas fluctuaciones) y también, información más característica del propio oscilador, que es su frecuencia natural. Además, nos permite poder conectar osciladores con frecuencias distintas, que, como ya sabemos, inhibe la sincronización.

Después de esta introducción, procedemos a analizar nuestro modelo. En primer lugar, remarcamos que tenemos dos parámetros, la intensidad del acople  $\sigma = K/N$  y el parámetro  $\alpha$ , que vamos a mantener constantes en el tiempo. Un “experimento” será crecer la red, es decir variar  $\ell$  empezando en  $\ell = 0$  e ir observando el tamaño de la componente gigante  $|C|/N$  y la sincronización global  $r$ . Para las simulaciones hemos usado una red de  $N = 2000$ , con frecuencias naturales generadas uniformemente en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , y fases iniciales aleatorias en  $[-\pi, \pi]$ . Para la integración de la dinámica de los osciladores hemos usado un algoritmo Runge-Kutta de orden 4, con paso temporal  $h = 0.1$ ; para las frecuencias efectivas hemos integrado con  $T = 150$ .<sup>1</sup>

Para ver si efectivamente tenemos correlaciones entre las frecuencias añadidas al crecer la red, o no, tomamos nota de las mismas,  $(\omega_i^{\text{eff}}, \omega_j^{\text{eff}})$  y para cada paso temporal, almacenamos el último par de frecuencias añadidas. Se puede ver en la Figura 4.1 que, como es razonable, para

<sup>1</sup>Para la validación del paso temporal, ver el Apéndice B.

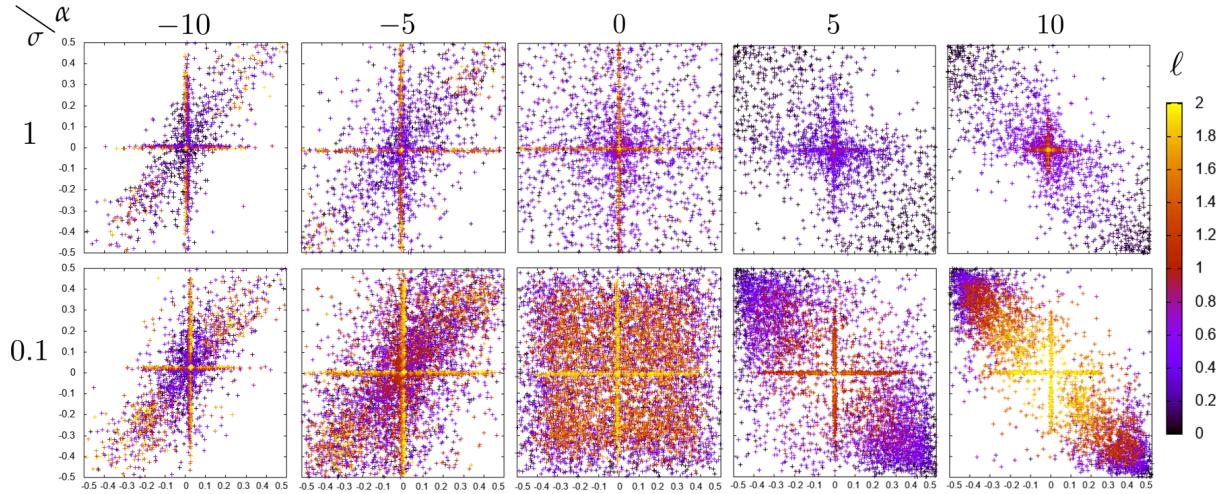


FIGURA 4.1: (Versión digital en color.) En esta gráfica los puntos son coordenadas  $(\omega_i^{\text{eff}}, \omega_j^{\text{eff}})$ , que representan las frecuencias efectivas de los nodos conectados mediante el enlace  $i \rightarrow j$ . El color del punto representa  $\ell$ , es decir, el orden temporal en el cual se añaden. Tenemos representado el diagrama de correlaciones para los valores  $\alpha \in \{-10, -5, 0, 5, 10\}$  y  $\sigma \in \{1, 0.1\}$ . Observamos que para cualquier  $\alpha \neq 0$ , los valores de frecuencia efectiva que se añaden no son independientes entre sí, sino que tenemos correlaciones.

cualesquier  $\alpha$  distinto de cero tenemos correlaciones (para  $\alpha = 0$ , tenemos una distribución plana descorrelacionada).

