

Modelos matemáticos de difusión de enfermedades: influencia de perturbaciones



Tania Cambero Jiménez
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Roberto Barrio Gil
28 de julio de 2019

Prólogo

Una enfermedad infecciosa es la manifestación clínica de una infección provocada por un microorganismo como bacterias, hongos o virus y que puede ser transmitida de un individuo a otro de la población.

Este TFG se centra en el estudio de modelos epidemiológicos que tratan la propagación de enfermedades infecciosas en una población dada.

Hablaremos de los diferentes modelos diferenciales de enfermedades infecciosas hasta llegar al modelo SEIR, el cual desarrollaremos con más detenimiento en el último apartado. Previamente introduciremos teoría sobre bifurcaciones de duplicación de periodo y caos para poder entender posteriormente el modelo SEIR en su totalidad.

Finalmente estudiaremos de forma analítica dicho modelo (usando software como OCTAVE), y añadiremos forzamiento temporal al sistema para visualizar los cambios que se generan en el modelo.

Resumen

0.1. Basic models

The objective of this work is to study different epidemiological models that exist for infectious diseases. To do this, we will separate the population into different groups according to their capacity to transmit infectious diseases: S (susceptibles), I (infected), E (exposed) and R (recovered).

We will model the growth of our disease via ordinary differential equation systems. Introducing the parameter γ which is considered the recovery rate, β , which represents the capacity an individual of the class I to infect a member of the class S. With this parameters we get the model called SIR.

Assuming first that there is no demography and so the total population $N = S+I +R$ remains constant (we will assume $N = 1$), we consider $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, the basic reproductive ratio, which is defined as the number of secondary infections derived from a primary one in an entirely susceptible population.

If there is demography in our SIR model, we will consider the parameter μ like the mortality rate and the basic reproductive ratio will be $R_0 = \frac{\beta}{\gamma+\mu}$.

The SIS model is a type of model where there is no permanent immunity. We consider ω like the rate at which the undivided recovered lose immunity.

Finally, we introduce a refinement to the SIR model to take into account the latent period. The new parameter we introduce $1/\sigma$ is the average duration of the latent period. This type of models are called SEIR models.

0.2. Period Doubling Bifurcation

Taking a dynamic system that depends on a parameter c . A bifurcation occurs when there is a significant change in the system orbit according to c .

Considering the following one-dimensional system that depends on a parameter:

$$x \longrightarrow -(1 + \alpha)x + x^3 \equiv f(x, \alpha) \equiv f_\alpha(x),$$

the fixed point is $x_0 = 0$ for all α with multiplier $\mu = -(1 + \alpha)$. For small values of $\alpha < 0$ the point is linearly stable and is linearly unstable for $\alpha > 0$. For $\alpha = 0$ the point is not linearly stable. As α approaches 0 from above, the period-two cycle "shrinks" and disappears. This is a period doubling bifurcation. Introducing a perturbation of a higher order, we have a topologically equivalent system.

Any generic, scalar, one-parameter system $x \longrightarrow f(x, \alpha)$ with $x, \alpha \in \mathbb{R}^1$, has a fixed point $x_0 = 0$ at $\alpha = 0$ with $\mu = f_x(0, 0) = -1$. The system is locally topologically equivalent near the origin to one of the following normal forms:

$$\eta \longrightarrow -(1 + \beta)\eta \pm \eta^3.$$

0.3. Chaos

In this chapter we show the devaney's definition of chaos whose enunciate is: Let be (X, d) a metric space. A function $f : X \rightarrow X$ is called chaotic if and only if it satisfies the following three conditions:

1. f is topologically transitive.
2. The set of periodic points of f is dense.
3. f has a sensitive dependency on the initial conditions.

In an unbounded metric space, the sensitivity condition is redundant regardless the function is continuous or not.

The theoretical demonstration of chaotic dynamics in a generic system is a major problem which can not be addressed analytically in most cases but we can prove it in discrete dynamic systems, such as the tent map..

The tent map $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is a piecewise linear map given by

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

and it is chaotic on $[0, 1]$.

The population logistic model is very often used as an example in the study of ordinary differential equations. The logistic map is given by:

$$f(x_n) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

where $r \geq 0$ is a parameter that capture the growth rate of the population.

After studying the variation of the behavior of the system as r is varied we have that the logistic map has a chaotic behavior for $0 \leq r \leq 4$ and when $r > 4$ we have : Let $f : I \rightarrow I$ and $g : J \rightarrow J$ be conjugate via $h : I \rightarrow J$. If f is chaotic on I , then g is chaotic on J .

0.4. SEIR model

The SEIR model is given by

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - (\beta I + \mu)S, \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\mu + \sigma)E, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases}$$

and we assume that $S + E + I + R = 1$ and the last equation is redundant.

This model has two equilibrium solutions: a disease-free solution given by $(1,0,0,0)$ and an endemic solution which is given by :

$$S^* = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\beta \sigma} = \frac{1}{R_0},$$

$$E^* = \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\beta \sigma}(R_0 - 1),$$

$$I^* = \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1),$$

The basic reproductive ratio in this case is given by $R_0 = \frac{\beta\sigma}{(\sigma+\mu)(\gamma+\mu)}$.

A temporally forced model is one in which we consider a parameter (usually β) dependent on time. This allows for explicitly including seasonal and term effects, such the increase in the contagion rates observed during the school terms for most childhood diseases.

We modify the SEIR model adding a temporally forced parameter $\beta(t) = \beta_0(1 - \beta_1 \cos(\omega t))$.

Numerical solving of this system shows that the bigger amplitudes are observed when the frequency of forcing is the same as the natural oscillation frequency of the system, we will call this harmonic resonance. If we take the frequency a multiple of the natural frequency of the system we also observe oscillations bigger than the ones produced by arbitrary frequencies, this is called subharmonic resonance.

Plotting the bifurcation diagram of the system we note that the mechanics of our systems could vary significantly, varying from the appearance of biennial cycles to higher period cycles and, eventually, chaos.

The mechanics of our systems will be different if we modify the initial condition or any parameter of the model.

Índice general

Prólogo	III
Resumen	V
0.1. Basic models	V
0.2. Period Doubling Bifurcation	V
0.3. Chaos	VI
0.4. SEIR model	VI
1. Modelos de enfermedades infecciosas	1
1.1. Modelo SIR	1
1.1.1. Sin demografía	1
1.1.2. Añadiendo demografía	2
1.2. Modelo SIS	2
1.3. Modelo SEIR	3
2. Bifurcaciones de duplicación de periodo	5
2.1. Sistemas dinámicos discretos y bifurcaciones	5
2.2. Forma normal de bifurcaciones de duplicación de periodo	6
2.3. Bifurcaciones de duplicación de periodo genéricas	8
3. Caos	13
3.1. Definición de Caos por Devaney	13
3.2. Caos en sistemas dinámicos discretos	15
3.3. Aplicación logística	16
4. Modelo SEIR	21
4.1. Modelo SEIR sin forzamiento temporal	21
4.2. Modelos con forzamiento temporal	23
4.2.1. Modelo SEIR con forzamiento temporal	24
Bibliografía	29

Capítulo 1

Modelos de enfermedades infecciosas

Una enfermedad infecciosa o contagiosa es la manifestación clínica de una infección provocada por un microorganismo como bacterias, hongos o virus y que puede ser transmitida de un individuo a otro de la población. Este tipo de enfermedades se pueden propagar directamente desde el individuo infectado, a través de sus secreciones, su piel o sus mucosas o, indirectamente, a partir de la contaminación del aire, de un objeto inanimado o de un alimento por la persona infectada.

