El espacio de funciones holomorfas sobre un dominio complejo

Claudia Fombuena Esteban

Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo:
Luciano Abadías Ullod
José Esteban Galé Gimeno

27 de noviembre de 2019

Summary

The aim of this work is to study properties of compactness and duality in the space of holomorphic functions on a complex open domain.
In the sequel, Ω is an open set in the complex plane. We will denote by $\mathcal{C}(\Omega)$ the algebra of continuous functions on Ω with complex values, and by $\mathcal{H}(\Omega)$ the subalgebra of holomorphic functions on Ω.
The natural notion of convergence of sequences of holomorphic functions is the uniform convergence on compact subsets, denoted by τ_c. We say natural in the sense that this is the notion of convergence from which it follows that limits inherit properties that share the terms of the sequences. To this end, pointwise convergence is not enough, while uniform convergence on the entire domain would be an excessive requirement. So, convergent sequences will be those that converge uniformly on each compact subset $K \subset \Omega$. This topology was introduced by Ralph Fox in 1945 [1].

The content of this work is divided into three parts:

In the first chapter the objective is to collect definitions, properties and theorems studied during the degree, which introduce us to the subject and which are necessary to prove the results presented later.

In the second chapter the topology of uniform convergence on compact sets is introduced. First, we will study that notion of convergence in the general situation of sequences of continuous functions, to then address the study of the sequences of holomorphic functions.

In this chapter the following theorems are given:

ARZELÀ-ASCOLI: This is the characterization of compact subsets in $\mathcal{C}(\Omega)$ with respect to τ_c.

WEIERSTRASS: This is a fundamental convergence theorem for sequences of holomorphic functions. It affirms that $\mathcal{H}(\Omega)$ is a closed set of $\mathcal{C}(\Omega)$ for τ_c and that derivation is a continuous function for τ_c. As a consequence, a sequence of holomorphic functions is convergent if and only if all its derivatives converge in the topology τ_c.

HURWITZ: If a sequence of holomorphic functions converges to a holomorphic function in τ_c then, except for a finite number of them, they all have the same number of zeros as the limit function on any open disk.

MONTEL: It characterizes relatively compact families of holomorphic functions, so it is the version of the Arzelà-Ascoli theorem in $\mathcal{H}(\Omega)$.

The interest in the compact or relatively compact families of functions of $\mathcal{C}(\Omega)$ and $\mathcal{H}(\Omega)$ is based on the fact that their characterization allows us to anticipate whether the supremum of certain family of functions defined in $\mathcal{C}(\Omega)$ and $\mathcal{H}(\Omega)$ is actually maximum, that is, whether it is reached.

The third chapter is devoted to the study of the topological dual space of $\mathcal{H}(\Omega)$. In the first part of this chapter the multiplicative linear functionals are characterized in $\mathcal{H}(\Omega)$ and the notion of germ is introduced. Next, we study the dual of $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. We devote a section for the dual of $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ as a particular case, in which we will characterize $\mathcal{H}'(\mathbb{D})$ in terms of sequence spaces. This is specific for $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Then we also use germs and power series to characterize $\mathcal{H}'(\mathbb{D})$. Finally, we show the main result of the chapter, Theorem 3.14, which identifies the dual of $\mathcal{H}(\Omega)$ with the space of germs of holomorphic functions on the complement of Ω.

Resumen

El propósito de este trabajo es estudiar las propiedades de compacidad y dualidad en el espacio de funciones holomorfas sobre un dominio abierto complejo.
En lo que sigue, Ω es un abierto del plano complejo. Denotaremos por $\mathcal{C}(\Omega)$ al álgebra de las funciones continuas en Ω con valores complejos, y por $\mathcal{H}(\Omega)$ al subálgebra de las funciones holomorfas en Ω.
La noción natural de convergencia de sucesiones de funciones holomorfas es la de la convergencia uniforme sobre compactos, denotada por τ_c. Decimos natural en el sentido de que ésta es la noción de convergencia de la que se deriva que los límites hereden propiedades que comparten los términos de las sucesiones. Para este fin, la convergencia puntual sería insuficiente mientras que la convergencia uniforme sobre todo el dominio sería una exigencia excesiva. Así, las sucesiones convergentes serán las que converjan uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$. Dicha topología fue introducida por Ralph Fox en 1945 [1].

El contenido de este trabajo se divide en tres partes:

En el primer capítulo el objetivo es recordar definiciones, propiedades y teoremas estudiados durante el grado, que nos introducen en el tema y que son necesarios para demostrar los resultados que se presentan posteriormente.

En el segundo capítulo se introduce la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Estudiaremos primeramente esa noción de convergencia en la situación general de sucesiones de funciones continuas, para, a continuación, abordar el estudio de las sucesiones de funciones holomorfas.

En este capítulo estudiaremos los siguientes teoremas:

ARZELÀ-ASCOLI: Caracteriza los conjuntos compactos en $\mathcal{C}(\Omega)$ con respecto a la topología τ_c.

WEIERSTRASS: Es el teorema fundamental de convergencia para sucesiones de funciones holomorfas. Afirma que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un conjunto cerrado de $\mathcal{C}(\Omega)$ en τ_c y que la derivación es una función continua para τ_c. Como consecuencia, una sucesión de funciones holomorfas es convergente si y solo si convergen todas sus derivadas en la topología τ_c.

HURWITZ: Enuncia que si una sucesión de funciones holomorfas convergen a una función holomorfa en τ_c, entonces salvo un número finito de ellas, todas tienen el mismo número de ceros que la función límite en cualquier disco abierto.

MONTEL: Caracteriza las familias relativamente compactas de funciones holomorfa. Es una adaptación del teorema de Arzelà-Ascoli en $\mathcal{H}(\Omega)$.

El interés por las familias de funciones en $\mathcal{C}(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega)$ relativamente compactas o compactas estriba en que su caracterización permite anticipar si el supremo de cierta familia de funciones

definidas en $\mathcal{C}(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega)$ es en realidad máximo, es decir, si se alcanza.

El tercer capítulo se dedica al estudio del espacio dual topológico de $\mathcal{H}(\Omega)$. En la primera parte de este capítulo se caracterizan los funcionales lineales multiplicativos en $\mathcal{H}(\Omega)$ y se introduce la noción de germen. Seguidamente estudiaremos el dual de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Dedicamos una sección para el dual de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ por ser un caso particular, en el cual caracterizaremos $\mathcal{H}'(\mathbb{D})$ en términos de espacios de sucesiones. Esto es específico para $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Después también utilizaremos germenes y series de potencias para caracterizar $\mathcal{H}'(\mathbb{D})$. Por último, estudiaremos el dual de $\mathcal{H}(\Omega)$. En esta sección veremos el resultado principal del capítulo, el Teorema 3.14, que identifica el dual de $\mathcal{H}(\Omega)$ con el espacio de gérmenes de las funciones holomorfas sobre el complementario de Ω.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo consta de una recopilación de definiciones, notaciones y resultados básicos que serán necesarios en la memoria.
En todo este trabajo tomamos como cuerpo el de los números complejos, $\mathbb{C}$, dotado de su topología canónica asociada a la norma euclídea.

1.1. Nociones topológicas.

Si X es un conjunto no vacío sobre el cual se ha definido una topología τ, diremos que el par (X, τ) es un espacio topológico. Suponemos conocida la teoría básica de espacios métricos. Dado un espacio métrico (X, d), si $x \in X$ y $r > 0$ están fijados definimos

$$\mathcal{B}(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\} \text{ y } \overline{\mathcal{B}}(x,r) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

$\mathcal{B}(x,r), \overline{\mathcal{B}}(x,r)$ se denominan bola abierta y cerrada , respectivamente, con centro x y radio r. En el caso $X = \mathbb{C}$ se suele utilizar la notación de discos en lugar de bolas, es decir

$$D(x,r) := \{y \in X : |x-y| < r\} \text{ y } \overline{D(x,r)} := \{y \in X : |x-y| \leq r\}.$$

Recordemos que una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos se llama recubrimiento de un conjunto M cuando $M \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Dado un recubrimiento $\{A_i\}_{i \in I}$ de M, se llama subrecubrimiento de M a todo recubrimiento $\{A_i\}_{i \in J}$ tal que $J \subset I$. Un subconjunto M de un espacio métrico X es compacto si todo recubrimiento por abiertos de M posee algún subrecubrimiento finito. Un espacio métrico (X, d) es secuencialmente compacto si cada sucesión en X posee una subsucesión convergente. En espacios métricos ser compacto y secuencialmente compacto son nociones equivalentes.

Lema 1.1 (Lema cubrimiento de Lebesgue)**.** *Si (X, d) es secuencialmente compacto y $\mathcal{G}$ es un recubrimiento de X, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe un conjunto $J \subset \mathcal{G}$ con $\mathcal{B}(x, \epsilon) \subset J$.*

Demostración. Veáse [[2], p.21-22] □

Definición 1.2. Sea X un espacio métrico completo. Un subconjunto $Q \subseteq X$ se llama:
• Relativamente compacto : si la clausura topológica $\overline{Q}$ de Q es compacta.
• Precompacto ó totalmente acotado : si para todo $\epsilon > 0$ existen $p_1, \ldots, p_n \in X$ tal que $Q \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathcal{B}(p_j, \epsilon)$.
• Normal: si toda sucesión $\{p_n\} \subseteq Q$ posee una subsucesión $\{p_{n_k}\}$ convergente en X, es decir, existe $p \in X$ tal que $p = \lim\limits_{k \to \infty} p_{n_k}$.

Teorema 1.3. *Si X es un espacio métrico completo y $Q \subseteq X$, entonces*

$$Q \text{ es relativamente compacto} \iff Q \text{ es precompacto} \iff Q \text{ es normal.}$$

Demostración. Véase [[2], p.146] □

Definición 1.4. Sea X un espacio vectorial complejo. Una seminorma en X es una aplicación $p : X \to [0, +\infty)$ tal que:

- $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x), \quad \lambda \in \mathbb{C},\ x \in X,$
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad x,\ y\ \in X$

Si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ provisto de una topología τ que hace continuas las operaciones

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times X & \longrightarrow & X \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

diremos que X es un espacio vectorial topológico. Si, además, existe una familia de seminormas $\mathcal{P}$ de manera que los conjuntos $\mathcal{B}(y, p, \epsilon) := \{x \in X : p(x - y) < \epsilon \text{ con } p \in \mathcal{P},\ y \in X,\ \epsilon > 0\}$ generan una topología sobre X, diremos que X es un espacio vectorial topológico localmente convexo. El término de localmente convexo deriva de que los conjuntos $\mathcal{B}(y, p, \epsilon)$ son convexos. Es decir, si $x, x' \in \mathcal{B}(y, p, \epsilon)$ y $0 < \alpha < 1$, entonces $\alpha x + (1 - \alpha)x' \in \mathcal{B}(y, p, \epsilon)$.

