Facultad de Educación (Universidad de Zaragoza)

Máster de aprendizaje a lo largo de la vida. Iniciación a la investigación

Análisis de los diferentes Criterios de Calificación en las Pruebas de Matemáticas II para el Acceso a la Universidad en las Comunidades Autónomas españolas en 2018

Trabajo Fin de Máster

Curso 2018-2019

David Miguel Garcés

Tutor: José María Muñoz Escolano

Resumen

La calificación de las Pruebas de Acceso a la Universidad es un tema de interés popular, debido a la alta demanda en los grados y la necesidad de obtener una nota determinada. En este estudio se intenta conocer como son esos Criterios de Calificación que se les proporciona a los correctores, en la asignatura de Matemáticas II en las pruebas realizadas en el año 2018. Para ello se realiza un estudio descriptivo, mediante un análisis temático, para poder comparar tanto los criterios generales, como los criterios específicos redactados en las distintas Comunidades Autónomas españolas. Según indican los resultados, la poca exactitud en la redacción y puntuación de los criterios, y la diversidad de los mismos, hacen que siga habiendo la posibilidad de una alta variabilidad de las notas entre las comunidades.

Abstract

The grade of the University Entrance Exams is a topic of popular interest, due to the high demand in the degrees and the need to obtain a certain grade. In this study we try to understand how these Rating Criteria are provided to the proofreaders, in the subject of Mathematics II in the tests carried out in the year 2018. To this end, a descriptive study is carried out, using a thematic analysis, in order to compare both the general criteria and the specific criteria drawn up in the various Spanish Autonomous Communities. According to the results, the lack of accuracy in the drafting and scoring of the criteria, and the diversity of the criteria, mean that there is still the possibility of high variability of the notes between the communities.

Palabras clave: Pruebas de Acceso a la Universidad, Matemáticas II, Criterios de Calificación, Correctores.

Índice

Introducción

Los exámenes de ingreso a la universidad española se denominan actualmente Evaluación de Acceso a la Universidad (EvAU) o Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad (EBAU), según la comunidad autónoma. Su origen se remonta a la Ley 30.974 de 24 de julio de 1974, más conocida como 'Ley Esteruelas', que fue implantada en el curso 1974-75 y afectó a los estudiantes que iniciaron estudios universitarios en el curso 1975-76. Puso fin a la reválida, e implantó la conocida Selectividad. Más tarde pasaron a nombrarse Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU), y en la actualidad, debido a la aprobación de la LOMCE, se denominan EvAU. Estas pruebas son la forma mayoritaria para poder acceder a una educación superior, y son cursadas por un gran número de estudiantes cada año (Tabla 1).

Este tipo de pruebas, con mayores o menores variaciones, están presentes en muchos países (Ruiz de Gauna, 2013). En España, como ya hemos citado, dichas pruebas están vigentes desde 1974, aunque existen antecedentes de la misma que se remontan a principios del siglo XX (González, 2001). Actualmente, como ya hemos señalado, están regladas por la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). La Ley aboga por un pacto educativo entre diferentes colectivos y partidos políticos, que no ha llegado a alcanzarse. En consecuencia, se han ido modificando las condiciones de la misma mediante decretos y órdenes ministeriales. La última Orden ECD/42/2018, de 25 de enero, es la que determina las características, diseño y el contenido de las pruebas de acceso. La finalidad de la Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU o EvAU), es valorar, con carácter objetivo, la madurez académica del estudiante, así como los conocimientos y capacidades adquiridos en el Bachillerato y su capacidad para seguir con éxito las enseñanzas universitarias oficiales de grado. Además, permite ordenar a los estudiantes a la hora de elegir un grado universitario.

Tabla 1: *Alumnos presentados a las Pruebas de Acceso en 2018*

	ORDINARIA	EXTRAORDINARIA
ANDALUCIA	34794	4407
ARAGÓN	5459	697
ASTURIAS	2778	403
CANARIAS	8599	1420
CANTABRIA	2179	225
C. Y LEÓN	7637	1210
C. Y LA MANCHA	7055	1264
CATALUÑA	26872	2747
C. VALENCIANA	18057	3079
EXTREMADURA	4366	938
GALICIA	9747	1271
ISLAS BALEARES	3452	686
LA RIOJA	1124	216
MADRID	28306	4288
NAVARRA	2754	303
PAÍS VASCO	8114	857
MURCIA	6468	884
TOTAL	177761	24895

Aunque esta legislación es a nivel estatal, la responsabilidad de la organización de las mismas recae en las Administraciones educativas, en este caso, de las distintas CCAA. En cada Administración educativa, la estructura de dichas pruebas se conforma mediante un comité compuesto por profesores y profesoras universitarios, normalmente denominados armonizadores. Este comité de expertos se encarga de plantear las pruebas, señalando aquellos temas más significativos o relevantes dentro de los contenidos de Bachillerato, así como la orientación de las preguntas, las características específicas de las distintas pruebas, y las pautas que se distribuyen a los correctores para la corrección de las mismas. La evaluación de dichas pruebas, tras una convocatoria pública abierta para el profesorado, se realiza por docentes universitarios y por profesorado de los cuerpos de funcionarios docentes que tengan competencia para impartir el Bachillerato.

La propia asignatura Matemáticas II, (a partir de ahora, MatII) es una materia presente en muchos Grados de la rama de conocimiento científico, ciencias de la salud, ingeniería y arquitectura. Estas titulaciones tienen una alta demanda de estudiantes, por lo cual el acceso a estos Grados está estrechamente relacionado con las calificaciones en las pruebas de acceso. Así pues, el diseño de estas pruebas y su evaluación, además de la presencia o grado de ponderación de otros criterios, como la nota del Bachillerato, que influye directamente en la ordenación del alumnado, son cuestiones del ámbito educativo de alto interés social por cuanto afectan al futuro de un considerable número de estudiantes cada año (Escudero, 1997). Por otro lado, académicamente es interesante destacar que las pautas curriculares orientan el plan de estudios de MatII hacia la necesidad de resolver problemas reales del campo de las ciencias, dentro de un contexto adecuado, y de enseñar y aprender Matemáticas considerando su esencia formativa, instrumental y funcional.

En estos últimos años, existe cierta polémica social reflejada por los medios de comunicación (Ferreras, 2018), en torno a la hipotética diferencia en el diseño y evaluación de las pruebas por parte de las diferentes Administraciones educativas, lo que generaría supuestas diferencias en las notas de estas pruebas entre estudiantes de distintas comunidades autónomas y que generaría agravios a la hora de solicitar el acceso a una misma titulación. Esta hipótesis vendría apoyada por argumentos como la diferencia de resultados obtenidos en los exámenes entre las diferentes comunidades, o con respecto a resultados de estudios de evaluación internacional, como el estudio PISA (MEFP, 2019). No obstante, Escudero (1997) ya advertía a finales del siglo pasado, tras una amplia revisión de trabajos de investigación, que "la problemática sobre la validez interna, la fiabilidad, la consistencia y la objetividad de la prueba es el elemento central de preocupación de muchas de las investigaciones que han tenido lugar en nuestro país desde su puesta en marcha en 1974", y que la preocupación de los trabajos realizados hasta ese momento era similar. Todos tenían la incertidumbre de si todos los alumnos eran tratados de la misma manera en el proceso de selección.

En el caso concreto de las matemáticas, encontramos un ejemplo reciente y significativo del interés que suscita este tema en el hecho de que el Comité Español de Matemáticas (CEMAT), constituido por la Real Sociedad Matemática Española (RSME), la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), la

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA), la Conferencia de Decanos de Matemáticas (CD), entre otras sociedades de profesionales preocupados por distintos aspectos de la investigación y la educación de las matemáticas, organizase el pasado 8, 9 y 10 de marzo de 2019 unas Jornadas sobre la Evaluación en Bachillerato o Pruebas para el Acceso a la Universidad, de las asignaturas de Matemáticas. Estas jornadas se estructuraron en torno a tres temas fundamentalmente: el currículo respecto a prueba, las características de las pruebas y las matrices de especificaciones.

Las conclusiones acordadas por los participantes en estas jornadas fueron, que aunque se considera esta prueba como necesaria para el sistema, se cuestiona el modelo actual de la misma por diversas razones: la excesiva dependencia de la prueba sobre el modelo de enseñanza del Bachillerato, la confusión e indefinición de sus objetivos, la descoordinación entre autonomías a la hora de diseñarlas, y las incertidumbres, subjetividades e inercias producidas por resistencias al cambio. Expresan que la confusión en los objetivos es debido a la necesidad de validar conocimientos y de ordenar a los estudiantes. Es por ello, que se debe de expresar claramente el por qué y para qué se realizan dichas pruebas. Por otro lado, otro tema que se trato fue la cantidad de tiempo establecido para la realización de las pruebas de MatII. Explican que si se pretende proponer tareas de mayor razonamiento y que el alumno sea capaz de justificar sus respuestas, los alumnos deberían de disponer de mayor tiempo para la realización. Igualmente se trata la posibilidad de realizar pruebas específicas para alumnos que van a cursar determinados grados universitarios, con especial atención a los grados de Magisterio. Asimismo, como ya hemos citado anteriormente, señalan que algunas de las debilidades de la propia prueba son consecuencia de la resistencia al cambio de algunas comunidades. El ejemplo está presente en el uso de las calculadoras. Si la normativa vigente contempla el uso de las tecnologías, cuesta comprender la resistencia de algunas comunidades a aceptar su uso en las pruebas. De la misma manera, este Comité sostiene que las pruebas condicionan el modelo de enseñanza en el 2º curso de bachillerato y, a su vez, el modelo de enseñanza condiciona el tipo de pruebas que se formulan. Para romper este “círculo vicioso”, señalan que es necesario avanzar hacia unas pruebas que sirvan realmente para alcanzar los objetivos de pensamiento crítico, razonamiento y madurez requeridos para el acceso a los distintos grados universitarios.

Los constantes cambios afectan también a la docencia y a las prácticas evaluativas del profesorado. Los resultados son determinantes, debido a la alta competencia generada por una alta demanda para poder acceder a las plazas ofertadas en algunas titulaciones de ámbito científico, tecnológico o biomédico. El alumnado debe de obtener en la prueba una alta calificación para acceder a la titulación que desea. La totalidad de estas plazas que se ofertan en la universidad pública española, se hacen por Distrito abierto, según el Real Decreto 558/2010, de 7 de mayo, por el que se modifica el Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre. Por lo que la nota de acceso, donde incide porcentualmente la obtenida en las EvAU, es el único criterio de admisión válido para todas las universidades.

Desde la labor del docente de Bachillerato, su trabajo es un ejercicio de responsabilidad máxima y un proceso verdaderamente complejo, más si cabe que la que ya recae sobre un profesional de la docencia. Debe de abordar un temario amplio en poco tiempo, más aún con la incorporación reciente de los bloques de Estadística y Probabilidad en el temario LOMCE de Bachillerato. A su vez, debe de afrontar la exigencia de los estudiantes y el entorno que les rodea, por obtener buenos resultados. Asimismo tener presente el trabajar con una gran diversidad de niveles de adquisición de conocimientos matemáticos previos de los estudiantes. En consecuencia, el profesorado se plantea el continuar o cambiar el contrato didáctico en cuanto al aprendizaje de las Matemáticas que poseen los estudiantes con más de 12 años de escolarización (Brosseau, 2007). Además, el alumnado tiene serias dificultades en la transición del Pensamiento Matemático Elemental al Pensamiento Matemático Avanzado vinculado al trabajo de contenidos propios de las matemáticas superiores (cálculo infinitesimal y el análisis matemático) así como en procesos matemáticos de mayor complejidad como definir, generalizar, abstraer y razonar deductivamente (Arce, Conejo, Muñoz-Escolano, 2019, p. 302).

Por lo tanto, estas causas llevan al profesorado a replantearse su labor como docente y producen unos efectos en su docencia. Algunos prefieren realizar enfoques distintos de la materia, o bien más tradicional o transmisivo, de manera más rápida (Ruiz de Gauna, Dávila, Etxeberría y Sarasua, 2013). Otros únicamente optan por abordar contenidos que van a aparecer en la prueba a la que se van a enfrentar sus alumnos, donde no aparecen por ejemplo contenidos del Bloque 1 del currículo de MatII (Zamora, 2014; Rodríguez-Muñiz, Díaz, Mier y Alonso, 2016). Otros directamente utilizan una metodología en la que el docente trabaja con problemas propuestos en pruebas de años anteriores (Rodríguez-Muñiz, Díaz, Mier y Alonso, 2016), que suelen medir destrezas solamente procedimentales (Ruiz-Hidalgo, Herrera, Velasco, 2019; Zamora, 2014). Esta fijación en la mera superación de la prueba, lleva al profesorado al poco uso en el aula de otros recursos tecnológicos, como pueden ser GeoGebra, hojas de cálculo o calculadoras gráficas. Así pues, solamente se opta por el empleo de recursos que son aptos para la prueba (Contreras, Ordoñez y Wilhelmi, 2010).

Otro foco de polémica o interés social recurrente reside en la validez y rigor de las calificaciones obtenidas en la misma. En concreto, existe una constante atención social sobre estas pruebas, focalizando la atención en los criterios de evaluación de las mismas redactados por los armonizadores, la tarea de evaluación llevada a cabo por los correctores, y la posible disparidad de criterios de evaluación personales que cada corrector pueda emplear y que pueda traducirse en calificaciones distintas para una misma prueba. En este sentido, se están realizando informes e investigaciones con la finalidad de comparar resultados, con las pruebas citadas, y de este modo acreditar los niveles de conocimiento matemático internacional de manera similar a las acreditaciones de dominio de una lengua (Bergerón, 2015).

Evaluar preguntas de respuesta construida, como las que aparecen en estas pruebas, no es una tarea sencilla (Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2016; Wang y Cai, 2018). Mediante el siguiente análisis de los diferentes criterios de calificación redactados, en las pruebas de MatII en las distintas Comunidades Autónomas españolas en 2018, se intentará dar respuesta a las siguientes preguntas:

a. ¿Cómo es la tarea de evaluar las pruebas de MatII?
b. ¿Cómo se especifican los criterios de evaluación de MatII?
c. ¿Qué aspectos generales y específicos a la prueba están recogidos en los criterios de calificación de MatII?

PRIMERA PARTE: Fundamentación Teórica

1. Marco Teórico

1.1. Evaluación educativa y constructos de fiabilidad y validez

Para contextualizar nuestro análisis, además de definir el concepto de evaluación, definiremos varios constructos fuertemente vinculados a la evaluación educativa de los aprendizajes, como son: la validez, la fiabilidad y la objetividad.

Según la Real Academia de la Lengua Española (RAE), se define el término evaluar como la forma de estimar, apreciar o calcular el valor de algo. La literatura describe los efectos de los programas de evaluación de alta participación, como pruebas cuyos resultados se usan para desencadenar acciones o decisiones como aprobar o reprobar una calificación, graduarse o no, determinar el mérito del maestro o director, o asumir la responsabilidad de un distrito deficiente por una agencia estatal.

En nuestro caso particular, las pruebas de acceso a la universidad utilizan un tipo de evaluación sumativa, final, externa y normocriterial. Es *sumativa*, porque trata de establecer balances fiables de los resultados obtenidos al final de un proceso de enseñanza-aprendizaje; es *final*, ya que se valoran los aprendizajes y las competencias que han desarrollado las personas al terminar el estudio de un módulo, con el fin de acreditarlo; es *externa*, porque son los coordinadores o armonizadores de las universidades los que formulan la prueba; y es *normocriterial*, puesto que se utilizan una serie de criterios para poder evaluar y a su vez clasificar a los alumnos con respecto al grupo (Casanova, 1995). Esta doble orientación, criterial y normativa, propia de la prueba es señalada por Escudero (1999, p. 25) como la dificultad principal respecto a la evaluación:

> “Este doble objetivo, esta doble orientación de la prueba, no es fácil de cubrir; existen elementos antitéticos entre ambas orientaciones. Forzar la precisión y la discriminación, requerimientos importantes en las pruebas normativas, puede perjudicar a la validez de contenido, fundamental en la orientación criterial. Aunar madurez y limitación, esto es, criterio y norma, de manera rigurosa, es tarea harto compleja”

Para la definición de estos tres constructos relacionados con la evaluación del aprendizaje, hemos tomado como referencia el estudio de Förster y Rojas-Barahona (2008).

Según estos autores, la variabilidad de una evaluación en educación depende de la validez de la misma. La validez se desglosa en: validez de contenido, validez instruccional y validez consecuencial. El primer elemento a considerar en la calidad de una evaluación es la validez de la información recogida con un instrumento o en una situación evaluativa, lo que se refiere explícitamente a que la prueba es válida si evalúa lo que pretendía evaluar. Es decir, si la interpretación de la nota nos permite establecer unas conclusiones respecto al objetivo de la realización de la misma (Hogan, 2004). La validez de contenido está relacionada con el contexto de la prueba, lo que implica garantizar que las situaciones evaluativas incluyan los contenidos y habilidades asociadas a estos. Una aplicación particular de esta es la validez instruccional, que se refiere a la cantidad de información que ha podido recibir el alumno, para poder evaluarlo. Por último, la validez consecuencial que está relacionada con las consecuencias y conclusiones intencionales y no intencionales, que lleva consigo el uso e interpretaciones que se dará a la información recogida en la evaluación.

Por otro parte, la fiabilidad hace referencia a la consistencia, exactitud y estabilidad de los resultados. Además de esto, tiene directa relevancia en las conclusiones y posterior toma de decisiones que se pueden efectuar. Si nos detenemos en la mera redacción de los criterios de evaluación, se incide principalmente en aspectos sobre fiabilidad de las pruebas. Mientras que en cuanto al diseño de las mismas, caben destacar aspectos relacionados con la validez.

Finalmente, la objetividad señala que en la evaluación tanto los instrumentos como el juicio que se emite a partir de la información obtenida o recogida con ellos, sean imparciales.

En nuestro caso particular, pretendemos analizar las pruebas EvAU de MatII del curso 2017/18, desde sus criterios de calificación, para posteriormente realizar un análisis comparativo entre distintas CCAA. Para ello creemos conveniente presentar los resultados de investigaciones sobre tres cuestiones a destacar sobre las pruebas de acceso, que posteriormente abordaremos de manera separada y detallada. Estas son el diseño de las mismas, la actuación de los correctores y prácticas evaluativas efectuadas, y el diseño de los criterios de calificación. Obviamente los tres puntos tienen incidencia entre sí. Aunque los tres puntos traten acerca de la misma temática y hayan sido investigados previamente, nosotros enfocaremos la atención en el estudio únicamente en los criterios de calificación.

1.2. Resultados sobre el diseño de las pruebas

En el ámbito educativo, los frecuentes cambios de denominación de las etapas y a su vez de las pruebas, han conllevado lógicamente un cambio en la formulación de las mismas. A continuación se citan varios artículos relacionados sobre el diseño de las pruebas a lo largo de estos últimos años.

Boal, Bueno, Lerís y Sein-Echaluce (2008) realizaron un estudio sobre cómo eran las preguntas de las pruebas, en cuanto a la resolución de problemas y comunicación matemática. Su conclusión expresa que se debían de modificar las pruebas, de manera que hubiera más problemas no puramente matemáticos. Al mismo tiempo requerir al estudiante un uso correcto del lenguaje matemático y formas de comunicar las Matemáticas. Ellos mismos dicen que son conscientes que este cambio, debe de llevar a su vez un cambio en el currículo de Bachillerato.

Ruiz de Gauna (2013) describe cómo son las tareas de las pruebas de acceso en el País Vasco y en otros países. Su conclusión determina que si en las pruebas se proponen ejercicios estándares los resultados son buenos, pero que si por el contrario en las pruebas se proponen ejercicios “distintos”, los resultados empeoran considerablemente. Él mismo propone una homogeneización de las pruebas, para una propuesta de tareas más correcta.

Zamora (2014) en su tesis describe cómo son las tareas o ejercicios propuestos en las pruebas de Castilla y León. Observa y llega a la conclusión de que hay una continua repetición de las tareas propuestas, y además la mayoría de ejercicios propuestos se realizan de una forma más mecánica, sin tanto razonamiento matemático.

Rodríguez-Muñiz, Díaz, Mier y Alonso (2016) analizan las pruebas entre los años 2009 y 2014, de las comunidades autónomas de Andalucía, País Vasco, Asturias y Madrid. En sus conclusiones podemos destacar, que en las tareas propuestas en las diferentes pruebas no aparecen o aparecen insuficientemente partes del currículo de Matemáticas II. Es decir, los ejercicios o problemas propuestos son similares cada año. Además, afirman la reiteración de la misma estructura en las diferentes pruebas. Del mismo modo se refieren también al predominio de ejercicios algorítmicos y la falta de problemas abiertos. Asimismo, también hablan de la gestión del lenguaje matemático.

Batanero, López-Martín, Arteaga y Gea (2018) analizan las preguntas del bloque de Estadística de las pruebas de Andalucía desde el 2003 al 2014. Señalan que los problemas de Probabilidad y Estadística tienen una dificultad notoria con respecto a los demás ejercicios propuestos en las pruebas. De la misma manera, apuntan la relevancia dada a la

Probabilidad condicional en las pruebas, en comparación con otros contenidos curriculares de este bloque.

Ruiz-Hidalgo, Herrera y Velasco (2019) analizan las preguntas de análisis matemático de todas las comunidades españolas durante el año 2016. Concluyen con que la capacidad de aplicar un procedimiento es la modalidad que más se repite en toda España, en detrimento de habilidades matemáticas más complejas como razonar, representar y enunciar. Sólo unas pocas Comunidades Autónomas se interesan por cuestiones que vayan más allá del estudio del comportamiento de las funciones.

Miralles y Deulofeu (2009, citado en Mallart, 2012) analizan las tareas propuestas en las PAU, citando que los motivos de elección de las mismas por parte de los estudiantes, es debido a enunciados con términos lingüísticos sencillos. Aunque el grado de dificultad del mismo sea mayor, el alumnado opta por las tareas propuestas con enunciados más sencillos. Además observan que los resultados obtenidos no guardan relación con la elección de lo que se saben mejor. Por último, constatan que el estudiante medio que accede a la asignatura en las PAU sabe poco más de lo que se le pregunta en la prueba.

Mallart (2012) y Nortes y Nortes (2010) analizan los errores cometidos por los estudiantes en la resolución de problemas de PAU, y señalan que los alumnos tienen mecanizadas o automatizadas las respuestas. Conjuntamente, apuntan que si las tareas implican mayor razonamiento, los alumnos tienen problemas para poderlas llevar a cabo.

1.3. Resultados sobre las prácticas evaluativas y actuaciones de los correctores

Las prácticas evaluativas llevadas a cabo en las pruebas de acceso a la universidad, también han sido estudiadas a lo largo de estos años. En los artículos que se citan posteriormente, se incluyen resultados de la investigación sobre las prácticas evaluativas y las calificaciones.

Escudero y Bueno (1994) realizaron un estudio sobre los resultados de un experimento de doble tribunal. En él afirmaban que:

> “Nuestro sistema de selección de universitarios tiene algunos problemas de consistencia entre tribunales, pero ni mucho menos es una especie de lotería <<según el tribunal que toque>>. El procedimiento es mucho más consistente de lo que se suele decir, o al menos puede serlo, si se utiliza razonablemente, siguiendo las previsiones e indicaciones legales” (p. 296).

Nortes, Nortes y Lozano (2015) estudiaron la existencia de posibles diferencias notorias entre las correcciones de las pruebas. Apuntan que entre dos correctores distintos que corrigen dos muestras distintas, la diferencia entre las calificaciones no es significativa. Igualmente, tampoco existen diferencias significativas cuando corrigen los mismos exámenes evaluadores distintos.

Por otro lado, Cuxart, Martí y Ferrer (1997) plantean una investigación mediante la doble corrección en 187 exámenes de Selectividad de la asignatura de Matemáticas. En su estudio constatan que en el 28% de los casos la diferencia entre las dos correcciones supera la unidad mientras que en un 18% de las correcciones supera los dos puntos.

Posteriormente, Grau, Cuxart y Martí-Recober (2002) amplían el estudio anterior con una triple corrección, estudiando diferencias entre tribunales y constatando, en esta ocasión, una menor variación para la asignatura de matemáticas, donde solamente el 18% las comparaciones entre calificaciones del mismo examen obtenían una diferencia de más de 1 punto. Esta variabilidad en matemáticas también es mucho menor que la detectada en otras asignaturas. Los autores achacan la disminución de la variabilidad a dos posibles causas: por un lado, a la mejora de las prácticas evaluativas en la asignatura ya que se habían elaborado pautas específicas de corrección adecuadas y ajustadas al examen propuesto, y por otro a un aspecto eventual de la prueba, ya que la mayoría de los estudiantes había sacado un 0 en uno de los problemas que valía 2 puntos.

Por otra parte, examinando cualitativamente las correcciones de los evaluadores de las PAU, Gairín, Muñoz y Oller, (2012, 2013) identifican 8 fenómenos cometidos por correctores que reducen la fiabilidad y variabilidad en las calificaciones de las PAU, según se corrijan respuestas correctas no esperadas o respuestas incorrectas. Estos fenómenos son:

1. Existen posiciones claramente diferenciadas entre distintos correctores al valorar la importancia de un mismo tipo de error.

2. La importancia de los errores se establece con independencia de las exigencias del enunciado de los problemas.

3. La importancia de un error se valora con independencia del conocimiento matemático que se pretende evaluar con el problema.

4. La detección de un error considerado como muy grave da por finalizado el proceso de corrección.

5. No hay un acuerdo aparente en cuanto a la estructura conceptual de los contenidos a evaluar por los correctores al señalar como erróneas o incompletas respuestas en las que el alumno utiliza conceptos distintos de los esperados.

6. Se consideran erróneas respuestas en las que el alumno utiliza procedimientos de resolución distintos de los esperados.

7. Se consideran erróneas respuestas en las que el alumno utiliza sistemas de representación distintos de los esperados.

8. La rigidez en el uso del lenguaje simbólico provoca que se valoren como erróneas respuestas que son correctas.

Existen varios factores que afectan a la variabilidad de calificaciones desde un punto de vista general como la idiosincrasia y las creencias ideológicas del profesor, que pueden afectar directamente a la neutralidad de la calificación (Watts y García, 1999). Otros factores intracorrectores pueden ser: la fatiga, el tiempo y el estado de ánimo, que también producen desviaciones en las calificaciones, incluso pueden llegar a modificar la sensibilidad a los errores durante el período evaluador (Watts y García, 1999).

Además, existen otros factores específicos que afectan a la variabilidad de calificaciones a una misma producción de un estudiante que tienen que ver con los conocimientos, las concepciones y las creencias de las matemáticas de los correctores, así como con las tareas y las respuestas concretas de los estudiantes. Wang y Cai (2018) y Meier, Rich y Cady (2006) señalan la experiencia docente del corrector, el nivel educativo en que posee dicha experiencia, el conocimiento matemático de los correctores, las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la naturaleza de las tareas que se califican y la naturaleza de las respuestas de los alumnos (apareciendo las mayores diferencias cuando contienen errores matemáticos).

Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2016) estudian la variabilidad de las calificaciones asignadas a tres respuestas correctas a una pregunta de PAU de matemáticas por parte de profesores en formación, profesores de secundaria en ejercicio y profesores de universidad sin la provisión de ningún criterio de evaluación previo. Los resultados constatan una gran variedad en cuanto a las calificaciones otorgadas, tanto global como por colectivos, a pesar de ser respuestas a una tarea escolar de tipo procedimental. Los argumentos expresados por los correctores para asignar dichas calificaciones obedecían a la argumentación, la corrección matemática y el método de resolución utilizado.