En primer lugar vamos a analizar brevemente los modelos epidemiológicos más simples que tratan este tipo de enfermedades hasta llegar al modelo SEIR. Para ello vamos a separar a la población en diferentes grupos según su capacidad para transmitir las enfermedades infecciosas.

- **Susceptibles:** Aquellos individuos que no están infectados por el patógeno pero presentan un riesgo de contraer la enfermedad si entran en contacto con este.
- **Expuestos:** Son aquellos individuos que una vez han entrado en contacto con el patógeno, este se desarrolla en ellos. La presencia de dichos patógenos es demasiado baja por lo que estos individuos no presentan síntomas ni son capaces de contagiar a otros. En muchas enfermedades el individuo no pasa por esta fase ya que el periodo de incubación es muy corto.
- **Infectados:** Cuando el patógeno se ha desarrollado lo suficiente como para ser contagiosos para otros individuos susceptibles.
- **Recuperados:** Individuos cuyo sistema inmunológico ha eliminado el patógeno de su organismo por lo que ya no son contagiosos. Dependiendo de la enfermedad, habrán desarrollado una respuesta inmune que evita que puedan volver a infectarse, en caso contrario, vuelven a ser susceptibles.
- **Portadores:** Cuando el individuo ha superado la enfermedad, pero mantiene una cierta cantidad de patógeno en su organismo. Esto provoca que siga siendo capaz de transmitir la enfermedad, pero en menor medida que un individuo infectado.

1.1. Modelo SIR

1.1.1. Sin demografía

Se trata de un modelo básico en el cual se asume que una vez el individuo se recupera, desarrolla un sistema inmunológico resistente al patógeno que evita que el individuo pueda volver a infectarse. Como se menciona en [1] la población total $N = S + I + R$ se mantiene constante, podemos normalizar las variables y considerar $N = 1$. Para una simplificación del modelo asumimos en primer lugar que la epidemia se desarrolla durante un corto periodo de tiempo por lo que no tenemos en cuenta factores como nacimientos y muertes. El sistema de ecuaciones para este modelo es:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

Siendo γ la tasa de recuperación (tomamos $1/\gamma$ como tiempo medio de recuperación de un paciente) y β la cantidad de contagios que provoca un individuo infectado por unidad de tiempo. Tomaremos $S(0) > 0$, $I(0) > 0$ y $R(0) = 0$ como condiciones iniciales y como $N = 1$ tenemos que $R = 1 - I - S$ por lo que podemos prescindir de la ecuación $\frac{dR}{dt} = \gamma I$.

La tasa de reproducción básica (R_0) es conocida como el número de casos de infección secundarios que se producen por caso de infección primario en una población enteramente susceptible. En este modelo se toma $R_0 = \beta/\gamma$.

1.1.2. Añadiendo demografía

Si tenemos en cuenta factores como los nacimientos y las muertes que alteran la cantidad de individuos que pertenecen a cada clase, añadimos a nuestro modelo un tiempo de vida medio del anfitrión, el cual representamos con $1/\mu$. Tendremos en cuenta que haya el mismo número de nacimientos que de muertes (equilibrio demográfico de la población). La nueva ecuación de este modelo será [3]:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - \beta SI - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases}$$

En ese caso obtenemos que el valor de $R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu}$, dicho valor de R_0 va a ser más pequeño que en el caso sin demografía ya que la tasa de mortalidad μ reduce el tiempo medio que pasa un individuo en el periodo de infectado.

Este sistema presenta dos puntos de equilibrio:

- Punto de equilibrio endémico $(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1), 1 - \frac{1}{R_0} - \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1))$
- Punto de equilibrio libre de enfermedades $(1, 0, 0)$

1.2. Modelo SIS

Este modelo se caracteriza por la falta de inmunidad permanente. Las ecuaciones sin tener en cuenta la demografía son:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \gamma I - \beta SI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I. \end{cases}$$

Por otro lado existen casos en los que una vez superada la enfermedad el individuo presenta un periodo de inmunidad hasta que de nuevo vuelve a la clase susceptible. Siendo ω tasa con la que los individuos recuperados pierden la inmunidad, el sistema queda:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu + \omega R - \mu S - \beta SI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \omega R - \mu R. \end{cases}$$

Tal y como se afirma en [3] cuando $\omega = 0$ estaremos en el modelo SIR.

1.3. Modelo SEIR

Este modelo tiene en cuenta el periodo latente. Nos encontramos en este periodo cuando un anfitrión recibe una pequeña cantidad de patógeno, que empieza a reproducirse dentro de él sin ser desafiado por el sistema inmunológico. Durante esta etapa, la abundancia de patógenos es demasiado baja para una transmisión activa a otros hospedadores susceptibles, y sin embargo, el patógeno está presente por lo que el huésped no puede ser catalogado como susceptible, infeccioso o recuperado, sino que introducimos una nueva categoría, expuestos (E), para aquellos individuos que están infectados pero que aun no son infecciosos.

Las ecuaciones del modelo SEIR son:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - (\beta I + \mu)S, \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\mu + \sigma)E, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R. \end{cases}$$

Algunas características notables del modelo: se asume que la duración media del periodo latente viene dada por $\frac{1}{\sigma}$, que la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad son iguales (denotadas por μ) y que la tasa de incidencia (la tasa de nuevas infecciones) se describe mediante el término βIS .

Capítulo 2

Bifurcaciones de duplicación de periodo

2.1. Sistemas dinámicos discretos y bifurcaciones

En esta sección vamos a tratar de definir y aclarar algunos conceptos básicos sobre sistemas dinámicos, así como algunas nociones de órbitas, puntos fijos y su estabilidad y bifurcaciones, ya que son términos que utilizaremos para desarrollar las bifurcaciones de duplicación de periodo y el caos en los siguientes capítulos.

Definición 2.1.1. Un sistema dinámico según [4] es un sistema que evoluciona con el tiempo, es decir, $\{T, X, f^t\}$ donde T es un tiempo establecido, X es un espacio de estados y $f^t : X \rightarrow X$ es una familia de operadores de evolución parametrizados por $t \in T$ que satisfacen las propiedades siguientes.

- $f^0 = \text{id}$, donde id es la aplicación identidad de X .
- $f^{t+s} = f^t \circ f^s, \quad \forall t, s \in T$.

Definición 2.1.2. Dadas $x \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Un sistema dinámico discreto de orden uno es una aplicación de la forma :

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Para obtener un punto de vista geométrico sobre los sistemas dinámicos (para facilitar su comprensión), hablaremos de órbitas en el espacio de estados [6].

Definición 2.1.3. La órbita de x es la secuencia

$$x_0 = x, x_1 = f(x), \dots, x_n = f^n(x), \dots$$

Definición 2.1.4. Decimos que x_0 es un punto fijo si $f(x_0) = x_0$.

Definición 2.1.5. Tomamos x_0 como un punto periódico de periodo n si $f^n(x_0) = x_0$.

Definición 2.1.6. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto fijo de f . Si existe un entorno U de x_0 tal que si $y \in U, f^n(y) \in U$ para todo n y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x_0$, entonces x_0 es estable.

Si para todo $y \in U \setminus \{x_0\}, f^n(y) \notin U$ para algún n , entonces x_0 es inestable.

A partir de la siguiente proposición podemos determinar la naturaleza de los puntos fijos [6].