Para  $\alpha < 0$  hay correlación positiva, es decir, nodos con frecuencias similares se conectan entre sí, y lo opuesto ocurre para  $\alpha > 0$ . Nosotros buscamos correlaciones negativas para inhibir la sincronización. Sin embargo, no buscamos un proceso determinista (como  $\alpha \gg 10$ ), sino que nos interesa mantener un grado de aleatoriedad, aunque no totalmente aleatorio ( $\alpha = 0$ ). Escogeremos un valor intermedio, como por ejemplo  $\alpha = 5$ . Sobre el efecto de la intensidad de acoplo, observemos el caso  $(\alpha = 10, \sigma = 1)$ . Notamos en la Figura 4.1 que para puntos  $\ell > 1$ , todas las frecuencias efectivas añadidas están cerca del origen. Esto significa que los nodos conectados están muy próximos a la frecuencia media facilitando la sincronización. Sin embargo, para  $(\alpha = 10, \sigma = 0.1)$  hay un gradiente más suave de colores, indicando que incluso para  $\ell$  alto seguimos teniendo nodos lejos de la frecuencia media, luego esta elección (acoplos bajos) parece razonable a la hora de buscar sincronización explosiva.

Después de todas estas consideraciones, razonamos que unos valores prometedores de parámetros que pueden llevar a transición explosiva son un  $\alpha$  intermedio como por ejemplo  $\alpha = 5$  y acoplos bajos,  $\sigma \leq 0.1$ . Con esta elección de  $\alpha$  el exponente en la exponencial de la función *fitness* es del orden unidad.

Nuestra intuición es acertada y como se puede ver en la Figura 4.2, para  $\sigma \leq 0.08$  aparece transición explosiva en la sincronización. Además, tanto la altura del salto de la transición como la anchura del ciclo de histéresis aumentan al disminuir el acoplo. Para calcular el ciclo de histéresis, se han eliminado los enlaces en el orden que se han añadido. Hemos llegado a calcular hasta  $\ell = 25$  con los parámetros de la simulación mencionados anteriormente. Se observa que no hay ningún fenómeno abrupto en la percolación debido a que para  $\alpha = 5$  hay una aleatoriedad significante, con lo cual en esencia tenemos un modelo de Erdős-Rényi correlacionado con una