El diseño de criterios de evaluación de las pruebas es por tanto un factor clave en cuanto a los aspectos de validez y fiabilidad en estas pruebas, tal y como señala Escudero (1997, p. 16) “con pruebas objetivas y con criterios de corrección claros se pueden mejorar las características métricas internas de la prueba”.

Además de un diseño cuidadoso de los criterios, otras prácticas sugeridas son la realización de reuniones para la mejora de la coordinación entre los armonizadores y los correctores, ya que los correctores no son expertos y necesitan un asesoramiento para su labor (Grau, Cuxart y Martí-Recober, 2002). Watts y García (1999) también apuntan la relevancia de la realización de reuniones entre correctores, y entre coordinadores. Al mismo tiempo, tratan dos formas para poder comprobar la fiabilidad de las calificaciones. En la primera los correctores califican una serie de pruebas de la misma convocatoria, y posteriormente se realizar un estudio estadístico. En la segunda, se realiza la corrección aleatoria y doble por parte de especialistas, seguido del correspondiente análisis estadístico. De la misma manera existen otras propuestas, como la creación de un dossier para el corrector, donde en él se citan posibles respuestas correctas distintas a las preguntas y errores comunes de los estudiantes que fuesen esperables en cada pregunta.

1.4. Resultados sobre los diseños de criterios de calificación

Una vez citados artículos relacionados con el diseño de las pruebas y las prácticas evaluativas llevadas a cabo en los últimos años, nos centramos ya en los artículos que tratan el diseño de los criterios de calificación. A pesar del camino recorrido sobre el diseño de los mismos, se debe todavía mejorar la redacción de los criterios generales y criterios específicos o particulares de cada materia, que posteriormente se aportan a los correctores. Este delicado y costoso proceso mitigaría la existencia de posibles variaciones entre notas (Cuxart, Martí y Ferrer, 1997). La redacción de los criterios de calificación, es una labor que está estrechamente ligada a la redacción de las pruebas, y por consiguiente a cada tarea propuesta en ellas. La ambigüedad en la interpretación del lector puede crear un sesgo considerable, tanto para el alumno, como para el profesor que corrige. Zamora (2014) en su tesis afirma la existencia de enunciados mal formulados, lo que puede llegar a provocar una corrección errónea. A su vez, señala que los criterios deben de ser redactados de manera más específica.

Boal, Bueno, Lerís y Sein-Echaluce (2008) analizan los criterios de evaluación de las pruebas sobre ortografía y comunicación matemática. Constatan la poca aparición de penalización por el mal uso de los signos y símbolos matemáticos. Indican que este tipo de error solamente está presente en menos de un 6% de los exámenes analizados. Del mismo modo, aparece tímidamente la corrección acerca de la de la capacidad del estudiante para utilizar un discurso racional y comunicarse con precisión. El alumno debe de saber reconocer e interpretar símbolos y signos, de igual forma que saber expresarse y entender ideas con el rigor matemático correspondiente.

Gairín, Muñoz y Oller (2012, 2013) demuestran como la ambigüedad en los criterios de evaluación formulados para distintas preguntas de PAU incide en las distintas calificaciones a correctores a producciones análogas de los estudiantes. Algunos de los fenómenos detectados en producciones de correctores constatan empíricamente lo apuntado por las anteriores autoras en cuanto a la ortografía matemática.

A la luz de lo analizado, Gairín, Muñoz y Oller (2012) presentan una categorización de las tareas matemáticas a evaluar en estas pruebas y una propuesta teórica de modelo de calificación basada en la penalización de errores, que es validada por Mengual, Gorgorió y Albarracín (2013). Las aportaciones que surgen de este último trabajo, da lugar a una reformulación del modelo y su posterior validación realizado por Mengual, Albarracín, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén y Gorgorió (2019).

Aún así, la diferencia entre correctores es significativa (Gairín, Muñoz y Oller, 2013). Los correctores no son suficientemente expertos, por lo que aunque se les guíe mediante unos criterios generales y específicos correctamente redactados, su buen hacer no garantiza una corrección adecuada. La coordinación entre armonizadores y correctores debe de ser más estrecha, para poder mejorar este proceso. Para poder optimizar este proceso, incluso se establece la posibilidad de realizar unas pruebas piloto antes de realizar las mismas, para poder graduar la dificultad de los ejercicios y pruebas propuestas (Grau, Cuxart, Martí-Recober, 2002).

No hemos hallado ningún estudio sobre la investigación de los criterios de calificación en la asignatura de MatII en el que se propongan categorías de clasificación específicas de los mismos. Sin embargo, sí que encontramos trabajos sobre los criterios de evaluación de preguntas de las PAU en otras asignaturas, que pueden ser trasladables al contexto de las MatII. Watts y García (1999) plantean diferentes tipos de criterios para evaluar la prueba de inglés de las PAU: global u holístico, analítico, descuento por error y la puntuación por acierto. A continuación se desarrolla y explica esta tipología, para conocer lo que pretende calificar cada uno de ellos.

En la *puntuación por acierto*, el evaluador empieza desde cero y otorga puntos por la presencia de rasgos o contenidos preestablecidos. La puntuación por acierto se puede utilizar, por ejemplo, en los distintos apartados de los propios problemas propuestos.

El *descuento por error*, que se utiliza cuando es primordial la precisión, es apropiado en lenguaje matemático y unidades de magnitud. En el descuento por error, el evaluador resta puntos de un total por los errores hasta llegar a un mínimo de cero.

El tipo *global u holístico* suele implicar un juicio rápido del conjunto de la prueba por parte del evaluador. Está especialmente indicado cuando los correctores tienen mucha experiencia y cuentan con una procedencia común en su formación, o cuando existe cierta prisa en la ejecución de la calificación.

El tipo *analítico* requiere la puntuación de una tarea por distintos aspectos, puntuaciones que se suman para llegar a una calificación final. Este tipo obliga a los evaluadores a considerar aspectos que de otro modo serían ignorados, admite evaluadores de procedencia heterogénea y de menos experiencia y tiende a producir una calificación más fiable por contar con varias puntuaciones. El inconveniente principal es que presupone que los evaluadores podrían discriminar eficazmente entre los distintos aspectos y que el proceso de evaluación es más costoso que el global.

En resumen y por consiguiente, nuestro estudio de investigación tiene como objetivo principal describir y caracterizar los criterios de corrección asociados a las pruebas de acceso a la universidad en el año 2018, en la asignatura Matemáticas II en ambas convocatorias (ordinaria y extraordinaria) en todos los distritos universitarios y identificar diferencias entre ellos.

SEGUNDA PARTE: Estudio Empírico

2. Método

Nuestra investigación es un estudio descriptivo, ya que se pretende describir las características de los criterios de calificación en las pruebas de acceso a la universidad en la asignatura de Matemáticas II en el año 2018. Al mismo tiempo, se pretende hacer una comparación en la redacción y especificidad de los mismos entre las Comunidades Autónomas. Para alcanzar los objetivos de investigación planteados anteriormente, hemos establecido dos fases en nuestro estudio.

Tabla 2: *Convocatorias de las Pruebas de Acceso de 2018*

	ORDINARIA Y EXTRAORDINARIA
ANDALUCÍA	Junio y Septiembre
ARAGÓN	Junio y Septiembre
ASTURIAS	Junio y Julio
BALEARES	Junio y Julio
C. VALENCIANA	Junio y Julio
C. Y LA MANCHA	Junio y Julio
C. Y LEON	Junio y Julio
CANARIAS	Junio y Julio
CANTABRIA	Junio y Septiembre
CATALUÑA	Junio y Septiembre
EXTREMADURA	Junio y Julio
GALICIA	Junio y Septiembre
LA RIOJA	Junio y Julio
MADRID	Junio y Julio
MURCIA	Junio y Septiembre
NAVARRA	Junio y Junio
PAIS VASCO	Junio y Julio

En la primera fase se ha realizado una búsqueda exhaustiva de los criterios de calificación mediante rastreo sistemático de las páginas web de las distintas universidades. De esta forma, se ha podido obtener una muestra formada por 34 exámenes de la prueba de MatII de 2018, de los cuales 17 son recogidos de las pruebas ordinarias y otros 17 de las pruebas extraordinarias, de cada comunidad (Tabla 2) y que se incluyen como Anexos. Cabe destacar que las ciudades autónomas, Ceuta y Melilla, se rigen mediante la normativa y universidades de la comunidad autónoma andaluza.

La extensión de cada documento, donde se recogen los criterios, varía entre uno y dos folios cada una. Estos criterios suelen estar estructurados en dos grandes apartados: uno, donde se establecen *criterios o pautas generales* para la corrección del examen y otra parte donde se establecen *criterios específicos* para cada pregunta y apartado.

En la segunda fase se ha realizado un análisis temático de los criterios de calificación. Para el análisis temático de nuestro estudio nos hemos apoyado en el estudio de Braun y Clarke (2006). Para comenzar definir que un análisis temático es un método para identificar, analizar e informar temas dentro de datos. Para la realización del mismo, debemos a su vez seguir una serie de fases:

a. *Fase I*: Comenzamos familiarizándonos con los temas a tratar, mediante la lectura y re-lectura de los criterios redactados en las diferentes pruebas de las distintas comunidades. Además, se anotan ideas iniciales que nos puedan servir para las siguientes fases.

b. *Fase II*: Una vez leídos todos, generamos unas temáticas comunes entre los criterios observados. Estas temáticas engloban una serie de temas que se van repitiendo conforme vamos avanzando con la lectura. Una vez asociados los temas que creemos que pueden ser de interés para el análisis, seleccionamos los más adecuados para nuestro propio análisis. Posteriormente los revisamos, y nombramos o definimos los mismos.

c. *Fase III*: Se realiza un análisis continuo para refinar los detalles de cada tema elegido para nuestro análisis. Al mismo tiempo, se definen los mismos y se les atribuye un nombre claro y conciso para cada tema.

d. *Fase IV*: Se realiza un análisis final de los temas seleccionados, relacionándolos con las preguntas de investigación y la literatura. Para posteriormente realizar un informe del análisis.

En nuestro caso, se realizan dos análisis temáticos distintos. El primero se realiza sobre los criterios generales, en el que los temas emergen de forma inductiva de los datos. El segundo se realiza sobre los criterios particulares, donde se emplea las categorías de Watts y García (1999) sobre tipos de criterios específicos. Por lo tanto, el análisis de los mismos se realiza mediante puntuaciones por acierto, por error, de una manera global u holística, y analítica. En algunas comunidades también se realiza una clasificación de posibles errores en los ejercicios propuestos en las pruebas. Citar también el uso en algunas comunidades de la solución de cada pregunta. Esta alternativa se lleva a cabo mediante ejemplos de posibles respuestas redactadas detalladamente o de manera más esquemática, conforme a los pasos que se deben de realizar para la obtención del resultado óptimo. Ambos criterios se exponen mediante unas tablas, donde se recoge la aparición de cada uno de ellos en cada Comunidad Autónoma.

Recapitulando lo anterior, nuestro análisis se basa principalmente en revisar los criterios de evaluación establecidos para la evaluación de las pruebas de acceso a la universidad en el año 2018, en la asignatura Matemáticas II en ambas convocatorias (ordinaria y extraordinaria). Asimismo, se estudiará cómo están redactados los criterios de evaluación, quién los redacta, y cómo se especifican cada uno de ellos para poder posteriormente corregirlos.

Señalar también como mera información adicional, que los correctores que optan a la corrección de las pruebas, realizan esta labor libremente mediante una convocatoria abierta al profesorado. Disponen de un tiempo determinado para la realización de la misma, que les es informado una vez se les hace entrega de las pruebas que deben de corregir. Posteriormente, si es necesario debido a una reclamación de la nota, se realiza una segunda corrección por otro corrector distinto. Finalmente se realiza una media aritmética entre la primera nota y la segunda, para calcular la nota final de la prueba.

Para concluir, es verdad que en algunas comunidades autónomas no ha sido posible encontrar toda información necesaria o pretendida. A su vez citar, que la extensión y especificidad de la redacción de los criterios de calificación, como ya analizaremos, difiere entre las distintas comunidades. Por último y como dato a destacar, en ninguna comunidad se hace uso de un instrumento de evaluación, como son las rúbricas.

3. Resultados

3.1. Resultados del análisis de los criterios generales

3.1.1. Establecimiento de las categorías temáticas

La categorización o listado de temas seleccionados se ha realizado mediante un proceso inductivo, en el que se ha realizado un razonamiento basado en la inducción a partir de temas más particulares, para generar unos más generales que engloban varios de los anteriores. Una vez leídos y revisados todos los criterios generales expuestos en las comunidades, se ha llegado a la elección de los siguientes temas:

a. Planteamiento del ejercicio o problema expuesto (*Planteamiento*): este tema recoge cómo el alumno ha desarrollado el proceso para llegar a la solución, y cómo ha interpretado y razonado el mismo.

b. Uso adecuado o no, de fórmulas o conceptos matemáticos correspondientes (*Fórmulas*): en él se recoge si el alumno comete alguna incoherencia matemática en cuanto a expresiones matemáticas o fórmulas requeridas en el desarrollo de la tarea propuesta.

c. Exposición lógica, ordenada y coherente de los resultados obtenidos (*Exposición*): este tema nos indica si el alumno ha seguido un criterio correcto a la hora de expresar el resultado final de la tarea y lo ha hecho de manera clara.

d. Repercusión de un error al comienzo de un ejercicio o problema, en los siguientes apartados del mismo (*Repercusión del error*): como su propio nombre indica, recoge la relevancia que puede llegar a tener o se le quiere atribuir, a un error que pueda perjudicar a lo largo de la realización de un ejercicio.

e. Errores de cálculo (*Error de Cálculo*): incluye los errores al realizar cualquier operación dentro de los cálculos de un ejercicio.

f. Errores en notaciones matemáticas o empleo correcto del lenguaje matemático (*Lenguaje matemático*): en él se recoge la forma de expresarse del alumno en la realización y escritura de los pasos a seguir para la realización de los ejercicios.

g. Uso de varios métodos para la ejecución de los ejercicios o problemas expuestos (*Métodos*): se recoge la posibilidad de los alumnos de optar por varios métodos para la resolución de los mismos.

h. Interpretación de los resultados obtenidos o gráficas dibujadas (*Interpretación*): este tema engloba la interpretación de datos expuestos en el enunciado y de datos hallados durante las tareas.

Para facilitar la visualización y comprensión de la tabla, entre paréntesis y en cursiva aparece cómo están nombrados los temas seleccionados en la Tabla 3.1., donde hemos recogido la aparición de los mismos en las diferentes comunidades.

3.1.2. Presencia de las categorías temáticas en los criterios de corrección

Para comenzar con el análisis de los criterios generales de calificación se expone la tabla (Tabla 3.1). En ella aparecen marcada la presencia de los temas recurrentes que hemos seleccionado para nuestro análisis temático y anteriormente definidos. Posteriormente, se lleva a cabo un análisis de los resultados obtenidos detallando cada tema y aportando más información que se ha hallado en el proceso de búsqueda. De esta forma podremos comparar los criterios generales y observar cómo están redactados en cada comunidad.

Tabla 3.1: *Criterios Generales en Matemáticas II en las Pruebas de Acceso de 2018*

CRITERIOS GENERALES	Planteamiento	Fórmulas	Exposición	Repercusión del Error	Error de Cálculo	Lenguaje Matemático	Métodos	Interpretación
ANDALUCÍA	✓	✓		✓	✓			
ARAGÓN	✓		✓	✓	✓	✓		
ASTURIAS			✓	✓	✓		✓	
BALEARES	✓		✓		✓	✓		✓
C. VALENCIANA	✓							
C. Y LA MANCHA	✓		✓		✓			✓
C. Y LEON	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
CANARIAS							✓	
CANTABRIA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
CATALUÑA	✓		✓	✓	✓	✓		✓
EXTREMADURA	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
GALICIA	✓		✓		✓	✓		✓
LA RIOJA			✓	✓				
MADRID							✓	
MURCIA	✓		✓	✓	✓	✓	✓	
NAVARRA	✓		✓		✓			
PAIS VASCO	✓		✓		✓			

Comenzando con los temas elegidos para nuestro análisis temático, iniciamos nuestro estudio hablando del *planteamiento* de los ejercicios o problemas expuestos. La evaluación del planteamiento aparece tanto en los criterios generales, como en los específicos. En este apartado nos centramos únicamente en la relevancia que se le da en los criterios generales. En prácticamente la totalidad de las comunidades, de una manera directa o indirecta, se nombra la evaluación positiva de un buen planteamiento del ejercicio. Algunas comunidades incluyen este aspecto en criterios formulados de forma positiva como: "se valorará positivamente el planteamiento de las respuestas o la claridad en la exposición del método utilizado" (Cantabria), mientras que en otras comunidades se señala la necesidad de que el planteamiento vaya acompañado de la ejecución de los procedimientos necesarios para valorar completamente la pregunta (Andalucía).

Por regla general, este criterio no se cuantifica cómo debe traducirse esa valoración positiva respecto a la puntuación total del ejercicio propuesto. Solamente en Extremadura, aparece una mención explícita del porcentaje atribuido al planteamiento correcto dentro del ejercicio (Figura 3.1.1). En esta comunidad en sus criterios generales de calificación exponen literalmente, que el planteamiento nunca será inferior al 30% de la nota adjudicada al ejercicio o problema, dando así una orientación concreta al peso que podría tener este aspecto dentro de la calificación de la pregunta.

- En los ejercicios de naturaleza práctica se concederá especial importancia al planteamiento correcto del problema, cuyo peso en el total de la nota nunca será inferior al 30%.

Figura 3.1.1: Criterios Generales de Calificación (Extremadura, Junio 2018)

En numerosas ocasiones, la evaluación del planteamiento va asociada a errores cometidos en fórmulas o expresiones matemáticas que el alumno comete al realizar el ejercicio. La columna *fórmulas* recoge todo lo citado anteriormente. Dicho criterio no aparece redactado de manera explícita en numerosas comunidades. Únicamente Andalucía, Cantabria y Castilla y León señalan la posibilidad de penalización de errores cometidos de este tipo. Asimismo, en ninguna de estas tres comunidades se cuantifica el error de este tipo. En Andalucía se indica que "solamente por poner una fórmula o expresión matemática, no se valorará adecuadamente el ejercicio. Se precisará además de esto, de una explicación detallada y razonada". En Cantabria simplemente se comenta brevemente que se tendrá en cuenta la correcta expresión matemática de alguna fórmula que sea necesaria.

Es en Castilla y León donde detalla más este tipo de criterio (Figura 3.1.2). En las demás comunidades, o bien engloba este criterio en el planteamiento del ejercicio o problema, o no se precisa este tipo de error.

> - Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver.

Figura 3.1.2: Criterios Generales de Calificación (Castilla y León, Junio 2018)

Ambos párrafos anteriores van ligados a una *exposición* correcta del desarrollo de la tarea propuesta. La mayoría de las comunidades incluyen en sus criterios generales este tema. En Aragón este criterio se detalla explícitamente como una exposición "lógica, coherente y ordenada de la solución" realizada por el alumnado. Es decir, el "camino" adoptado por el alumno o alumna, debe de reflejar detalladamente los pasos que ha seguido para dar con la solución. En este proceso, se debe de cuidar la expresión y método empleado, así como los cálculos necesarios. Son numerosas las comunidades que expresan acerca de la calificación nula, si el alumnado no explica detalladamente la solución (Figura 3.1.3). Estas comunidades son Baleares, Castilla y La Mancha, Cataluña, Murcia y Galicia. A su vez, Extremadura y La Rioja son las únicas que cuantifican el error y expresan que las respuestas correctas pero sin justificación, cuando explícita o implícitamente se exija una justificación razonada, se calificarán a lo sumo con el 40% de la puntuación máxima que corresponda (Figura 3.1.4).

> Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Figura 3.1.3: Criterios Generales de Calificación (Murcia, Junio 2018)

> Las respuestas correctas pero sin justificación, cuando explícita o implícitamente se exija una justificación razonada, se calificarán a lo sumo con el 40% de la puntuación máxima que corresponda.

Figura 3.1.4: Criterios Generales de Calificación (Extremadura, Junio 2018)

La *repercusión del error* atiende a posibles errores cometidos en los primeros apartados de un ejercicio o problema expuesto, y posteriormente llevados o arrastrados hasta la solución final del mismo, o de alguno de los siguientes apartados. En algunas comunidades este tema se trata en reuniones de coordinación y se tiene en cuenta antes de la propia construcción de la prueba. Es decir, los armonizadores o coordinadores exponen que intentarán que en la elección de los ejercicios o problemas que formarán parte de las pruebas, no exista esta posibilidad o se minimice la posibilidad de ello. Asimismo, en algún tipo de ejercicio o problema, por su tipología, es más complejo que no ocurra esta cuestión. Es por ello, que en varias comunidades la repercusión de un error no tenga la suficiente importancia de poder anular un ejercicio o problema entero, aunque sea una situación repetitiva. De la misma manera se expresa que también se tendrá en cuenta el contexto donde se produce (Figura 3.1.5). Por otra parte, en La Rioja se exponen una serie de errores considerados muy graves, y se expresa que si el alumnado comete alguno similar, es posible la penalización total de la tarea (Figura 3.1.6).

- Se valorará positivamente la coherencia, de modo que si un alumno arrastra un error sin entrar en contradicciones, este error no se tendrá en cuenta salvo como se recoge en los anteriores criterios generales y en la cuestión en que se comete el error.

Figura 3.1.5: Criterios Generales de Calificación (Castilla y León, Junio 2018)

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, del tipo

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+b\,, \quad \frac{\ln x}{x} = \ln\,, \quad \int \frac{x}{x^2+3} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{3}\right),$$

se penalizarán especialmente, y pueden suponer un 0 en el apartado en el que se hayan cometido.

Figura 3.1.6: Criterios Generales de Calificación (La Rioja, Junio 2018)

Dentro de los tipos de errores que pueden repercutir al resultado final de una pregunta, se hallan los errores cometidos en operaciones. Los *errores de cálculo* pueden llegar a penalizar un planteamiento y una correcta ejecución de la tarea severamente. A su vez, no es menos cierto, que el alumnado debe saber apreciar o prestar atención en la coherencia del resultado obtenido. De hecho, de manera más textual y sin cuantificar el error, en Cantabria expresan que el alumnado debe de saber identificarlo, y por consiguiente es un error que se penalizará. Este tema sobre la interpretación de los errores es tratado después, en el último tema que hemos seleccionado. El error por fallo de cálculo está reflejado en casi todos los criterios generales de evaluación de todas las comunidades. No obstante, sí que es verdad que no en todas ellas está cuantificado. Solamente Castilla y León, Andalucía y Murcia expresan una cantidad o porcentaje determinado para este tipo de error. Castilla y León expresa en sus criterios que esta tipología de error puede penalizar disminuyendo hasta un 40% la valoración del apartado correspondiente. Igualmente, Andalucía expresa que se penalizará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio propuesto. Por último, Murcia apunta que restarán exactamente 0,25 puntos y que si este error es reiterativo puede conllevar a una puntuación de 0 puntos. En Navarra también está mencionado y penalizado, pero esta vez dentro de una amplia tipología de errores sin expresar cuantía con respecto al apartado o tarea propuesta (Figura 3.1.7). A su vez, en Cantabria redactan un apartado extenso contemplando este tipo de error (Figura 3.1.8).

- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
  - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
  - si reflejan fallos de concepto.
  - si producen simplificaciones relevantes.
  - si ocurren con reiteración.

Figura 3.1.7: Criterios Generales de Calificación (Navarra, Junio 2018)

\- Errores de cálculo: un error de cálculo es un error casual, que no pone en duda los conocimientos del estudiante sobre las técnicas de cálculo fundamentales de la materia ni la capacidad de éste para manipular correctamente las expresiones y operaciones matemáticas elementales. Hay que tener en cuenta que el estudiante, en este nivel, debe manejar con soltura las expresiones matemáticas elementales y que uno de los objetivos de la asignatura es el dominio de una serie de técnicas de cálculo. Estos conocimientos deben ser reflejados en los ejercicios. Un error al copiar un enunciado o error de cálculo que dé lugar a un problema de características y grado de dificultad similar al propuesto en el examen, no se tendrá en cuenta. Sin embargo, si algún error de este tipo da lugar a un problema de dificultad claramente menor, el ejercicio se considerará incorrecto. Hay errores fácilmente observables, bien por una simple comprobación o bien porque conducen a resultados carentes de sentido. El estudiante debe ser capaz de detectarlos. La s respuestas en las que se observen graves o frecuentes deficiencias en el manejo de las expresiones y operaciones matemáticas elementales, serán calificadas como incorrectas cuando sean puramente de cálculo. En otro caso, se valorará solamente el planteamiento.

Figura 3.1.8: Criterios Generales de Calificación (Cantabria, Junio 2018)

Otro tipo de error, se trata del error cometido en el empleo del *lenguaje o notación matemática*. Como ya comentaba Boal, Bueno, Lerís y Sein-Echaluce (2008) la aparición de penalización por el mal uso de los signos y símbolos matemáticos al resolver los ejercicios en las pruebas de MatII era escasa. En algunas comunidades todavía no se tiene en cuenta este tipo de error, según reflejan sus criterios generales. Únicamente en Castilla y León se le da un valor de penalización de hasta un 20% de la nota del ejercicio o problema expuesto, aunque para ello el alumno debe incidir en él varias veces para que se le penalice (Figura 3.1.9). Hay más comunidades que redactan en sus criterios la importancia y necesidad de tenerlo en cuenta en la corrección de las pruebas, pero sin cuantificar cuanto resta a la nota. Estas comunidades son Aragón, Baleares, Cantabria, Cataluña, Extremadura, Galicia y Murcia.

- Claridad y coherencia en la exposición. Los errores de notación sólo se tendrán en cuenta si son reiterados y se penalizarán hasta en un 20% de la calificación máxima atribuida al problema o apartado.

Figura 3.1.9: Criterios Generales de Calificación (Castilla y León, Junio 2018)

Para llegar a la solución correcta del resultado, el alumno o alumna puede optar por una amplia gama de *métodos*. Como es lógico, el tiempo puede ser el que determina o delimita la posibilidad de emplear uno u otro para la resolución de cada ejercicio o problema propuesto. Normalmente como apunta Zamora (2014), los ejercicios elegidos para las pruebas, son de una tipología determinada y que tienen una forma de resolución más mecánica. Es por ello que los alumnos y alumnas escojan unos métodos fijos para la resolución de cada ejercicio o problema de cada bloque de contenido. En algunos bloques de contenido los ejercicios requieren una determinada ejecución, pero en otros puede haber mayor variedad para poder realizarlos.

Consecuentemente, hay algunas comunidades que redactan en sus criterios generales la posibilidad de elección de varios métodos de ejecución. La Comunidad de Madrid y Canarias son las comunidades que menos desarrollan este tipo de criterios generales. Aun así, en ellas solamente se señala este tipo de criterio, y apuntan la posibilidad del alumnado de elegir cualquier método posible para poder llegar a la solución correcta, siempre y cuando esta sea justificada. En las demás comunidades es un criterio presente en Asturias, Castilla y León, Cantabria, Extremadura y Murcia (Figura 3.1.10). Posteriormente veremos que en algunas comunidades en la redacción de los criterios específicos, se concretan los pasos a seguir por el alumnado y se va evaluando conforme avanza la realización de los ejercicios o problemas. Este tipo de indicaciones puede coaccionar al método y de tal forma a la propia corrección del ejercicio.

- Puede haber muchos métodos de resolución de un problema; cualquiera de ellos se considera igualmente válido.