El concepto de espacio vectorial topológico es muy amplio, podemos definir la siguiente estructura más particular.

Definición 1.5. Llamaremos álgebra topológica a toda álgebra compleja A que sea espacio vectorial topológico y tal que la multiplicación de anillo

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

sea continua.

Dada una función definida en un conjunto, a menudo resulta útil poder extenderla a un conjunto mayor de manera que siga conservando algunas de sus propiedades (continuidad, diferenciabilidad, etc) en su nuevo dominio. Recordemos dos resultados importantes de extensión que serán empleados posteriormente. (Uno de ellos lo recordamos en esta sección, mientras que el teorema de Hahn-Banach lo veremos en la sección 1.3).

Teorema 1.6 (Tietze)**.** *Sea X un espacio topológico normal, es decir, para cualquier par de conjuntos cerrados disjuntos E y F en X existe un par de abiertos disjuntos U y V con $E \subset U$, $F \subset V$. Entonces para cualquier conjunto cerrado $A \subset X$ y cualquier función continua $f : A \to \mathbb{C}$, existe una función $F : X \to \mathbb{C}$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Además, si $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in A$ entonces F puede ser elegida de manera que $|F(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Véase [[3], p.149-151] □

Finalizaremos esta sección con un conocido resultado sobre funciones continuas cuya demostración puede verse en [4].

Teorema 1.7 (Stone-Weierstrass)**.** *Sea X compacto y sea $\mathcal{C}(X)$ el espacio de funciones continuas complejas sobre X con la norma $\|f\|_X = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Sea A una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$ tal que $f \in A$ implica $\overline{f} \in A$ y A contiene todas las funciones constantes. Entonces A es densa en $\mathcal{C}(X)$ si A separa puntos en X (es decir, para cualquier $x, y \in X, x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$).*

1.2. Nociones de Variable Compleja.

Aunque suponemos conocida la teoría básica de análisis complejo recordamos aquí algunos resultados que serán usados en los teoremas de esta memoria, y que hacen más legible su lectura.
Sea Ω abierto de $\mathbb{C}$. Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un punto $z_0 \in \Omega$ si f es derivable en todos los puntos de un entorno de z_0 en Ω. Decimos que f es holomorfa en Ω si f es holomorfa en cualquier $z_0 \in \Omega$.
Por otra parte, una función $h : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice analítica en $a \in \Omega$, si h coincide con una serie de potencias en un entorno de a en Ω. Decimos que h es analítica en Ω si lo es en cada punto $a \in \Omega$.
Resultado central en la teoría es que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω si y solo si f es analítica en Ω.

A continuación vamos a enunciar una serie de resultados cuyas demostraciones pueden verse en [[2], cáp 3-5].
En el siguiente teorema, un segmento orientado se refiere a una curva γ de la forma $\gamma(t) = \gamma_0 + at, 0 \leq t \leq 1$, donde γ_0 es el punto inicial de la curva y $a \in \mathbb{C}$, es decir, un segmento con una dirección especifica impuesta. Si $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ son segmentos (orientados), entonces escribimos $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_n$ y $\int_\Gamma f(z)dz$ significa $\sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} f(z)dz$.

Teorema 1.8 (Teorema homológico de Cauchy). *Dado un abierto Ω y un conjunto compacto $K \subseteq \Omega$, existe una sucesión finita $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots, \Gamma_n$ de segmentos orientados en $\Omega \setminus K$ cuya unión forma un camino cerrado Γ tal que para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*

a) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$

b) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a)$ *para cada* $a \in K$.

Proposición 1.9 (Fórmula de Cauchy para las derivadas). Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y f una funcion holomorfa en Ω. Dado $a \in \Omega$, sea $r > 0$ tal que $\overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$. Entonces, si $|z-a| < r$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\omega - a| = r} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}}\, d\omega$$

Teorema 1.10 (Teorema de Morera). *Sea Ω una región (es decir, un subconjunto abierto y conexo del plano) y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua tal que $\int_T f = 0$ para cada camino triangular T en Ω; entonces f es analítica en Ω.*

Se dice que una función es meromorfa en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ si f es holomorfa en Ω excepto quizás en un conjunto aislado de singularidades, en cada una de las cuales f tiene un polo.

Teorema 1.11 (Teorema de Rouché). *Sean f y g dos funciones meromorfas de Ω, Γ un ciclo en Ω que limita un recinto $G \subseteq \Omega$ de manera que sop Γ no contenga ceros ni polos de f ó g. Si $Z_f, Z_g (P_f, P_g)$ son el número de ceros (polos) de f y g respectivamente en el interior de Γ contados según su multiplicidad y si*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

para todo $z \in$ sop Γ, entonces:

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

1.3. Nociones sobre dualidad

El interés de estudiar el dual de un espacio está en que su estructura nos proporciona información sobre la de dicho espacio.

Sea X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Decimos que L es un funcional lineal si es una aplicación $L : X \to \mathbb{C}$ tal que $L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$ para $a, b \in \mathbb{C}, f, g \in L$. Asimismo, si X es un espacio vectorial topológico y L es continuo, L es llamado funcional lineal continuo. La colección de funcionales lineales continuos de X es llamado dual de X y denotado por X'. Si, además, X es un álgebra y un funcional lineal L posee la propiedad $L(fg) = L(f)L(g)$ para $f, g \in X$, diremos que L es un funcional lineal multiplicativo, es decir, es un homomorfismo algebraico de X en $\mathbb{C}$. En la propia definición de funcional lineal excluiremos el caso en que $L \equiv 0$.

Veamos un resultado sobre funcionales lineales en espacios vectoriales topológicos localmente convexos.

Proposición 1.12. Un funcional lineal L sobre un espacio vectorial topológico localmente convexo X es continuo si y sólo si existe una seminorma $\|\cdot\|_0$ y un número positivo λ tal que $|L(f)| \leq \lambda \|f\|_0$ para toda función $f \in X$.

Demostración. Primero suponemos que $|L(f)| \leq \lambda \|f\|_0$. Sea $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{\lambda}$ tal que si $\|f\|_0 < \delta$ entonces $|L(f)| < \epsilon$, es decir, L es continuo en 0 y por linealidad, en todo punto.
Recíprocamente, suponemos que L es continuo. Entonces si tomamos $U = D(0, 1)$ que es un abierto del plano complejo, $L^{-1}(U) := \{f \in X : L(f) \subset U\}$ es un abierto de X. Notar que $0 \in L^{-1}(U)$, luego existe un entorno N de 0 tal que para todo $f \in N \subseteq L^{-1}(U)$, luego $|L(f)| < 1$.
Como X es localmente convexo, por definición, existe una familia de seminormas $\mathcal{P}$ que generan su topología. En particular conocemos la base de entornos del 0 que son, por definición, de la forma $\mathcal{B}(0, p, \epsilon) = \{f \in X : p(f) < \epsilon \text{ con } p \in \mathcal{P}, \epsilon > 0\}$ o intersección finita de estos conjuntos. Como N es de esta forma, existe una seminorma $\|\cdot\|_0$ y un $\epsilon > 0$ tal que si $\|f\|_0 \leq \epsilon$ entonces $f \in N$.
Sea $f \in X$ tal que $\|f\|_0 \neq 0$. Entonces $\epsilon \frac{f}{\|f\|_0} \in N$ lo que implica que $\left|L\left(\epsilon \frac{f}{\|f\|_0}\right)\right| < 1$ de lo que se sigue que $|L(f)| < \frac{\|f\|_0}{\epsilon}$.
Si $\|f\|_0 = 0$ entonces $nf \in N$, para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $|L(nf)| < 1$, es decir $|L(f)| < \frac{1}{n}$. Esto claramente significa que $L(f) = 0$.
Por tanto, $|L(f)| \leq \lambda \|f\|_0$ con $\lambda = 0$ ó $\lambda = \frac{1}{\epsilon}$. □

A continuación recordaremos el otro resultado sobre extensión de funciones, como hemos comentado previamente. El teorema de Hahn-Banach es una herramienta importante en análisis funcional que permite extender cualquier funcional lineal acotado definido en un subespacio vectorial al espacio vectorial que lo contiene.

Teorema 1.13 (Hahn-Banach). *Si X es un espacio vectorial topológico localmente convexo, A es un subespacio de X, y $L : A \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal continuo sobre A, entonces L tiene una extensión $\widetilde{L}$ en X', es decir, $\widetilde{L}$ es un funcional lineal continuo sobre E y $\widetilde{L}(a) = L(a)$ para todo $a \in A$.*

Demostración. Véase[[6], p.56-57]. □

1.4. Nociones sobre teoría de la medida.

En esta sección vamos a comentar varios conceptos y resultados basados en la teoría de la medida, que nos servirán para estudiar posteriormente la dualidad de $\mathcal{H}(\Omega)$.

En primer lugar, vamos a definir lo que es una medida compleja. Recordar que un espacio medible es un par (X, A), formado por un conjunto arbitrario, X, y una colección de subconjuntos $A \subseteq P(X)$ con estructura de σ-álgebra.

Definición 1.14. Sea (X, A) un espacio medible. Una medida compleja sobre (X, A) es una aplicación $\mu : A \to \mathbb{C}$ que verifica:

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) Para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ de conjuntos medibes disjuntos entre sí,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

A partir de esta definición podemos definir el espacio de medidas complejas. Sea (X, A) un espacio medible, denotamos

$$M(X) = \{\mu : A \to \mathbb{C} \ : \ \mu \text{ medida } \}.$$

Si además X es un espacio topológico, podemos tomar como A la σ-álgebra $B(X)$ de los bolerianos de X.
Tomamos $(X, A) = (\Omega, A)$ con Ω un abierto del plano complejo y A la σ-álgebra $B(\Omega)$.

Definición 1.15. Si K es un compacto de Ω de modo que para alguna constante C, $|\int_\Omega f \, d\mu| \leq C\|f\|_K$ para todo $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, diremos que K soporta a μ.