Proposición 2.1.7. Sea x_0 un punto fijo de f . Tenemos que

1. x_0 es estable si $|f'(x_0)| < 1$.
2. x_0 es inestable si $|f'(x_0)| > 1$.

Demostación

Sea $|f'(x_0)| = v < 1$. Elegimos un K tal que $v < K < 1$. Como f' es continua, existe $\delta > 0$ tal que $|f'(x)| < K$ para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Por el teorema del valor medio, para cualquier $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, tenemos $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} = f'(c)$ para algún c entre x y x_0 . Por lo tanto, tenemos $|f(x) - x_0| < K|x - x_0| < |x - x_0|$ y reiterando el proceso, obtenemos que $|f^n(x) - x_0| < K^n|x - x_0|$ así que tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$. La demostración de 2) es similar. \square

Definición 2.1.8. $|f'(x_0)|$ es conocido como el coeficiente de estabilidad de x_0 .

Estudiando el comportamiento de diferentes sistemas dinámicos obtenemos que tal y como viene dado en [4]:

Definición 2.1.9. Un sistema dinámico $\{T, \mathbb{R}^n, f^t\}$ se llama topológicamente equivalente a un sistema dinámico $\{T, \mathbb{R}^n, g^t\}$ si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que transforma las órbitas del primer sistema en órbitas del segundo sistema, preservando la dirección del tiempo.

A continuación consideramos un sistema dinámico que depende de unos parámetros. En el caso continuo lo escribimos de la forma $\dot{x} = f(x, \alpha)$, en el caso discreto se escribe de la forma $x \rightarrow f(x, \alpha)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^m$ representan variables de fase y parámetros, respectivamente. Como los parámetros varían, el retrato de fases (representación geométrica de todas las trayectorias de un sistema dinámico en el plano) también varía, por lo que existen dos posibilidades: el sistema sigue siendo topológicamente equivalente al original, o su topología cambia.

Definición 2.1.10. La aparición de un retrato de fases topológicamente no equivalente bajo la variación de los parámetros de un sistema dinámico se denomina bifurcación. Es decir, sea un sistema dinámico discreto que depende de un parámetro c , se produce una bifurcación cuando hay un cambio significativo en la órbita del sistema conforme c varía.

Ejemplo 1. Sea $f_c(x) = x^2 + c$. En primer lugar, resolvemos $x^2 + c = x$ para encontrar los puntos fijos dados, los cuales son $x_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ y $x_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$. Por lo tanto,

- No existen puntos fijos si $c > \frac{1}{4}$.
- Existe un único punto fijo si $c = \frac{1}{4}$. Se le llama nodo silla o bifurcación tangente ya que los dos puntos fijos coinciden y posteriormente se aniquilan entre ellos.
- Existen dos puntos fijos cuando $c < \frac{1}{4}$.

Definición 2.1.11. El ciclo límite de una bifurcación es una trayectoria cerrada en el plano de fase tal que otras trayectorias no cerradas tienden en espiral hacia ella, desde el interior o desde el exterior, cuando el tiempo tiende a infinito

Definición 2.1.12. Un diagrama de bifurcación de un sistema dinámico es una estratificación de su espacio de parámetros inducida por la equivalencia topológica, junto con los retratos de fase representativos de cada estrato.

A continuación vamos a introducir un tipo bifurcación que va a jugar un papel clave en la formación del caos.

2.2. Forma normal de bifurcaciones de duplicación de periodo

Nuestro objetivo es dar una caracterización de la bifurcación de duplicación de periodo para $x \rightarrow -(1 + \alpha)x + x^3 \equiv f(x, \alpha) \equiv f_\alpha(x)$, un sistema unidimensional que depende de un parámetro.

La aplicación f_α es invertible para valores pequeños de $|\alpha|$ cerca del origen.

Este sistema tiene como punto fijo $x_0 = 0$ para todo α con multiplicador $\mu = -(1 + \alpha)$. Para valores pequeños de $\alpha < 0$ dicho punto es linealmente estable y es linealmente inestable para $\alpha > 0$. Para $\alpha = 0$ el punto no es hiperbólico, ya que el multiplicador $\mu = f_x(0, 0) = -1$, pero sin embargo, es no linealmente estable. Además, no encontramos otros puntos de equilibrio cerca del origen para valores de $|\alpha|$ pequeños.

A continuación, consideramos la segunda iteración $f_\alpha^2(x)$ de la aplicación $f_\alpha(x)$. Si tomamos $y = f_\alpha(x)$ entonces

$$\begin{aligned} f_\alpha^2(x) &= f_\alpha(y) = -(1 + \alpha)y + y^3 = -(1 + \alpha)[-(1 + \alpha)x + x^3] + [-(1 + \alpha)x + x^3]^3 = \\ &= (1 + \alpha)^2x - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^3 + O(x^5). \end{aligned}$$

Dicha aplicación tiene un punto fijo trivial $x_0 = 0$ y dos puntos fijos no triviales para $\alpha > 0$ pequeños:

$$x_{1,2} = f_\alpha^2(x_{1,2}),$$

donde $x_1 = (\sqrt{\alpha} + O(\alpha))$ y $x_2 = -(\sqrt{\alpha} + O(\alpha))$. Estos dos puntos son estables y constituyen un ciclo de periodo 2 para la aplicación original f_α . Esto quiere decir que

$$x_2 = f_\alpha(x_1), x_1 = f_\alpha(x_2)$$

con $x_1 \neq x_2$.

Las figuras 2.1 y 2.2 las obtenemos de [4]:

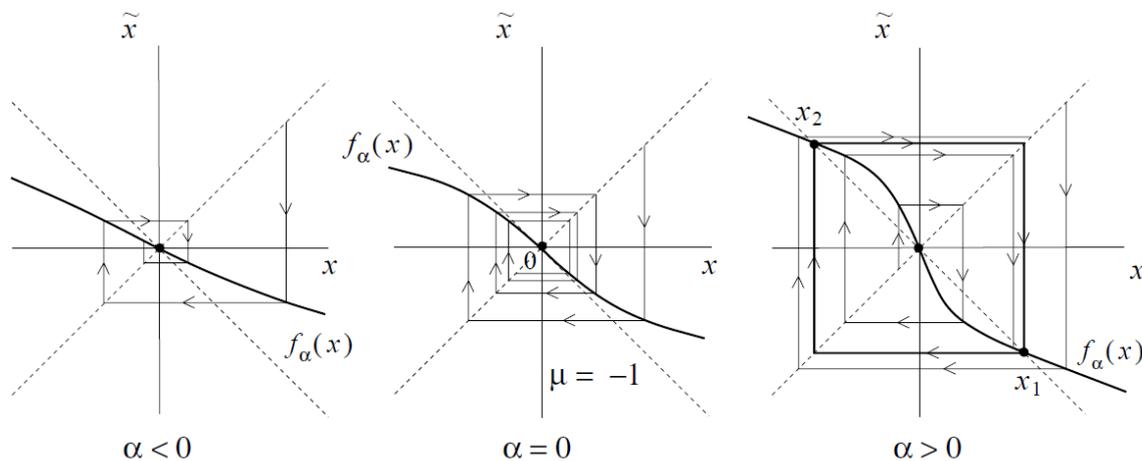


Figura 2.1: Diagrama de bifurcación completo del sistema con la ayuda de un diagrama de escalera.

A medida que α se aproxima a 0 desde arriba, el ciclo de periodo dos se "contrae" y desaparece. Esto es una bifurcación de duplicación de periodo.