Figura 3.1.10.: Criterios Generales de Calificación (Cantabria, Junio 2018)

Por último en cuanto a los temas seleccionados, en la Tabla 3.1. se recoge el tema vinculado a la *interpretación* del resultado, gráficas, tablas o enunciados. Si es necesaria la realización de una gráfica para la resolución de una tarea, el alumno o alumna debe de redactar la interpretación de la misma o realizar los cálculos necesarios para responder a las cuestiones determinadas. Quizás en MatII no se da tanto esta tipología de ejercicios o problemas, tanto como en la otra rama de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Aun así, son varias las comunidades que redactan criterios de esta tipología. Estas son Baleares, Castilla y La Mancha, Cataluña, Extremadura y Galicia (Figura 3.1.11).

Si se pide un esquema sencillo del gráfico de una función tienes que hacer un dibujo elemental con los máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, límites al infinito y asíntotas. No es necesario que sea un dibujo a escala. Como muchas calculadoras dibujan gráficos de funciones deberás explicar los razonamientos; por ejemplo, que la función es creciente en cierto intervalo, ya que su derivada es positiva. Un gráfico de una función, aunque sea correcto, no tiene ningún valor si no se ha razonado.

Figura 3.1.11: Criterios Generales de Calificación (Cataluña, Junio 2018)

Aparte de los temas seleccionados para nuestro análisis temático, se debe destacar la evolución del uso de la calculadora en las pruebas de acceso. Son muchas las comunidades que lo mencionan en sus reuniones, o incluso formulan actas sobre ello. En ocasiones se llega a crear un listado con los modelos de calculadora aptos para la realización de las pruebas. Este listado enseguida se queda obsoleto, ya que el mundo tecnológico avanza constantemente. Un ejemplo se encuentra en Baleares, donde en sus criterios generales se expresa que está permitido el uso de calculadora de cualquier tipo, pero nunca que puedan guardar información o transmitirla. Es la única comunidad que lo incluye como tal en sus criterios (Figura 3.1.12).

A pesar de ello, el estudiante puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que almacenen información o puedan transmitirla.

Figura 3.1.12: Criterios Generales de Calificación (Baleares, Junio 2018)

Por último, destacar que hay dos comunidades que en la redacción de sus criterios expresan la relación de las preguntas expuestas, con estándares de aprendizaje. Resulta anecdótico que no sea más frecuente esta situación, dada la importancia que tienen estos en la ley actual de educación (LOMCE). Estas comunidades son Andalucía y Asturias. En Andalucía meramente se citan en sus criterios generales, valorándose el grado de cumplimiento con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio (Figura 3.1.13). En Asturias estos estándares vienen reflejados en cada tarea propuesta en las pruebas de MatII (Figura 3.1.14).

CRITERIOS GENERALES.

- Los ejercicios deben realizarse atendiendo a los estándares del bloque 1 citado en los comentarios del Documento de Orientación de Matemáticas II, valorándose el grado de cumplimiento con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.

Figura 3.1.13: Criterios Generales de Calificación (Andalucía, Junio 2018)

1. Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles $\begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$	- Bloques de contenidos: Bloque 2 de Números y álgebra. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 2,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 2: 1.1, 1.2, 2.1, 2.3

Figura 3.1.14: Criterios Generales de Calificación (Asturias, Junio 2018)

3.2. Resultados del análisis de los criterios específicos

De la misma manera que se han expuesto los temas seleccionados para el análisis de los criterios generales de calificación, recogemos en una tabla similar (Tabla 3.2) los criterios específicos de calificación. En ella se pueden distinguir dos grandes bloques. El primero comprende los tipos de puntuación otorgados a cada ejercicio o problema de cada prueba, según Watts y García (1999), y el segundo al desarrollo de posibles respuestas o soluciones de los mismos, para llevar a cabo la corrección.

Tabla 3.2: *Criterios Específicos en Matemáticas II en las Pruebas de Acceso de 2018*

CRITERIOS ESPECÍFICOS	Puntuación				Respuestas	
	Por acierto	Por error	Global	Analítica	Ejemplos	Respuestas
ANDALUCÍA	✓		✓	✓		
ARAGÓN	✓		✓	✓		
ASTURIAS	✓		✓	✓	✓	✓
BALEARES						
C. VALENCIANA	✓		✓	✓		✓
C. Y LA MANCHA	✓		✓	✓		
C. Y LEON	✓		✓	✓		
CANARIAS			✓	✓		
CANTABRIA	✓		✓	✓		
CATALUÑA						
EXTREMADURA	✓		✓	✓		
GALICIA	✓		✓	✓	✓	✓
LA RIOJA						
MADRID	✓		✓	✓		
MURCIA	✓		✓	✓		
NAVARRA	✓		✓	✓		
PAIS VASCO	✓		✓	✓	✓	

Se han encontrado criterios específicos de calificación en todas las comunidades, con excepción de Baleares, Cataluña y La Rioja. Las dos primeras comunidades no hacen públicos estos criterios en la web de sus universidades, y adjuntamente los coordinadores de las mismas nos han comunicado directamente (vía email) que este tipo de criterios no son públicos. La Rioja no redacta criterios de esta tipología para la evaluación de sus pruebas.

Dentro del bloque de *puntuación*, como se puede apreciar en la tabla, ninguna comunidad expresa sus puntuaciones por error. Todas las comunidades puntúan por acierto, y de manera global u holística, o analíticamente cada apartado. Se puntúa cada apartado propuesto en la tarea y luego se realiza la suma de todos ellos, para hallar la puntuación final de la tarea propuesta y por último la calificación de la prueba.

Del mismo modo cabe señalar que en la redacción de este tipo de criterios, y en concreto en la redacción de las puntuaciones otorgadas a cada apartado o "paso" que debe de dar el alumnado para la ejecución del mismo, es muy común el uso de la preposición "hasta" en varias comunidades. Esta preposición delimita que puntuación se le atribuye a cada apartado o fase a desarrollar dentro del ejercicio, pero no proporciona una cantidad concreta. Andalucía y Castilla y León usan esta preposición para su puntuación (Figura 3.2.1).

E1.- a) Hasta 1,2 puntos, que corresponden a un máximo de 0,3 puntos por los cálculos previos y hasta 0,3 más por la correcta discusión de cada uno de los 3 casos posibles.
b) Hasta 0,8 puntos.

E2.- a) Hasta 0,8 puntos.
b) Hasta 0,6 puntos por calcular cada una de las dos cosas que se piden.

E3.- Hasta 0,5 puntos por los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hasta otros 0,5 puntos por los extremos relativos. Hasta un 1 más por determinar el número de puntos en los que la función se anula.

E4.- a) Hasta 0,8 puntos.
b) Hasta 1,2 puntos.

Figura 3.2.1: Criterios Específicos de Calificación (Castilla y León, Junio 2018)

Normalmente los ejercicios o problemas estén divididos en apartados, y asimismo la calificación esté fraccionada de la misma manera. Esta es la forma de puntuar más utilizada, pero por otra parte, también es frecuente el uso de calificaciones atendiendo al planteamiento y cálculo de la pregunta. En este caso se trata de otra forma de descomponer la nota del ejercicio o problema. No es menos cierto que en las comunidades que expresan esta puntuación, también la calificación puede estar dividida en cada apartado. Una complementa a la otra y puede dar mayor objetividad a lo que se evalúa. Asturias, Cantabria, Extremadura y Madrid detallan estas puntuaciones (Figura 3.2.2). En el caso de la siguiente figura además de valorarse el planteamiento y los cálculos, dentro de la valoración de la tarea, se califica también separadamente la discusión de la pregunta. No quiere decir que haya que realizar ninguna explicación sobre los resultados obtenidos, simplemente que por la tipología del ejercicio (Álgebra) uno de los apartados corresponde a la discusión del sistema planteado.

EJERCICIO 1	
OPCIÓN DE EXAMEN N.º 1	**OPCIÓN DE EXAMEN N.º 2**
1) 2 puntos • Planteamiento del sistema: 0,75 puntos • Discusión del sistema resultante: 0,75 puntos • Cálculo de las soluciones: 0,5 puntos 2) 1,25 puntos: • Determinación de los casos a estudiar: 0,75 • Caso z=0: 0,25 • Caso z=-1: 0,25	1) 2 puntos: • Determinación de los casos a discutir: 0,75 • Estudio del caso general: 0,25 • Estudio del caso b=2: 0,5 • Estudio del caso b=-2: 0,5 2) 1,25 puntos • Resolución del caso b=-2: 1,25

Figura 3.2.2: Criterios Específicos de Calificación (Cantabria, Junio 2018)

Si nos referimos a la legislación que regla la puntuación, debemos indicar que cada comunidad tiene la autoridad de establecer el número de ejercicios que forman parte de la prueba y las puntuaciones que se adjudican a cada uno de ellos. Si hablamos de la puntuación de un ejercicio, generalmente estamos hablando de la subdivisión de una nota final sobre diez puntos. No en todas comunidades se realiza de este modo. Hay algunas comunidades que prefieren evaluar cada ejercicio sobre diez puntos, y posteriormente realizar una media aritmética o ponderada de los mismos, según los porcentajes que se le atribuyan a cada ejercicio o problema. No son muy comunes estos casos, pero hay comunidades como Baleares y la Comunidad Valenciana que utilizan este método (Figura 3.2.3).

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \quad\quad y - z = 1-a \\ -x \quad\quad + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado (2 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$ (4 *puntos*).
c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado (4 *puntos*).

Figura 3.2.3: Criterios Específicos de Calificación (Comunidad Valenciana, Junio 2018)

Por último, otro tema a destacar dentro de la puntuación, son las fracciones en las que se puede llegar a dividir la puntuación de un apartado, ejercicio o nota final. Son pocas las comunidades que precisan al corrector con cuantos decimales puede o debe de calificar. Asturias determina que las fracciones mínimas deben ser de 0,25 puntos en la calificación. A su vez, en la Comunidad Valencia se indica que la fracción mínima será a las centésimas (Figura 3.2.4). El resto de comunidades no se manifiestan sobre dicha subdivisión, por lo que no se puede averiguar cuál es su criterio.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Figura 3.2.4: Criterios Específicos de Calificación (Comunidad Valenciana, Junio 2018)

El otro gran bloque dentro de los criterios específicos de calificación, es la publicación de las posibles *respuestas* de los ejercicios o incluso el desarrollo de la resolución de los ejercicios problemas detalladamente. Como se puede observar en la Tabla 3.2, no son muchas las comunidades que facilitan a sus correctores esta posible alternativa. Como es lógico, para ello es necesaria mayor dedicación e intentar contemplar todas las posibles soluciones o métodos de ejecución. Galicia es la comunidad que más precisa esta práctica evaluativa, ya que además de facilitar a sus correctores la resolución paso a paso del mismo, es la única que ofrece a los correctores la solución de las tareas propuestas mediante varios métodos (Figura 3.2.5).

Exercicio 1:

a) $|M| = \begin{vmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - m - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -m-4 & m \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{m}{4} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{m = -1}$$

$$\frac{1}{4} M = \begin{pmatrix} \frac{m}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Outra forma de resolvelo:

$$M^{-1} = \frac{1}{4} M \Leftrightarrow \frac{1}{4} M \cdot M = I \Leftrightarrow M^2 = 4I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m^2+m+4 & m^2+5m+4 \\ m+1 & m+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

E polo tanto

$$\boxed{m = -1}$$

Figura 3.2.5: Criterios Específicos de Calificación (Galicia, Junio 2018)

En este caso concreto se observa la resolución de un problema del bloque de contenidos de Álgebra, con su consecuente planteamiento y solución mediante dos métodos distintos. Otro caso similar sucede en la Comunidad Valenciana, aunque en esta simplemente se adjuntan las soluciones de cada apartado y el resultado final. No se especifica el desarrollo del ejercicio o problema, ni se establece el método para realizarlo (Figura 3.2.6).

Problema A.1. Tenim el sistema d'equacions $\begin{cases} \quad\; y - z = 1-a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$, on a és un paràmetre real.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors del paràmetre a per als quals el sistema és compatible determinat (2 *punts*).
b) Les solucions del sistema quan $a = 3$ (4 *punts*).
c) Les solucions del sistema per als valors de a que el fan compatible indeterminat (4 *punts*).

Solució: a) $a \neq 0$. b) $x = -1,\ y = 2,\ z = 4$. c) El sistema és compatible indeterminat quan $a = 0$. Les solucions del sistema són $x = \alpha - 5,\ y = \alpha + 1,\ z = \alpha$ per a qualsevol α real.

Figura 3.2.6: Criterios Específicos de Calificación (Comunidad Valenciana, Junio 2018)

Por último, apuntar que en el País Vasco y Asturias también se publican las resoluciones de los ejercicios propuestos en las pruebas de MatII. En el País Vasco toda la información acerca de la evaluación de las pruebas, viene recogida en un dossier publicado en las páginas web de sus universidades. En este documento se redactan ambos tipos de criterios y conjuntamente se adjunta la resolución de los ejercicios con una explicación en profundidad de los mismos. Es quizás la comunidad que de forma más completa y detallada proporciona una guía para la corrección de las pruebas (Figura 3.2.7).

SOLUCIÓN A1

Evidentemente el rango de la matriz ha de ser menor o igual que 3 y como hay determinantes distintos de cero de orden 2, se verificará que el Rango(A) será mayor o igual que 2.

Analizaremos si puede ser de rango 3. Los determinantes que se pueden formar, para este caso, son:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a - 12$, al igualarlo a cero nos da a= –6 y a = 2

El segundo determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2a + 2a = 0$,

El tercer determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & a & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$,

El cuarto y último determinante es: $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & a & -2 \end{vmatrix}$, al igualarlo a cero nos da

a = –6 y a = 2

Conclusión si:

1) a = –6 ó a = 2 los cuatro determinantes son cero y el rango(A) =2
2) Mientras que si a es distinto de –6 y 2 el rango(A) =3

Figura 3.2.7: Criterios Específicos de Calificación (País Vasco, Junio 2018)

4. Conclusiones y discusión

El proceso evaluativo en las Pruebas de Acceso a la Universidad en la asignatura de Matemáticas II, en las diferentes comunidades que componen el estado español, utiliza poca variedad en cuanto a técnicas o instrumentos de evaluación, aunque poseen diferencias en cuanto a los criterios de calificación empleados. Usualmente los criterios de calificación que se hacen públicos poseen dos partes diferenciadas: unos criterios generales redactados abiertamente, y que podrían dar lugar a una interpretación amplia por parte de los profesores correctores sobre aspectos generales como planteamiento, uso de fórmulas, exposición, errores cometidos, métodos e interpretación de las soluciones, y a unos criterios específicos que delimitan de manera más rigurosa la puntuación de cada apartado. Estos criterios específicos son puntuaciones por acierto y atienden a los pasos o secuencia de subtareas que debe seguir un alumno o alumna en la resolución de un problema, con mayor o menor detalle dependiendo de la pregunta y de la Comunidad Autónoma.

Esto puede generar que estos criterios específicos se consideren los únicos criterios de calificación y que otros aspectos enunciados en los criterios generales y no contemplados en los específicos de manera explícita (planteamiento, lenguaje matemático o argumentación) puedan ser eludidos por los correctores en su tarea. Boal, Bueno, Lerís y Sein-Echaluce (2008) ya advertían de la necesidad de incluir y ponderar de manera explícita algunos de estos aspectos generales para que sean realmente atendidos por parte de los correctores.

Nuestro estudio también señala la poca presencia de respuestas detalladas y soluciones facilitadas a los correctores en las diferentes comunidades, en los criterios de calificación. La postura más usual que podría ser adoptada por los correctores, previa a la corrección de las pruebas, es la realización de la misma de manera personal. Solo algunas pocas Comunidades Autónomas, como Asturias, Galicia y País Vasco, incluyen dentro de los criterios de corrección algunos ejemplos de diferentes métodos para responder a cada ejercicio. Los docentes correctores pueden tener sesgos en cuanto a la corrección de respuestas de estudiantes si el método elegido no es familiar al propio corrector, que a menudo viene vinculado a su experiencia profesional y a su propia práctica como docente, más que a la valoración de si ese método es o no correcto matemáticamente (Arnal-Bailera, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2016). La inclusión de distintas respuestas correctas realizadas por distintos métodos en los criterios de calificación puede servir a los correctores a eliminar dicho sesgo.

En solo unas pocas comunidades se señalan posibles errores concretos que pueden cometer los estudiantes en cada una de las preguntas. En los criterios generales se mencionan los errores aritméticos o de cálculo, pero solo en Castilla y León, Andalucía y Murcia se le da un valor concreto. No obstante, no hay errores específicos en cada una de las preguntas (Nortes y Nortes, 2010). Del mismo modo, el armonizador que elabora el examen es conocedor del objeto de evaluación de cada una de las tareas y es capaz de prever los posibles errores que pueden cometer los estudiantes en el planteamiento y resolución de los mismos. Una postura adecuada sería que se indicase qué tipo de errores se esperan y que se valorasen los mismos atendiendo a su cercanía con el objetivo de evaluación de la pregunta (Gairín, Muñoz y Oller, 2012, 2013).

Normalmente los criterios están formulados exclusivamente por puntuación por acierto. El complementar las calificaciones con los errores previsibles en cada tarea podría mejorar la fiabilidad y disminuir la variación de calificaciones (Mengual, Albarracín, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén y Gorgorió, 2019). En Andalucía y Castilla y León utilizan la preposición “Hasta” para redactar los criterios específicos. El uso de esta preposición no es otro que establecer un rango de puntuación, para que el corrector opte por la calificación que considere. Este rango de puntuación puede llegar a ser hasta de un punto, lo que puede hacer variar considerablemente las calificaciones entre los diferentes correctores y tribunales. Por ello, su uso exige una labor de coordinación entre correctores y armonizadores para unificar criterios entre distintos tribunales (Watts y García, 1999).

Otra cuestión significativa, es que ninguna comunidad opta por un instrumento distinto para la corrección de las pruebas, como pueden ser las rúbricas. Esto podría ser motivado por la naturaleza de las tareas que contienen las pruebas de Matemáticas, con un claro sesgo procedimental y de respuesta construida cerrada (Ruiz-Hidalgo, Herrera, Velasco, 2019; Batanero, López-Martín, Arteaga y Gea, 2018; Zamora, 2014). La inclusión de tareas abiertas permitiría evaluar otras competencias matemáticas (M.E.F.P., 2019) y los procesos matemáticos incluidos en los contenidos del bloque 1 de Bachillerato. En cualquier caso, este instrumento podría dar mayor precisión, fiabilidad y objetividad al momento de calificar. Para poder llevarlo a la práctica, el corrector debería recibir una formación detallada del uso de las mismas. Está claro que es una alternativa, pero debería estudiarse su validez. Conjuntamente a la formación, sería necesaria una prueba piloto. Una vez realizada la prueba, se realizaría un estudio estadístico para comparar la variabilidad de las calificaciones entre el uso de la rúbrica y el uso de los métodos convencionales. Meier, Rich y Cady (2006) ya sostienen que es complicado evaluar con rúbricas y que es necesaria una formación específica para ello.

La evolución de la evaluación de la asignatura de Matemáticas II en las pruebas de acceso a la universidad, ha ido progresando paulatinamente a lo largo de los años. El proceso con sus fortalezas y debilidades (Escudero, 1997) ha sido y está siendo objeto de abundantes investigaciones. En cada una de ellas se plantean propuestas de mejora que deberán ser estudiadas. En cuanto a los criterios, hemos comprobado que aunque sean muy similares en estructura en todas las Comunidades Autónomas, sí que poseen distintos aspectos que los diferencian.

En nuestro caso, Asturias, Comunidad Valenciana, Galicia y País Vasco elaboran unos criterios más completos que las demás comunidades. Los resultados de este trabajo parecen apuntar a que las supuestas diferencias entre calificaciones de distintas comunidades puedan obedecer más al diseño de las tareas en cuanto a su nivel de demanda cognitiva, ya que en cuanto a contenidos se observan regularidades (Rodríguez-Muñiz, Díaz, Mier y Alonso, 2016), que en la redacción de estos criterios. Es por ello, que varias fuentes promulgan un examen único para todo el país, formulando una prueba única y sus respectivos criterios de calificación. Posiblemente sea una alternativa a estudiar, pero para ello el consenso de contenidos, número de tareas que la conforman y la redacción de unos criterios, debe de ser aprobado por todas las comunidades. Esta tarea es mucho más compleja, que la mera corrección de una prueba de Matemáticas II.

5. Limitaciones

Una de las limitaciones de nuestra propuesta radica en la información que hemos podido recoger. La información que hemos obtenido ha sido mediante documentos públicos adjuntados en las diferentes páginas web de las universidades de las Comunidades Autónomas. Desconocemos si dicha información es la única que se le proporciona directamente a los profesores para llevar a cabo el proceso de corrección o no es así. En algunas comunidades, como Aragón podemos asumir que eso es lo que ocurre, mientras que en otras, como Andalucía, hemos comprobado que los correctores pueden recibir unos criterios de corrección más extensos que los públicos. Todos los criterios, salvo en el caso de Castilla y León y Extremadura, que se han descargado van asociados a las pruebas de MatII propuestos en la convocatoria ordinaria o en la extraordinaria del curso 2017-18. En Castilla y León y Extremadura no hemos tenido acceso a estos criterios y hemos extraído la información de los criterios asociados a un modelo de examen que adjunta la universidad, muy similar al que se propondrá.

Por otra parte, conjuntamente con los criterios de calificación hallados, nos hubiera gustado poder obtener información sobre todas las prácticas evaluativas que se llevan a cabo en las universidades de cada Comunidad Autónoma, como reuniones de coordinación entre armonizadores, entre correctores o entre armonizadores y correctores, pre o post-examen. Además de puestas en común para la corrección de las pruebas, corrección de los 50 primeros exámenes por expertos para posteriormente realizar un guión de calificación u otras prácticas evaluativas llevas a cabo. Para ello se contactó con el equipo de coordinadores o armonizadores de la especialidad de Matemáticas II de cada comunidad mediante la elaboración de un formulario de Google, pero no obtuvimos respuestas por parte de algunos armonizadores o en otras ocasiones, se argumentaron las negativas en torno a la confidencialidad del proceso evaluativo.

Bien estudiando conjuntamente con las prácticas evaluativas, o bien estudiando su relación con la formulación de las pruebas, el proceso de evaluación y con ello los criterios de calificación de las EvAU es un tema interesante por impacto social y por importancia. Por ello su extensión puede dar pie a otros estudios que tengan repercusión en una mejora de la educación.

6. Listado de Referencias

Arce, M., Conejo, L., Muñoz-Escolano, J.M. (2019), *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Arnal-Bailera, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Caracterización de las actuaciones de correctores al calificar pruebas escritas de matemáticas. *Revista de Educación, 371*, 35-60.

Batanero, C., López-Martín, M.M., Arteaga, P., y Gea, M. M. (2018). Characterizing Probability Problems Posed in University Entrance Tests in Andalucia. En Carmen Batanero y Egan J. Chernoff (Eds.). *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 103-123). Cham: Editorial Springer.

Bergeron, L. (2015). IB Mathematics Comparability Study: Curriculum & Assessment Comparison. Recuperado de: http://www.ibo.org/globalassets/publications/ib-research/dp/maths-comparison-summary-report.pdf

Boal, N., Bueno, C., Lerís, M.D., y Sein-Echaluce, M.L. (2008). Las habilidades matemáticas evaluadas en las pruebas de acceso a la universidad. Un estudio en varias universidades públicas españolas. *Revista de Investigación Educativa*, *26*(1), 11-23.

Braun, V. y Clarke, V. (2006) Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3* (2). pp. 77-101. ISSN 1478-0887

Brosseau, Guy (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial Zorzal.

Casanova, M. A. (1995). *Manual de evaluación educativa*. Madrid: La Muralla.

Contreras A., Ordóñez L., Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. En *Enseñanza de las ciencias*, *28*(3), 367–384.

Cuxart, A., Martí, M. y Ferrer, F. (1997). Algunos factores que inciden en el rendimiento y la evaluación en los alumnos de las Pruebas de Aptitud de Acceso a la Universidad. *Revista de Educación, 314*, 63-88.

Escudero, T. (1997). Investigaciones sobre el procedimiento de selección de universitarios en España: una revisión comentada. *Revista de Educación*, *314*, 7-27.

Escudero, T. y Bueno, C. (1994). Investigaciones y Experiencias: Examen de Selectividad. El estudio del tribunal paralelo. *Revista de Educación*, *304*, 281-300.

Ferreras, A. (2 de Marzo de 2018). Castilla y León no quiere tener el examen «más duro» de Selectividad. *ABC*. Recuperado de: https://www.abc.es/espana/castilla-leon/abci-castilla-y-leon-no-quiere-tener-examen-mas-duro-selectivida-201803020832_noticia.html

Förster, C., y Rojas-Barahona, C. (2008). Evaluación al interior del aula: una mirada desde la validez, confiabilidad y objetividad. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, *43*(2), 285-305.

Gairín, J. M., Muñoz, J. M. y Oller, A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261-274). Jaén, España: SEIEM.

Gairín, J. M., Muñoz, J. M. y Oller, A. M. (2013). Anomalías en los procesos de identificación de errores en las pruebas escritas de matemáticas de las P.A.U. *Campo Abierto. Revista de Educación 32*(2), 27-50.

González, Á. (2001). Los orígenes de la selectividad en la Universidad española: el examen de ingreso en facultades (1898-1902). *Hispania*, *61*(207), 315-337.

Grau, R.; Cuxart, A. y Martí-Recober, M. (2002). La calidad en el proceso de corrección de las Pruebas de Acceso a la Universidad: variabilidad y factores. *Revista de Investigación Educativa*, *20*(1), 209-223.

Hogan, T. (2004). *Pruebas psicológicas. Una introducción práctica*. México: El Manual Moderno.

Ley Orgánica 30/1974, sobre pruebas de aptitud para acceso a las Facultades, Escuelas Técnicas Superiores, Colegios Universitarios y Escuelas Universitarias. Boletín Oficial del Estado, España, de 24 de Julio.

Ley Orgánica 8/2013, para la Mejora de la Calidad Educativa. Boletín Oficial del Estado, España, de 9 de diciembre.

Mallart Solaz, A. (2012). La resolución de problemas en la prueba de Matemáticas de acceso a la universidad: procesos y errores. *Educatio Siglo XXI*, *32*(1), 233-254.

M.E.F.P. (2019). *PISA 2018. Programa para la evaluación internacional de alumnos. OCDE. Informe español.* Madrid: Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Meier, S. L., Rich, B. S. y Cady, J. (2006). Teachers use of rubrics to score non-traditional tasks: factors related to discrepancies in scoring. *Assessment in Education*, *13*(01), 69-95. http://dx.doi.org/10.1080/09695940600563512

Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2013). Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de Matemáticas. En A. Berciano, G. Gutierrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 367-381). Bilbao, España: SEIEM.

Mengual, E., Albarracín, L., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M. y Gorgorió, N. (2019). Diseño de criterios para reducir la variabilidad en la calificación de exámenes de matemáticas en pruebas de acceso a la universidad. *PNA 13*(2), 62-83.

Nortes, R. y Nortes, A. (2010). Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI, 28* (1), 317-342.

Nortes, A. N., Nortes, R. y Lozano, F. (2015). Las correcciones en Matemáticas en las Pruebas de Acceso a la Universidad. *Educatio Siglo XXI*, 33(3), 199-222.

Orden ECD/42/2018, por la que se determinan las características, el diseño y el contenido de la evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad, las fechas máximas de realización y de resolución de los procedimientos de revisión de las calificaciones obtenidas, para el curso 2017/2018. Boletín Oficial del Estado, España, de 25 de enero de 2018.

Real Decreto 558/2010, por el que se regulan las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas. Boletín Oficial del Estado, España, de 7 de mayo, de 2010.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Díaz, P., Mier, V., y Alonso, P. (2016). Washback Effect of University Entrance exams in Applied Mathematics to Social Sciences. *Plos one*, *11*(12), e0167544.