Recordemos que el soporte de una función es el compacto más pequeño que cumple la definición anterior.
Definimos $M_0(\Omega)$ como el conjunto de todas medidas μ con soporte compacto, es decir, una medida $\mu \in M_0(\Omega)$ si el conjunto donde dicha medida no es nula forma un conjunto cerrado y acotado de Ω.
Las medidas de $M_0(\Omega)$ tienen las mismas propiedades que los funcionales lineales continuos (que es lo que son). Dada $\mu \in M_0(\Omega)$,

a) $\int_\Omega (f + g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu, \quad f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$.

b) $\int_\Omega af \, d\mu = a \int_\Omega f \, d\mu, \quad f \in \mathcal{C}(\Omega), a \in \mathbb{C}$.

c) Si $f_n \to f$ en $\mathcal{C}(\Omega)$ para tau_c entonces $\int_\Omega f_n \, d\mu \to \int_\Omega f \, d\mu$.

d) Existe un compacto $K \subseteq \Omega$ tal que $|\int_\Omega f \, d\mu| \leq C\|f\|_K$, para todo $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

Una consecuencia de la desigualdad de la definición 1.15 es que si $\mu \in M_0(\Omega)$, $\int_\Omega f \, d\mu$ es independiente de los valores de f en $\Omega \setminus K$. Es decir, si f,$g \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $f_{|K} = g_{|K}$ entonces $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$. En efecto, basta observar $|\int_\Omega (f - g) \, d\mu| \leq C\|f - g\|_K = 0$.

Vamos a presentar la notación que emplearemos para el estudio del dual de $\mathcal{H}(\Omega)$. Dicha notación nos va a permitir crear una biyección entre funcionales y medidas.
Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $L : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal y continuo y μ una medida con soporte compacto $K \subset \Omega$, entonces

$$L_\mu(f) := \int_\Omega f \, d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

y además $|L_\mu(f)| \leq M\|f\|_K$ donde $M = |\mu(K)|$.
Por otra parte, como consecuencia del Teorema de representación de Riesz [[7], p.130] se tiene que todo funcional $S \in \mathcal{C}(K)'$, donde K es un compacto, tiene una medida asociada, es decir

$$S(g) = \int_K g \, d\mu, \quad g \in \mathcal{C}(K).$$

Sea $L \in \mathcal{C}(\Omega)'$, luego existe una constante M y un compacto $K \subset \Omega$ tal que $|L(f)| \leq M\|f\|_K$, para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Defino el funcional

$$\begin{array}{rccl} S\colon & \mathcal{C}(K) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & g & \longmapsto & S(g) := L(g^j) \end{array}$$

donde g^j es cualquier extensión continua de g en Ω. Este funcional está bien definido ya que si g^{j_1}, g^{j_2} son dos extensiones de g en Ω

$$|L(g^{j_1}) - L(g^{j_2})| = L(g^{j_1} - g^{j_2})| \leq M\|g^{j_1} - g^{j_2}\|_K = 0,$$

y razonando de una forma similar es fácil ver que es lineal y continuo. Luego $S \in \mathcal{C}(K)'$, y por el Teorema de representación de Riesz existe una medida μ tal que $S(g) = \int_K g\, d\mu$, $\forall g \in \mathcal{C}(K)$. Ahora sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $K \subset \Omega$ compacto, tomamos $g = f_{|K}$ de manera que f es una extensión de g y por tanto

$$L(f) = S(g) = \int_K g\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Llamaremos μ a la medida asociada a L, y podemos identificar μ y L. Dicho esto podemos escribir que $M_0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)'$.

Definición 1.16. Para $\mu, \nu \in M_0(\Omega)$ se escribe $\mu \underset{m}{\sim} \nu$ para referirse a que $\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f\, d\nu$ para todo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Es obvio que $\underset{m}{\sim}$ es una relación de equivalencia y escribiremos $\lfloor \mu \rfloor$ para referirnos a la clase de equivalencia de μ. Usaremos $M_0^*(\Omega)$ para denotar el espacio vectorial de todas clases de equivalencia $\lfloor \mu \rfloor$ para todo $\mu \in M_0(\Omega)$.

En esta sección también incluiremos una versión del Teorema de Fubini que será utilizado posteriormente.

Proposición 1.17. Dados dos abiertos Ω y Ω' en $\mathbb{C}$, dos medidas $\mu \in M_0(\Omega)$ y $\mu' \in M_0(\Omega')$ y dos conjuntos compactos $K \subseteq \Omega$ y $K' \subseteq \Omega'$ que soportan, respectivamente, a μ y μ', entonces

$$\int_{\Omega'} \left(\int_\Omega F(z,z')\, d\mu(z) \right)\, d\mu'(z') = \int_\Omega \left(\int_{\Omega'} F(z,z')\, d\mu'(z') \right)\, d\mu(z) \tag{1.1}$$

para todo $F \in \mathcal{C}(K \times K')$.

Demostración. Notemos que todas las integrales tienen sentido: Fijado z', $F(z,z') \in \mathcal{C}(K)$ y $\int_\Omega F(z,z')\, d\mu(z)$ es continua sobre K' por la continuidad uniforme de F sobre $K \times K'$. Debido a que podemos entender que μ y μ' son funcionales continuos sobre $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(K')$ basta probar el resultado para un conjunto de funciones densas en $\mathcal{C}(K \times K')$. Ahora el espacio de polinomios en x, y, x' e y' ($z = x + iy, z' = x' + iy'$) es denso por el teorema de Stone-Weierstrass en $\mathcal{C}(K \times K')$ y entonces para la igualdad (1.1) basta observar:

$$\int_{\Omega'} \left(\int_\Omega f(z)g(z')\, d\mu(z) \right)\, d\mu'(z') = \left(\int_\Omega f(z)\, d\mu(z) \right) \cdot \left(\int_{\Omega'} g(z')\, d\mu'(z') \right)$$

$$= \int_\Omega \left(\int_{\Omega'} f(z)g(z')\, d\mu'(z') \right)\, d\mu(z),$$

para todo f y g polinomios. □

Capítulo 2

Propiedades de los espacios $\mathcal{C}(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega)$.

Comenzamos el capítulo recordando la noción de convergencia uniforme sobre un conjunto.

Definición 2.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{C}$ y sean $f_n, f : A \to \mathbb{C}$. Se dice que f_n converge a f uniformemente en A si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_0,\ |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall z \in A.$$

Equivalentemente,

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

También lo indicaremos mediante

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Está claro que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual en cada punto de A.

2.1. Topología de la convergencia uniforme sobre compactos. El espacio $\mathcal{C}(\Omega)$.

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ con la métrica euclídea. Recordemos que $\mathcal{C}(\Omega)$ es el espacio de las funciones continuas en Ω. En dicho espacio existe una topología natural para la que las sucesiones convergentes son las que convergen uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$. Esta topología es conocida como topología de *la convergencia uniforme sobre compactos*, y la introduciremos en lo que sigue. Dado K compacto en Ω, definimos:

$$\|f\|_K := \sup_{z \in K} |f(z)| \equiv \max_{z \in K} |f(z)|$$

Entonces $\|\cdot\|_K$ es una seminorma, y la colección de seminormas $\{\|\cdot\|_K\}$ en donde K recorre todos los compactos de Ω genera una topología en $\mathcal{C}(\Omega)$. Dicha topología es la que tiene por base de entornos las intersecciones finitas de "semibolas" de la forma $\mathcal{B}(K, \epsilon) := \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : \|f\|_K < \epsilon\}$, es decir:

$$\mathcal{B}(K_1, \ldots, K_n\ ,\ \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) := \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{B}(K_j, \epsilon_j) = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : \|f\|_{K_j} < \epsilon_j;\ \forall j = 1, \ldots, n\}$$

siendo $K_1, \dots, K_n$ un conjunto finito arbitrario de compactos de Ω y $\epsilon_j > 0$.
Entonces los abiertos básicos en cualquier $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ dada son , por traslación:

$$\mathcal{B}^{K_1,\dots,K_n}_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n}(f) := \{g \in \mathcal{C}(\Omega) : \|g - f\|_{K_j} < \epsilon_j;\ \forall j = 1, \dots, n\}.$$

Tomando $\epsilon := \min\limits_{1 \leq j \leq n} \epsilon_j$ podemos escribir ϵ en lugar de ϵ_j entre las llaves.
Llamaremos a esta topología la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, denotada por τ_c en $\mathcal{C}(\Omega)$, y motiva el siguiente resultado.

Proposición 2.2. Sea $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Entonces:

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\tau_c} f \iff \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_K = 0, \quad \forall K \text{ compacto de } \Omega.$$

El principal objetivo de esta sección demostrar que la topología de la convergencia uniforme sobre compactos es metrizable. El interés de este resultado reside, entre otras cosas, en la posibilidad de caracterizar los compactos usando sucesiones. Para ello necesitaremos el siguiente lema:

Lema 2.3 (Lema de exhaustividad). *Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, existe una sucesión $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ tal que $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Además, los conjuntos K_n pueden ser elegidos satisfaciendo las siguientes condiciones:*

a) $K_n \subset \mathit{int}\ K_{n+1}$;

b) $K \subset \Omega$ *y* K *compacto implica que* $K \subset K_n$ *para algún* n;

c) *Cada componente conexa de* $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ *contiene una componente conexa de* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. *(Denotamos* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$*).*

Demostración. No se incluye la demostración por considerar el lema de carácter topológico auxiliar. Para una prueba puede verse [[2],p.143] □

<u>NOTA</u>: Diremos que una sucesión de compactos es exhaustiva cuando cumpla las condiciones del lema anterior.

Del lema anterior se sigue que toda sucesión exhaustiva de compactos en Ω define la misma topología τ_c en $\mathcal{C}(\Omega)$. Más aún, $\{\|\cdot\|_K\}$, en donde K recorre todos los compactos de Ω, y $\{\|\cdot\|_{K_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ definen la misma topología para cualquier sucesión exhaustiva de compactos en Ω.

Vamos a dotar al espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ de una métrica ρ de manera que la convergencia uniforme sobre compactos de Ω sea equivalente a la convergencia en el espacio métrico $(\mathcal{C}(\Omega), \rho)$. Sea entonces Ω un abierto fijo y tomemos una sucesión exhaustiva de compactos $\{K_n\}$. Se define

$$\rho_n(f, g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K_n\} = \|f - g\|_{K_n}, \quad \forall\ f, g \in \mathcal{C}(\Omega),$$

y

$$\begin{array}{rccl} \rho\colon & \mathcal{C}(\Omega) \times \mathcal{C}(\Omega) & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & (f, g) & \longmapsto & \rho(f, g) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}. \end{array} \tag{2.1}$$

Notar que ρ está bien definida ya que $0 \leq \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \leq 1$, y entonces la serie es convergente. También podemos afirmar que ρ es una métrica. En efecto, $\rho(f, g) \geq 0$ para todo $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $\rho(f, g) = 0$ si y sólo si $f = g$. La desigualdad triangular es consecuencia de que:

$$\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} \leq \frac{\rho_n(f, h)}{1 + \rho_n(f, h)} + \frac{\rho_n(h, g)}{1 + \rho_n(h, g)} \quad \forall f, g, h \in \mathcal{C}(\Omega)$$

ya que $\rho_n(\cdot,\cdot) \geq 0$ y $\frac{x}{1+x}$ es una función creciente para todo $x \geq 0$.