Otra forma de presentar esta bifurcación es usar el (x, α) -plano.

En la **Figura 2.2** podemos observar que el punto fijo de $f_\alpha(x)$ corresponde al eje horizontal y como hemos afirmado anteriormente es estable para $\alpha < 0$ e inestable para $\alpha > 0$. Por otro lado la "parábola" de la figura representa el ciclo estable de periodo 2 $\{x_1, x_2\}$ que tenemos para $\alpha > 0$.

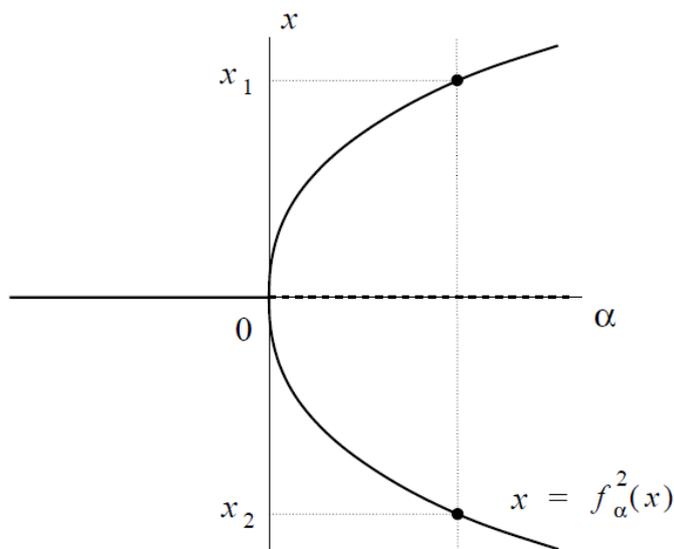


Figura 2.2: Diagrama de bifurcación de la segunda iteración.

Todos estos resultados nos permiten afirmar que introduciendo una perturbación de orden superior, se tiene un sistema topológicamente equivalente. Dicho de otro modo [4]:

Lema 2.2.1. El sistema

$$x \longrightarrow -(1 + \alpha)x + x^3 + O(x^4)$$

es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema

$$x \longrightarrow -(1 + \alpha)x + x^3$$

El análisis del punto fijo y el ciclo de periodo dos es un ejercicio simple. El resto de las demostraciones no es sencilla por lo que la vamos a omitir en este trabajo.

Si tomamos a continuación $x \longrightarrow -(1 + \alpha)x - x^3$ para $\alpha \neq 0$, el punto fijo $x_0 = 0$ tiene la misma estabilidad que en el sistema anterior y cuando $\alpha = 0$ el punto fijo es inestable. Además, el análisis de la segunda iteración de este nuevo sistema revela un ciclo inestable de periodo dos para $\alpha < 0$ que desaparece en $\alpha = 0$. Los términos de orden superior no afectan al diagrama de bifurcación.

- La bifurcación de duplicación de periodo en el sistema $f_\alpha(x) = -(1 + \alpha)x + x^3$ se denomina supercrítica o "soft".
- La bifurcación de duplicación de periodo en el sistema $f_\alpha(x) = -(1 + \alpha)x - x^3$ se denomina subcrítica o "sharp".

El tipo de bifurcación es determinado por la estabilidad de los puntos críticos en el valor de parámetro crítico.

2.3. Bifurcaciones de duplicación de periodo genéricas

En este apartado vamos a estudiar la bifurcación de duplicación de periodo para una función genérica.

Observamos, en primer lugar, el siguiente teorema dado por [4]:

Teorema 2.3.1. Consideramos que un sistema unidimensional

$$x \longrightarrow f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^1, \alpha \in \mathbb{R}^1$$

con f suave, tiene en $\alpha = 0$ un punto fijo $x_0 = 0$ y multiplicador $\mu = f_x(0, 0) = -1$. Asumiendo que se cumplen las siguientes condiciones de no degeneración:

1. $\frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{3}(f_{xxx}(0, 0)) \neq 0$;
2. $f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0$.

Entonces hay cambios invertibles de coordenadas y parámetros que transforman el sistema en

$$\eta \longrightarrow -(1 + \beta)\eta \pm \eta^3 + O(\eta^4)$$

Demostración:

Por el teorema de la función implícita, el sistema tiene un único punto fijo $x_0(\alpha)$ en un entorno del origen para cualquier valor de $|\alpha|$ lo suficientemente pequeño, ya que $f_x(0, 0) \neq 1$. Podemos realizar un cambio de coordenadas, colocando este punto fijo en el origen. Por lo tanto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x = 0$ es el punto fijo del sistema para $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Por consiguiente, la aplicación f puede escribirse de la siguiente forma:

$$f(x, \alpha) = f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + f_3(\alpha)x^3 + O(x^4)$$

donde $f_1(\alpha) = -[1 + g(\alpha)]$ para alguna función g suave. Como $g(0) = 0$ y $g'(0) = f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0$, de acuerdo con 2), la función g es localmente invertible y puede ser utilizada para introducir un nuevo parámetro:

$$\beta = g(\alpha).$$

De modo que podemos expresar la aplicación anterior como:

$$\tilde{x} = \mu(\beta)x + a(\beta)x^2 + b(\beta)x^3 + O(x^4)$$

donde $\mu(\beta) = -(1 - \beta)$ y las funciones $a(\beta)$ y $b(\beta)$ son suaves. Tenemos que

$$a(0) = f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0),$$

$$b(0) = \frac{1}{6}f_{xxx}(0, 0).$$

Realizando un pequeño cambio de coordenadas:

$$x = y + \delta y^2$$

donde $\delta = \delta(\beta)$ es una función suave a definir. Dicha transformación es inversible en un entorno del origen, y este inverso puede ser encontrado por el método de los coeficientes indeterminados:

$$y = x - \delta x^2 + 2\delta^2 x^3 + O(x^4)$$

A partir de esto obtenemos :

$$\tilde{y} = \mu y + (a + \delta\mu - \delta\mu^2)y^2 + (b + 2\delta a - 2\delta\mu(\delta\mu + a) + 2\delta^2\mu^3)y^3 + O(y^4).$$

De este modo, el término cuadrático puede "quitarse" para todo $|\beta|$ suficientemente pequeño poniendo:

$$\delta(\beta) = \frac{a(\beta)}{\mu^2(\beta) - \mu(\beta)}$$

Esto se puede hacer ya que $\mu^2(0) - \mu(0) = 2 \neq 0$, dando

$$\tilde{y} = \mu y + \left(b + \frac{2a^2}{\mu^2 - \mu}\right)y^3 + O(y^4) = -(1 + \beta)y + c(\beta)y^3 + O(y^4)$$

para alguna función suave $c(\beta)$, tal que

$$c(0) = a^2(0) + b(0) = \frac{1}{4}(f_{xx}(0,0))^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(0,0)$$

Notamos que $c(0) \neq 0$ asumiendo 1). Aplicando

$$y = \frac{\eta}{\sqrt{|c(\beta)|}}.$$

En esta nueva coordenada η el sistema toma la forma deseada:

$$\tilde{\eta} = -(1 + \beta)\eta + s\eta^3 + O(\eta^4)$$

donde $s = \text{sign } c(0) = \pm 1$. □

A continuación tenemos el siguiente teorema tomado de [4]:

Teorema 2.3.2 (Forma topológica normal de la bifurcación de duplicación de periodo). Cualquier sistema escalar genérico de un parámetro $x \rightarrow f(x, \alpha)$ que presenta un punto fijo $x_0 = 0$ en $\alpha = 0$ con $\mu = f_x(0, 0) = -1$, es localmente topológicamente equivalente, cerca del origen, a una de las siguientes formas normales:

$$\eta \rightarrow -(1 + \beta)\eta \pm \eta^3.$$

Demostración:

Utilizando el **Lema 2.2.1** y el **Teorema 2.3.2** obtenemos la demostración de este teorema. □

Ejemplo: Ecuación de Ricker. [4]

Considerando el modelo $x_{k+1} = \alpha x_k e^{-x_k}$ donde x_k es la densidad de población en el año k , y $\alpha > 0$ es la tasa de crecimiento, tenemos el siguiente sistema dinámico de tiempo discreto :

$$x \rightarrow \alpha x e^{-x} \equiv f(x, \alpha)$$

que presenta un punto fijo trivial $x_0 = 0$ para todos los valores del parámetro α .