Ruiz de Gauna, J. (2013). ¿Qué se pregunta en Europa en las matemáticas de selectividad? *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (74), 65-74.

Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberría, J., y Sarasua, J. (2013). Pruebas de selectividad en matemáticas en la UPV-EHU. Resultados y opiniones de los profesores. *Revista de educación*, *362*, 217-246.

Ruiz-Hidalgo, J.F., Herrera, M.E., y Velasco, M.V. (2019) Tareas de Cálculo en las pruebas de acceso a la Universidad. *Revista de educación*, *386*, 137-164.

Wang, N. y Cai, J. (2018). An investigation of how teachers score constructed-response mathematics assessment tasks. *Journal of Research in Education*, *28*(1), 1-29.

Watts, F. y García, A. (1999). Control de calidad en la calificación de la prueba de lengua inglesa de Selectividad. *Aula abierta, 73,* 173-190.

Zamora Pérez, R. (2014). Análisis de las pruebas de acceso a las universidades de Castilla y León (Matemáticas II). Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

ANEXOS

ANDALUCÍA – Convocatoria de Junio

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD CURSO 2017–2018	MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CRITERIOS GENERALES.

- Los ejercicios deben realizarse atendiendo a los estándares del bloque 1 citado en los comentarios del Documento de Orientación de Matemáticas II, valorándose el grado de cumplimiento con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.
- La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo de manera efectiva la resolución, no es suficiente para obtener una valoración completa del ejercicio.
- En los ejercicios en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
- Los errores cometidos en un apartado, por ejemplo en el cálculo del valor de un cierto parámetro, no se tendrán en cuenta en la calificación de los desarrollos posteriores que puedan verse afectados, siempre que resulten de una complejidad equivalente.
- Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.
- Si se realizan ejercicios de las dos opciones, sólo se evaluarán los ejercicios de la misma opción que el primero que aparezca físicamente en el papel de examen.

CRITERIOS ESPECÍFICOS PARA ESTE MODELO. La evaluación se realizará según el desglose de las puntuaciones que se hace a continuación. Si algún apartado no se menciona específicamente, su puntuación es la que figura en el enunciado del ejercicio correspondiente. Cuando se dice: “x puntos por A”, hay que interpretar que se deben conceder x puntos si lo que se dice en la frase A está hecho o estudiado correctamente, incluyendo la justificación oportuna. Cuando se dice "planteamiento" se refiere al proceso seguido por el/la estudiante que, de no cometer errores, le llevará a la solución.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Hasta 0,5 por imponer cada una de las condiciones.
Ejercicio 2.- (a) [1,25 puntos] Hasta 0,25 por la gráfica de f; hasta 0,5 por la de g. **(b) [1,25 puntos]** Hasta 0,75 por las primitivas.
Ejercicio 3.- (a) [1,75 puntos] Hasta 0,75 si calcula el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas. Hasta 0,25 por los valores críticos. Hasta 0,25 por el caso compatible determinado.
(b) [0,75 puntos] Lo indicado.
Ejercicio 4.- (a) [1,25 puntos] Hasta 0,75 por el planteamiento. **(b) [1,25 puntos]** Hasta 0,75 por el planteamiento.

Opción B

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Hasta 1,25 si estudia la continuidad.
Ejercicio 2.- (a) [1 punto] Hasta 0,5 por obtener la recta tangente a la gráfica de f. Hasta 0,25 por obtener el punto pedido. **(b) [0,75 puntos]** Hasta 0,5 por las gráficas. Hasta 0,25 puntos por los puntos de corte.
(c) [0,75 puntos] Hasta 0,25 por expresar el área mediante integrales. Hasta 0,25 por el cálculo de primitivas.
Ejercicio 3.- (a) [1,5 puntos] Hasta 0,75 por plantear el sistema. Hasta 0,75 por resolverlo. **(b) [1 punto]** Hasta 0,5 por resolver el sistema. Hasta 0,5 por la discusión de la solución.
Ejercicio 4.- (a) [1,75 puntos] Hasta 0,75 por el planteamiento. **(b) [0,75 puntos]** Hasta 0,25 por el planteamiento.

ANDALUCÍA – Convocatoria de Septiembre

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD CURSO 2017–2018	MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CRITERIOS GENERALES.

- Los ejercicios deben realizarse atendiendo a los estándares del bloque 1 citado en los comentarios del Documento de Orientación de Matemáticas II, valorándose el grado de cumplimiento con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.
- La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo de manera efectiva la resolución, no es suficiente para obtener una valoración completa del ejercicio.
- En los ejercicios en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
- Los errores cometidos en un apartado, por ejemplo en el cálculo del valor de un cierto parámetro, no se tendrán en cuenta en la calificación de los desarrollos posteriores que puedan verse afectados, siempre que resulten de una complejidad equivalente.
- Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.
- Si se realizan ejercicios de las dos opciones, sólo se evaluarán los ejercicios de la misma opción que el primero que aparezca físicamente en el papel de examen.

CRITERIOS ESPECÍFICOS PARA ESTE MODELO. La evaluación se realizará según el desglose de las puntuaciones que se hace a continuación. Si algún apartado no se menciona específicamente, su puntuación es la que figura en el enunciado del ejercicio correspondiente. Cuando se dice: "x puntos por A", hay que interpretar que se deben conceder x puntos si lo que se dice en la frase A está hecho o estudiado correctamente, incluyendo la justificación oportuna. Cuando se dice "planteamiento" se refiere al proceso seguido por el/la estudiante que, de no cometer errores, le llevará a la solución.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Hasta 1,25 por obtener c de la continuidad en $x = 0$ aplicando L'Hôpital. Hasta 0,5 por obtener la relación entre a y b de la abscisa del máximo. Hasta 0,5 por obtener la relación entre a y b por la pendiente de la recta tangente. Hasta 0,25 por calcular efectivamente a y b.
Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Hasta 0,25 por la derivada de f. Hasta 0,5 por imponer la condición de extremo. Hasta 0,75 por aplicar la integración por partes. Hasta 0,5 por expresar la segunda condición sin integrales.
Ejercicio 3.- (a) [0,75 puntos] Hasta 0,5 por obtener AB y BA. **(b) [1 punto]** Hasta 0,25 por el cálculo de cada una de las matrices pedidas. **(c) [0,75 puntos]** Lo indicado.
Ejercicio 4.- (a) [1 punto] Hasta 0,5 por el planteamiento. **(b) [1,5 puntos]** Hasta 0,75 por el planteamiento.

Opción B

Ejercicio 1.- (a) [1,5 puntos] Hasta 0,5 por la derivada y hasta 0,5 por imponer que se anula en $x = 1$ y en $x = 2$. Hasta 0,5 por resolver el sistema de ecuaciones que se genera. **(b) [1 punto]** Lo indicado.
Ejercicio 2.- (a) [0,75 puntos] Hasta 0,5 por calcular la abscisa. **(b) [0,5 puntos]** Lo indicado.
(c) [1,25 puntos] Hasta 0,5 por expresar el área como integral. Hasta 0,5 por las primitivas.
Ejercicio 3.- (a) [1,5 puntos] Hasta 0,5 si calcula el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas. Hasta 0,5 por el caso compatible indeterminado. Hasta 0,5 por los casos incompatibles. **(b) [1 punto]** Hasta 0,75 por la solución general.
Ejercicio 4.- (a) [1,5 puntos] Hasta 0,5 por la condición de perpendicularidad. Hasta 0,5 por imponer que son coplanarias. **(b) [1 punto]** Hasta 0,5 por el planteamiento.

ARAGÓN – Convocatoria de Junio

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

Opción A

A.1-a *(1 punto)* Para clasificar el sistema puede usarse cualquier método. La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles. La valoración de todos los casos debe ser idéntica.

A.1-b *(1 punto)* La calificación máxima de *1 punto* se obtendrá si se proporciona la parametrización de las infinitas soluciones que corresponden al caso que se estudia.

A.1-c *(1 punto)* La calificación debe tener en cuenta que se sabe determinar la matriz producto *CD* y el estudio de su rango. Si solo se obtiene la matriz producto *CD* pero no se estudia el rango la calificación máxima será de *0,4 puntos*.
A.2 *(1,5 puntos)* Determinación del plano: *1,5 puntos*. El plano puede proporcionarse en cualquiera de sus formas, vectorial, paramétrica o general, y todas deben considerarse igualmente válidas.
A.3-a-i *(1 punto)* Dominio: *0,25 puntos*. Estudio de las asíntotas: *0,25 puntos* cada uno de los tres tipos de asíntotas a estudiar, incluidos los casos en que puedan no existir, en los que deben decir que no las hay.

A.3-a-ii *(1 punto)* El estudio de los máximos y mínimos relativos pueden hacerlo a través de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento o a través de las derivadas.

A.3-a-iii Determinación de la tangente: *1 punto*.

A.3-b *(1 punto)* Los pasos y razonamientos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta. Si no se escribe la constante de integración, la calificación máxima será´ de *0,8 puntos*.
A.4 De manera genérica, puede pensarse que, debido a las modificaciones recientes en el temario, esta parte todavía representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son los suficientemente sencillas como para que no supongan una especial dificultad.

En todo caso, en las dos cuestiones planteadas los pasos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración de las cuestiones debe tenerlo en cuenta, si bien cualquier estrategia es válida.

A.4-a *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igual- mente válida, siempre que sea coherente y correcta.

A.4-b *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igual- mente válida, siempre que sea coherente y correcta.

Debe señalarse que, dado que es razonable aplicar la distribución de probabilidades Binomial que incluye cálculos que pueden resultar tediosos, se les ha indicado a los estudiantes que NO es preciso finalizar los cálculos, y pueden dejar indicada la probabilidad, precisando, eso sí, los números que la definen.

Opción B

B.1-a *(1,5 puntos)* La calificación debe tener en cuenta que se identifican todos los valores posibles.

B.1-b *(1,5 puntos)* Para obtener la máxima calificación debe obtenerse la matriz X que se busca. En todo caso, la calificación debe tener en cuenta los cálculos y razonamientos que se utilicen, es decir, no llegar a obtener la matriz X correcta NO implica una calificación de 0 puntos.

B.2-a *(0,75 puntos)* La calificación deberá tener en cuenta que se analizan todas las posibilidades.

B.2-b *(0,75 puntos)* La recta puede proporcionarse en cualquiera de sus formas (paramétrica, continua, intersección de planos) y todas se consideran válidas.

B.3-a *(2 puntos)* Los cálculos son suficientemente sencillos como para que no ofrezcan dificultad.

B.3-b *(2 puntos)* Los pasos en la determinación del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta.

B.4 Como se ha mencionado en los criterios de la opción A, puede pensarse que esta parte todavía representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son los suficientemente sencillas como para que no supongan una especial dificultad.

En todo caso, en las dos cuestiones planteadas los pasos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración de las cuestiones debe tenerlo en cuenta, si bien cualquier estrategia es válida.

B.4-a *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta.

Si un estudiante identifica correctamente la cuestión a responder identificando correctamente los sucesos pero no sabe determinar la probabilidad, la puntuación máxima será de *0,25 puntos*.

B4-b *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta.

Si un estudiante identifica correctamente la cuestión a responder como, por ejemplo, identificando el cálculo de la probabilidad condicional, e identifica correctamente los sucesos pero no sabe determinar la probabilidad, la puntuación máxima será´ de *0,25 puntos*.

ARAGÓN – Convocatoria de Septiembre

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCION

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

Opción A

A.1-a *(1,5 puntos)* Al tratarse de un sistema homogéneo con infinitas soluciones la calificación máxima se obtendrá si se proporciona la parametrización de las infinitas soluciones.

Si solo se proporciona la solución $x = y = z = 0$, la calificación máxima será de *0,5 puntos*.

A.1-b *(1,5 puntos)* La calificación debe tener en cuenta la aplicación de las propiedades de los determinantes que permiten calcular el determinante sin necesidad de desarrollarlo.

No obstante, si no se usa ninguna propiedad y se realizan todos los cálculos desarrollando directamente el determinante, no debe realizarse ninguna penalización ya que esta irá implícita en el consumo de tiempo necesario para efectuar todos los cálculos.
A.2-a *(0,5 puntos)* Determinación del volumen: *0,5 puntos*.

A.2-b *(1 punto)* La determinación de que las rectas se cruzan se valorará con 1 punto. Si solamente se dice que se cruzan o se cortan la calificación máxima será de *0,5 puntos*.
A.3-a-i *(1 punto)* Estudio de las asíntotas horizontales: *0,2 puntos*.

El estudio de cada una de los otros dos tipos de asíntotas (verticales y oblicuas): 0,4 cada uno de esos dos tipos.

A.3-a-ii (1,5 puntos) Determinación de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento: *1 punto*. Estudio de los máximos y mínimos relativos: *0,5 puntos*.

A.3-b (1,5 puntos) Los pasos y razonamientos en el cálculo de la integral deben estar claros y la calificación debe tenerlo en cuenta. Si no se escribe la constante de integración, la calificación máxima será de *1,2 puntos*.
A.4 De manera genérica, puede pensarse que, debido a las modificaciones recientes en el temario, esta parte todavía representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son los suficientemente sencillas como para que no supongan una especial dificultad.

En todo caso, en las dos cuestiones planteadas los pasos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración de las cuestiones debe tenerlo en cuenta, si bien cualquier estrategia es válida.

A.4-a *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta.

A.4-b *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta.

Debe señalarse que, dado que en este apartado es razonable aplicar la distribución de probabilidades Binomial que incluye cálculos que pueden resultar tediosos, se les ha indicado a los estudiantes que NO es preciso finalizar los cálculos, y pueden dejar indicada la probabilidad, precisando, eso sí, los números que la definen.

<u>Opción B</u>

B.1-a *(1,5 puntos)* Para obtener la máxima calificación debe obtenerse la matriz *X* que se busca. En todo caso, la calificación debe tener en cuenta los cálculos y razonamientos que se utilicen, es decir, no llegar a obtener la matriz *X* correcta NO implica una calificación de *0 puntos*.

B.1-b (1,5 puntos) La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos que aparecen. La valoración de todos los casos debe ser idéntica.

B.2 (1,5 puntos) Determinación de los dos parámetros: *1,5 puntos*.

B.3-a *(1,5 puntos)* Los pasos en la determinación del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta.

B.3-b *(1,5 puntos)* Planteamiento del problema: *1 punto*. Resolución: *0,5 puntos*. Si en la resolución no argumentan o comprueban (bastaría con que lo argumentasen correctamente) que la solución corresponde a un mínimo, se podrá´ penalizar con un máximo de *0,2 puntos*.

B.3-b *(1 punto)* Los cálculos son lo suficientemente sencillos como para que no haya dificultad en determinar el valor del área.

B.4 Como se ha mencionado en los criterios de la opción A, puede pensarse que esta parte todavía representa una novedad cualitativa importante para los estudiantes. No obstante, las cuestiones son los suficientemente sencillas como para que no supongan una especial dificultad.

En todo caso, en las dos cuestiones planteadas los pasos para la determinación de las probabilidades deben estar claros y la valoración de las cuestiones debe tenerlo en cuenta, si bien cualquier estrategia es válida.

B.4-a *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente válida, siempre que sea coherente y correcta.

Si un estudiante identifica correctamente la cuestión a responder como, por ejemplo, el cálculo de la probabilidad condicional identificando los sucesos, pero no sabe determinar la probabilidad, la puntuación máxima será´ de *0,25 puntos*.

B.4-b *(0,75 puntos)* Cualquier estrategia usada para determinar la probabilidad es igualmente valida, siempre que sea coherente y correcta.

Debe señalarse que, dado que es razonable aplicar la distribución de probabilidades Binomial que incluye cálculos que pueden resultar tediosos, se les ha indicado a los estudiantes que NO es preciso finalizar los cálculos, y pueden dejar indicada la probabilidad, precisando, eso sí, los números que la definen.

ASTURIAS – Convocatoria de Junio

MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde m es un número real.

a) Estudiar el rango de A según los valores de m. (1.5 puntos)

b) Para $m = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema (1 punto)

$$A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A^t \quad \text{matriz traspuesta})$$

---

a) Aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - (m-1)F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 2-m & 2-m & 2m-m^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_3 = F_3 + F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 2+m-m^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & (1+m)(2-m) \end{pmatrix}$$

1. Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ las tres filas son independientes, por tanto, el rango es 3.
2. Si $m = -1$ la última fila es nula y el rango es 2.
3. Si $m = 2$ las dos últimas fila son nulas y el rango es 1.

b) Para $m = -1$, rango(A^t)= rango(A)= 2 .

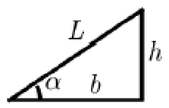
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 + 2F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left. \begin{array}{r} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} \implies x = y = z = \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

---

2. Se quiere construir una rampa(ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = \tan(\alpha) > 0$ y que salve una altura $h = 20$ metros.

a) Calcula, en función de m, el valor de b y comprueba que la longitud de la rampa L se puede expresar como $L(m) = 20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}$ (0.5 puntos)



b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente m y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m) = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$. Demuestra que el tiempo t, en segundos, que tarda un camión en recorrer la rampa se puede expresar como $t(m) = 20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m}}$ (0.5 puntos)

c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (1.5 puntos)

(Se recuerda que tan = tangente y velocidad=espacio/tiempo).

---

a) Se tiene que

$$\mathbf{0} < \boldsymbol{m} = \tan(\alpha) = \frac{20}{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad b(m) = \frac{20}{m}$$

$$L(m) = \sqrt{20^2 + b^2} = \sqrt{20^2 + \frac{20^2}{m^2}} = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$$

b)

$$t(m) = \frac{L(m)}{v(m)} = \frac{20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}}{1/\sqrt{m}} = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$$

c) Calculamos la derivada de la función

$$t'(m) = \frac{20}{2}\frac{m^2-1}{m^2\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m}}} = 10\frac{m^2-1}{\sqrt{m^3(m^2+1)}}$$

Recordemos que $m > 0$

$$t'(m) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m^2 - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{m = 1}$$

(Se descarta el $m = -1$)

Analizamos los valores de $t'(m)$ por la izquierda y derecha de $m = 1$

$$t'(1^-) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t(m) \text{ decreciente}$$

$$t'(1^+) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t(m) \text{ creciente}$$

luego, se comprueba que es mínimo.

---

3. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones $r : \dfrac{x-1}{2} = y + 1 = -z + 2$. Calcula:

a) Un vector director $\vec{v}_1$ de r. (0.75 puntos)

b) Un vector director $\vec{v}_2$ de s sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$. (1 punto)

c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

---

a) Un vector director de r será

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\vec{v}_1 = (2, 1, -1)}$$

b) Si r y s son perpendiculares también lo serán $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y como $\vec{w} = (1, 0, 2)$ es perpendicular a ambos, se tendrá que

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \times \vec{w} \;=\; \mathbf{(2, -5, -1)}$$

es un vector director de s.

c) Un vector normal al plano π será $\vec{w}$. Luego la ecuación de π será

$$\pi \;:\; x + 2z + d = 0$$

Además $A(1, -1, 2) \in r \subset \pi \quad \Longrightarrow \quad 5 + d = 0$

$$\boldsymbol{\pi \;:\; x + 2z = 5}$$

---

4. En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0.3$ y $p(A/B) = 0.5$. Calcula:

a) $p(A)$ y $p(B)$. (1 punto)

b) $p(A \cup B)$ y $p(B/A)$. (1 punto)

c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B. (0.5 puntos)

---

a) Para calcular $p(B)$, aplicamos

$$p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \mathbf{\frac{3}{5} = 0.6}$$

y como los sucesos son independientes

$$p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \mathbf{\frac{1}{2} = 0.5}$$

b)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \mathbf{\frac{4}{5} = 0.8}$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \mathbf{\frac{3}{5} = 0.6}$$

c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B es el suceso contrario a $A \cup B$

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = \mathbf{\frac{1}{5} = 0.2}$$

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula, si existe, la inversa de B. (1 punto)
b) Determina, si existe, la matriz X que verifica la relación $AXB = C$. (1.5 puntos)

---

a) Calculamos su determinante

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{F_3=F_3-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Por tanto, la matriz posee inversa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |B| = -1 \qquad \boldsymbol{B^{-1}} = -\left(\mathrm{Adj}(B)\right)^t = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

b) Como $|A| = 1$, se tiene que A posee inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \qquad A^{-1} = \left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces la ecuación $AXB = C$ se puede despejar

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

---

2. Dada la función $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-6}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0.75 puntos)
b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0.75 puntos)
c) Calcula una primitiva de la función $f(x)$. (1 punto)

---

a) $\dfrac{1}{x^2+x-6} = \dfrac{1}{(x+3)(x-2)}$. Salvo en los puntos $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{x = -3}$ la función existe y es continua y derivable.

- Asíntotas verticales. Veamos en esos puntos sus límites laterales:

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x^2+x-6} = -\infty \quad \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x^2+x-6} = +\infty \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2+x-6} = +\infty \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2+x-6} = -\infty$$

Las rectas $\boldsymbol{x = 2}$, $\boldsymbol{x = -3}$ son **asíntotas verticales**.

- Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+x-6} = 0 \quad \Longrightarrow$$ La recta $\boldsymbol{y = 0}$ es **asíntota horizontal.**

- Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x(x^2+x-6)} = 0 \quad \Longrightarrow$$ **no hay asíntotas oblicuas**

b) La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x-6)^2}$$

con punto crítico $x = -1/2$. La derivada segunda es

$$f''(x) = \frac{(2(3x^2+3x+7))}{(x^2+x-6)^3}$$

el numerador no tiene raíces reales, luego **no existen puntos de inflexión** y

$$\boldsymbol{A\left(\frac{-1}{2}, \frac{-4}{25}\right)} \qquad f''\left(\frac{-1}{2}\right) < 0 \qquad \textbf{máximo}$$

c) Para calcular la primitiva se descompone la función en fracciones elementales

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{1}{5}\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{5}\frac{1}{(x+3)}$$

y el cálculo de la primitiva

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}dx = \int \left[\frac{1}{5}\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{5}\frac{1}{(x+3)}\right] dx = \int \frac{1}{5}\frac{1}{(x-2)}dx - \int \frac{1}{5}\frac{1}{(x+3)}dx =$$

$$= \frac{1}{5}\ln(|x-2|) - \frac{1}{5}\ln(|x+3|) + C = \ln\left(\left|\frac{x-2}{x+3}\right|^{1/5}\right) + C$$

---

3. Dado la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$, el punto $Q(1,1,1)$ y un plano π.

a) Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P,Q) = 1\,u$. (1.25 puntos)
b) Se sabe que $Q \in \pi$ y que $d(P,Q) = d(P,\pi)$. Determina la ecuación del plano π. (1.25 puntos)

---

a) Un punto de la recta es del tipo

$$P(\lambda, 1, 0) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego si $d(P,Q) = 1$.

$$\sqrt{(\lambda-1)^2+1} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{P(1,1,0)}$$

b) Según los datos del problema se tiene que el vector $\overrightarrow{PQ} = (0,0,1)$ es normal al plano π. Luego

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes:

a) Sea fumador. (0.5 puntos)

b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer. (1 punto)

c) Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no? (1 punto)

Según la tabla tendremos que el número total de personas es $T = 100$, el de hombres $H = 40$, el de mujeres $M = 60$, el de fumadores $F = 30$, y el de no fumadores $NF = 70$

a)

$$p(F) = \frac{30}{100} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} = \mathbf{0.3}$$

b)

$$p(M/F) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)}$$

donde

$$p(M \cap F) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$p(M/F) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0.6667}$$

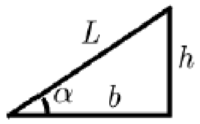
c) En el nuevo espacio muestral se tendrá:

$$p(F \cap NF) = \frac{\binom{30}{1}\binom{70}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{33}} = \mathbf{0.4242}$$

Criterios específicos de corrección

OPCIÓN A

1. a) Dada la matriz $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$ donde m es un número real. Estudiar el rango de A según los valores de m.	- Bloques de contenidos: Bloque 2 de Números y álgebra. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 15 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 2: 1.2, 2.1
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,75 puntos por el planteamiento correcto del análisis del rango, 0,25 por cada caso.	
1. b) Para $m = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema $$A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A^t \quad \text{matriz traspuesta})$$	- Bloques de contenidos: Bloque 2 de Números y álgebra. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 2: 1.1, 1.2, 2.1, 2.3
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,25 puntos por el planteamiento del sistema, 0,75 por la resolución.	

2. a) Se quiere construir una rampa(ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = \tan(\alpha) > 0$ y que salve una altura $h = 20$ metros. Calcula, en función de m, el valor de b y comprueba que la longitud de la rampa L se puede expresar como $L(m) = 20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}$  	- Bloques de contenidos: Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,25 puntos por cada valor.	
2. b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente m y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m) = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$. Demuestra que el tiempo t, en segundos, que tarda un camión en recorrer la rampa se puede expresar como $t(m) = 20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m}}$	- Bloques de contenidos: Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1
2. c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (Se recuerda que $\tan$ = tangente y velocidad=espacio/tiempo) .	- Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 15 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1 Estándares del bloque 3: 1.2
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.75 puntos por la derivada, 0.5 por el punto crítico y 0.25 por comprobar que es mínimo.	

<table>
<tr><td>3. a) Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones
$$r:\ \frac{x-1}{2}=y+1=-z+2.$$
Calcula: Un vector director $\vec{v}_1$ de r.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 4 de Geometría.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 0,75 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 7,5 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 4: 2.1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.5 por el planteamiento, 0.25 por su cálculo.</td></tr>
<tr><td>3. b) Un vector director $\vec{v}_2$ de s sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1,0,2)$.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 4 de Geometría.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1 punto.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 4: 3.1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.75 por el planteamiento, 0.25 por su cálculo.</td></tr>
<tr><td>3. c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 4 de Geometría.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 0,75 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 7,5 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 4: 2.4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.5 por el planteamiento, 0.25 por su cálculo.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>4. a) En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0.3$ y $p(A/B) = 0.5$. Calcula: $p(A)$ y $p(B)$.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 5 de Estadística y probabilidad.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1 punto.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.5 por cada probabilidad.</td></tr>
<tr><td>4. b) $p(A \cup B)$ y $p(B/A)$.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 5 de Estadística y probabilidad.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1 punto.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2, 1.3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.5 por cada probabilidad.</td></tr>
<tr><td>4. c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 5 de Estadística y probabilidad.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 0.5 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,25 puntos identificar el suceso, 0.25 puntos por hallar la probabilidad.</td></tr>
</table>

OPCIÓN B

<table>
<tr><td>1. a) Dadas las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Calcula, si existe, la inversa de B.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 2 de Números y álgebra.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1 punto.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 2: 2.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.25 puntos por la existencia de la inversa, 0.75 por su cálculo.</td></tr>
<tr><td>1. b) Determina, si existe, la matriz X que verifica la relación $AXB = C$.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 2 de Números y álgebra.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1.5 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 15 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 2: 1.2, 2.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.5 puntos por despejar la ecuación, 0.5 por la inversa de A y 0.5 por los productos finales.</td></tr>
</table>

2. a) Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-6}$ Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas.	- Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0,75 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 7,5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 3: 1.1, 1.2
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.25 puntos por el dominio, 0.5 por las asíntotas.	
2. b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.	- Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0,75 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 7,5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 3: 1.2
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.5 puntos por los puntos críticos, 0.25 por su estudio.	
2. c) Calcula una primitiva de la función $f(x)$.	- Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 3: 3.1
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.5 puntos por la descomposición en fracciones + 0.5 primitivas.	