Veamos que la topología definida por ρ coincide con τ_c

Proposición 2.4. Sea ρ la métrica definida en (2.1). Si $\epsilon > 0$ entonces existe $\delta > 0$ y un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que para $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$,

$$\|f-g\|_K < \delta \implies \rho(f,g) < \epsilon. \tag{2.2}$$

Recíprocamente, si $\delta > 0$ y K es un conjunto compacto de Ω, existe un $\epsilon > 0$ tal que para $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$,

$$\rho(f,g) < \epsilon \implies \|f-g\|_K < \delta. \tag{2.3}$$

Demostración. Fijamos $\epsilon > 0$ y tomamos $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{2}$. Ponemos $K := K_N$, de la sucesión exhaustiva de compactos. Como $t \longmapsto \frac{t}{1+t}$ es continua en $\mathbb{R}_0^+ := [0, +\infty)$ y en $t = 0$ dicha función tiende a 0, podemos elegir $\delta > 0$ tal que $0 \leq t < \delta$ implica que $\frac{t}{1+t} < \frac{\epsilon}{2}$. Supongamos que f y g son funciones de $\mathcal{C}(\Omega)$ que cumplen $\|f-g\|_K < \delta$ entonces:

a) Para $1 \leq n \leq N$ como $K_n \subseteq K_N = K$ entonces $\rho_n(f,g) = \|f-g\|_{K_n} \leq \|f-g\|_K < \delta$. Por tanto,
$$\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

b) Para $n > N+1$, tenemos
$$\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < 1.$$

Por a) y b) obtenemos

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < \frac{\epsilon}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Así, se cumple (2.2).

Recíprocamente, sea $\delta > 0$ y K un conjunto compacto de Ω. Como $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{int} K_n$ y K es un compacto existe un entero $N \geq 1$ tal que $K \subseteq K_N$. Por tanto,

$$\rho_N(f,g) \geq \|f-g\|_K.$$

La inversa de $\frac{t}{1+t}$ es $s \longmapsto \frac{s}{1-s}$ que es una función continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Sea $\epsilon > 0$ de manera que $0 < s < 2^N \epsilon$ implica $\frac{s}{1-s} < \delta$, entonces $\frac{t}{1+t} < 2^N \epsilon$ implica que $t < \delta$. Luego si $\rho(f,g) < \epsilon$ entonces $\frac{\rho_N(f,g)}{1+\rho_N(f,g)} < 2^N \epsilon$ y por tanto $\rho_N(f,g) < \delta$. Con lo que se cumple (2.3) ya que,

$$\|f-g\|_K \leq \|f-g\|_{K_N} = \rho_N(f,g) < \delta.$$

□

De este resultado concluimos que

- τ_c es metrizable, es decir que ρ y $\{\|\cdot\|_K\}$, en donde K recorre todos los compactos de Ω, definen la misma topología.

- Como $(\mathcal{C}(\Omega), \tau_c)$ es metrizable podemos describir la topología τ_c mediante sucesiones.

Teorema 2.5. *$(\mathcal{C}(\Omega), \tau_c)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Supongamos $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(\Omega)$. Entonces para cada conjunto compacto K de Ω, si restringimos las funciones f_n a K obtenemos una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(K)$ con la norma del supremo sobre K. Es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un entero n_ϵ tal que:

$$\|f_n - f_m\|_K < \epsilon \quad \forall m, n \geq n_\epsilon. \tag{2.4}$$

En particular, $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ para todo $z \in K$, luego $\{f_n(z)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ y como $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo entonces existe un punto $f(z)$ en $\mathbb{C}$ tal que:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad \forall z \in K.$$

Además de (2.4) se sigue que $\forall m, n \geq n_\epsilon, \forall z \in K$,

$$|f(z) - f_m(z)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon,$$

de modo que $\|f - f_m\|_K < \epsilon$, donde

$$\begin{array}{rccc} f\colon & K & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z) \end{array}.$$

Por tanto, f_n converge a f uniformemente sobre K. Como f_n es una sucesión de funciones continuas, tenemos que f también lo es. Así, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_c} f$. □

2.2. Compacidad en el espacio $\mathcal{C}(\Omega)$.

Continuamos este capítulo estudiando los subconjuntos compactos del espacio topológico $(\mathcal{C}(\Omega), \tau_c)$. En la caracterización de dichos subconjuntos interviene la noción de familia equicontinua de funciones que se define a continuación.

Definición 2.6. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Una familia de funciones $\mathcal{F}$ en $\mathcal{C}(\Omega)$ se dice equicontinua en $z \in \Omega$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta_{z,\epsilon} > 0$ tal que:

$$\omega \in \Omega \text{ con } |z - \omega| < \delta \implies |f(z) - f(\omega)| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Se dice que $\mathcal{F}$ es equicontinua en Ω cuando es equicontinua en cada punto $z \in \Omega$.

Definición 2.7. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$, K conjunto compacto de Ω y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ una familia de funciones equicontinuas en Ω. Se dice que $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua sobre K si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta_{K,\epsilon} > 0$ tal que:

$$z, \omega \in K \text{ con } |z - \omega| < \delta \implies |f(z) - f(\omega)| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

La equicontinuidad uniforme sobre compactos implica la equicontinuidad puntual. El siguiente resultado prueba la equivalencia.

Proposición 2.8. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ es equicontinua en Ω, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua sobre cada compacto de Ω.

Demostración. Sea K un conjunto compacto de Ω y sea $\epsilon > 0$. Entonces para cada $w \in K$, existe $\delta_w > 0$ tal que $|f(w') - f(w)| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda función $f \in \mathcal{F}$ siempre que $|w - w'| < \delta_w$. Por lo tanto $\{D(w, \delta_w) : w \in K\}$ forma un recubrimiento abierto de K. Por el lema de cubrimiento de Lebesgue, existe $\delta > 0$ tal que para cada $z \in K$, $D(z, \delta)$ está contenido en uno de los discos del recubrimiento de K. Entonces si $z, z' \in K$ y $|z - z'| < \delta$ existirá $w \in K$ con $z' \in D(z, \delta) \subset D(w, \delta_w)$. Esto es, $|z - w| < \delta_w$ y $|z' - w| < \delta_w$. En consecuencia, $|f(z) - f(w)| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|f(z') - f(w)| < \frac{\epsilon}{2}$ y por tanto $|f(z') - f(z)| < \epsilon$ para cualquier $f \in \mathcal{F}$, lo que demuestra que $\mathcal{F}$ es equicontinua en K. □

El siguiente resultado relaciona la equicontinuidad con la propiedad de ser normal.

Teorema 2.9 (Arzelà-Ascoli)**.** *Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ es normal si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

a) $\mathcal{F}(z) := \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado en $\mathbb{C}$ para todo $z \in \Omega$.

b) $\mathcal{F}$ es equicontinua en Ω.

Demostración. Primero suponemos que $\mathcal{F}$ es normal. Notemos que para cada $z_0 \in \Omega$ la aplicación $\mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f \longmapsto f(z_0)$ es continua, pues $|f(z_0)| = \|f\|_{\{z_0\}}, \forall f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Entonces, teniendo en cuenta el Teorema 1.3, $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto en $\mathcal{C}(\Omega)$, luego $\overline{\mathcal{F}}(z_0)$ es compacto en $\mathbb{C}$ y por tanto $\mathcal{F}(z_0)$ es acotado en $\mathbb{C}$.

Veamos la equicontinuidad.
Sea $z_0 \in \Omega$ fijo y tomemos $\epsilon > 0$. Fijamos $K := \overline{D(z_0, R)} \subseteq \Omega$ con $R > 0$. Por la Proposición 2.4 sabemos que existe $\alpha > 0$ tal que para cada par de funciones f y g continuas en Ω verificando que $\rho(f, g) < \alpha$, entonces:

$$\|f - g\|_K < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como $\mathcal{F}$ es precompacto existen funciones $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ tal que:

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{B}(f_j, \alpha) \tag{2.5}$$

Como cada f_j es continua en Ω, existe δ_j, $0 < \delta_j < R$ tal que:

$$|z - z_0| < \delta_j \implies |f_j(z) - f_j(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \forall z \in \Omega.$$

Tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Sea $f \in \mathcal{F}$ cualquiera. Por (2.5) existe un índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\rho(f, f_j) < \alpha$, luego $\|f - f_j\|_K < \frac{\epsilon}{3}$.
Entonces, para $z \in \Omega$ tal que $|z - z_0| < \delta$ obtenemos:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_j(z)| + |f_j(z) - f_j(z_0)| + |f_j(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq \|f - f_j\|_K + \frac{\epsilon}{3} + \|f_j - f\|_K < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{F}$ es equicontinua en z_0.
Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ satisface las condiciones a) y b).
Sea $\epsilon > 0$. De nuevo por la Proposición 2.4, sabemos que existe $\delta > 0$ y K un conjunto compacto de Ω tal que:

$$\|f - g\|_K < \delta \implies \rho(f, g) < \epsilon, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Vamos a ver que $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{B}_\delta^K(f_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : \rho(f, f_j) < \epsilon\}$ para alguna colección finita de funciones $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$. Ello implicará que $\mathcal{F}$ es precompacto y por tanto normal:

Como $\mathcal{F}$ es equicontinua en Ω, lo es uniformemente en cada compacto K de Ω, luego existe $\alpha > 0$ tal que si $\omega, z \in K$ con $|z - \omega| < \alpha$ entonces

$$|f(z) - f(\omega)| < \frac{\delta}{3}, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Como K es compacto, $K \subseteq \bigcup_{z \in K} D(z, \alpha) = \bigcup_{i=1}^{m} D(z_i, \alpha)$ con $z_1, \ldots, z_m \in K$. Es decir, para todo $z \in D(z_i, \alpha)$ con $i = 1, 2, \ldots, m$, se verifica:

$$|f(z) - f(z_i)| < \frac{\delta}{3}, \quad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{2.6}$$