En $\alpha_0 = 1$, sin embargo, aparece un punto fijo no trivial: $x_1(\alpha) = \ln \alpha$, el cual es positivo y su multiplicador viene dado por la expresión: $\mu(\alpha) = 1 - \ln \alpha$. Además, para $1 < \alpha < \alpha_1$, x_1 es estable e inestable para $\alpha > \alpha_1$, donde $\alpha_1 = e^2 = 7,389\dots$

Cuando $\alpha = \alpha_1$, el punto fijo tiene multiplicador $\mu(\alpha_1) = -1$. Por lo tanto, tendrá lugar una bifurcación de duplicación de periodo. Para aplicar el **Teorema 2.3.2** necesitamos verificar las correspondientes condiciones de no degeneración en las cuales todas las derivadas deben ser calculadas en el punto fijo $x_1(\alpha_1) = 2$ y en el valor del parámetro crítico α_1 . Se puede verificar que

$$c(0) = \frac{1}{6} > 0, f_{x\alpha} = \frac{1}{e^2} \neq 0.$$

Por lo tanto, el único ciclo estable de periodo dos se bifurca de x_1 para $\alpha > \alpha_1$.

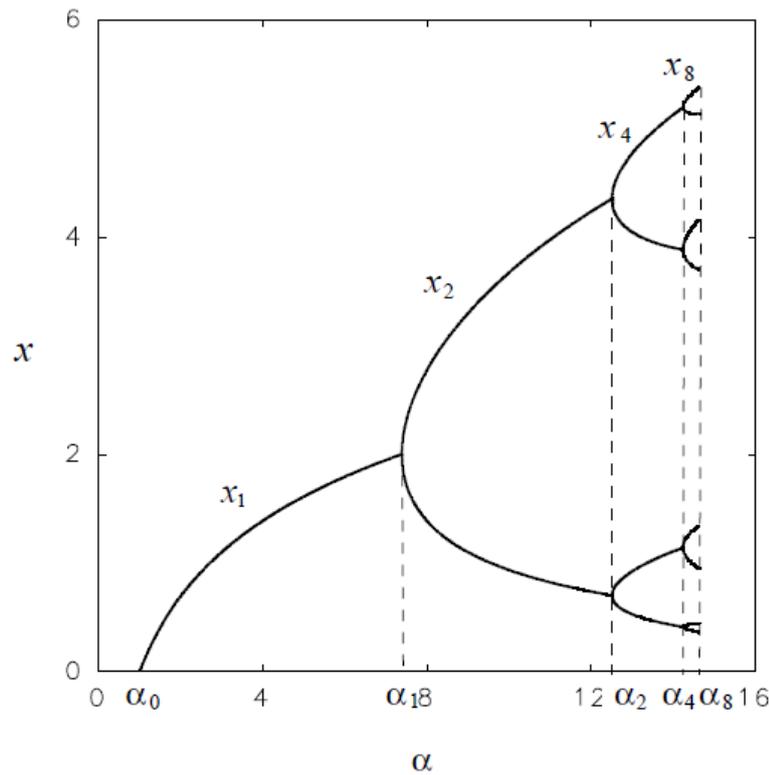


Figura 2.3: Cascada de duplicación de periodo para la ecuación de Ricker.

Se puede verificar que el ciclo pierde la estabilidad en $\alpha_2 = 12,50925\dots$ mediante la bifurcación de duplicación de periodo, dando lugar a un ciclo estable de periodo 4. Este se bifurca de nuevo en $\alpha_4 = 14,244\dots$ generando un ciclo estable de periodo 8 que pierde su estabilidad en $\alpha_{16} = 14,74212\dots$ y así sucesivamente.

Por lo que podemos asumir que existe una infinita secuencia de valores de bifurcación:

$$\alpha_{m(k)} \text{ con } m(k) = 2^k, k = 1, 2, \dots$$

donde $m(k)$ es el periodo del ciclo después de la k -ésima duplicación. Además, podemos comprobar que al menos los primeros elementos de esta secuencia se parecen mucho a una progresión geométrica. De echo, el cociente

$$\frac{\alpha_{m(k)} - \alpha_{m(k-1)}}{\alpha_{m(k+1)} - \alpha_{m(k)}}$$

tiende a $\mu_F = 4,6692\dots$ conforme aumenta k . Este fenómeno se conoce como la cascada de Feigenbaum de duplicación de periodo, y la constante μ_F es la constante de Feigenbaum. Lo más sorprendente es que esta constante es la misma para muchos sistemas diferentes que exhiben una cascada de bifurcación de duplicación de periodo.

Capítulo 3

Caos

Caos es un término general que utilizamos para varios comportamientos complejos de soluciones a sistemas deterministas relativamente simples. El estudio del caos se realizó en la década de 1970, con el trabajo de Edward Lorenz, quien estaba desarrollando un modelo de convección en la atmósfera y encontró una propiedad notable: las soluciones a través de puntos cercanos divergen unas de otras extremadamente rápido, pero también permanecen dentro de un cierto espacio. Más tarde se descubrió que esto era característico de muchos otros sistemas, comenzando así el estudio de la dinámica caótica. En este capítulo vamos a centrarnos en estudiar la definición de caos dada por Robert L. Devaney.

3.1. Definición de Caos por Devaney

En primer lugar vemos una serie de definiciones previas necesarias para la definición de caos de Devaney, la cual encontramos en [5].

Definición 3.1.1 (Función topológicamente transitiva). Una función $f : X \rightarrow X$ es topológicamente transitiva si para dos conjuntos abiertos U y V , existe k tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definición 3.1.2 (Conjunto denso). Sea (X, T) un espacio topológico, $U \subseteq X$ se dice que es un conjunto denso en X si y solo si $\bar{U} = X$, es decir, la clausura topológica del conjunto es todo el espacio.

Definición 3.1.3 (Dependencia sensible). Sea (X, d) un espacio métrico, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier conjunto abierto U y para cualquier punto $x \in U$, existe un punto $y \in U$ tal que $d(f^{[k]}(x), f^{[k]}(y)) = |f^{[k]}(x) - f^{[k]}(y)| > \delta$ para algunos k . El número positivo δ se conoce como constante de sensibilidad, solo depende del espacio X y la función f .

A continuación observamos la definición de caos de Devaney.

Definición 3.1.4 (Caos de Devaney). [5] Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \rightarrow X$ se llama caótica si y solo si satisface las siguientes tres condiciones:

1. f es topológicamente transitiva.
2. El conjunto de puntos periódicos de f es denso.
3. f tiene una dependencia sensible en las condiciones iniciales.