<table>
<tr><td>3. a) Dado la recta $r:\left\{\begin{array}{l}y=1\\z=0\end{array}\right.$, el punto $Q(1,1,1)$ y un plano π. Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P,Q)=1\,u$.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 4 de Geometría.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1,25 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12,5 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 4: 2.1, 3.3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.75 puntos por el planteamiento, 0.5 por los cálculos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>3. b) Se sabe que $Q\in\pi$ y que $d(P,Q)=d(P,\pi)$. Determina la ecuación del plano π.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 4 de Geometría.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1,25 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12,5 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 4: 2.4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.75 puntos por el planteamiento, 0.5 por los cálculos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>4. a) En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:
<table><tr><td></td><td>Fumador</td><td>No fumador</td></tr><tr><td>Hombres</td><td>10</td><td>30</td></tr><tr><td>Mujeres</td><td>20</td><td>40</td></tr></table>
Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes: Sea fumador.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 5 de Estadística y probabilidad.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 0,5 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1.
Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2</td></tr>
<tr><td>4. b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer.</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 5 de Estadística y probabilidad.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1 punto.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1.
Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2, 1.3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.5 puntos por el planteamiento, 0.5 por los cálculos.</td></tr>
<tr><td>4. c) Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no?</td><td>- Bloques de contenidos:
Bloque 5 de Estadística y probabilidad.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1 punto.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1.
Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.5 puntos por el planteamiento, 0.5 por los cálculos.</td></tr>
</table>

ASTURIAS – Convocatoria de Julio

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles (2.5 puntos)

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & a \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2a \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

Simplificando el sistema con el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 3-a \end{array}\right) \overset{F_3 = F_3 - 2F_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3-3a \end{array}\right)$$

La matriz del sistema es siempre de **rango** 2 y el de la ampliada será 3, salvo el caso

$$3 - 3a = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 1$$

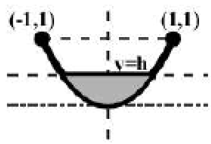
Luego para $a = 1$ las matrices tienen rango 2, **sistema compatible indeterminado**. Para el resto de valores el **sistema es incompatible**.
Para $a = 1$ el sistema, según hemos visto, se reduce a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} y = -2x \\ z = 1 \end{array}\right.$$

$$(x, y, z) = (\lambda, -2\lambda, 1) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

---

2. Se tiene una abrevadero de longitud $6\,m$ y de altura $1\,m$. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.



a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de h se puede expresar como $S(h) = \dfrac{4h\sqrt{h}}{3}$. (1.5 puntos)

b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: Volumen=S×longitud). (1 punto)

---

a) Los puntos de corte de la recta $y = h$ y la parábola serán:

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = h \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad x^2 = h \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{h} \quad \Longrightarrow \quad A(-\sqrt{h}, h) \qquad B(\sqrt{h}, h)$$

luego el área vendrá dada por la integral

$$S(h) \;=\; \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \left(h - x^2\right)\, dx \;=\; \left[hx - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = \frac{4h\sqrt{h}}{3}\, m^2$$

b) El volumen del abrevadero en función de h será

$$V(h) \;=\; 6 \times S(h) \;=\; 8h\sqrt{h}\, m^3$$

El volumen total será $V(1) = 8$. Luego lo que nos piden es calcular h tal que

$$V(h) \;=\; 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 8h\sqrt{h} = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{h^3} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0.63\ m}$$

---

3. Los puntos $A(0,1,0)$ y $B(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) Determina el punto C. (1.5 puntos)
b) Calcula el área del triángulo. (1 punto)

---

a) Calculemos la expresión de un punto C de la recta r y un vector director $\vec{v}_r$

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y,z) = (4,0,1) + \lambda(0,1,0) \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} C\ (4,\lambda,1) \\ \vec{v}_r\ = (0,1,0) \end{array}$$

Se tiene que cumplir que $\overrightarrow{AC}$ y $\vec{v}_r$ son perpendiculares

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}_r = 0 \quad \Longrightarrow \quad (4, \lambda - 1, 1) \cdot (0,1,0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{C(4,1,1)}$$

b) El área del triángulo es

$$\text{Área triángulo} \;=\; \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \;=\; \frac{1}{2}|(-1,0,1) \times (4,0,1)| \;=\; \frac{1}{2}|(0,5,0)| \;=\; \boldsymbol{\frac{5}{2} = 2.5\ u^2}$$

---

4. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

a) Calcula la probabilidad de sacar 5. (1.25 puntos)
b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (1.25 puntos)

Denotamos por N el dado normal y T el trucado, con probabilidades iguales: $p(N) = p(T) = 1/2$.
Los datos que tenemos son $p(5/N) = 1/6$ y $p(5/T) = 4/6$.

a) La probabilidad de sacar 5 está determinada por el dado elegido

$$p(5) = p(5 \cap N) + p(5 \cap T) = p(5/N)p(N) + p(5/T)p(T) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{12} = 0.4167}$$

b) Nos piden la probabilidad $p(T/5)$. Para ello aplicamos la fórmula de Bayes

$$p(T/5) = \frac{p(T \cap 5)}{p(5)} = \frac{p(5/T) \cdot p(T)}{p(5)} = \frac{\frac{4}{6}\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \boldsymbol{\frac{4}{5} = 0.8}$$

OPCIÓN B

1. Dada la matriz A, calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Su rango. (1.5 puntos)
b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)
c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

Aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_3 = F_3 - 2F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Las tres filas son independientes, por tanto, el rango es 3.

b) Como hay 4 columnas y el rango es 3 tiene que existir alguna columna combinación de las otras. Por ejemplo, se observa que **la segunda columna es el triple de la tercera**.

c) Si el rango de la matriz es 3, las 3 filas tienen que ser independientes. Luego **no existe** fila combinación lineal de las restantes.

2. Se tienen $20\,m$ de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible. (2.5 puntos)

Considerando como variables, en metros, x la anchura e y la altura de la valla, el área sombreada es:

$$\text{Área} = x(y - h)$$

con

$$2x + 2y = 20 \iff y = 10 - x \qquad h = \frac{x}{5}$$

Por tanto, la función a maximizar es

$$f(x) = x\left(10 - x - \frac{x}{5}\right) = x\left(10 - \frac{6}{5}x\right)$$

$$f'(x) = 10 - \frac{12}{5}x$$

$$f'(x) = 0 \implies x = \frac{25}{6} \implies y = \frac{35}{6}$$

$$f''(x) = -\frac{12}{5} \qquad f''\left(\frac{25}{6}\right) < 0 \implies \textbf{máximo}$$

La solución es:

$$\boldsymbol{x = \frac{25}{6} = 4.1667\,m} \qquad \boldsymbol{y = \frac{35}{6} = 5.8333\,m}$$

3. Dados los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$ y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida por $s: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas. (1.25 puntos)

b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares. (1.25 puntos)

---

a) Calculemos primero las ecuaciones de la recta r

$$r\ :\ (x,y,z)=A+\lambda\overrightarrow{AB} \quad \lambda\in\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z)=(2,1,0)+\lambda(-1,-1,-1)=(2-\lambda,1-\lambda,-\lambda) \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$r\ :\ \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \end{cases}$$

Para determinar la posición de las rectas se estudia el sistema

$$\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\equiv}{F_3=F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\equiv}{\substack{F_3=F_3-2F_2 \\ F_4=F_4-F_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Se tiene un sistema compatible determinado. Por tanto, las rectas **se cortan en un punto**.

b) Un punto C de la recta s es del tipo

$$s: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ z=-y \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y,z)=(2-\lambda,\lambda,-\lambda)\ \lambda\in\mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad C(2-\lambda,\lambda,-\lambda)$$

Y para que cumpla la condición de perpendicularidad

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda,1-\lambda,\lambda)\cdot(\lambda-1,-\lambda,\lambda-1)=0 \quad \Longrightarrow \quad 3\lambda^2-3\lambda=0$$

salen dos posible valores de C

$$\lambda=0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{C(2,0,0)} \qquad\qquad \lambda=1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{C(1,1,-1)}$$

---

4. En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de fútbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de fútbol y otro 60 % del equipo de baloncesto. Calcula:

a) La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez. (1 punto)

b) La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol. (0.5 puntos)

c) Se elige al azar un habitante de la ciudad y se comprueba que es seguidor del equipo de baloncesto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea también seguidor del equipo de fútbol? (1 punto)

Denotamos por F $(p(F) = 0.6)$ los seguidores del equipo de fútbol y por B $(p(B) = 0.6)$ los del equipo de baloncesto.

a) Si $F \cup B$ es el total, es decir, $p(F \cup B) = 1$, tenemos que $p(F \cap B)$ será

$$p(F \cap B) = p(F) + p(B) - p(F \cup B) = \mathbf{0.2}$$

b) Si denotamos por SF los seguidores solo del equipo de fútbol, se tendrá que

$$p(SF) = p(F) - p(F \cap B) = \mathbf{0.4}$$

pues los conjuntos SF y $F \cap B$ son incompatibles entre sí y entre los dos forman el conjunto F.

c) Nos piden $p(F/B)$

$$p(F/B) = \frac{p(F \cap B)}{p(B)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0.3333}$$

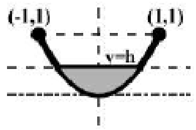
Criterios específicos de corrección

OPCIÓN A

<table>
<tr>
<td>1. Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & a \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2a \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$
</td>
<td>- Bloques de contenidos:
Bloque 2 de Números y álgebra.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 2,5 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2
Estándares del bloque 2: 1.1, 1.2, 2.1, 2.3</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,5 puntos por el planteamiento correcto de la discusión, 0,5 por la discusión correcta de cada caso, 1 punto por la solución del sistema indeterminado.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>2. a) Se tiene una abrevadero de longitud $6\,m$ y de altura $1\,m$. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido. Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de h se puede expresar como $S(h) = \dfrac{4h\sqrt{h}}{3}$.



</td>
<td>- Bloques de contenidos:
Bloque 3 de Análisis.
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1.5 puntos.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 15 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1
Estándares del bloque 3: 3.1, 4.1</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.5 puntos por los puntos de corte, 0.5 por el planteamiento del área, 0.5 por los cálculos.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: Volumen=S$\times$longitud)</td>
<td>- Bloques de contenidos:
Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Calificación máxima otorgada: 1 punto.
- Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %.
- Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s:
Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0.75 puntos por el planteamiento del problema, 0.25 por los cálculos.</td>
</tr>
</table>

3. a) Los puntos $A(0,1,0)$ y $B(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r: \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ z=1 \end{array} \right.$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r. Determina el punto C.	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Geometría. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 15 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 4: 2.1, 2.4, 3.1
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,75 puntos por el planteamiento. 0,75 puntos por la resolución.	
3. b) Calcula el área del triángulo.	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Geometría. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 4: 3.1, 3.3

4. a) Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza. Calcula la probabilidad de sacar 5.	- Bloques de contenidos: Bloque 5 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,25 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12,5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1. Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,5 puntos identificar los sucesos, 0,75 puntos hallar la probabilidad.	
4. b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?	- Bloques de contenidos: Bloque 5 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,25 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12,5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1. Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2, 1.3
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,25 puntos identificar el suceso, 1 punto hallar la probabilidad.	

OPCIÓN B

1. a) Dada la matriz A $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$ Calcula su rango.	- Bloques de contenidos: Bloque 2 de Números y álgebra. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 15 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 2: 2.1
1. b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes.	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Geometría. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 4: 1.1
1. c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes.	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Geometría. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 4: 1.1

2. Se tienen $20\,m$ de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible. 	- Bloques de contenidos: Bloque 3 de Análisis. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 2,5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 25 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 3: 2.2
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,5 puntos por las restricciones, 0,5 puntos por hallar el área, 0,5 puntos por hallar la función a maximizar, 1 punto por la resolución.	

3. a) Dados los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$ y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida por $$s: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$$ Estudia la posición relativa de las rectas.	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Geometría. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,25 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12.5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 4: 2.1, 2.3
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,75 puntos por el planteamiento. 0,5 por la resolución.	
3. b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.	- Bloques de contenidos: Bloque 4 de Geometría. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1,25 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 12,5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2 Estándares del bloque 4: 2.1, 3.1
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,75 puntos por el planteamiento. 0,5 por la resolución.	

4. a) En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de fútbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de fútbol y otro 60 % del equipo de baloncesto. Calcula la probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez.	- Bloques de contenidos: Bloque 5 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1 Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,25 puntos identificar los sucesos, 0,75 puntos hallar la probabilidad.	
4. b) La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol.	- Bloques de contenidos: Bloque 5 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 0.5 puntos. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 5 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1 Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2
4. c) Se elige al azar un habitante de la ciudad y se comprueba que es seguidor del equipo de baloncesto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea también seguidor del equipo de fútbol?	- Bloques de contenidos: Bloque 5 de Estadística y probabilidad. Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. - Calificación máxima otorgada: 1 punto. - Porcentaje asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba: 10 %. - Estándar o estándares de aprendizaje evaluado/s: Estándares del bloque 1: 2.1, 2.4, 4.1, 4.2, 8.1 Estándares del bloque 5: 1.1, 1.2, 1.3
Criterios específicos de corrección de la pregunta: 0,25 puntos identificar el suceso, 0,75 puntos hallar la probabilidad.	

BALEARES - Criterios Generales de Calificación para ambas Convocatorias

El estudiante debe justificar o explicar el porqué de todas las respuestas; los razonamientos, las justificaciones y las explicaciones de las soluciones de los problemas serán los puntos fundamentales de los criterios específicos de corrección. Un problema con resultado correcto puede ser valorado con un cero cuando el corrector considere que el proceso seguido en la resolución no se explica suficientemente, la justificación no se ha dado o es incorrecta. Los problemas que no se hayan resuelto completamente se valorarán de acuerdo con las partes contestadas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el estudiante en la redacción de las respuestas. Los problemas no implicarán, por regla general, la realización de cálculos demasiado largos. A pesar de ello, el estudiante puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que almacenen información o puedan transmitirla. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos y gráficos deben estar siempre correctamente justificados. Los errores de cálculo se penalizarán, especialmente aquellos que lleven a resultados incoherentes o absurdos. Si se pide una gráfica aproximada o sencilla de una función, esto quiere decir un dibujo elemental donde se presenten, en su caso, los extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, límites al infinito y asíntotas. Una gráfica de una función, aunque sea correcta, no se valorará si no está explicada.

C. VALENCIANA – Convocatoria de Junio

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \quad\quad\; y - z = 1-a \\ -x \quad\;\; + z = \quad 5 \\ -ax + y - z = \quad 1 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado (2 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$ (4 *puntos*).
c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado (4 *puntos*).

Solución: a) $a \neq 0$. b) $x = -1,\ y = 2,\ z = 4$. c) El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$. Las soluciones del sistema son $x = \alpha - 5,\ y = \alpha + 1,\ z = \alpha$, para cualquier α real.

Problema A.2. Dados los puntos $A(-1,2,\lambda)$, $B(2,3,5)$ y $C(3,5,3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C (3 *puntos*).
b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$ (4 *puntos*).
c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$ (3 *puntos*).

Solución: a) $\lambda = \frac{5}{2}$, b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, c) $y + z - 8 = 0$.

Problema A.3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$ se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$ (2 *puntos*).
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ (4 *puntos*).
c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ (4 *puntos*).

Solución: a) El dominio es $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$. Asíntotas: $y = 0,\ x = 0,\ x = 1$. b) La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 0), (0, \frac{1}{2})$ y decreciente en los intervalos $\left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, +\infty)$. c) El área pedida es $\int_2^3 f(x)dx = ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.287$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$ (3 *puntos*).
b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$ (4 *puntos*).
c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2 (3 *puntos*).

Solución: a) $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$. b) $\alpha = -20$, $\beta = 21$. c) $\det(2B^{-1}) = 4$.

Problema B.2. Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta r: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta s que corta a la recta r, pasa por el punto A, y es perpendicular a la recta r (4 *puntos*).
b) La distancia del punto A a la recta r (3 *puntos*).
c) La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por $(3,-1,0)$ y es perpendicular a r (3 *puntos*).

Solución: a) $\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-3}{-1}$. b) s corta a r en el punto $P(1,5,4)$. Entonces $d(A,r) = d(A,P) = \sqrt{21}$. c) $\pi: x - 3y - 2z - 6 = 0$. La distancia pedida es $d(B,\pi) = \frac{5\sqrt{14}}{7}$.

Problema B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \leq x \leq 100$ (4 *puntos*).
b) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función (suma de las àreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor (3 *puntos*).
c) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido (3 *puntos*).

Solución: a) $f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2$, $0 \leq x \leq 100$. b) $x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9}\ cm. \approx 56{,}50\ cm.$ c) $x = 0$. En este caso todo el alambre se utiliza para construir el cuadrado.

C. VALENCIANA – Convocatoria de Julio

OPCIÓN A

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$, donde a es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible (5 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$ (3 *puntos*).
c) La solución del sistema cuando $a = 0$ (2 *puntos*).

Solución: a) $a \neq 2$. b) $x = \alpha,\ y = 1 - \alpha,\ z = 0$. c) $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Problema A.2. Se tienen el plano $\pi : x - y + z - 3 = 0$, la recta $s : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1,1,1)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π (4 *puntos*).
b) El plano que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s (3 *puntos*).
c) Discute si el punto $(3,2,1)$ está en la recta paralela a s que pasa por $(5,3,1)$ (3 *puntos*).

Solución: a) $x = 1 + \alpha,\ y = 1, z = 1 - \alpha$. b) $-x + 2y + 3z = 4$. c) La recta que pasa por $(3,2,1)$ y $(5,3,1)$ es paralela a s.

Problema A.3 Consideramos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx\cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$ (2 puntos).
b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. (4 puntos).
c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$ (4 puntos).

Solución: a) $a + b - c = 22$. b) $f'(1) = 0$ implica $3a + 2b - c = 0$.
c) Una primitiva es $\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{x\sin(\pi x)}{\pi}$. La integral definida vale $-{}^{2}/_{\pi^2} \approx -0.202$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$ (4 *puntos*).

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ y $BA \neq B$ (2 *puntos*).

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (4 *puntos*).

Solución: a) $A^2 = (AB)A = A(BA) = AB = A$. Análogamente cambiando los papeles de A y B. b) La solución es $a = 0,\ b = 1$. c) El primer determinante vale 6 y el segundo vale 3.

Problema B.2. Dada la recta r: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$ se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r (3 *puntos*).
b) La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos $(5,0,1)$ y $(4,1,0)$ (4 *puntos*).
c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior (3 *puntos*).

Solución: a) $x = \alpha, y = 3 - \alpha, z = -3\alpha + 4$. b) $\pi: x + y = 5$. c) $d(r, \pi) = \sqrt{2}$.

Problema B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo *R* de $600\ cm^2$ de área de manera que:
Por encima y por debajo de *R* deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de *R* deben tener una anchura de 2 cm cada uno.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la cartulina en función de la base *x* del rectángulo *R* (3 puntos).
b) El valor de *x* para el cual el área de la cartulina es mínima (5 puntos).
c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima (2 puntos).

Solución: a) $f(x) = 624 + 6\left(x + \frac{400}{x}\right)$. b) El área es mínima cuando $x = 20\ cm$. c) La cartulina de área mínima mide $24\ cm$ de ancho por $36\ cm$ de alto

C. Y LA MANCHA – Convocatoria de Junio

Los criterios generales de corrección son los siguientes:

1. En cada uno de los ejercicios o en los distintos apartados que aparezcan en cada ejercicio, se indicará la calificación máxima que le corresponda.

2. Si un estudiante desarrolla ejercicios de las dos opciones A y B, solo serán calificados los ejercicios de la primera opción que aparezca desarrollada en la prueba. Asimismo, si dentro de la opción elegida desarrolla los cinco ejercicios propuestos, solo serán calificados los cuatro primeros desarrollados por el estudiante.

3. En la valoración de los ejercicios se tendrá en cuenta:
   - El planteamiento, el desarrollo y razonamientos empleados.
   - La claridad en la exposición, las explicaciones adicionales y la presentación del ejercicio.
   - La corrección en las operaciones.
   - La interpretación de los resultados cuando sea necesario.
   - Los errores conceptuales y los errores operacionales.
   - La corrección y precisión de los gráficos incluidos.

4. El tribunal corrector ponderará, en cada ejercicio, la valoración que se asigne a cada una de las consideraciones del punto anterior.

5. En cualquier caso, nunca se calificará un ejercicio atendiendo exclusivamente al resultado final.

PROPUESTA A

1A. Apartado a) Enunciado del teorema de Bolzano. (0,5 puntos)
Aplicación del teorema a la función dada. (1 punto)
Apartado b) Calcular razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX. (1 punt

2A. Apartado a) Cálculo razonado de la integral. (1,25 puntos)
Apartado b) Cálculo razonado de la integral. (1,25 puntos)

3A. Apartado a) Clasificación correcta del sistema. (1,5 puntos)
Apartado b) Solución correcta y razonada del sistema. (1 punto)

4A. Apartado a) Cálculo de la distancia del punto al plano. (1 punto)
Apartado b) Cálculo razonado de las ecuaciones de los planos. (1,5 puntos)

5A. Apartado a1) Plantear el problema. (0,25 puntos)
Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)
Apartado a2) Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)
Apartado b1) Distribución binomial. (0,25 puntos)
Cálculo de la media y de la desviación típica. (0,5 puntos)
Apartado b2) Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)

PROPUESTA B

1B. Apartado a) Comprobar que se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle. (0,75 puntos)
Apartado b) Cálculo razonado de un punto del intervalo. (0,75 puntos)
Apartado c) Calculo razonado de los puntos de la gráfica. (1 punto)

2B. Cálculo razonado del área del recinto cerrado limitado por las funciones f(x) y g(x). (2,5 puntos)

3B. Apartado a) Encontrar los valores del parámetro “a” para la matriz tenga inversa. (1 punto)
Apartado b) Cálculo razonado de la inversa de la matriz y comprobación del resultado. (1 punto)
Apartado c) Calculo razonado del valor de los determinantes. (0,5 puntos)

4B. Apartado a) Determinar el valor del parámetro solicitado. (1 punto)
Apartado b) Razonar la respuesta de dependencia lineal. (0,5 puntos)
Apartado c) Encontrar razonadamente la ecuación de la recta en su forma implícita. (1 punto)

5B. Apartado a1) Plantear el problema. (0,25 puntos)
Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)
Apartado a2) Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)
Apartado b1) Cálculo razonado del número de opositores que han superado el 5. (0,75 puntos)
Apartado b2) Cálculo razonado de la nota de corte. (0,5 puntos)

C. Y LA MANCHA – Convocatoria de Julio

Los criterios generales de corrección son los siguientes:

1. En cada uno de los ejercicios o en los distintos apartados que aparezcan en cada ejercicio, se indicará la calificación máxima que le corresponda.

2. Si un estudiante desarrolla ejercicios de las dos opciones A y B, solo serán calificados los ejercicios de la primera opción que aparezca desarrollada en la prueba. Asimismo, si dentro de la opción elegida desarrolla los cinco ejercicios propuestos, solo serán calificados los cuatro primeros desarrollados por el estudiante.

3. En la valoración de los ejercicios se tendrá en cuenta:
   - El planteamiento, el desarrollo y razonamientos empleados.
   - La claridad en la exposición, las explicaciones adicionales y la presentación del ejercicio.
   - La corrección en las operaciones.
   - La interpretación de los resultados cuando sea necesario.
   - Los errores conceptuales y los errores operacionales.
   - La corrección y precisión de los gráficos incluidos.

4. El tribunal corrector ponderará, en cada ejercicio, la valoración que se asigne a cada una de las consideraciones del punto anterior.

5. En cualquier caso, nunca se calificará un ejercicio atendiendo exclusivamente al resultado final.

PROPUESTA A

1A. Apartado a) Determinar los valores de "a" y "b" del modelo de concentración. (1,5 puntos)
Apartado b) Calcular el valor al que tiende la concentración del fármaco a largo plazo. (1 punto)

2A. Apartado a) Cálculo razonado de los parámetros para que la función sea derivable. (1,5 puntos)
Apartado b) Cálculo razonado del parámetro solicitado. (1 punto)

3A. Apartado a) Clasificación correcta del sistema. (1,5 puntos)
Apartado b) Solución correcta y razonada del sistema. (1 punto)

4A. Apartado a) Cálculo de la distancia del punto a la recta. (0,75 puntos)
Apartado b) Encontrar las coordenadas del punto solicitado. (0,75 puntos)
Apartado c) Encontrar razonadamente la ecuación general del plano. (1 punto)

5A. Apartado a1) Plantear el problema. (0,25 puntos)
Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)
Apartado a2) Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)
Apartado b1) Distribución binomial. (0,25 puntos)
Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)
Apartado b2) Distribución binomial. (0,25 puntos)
Cálculo razonado de la probabilidad. (0,25 puntos)

PROPUESTA B

1B. Apartado a) Determinar razonadamente las coordenadas del punto solicitado. (1,5 puntos)
Apartado b) Encontrar razonadamente la ecuación de la recta normal. (1 punto)

2B. Apartado a) Cálculo razonado de la integral. (1,25 puntos)
Apartado b) Cálculo razonado de la integral. (1,25 puntos)

3B. Apartado a) Encontrar los valores de los parámetros "a" y "b". (1,25 puntos)
Apartado b) Cálculo razonado de las matrices X que verifican la condición dada. (1,25 puntos)

4B. Apartado a) Cálculo razonado de las coordenadas del punto solicitado. (1,5 puntos)
Apartado b) Encontrar razonadamente la ecuación de la recta en su forma paramétrica. (1 punto)

5B. Apartado a1) Plantear el problema. (0,25 puntos)
Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)
Apartado a2) Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)
Apartado b1) Distribución normal. (0,25 puntos)
Cálculo razonado de la probabilidad. (0,5 puntos)
Apartado b2) Cálculo razonado de la capacidad mínima de los vasos. (0,5 puntos)

C. Y LEÓN – Modelo 0 para ambas Convocatorias

CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN DE LA PRUEBA

Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos:

- Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver.

- Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. La no justificación, ausencia de explicaciones o explicaciones incorrectas serán penalizadas.

- Claridad y coherencia en la exposición. Los errores de notación sólo se tendrán en cuenta si son reiterados y se penalizarán hasta en un 20% de la calificación máxima atribuida al problema o apartado.

- Precisión en los cálculos y en las notaciones. Los errores de cálculo en razonamientos esencialmente correctos se penalizarán disminuyendo hasta en el 40% la valoración del apartado correspondiente.

- Se valorará positivamente la coherencia, de modo que si un alumno arrastra un error sin entrar en contradicciones, este error no se tendrá en cuenta salvo como se recoge en los anteriores criterios generales y en la cuestión en que se comete el error.

- Deberán figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados por el alumno.

- Cada ejercicio se valorará de acuerdo a lo estipulado en los enunciados del examen, con la distribución más abajo indicada.

- Muchos problemas de Matemáticas admiten varios modos de resolución, pudiendo ser alguno de ellos extraño o no habitual. Cada corrector valorará estas posibilidades, atendiendo a las especificaciones del problema, sin necesidad de imponer un procedimiento concreto.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN ESPECÍFICOS

OPCIÓN A

E1.- **a)** Hasta 1,2 puntos, que corresponden a un máximo de 0,3 puntos por los cálculos previos y hasta 0,3 más por la correcta discusión de cada uno de los 3 casos posibles.
b) Hasta 0,8 puntos.

E2.- **a)** Hasta 0,8 puntos.
b) Hasta 0,6 puntos por calcular cada una de las dos cosas que se piden.

E3.- Hasta 0,5 puntos por los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hasta otros 0,5 puntos por los extremos relativos. Hasta un 1 más por determinar el número de puntos en los que la función se anula.

E4.- **a)** Hasta 0,8 puntos.
b) Hasta 1,2 puntos.

E5.- **a)** Hasta 0,5 puntos.
b) Hasta 0,5 puntos.
c) Hasta 1 punto.