Ahora, si $f \in \mathcal{F}, z \in K$, como existe un subíndice i tal que $|z - z_i| < \alpha$ resulta que,

$$|f(z)| \leq |f(z) - f(z_i)| + |f(z_i)| < \frac{\delta}{3} + |f(z_i)|$$

y como $\mathcal{F}(z_i)$ es acotado por hipótesis, existe $M := \sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Consideramos la aplicación continua:

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & \mathcal{F} & \longrightarrow & D(0, M) \times \overset{m)}{\cdots} \times D(0, M) \subseteq \mathbb{C}^m \\ & f & \longmapsto & (f(z_1), \ldots, f(z_m)), \end{array}$$

Como $D(0, M)^m$ es acotado, es precompacto en $\mathbb{C}^m$ luego $\phi(\mathcal{F})$ también lo es, por tanto existen funciones $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{F}$ tal que:

$$\phi(\mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} D\left(\phi(f_j), \frac{\delta}{3}\right),$$

es decir, para cada $f \in \mathcal{F}$, existe un subíndice $j, 1 \leq j \leq n$ tal que:

$$|f(z_i) - f_j(z_i)| < \frac{\delta}{3}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m.$$

Para finalizar, tomamos $f \in \mathcal{F}, z \in K$. Como $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} D(z_i, \alpha)$, existirá algún subíndice i_0, $1 \leq i_0 \leq m$, tal que $z \in D(z_{i_0}, \alpha)$, de modo que por (2.6),

$$|f(z) - f(z_{i_0})| < \frac{\delta}{3} \quad \text{y} \quad |f_j(z) - f_j(z_{i_0})| < \frac{\delta}{3}.$$

Así se deduce que para todo $z \in K$,

$$|f(z) - f_j(z)| \leq |f(z) - f(z_{i_0})| + |f(z_{i_0}) - f_j(z_{i_0})| + |f_j(z_{i_0}) - f_j(z)| < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta,$$

es decir, $\|f - f_j\|_K < \delta$ para todo $j = 1, \ldots, n$, como queríamos probar. □

2.3. Convergencia y compacidad en $\mathcal{H}(\Omega)$

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Pasamos ahora a considerar el espacio $\mathcal{H}(\Omega)$ formado por las funciones holomorfas en Ω. Observar que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subconjunto de $\mathcal{C}(\Omega)$ que hereda su topología.

Teorema 2.10 (Weierstrass). *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de $\mathcal{H}(\Omega)$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_c} f$ en $\mathcal{C}(\Omega)$. Entonces:*

a) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_c} f^{(k)} \quad$ *en* $\mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración. Para demostrar a) usaremos el Teorema de Morera, enunciado en los preliminares. Tomamos un triángulo T contenido en el interior de un disco $D \subset \Omega$. Como T es un compacto, $\{f_n\}$ converge a f uniformemente sobre T. Por tanto $\int_T f = \lim_{n\to\infty} \int_T f_n = 0$ por el Teorema de Cauchy, ya que f_n es holomorfa. Entonces f debe de ser holomorfa en cada disco $D \subset \Omega$, por lo que f es holomorfa en Ω.

Para probar b) sea $\overline{D(z_0, R)} \subseteq \Omega$ con $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$. Entonces por la Fórmula de Cauchy para las derivadas, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \overline{D(z_0, r)}$ con $0 \le r < R$, tenemos:

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\omega - z_0| = R} \frac{f_n(\omega) - f(\omega)}{(\omega - z)^{k+1}} \, d\omega.$$

Así,

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| &\le \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \sup \left\{ \frac{|f_n(\omega) - f(\omega)|}{|\omega - z|^{k+1}} : |\omega - z_0| = R \right\} \\ &\le \frac{k!\, R}{(R - r)^{k+1}} \cdot \|f_n - f\|_{\overline{D(z_0,R)}} \end{aligned}$$

Pero como por hipótesis $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_c} f$ entonces $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\overline{D(z_0,R)}} = 0$. Por tanto $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_c} f^{(k)}$ sobre $\overline{D(z_0, r)}$.

Para acabar, basta observar que todo compacto K está contenido en una unión finita de discos $\overline{D(z_0, r)}$. Como $f_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_c} f^{(k)}$ sobre cada $\overline{D(z_0, r)}$, entonces converge sobre K. □

En otros términos, el Teorema de Weierstrass afirma que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}(\Omega)$ (con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos) y que la operación de derivación $f \mapsto f'$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ es una funcion continua (con dicha topología).

Corolario 2.11. *$\mathcal{H}(\Omega)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Basta observar que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}(\Omega)$, cual es un espacio métrico completo. □

El Teorema de Weierstrass tiene una gran importancia, ya que gracias a b) podemos definir la siguiente topología.

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$, K un conjunto compacto de Ω y $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Entonces definimos la familia de seminormas:

$$\|f\|_{j,K} := \sup_j \|f^{(j)}\|_K, \quad \forall j \ge 0$$

Esta familia de seminormas es la que caracteriza la topología que denotamos por τ_c^∞. En ella,

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_c^\infty} f \iff f_n^{(j)} \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_c} f^{(j)}, \quad \forall j \ge 0.$$

Teorema 2.12. *En $\mathcal{H}(\Omega)$ coinciden las topologías τ_c y τ_c^∞, es decir,*

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_c} f \text{ en } \mathcal{H}(\Omega) \iff f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_c^\infty} f \text{ en } \mathcal{H}(\Omega).$$

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema de Weierstrass. □

El siguiente resultado es una aplicación de la convergencia dada por τ_c en $\mathcal{H}(\Omega)$.

Teorema 2.13 (Hurwitz)**.** *Sea Ω una región no vacía de $\mathbb{C}$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge a f. Si $f \not\equiv 0, a \in \Omega$ tal que $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$ y $f(z) \neq 0$ para todo z tal que $|z-a| = R$, entonces existe un entero N tal que para todo $n \geq N$ las funciones f, f_n poseen el mismo número de ceros en $D(a,R)$.*

Demostración. Como $f(z) \neq 0$ para todo z tal que $|z-a| = R$, entonces:

$$\delta = inf\{|f(z)| : |z-a| = R\} > 0.$$

Pero $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre $|z-a| = R$, luego existe un entero N tal que si $n \geq N$ y $|z-a| = R$ entonces

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{1}{2}\,\delta < |f(z)| < |f(z)| + |f_n(z)|.$$

Por tanto por el Teorema de Rouché, f y f_n tienen el mismo número de ceros en $D(a,R)$. □

Este es un resultado local pero tiene consecuencias de carácter global.

Corolario 2.14. *Sea Ω una región no vacía de $\mathbb{C}$ y sea f_n una sucesión de $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge a f. Entonces:*

1) *Si $f_n \neq 0$ en todo punto de Ω para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $f \equiv 0$ ó $f \neq 0$ en cada punto de Ω.*

2) *Si f_n es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $f \equiv cte$ ó f es inyectiva.*

Demostración. Para demostrar (1), suponemos que f no es idénticamente nula, pero que se anula en un cierto $a \in \Omega$. Entonces existiría cierto disco $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$ tal que f no se anula en $\overline{D(a,R)} \setminus \{a\}$. Actuando de la misma manera que en la demostración del Teorema de Hurwitz, el Teorema de Rouché nos afirma que f y f_n tienen el mismo número de ceros en $D(a,R) \subset \Omega$, lo que contradice la hipótesis de que las funciones f_n no se anulan en todo Ω.

Para probar (2) suponemos que f no es constante y veamos que es inyectiva. Sea $a \in \Omega$. En $\Omega \setminus \{a\}$, las funciones $f_n - f_n(a)$ no se anulan por hipótesis. Además $f_n - f(a)$ es una sucesión de $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge a $f - f(a)$, luego por (1) se deduce que, o bien $f - f(a)$ no se anula en $\Omega \setminus \{a\}$, como queremos, o bien $f - f(a) \equiv 0$, que no es el caso. □

A continuación veremos el Teorema de Montel, que da un criterio sencillo y muy útil para comprobar si una familia $\mathcal{F}$ de funciones de $\mathcal{H}(\Omega)$ es normal. Para caracterizar las familias normales necesitamos las siguiente definición.

Definición 2.15. Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ es uniformemente acotada sobre compactos si para cada conjunto compacto K de Ω existe una cota $M_K > 0$ tal que $|f(z)| \leq M_K$, para toda función $f \in \mathcal{F}$ y para todo $z \in K$. Es decir,

$$\|f\|_K \leq M_K, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Teorema 2.16 (Montel)**.** *Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ es normal si y solo si $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre compactos.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que $\mathcal{F}$ es normal y que no es uniformemente acotada sobre compactos. Por tanto, existe K compacto en Ω y una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$ tal que $\|f_n\|_K \geq n$. Como $\mathcal{F}$ es una familia normal, existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{n_j}\} \subseteq \{f_n\}$ tal que $f_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{\tau_c} f$ en $\mathcal{H}(\Omega)$.
Por ello, existe j_0 tal que para $j \geq j_0$ tenemos:

$$n_j \leq \|f_{n_j}\|_K \leq \|f_{n_j} - f\|_K + \|f\|_K \leq 1 + \|f\|_K$$

Lo que nos lleva a una contradicción, luego $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre compactos.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre compactos. Para demostrar que $\mathcal{F}$ es normal utilizaremos el Teorema de Arzelà-Ascoli. Como $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada sobre compactos, claramente $\mathcal{F}(z)$ es acotada $\forall z \in \Omega$.
Veamos la equicontinuidad de $\mathcal{F}$ en Ω. Sea $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{D(z_0, R)} \subseteq \Omega$. Por la Fórmula de Cauchy, para toda función $f \in \mathcal{F}$ y para todo $z \in D(z_0, \frac{R}{2})$ tenemos que:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega - z_0| = R} f(\omega) \left[\frac{1}{\omega - z} - \frac{1}{\omega - z_0} \right] d\omega \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega - z_0| = R} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)(\omega - z_0)} \, d\omega \right) \cdot (z - z_0) \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \sup \left\{ \frac{|f(\omega)|}{|\omega - z||\omega - z_0|} : |\omega - z_0| = R \right\} \cdot |z - z_0| \\ &\leq R \, \|f\|_{\overline{D(z_0, R)}} \, \frac{1}{\frac{R}{2} R} |z - z_0| \equiv C_R |z - z_0|. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{F}$ es equicontinua y por el Teorema de Arzelà-Ascoli, $\mathcal{F}$ es normal en $\mathcal{C}(\Omega)$, luego , en $\mathcal{H}(\Omega)$, ya que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}(\Omega)$. □

El Teorema de Montel, con respecto al Teorema de Arzelà-Ascoli, nos dice que para familias $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas la equicontinuidad sobre compactos es consecuencia de la acotación uniforme sobre compactos.
Este teorema tiene aplicaciones importantes en la teoría de variable compleja. Un ejemplo notable se tiene en el Teorema de representación conforme de Riemann, ver [[7],cáp 14].