Las tres condiciones que debe cumplir una función f para ser caótica nos indican que: En primer lugar la transitividad de f dice que dicha función dibuja conjuntos abiertos muy juntos. Por su parte la sensibilidad asegura que f separa las cosas. La condición de que f tiene un conjunto denso de puntos periódicos se le conoce como "elemento de regularidad". La dependencia sensible de las condiciones iniciales es conocida como la idea central del caos.

Se puede demostrar que si f es continua, la tercera condición es redundante, es decir, las primeras dos condiciones implican la tercera. Sin embargo, 1) y 3) no implican 2), y 2) y 3) no implican 1). Si

una función continua f en un intervalo es transitiva, entonces tiene un conjunto denso de puntos periódicos y también dependencia sensible de las condiciones iniciales. Existe otra definición de caos que atañe a las órbitas de puntos periódicos, dicha definición es equivalente a la definición de Devaney.

Vamos a tratar de demostrar que la tercera condición es redundante sin asumir la continuidad de la función f . Y vamos a ver que si el espacio X no es precompacto, entonces la condición 3) está implícita a partir de las dos primeras condiciones independientemente de si la función es continua o no. De ello se deduce que en un espacio métrico ilimitado, la tercera condición es redundante.

Definición 3.1.5. Un espacio métrico (X, d) se denomina precompacto o totalmente acotado si $\forall \varepsilon > 0$ existe un conjunto finito S tal que $X = \bigcup_{x \in S} B(x, \varepsilon)$ donde $B(x, \varepsilon)$ denota la bola abierta de centro x y radio ε .

Cabe destacar que si un espacio métrico es precompacto, entonces está acotado.

Lema 3.1.6. Dados (X, d) un espacio métrico y la función $f : X \rightarrow X$. Si f es topológicamente transitiva y tiene un conjunto denso de puntos periódicos, pero no tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales, entonces $\forall \delta > 0$, existe un punto periódico p tal que

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} B(f^{[i]}(p), \delta) = X$$

donde n denota el periodo de p . En consecuencia, X debe ser un espacio precompacto.

Demostración:

Como se menciona en [5], supongamos que f satisface 1) y 2), pero no satisface 3). Tomamos $\delta > 0$, y sea $\delta' = \frac{\delta}{4}$.

En primer lugar, como f no satisface 3), existe un conjunto abierto U y un punto $x \in U$ tal que

$$\forall y \in U, \forall k, \quad d(f^{[k]}(x), f^{[k]}(y)) \leq \delta'.$$

Como f satisface 2), el conjunto de puntos periódicos de f es denso, existe un punto periódico $p \in U$. Por 1), tenemos

$$d(f^{[k]}(x), f^{[k]}(p)) \leq \delta'$$

y por lo tanto,

$$\forall y \in U, \forall k, \quad d(f^{[k]}(y), f^{[k]}(p)) \leq 2\delta' < 3\delta'.$$

Por consiguiente, $\forall k, f^{[k]}(U) \subset B(f^{[k]}(p), 3\delta')$. Siendo n el periodo de p tenemos que

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{[k]}(U) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} B(f^{[i]}(p), 3\delta')$$

Ahora como f satisface 1), $\forall z \in X$, aplicando la condición de transitividad de f en los conjuntos abiertos U y $V = B(z, \delta')$, tenemos

$$\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{[k]}(U) \right) \cap B(z, \delta') \neq \emptyset.$$

y de aquí se sigue que

$$\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} B(f^{[i]}(p), 3\delta') \right) \cap B(z, \delta') \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $\exists z' \in B(z, \delta')$ tal que $z' \in B(f^{[i]}(p), 3\delta')$ para algunos $i, 0 \leq i \leq n-1$.

Tenemos,

$$d(z', z) < \delta'$$

y

$$d(z', f^{[i]}(p)) < 3\delta',$$

así que

$$d(z, f^{[i]}(p)) < 4\delta' = \delta.$$

Por lo tanto,

$$z \in \bigcup_{i=0}^{n-1} B(f^{[i]}(p), \delta).$$

Esto es cierto para todo $z \in X$, tenemos

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} B(f^{[i]}(p), \delta) = X.$$

□

A partir de este lema deducimos el siguiente teorema, el cual aparece en [5] :

Teorema 3.1.7. Dados (X, d) un espacio métrico no precompacto y la función $f : X \rightarrow X$. Si f es transitiva y tiene un conjunto denso de puntos periódicos, entonces f tiene una dependencia sensible de las condiciones iniciales.

En resumen, en este apartado hemos observado que:

Corolario 3.1.8. En un espacio métrico ilimitado, la condición de sensibilidad es redundante independientemente de que la función sea continua o no.

3.2. Caos en sistemas dinámicos discretos

La demostración teórica de la dinámica caótica en un sistema genérico es un problema mayor, el cual no se puede abordar de forma analítica en la mayor parte de los casos, pero en sistemas dinámicos discretos sencillos si que podemos establecer una demostración, como por ejemplo la aplicación tienda de la cual vamos a estudiar su comportamiento caótico a continuación. Para simplificar, restringiremos el dominio de f para que actúe en un intervalo de \mathbb{R} .

El dibujo de la aplicación tienda tomado de [6] es:

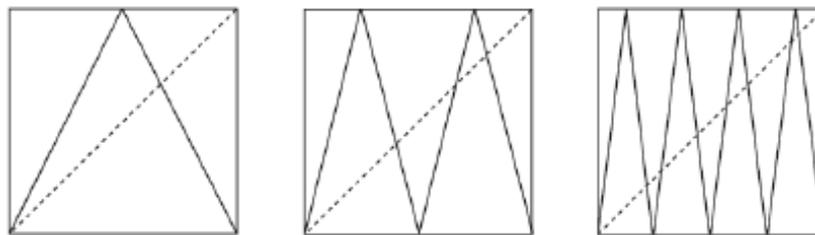


Figura 3.1: Primera, segunda y tercera iteración de la aplicación tienda.

Ejemplo 2. La aplicación tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una aplicación lineal a trozos dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

El dibujo de T (Figura 3.1), bajo n composiciones consigo misma, consiste en 2^n líneas alternas entre las pendientes 2 y -2.

A continuación, vamos a tratar de demostrar que la aplicación tienda tiene un comportamiento caótico a partir de la definición de Devaney, tal y como aparece en [6].

Proposición 3.2.1. T es caótico en $[0,1]$.

Demostración:

- Transitividad.
Sean U_1 y U_2 intervalos abiertos de $[0, 1]$. Para n suficientemente grande y para algún k , U_1 contiene un intervalo de la forma $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. Por lo tanto, las aplicaciones T^n transforma U_1 en $[0, 1]$ que contiene a U_2 .
- Densidad de la solución periódica.
Sea T^n el conjunto de aplicaciones cuyo intervalo va de $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ a $[0, 1]$ para $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Entonces, T^n corta la recta $y = x$ una vez en cada intervalo (como podemos ver claramente en la *Figura 3.1*). Como resultado, cada intervalo tiene un punto fijo de T^n o equivalentemente, un punto periódico de T de periodo n . Por lo tanto, los puntos periódicos de T son densos en $[0, 1]$.
- Dependencia sensible de las condiciones iniciales.
Sea $x_0 \in [0, 1]$. Mostraremos esta condición se cumple para una constante de sensibilidad $\delta = \frac{1}{2}$. Como en el apartado anterior, cualquier intervalo abierto U sobre x_0 en T^n se transforma en $[0, 1]$ para algunos n suficientemente grandes. Por lo tanto, existe $y_0 \in U$ tal que $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| \geq \frac{1}{2} = \delta$.