OPCIÓN B

E1.- Hasta un punto por los cálculos con matrices y hasta 1 punto más por resolver correctamente las ecuaciones obtenidas.

E2.- **a)** Hasta 0,8 puntos.
b) Hasta 0,6 puntos por calcular cada una de las dos cosas que se piden.

E3.- Hasta 0,4 puntos por el dominio de definición y el cálculo de las derivadas. Hasta 0,4 puntos más por la explicación sobre las asíntotas. 0,4 puntos más por los intervalos de crecimiento y decrecimiento y el extremo relativo. Lo mismo por los intervalos de concavidad y convexidad y el punto de inflexión. Los últimos 0,4 puntos serían por la gráfica.

E4.- a) Hasta 1 punto.
b) Hasta 1 punto.

E5.- Hasta 2 puntos.

CANARIAS – Convocatoria de Junio

<u>Nota sobre la puntuación de las preguntas:</u> Los puntos asignados a las distintas preguntas son orientativos. En muchos casos, las preguntas pueden contestarse de varias formas distintas y el corrector debe utilizar la puntuación asignada en las soluciones que aquí se presentan, como guía para la asignación de la puntuación definitiva.

OPCIÓN A

1.- Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble de la longitud de otro y tal que, al construir con cada uno de los tres trozos de hilo un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.

Criterios

Plantear la ecuación del perímetro **(0.25 puntos)**

Plantear la función objetivo del área a optimizar **(0,75 puntos)**

Hallar la primera derivada de la función objetivo, igualar a 0 y despejar el valor del punto crítico x **(1 punto)**

Hallar la segunda derivada comprobar que existe un mínimo **(0,25 puntos)**

Calcular la longitud de los tres trozos **(0,25 puntos)**

2.- Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+ky+kz=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{array}\right\}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k.

b) Resolver el sistema para $k = 1$

Criterios

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k

Hallar la matriz de coeficientes y matriz ampliada **(0.25 ptos)**

Calcular el determinante de la matriz de coeficientes M, **(0.25 ptos)**

Calcular el valor del parámetro k que anula el determinante **(0.25 ptos)**

Discutir el sistema según los valores del parámetro k **(0.5 ptos)**

b) Resolver el sistema para $k = 1$ **(1 pto)**

Obtener la solución en función de un parámetro **(0.25 ptos)**

3.- a) Halle la ecuación del plano π que pasa por los puntos A (-1, 5, 0) y B (0,1,1) y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2y-3z-1=0 \end{cases}$

b) Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$

Criterios

a) Hallar el vector director de r **(0.75 ptos)**

Hallar el vector $\overline{AB}$ **(0.25 ptos)**

Hallar la ecuación del plano π **(0.5 ptos)**

b) Hallar el punto medio del segmento $\overline{AB}$ **(0.25 ptos)**

Hallar la ecuación de la recta paralela a r y que pasa por el punto medio M **(0.75 ptos)**

4.- Se sabe que el 30% de todos los fallos en las tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador?

Criterios

a) Definimos la variable X:" número de fallos por error del operador en 20 fallos en plantas químicas"

"éxito": que ocurra un fallo por error del operador, probabilidad de un éxito p = 0.3, de un fracaso $q = 0.7$

X sigue una distribución binomial $X \sim B(n,p) = B(20,0.3)$ **(0.25 ptos)**

a) Plantear la fórmula, sustituir, obtener el resultado **(1 pto)**

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallas de 20 encontradas en una planta química se deban a errores del operador?

Plantear la fórmula, sustituir, obtener el resultado **(1.25 ptos)**

OPCIÓN B

1.- Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $y = 3x + \dfrac{3x}{x-1}$

Criterios

Comprobar si tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y hallarla **(0,5 puntos)**

Comprobar que no tiene asíntotas horizontales **(0,5 puntos)**

Comprobar que tiene asíntotas oblicuas $y = mx + n$ y hallarlas **(0,5 puntos)**

Calcular los extremos **(0,5 puntos)**

Evaluar la segunda derivada y hallar máximo y mínimo **(0,5 puntos)**

2.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores del parámetro m para los cuales la matriz A tiene inversa

b) Para $m = 1$, calcular la matriz inversa A^{-1}

Criterios

a) Calcular los valores de m que anulan el determinante de A **(0.5 ptos)**

Entonces A tendrá inversa, es decir, será regular: $\forall\, \boldsymbol{m} \in \mathbb{R} - \{\mathbf{2}, -\mathbf{1}\}$. **(0.5 ptos)**

b)Sustituir para $m = 1$ y calcular matriz adjunta de A **(1 pto)**

Hallar la matriz inversa A^{-1} **(0.5 ptos)**

3.- Dados los planos: $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$

a) Comprobar que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica.

b) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2

Criterios

a) Hallar la ecuación general del plano π_2 **(0.25 ptos)**

Discutir la posición relativa de los planos π_1 y π_2 **(0.25 ptos)**

Concluir que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. **(0.25 ptos)**

Hallar un punto de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 **(0.5 ptos)**

Hallar el vector director de la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 **(0.25 ptos)**

Hallar la ecuación paramétrica de la recta de intersección de los planos π_1 y π_2

(0.25 ptos)

b) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen $O(0,0,0)$ y es perpendicular a π_1 y π_2 **(0.75 ptos)**

4.- El 75% de los alumnos de un instituto acude a clase en algún tipo de transporte y el resto acude andando. Por otra parte, llega puntual a clase el 60% de los que utilizan transporte y el 90% de los que acuden andando. Se pide:

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase?

b) Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido andando?

Criterios

Definir los sucesos y construir el diagrama de árbol. **(0.25 ptos)**

a) Calcular la probabilidad de que un alumno haya llegado puntual a clases mediante el Teorema de la Probabilidad Total **(0.75 ptos)**

Obtener el valor de la probabilidad de que un alumno no haya llegado puntual a clases

(0.25 ptos)

b) Aplicar el Teorema de Bayes, y calcular la probabilidad de que un alumno que haya llegado puntual, haya acudido andando. **(1.25 ptos)**

CANARIAS – Convocatoria de Julio

Nota sobre la puntuación de las preguntas: Los puntos asignados a las distintas preguntas son orientativos. En muchos casos, las preguntas pueden contestarse de varias formas distintas y el corrector debe utilizar la puntuación asignada en las soluciones que aquí se presentan, como guía para la asignación de la puntuación definitiva.

OPCIÓN A

1.- Tenemos que hacer dos cuadrados de tela y cada cuadrado con una tela diferente. Las dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm?

Criterios

Plantear la función objetivo **(0.5 ptos)**

Plantear la ecuación de la suma de los perímetros **(0.5 ptos)**

Obtener la función objetivo en función de un solo parámetro

$C(x,y)=2x^2+3y^2 \rightarrow C(x)=2x^2+3(25-x)^2=5x^2+150x+1875$ **(0.5 ptos)**

Hallar la primera derivada, igualar a 0, despejar x y calcular y **(0.5 ptos)**

Comprobar existencia de un mínimo mediante la segunda derivada **(0.5 ptos)**

2.- Determinar una matriz X que verifique la ecuación $AB-CX=I$

siendo las matrices,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Criterios

Despejar la matriz X **(0.5 ptos)**

Hallar la matriz inversa C^{-1} **(0.75 ptos)**

Hallar la matriz AB **(0.5 ptos)**

Hacer las operaciones y obtener X **(0.75 ptos)**

3.- Estudiar la posición relativa de los planos

$\alpha : 2x + 3y - 5z + 7 = 0$

$\beta : 3x + 2y + 3z - 1 = 0$

$\gamma : 7x + 8y - 7z + 13 = 0$

Criterios

Discutir el rango de las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & -7 \end{pmatrix} \quad \det C = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow rgC = 2$$ **(1 pto)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 8 & -7 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rgA = 2$$ **(1 pto)**

$rgC = rgA = 2$, los tres planos se cortan en una recta **(0.5 ptos)**

4.- Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30%, 20% y 50% de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben, que son defectuosos el 5% de los motores producidos por la fábrica A, el 20% de los producidos por la fábrica B y el 10% de los que se fabrican en la C.

a) Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C?

Criterios

Definir los sucesos y construir el diagrama de árbol **(0.25 ptos)**

a) Calcular la probabilidad de que un motor elegido al azar esté defectuoso (Probabilidad total) **(1 pto)**

b) Calcular probabilidad de que el motor defectuoso haya sido producido por la fábrica C (Teorema de Bayes) **(1.25 ptos)**

OPCIÓN B

1.- Determinar los valores de a y b para que la función $f(x) = a\sqrt{3x+3} + b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto (2,8)

Criterios

Evaluar la función en el punto y plantear la condición de la segunda derivada nula en el punto de inflexión **(0.5 ptos)**

Hallar la primera y la segunda derivada **(1 pto)**

Evaluar y aplicar el criterio de segunda derivada nula **(0.5 ptos)**

Planteamos y resolver el sistema de ecuaciones y obtener los valores de los parámetros a y b **(0. 5 ptos)**

2.- Considerar el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+ky+z=2 \\ x+y+kz=k-1 \end{array}\right\}$

a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k

b) Resolver el sistema para $k = 1$

Criterios

a) Hallar la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema **(0.25 ptos)**

Hallar los valores del parámetro k que anulan el determinante de la matriz de coeficientes **(0.25 ptos)**

Discusión según los valores del parámetro k (Teorema de Rouche Frobenius) **(1 pto)**

b) Hallar la solución del sistema compatible indeterminado **(1 pto)**

3.- Dadas las rectas $r_1 \equiv x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$, se pide

a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias.

b) Hallar la ecuación del plano que determinan.

Criterios

Hallar los vectores directores y puntos A y B de las rectas r_1 y r_2 respectivamente

(0.5 ptos)

Hallar el vector vector $\overrightarrow{AB}$ **(0.25 ptos)**

Comprobar que r_1 y r_2 son coplanarias, aplicando el concepto de independencia lineal de los vectores directores y el vector $\overrightarrow{AB}$ **(0.75 ptos)**

b) Hallar la ecuación del plano que determinan las rectas r_1 y r_2 **(1 pto)**

4.- El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas, estuvieran viendo el concurso de televisión:

a) Tres o menos personas.

b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado.

Criterios

Definir la variable binomial X, número de ensayos, éxito, probabilidad de un éxito

(0.5 ptos)

a) Aplicar y sustituir correctamente en la fórmula binomial y calcular $P(X \leq 3)$ **(1 pto)**

b Aplicar y sustituir correctamente en la fórmula binomial y calcular $P(X = 0)$ **(1 pto)**

CANTABRIA – Convocatoria de Junio

Para la calificación de los ejercicios, se tendrán en cuenta los objetivos generales de la prueba. Se trata de evaluar unos conocimientos y habilidades, pero también de comprobar una madurez y una cierta capacidad para la expresión de esos conocimientos dentro del contexto de un método científico o técnico. Es decir, se valorará no sólo la resolución correcta de cada pregunta, sino también la presentación de esa resolución: el planteamiento del problema, la exposición del método utilizado, el dominio de las técnicas fundamentales de cálculo, la corrección de los cálculos, y la interpretación de los resultados. Se tendrá en cuenta también la correcta utilización del lenguaje matemático, y el encadenamiento lógico de los razonamientos. Los estudiantes deben desarrollar todos estos aspectos en el ejercicio.

Al margen de los enunciados concretos de cada examen, hay unos criterios generales de calificación, que reflejan los objetivos de la asignatura:

- Se valorará positivamente el planteamiento de las respuestas o la claridad en la exposición del método utilizado. En los criterios específicos de calificación de cada examen, se distinguirá, siempre que sea posible, la puntuación asignada al planteamiento y la asignada a la resolución o cálculo propiamente dicho.
- Puede haber muchos métodos de resolución de un problema; cualquiera de ellos se considera igualmente válido.
- Las respuestas incompletas se valorarán proporcionalmente a la puntuación especificada para cada una.
- Errores de cálculo: un error de cálculo es un error casual, que no pone en duda los conocimientos del estudiante sobre las técnicas de cálculo fundamentales de la materia ni la capacidad de éste para manipular correctamente las expresiones y operaciones matemáticas elementales. Hay que tener en cuenta que el estudiante, en este nivel, debe manejar con soltura las expresiones matemáticas elementales y que uno de los objetivos de la asignatura es el dominio de una serie de técnicas de cálculo. Estos conocimientos deben ser reflejados en los ejercicios. Un error al copiar un enunciado o error de cálculo que dé lugar a un problema de características y grado de dificultad similar al propuesto en el examen, no se tendrá en cuenta. Sin embargo, si algún error de este tipo da lugar a un problema de dificultad claramente menor, el ejercicio se considerará incorrecto. Hay errores fácilmente observables, bien por una simple comprobación o bien porque conducen a resultados carentes de sentido. El estudiante debe ser capaz de detectarlos. La s respuestas en las que se observen graves o frecuentes deficiencias en el manejo de las expresiones y operaciones matemáticas elementales, serán calificadas como incorrectas cuando sean puramente de cálculo. En otro caso, se valorará solamente el planteamiento.

Criterios específicos

<table>
<tr><th colspan="2">EJERCICIO 1</th></tr>
<tr>
<td>OPCIÓN DE EXAMEN N.º 1
1) 2 puntos
• Planteamiento del sistema: 0,75 puntos
• Discusión del sistema resultante: 0,75 puntos
• Cálculo de las soluciones: 0,5 puntos
2) 1,25 puntos:
• Determinación de los casos a estudiar: 0,75
• Caso z=0: 0,25
• Caso z=-1: 0,25</td>
<td>OPCIÓN DE EXAMEN N.º 2
1) 2 puntos:
• Determinación de los casos a discutir: 0,75
• Estudio del caso general: 0,25
• Estudio del caso b=2: 0,5
• Estudio del caso b=-2: 0,5
2) 1,25 puntos
• Resolución del caso b=-2: 1,25</td>
</tr>
<tr><th colspan="2">EJERCICIO 2</th></tr>
<tr>
<td>OPCIÓN DE EXAMEN N.º 1
1) 2,5 puntos:
• Determinación de las raíces del denominador: 0,5 puntos
• Descomposición en fracciones simples: 1 punto
• Cálculo de las primitivas: 1 punto
2) 1 punto:
• Estudio del signo en el intervalo: 0,5
• Cálculo del área: 0,5</td>
<td>OPCIÓN DE EXAMEN N.º 2
1) 0,5 puntos
2) 0,5 puntos
3) 2,5 puntos
• Cálculo de la función derivada: 0,75
• Cálculo de los puntos críticos y su clasificación: 1 punto
• Determinación de r y h: 0,75 puntos</td>
</tr>
<tr><th colspan="2">EJERCICIO 3</th></tr>
<tr>
<td>OPCIÓN DE EXAMEN N.º 1
1) 1 punto. (planteamiento 0,75).
2) 1 punto (planteamiento: 0,75).
3) 1 punto (planteamiento: 0,75).
4) 0,25 puntos</td>
<td>OPCIÓN DE EXAMEN N.º 2
1) 1,25 puntos (planteamiento 1)
2) 1,5 puntos (planteamiento 1)
3) 0,5 puntos (planteamiento: 0,25)</td>
</tr>
</table>

CANTABRIA – Convocatoria de Septiembre

Para la evaluación de los ejercicios, se tendrán en cuenta los objetivos generales de la prueba. Se trata de evaluar unos conocimientos y habilidades, pero también de comprobar una madurez y una cierta capacidad para la expresión de esos conocimientos dentro del contexto de un método científico o técnico. Es decir, se valorará no sólo la resolución correcta de cada pregunta, sino también la presentación de esa resolución: el planteamiento del problema, la exposición del método utilizado, el dominio de las técnicas fundamentales de cálculo, la corrección de los cálculos, y la interpretación de los resultados. Se tendrá en cuenta también la correcta utilización del lenguaje matemático, y el encadenamiento lógico de los razonamientos. Los estudiantes deben desarrollar todos estos aspectos en el ejercicio.

Al margen de los enunciados concretos de cada examen, hay unos criterios generales de evaluación, que reflejan los objetivos de la asignatura:

- Se valorará positivamente el planteamiento de las respuestas o la claridad en la exposición del método utilizado. En los criterios específicos de corrección de cada examen, se distinguirá, siempre que sea posible, la puntuación asignada al planteamiento y la asignada a la resolución o cálculo propiamente dicho.
- Puede haber muchos métodos de resolución de un problema; cualquiera de ellos se considera igualmente válido.
- Las respuestas incompletas se valorarán proporcionalmente a la puntuación especificada para cada una.
- Errores de cálculo: un error de cálculo es un error casual, que no pone en duda los conocimientos del estudiante sobre las técnicas de cálculo fundamentales de la materia ni la capacidad de éste para manipular correctamente las expresiones y operaciones matemáticas elementales. Hay que tener en cuenta que el estudiante, en este nivel, debe manejar con soltura las expresiones matemáticas elementales y que uno de los objetivos de la asignatura es el dominio de una serie de técnicas de cálculo. Estos conocimientos deben ser reflejados en los ejercicios. Un error al copiar un enunciado o error de cálculo que dé lugar a un problema de características y grado de dificultad similar al propuesto en el examen, no se tendrá en cuenta. Sin embargo, si algún error de este tipo da lugar a un problema de dificultad claramente menor, el ejercicio se considerará incorrecto. Hay errores fácilmente observables, bien por una simple comprobación o bien porque conducen a resultados carentes de sentido. El estudiante debe ser capaz de detectarlos. La s respuestas en las que se observen graves o frecuentes deficiencias en el manejo de las expresiones y operaciones matemáticas elementales, serán calificadas como incorrectas cuando sean puramente de cálculo. En otro caso, se valorará solamente el planteamiento.

Criterios específicos

EJERCICIO 1	
OPCIÓN DE EXAMEN N.º 1 1) 1 punto Cálculo de las raíces del determinante: 0,5 Discusión de casos: 0,5 2) 2,25 puntos • 0,75 cada variable	**OPCIÓN DE EXAMEN N.º 2** 1) 1,25 puntos: • Planteamiento del sistema a resolver: 0,75 • Resolución: 0,5 2) 1,5 puntos • Determinar el valor de x: 1 • Determinar si existe inversa: 0,5 3) 0,5 puntos
EJERCICIO 2	
OPCIÓN DE EXAMEN N.º 1 1) 2,5 puntos (planteamiento: 1 punto) 2) 1 punto: • Cálculo del valor d: 0,5 • Cálculo de la asíntota: 0,5	**OPCIÓN DE EXAMEN N.º 2** 1) 1 punto • planteamiento: 0,1 • cada valor: 0,45 2) 1,5 puntos • Cada límite lateral: 0,5 • Clasificar la singularidad: 0,5 3) 1 punto • Estudio de la función en el intervalo: 0,4 • Primitiva: 0,2 • Área: 0,4
EJERCICIO 3	
OPCIÓN DE EXAMEN N.º 1 1) 1 punto. (planteamiento: 0,5). 2) 1 punto (planteamiento: 0,5). 3) 1,25 puntos (planteamiento: 0,5).	**OPCIÓN DE EXAMEN N.º 2** 1) 1,75 puntos (planteamiento: 0,75) 2) 1,5 puntos (planteamiento: 0,75)

CATALUÑA – Criterios Generales de Calificación para ambas Convocatorias

Tienes que explicar el porqué de todas las respuestas, de modo que muestres el razonamiento que te ha llevado al resultado. Una cuestión con un resultado correcto puede valorarse con un 0 si no explicas suficientemente el proceso que has seguido en su resolución. Las cuestiones que no estén resueltas completamente se valorarán en función de las partes realizadas.

En las preguntas de carácter conceptual se valorará si tienes claros los conceptos, aunque hayas cometido errores en la exposición. En ningún caso el/la corrector/a pone el énfasis en el rigor formal de las respuestas.

Las cuestiones no exigen, por regla general, la realización de cálculos demasiado largos. Por eso es necesario que te esfuerces en efectuar correctamente los cálculos. Los errores de cálculo se tienen en cuenta en la puntuación total, aunque con una importancia relativa.

Si se pide un esquema sencillo del gráfico de una función tienes que hacer un dibujo elemental con los máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, límites al infinito y asíntotas. No es necesario que sea un dibujo a escala. Como muchas calculadoras dibujan gráficos de funciones deberás explicar los razonamientos; por ejemplo, que la función es creciente en cierto intervalo, ya que su derivada es positiva. Un gráfico de una función, aunque sea correcto, no tiene ningún valor si no se ha razonado.

Se valorarán negativamente las incorrecciones en la notación matemática de las respuestas. Por ejemplo, la confusión entre una matriz y un determinante, la no indicación o la mala colocación de un signo de igual, la no utilización de paréntesis en productos con factores negativos, etc.

EXTREMADURA – Modelo 0 para ambas Convocatorias

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN

Estructura de la prueba - Puntuación

La prueba constará de dos opciones, y el alumno podrá elegir libremente una de ellas.

Cada opción contendrá **CUATRO** ejercicios y tendrá la siguiente estructura: **UN** ejercicio será del bloque **"Números y Álgebra"** y se valorará hasta un máximo de **2,5 puntos**; **UN** ejercicio será del bloque **"Geometría"** y se valorará hasta un máximo de **2,5 puntos**; **UN** ejercicio será del bloque **"Análisis"** y se valorará hasta un máximo de **3,5 puntos**; **UN** ejercicio será del bloque **"Estadística y Probabilidad"** y se valorará hasta un máximo de **1,5 puntos**.

Cuando un ejercicio de un bloque contenga más de un apartado, la puntuación se especifica individualmente en cada uno de los apartados.

En el caso en que un alumno mezcle respuestas a ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida por ese alumno la opción que aparezca en primer lugar en dichas respuestas.

Criterios de corrección

- Son criterios esenciales de valoración de un ejercicio el planteamiento razonado y la resolución correcta del mismo.
- Una presentación clara y ordenada y el uso correcto de la notación serán valoradas positivamente.
- No se descartará ningún método que conduzca a la resolución de un ejercicio, si bien no todos deben valorarse por igual.
- Los errores de cálculo tendrán mayor o menor importancia según se deban a deficiencias conceptuales o a fallos mecánicos.
- Se valorará positivamente la coherencia, de modo que si un alumno arrastra un error sin entrar en contradicciones, este error no se tendrá en cuenta en la calificación de los desarrollos posteriores que puedan verse afectados, siempre que resulten ser de una complejidad equivalente.
- En los ejercicios de naturaleza práctica se concederá especial importancia al planteamiento correcto del problema, cuyo peso en el total de la nota nunca será inferior al 30%.
- Las respuestas correctas pero sin justificación, cuando explícita o implícitamente se exija una justificación razonada, se calificarán a lo sumo con el 40% de la puntuación máxima que corresponda.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

1. Problema 1. (2 puntos)

   a) Planteamiento del problema y estudio en función de a: de 0 a 1,5 puntos.

   b) Resolución correcta por cualquier método: de 0 a 0,5 puntos.

2. Problema 2. (2 puntos). Planteamiento del problema: de 0 a 1 punto.
   Resolución: de 0 a 1 punto.

3. Problema 3. (2 puntos)

   a) Determinación de las constantes a y b: de 0 a 1 punto.

   b) Planteamiento y resolución de la recta de 0 a 1 punto.

4. Problema 4. (2 puntos)

   a) Representación: de 0 a 0,5 puntos.

   b) Planteamiento de la integral adecuada y resolución: de 0 a 1,5 puntos.

5. Problema 5. (2 puntos)

   a) Planteamiento y resolución: de 0 a 1 punto.

   b) Planteamiento y resolución: de 0 a 1 punto.

OPCIÓN B

1. Problema 1. Planteamiento del problema y estudio en función de a: de 0 a 2 puntos.

2. Problema 2. (2 puntos). Planteamiento del problema: de 0 a 1 punto.
   Resolución: de 0 a 1 punto.

3. Problema 3. (2 puntos) Uso de los métodos adecuados y resolución: de 0 a 2 puntos.

4. Problema 4. (2 puntos)

   a) Planteamiento y resolución: de 0 a 1,5 puntos (0,5 por cada sub-apartado)

   b) Representación: de 0 a 0,5 puntos.

5. Problema 5. (2 puntos) Planteamiento del problema: de 0 a 1 punto.
   Uso de la tabla y resolución: de 0 a 1 punto.

GALICIA – Convocatoria de Junio

OPCIÓN A

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1,5 puntos

- 0,75 puntos pola determinación do máximo relativo.
- 0,75 puntos pola determinación dos intervalos de crecemento e decrecemento.

b) 1,5puntos

- 0,75 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,75 puntos pola formulación e cálculo da área coma unha integral definida.

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación de λ.
- 0,5 puntos pola ecuación do plano.

b) 1 punto

- 0,5 puntos pola posición relativa do plano e a recta.
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

c) 1 punto

4) a) 0,75 puntos

b) 0,5 puntos

c) 0,75 puntos

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola continuidade.
- 0,5 puntos pola derivabilidade.

b) 1 punto

c) 1 punto

3) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $|M| = \begin{vmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - m - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -m-4 & m \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{m}{4} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{m = -1}$$

$$\frac{1}{4}M = \begin{pmatrix} \frac{m}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Outra forma de resolvelo:

$$M^{-1} = \frac{1}{4}M \Leftrightarrow \frac{1}{4}M \cdot M = I \Leftrightarrow M^2 = 4I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m^2+m+4 & m^2+5m+4 \\ m+1 & m+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

E polo tanto

$$\boxed{m = -1}$$

b) $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X \Leftrightarrow (B^t \cdot A - I)X = -C^t$

$$B^t \cdot A - I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|B^t \cdot A - I| = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists (B^t \cdot A - I)^{-1}$

$$(B^t \cdot A - I)^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Entón:

$$X = -(B^t \cdot A - I)^{-1} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

Outra forma:

$$(B^t \cdot A - I)X = -C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -4x + 3z = -4 \\ -y = 2 \\ -x = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} z = -4/3 \\ y = -2 \\ x = 0 \end{Bmatrix}$$

E así: $X = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$

Exercicio 2:

a) $x^2 = 0 \Leftrightarrow \ x = 0$. Polo tanto, $Dom(f) = \ \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{2x - x^2}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 - 3x^2(2-x)}{x^6} = \frac{-x - 3(2-x)}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 2 \\ \\ f''(2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Máximo\ relativo\ en\ x = 2}$$

Para estudar o crecemento e decrecemento, podemos facer a seguinte táboa (temos un máximo relativo en $x = 2$ e o 0 non está no dominio da función):

	$(-\infty, 0)$	$(0,2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$	↘	↗	↘

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} Crecente\ en\ (0,2) \\ Decrecente\ en\ (-\infty, 0)\ e\ en\ (2, \infty) \end{array}}$$

b) Estudo da parábola:

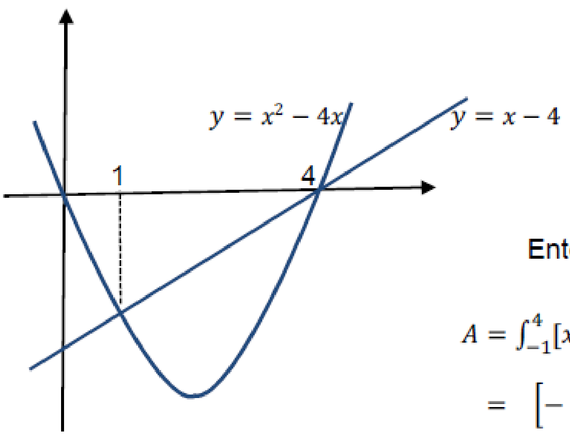
$y = x^2 - 4x = x(x-4) \ \Rightarrow$ Puntos de corte cos eixes: $(0,0)$ e $(4,0)$

$y' = 2x - 4 \ \Rightarrow y' = 0 \ \Leftrightarrow x = 2 \ \ \Rightarrow$ Vértice: $(2, -4)$.