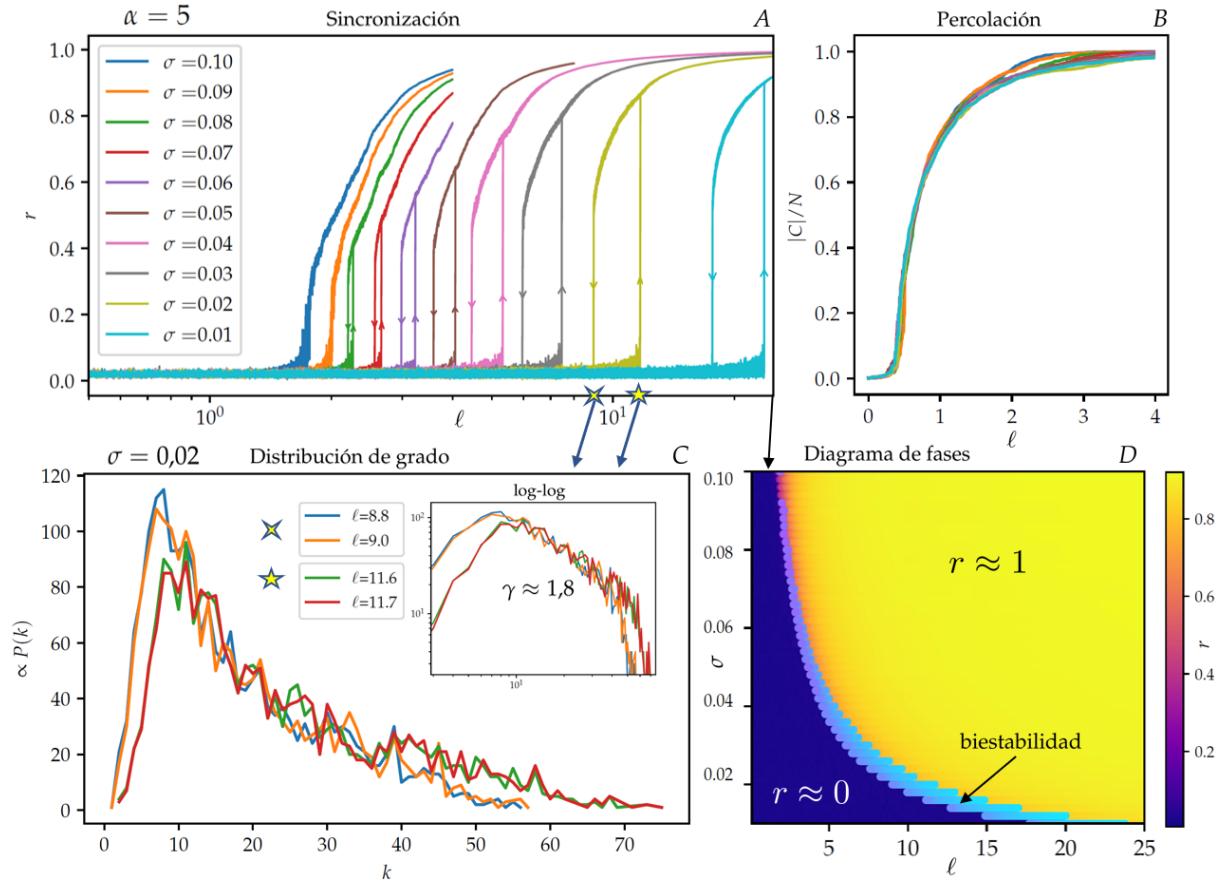


FIGURA 4.2: (Versión digital en color.) Imágenes superiores: La sincronización (izquierda, A) y percolación (derecha, B – misma leyenda de colores que la sincronización) para  $\alpha = 5$  y distintos acoplos  $\sigma \leq 0.1$ . Los parámetros de la simulación son  $N = 2000$ ,  $\omega_i \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  y fases iniciales aleatorias. Se ha mantenido la misma semilla para el generador de números aleatorios para poder ver únicamente los efectos debidos al cambio en acople. Las barras de error de promediado temporal son más pequeñas que el punto de la gráfica. Imagen inferior izquierda (C): la distribución de grado para el caso  $\sigma = 0.02$  justo antes y después del salto abrupto en  $r$ , tanto para la ida como para la vuelta, que por histéresis ocurre en un punto distinto. La distribución parece ser de Poisson, que es consistente con el grado de aleatoriedad presente en el crecimiento. Como se observa en la gráfica log-log del inset, para un cierto intervalo de  $k$ , la cola es aproximable a la de una distribución libre de escala  $P(k) \propto k^{-\gamma}$  con  $\gamma \approx 1.8$ . Imagen inferior derecha (D): mejor visualización de la transición de sincronización en función de la intensidad del acople. El color indica el valor de  $r$ , delimitando el espacio de parámetros en dos regiones, sincronizada (amarillo) y desincronizada (azul oscuro). En color cian (o azul claro) se denota el intervalo de histéresis donde tenemos biestabilidad.

transición continua de segundo orden. Hemos calculado el parámetro de heterogeneidad para el punto  $\ell = 0.45$ , y tiene un valor de  $\kappa \approx 2$ , muy consistente con la condición de percolación hallada en el Capítulo 2.

En un primer acercamiento, uno pensaría que los acoplos muy fuertes serían los que causan transiciones abruptas, sin embargo, estas ocurren para acoplos débiles. Esto es impactante, porque implica que un acople muy débil en las fases es suficiente para crear espontáneamente orden macroscópico (aunque en  $\ell$  relativamente alto, acercándonos al régimen supercrítico de la red). En la imagen inferior derecha de la Figura 4.2 mostramos mejor el espacio de parámetros, en el cual la región azul marca falta de sincronización, la amarilla sincronización y la cian (o azul claro) la región de histéresis.