□

3.3. Aplicación logística

El modelo de población logística se utiliza muy a menudo como un ejemplo en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Según [6] tenemos que:

Definición 3.3.1. La aplicación logística viene dada por:

$$f(x_n) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

donde $r \geq 0$ es un parámetro que captura el índice de crecimiento de la población.

A continuación vamos a tratar la variación del comportamiento del sistema conforme lo hace r .

Proposición 3.3.2. Para $0 \leq r \leq 4$, la aplicación logística lleva el intervalo $[0, 1]$ a sí mismo.

Demostración:

En $[0, 1]$, la ecuación logística logra alcanzar el máximo $\frac{r}{4}$ para $x = \frac{1}{2}$. Si $0 \leq r \leq 4$, para cualquier condición inicial $x_0 \in [0, 1]$, $x_n \in [0, 1]$ para todo n . □

En primer lugar, buscamos los puntos fijos de f :

- Para $r < 1$, 0 es el único punto fijo y este es estable para $r < 1$ e inestable para $r > 1$.
- Para $r > 1$, existe un punto fijo adicional $x = 1 - \frac{1}{r}$ que es estable para $1 < r < 3$ e inestable para $r > 3$.
- Para $r > 3$, la aplicación logística tiene un 2-ciclo que es estable si $r < 1 + \sqrt{6}$.

Una vez hallados los puntos fijos, observamos que mientras r aumenta, el coeficiente de estabilidad del punto fijo en $x = 1 - \frac{1}{r}$ decrece de 1 en $r = 1$ a -1 en $r = 3$, donde se vuelve inestable. Al mismo tiempo, surge un 2-ciclo estable. Por esta razón, $r = 3$ ocurre una bifurcación de duplicación de periodo. Por la misma demostración, el 2-ciclo también se vuelve inestable debido a la creación de un 4-ciclo estable en $r = 1 + \sqrt{6}$. Por lo tanto, se forma un ciclo 2^n para todo n . Denotamos como r_n al menor r para el cual aparece un 2^n ciclo por primera vez. Por aproximaciones computacionales hemos obtenido los siguientes valores: $r_1 = 3, r_2 = 3.449\dots, r_3 = 3.54409\dots, r_4 = 3.5644\dots, r_5 = 3.568759\dots$

La secuencia converge a un valor límite $r_\infty = 3,569946\dots$. Conforme r crece más allá de r_∞ , el comportamiento de las soluciones se vuelve caótico. El diagrama de órbitas nos permite visualizar esta transición a caos, y se construye eligiendo condiciones iniciales aleatorias de x_0 y construyendo la órbita de x_0 para algunos valores de r .

Una de las características más importantes del diagrama de órbitas es que no es completamente caótico para $r > r_\infty$. Como podremos observar en la siguiente proposición [6], un 3-ciclo estable se forma alrededor de $r = 3,8284\dots$. Estos intervalos de estabilidad se denominan ventanas periódicas.

Proposición 3.3.3. Existe un 3-ciclo estable para $3,8284\dots \leq r \leq 3,8415\dots$

Cuando el 3-ciclo se vuelve inestable, se produce una bifurcación de duplicación de periodo y se forma un 6-ciclo estable, entonces podemos encontrar un (3×2^n) -ciclo estable para todo n . Como resultado, el diagrama de órbitas muestra una estructura fractal. [6]

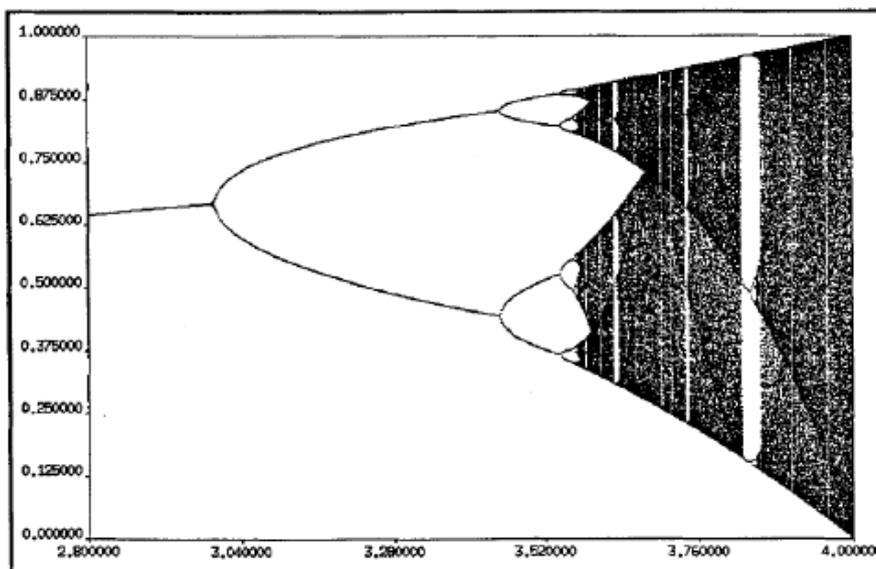


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación del mapa logístico.

A medida que r se aleja de la ventana periódica, esperamos ver cada vez menos intermitencia (periodos de caos intercalados) hasta que se logre un comportamiento completamente caótico. Esto se llama la ruta de la intermitencia al caos.

Para $r > r_\infty$, tenemos 2^n -ciclos inestables para todo n . Por lo tanto, los puntos periódicos de f son densos. Para el diagrama de órbitas, podemos ver que aparece una órbita típica para ser densa en algunos intervalos más pequeños que $[0, 1]$ para $r < 4$. Para terminar de comentar el comportamiento caótico de la aplicación logística falta hablar de la dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Definición 3.3.4. [6] Sea x_0 alguna condición inicial y considerando la órbita del punto cercano $x_0 + \delta_0$ donde δ_0 es muy pequeño. Sea δ_n la separación en las dos órbitas después de n iteraciones. Si $|\delta_n| \approx$

$|\delta_0|e^{n\lambda}$, entonces λ es el exponente de Liapunov. Un exponente de Liapunov positivo implica que las órbitas se separan exponencialmente rápido, lo que es suficiente para mostrar que el sistema muestra una dependencia sensible en las condiciones iniciales.

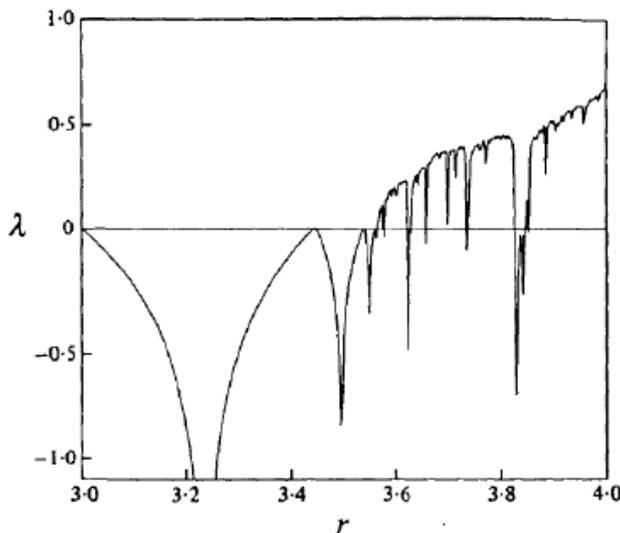


Figura 3.3: Exponente de Liapunov.