$y'' = 2 \ \Rightarrow$ Convexa.

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 4x = x - 4 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 5x + 4 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \right. \Rightarrow \ (1, -3), (4,0)$$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$A = \int_{1}^{4} [x - 4 - (x^2 - 4x)]dx = \int_{1}^{4} (-x^2 + 5x - 4)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

Exercicio 3:

a) Os vectores $\overrightarrow{AB} = (-1,2,0)$; $\overrightarrow{AC} = (-2,-2,-4)$ non son proporcionais. Polo tanto, os puntos A, B e C non están aliñados e determinan un plano π (o punto $A \in \pi$ e os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinan π)

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -8(x-3) - 4y + 6(z+1) = 0$$

$$\boxed{\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0}$$

Para determinar λ, impoñemos que $D \in \pi$:

$$4\lambda + 12 + 3 - 15 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\lambda = 0}$$

Tamén poderiamos determinar λ coa condición $rang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 2$

b) O vector director da recta r e o vector normal ao plano π son:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (8,4,-6) \\ \\ \overrightarrow{n_\pi} = (4,2,-3) \end{array}\right] \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{n_\pi} \Rightarrow \boxed{r \; e \; \pi \; córtanse \; (son \; perpendiculares)}$$

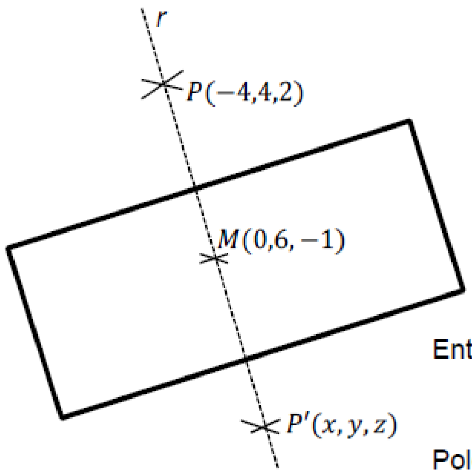
Para determinar o punto de corte da recta e o plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta ($P \in r, \overrightarrow{v_r}$ é un vector director) e sustituimos na ecuación do plano

$$r: \begin{cases} x = -4 + 8\lambda \\ y = \;\;4 + 4\lambda \\ z = \;\;2 - 6\lambda \end{cases} \Rightarrow \;\; -16 + 32\lambda + 8 + 8\lambda - 6 + 18\lambda - 15 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1/2$$

Sustituindo este valor de λ nas ecuacións paramétricas, obtemos o punto de corte da recta e o plano

$$\boxed{M(0,6,-1)}$$

c)



Temos que:

M é o punto de corte de r e π
$P(-4,4,2)$ é un punto de r
r é perpendicular a π

Entón M é o punto medio de P e o seu simétrico $P'(x,y,z)$

Polo tanto:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = \frac{x-4}{2} \\ 6 = \frac{y+4}{2} \\ -1 = \frac{z+2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; \boxed{P'(4,8,-4)}$$

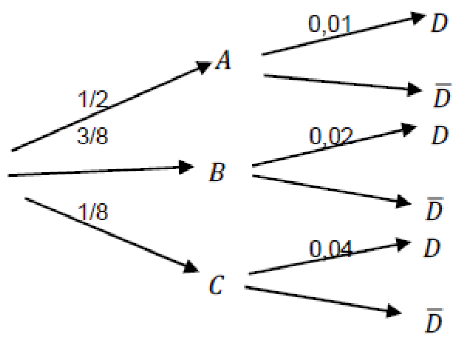
Exercicio 4:

a) Sexan:
A = "A bufanda é da marca A"
B = "A bufanda é da marca B"
C = "A bufanda é da marca C"
D = "A bufanda é defectuosa"
Entón temos:

$$P(A) = \frac{200}{200+150+50} = \frac{1}{2} = 0{,}5; \quad P(B) = \frac{150}{200+150+50} = \frac{3}{8} = 0{,}375; \quad P(C) = \frac{50}{200+150+50} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$P(D/A) = 0{,}01; \qquad P(D/B) = 0{,}02; \qquad P(D/C) = 0{,}04$$

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore:



a) Pola fórmula da probabilidade total, podemos calcular a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, sexa defectuosa:

$$P(D) = P(D/A)\cdot P(A) + P(D/B)\cdot P(B) + P(D/C)\cdot P(C) = 0{,}01\cdot 0{,}5 + 0{,}02\cdot 0{,}375 + 0{,}04\cdot 0{,}125 = 0{,}0175$$

E a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, sexa da marca A ou defectuosa será:

$$P(A\cup D) = P(A) + P(D) - P(A\cap D) = 0{,}5 + 0{,}0175 - 0{,}5\cdot 0{,}01 = \boxed{0{,}5125}$$

b) Para calcular a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, non sexa defectuosa nin da marca C usamos as leis de Morgan

$$P(\overline{D}\cap\overline{C}) = P(\overline{D\cup C}) = 1 - P(D\cup C) = 1 - [P(D) + P(C) - P(D\cap C)$$
$$= 1 - 0{,}0175 - 0{,}125 + 0{,}04\cdot 0{,}125 = \boxed{0{,}8625}$$

c) Se sabemos que a bufanda non é defectuosa, queremos calcular a probabilidade de que sexa da marca B

$$P(B/\overline{D}) = \frac{P(B\cap\overline{D}}{P(\overline{D})} = \frac{P(B\cap\overline{D}}{1-P(D)} = \frac{0{,}98\cdot 0{,}375}{1-0{,}0175} = \boxed{0{,}374}$$

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2 \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m - 6 + 2m - 3 = 3m - 9 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} rang(C) = 2 \text{ se } m = 3 \\ rang(C) = 3 \text{ se } m \neq 3 \end{array}\right.$$

Cálculo do rango da matriz ampliada (lembramos que sempre $rang(A) \geq rang(C)$):

- $m \neq 3 \Rightarrow rang(A) = 3$ (neste caso $rang(C) = 3$)
- $m = 3 \Rightarrow rang(A) = 2$ (se $m = 3$, 1ª ecuación = 3*2ª ecuación e $rang(C) = 2$)

<u>*Discusión:*</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 3 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(A) < nº\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado. \\ m \neq 3 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(A) = nº\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado. \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 3}$ xa vimos que era un sistema compatible indeterminado (infinitas solucións).

Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = -z \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3y = z + 3 \Rightarrow y = \frac{z}{3} + 1 \\ 3x = -z + 6 \Rightarrow x = -\frac{z}{3} + 2 \end{array}\right.$$

As infinitas solucións son

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = -\dfrac{\lambda}{3} + 2 & \\ y = \dfrac{\lambda}{3} + 1; & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda & \end{array}}$$

Tamén poderiamos resolver o exercicio polo método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1^a) - 3^*(2^a) \\ (2^a) \\ (3^a) - (2^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & m \end{array}\right)$$

Se $m = 3$ suprímise a primeira fila (queda unha fila de 0) e o sistema é compatible indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = -z \\ 3y = 3 + z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -z + 2\left(1 + \frac{z}{3}\right) = 2 - z/3 \\ y = 1 + \frac{z}{3} \end{array}$$

as infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 - \dfrac{\lambda}{3} \\ y = 1 + \dfrac{\lambda}{3}; \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

se $m \neq 3$ o sistema é compatible determinado. Para cada valor de m, temos un sistema distinto con solución única.

Exercicio 2:

a) Para que a función sexa continua en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(e^{2x} + ax + b) = 1 + b \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}(x^2 + 2)\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 1 + b = 1 \;\Rightarrow\; b = 0$$

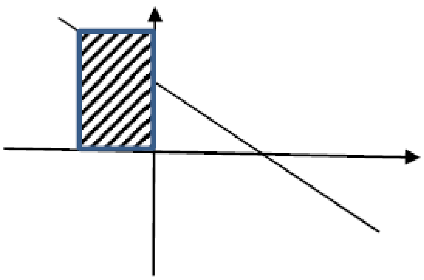
Por outra parte

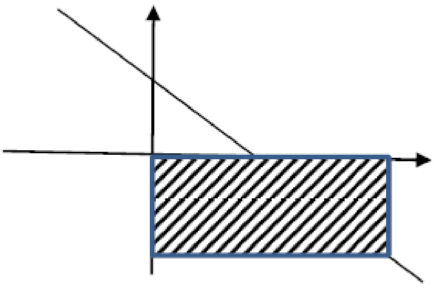
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}(2e^{2x} + a) = 2 + a$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Polo tanto, para que a función sexa derivable en $x = 0$, debe cumplirse:

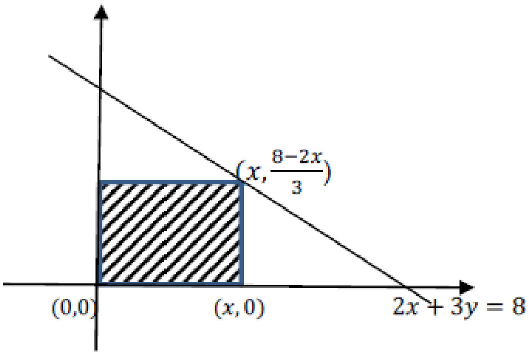
$$\left.\begin{array}{l} b = 0 \\ 2 + a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = -2;\ b = 0}$$

b) A área non está acotada se o rectángulo está situado no segundo ou cuarto cuadrante





Se o rectángulo está situado no primeiro cuadrante:



Función a maximizar (área do rectángulo):

$$A(x) = \frac{x(8-2x)}{3} = \frac{8x-2x^2}{3}$$

Determinamos os puntos críticos):

$$A'(x) = \frac{1}{3}(8-4x)$$

$$\left.\begin{array}{l} A'(x) = 0 \iff x = 2 \\ A''(x) = -4/3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{máximo en } x = 2$$

Polo tanto:

$$\boxed{Vértices: (0,0), (2,0), (0,4/3), (2,4/3)}$$

c) Calculamos a integral indefinida utilizando o cambio de variable: $x + 1 = t^2$; $dx = 2tdt$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)\cdot 2t^2 dt = \int (2t^4 - 2t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + k =$$
$$= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + k$$

E calculamos a integral definida aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

Tamén poderiamos calcular a integral indefinida polo método de integración por partes:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + k$$

E aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx = \left[\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2}\right]_0^3 = \frac{48}{3} - \frac{128}{15} + \frac{4}{15} = \frac{240}{15} - \frac{124}{15} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

Exercicio 3:

a) A recta que pasa polos puntos P e Q ten como vector director:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1-a, 3-a, -a)$$

Por outra parte, un vector normal ao plano é:

$$\vec{n}_\pi = (2,-1,-2).$$

Entón

$$r \parallel \pi \iff \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \iff 2(1-a)-(3-a)+2a=0 \iff 2-2a-3+a+2a=0$$

$$\boxed{a=1}$$

b) Polo apartado anterior, sabemos que se $a = 1$, a recta e o plano son paralelos, polo tanto a distancia entre a recta e o plano é igual á distancia entre un punto da recta (por exemplo P) e o plano

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|2-1-2-3|}{\sqrt{4+1+4}} = \boxed{4/3\ u}$$

c) Sexa α o plano buscado. O plano α está determinado polos elementos seguintes

$P(1,1,1) \in r \Rightarrow P(1,1,1) \in \alpha$

$\vec{v}_r = (0,2,-1)$

$\vec{n}_\pi = (2,-1,-2)$

Son vectores contidos no plano α

Polo tanto:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow -5(x-1)-2(y-1)-4(z-1)=0$$

$$\Rightarrow -5x-2y-4z+11 = 0$$

$$\boxed{\alpha : 5x+2y+4z-11=0}$$

Exercicio 4:

a) Sexa X = nº de respostas acertadas. Trátase dunha distribución binomial $B(10; 0{,}25)$, pois a probabilidade de contestar ben unha pregunta é a mesma nos dez casos: 0,25

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9 = 1 - 0{,}0563 - 0{,}1877 \\ &= \boxed{0{,}756} \end{aligned}$$

b) Sea X la duración, en horas, de las pilas. X sigue una distribución normal $N(50; 5)$

Tipificación $\qquad \frac{X-50}{5} = Z \longrightarrow N(0,1)$

$$\begin{aligned} P(X < 42) = P\left(\frac{X-50}{5} < \frac{42-50}{5}\right) &= P(Z < -1{,}6) = P(Z > 1{,}6) = 1 - P(Z \leq 1{,}6) \\ &= 1 - 0{,}9452 = \boxed{0{,}0548} \end{aligned}$$

GALICIA – Convocatoria de Septiembre

OPCIÓN A

1) a) 0,5 puntos

b) 1,5 puntos

- 0,5 puntos pola determinación do rango de $A - \lambda I$, segundo os valores de **λ**.
- 1 punto pola determinación das matrices X.

2) a) 1,5puntos

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,5 puntos pola determinación de a, b e c.
- 0,5 puntos pola determinación do punto no que se cumpre o teorema de Rolle.

b) 1,5 puntos

- 0,5 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

3) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1 punto

b) 1punto

c) 1 punto

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo estudo da posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{A^t = A^{-1}}$

Tamén poderiamos calcular A^{-1} utilizando Gauss: no primeiro paso intercambiamos a primeira e a segunda fila. No segundo paso intercambiamos a segunda e terceira fila e finalmente cambiamos de signo a tódalas filas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ e vemos que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t}$

Tamén se podería calcular A^{-1} utilizando determinantes:

$|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t$

b)

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1$

Polo tanto: $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 1 = 0$.

λ=-1 é unha solución da ecuación $\lambda^3 + 1 = 0$. Como $\lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$ e $\lambda^2 - \lambda + 1$ non ten solucións reais, temos

$$\boxed{\begin{array}{ll} Se\ \lambda = -1, & entón\ \ rang(A - \lambda I) = 2 \\ Se\ \lambda \neq -1, & entón\ \ rang(A - \lambda I) = 3 \end{array}}$$

$AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e vimos que $A + I$ non ten inversa. Entón:

$(A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{x = y = z\}$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix};\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}}$$

Exercicio 2:

a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) e con $f(a) = f(b)$ entón existe polo menos un punto $\xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Se $x \neq 1$, $f(x)$ é continua e derivable pois son funcións polinómicas,

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 + a \\ &\lim_{x\to 1^+} f(x) = b + c \\ &f(1) = b + c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2 + a = b + c$$

Para que sexa continua en $x = 1$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 4 + a \\ &\lim_{x\to 1^+} f'(x) = b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 4 + a = b$$

Para que coincidan as derivadas laterais

$$f(0) = f(2) \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 2b + c$$

Polo tanto, para que se cumpran as hipóteses do teorema de Rolle,

$$\left.\begin{aligned} a - b - c &= -2 \\ a - b \quad &= -4 \\ 2b + c &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{c = -2;\, b = 1;\, a = -3}$$

Para estes valores, $f'(x) = \begin{cases} 4x - 3 & se \quad x < 1 \\ 1 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$

Entón $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 4\xi - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi = 3/4}$

b) Estudo da parábola:

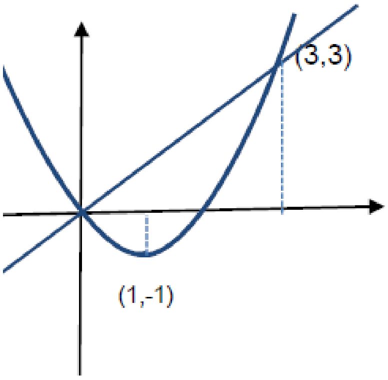
$y = x^2 - 2x = x(x-2) \Rightarrow$ Puntos de corte cos eixes: $(0,0)$ e $(2,0)$

$y' = 2x - 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ Vértice: $(1,-1)$.

$y'' = 2 \Rightarrow$ Convexa.

Puntos de corte da recta e a parábola:

$\underset{y = x^2}{x^2 - 2x = x} \Leftrightarrow \underset{y = x}{x^2 - 3x = 0} \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 3$. Córtanse nos puntos (0,0) e (3,3)



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$A = \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)]dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{Área = \frac{9}{2}\, u^2}$$

Exercicio 3:

a) Determinamos un vector director da recta r:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,0,-2)$$

Como se pide un plano π_1 perpendicular á recta, entón $\vec{v}_r$ é un vector normal ao plano:

$$r \perp \pi_1 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1}$$

e π_1 queda determinado polo punto $A(1,1,1)$ polo que pasa e o vector normal $\vec{n}_{\pi_1} = (2,0,-2)$

$$\pi_1: 2(x-1) - 2(z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi_1: x - z = 0}$$

b) Este novo plano, π_2, queda determinado polos elementos:

- $P(-1,0,6)$ que é un punto pertencente ao plano
- $\overrightarrow{PQ} = (4,-2,-2)$ é un vector do plano
- $\vec{v}_r = (2,0,-2)$ é un vector do plano

Temos entón:

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y & z-6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(x+1) + 4y + 4(z-6) = 0$$

$$\boxed{\pi_2 : x + y + z - 5 = 0}$$

c) Pídennos calcular a distancia da recta r ao plano π_2. Vimos no apartado anterior que son paralelos, polo tanto podemos calcular esa distancia como a distancia dun punto calquera da recta ao plano:

$$d(r,\pi_2) = \; d(P_r,\pi_2) \overset{P_r(1,0,1) \in r}{=} \frac{|1+1-5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}}$$

$$\boxed{d(r,\pi_2) = \sqrt{3}\, u}$$

Exercicio 4:

Sexa X = "nº de extraccións nas que obtemos un 7"

a) Evidentemente trátase de probas independentes, nas que a probabilidade de éxito non cambia

$$\left.\begin{array}{l}\text{número de extraccións = n = 5}\\ \text{probabilidade de éxito = p = 0,1}\end{array}\right\} \quad X \rightarrow Bi(5;0{,}1)$$

$$P(X<2)=p(X=0)+p(X=1)=\binom{5}{0}\cdot 0{,}1^{0}\cdot 0{,}9^{5}+\binom{5}{1}\cdot 0{,}1^{1}\cdot 0{,}9^{4}=0{,}5905+0{,}3281=0{,}9185$$

$$\boxed{P(X<2)=0{,}9185}$$

b) Neste caso

$$X \rightarrow Bi(100;0{,}1)$$

Pero como

nxp= 10 > 5

nxq= 90 > 5

aproximamos a binomial X pola normal X' con media $\mu = n \times p = 100 \times 0{,}1 = 10$ e desviación típica $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{100 \times 0{,}1 \times 0{,}9} = 3$

$$X \rightarrow Bi(100;0{,}1)\ ; \quad X' \rightarrow N(10;3)$$

Ademais aplicamos a corrección de medio punto ou corrección de Yates. Así

Tipificación $\qquad Z = \frac{X'-10}{3} \rightarrow N(0{,}1)$

$$P(X<9)=P(X'\leq 8{,}5)=P\left(\frac{X'-10}{3}\leq\frac{8{,}5-10}{3}\right)=P(Z\leq -0{,}5)=P(Z\geq 0{,}5)$$

$$=1-P(Z\leq 0{,}5)=1-0{,}6915=0{,}3085$$

$$\boxed{P(X<9)=0{,}3085}$$

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$

Dúas columnas proporcionais

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$

$\Rightarrow rang(C) = 2$

Cálculo do rango de A:

Sempre $rang(A) \geq rang(C)$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m - m - 2 = m - 1$

$\Rightarrow rang(A) = \begin{cases} 3 & se \;\; m \neq 1 \\ 2 & se \;\; m = 1 \end{cases}$

Discusión:

$\boxed{m = 1, \; rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº \; de \; incógnitas. \; Sistema \; compatible \; indeterminado.}$

$\boxed{m \neq 1, \; rang(C) = 2 < 3 = rang(A). \; Sistema \; incompatible.}$

b) Para $\boxed{m = 1}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 + z \\ x \qquad &= 1 + z \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 0$$

As infinitas solución son:

$$\boxed{\begin{aligned} &x = 1 + \lambda \\ &y = 0 \qquad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &z = \lambda \end{aligned}}$$

Exercicio 2:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+mx^2-1}{sen(x^2)} \overset{\frac{0}{0}\ (L'Hopital)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2sen2x+2mx}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+2m}{2x\cos(x^2)-4x^2 sen(x^2)} = \frac{-4+2m}{2}$$

Entón:

$$\frac{-4+2m}{2}=3 \ \Rightarrow\ -4+2m=6 \ \Rightarrow\ \boxed{m=5}$$

b)

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

Punto de inflexión no punto (0,5): $\begin{cases} f''(0)=0 \ \Rightarrow\ \boxed{b=0} \\ f(0)=5 \ \Rightarrow\ \boxed{d=5}\end{cases}$

Entón $f(x)=ax^3+cx+5$. Ademais

Pasa polo punto $(1,1)$: $f(1)=1 \Rightarrow\ a+c+5=1$

Tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(1,1)$ paralela ao eixe X: $f'(1)=0 \Rightarrow\ 3a+c=0$

$$\left.\begin{array}{l} 3a+c=0 \\ a+c+5=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c=-3a \\ a-3a+5=1 \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ \boxed{a=2}\ ;\ \boxed{c=-6}$$

c) Podemos calcular a integral indefinida utilizando primeiro o método de sustitución e despois o método de integración por partes:

$$\int\sqrt{x}\,lnx\,dx \overset{\sqrt{x}=t\ \Rightarrow\ x=t^2\ \Rightarrow\ dx=2tdt}{=} \int 4t^2 lnt\,dt \underset{\left\{\begin{array}{l} u=lnt \ \Rightarrow\ du=dt/t \\ dv=4t^2\ \Rightarrow\ v=\frac{4}{3}t^3\end{array}\right\}}{=} \frac{4}{3}t^3 lnt-\frac{4}{3}\int t^2\,dt \overset{\text{desfacemos o cambio}}{=} \frac{2}{3}x\sqrt{x}lnx-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+k$$

ou ben calculala directamente por partes:

$$\int\sqrt{x}\,lnx\,dx \underset{\left\{\begin{array}{l} u=lnx \ \Rightarrow\ du=dx/x \\ dv=x^{1/2}dx\ \Rightarrow\ v=\frac{2}{3}x^{3/2}\end{array}\right\}}{=} \frac{2}{3}x^{3/2}lnx-\int\frac{2}{3}x^{1/2}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}lnx-\frac{4}{9}x^{3/2}+k$$

Aplicando a regra de Barrow:

$$\int_1^e\sqrt{x}lnx\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}lnx-\frac{4}{9}x^{3/2}\right]_1^e=\frac{2}{3}e^{3/2}-\frac{4}{9}e^{3/2}+\frac{4}{9}$$

$$\boxed{\int_1^e\sqrt{x}lnx\,dx=\frac{2}{9}e^{3/2}+\frac{4}{9}}$$

***Exercicio 3*:**

a)

$$r:\begin{cases} P_r(94,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-8,-3,0) \end{cases} \qquad s:\begin{cases} P_s(1,0,5) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2,1,-1) \end{cases}$$

Os vectores directores $\vec{v}_r = (-8,-3,0)$ e $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2,1,-1)$ das rectas non son proporcionais, polo tanto as rectas córtanse ou crúzanse. Para saber se se cortan ou se cruzan, calculamos o rango($\vec{P_r}\vec{P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s$):

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{As\ rectas\ córtanse}$$

Para calcular o punto de corte pasamos ás ecuacións paramétricas:

$$r:\begin{cases} x = 9 - 8\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \quad \mu \\ z = 5 - \mu \end{cases}$$

Entón:

$$\begin{Bmatrix} 9 - 8\lambda = 1 + 2\mu \\ 4 - 3\lambda = \mu \\ 1 = 5 - \mu \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 9 = 9 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{Punto\ de\ corte\ (9,4,1)}$$

b) Sexa π o plano buscado. O plano π está determinado por ($\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ non son proporcionais):

- O punto de corte das rectas $(9,4,1)$ (π contén a r e a s)
- Un vector director $\vec{v}_r$ da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta r)
- Un vector director $\vec{v}_s$ da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta s)

$$\pi: \begin{vmatrix} x-9 & y-4 & z-1 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-9) - 8(y-4) - 2(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi: 3x - 8y - 2z - 28 + 7 = 0}$$

c) Utilizamos a fórmula da distancia dun punto a unha recta:

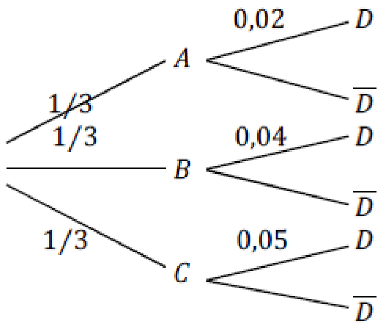
$$\overrightarrow{OP_s} = (1,0,5) \Rightarrow \overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5,11,1)$$

$$d(O,s) = \frac{|\overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{5^2 + 11^2 + 11^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{147}{6}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{d(O,s) = \frac{7\sqrt{2}}{2}\ u}$$

***Exercicio 4*:**

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore (D=peza defectuosa):



$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

$P(D|A) = 0{,}02$

$P(D|B) = 0{,}04$

$P(D|C) = 0{,}05$

a) Pola fórmula da probabilidade total:

$$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) = 0{,}02 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}04 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}05 \cdot \frac{1}{3}$$
$$= 0{,}11 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}03667$$

$$\boxed{P(D) = 0{,}03667}$$

b)

$$P(A|\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(\overline{D}|A) \cdot P(A)}{P(\overline{D})} = \frac{P(\overline{D}|A) \cdot P(A)}{1 - P(D)} = \frac{(1 - 0{,}02) \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0{,}03667} = 0{,}3391$$

$$\boxed{P(A|\overline{D}) = 0{,}3391}$$

LA RIOJA – Criterios Generales de Calificación para ambas Convocatorias

CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

(1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, del tipo

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+b\,, \quad \frac{\ln x}{x} = \ln\,, \quad \int \frac{x}{x^2+3} = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{x}{3}\right),$$

se penalizarán especialmente, y pueden suponer un 0 en el apartado en el que se hayan cometido.

(3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:

(a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error numérico, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

(b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)

(4) La puntuación máxima que se puede obtener en cada ejercicio viene señalada en la copia del examen que se entrega al alumno. Si alguno de los apartados tiene a su vez subapartados, se deberá distribuir razonablemente el número de puntos entre los mismos (no necesariamente debe darse el mismo peso a cada subapartado).

(5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo sólo los resultados, sin el desarrollo lógico de cómo los ha obtenido, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 40 % de la nota máxima prevista.

(6) La calificación será la suma de las puntuaciones obtenidas en cada ejercicio de una sola propuesta.

MADRID – Convocatoria de Junio

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en las soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) Por la obtencion del valor crítico ($\alpha = 1$): 0.75 puntos (repartidos en planteamiento: 0.5; resolución: 0.25). Por obtener el rango: 0.25 puntos, para cada uno de los dos casos ($[\alpha = 1]$, $[\alpha \neq 1]$).
b) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
c) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Ejercicio 2.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Cada límite lateral 0.25 puntos.
b) Saber qué límites hay que calcular para las A. H.: 0.25 puntos. Calcular cada uno: 0.25 puntos. Justificar que no hay A. V.: 0.25 puntos.
c) Sustituir adecuadamente $f(x)$ en la integral a calcular: 0.25 puntos. Cálculo correcto de la primitiva: 0.25 puntos. Aplicar regla de Barrow: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

a) Obtención de la dirección ortogonal: 0.5 puntos. Hacer que el vector sea unitario: 0.25 puntos. Elegir el signo adecuado: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Ejercicio 4.

a) Calcular cada una de las probabilidades pedidas: 0.5 puntos (repartidos en resultado: 0.25, justificación: 0.25).
b) Obtener la probabilidad de dar positivo en el test: 0.5 puntos. Obtener la probabilidad de diabético condicionado a positivo: 1 punto (repartido en procedimiento: 0.5, resultado: 0.5).