¿Hay algún cambio relevante en la topología de la red en la transición? En la Figura 4.2.C mostramos un histograma de los grados, que es proporcional a la distribución  $P(k)$ . Lo representamos para la  $\sigma = 0.02$ , esencialmente en dos puntos: en  $\ell_1 = 11.65$  y en  $\ell_2 = 8.9$ , que marcan la entrada y salida de la región de biestabilidad. Tanto para  $\ell_1$  como para  $\ell_2$  representamos también dos puntos próximos a ellos que marcan un antes y después en el cambio brusco del parámetro de control  $r$ . Naturalmente, localmente alrededor de  $\ell_1$  y  $\ell_2$  no hay un cambio brusco en  $P(k)$  porque solamente añadimos pocos enlaces. Entre  $\ell_1$  y  $\ell_2$  observamos la misma forma de la distribución (de Poisson), pero con una media mayor. Para cuantificar mejor estos cambios, tenemos que analizar más valores de  $\ell$ . Para simplificar el análisis, en vez de representar toda la distribución, nos quedaremos con el valor  $\kappa = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ , y analizamos su variación con  $\ell$ .

Esto es más interesante que analizar solamente unos valores fijos porque nos permite investigar el cambio en el patrón de crecimiento que se produce en el punto de la transición hacia la sincronización. En la Figura 4.3 hemos representado la evolución de la heterogeneidad simultáneamente a la evolución del parámetro de sincronización  $r$  para tres valores de  $\sigma$ . En los tres casos, se observa que justo en el punto donde emerge abruptamente el estado sincronizado (al crecer el número de enlaces), se produce un punto de inflexión de manera que el ritmo al que crece la heterogeneidad de la red disminuye considerablemente del observado antes de la aparición del estado sincronizado. Este cambio brusco de la tendencia del parámetro de heterogeneidad es claramente el producto de una transición abrupta. Asimismo, el hecho de que la heterogeneidad crezca a un ritmo menor se debe a que después del punto crítico, las frecuencias efectivas de los nodos tienden a acercarse, por lo que la probabilidad de conexión se vuelve mucho más homogénea que en caso de los estados no sincronizados, es decir, antes del punto crítico.

Sobre el acople, es muy natural ahora preguntarse si existe algún valor mínimo más allá del cual no puede existir sincronización. Con nuestros conocimientos del Capítulo 3 razonamos que sí, porque en  $\ell = \frac{N-1}{2}$  tenemos una red todos-con-todos, para la cual tenemos un acople crítico dado por el análisis de campo medio del modelo de Kuramoto,  $K_C = \frac{2}{\pi g(0)}$ . Para verificarlo, necesitamos un valor de  $\ell$  más alto. En el Apéndice C.1 hemos simulado con  $N = 500$  y menos tiempo de promedio ( $T = 10$ ) para reducir la duración de la simulación. Los resultados son consistentes con el valor crítico del campo medio, pero no lo demuestran (porque no hacemos un barrido fino de los acoplos). Postulamos que el mínimo vendrá dado más precisamente por el acople crítico en redes complejas, es decir  $\sigma_{\min} = \frac{1}{N} \frac{2}{\pi g(0)} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$ .

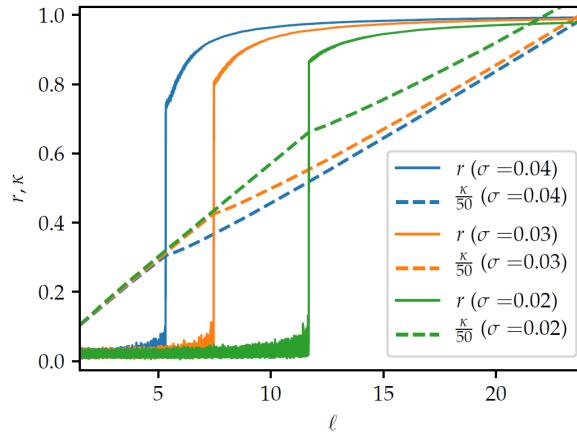


FIGURA 4.3: (Versión digital en color). Mostramos algunas de las transiciones de la Figura 4.2 junto al parámetro  $\kappa = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ , normalizado para poder visualizarlo de tamaño comparable al parámetro  $r$ . Se observa que la tasa de crecimiento de  $\kappa$  sufre un cambio en el punto de la transición hacia la percolación, enlazando de manera clara la dinámica y el crecimiento.