Capítulo 3

Dualidad del espacio $\mathcal{H}(\Omega)$.

El concepto de dualidad es uno de los más productivos en análisis. Podemos caracterizar las aplicaciones del análisis funcional en gran parte como aplicaciones de dualidad. Nuestro objetivo es conocer el dual de $\mathcal{H}(\Omega)$, para ello en primer lugar daremos una serie de términos generales sobre la dualidad de $\mathcal{H}(\Omega)$ sin adentrarnos en su estructura, simplemente caracterizando cómo son los funcionales lineales multiplicativos en dicho espacio. En segundo lugar, estudiaremos la dualidad de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, ya que es un caso muy particular que emplea unas herramientas muy especificas. Y, finalmente, nos centraremos en el caso general.

3.1. Generalidades sobre la dualidad de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Comenzaremos con un resultado que nos caracteriza los funcionales lineales multiplicativos en $\mathcal{H}(\Omega)$. Para ello, comprobaremos previamente que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un álgebra topológica, basta con verificar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{H}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\Omega) \\ (f, g) & \longmapsto & fg \end{array}$$

es continua en τ_c.
Sea $(f_0, g_0) \in \mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{H}(\Omega)$: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|fg - f_0g_0\|_K < \epsilon \text{ si } \|f - f_0\|_K < \delta \text{ y } \|g - g_0\|_K < \delta.$$

En efecto,

$$\|fg-f_0g_0\|_K = \|fg-f_0g+f_0g-f_0g_0\|_K \leq \|f-f_0\|_K\|g\|_K+\|f_0\|_K\|g-g_0\|_K < \delta(\|g\|_K+\|f_0\|_K).$$

luego $\delta = \frac{\epsilon}{\|g\|_K+\|f_0\|_K}$.

Teorema 3.1. *En $\mathcal{H}(\Omega)$, los funcionales lineales multiplicativos son las evaluaciones puntuales. Es decir, si L es un funcional lineal multiplicativo sobre $\mathcal{H}(\Omega)$, entonces existe un $z_0 \in \Omega$ tal que $L(f) = f(z_0)$, para todo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Claramente la evaluación puntual sobre $\mathcal{H}(\Omega)$ es un funcional lineal multiplicativo.*

Demostración. Sea $c \in \mathbb{C}$, tomamos $\tilde{c}$ para denotar la función constante c, es decir $\tilde{c}(z) = c$. Sea L un funcional lineal multiplicativo. Como $L(\tilde{1}) = L(\tilde{1} \cdot \tilde{1}) = L(\tilde{1})\, L(\tilde{1})$ entonces $L(\tilde{1})$ es 0 ó 1. Si $L(\tilde{1}) = 0$ entonces $L(f) = L(\tilde{1} \cdot f) = 0 \cdot L(f) = 0$ para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Como por hipótesis hemos excluido el funcional nulo, debe ser $L(\tilde{1}) = 1$. Entonces $L(\tilde{c}) = L(c \cdot \tilde{1}) = c\, L(\tilde{1}) = c$. Denotamos ahora $\hat{z}$ la función identidad, $\hat{z}(z) = z$, para todo $z \in \Omega$.

Notemos que si $z_0 = L(\hat{z})$ entonces $z_0 \in \Omega$. En efecto, ya que si $z_0 \notin \Omega$, $\frac{1}{z-z_0} \in \mathcal{H}(\Omega)$,

dicho de otra manera, existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $(\hat{z} - \tilde{z_0})f = \tilde{1}$.
Por un lado tenemos

$$L((\hat{z} - \tilde{z_0}) \cdot f) = L(\tilde{1}) = 1,$$

pero por otro lado,

$$L((\hat{z} - \tilde{z_0}) \cdot f) = L(\hat{z} - \tilde{z_0}) \cdot L(f) = (z_0 - z_0) \cdot L(f) = 0,$$

con lo que llegamos a una contradicción.

Ahora, para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ la función

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & si \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ f'(z_0) & si \quad z = z_0 \end{cases}$$

es holomorfa en z_0 ya que $h \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ y $\exists \lim\limits_{z \to z_0} h(z)$ (por ser f holomorfa en Ω). Esto significa que existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $(\hat{z} - \tilde{z_0})g = f - f(z_0)$. Aplicando L a ambos lados obtenemos:

$$L((\hat{z} - \tilde{z_0})g) = (z_0 - z_0)L(g) = 0,$$

$$L(f - f(z_0)) = L(f) - f(z_0).$$

Luego $L(f) = f(z_0)$. □

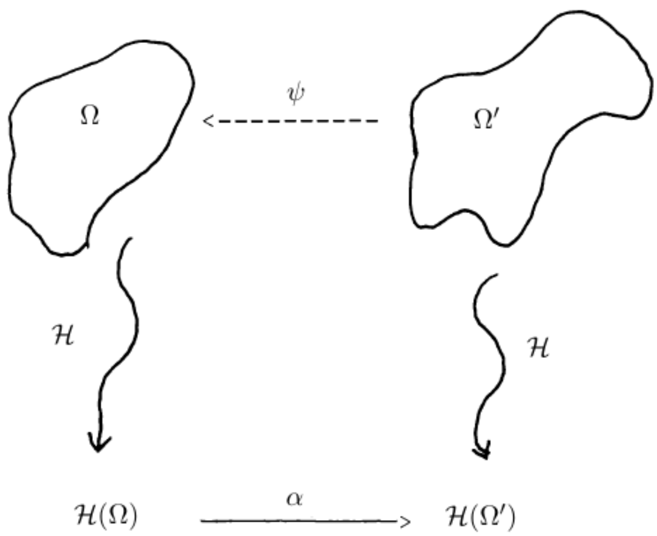
Un homomorfismo con imagen en $\mathcal{H}(\Omega')$ para otro abierto $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ también tiene una representación simple. Observemos que si $\psi : \Omega' \to \Omega$ es holomorfa entonces $\alpha : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega')$ definida por $\alpha(f) = f \circ \psi$ es un homomorfismo algebraico, es decir,

$$\alpha(f+g) = \alpha(f) + \alpha(g), \qquad \alpha(\lambda) = \lambda\alpha(f), \qquad \alpha(fg) = \alpha(f)\alpha(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{H}(\Omega),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

El recíproco es verdad si Ω' es conexo.

Proposición 3.2. Suponemos que α es un homomorfismo algebraico no nulo de $\mathcal{H}(\Omega)$ en $\mathcal{H}(\Omega')$ donde Ω' es conexo. Entonces existe una función holomorfa $\psi : \Omega' \to \Omega$ tal que $\alpha(f) = f \circ \psi$ para todo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Representamos la situación del enunciado mediante los siguientes diagramas:



$$\begin{tikzcd} \Omega' \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\alpha(f)"'] & \Omega \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Demostración de la Proposición 3.2. Del hecho de que $\alpha(\tilde{1}) = \alpha(\tilde{1}) \cdot \alpha(\tilde{1})$ obtenemos que $\alpha(\tilde{1}) = 1$, ya que Ω' es conexo y $\alpha(\tilde{1})$ es continua sobre Ω', luego $\alpha(\tilde{1})$ debe ser constante. Como $\alpha \equiv 0$ está excluido, $\alpha(\tilde{1})$ debe de ser 1. De la misma manera que en el caso anterior $\alpha(\tilde{c}) = \tilde{c}$ para cualquier $c \in \mathbb{C}$. Ahora para cualquier $z' \in \Omega'$ definimos $L_{z'} : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{C}$ que viene dada por $L_{z'}(f) = \alpha(f)(z')$.
Claramente $L_{z'}$ es un funcional lineal multiplicativo sobre $\mathcal{H}(\Omega)$, luego por el resultado anterior, existe $z_0 = z_0(z') \in \Omega$ tal que $L_{z'}(f) = f(z_0)$.
Tomando $f = \hat{z}$ tenemos $z_0 = L_{z'}(\hat{z}) = \alpha(\hat{z})(z')$. Además para un $z' \in \Omega'$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ cualesquiera,

$$\alpha(f)(z') = L_{z'}(f) = f(z_0) = f(\alpha(\hat{z})(z'))$$

por tanto $\alpha(f) = f \circ \psi$ con $\psi = \alpha(\hat{z}) \in \mathcal{H}(\Omega')$. Además $\psi(\Omega') \subseteq \Omega$, por construcción,

$$\psi(z') = \alpha(\hat{z})(z') = z_0 \in \Omega, \quad \forall z' \in \Omega'$$

□

El Teorema 3.1 es utilizado para demostrar este último resultado, de hecho, podemos observar que éste es un caso particular de la Proposición 3.2 tomando α una aplicación constante.

La propiedad de $\mathcal{H}(\Omega)$ probada en el Teorema 3.1, es compartida por $\mathcal{C}(\Omega)$, es decir, cada funcional lineal multiplicativo de $\mathcal{C}(\Omega)$ viene dado por la evaluación de un punto de Ω. Esta propiedad no es relevante en este trabajo.Véase [[3], Cáp. 13, Sec.6]

Ahora vamos a comentar el concepto de gérmen de una función, el cual juega un papel importante en la dualidad. Para ello, necesitamos dar unas definiciones previas.

Definición 3.3. Diremos que una función F es holomorfa en el infinito si existe $R > 0$ tal que $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)})$ y además existe $L = \lim_{z \to \infty} F(z)$, es decir, si para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$|f(z) - L| < \epsilon, \quad \forall |z| > M.$$

Sea A un conjunto de $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, no necesariamente abierto. Se dice que una función F es holomorfa en A si existe un abierto B, que contiene a A, tal que F es holomorfa en B.

Notar que las funciones holomorfas de A tienen dominios que son conjuntos abiertos que contienen a A. Si A es abierto podemos escoger $B = A$ y no hay lugar a confusión con la definición de función holomorfa.

Definición 3.4. Dadas F_1, F_2 funciones holomorfas en A, escribimos $F_1 \sim F_2$ sobre A para indicar que hay un conjunto abierto B que contiene a A tal que F_1 y F_2 son holomorfas en B y $F_1(z) = F_2(z)$ para $z \in B$.

Esta notación corresponde a una relación de equivalencia en el espacio de funciones holomorfas en A. Escribimos $[F]$ para denotar la clase de equivalencia a la que pertenece F, siendo F holomorfa en A. Si no hay lugar a confusión, escribiremos F en lugar de $[F]$.