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones: 1.5 puntos (0.5 por cada ecuación). Resolución del sistema: 1 punto (repartido en procedimiento: 0.5, cálculos: 0.5). Si alguna de las ecuaciones del sistema está mal planteada, pero se obtiene un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, calificar la parte correspondiente a su resolución.

Ejercicio 2.

a) Por cada valor correcto: 0.25 puntos.
b) Por estudiar la continuidad en cada punto: 0.5 puntos.
c) Por justificar la no derivabilidad en cada punto: 0.25 puntos.
d) Resultado: 0.25 puntos. Justificación: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Hallar los puntos T_1 y T_2: 1 punto. Área del triángulo: 0.5 puntos.

Ejercicio 4.

a) Procedimiento: 0.75 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.
b) Procedimiento: 0.75 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.

MADRID – Convocatoria de Julio

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en las soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) Cálculo de cada producto pedido: 0.25 puntos. Si deduce el valor de uno de los dos productos a partir del otro (usando que $A^{-1} = A^t$) se calificará como correcto.
b) Calcular A^{-1}: 0.75 puntos (tanto si lo hace directamente como si lo deduce como consecuencia del apartado anterior). Resolver el sistema: 0.5 puntos (repartidos en procedimiento: 0.25 y cálculos: 0.25).
c) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Ejercicio 2.

a) Calcular $f'(x)$: 0.25 puntos. Obtener los puntos críticos: 0.25 puntos. Decidir si son máximos o mínimos: 0.25 puntos. Intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0.25 puntos.
b) Calcular la primitiva: 0.5 puntos. Aplicar la regla de Barrow: 0.25 puntos.
c) Calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: 0.25 puntos. Calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$: 0.5 puntos.

Ejercicio 3.

a) Determinar el plano que contiene a P, Q y R: 0.5 puntos (repartidos en procedimiento: 0.25; cálculos: 0.25). Hallar el punto de intersección: 0.5 puntos.
b) Resultado: 0.25 puntos. Justificación: 0.5 puntos.
c) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Ejercicio 4.

a) Obtener el resultado: 0.25 puntos.
b) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
c) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
d) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

a) Por la obtencion del valor crítico ($\alpha = -3$): 1 punto (repartido en procedimiento: 0.5; resultado: 0.5). Por discutir el sistena: 0.5 puntos para cada uno de los dos casos ($[\alpha = -3]$, $[\alpha \neq -3]$).
b) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Ejercicio 2.

a) Resultado correcto: 0.25 puntos.
b) Obtener el precio del mililitro de mezcla: 0.25 puntos. Definir $P(x)$: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
d) Plantear el problema de optimización 0.25 puntos. Derivar correctamente y hallar el punto crítico: 0.5 puntos. Justificar que es máximo: 0.25 puntos. Indicar la capacidad y el precio: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Ejercicio 4.

Para cada probabilidad pedida: 0.5 puntos (repartidos en resultado: 0.25, justificación: 0.25).

MURCIA – Convocatoria de Junio

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

OPCIÓN A

CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto de A^2 [**0,5 puntos**]. Cálculo correcto de A^3 [**0,5 puntos**]. Cálculo correcto de A^4 [**0,5 puntos**].

Apartado b) Identificación de la expresión general de A^n para un valor genérico de n [**1 punto**].

CUESTIÓN A.2: [2 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto de la función a maximizar en función de una variable [**0,25 puntos**]. Cálculo correcto de la derivada de la función [**0,25 puntos**]. Cálculo correcto del único punto crítico de la función a maximizar (y candidato a ser máximo) [**0,25 puntos**]. Justificación de que se trata de un punto de máximo [**0,5 puntos**]. Cálculo de la descomposición de 10 como 8+2 [**0,25 puntos**].

Apartado b) Cálculo correcto de la suma máxima $= 8 + 2\ln 2$ [**0,5 puntos**].

CUESTIÓN A.3: [1,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida [**1 punto**].

Apartado b) Cálculo correcto del área aplicando la regla de Barrow [**0,5 puntos**].

CUESTIÓN A.4: [2,5 puntos]

Apartado a) Justificación correcta y razonada de que la recta corta al plano en un punto [**1,25 puntos**].

Apartado b) Cálculo correcto y razonado del punto de corte [**0,75 puntos**] y del ángulo de corte [**0,5 puntos**].

CUESTIÓN A.5: [1,5 punto]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [**0,75 puntos**].

Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [**0,75 puntos**].

OPCIÓN B

CUESTIÓN B.1: [2,5 puntos]

Apartado a) Justificación correcta y razonada de que el sistema nunca es compatible determinado [**1 punto**].

Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene infinitas soluciones (SCI) cuando $a = 2$ [**0,5 puntos**]. Cálculo correcto de dicha solución dependiente de un parámetro [**1 punto**].

CUESTIÓN B.2: [2 puntos]

Justificación correcta y razonada de que para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ debe ser $a = 1$ [**1 punto**].

Justificación correcta y razonada de que para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$ debe ser $b = 1$ [**1 punto**].

CUESTIÓN B.3: [1,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida [**1 punto**].

Apartado b) Cálculo correcto de la constante de integración [**0,5 puntos**].

CUESTIÓN B.4: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) [**1,25 puntos**].

Apartado b) Cálculo correcto de la distancia pedida [**1,25 puntos**].

CUESTIÓN B.5: [1,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [**0,5 puntos**].

Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [**0,5 puntos**].

Apartado c) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [**0,5 puntos**].

MURCIA – Convocatoria de Septiembre

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

OPCIÓN A

CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos]

Apartado a) Comprobación de que la matriz A es regular [**0,25 puntos**]. Cálculo correcto de la inversa de la matriz A [**0,75 puntos**].

Apartado b) Resolución correcta de la ecuación matricial [**1,5 puntos**].

CUESTIÓN A.2: [2 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a $+\infty$, resolviendo la indeterminación del tipo $\infty - \infty$ [**1 punto**].

Apartado b) Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a 0, resolviendo la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ [**1 punto**].

CUESTIÓN A.3: [1,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida [**1 punto**].

Apartado b) Cálculo correcto del área aplicando la regla de Barrow [**0,5 puntos**].

CUESTIÓN A.4: [2,5 puntos]

Apartado a) Comprobación correcta y razonada de que las dos rectas son paralelas [**1,25 puntos**].

Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) [**1,25 puntos**].

CUESTIÓN A.5: [1,5 puntos]

Apartado a.1) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [**0,5 puntos**].

Apartado a.2) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [**0,5 puntos**].

Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida [**0,5 puntos**].

OPCIÓN B

CUESTIÓN B.1: [2,5 puntos]

Apartado a) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene únicamente la solución trivial (SCD) para todo valor de a distinto de 0, de 1 y de 2. [**1,25 puntos**].

Apartado b) Justificación de que el sistema tiene infinitas soluciones (SCI) para $a = 2$ [**0,25 puntos**]. Cálculo correcto de dicha solución dependiente de un parámetro [**1 punto**].

CUESTIÓN B.2: [2 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto de la derivada de $f(x)$ [**0,5 puntos**]. Determinación de sus puntos críticos $x = 3$ y $x = -3$ [**0,5 puntos**].

Apartado b) Justificación correcta y razonada de que la función alcanza un máximo en $x = 3$ [**0,5 puntos**] y de que alcanza un mínimo en $x = -3$ [**0,5 puntos**].

CUESTIÓN B.3: [1,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida [**1 punto**].

Apartado b) Cálculo correcto de la constante de integración [**0,5 puntos**].

CUESTIÓN B.4: [2,5 puntos]

Apartado a) Comprobación de que el punto P no está en la recta r [**0,25 puntos**]. Comprobación de que el punto Q sí está en la recta r [**0,25 puntos**].

Apartado b) Cálculo correcto y justificado del punto R [**1,25 puntos**].

Apartado c) Cálculo correcto y justificado del área del triángulo [**0,75 puntos**].

CUESTIÓN B.5: [1,5 puntos]

NAVARRA – Convocatoria de Junio

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder exclusivamente a las preguntas de una de las dos opciones (A o B). Si alguien responde a cuestiones de las dos opciones, la nota final será **la peor** de las dos puntuaciones obtenidas.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
  - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
  - si reflejan fallos de concepto.
  - si producen simplificaciones relevantes.
  - si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

A1) Se valorará con 2 puntos la discusión completa, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0,5 puntos la del caso compatible indeterminado.

A2) Se valorará sobre 1 punto la determinación de cuál es el centro del rombo y sobre1 punto el cálculo de los dos vértices.

A4) Se valorará sobre 1 punto la obtención de la asíntota oblicua, sobre 0,5 puntos la vertical y con 0,5 puntos la justificación de que no hay asíntota horizontal. La obtención de cada extremo relativo, sobre 0,5 puntos.

B3) Se valorará sobre 1 punto la mención justificada del teorema utilizado, haciendo referencia al cumplimiento de las hipótesis requeridas, y sobre 1 punto los cálculos y la argumentación usados para su aplicación en la demostración de la existencia del punto pedido.

B4) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 2 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta y se menciona que $g(x)$ es continua en $x=2$, se puede obtener la puntuación máxima aunque no se incluya el dibujo.

NAVARRA – Convocatoria de Julio

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder exclusivamente a las preguntas de una de las dos opciones (A o B). Si alguien responde a cuestiones de las dos opciones, la nota final será **la peor** de las dos puntuaciones obtenidas.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
    - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
    - si reflejan fallos de concepto.
    - si producen simplificaciones relevantes.
    - si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

A1) Se valorará con 2 puntos la discusión completa, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0,5 puntos la del caso compatible indeterminado.

A3) Se valorará sobre 1 punto la mención justificada del teorema utilizado, haciendo referencia al cumplimiento de las hipótesis requeridas, y sobre 1 punto los cálculos y la argumentación usados para su aplicación.

A4) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de contacto de la curva con los bordes del cuadrado, con 0,5 puntos el dibujo de las gráficas (aunque no sea muy detallado) y con 2 puntos el cálculo de las áreas. No es necesario justificar la simetría respecto del eje OY. Si la resolución es correcta, se puede obtener la puntuación máxima aunque no se incluya el dibujo.

B1) Si se produce error como consecuencia de intentar calcular la inversa de A, la puntuación máxima posible será 0,5 puntos.

B4) Se valorará sobre 2 puntos la obtención de los extremos relativos y sobre 1 punto la de los puntos de inflexión.

PAÍS VASCO – Convocatoria de Junio

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)
- Estudiar el rango de la matriz mediante el cálculo de los distintos determinantes (1,5 puntos).
- Concluir correctamente con la discusión del rango de la matriz y escribir el resulto final (0,5 puntos)

Problema A.2 (2 puntos)
- Planteamiento del problema: obtención del plano que contiene a tres puntos y verificación de que el otro punto está en el plano obtenido (1 punto)
- Cálculo correcto del valor del parámetro a para que el punto esté en la recta AC (1 punto)

Problema A.3 (2 puntos)
- Discusión del parámetro a para que la función sea continua en el punto x = 1 (1 punto)
- Discusión del parámetro a para que la función sea derivable en el punto x = 1 (1 punto)

Problema A. 4 (2 puntos)
- Descomposición de la integral racional en pequeñas integrales racionales (1 punto)
- Cálculo correcto de las tres integrales (1 punto)

Problema A.5 (2 puntos)
- Planteamiento del problema (1 punto)
- Obtención de la solución correcta (1 punto)

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)

- Cálculo del determinante de la matriz A y discusión para los casos en que el determinante no se anula (0,75 puntos)
- Discusión en los casos a= 0 y a = 1 (0,75 puntos)
- Resolución para el caso a= 2 (0,5 puntos)

Problema B.2 (2 puntos)
Hay varias formas de resolver el problema. La más usual es calcular el plano que pasa por tres puntos. Pero cualquier otra manera que del resultado correcto es naturalmente válida.

- Planteamiento del problema, Obtención de dos puntos de la recta (0.75 puntos.
- Obtención correcta del plano que pasa por los tres puntos (1.25 puntos)

Problema B.3 (2 puntos)

- Cálculo correcto de la derivada de la función (0,5 puntos)
- Discusión y obtención de los puntos críticos (0, 5 puntos)
- Obtención de los Intervalos de crecimiento (0,5 puntos)
- Obtención de las asíntotas (0,5 puntos)

Problema B. 4 (2 puntos)

- Dibujo adecuado del recinto como intersección de las dos gráficas y la recta x = 1(1 punto)
- Cálculo del área del recinto mediante la regla de Barrow (1 punto)

Problema B.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema razonando el método
- Obtención correcta de P (0.75 puntos)
- Obtención correcta de T (0,75 puntos)
- Obtención correcta de P-T (0,5 puntos)

OPCION A

SOLUCIÓN A1

Evidentemente el rango de la matriz ha de ser menor o igual que 3 y como hay determinantes distintos de cero de orden 2, se verificará que el Rango(A) será mayor o igual que 2.

Analizaremos si puede ser de rango 3. Los determinantes que se pueden formar, para este caso, son:

$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a^2+4a-12}$, al igualarlo a cero nos da a= –6 y a = 2

El segundo determinante es $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-2a+2a=0}$,

El tercer determinante es $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-8+8=0}$,

El cuarto y último determinante es: $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$, al igualarlo a cero nos da

a = –6 y a = 2

Conclusión si:

1) a = –6 ó a = 2 los cuatro determinantes son cero y el rango(A) =2
2) Mientras que si a es distinto de –6 y 2 el rango(A) =3

SOLUCIÓN A2

a) y b) Sí, están en el mismo plano. Se puede calcular el plano que contiene a los puntos A, B y C, es el plano: 3x-2y+3z=12, por tanto el punto D(3,0,1) pertenece al plano ya que satisface dicha ecuación, en efecto: 3(3)-2.(0)+3.(1)= 12

c) La recta que pasa por A y C, en paramétricas es: (–3t, –3t, t+4)

para que el punto P(a, a, 8) satisfaga la ecuación se ha de cumplir que

–3t = a y además t+4= 8, por tanto t = 4 y a= –12, el punto será por tanto P(–12,–12, 8).

SOLUCIÓN A3

Evidentemente, la función no es continua so a =0. Si a ≠ 0, para que la función sea continua en x= 1 (ya que en los demás puntos no hay problemas) se ha de verificar que $3-a=2/a$, de donde tenemos que $a^2-3a+2=0$, las soluciones en a son a= 2 y a=1.

Para que la función sea derivable en el punto x=1 ha de ser continua en ese punto y además la derivada por la derecha y por la izquierda en dicho punto han de ser iguales. Por tanto se ha de verificar que para x=1 las dos expresiones correspondientes a las derivadas laterales han de ser iguales $\frac{-2}{ax^2}=-2ax$, resolviendo tenemos que a =±1.

Por tanto, concluyendo en x=1 será derivable si a = 1.

SOLUCIÓN A4

Corresponde a una integral racional, para resolverla tenemos que descomponerla en pequeñas integrales. Como

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Resolviendo tenemos A= –1, B=1 y C= 3.

Por tanto, la integral pedida es igual a:

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}dx=-ln(x)+ln(x+1)-\frac{3}{x+1}+C$$

SOLUCIÓN A5

El problema nos lleva a plantear las dos siguientes ecuaciones:

$$x+y=10$$
$$P=y.x^2$$

De donde $P=10x^2-x^3$, el valor máximo se hallará cuando la derivada de la función P(x) se anule. Esto es $P'=20x-3x^2=0$. Resolviendo nos da x= 0 y x= 20/3, se puede ver efectivamente que en x= 20/3 alcanza el máximo (únicamente hay que verificar que la segunda derivada de P en el punto 20/3 es negativa).

Por tanto, la solución es x= 20/3.

OPCION B

SOLUCIÓN B1

a) Las matrices A y A´ son las siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & a+1 & -a & 2a \\ 1 & a & (a+1) & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es igual a 2a(a-1), igualando a cero tenemos que

a= 0, a = 1, por tanto

- Para cualquier número real a distinto a 0 y 1 el sistema es compatible determinado.
- Para a = 0 el rango(A)≠ rango(A´), por tanto, es INCOMPATIBLE
- Para a= 1, el rango(A)= rango(A´) y el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 2 el sistema tiene solución única y es x = –7/4, y= 7/4, z= –1/4.

SOLUCIÓN B2

La recta r en paramétricas es: (2t, 3+t, 1-t).

Para calcular el plano hacen falta tres puntos no alineados. Es claro que el punto P no pertenece a la recta. Calculemos dos puntos de la recta, por ejemplo para t= 0 en la recta obtenemos un punto de la misma, calculando A(0,3,1). Para t= 1 obtenemos el punto B(2,4,0).

Por tanto el plano pedido es el que pasa por los puntos A, B y P(2,-1, 2).

Esto es 3x+4y+10z=22.

SOLUCIÓN B3

a) Las asíntotas verticales son x=2 y x = -2.

Las asíntotas horizontales se obtienen calculando $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x^2-4} = 1$, Por tanto la asíntota horizontal es y = 1. Asíntotas oblicuas no tiene.

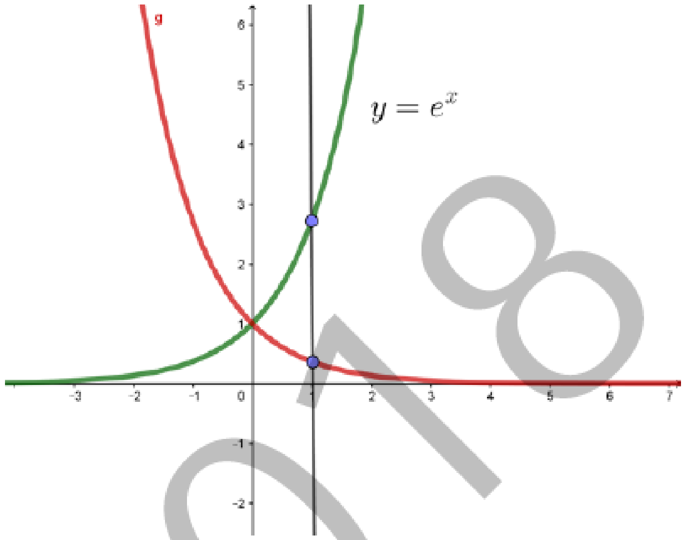
b) Para calcular los intervalos de crecimiento o decrecimiento hay que derivar la función y se tiene que $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-4)^2}$.

Por tanto será creciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decreciente en $(0,2)\cup(2,\infty)$.

c) En el punto x= 0 la función tiene un máximo relativo, es el punto P(0,3/4).

SOLUCIÓN B4

La región está limitada por las dos funciones del dibujo y la recta x=1.



Para calcular el área empleamos la fórmula de Barrow:

$\boldsymbol{A=\int_0^1 (e^x-e^{-x})\,dx=(e+\frac{1}{e}-2)}$ unidades cuadradas

SOLUCIÓN B5

La suma

- De los pares es P= 2+4+…+1000 (son 500 números) = 250.500.
- De los múltiplos de tres es T= 3+…+999 (son 333 números) = 166.833.

Por tanto, P-T= 83.667.

PAÍS VASCO – Convocatoria de Julio

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

- Estudiar el rango en los distintos determinantes (1,5 puntos)
- Concluir correctamente con la discussión del rango de la matriz y escribir el resulto final (0,5 puntos)

Problema A.2 (2 puntos)

a) Obtención del plano perpendicular a la recta r y que contenga al punto P (0.75 puntos)
b) Obtención del simétrico de P (1.25 puntos)

Problema A.3 (2 puntos)

- Obtención de la derivada de la función (0,5 puntos)
- Discusión de los puntos críticos (0, 5 puntos)
- Obtención de los Intervalos de crecimiento (0,5 puntos)
- Obtención de las asintótas (0,5 puntos)

Problema A. 4 (2 puntos)

- Aplicación de la integración por partes (0, 5 puntos)
- Cálculo correcto de la integral aplicando el método anterior (1, 5 puntos)

Problema A.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema (1 punto)
- Resolución correcta del problema y obtención del área máxima (1 punto)

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)

- Cálculo del determinante de la matriz A y discusión para los casos que no anulan el determinante (0,75 puntos)
- Discusión en los casos a = 0 y a = ½ (0,75 puntos)
- Resolución para el caso a = 1 (0,5 puntos)

Problema B.2 (2 puntos)

- Planteamiento del problema, obtención del plano perpendicular a la recta dada (0.75 puntos)
- Intersección del plano anterior con la recta dada y cálculo del punto simétrico (1.25 punto)

Problema B.3 (2 puntos)

- Obtención de la derivada de la función (0,5 puntos)
- Obtención adecuada de los parámetros A, B,y C imponiendo las condiciones pertinentes (1 punto)
- Discusión y obtención del punto extremo (0,5 puntos)

Problema B. 4 (2 puntos)

- Dibujo adecuado del recinto como intersección de dos parábolas y el cálculo de los puntos de corte de dichas parábolas.(1 punto)
- Cálculo del área del recinto mediante la regla de Barrow (1 punto)

Problema B.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema razonando el método (0.5 puntos)
- Obtención del dígito correspondiente a las unidades de P (1.5 puntos)

OPCION A

SOLUCIÓN A1

Evidentemente el rango de la matriz ha de ser menor o igual que 3 y como hay determinantes distintos de cero de orden 2, se verificará que el Rango(A) será mayor o igual que 2.

Analizaremos si puede ser de rango 3. Los determinantes que se pueden formar, para este caso, son:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = -a(-a^2 - a + 2)$, al igualarlo a cero nos da a =0,a =1 y a = –2

El segundo determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -0 \end{vmatrix} = a^2 - 2a = 0$, de donde a= 0 y a= 2

El tercer determinante es $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2a - 4$, al igualarlo a cero nos da a= 2

El cuarto y último determinante es: $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ a & 2 & -0 \end{vmatrix}$, al igualarlo a cero nos da a = 1 y a = –2.

Conclusión si:

Como no hay ningún valor de a que anule a la vez los cuatro determinantes, el rango(A) =3.

SOLUCIÓN A2

a) La recta tiene como vector director v(0,1,1), por tanto el plano pedido es : (x-1).0+(y-1).1+(z-0).1= 0, realizando operaciones obtenemos la ecuación del plano , es : y+z= 1
b) Para calcular el simétrico de P, primero calculamos la recta perpendicular al plano dado pasando por P. Es la recta (x=1+t, y= 1+t, z= t). Ahora obtenemos el punto de corte de dicha recta con el plano, es M(2/3, 2/3, -1/3), por tanto el simétrico es : P´(1/3, 1/3, -2/3)

SOLUCIÓN A3

Para estudiar los intervalos de crecimiento hay que derivar la función y estudiar el signo de su derivada.

$$f'(x) = e^{-x}.x.(2-x)$$

- La función será decreciente en la zona $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$
- Es creciente en el intervalo (0,2)
- Tiene un mínimo en el punto x= 0. Mínimo (0,0)
- Tiene un máximo en el punto x= 2. Máximo $\left(2,\frac{4}{e^2}\right)$
- No tiene asíntotas verticales.
- Tiene una asíntota horizontal que es y = 0, ya que el límite de la función cuando x tiende a infinito se hace cero
- No tiene asíntotas oblicuas, puesto que f(x)/ x cuando x tiene a infinito se hace cero.

SOLUCIÓN A4

Es una integral que puede hacerse por partes (hay que aplicar dos veces)

$$\int x^2 e^{-3x}\,dx = \frac{-1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C$$

SOLUCIÓN A5

El problema nos lleva a plantear las dos siguientes ecuaciones:

$$A = xy/2$$
$$8 = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$$

Siendo x e y las dimensiones de los catetos

Poniendo la variable y en función de x tenemos: $2A = x\sqrt{64-x^2}$,

Para obtener el máximo derivamos la función A(x) e igualamos a cero, nos da $2A' = \sqrt{64-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64-x^2}} = 0$, obteniendo como valor positivo $x = 4\sqrt{2}$, puede comprobarse que corresponde a un máximo. El área del triángulo es igual a 16 unidades cuadradas.

OPCION B

SOLUCIÓN B1

a) Las matrices A y A´ son las siguientes

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 2 & 1 & a\\ 3 & a+1 & -1\end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix}1 & a & -1 & 2\\ 2 & 1 & -a & 0\\ 3 & a+1 & -1 & a-1\end{pmatrix}$$

El determinante de A es igual a a(2a-1), igualando a cero tenemos que

a= 0, a =1/2, por tanto

- Para cualquier número real a distinto a 0 y 1/2 el sistema es compatible determinado.
- Para a = 0 el rango(A)≠ rango(A´), por tanto, es Incompatible
- Para a= 1/2, el rango(A) ≠ rango(A´) y el sistema es Incompatible

b) Para a= 1 el sistema tiene solución única y es x = –6, y= 10, z= 2

SOLUCIÓN B2

En primer lugar calculamos el plano perpendicular a la recta dada que contiene al punto (el vector normal del plano es v(1,2,2) y el plano pasa por el punto A). Calculando el plano es: x+2y+2z+15= 0

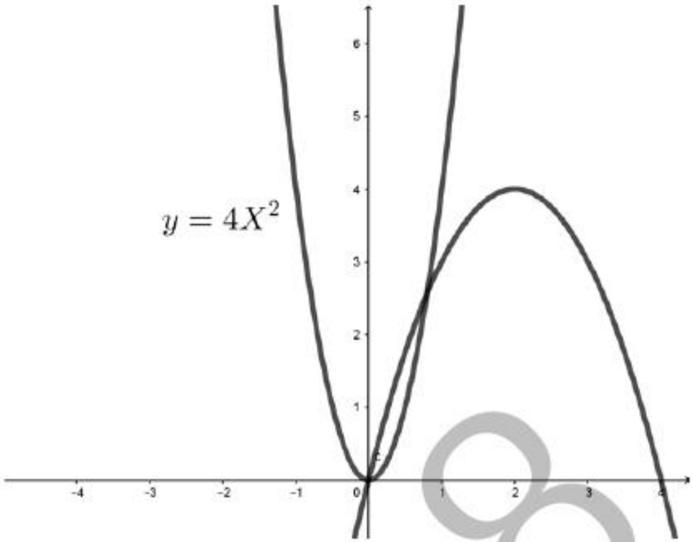
Hallamos la intersección de la recta y el plano calculado, nos da el punto M(-3,-1,-5). **Por tanto el punto simétrico de A será A´(-3,-3,-3)**

SOLUCIÓN B3

a) Por pasar la gráfica por el punto (1,0) se cumplirá
   1+A+B+C= 0
   Como $y' = 3x^2 + 2Ax + B$
   Por tener un extremo en x= 0, se verificará B= 0
   Por pasar por el (0,1), se verificará C= 1
   Por tanto, A=-2, C= 1 y B= 0
   La ecuación será $y = x^3 - 2x^2 + 1$

b) La segunda derivada es igual a y´´ = 6x-4, por tanto, en x= o hay un máximo.

SOLUCIÓN B4



Las dos gráficas se cortan en los puntos x= 0 y x= 4/5

Por tanto el área pedida es $\boldsymbol{A = \int_0^{4/5}\left((4x-x^2)-4x^2\right)dx = 32/75}$

SOLUCIÓN B5

El número se puede poner como $\boldsymbol{P = 2018^{2018}3^{2018} = 6054^{2018}}$

Si nos preocupamos por las primeras potencias del 4, comenzando por el 4, Obtenemos 4, 16, 64, 216, 864,… como vemos se van repitiendo sus terminaciones en ciclos de 2 , por tanto el último dígito será 6, ya que dicho valor coincide con el dígito de las unidades de $\boldsymbol{4^2}$ que evidentemente es 6.