Se ha visto entonces que para este rango de parámetros,  $\alpha = 5$  y  $\sigma \leq 0.08$ , tenemos transición explosiva. Ahora debemos plantearnos qué ocurre para distintos valores de  $\alpha$  y acoplos más fuertes. En la Figura C.2 del Apéndice C.2 presentamos varias gráficas que muestran el comportamiento del sistema; en este capítulo solamente mostraremos las más representativas en la Figura 4.4 para  $\ell \in [0, 2]$ . Consideramos  $\alpha \in \{-10, 0, 10\}$ , acoplos fuertes  $\sigma \in \{1.0, 0.5\}$  y acoplos débiles  $\sigma \in \{0.1, 0.08, 0.05\}$ . Comentamos:

- $\alpha = 0$ . Este es el caso nulo, en el cual la función *fitness* es constante y se sortean enlaces aleatoriamente, luego recuperamos la percolación del modelo de Erdős–Rényi. Sólo aparece un color en la imagen porque coincide perfectamente para todos los acoplos. Para la sincronización, los acoplos fuertes tienden a acercarla a la curva de la percolación. Es decir, podemos usar dinámica de acople fuerte para “muestrear” la topología y analizar el grado de conectividad de la red. Para  $\sigma = 1$  observamos un tipo de histéresis, pero no asociada a una transición abrupta como la vista en las otras Figuras. Los acoplos débiles llegan a sincronizar para  $\ell > 2$  de forma continua.
- $\alpha = 10$ . En primer lugar, sobre la sincronización, para acoplos fuertes el pequeño ciclo de histéresis del caso  $\alpha = 0$  se intensifica y para  $\alpha = 20$  más todavía (ver Apéndice C.2). Para acoplos fuertes la sincronización coincide con la curva de percolación. Para acoplos débiles aparece otra vez una transición explosiva. Difiere del caso  $\alpha = 5$  en dos detalles, por un lado ocurre a  $\ell$  más bajo pero por otro lado el salto es más pequeño. Una posible razón sería que, para  $\ell$  bajo, no tenemos suficientes enlaces como para tener una sincronización muy explosiva. Sobre la percolación, encontramos que los acoplos altos atrasan la percolación. Esto se puede entender del siguiente modo. Para acoplos fuertes, unir osciladores aunque con distintas frecuencias no los deja en deriva sino que los sincroniza. Una vez se han sincronizado tienen frecuencia efectiva nula ambos, porque se han unido con frecuencias similares pero de signo opuesto. Al tener ahora frecuencia efectiva casi nula, es más improbable que sean escogidos para el siguiente enlace, luego su componente no crece por lo que se favorece la unión de osciladores aislados. Esta inhibición de la percolación no es,