Ejemplo 1. Sea A el punto $\{0\}$. Notemos que para que $F_1 \sim F_2$ no es suficiente tener $F_1(0) = F_2(0)$. Tomemos $F_1(z) = z$ y $F_2(z) = z^2$; entonces $F_1(0) = F_2(0)$ pero F_1 y F_2 no coinciden en ningún conjunto abierto que contenga al 0. Cualquier función F analítica en 0 puede expresarse como una serie de potencias $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ que converge en algún entorno del 0.

Definición 3.5. Las clases de equivalencia $\sim$ se denominan gérmenes de las funciones holomorfas en A. El espacio de todos los gérmenes de las funciones holomorfas en A se denota como $\mathcal{H}(A)$.

Para sumar, multiplicar y derivar un germen de una función holomorfa basta con aplicar estas operaciones a una función representativa en un entorno adecuado de A. Es posible dotar a $\mathcal{H}(A)$ de una topología, sin embargo no tiene cabida en esta memoria. Puede verse en [[5],cáp 17-18].

Definición 3.6. Si $\infty \in A$, entonces $\mathcal{H}_0(A)$ es el subespacio de $\mathcal{H}(A)$ compuesto por todas clases de equivalencia $[F]$ de las funciones holomorfas de A con $F(\infty) = 0$.

Para finalizar esta sección veamos un resultado que será necesario en la demostración del teorema principal de dualidad del espacio $\mathcal{H}(\Omega)$.

Proposición 3.7. Dado un abierto Ω y un conjunto compacto $K \subseteq \Omega$, existe un camino cerrado Γ formado por segmentos orientados $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots, \Gamma_n$ en $\Omega \setminus K$ tal que para todo $\lambda \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus K$, y $w \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ entonces se tiene $\lambda^* = \lambda$ como elemento de $\mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$, en donde $\lambda^*(w) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{\lambda(z)}{w-z}\, dz$.

Demostración. La demostración no se incluye por ser esencialmente la del Teorema homológico de Cauchy.Véase [[5], p.70-71]. □

3.2. Dualidad de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Cada función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ se puede escribir como una serie de potencias convergente, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con $z \in \mathbb{D}$. De modo que f puede ser representada por sucesiones, sus coeficientes de Taylor $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. No todas las series corresponden a una función analítica ya que el criterio de la raíz para convergencia de series implica $\limsup |a_n|^{1/n} \leq 1$ siempre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ converja en $\mathbb{D}$. Recordemos que este criterio implica que la serie converge absolutamente si $\limsup |a_n|^{1/n} < 1$.

Proposición 3.8. Dada una sucesión $\{bn\}$ entonces se tiene que $\limsup |b_n|^{1/n} < 1$ si y solo si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge para toda sucesión $\{a_n\}$ que satisface la condición $\limsup |a_n|^{1/n} \leq 1$.

Demostración. Si $\limsup |b_n|^{1/n} < 1$ entonces $\limsup |a_n b_n|^{1/n} < 1$ y por el criterio de la raiz, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge. Recíprocamente, si suponemos que $\limsup |b_n|^{1/n} \geq 1$ entonces existe una sucesión $n_k \to \infty$ y una sucesión $\epsilon_k \to 0$ tal que $|b_{n_k}| \geq (1-\epsilon_k)^{n_k}$. Definimos a_n cumpliendo:

- $a_n = 0$ si n no es ningún n_k,
- $|a_{n_k}| \geq (1-\epsilon_k)^{-n_k}$,
- $a_n b_n \geq 0$.

Entonces $\limsup |a_n|^{1/n} = 1$, pero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ no converge por el criterio de la raíz. □

Vamos a usar el hecho de que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, entonces la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de f, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ converge a f en la topología de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. Identificaremos $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ con el espacio $\mathcal{A}$ de sucesiones $a = a_n$ satisfaciendo $\sigma(a) < 1$ donde $\sigma(a) = \limsup |a_n|^{1/n}$.
De manera explícita, consideramos la aplicación $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{H}(\mathbb{D})$ definida por $\varphi(a) = f_{|\mathbb{D}}$ donde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Esta aplicación es lineal y tiene inversa φ^{-1} dada por $\varphi^{-1}(f) = \frac{f^n(0)}{n!}$.
Esta correspondencia nos dota $\mathcal{A}$ de una topología.

Definición 3.9. El espacio vectorial topológico localmente convexo $\mathcal{A}$ es el espacio de sucesiones anterior con la topología definida por la familia de seminormas $\|a\|_r$, con $0 < r < 1$, donde

$$\|a\|_r = \sup_n |a_n| r^n, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Vamos a ver que los espacios $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_r)$ y $(\mathcal{H}(\mathbb{D}), \tau_c)$ son isomorfos topológicamente. Sea $\epsilon > 0$ y $0 < r < 1$, veamos que existe un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{D}$ y un número $\delta > 0$ tal que si $\|f\|_K < \delta$ implica $\|a\|_r < \epsilon$, donde $f = \varphi(a)$. Para ello sea $K = \overline{D(0,r)}$. Si $\|f\|_K < \delta$ entonces por la desigualdad de Cauchy tenemos que $|a_n| \leq \frac{\delta}{r^n}$ es decir $\|a\|_r \leq \delta$ luego podemos elegir $\delta = \epsilon$.
Recíprocamente, suponemos dado un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{D}$ y sea $\epsilon > 0$. Elegimos $\rho < 1$ de manera que $K \subseteq D(0,\rho)$ y así poder escoger r con $\rho < r < 1$. Si tomamos $\delta = \epsilon\ (1 - \frac{\rho}{r})$ entonces $\|a\|_r < \delta$ implica

$$\|f\|_K = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\|_K < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \frac{\rho^n}{r^n} \leq \|a\|_r \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n < \frac{\delta}{1-\rho/r} = \epsilon$$

como queríamos probar.
De esta manera podemos identificar los espacios $\mathcal{A}$ y $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, lo que sugiere la siguiente identificación de dual de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ mediante sucesiones.

Proposición 3.10. El dual de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ es isomorfo al espacio de las sucesiones λ con $\sigma(\lambda) < 1$.

Demostración. Dado $L \in \mathcal{H}(\mathbb{D})'$, tomar $\lambda_n = L(z^n)$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, como $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n z^n \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y L es continuo en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ entonces $L\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n z^n\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} L(f)$. Pero como $L\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n z^n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n \lambda_n$ se sigue que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n$ converge y su suma es igual a $L(f)$. Por la Proposición 3.8 se sigue que $\sigma(\lambda) < 1$.
Recíprocamente, suponemos dada una sucesión $\lambda = \{\lambda_n\}$ con $\sigma(\lambda) < 1$. Definimos L por $L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n$ para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ siendo $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, converge de nuevo por la Proposición 3.8. Está claro que L es un funcional lineal, entonces para mostrar que $L \in \mathcal{H}(\mathbb{D})'$, solo tenemos que demostrar que L es continuo, es decir, encontrar un $r, 0 < r < 1$, y una

constante $C > 0$ tal que $|L(f)| \leq C \|f\|_{\overline{D(0,r)}}$.
Elegimos r y ρ de manera que $\sigma(\lambda) < \rho < r < 1$. Entonces existe un entero $n_0 > 0$ tal que para todo $n \geq n_0$ tenemos que $|\lambda_n| < \rho^n$. Entonces

$$\begin{aligned} |L(f)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n \right| &\leq \sum_{n<n_0} |a_n||\lambda_n| + \sum_{n \geq n_0} |a_n| \rho^n \\ &= \sum_{n<n_0} |a_n| r^n \left| \frac{\lambda_n}{r^n} \right| + \sum_{n \geq n_0} |a_n| r^n \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \end{aligned}$$

y utilizando la fórmula de Cauchy para las derivadas sabemos que

$$\sup_n |a_n| r^n \leq \sup_n \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} r^n \leq \sup_n \frac{2\pi r}{2\pi r^{n+1}} \cdot \|f\|_{\overline{D(0,r)}} \cdot r^n = \|f\|_{\overline{D(0,r)}}$$

con lo que llegamos a que

$$|L(f)| \leq \|f\|_{\overline{D(0,r)}} \left[\sum_{n<n_0} \left| \frac{\lambda_n}{r^n} \right| + \frac{\rho^{n_0}/r^{n_0}}{1 - \rho/r} \right] = C_r \|f\|_{\overline{D(0,r)}} < \infty.$$

□

Por otra parte, gracias a la definición 3.6 podemos dar otra caracterización del dual de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Teorema 3.11. *El dual de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ es isomorfo al espacio $\mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$. De manera más precisa, dada $F \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$, tomar $L_F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})'$ definida por $L_F(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)F(z)\, dz$, donde Γ es una circunferencia en $\mathbb{D}$ tal que F es holomorfa sobre y fuera de Γ. Entonces, para cada $L \in \mathcal{H}(\mathbb{D})'$ hay una $F \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$ tal que $L = L_F$ y F satisface $F(\omega) = L\left(\frac{1}{z-\omega}\right)$ para $\omega \notin \mathbb{D}$.*

Demostración. En primer lugar, podemos observar que el funcional L_F está bien definido ya que si $F \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ siempre podemos elegir una circunferencia Γ contenida en $\mathbb{D}$ tal que ambas funciones están definidas sobre ella. Además, es obvio que $L_F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})'$ ya que para cada función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, L_F es lineal y también continuo ya que $|L_F(f)| \leq \|f\|_\Gamma \|F\|_\Gamma$.
Para demostrar que cada $L \in \mathcal{H}(\mathbb{D})'$ viene dado por una función F de estas características procedemos de la siguiente manera. Sea $\lambda = \{\lambda_n\}$ la serie asociada a $\lambda_n = L(z^n)$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea F la función definida por $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{z^{n+1}}$. Como $L \in \mathcal{H}(\mathbb{D})'$, por la Proposición 3.10, $\sigma(\lambda) < 1$ y por tanto esta serie converge en un entorno de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ y define un elemento de $\mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D})$.
Ahora debemos mostrar que $L = L_F$. Por densidad es suficiente probar que $L(z^n) = L_F(z^n)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así,

$$L_F(z^n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^n F(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{z^{k+1}}\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^n}{z^{k+1}}\, dz, \tag{3.1}$$

y haciendo el cambio de variable $z = re^{i\theta}$ obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^n}{z^{k+1}}\, dz = \lambda_n = L(z^n)$$

donde Γ es cualquier camino en $\mathbb{D}$ que se encuentra en el dominio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{z^{n+1}}$, es decir en $\{z : |z| > \sigma(\lambda)\}$. Esto muestra que la definición de L_F es independiente de la elección de Γ.

Finalmente para $|\omega| \geq 1$ y $|z| < 1$, $\dfrac{1}{\omega - z} = \dfrac{1}{\omega(1-\frac{z}{\omega})} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{\omega^{n+1}}$ que converge en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Además,

$$L\left(\frac{1}{\omega - z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L(z^n)}{\omega^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\omega^{n+1}} = F(\omega)$$

lo que concluye la demostración del teorema. □

NOTA: Ha sido posible el intercambio de la integral y el sumatorio en la expresión (3.1) debido a que la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_j}{z^{j+1}}$ es absolutamente convergente ya que $\sigma(\lambda) < 1$ y $z \in \mathbb{D}$.

3.3. Dualidad de $\mathcal{H}(\Omega)$.

En esta sección emplearemos lo visto en la sección 1.4 para estudiar el dual de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Proposición 3.12. $\mathcal{H}(\Omega)' = M_0^*(\Omega)$. Lo que significa que existe una correspondencia uno a uno entre $\mathcal{H}(\Omega)'$ y $M_0^*(\Omega)$ que asocia a cada $\lfloor\mu\rfloor \in M_0^*(\Omega)$ el funcional L_μ definido por $L_\mu(f) = \int_\Omega f\, d\mu$ con $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración. Si $\lfloor\mu\rfloor \in M_0^*$, cada $L_\mu \in \mathcal{H}'(\Omega)$ ya que μ es continua, en $\mathcal{C}(\Omega)$ y por tanto sobre $\mathcal{H}(\Omega)$. Además la definición de L_μ es independiente de la medida elegida para representar $\lfloor\mu\rfloor$ porque si $\lfloor\mu\rfloor = \lfloor\nu\rfloor$ entonces $\int_\Omega f\ d\mu = \int_\Omega f\ d\nu$ para todo $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Para ver que cada $L \in \mathcal{H}(\Omega)'$ usamos el Teorema de Hahn-Banach para extender L a un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{C}(\Omega)$ .Como μ extiende L, tenemos que $L_\mu(f) = \int_\Omega f\ d\mu$ para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Además $L = L_\mu$. □

Teorema 3.13 (Teorema principal de dualidad)**.** $\mathcal{H}(\Omega)' \cong \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$.

Demostración. Dada $\lfloor\mu\rfloor \in M_0^*(\Omega)$, tomamos $w \notin \Omega$ y consideramos

$$\lambda(w) := \int_\Omega \frac{1}{w - z}\, d\mu(z).$$

Notar que la función $\frac{1}{w-z} \in \mathcal{C}(\Omega)$. Sea ahora $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ donde K es un conjunto compacto de Ω que soporta a la medida μ y definimos $f_w(z) = \frac{1}{w-z} \in \mathcal{C}(K)$. Luego por el Teorema de Tietze (enunciado en los preliminares), existe una función $F_w(z) := \frac{1}{w-z} \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que

$$F_w(z) = f_w(z) = \frac{1}{w - z}, \quad \forall z \in K.$$

Así, podemos definir

$$\lambda(w) = \int_\Omega F_w\, d\mu(z).$$

Debido a lo visto previamente en 1.4, esta integral es independiente de la extensión particular elegida. Por tanto, podemos escribir

$$\lambda(w) = \int_\Omega \frac{1}{w - z}\, d\mu(z).$$

Además, si $w_n \to w \notin K$ entonces $\lambda(w_n) \to \lambda(w)$, en efecto

$$|\lambda(w_n) - \lambda(w)| = \left|\int_\Omega \left(\frac{1}{w_n - z} - \frac{1}{w - z}\right)\, d\mu(z)\right| \leq \left\|\frac{w - w_n}{(w_n - z)(w - z)}\right\|_K |\mu(K)| \longrightarrow 0$$

ya que

$$\left\|\frac{w-w_n}{(w_n-z)(w-z)}\right\|_K \leq \frac{|w-w_n|}{d(w_n-z)d(w-z)} \longrightarrow \frac{0}{d(w,K)^2}$$

Razonando de una forma similar podemos ver que λ está bien definida y es holomorfa en $\overline{\mathbb{C}}\setminus K$ y que $\lambda(\infty)=0$, es decir, que $\lambda \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega)$.
Hasta el momento tenemos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & M_0^*(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega) \\ & L=\lfloor\mu\rfloor & \longmapsto & \lambda(w)=\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{w-z}\,d\mu(z) \end{array}.$$

Lo que queremos demostrar es que esta aplicación es biyectiva, y en el proceso, hallar su inversa. Esto requiere del teorema homológico de Cauchy y las proposiciones 1.17 y 3.7.
Dicha función inversa asociará una medida a cada función $\lambda \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega)$. Luego, dada λ, tomamos un conjunto compacto $K\subseteq\Omega$ tal que λ es holomorfa fuera de K, y tomamos un camino cerrado $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\cdots\cup\Gamma_n$ siendo $\Gamma_1,\Gamma_2\ldots,\Gamma_n$ una sucesión finita de segmentos orientados en $\Omega\setminus K$. Entonces definimos $L_{\lambda,\Gamma}$ como

$$L_{\lambda,\Gamma}(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\lambda(w)\,dw, \quad \forall f\in\mathcal{H}(\Omega).$$

Queremos mostrar que $L_{\lambda,\Gamma}$ es independiente de Γ, siempre y cuando Γ se elija como en la Proposición 3.7 en relación con un conjunto compacto fuera del cual λ es analítica. Para este fin, mostraremos

a) $L_{\Psi(L),\Gamma}=L$ para cualquier $L\in\mathcal{H}(\Omega)'$ provisto de un compacto K elegido de modo que, además, K soporta a la medida μ para alguna extensión μ de L a $\mathcal{C}(\Omega)$.

b) $\Psi(L_{\lambda,\Gamma})=\lambda$ (como elemento de $\mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega)$) para cualquier $\lambda\in\mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega)$.

Para mostrar (a), observar que para $\lambda=\Psi(L)$ tenemos

$$\begin{aligned} L_{\Psi(L),\Gamma}(f) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\lambda(w)\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\left[\int_\Omega \frac{1}{w-z}\,d\mu(z)\right]\,dw \\ &= \int_\Omega\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right]\,d\mu(z) \\ &= \int_\Omega f(z)\,d\mu(z)=L_\mu(f). \end{aligned}$$

Hemos utilizado la Proposición 1.17 y el Teorema homológico de Cauchy.
Para mostrar b), tenemos

$$\Psi(L_{\lambda,\Gamma})(w)=\int_\Omega\frac{1}{w-z}\,d\mu_{\lambda,\Gamma}(z)$$

donde $\mu_{\lambda,\Gamma}$ es una extensión de $L_{\lambda,\Gamma}$. Pero la definición de $L_{\lambda,\Gamma}$ muestra que

$$\mu_{\lambda,\Gamma}=\frac{1}{2\pi i}\lambda(z)\,dz_{|\Gamma}$$

es una extensión apropiada. Esto significa

$$\Psi(L_{\lambda,\Gamma})(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{w-z}\lambda(z)\,dz=\lambda(w),$$

por la Proposición 3.7.
Ahora vamos a demostrar que, efectivamente, $L_{\lambda,\Gamma}$ es independiente de Γ. Sea $\lambda \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ y tomamos Γ y Γ' ambos satisfaciendo las condiciones la Proposición 3.7 para definir $L_{\lambda,\Gamma}$ y $L_{\lambda,\Gamma'}$. Esto significa que existen los conjuntos compactos K y K' tal que λ es holomorfa fuera de K y K' respectivamente y que Γ y Γ' rodean a K y K' respectivamente en el sentido de la Proposición 3.7. Entonces existe un compacto K_S, conteniendo $K \cup K' \cup \Gamma \cup \Gamma'$, fuera del cual λ es holomorfa. Elegimos Γ_S de manera apropiada para el compacto K_S. Entonces K_S cumple los requisitos de a).
Para b), está claro que $\Psi(L_{\lambda,\Gamma}) = \lambda = \Psi(L_{\lambda,\Gamma'})$. Aplicando (a) con Γ_S en el lugar de Γ y $L_{\lambda,\Gamma}$ (resp.$L_{\lambda,\Gamma'}$) en el lugar de L, obtenemos

$$L_{\lambda,\Gamma_S} = L_{\lambda,\Gamma} \quad (\text{ resp. } L_{\lambda,\Gamma_S} = L_{\lambda,\Gamma'})$$

□

Así hemos probado el teorema de dualidad principal a través de medidas, pero como bien sabemos exise una equivalencia entre medidas y funcionales, por tanto este teorema de dualidad también puede escribirse a través de los funcionales.

Teorema 3.14 (Teorema principal de dualidad). *Definimos la aplicación*

$$\Psi : \mathcal{H}(\Omega)' \longrightarrow \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$$

por $\Psi(L)(w) = L(\frac{1}{z-w})$. *(El sentido de esta expresión es el mismo que hemos visto en la demostración anterior.) La aplicación* Ψ *es lineal, inyectiva y suprayectiva. Su inversa es dada por*

$$[\Psi^{-1}(\lambda)](f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\lambda(w)dw, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega),$$

donde Γ *es una curva cualquiera en* Ω *satisfaciendo la Proposición 3.7 en relación a un conjunto compacto* $K \subseteq \Omega$ *tal que* λ *es holomorfa en* $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$.

NOTA: La función $\Psi(L)$ es denotada $\widehat{L}$ y se conoce como la transformación de Cauchy de L. $\widehat{L}$ se define como un germen en $\mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ o como una función fuera de un conjunto compacto $K \subseteq \Omega$. Análogamente, si $\mu \in M_0(\Omega)$ escribimos

$$\widehat{\mu}(w) = \int \frac{1}{z-w}\, d\mu(z)$$

y llamamos a $\widehat{\mu}$ la transformación de Cauchy de μ.

Bibliografía

[1] American Mathematical Society, *On topologies for function spaces*, https://www.ams.org/journals/bull/1945-51-06/S0002-9904-1945-08370-0/.

[2] Conway,J.B.: *Functions of One Complex Variable.*, Springer-Verlag New York, 1973.

[3] Dugundji,J.: *Topology.* Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[4] Kelley, J.L.: *General Topology.* D. Van Nostrand, New York,

[5] Luecking D.H. y L.A.Rubel: *Complex Analysis: A Funtional Analysis Approach.*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1984.

[6] Rudin,W: *Functional Analysis.*, McGraw Hill, 1991.

[7] Rudin,W: *Real and Complex Analysis.*, McGraw Hill, 1987.