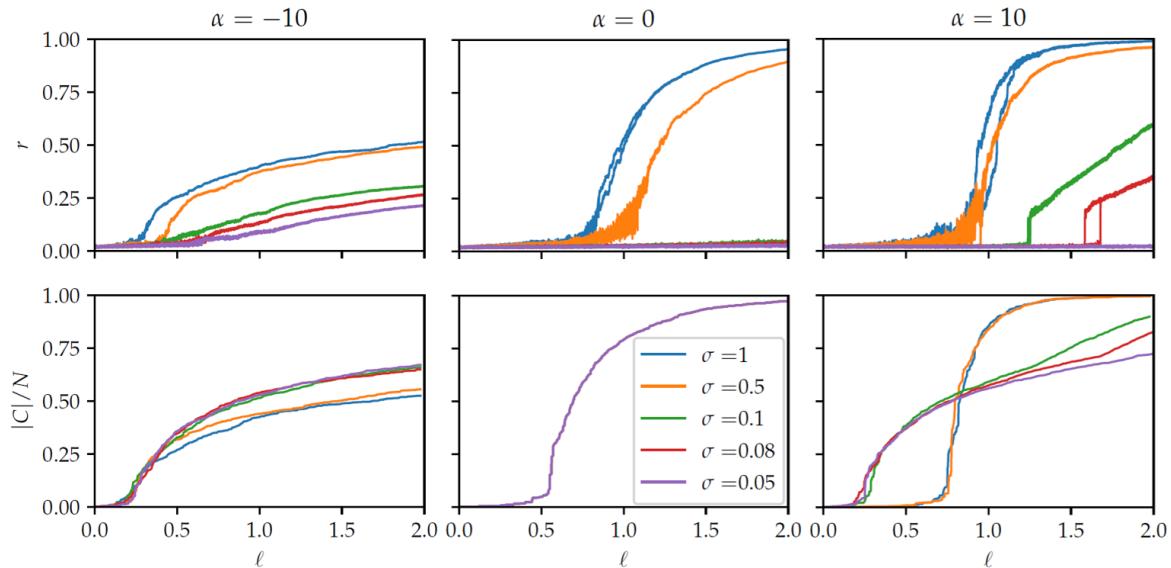


FIGURA 4.4: Simulación realizada con la misma configuración que la comentada en la Figura 4.2. Las tres figuras superiores muestran la sincronización para tres valores de  $\alpha$  y las tres inferiores la percolación. La leyenda de colores es válida para las seis gráficas. Ver texto principal para comentarios. Ver en la Figura C.2 del Apéndice C más valores de  $\alpha$ .

sin embargo, suficiente para dar lugar a una transición explosiva. Sobre acoplos débiles, éstos favorecen la percolación porque para un bajo número de enlaces, los osciladores casi no notan el acople, y entonces la frecuencia efectiva de cada uno se mantiene igual. Sin embargo, al escoger enlaces tenemos un sesgo, por el factor  $\alpha$ , a conectar nodos con frecuencias altas en valor absoluto, y no vemos los de frecuencias bajas. Al no ir cambiando las frecuencias al añadir enlaces, seguimos conectando estos nodos con frecuencia alta formando rápidamente una componente.

- $\alpha = -10$ . Para este valor, añadimos primero osciladores similares entre sí. Se adelanta significativamente la transición de sincronización, sin embargo, se perjudica la sincronización global, porque el parámetro  $r$  crece muy despacio. Para entenderlo pongámonos en una situación en la cual  $r > 0$ . Si el nodo  $i$  elegido forma parte de esta comunidad sincronizada, entonces solamente se va a enlazar con nodos similares a él, es decir, sincronizados, y no aumenta la sincronización global porque necesitaríamos añadir nodos nuevos no sincronizados, de la población en deriva, para que esto ocurra.

Para finalizar, es destacable de este último análisis que la transición hacia la sincronización tiene un salto  $\Delta r$  muy significante para valores de  $\alpha$  intermedios; para valores altos se adelanta la transición pero ésta tiene un salto mucho menor. Es decir, la explosividad, cuantificada por  $\Delta r$ , en la transición hacia la sincronización es resultado de un balance entre determinismo en la generación de enlaces ( $\alpha \gg 10$ ) y aleatoriedad completa ( $\alpha = 0$ ).

## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo de fin de máster hemos afrontado el problema de obtener transiciones explosivas de sincronización en redes sometidas a un proceso de percolación. De esta manera, hemos querido unir los dos ámbitos (sincronización y percolación) en los cuales las transiciones explosivas han sido estudiadas de manera exhaustiva. El resultado de este trabajo refleja que es posible obtener estas transiciones cuando se realiza un crecimiento enlace a enlace de forma que los enlaces entre nodos se asignen de acuerdo a una regla probabilística, regla que beneficia a aquellos pares cuya frecuencia efectiva sea muy diferente. De esta manera, hemos incorporado los conocimientos obtenidos a través del método de saltos en frecuencias propuesto para obtener transiciones explosivas de sincronización en el marco de redes en crecimiento.

Este resultado es muy relevante dado que supone el primer ejemplo de transición explosiva en un modelo de percolación. Asimismo, es remarcable que la transición de percolación obtenida es suave y ocurre mucho antes que la transición a la sincronización. Esto quiere decir que la emergencia explosiva de estados sincronizados no es producto de la emergencia de componentes conexas (lo cual explicaría, de forma inmediata, la transición abrupta para la sincronización). Asimismo, es destacable que este fenómeno ocurre para acoplos muy bajos, al contrario de lo que uno esperaría. De hecho, cuanto más pequeño es el acople, más abrupta es la transición a la sincronización. Estas transiciones vienen acompañadas de fenómenos de histéresis, lo que automáticamente produce regiones de biestabilidad en las que tanto el estado incoherente como el sincronizado coexisten. Finalmente, otro resultado a destacar, es el cambio en el patrón de crecimiento de la red antes y después de la transición explosiva. Este cambio no produce ningún efecto en la componente gigante de la red sino que se manifiesta en la velocidad a la que crece la heterogeneidad de la red, siendo este ritmo más lento después de la transición. Este resultado se entiende dado que una vez que emerge el orden dinámico, las frecuencias efectivas son equivalentes, con lo que el proceso de crecimiento es similar al de una red aleatoria (Erdős-Rényi) en la que las probabilidades de enlace son homogéneas.

Cabe destacar que este modelo es el resultado de muchas pruebas improductivas pero que han ayudado a entender la relación entre el crecimiento de una red y la sincronización en la misma. Habiendo logrado exitosamente el objetivo inicial, estos resultados motivan el uso de este modelo para futuros estudios. Por ejemplo, sería interesante generalizar el modelo al caso en el que se añaden  $m$  enlaces por unidad de tiempo, de forma similar a las generalizaciones del proceso de Achlioptas. Esta generalización no es una mera refinación del modelo en nuestro caso, dado que, a diferencia del modelo de Achlioptas, aquí la adición de un enlace cambia el estado dinámico del sistema. Otra de las posibilidades a futuro es intentar lograr un macro teórico que permita calcular los puntos críticos y su dependencia con el acople entre osciladores.

# Bibliografía

- [1] Alain Barrat, Marc Barthelemy y Alessandro Vespignani. *Dynamical Processes on Complex Networks*. Cambridge University Press, 2008.
- [2] Stefano Boccaletti y col. «Complex networks: Structure and dynamics». En: *Physics Reports* 424.4-5 (2006), págs. 175-308.
- [3] Albert-László Barabási y Réka Albert. «Emergence of scaling in random networks». En: *Science* 286.5439 (1999), págs. 509-512.
- [4] Duncan J. Watts y Steven H. Strogatz. «Collective dynamics of “small-world” networks». En: *Nature* 393.6684 (1998), pág. 440.
- [5] Paul Erdős y Alfred Rényi. «On random graphs I». En: *Publ. Math. Debrecen* 6 (1959), págs. 290-297.
- [6] Peter R. King y Mohsen Masihi. *Percolation Theory in Reservoir Engineering*. World Scientific, 2018.
- [7] Peter R. King y col. «Predicting oil recovery using percolation». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 266.1-4 (1999), págs. 107-114.
- [8] Weiping Wang y col. «Local floods induce large-scale abrupt failures of road networks». En: *Nature Communications* 10.1 (2019), pág. 2114.
- [9] Raissa M. D’Souza y Jan Nagler. «Anomalous critical and supercritical phenomena in explosive percolation». En: *Nature Physics* 11.7 (2015), pág. 531.
- [10] Kim Christensen y Nicholas R. Moloney. *Complexity and Criticality*. Vol. 1. World Scientific Publishing Company, 2005.
- [11] D’Souza Raissa y col. «Explosive phenomena in complex networks». En: *Advances in Physics* (2019). Aceptado, publicación en proceso.
- [12] Acemoglu Daron y Ozdaglar Asu. 6.207/14.15: *Networks Lecture 3 Slides: Erdos-Renyi graphs and Branching processes*. 2009. URL: <https://economics.mit.edu/files/4621>.
- [13] Mark E. J. Newman y Robert M. Ziff. «Fast Monte Carlo algorithm for site or bond percolation». En: *Physical Review E* 64.1 (2001), pág. 016706.
- [14] Alex Waagen y Raissa M. D’Souza. «Given enough choice, simple local rules percolate discontinuously». En: *The European Physical Journal B* 87.12 (2014), pág. 304.
- [15] Arkady Pikovsky y col. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Vol. 12. Cambridge University Press, 2003.
- [16] Steven H. Strogatz. «From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 143.1-4 (2000), págs. 1-20.
- [17] Yoshiaki Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Courier Corporation, 2003.
- [18] Dirk Witthaut y col. «Classical synchronization indicates persistent entanglement in isolated quantum systems». En: *Nature Communications* 8 (2017), pág. 14829.
- [19] Jesús Gómez-Gardenes, Yamir Moreno y Alex Arenas. «Paths to synchronization on complex networks». En: *Physical Review Letters* 98.3 (2007), pág. 034101.
- [20] Young-Ho Eom, Stefano Boccaletti y Guido Caldarelli. «Concurrent enhancement of percolation and synchronization in adaptive networks». En: *Scientific Reports* 6 (2016), pág. 27111.