La figura 6 tomada de [6] muestra un dibujo del exponente de Liapunov para la aplicación logística para distintos valores de r . Notamos que para $r < r_\infty$, tenemos que $\lambda < 0$ ya que no esperamos un comportamiento caótico. El alcance máximo negativo para $r > r_\infty$ corresponde a la ventana periódica.

A continuación vamos a probar que el mapa logístico es caótico para $r > 4$. Este caso se complica ya que las órbitas de los puntos en $[0, 1]$ pueden abandonar dicho intervalo. Por lo tanto, necesitaremos una nueva técnica llamada conjugación.

Definición 3.3.5. Tomando los intervalos I, J y las aplicaciones $f : I \rightarrow I, g : J \rightarrow J$. f y g son conjugados si existe un homomorfismo $h : I \rightarrow J$ que satisface la ecuación de conjugación $h \circ f = g \circ h$. Además, f y g son semiconjugados si h es a lo sumo $n - t_0 - 1$.

Observación 3.3.6. h transforma órbitas de f en órbitas de g . Si x_0 es una condición inicial en I , $h(x_0)$ lo será en J y mediante la iteración de la ecuación conjugada tendremos que $h(f^n(x_0)) = g^n(h(x_0))$.

Ejemplo 3. La aplicación tienda definida en el **Ejemplo 1** está semiconjugada a la ecuación logística para $r = 4$ pasando por $h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x))$ ya que $h(T(x)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4\pi x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2 \cos^2(2\pi x - 1)) = 1 - \cos^2(2\pi x) = 4\frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x))\frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi x)) = 4h(x)(1 - h(x)) = f(h(x))$.

Finalmente tenemos el siguiente teorema [6]:

Teorema 3.3.7. Sean f y g conjugados pasando por h . Si f es caótico en I , entonces g es caótico en J .

Demostración:

- Transitividad: Sean U y V intervalos abiertos de J . Por continuidad, $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son subintervalos abiertos de I . Por la condición de transitividad para f , existe $x_0 \in h^{-1}(U)$ tal que $f^m(x_0) \in h^{-1}(V)$ para algunos m . Luego, $h(x_0) \in U$ y $g^m(h(x_0)) = h(f^m(x_0)) \in V$.

- Densidad de los puntos periódicos:

Sea U un subintervalo abierto de J y considerando $h^{-1}(U) \subset I$. Como los puntos periódicos son densos en I , existe un punto periódico de periodo n , que denotaremos por $x \in h^{-1}(U)$. Por la ecuación de conjugación, $g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x)$. Por lo tanto, $h(x)$ es un punto periódico de periodo n en U y los puntos periódicos son densos en J .

- Dependencia sensible de las condiciones iniciales:

f presenta una constante de sensibilidad δ . Tomamos $I = [\alpha_0, \alpha_1]$. Asumimos que $\delta < \alpha_1 - \alpha_0$. Para todo $x \in [\alpha_0, \alpha_1 - \delta]$, consideramos la función $[h(x + \delta) - h(x)]$. Esta función es continua y positiva, así que presenta un valor mínimo, el cual denotaremos por δ^* . Por lo tanto, h transforma los intervalos de longitud δ en intervalos de longitud al menos δ^* . Afirmamos que g presenta una constante de sensibilidad δ^* . Sea $x_0 \in J$ y sea V un intervalo abierto en torno a x_0 , entonces, $h^{-1}(V)$ es un intervalo abierto en torno a $h^{-1}(x_0)$. Por dependencia sensible en las condiciones iniciales, existe $y_0 \in h^{-1}(V)$ y $n > 0$ tal que $|f^n(h^{-1}(x_0)) - f^n(y_0)| > \delta$. Luego

$$|h(f^n(h^{-1}(x_0))) - h(f^n(y_0))| = |g^n(x_0) - g^n(h(y_0))| > \delta^*.$$

□

Capítulo 4

Modelo SEIR

4.1. Modelo SEIR sin forzamiento temporal

Como hemos visto en el primer capítulo, el modelo SEIR es un tipo de modelo epidemiológico en el cual se tiene en cuenta el periodo latente (cuya duración media viene dada por $1/\sigma$). Las ecuaciones por las que se rige este modelo son:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - (\beta I + \mu)S, \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\mu + \sigma)E, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases}$$

Sumando dichas ecuaciones obtenemos $\frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = -\mu(S + E + I + R - 1)$.

Asumimos que $S + E + I + R = 1$ y como ocurría en el modelo SIR, la última ecuación ($\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$) es redundante. Por lo que estudiaremos dicho nuevo sistema de tres ecuaciones.

La adición de un período latente es esencialmente similar a la introducción de un ligero retraso de tiempo en el sistema y podemos esperar que dicha característica pueda actuar para desestabilizar y ralentizar el sistema.

Como en otros modelos de enfermedades, el modelo SEIR presenta dos soluciones de equilibrio:

- Solución endémica $P^* = (S^*, E^*, I^*, R^*)$
- Solución libre de enfermedades $P_0 = (1, 0, 0, 0)$

Como se observa en [3], el punto fijo endémico es de mayor interés y viene dado por

$$S^* = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \sigma)}{\beta\sigma} = \frac{1}{R_0},$$

$$E^* = \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\beta\sigma}(R_0 - 1),$$

$$I^* = \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1),$$

con $R^* = 1 - S^* + E^* + I^*$. La muerte de algunos individuos en la clase E que no contribuyen a la cadena de transmisión provoca que la expresión de R_0 (tasa de reproducción básica) sea ligeramente distinta a la de otros modelos, ya que tomamos $R_0 = \frac{\beta\sigma}{(\sigma + \mu)(\gamma + \mu)}$. Sin embargo, esta diferencia es a menudo despreciable ya que $\frac{\sigma}{(\mu + \sigma)} \sim 1$ por que el periodo latente es mucho menor que la esperanza de vida esperada.

Cuando esto ocurre tenemos que $R_0 = \frac{\beta}{(\gamma+\mu)}$, y obtenemos la misma expresión del modelo SIR.

A continuación, vamos a ver que si $R_0 > 1$, P_0 es en un punto silla inestable, mientras P^* emerge como un equilibrio local asintóticamente estable. Si $R_0 \leq 1$, P_0 es el único equilibrio y es globalmente asintóticamente estable.

Para que el equilibrio endémico (P^*) sea factible y estable(y el equilibrio libre de enfermedades sea inestable), la ecuación $I^* = \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1)$ requiere que el ratio de reproducción básico sea mayor que 1, es decir, $R_0 > 1$. Realizamos el jacobiano de nuestro sistema de ecuaciones para la obtención de valores propios y obtenemos una expresión de orden 4 donde $\Lambda = -\mu$ es una solución obvia, dejándonos con una ecuación cúbica:

$$\Lambda^3 + (\mu R_0 + 2\mu + \sigma + \gamma)\Lambda^2 + \mu R_0(2\mu + \sigma + \gamma)\Lambda + \mu(R_0 - 1)(\mu + \sigma)(\mu + \gamma) = 0.$$

Aunque no existe una solución obvia para esta ecuación, en muchos casos σ y γ son mucho más grandes que μ y que μR_0 por lo que una de las soluciones de esta ecuación es aproximadamente $\Lambda \sim -(\sigma + \gamma)$, lo que nos deja con una expresión de orden 2 para los dos valores propios restantes:

$$\Lambda^2 + \mu R_0 \Lambda + \frac{\gamma\sigma}{\sigma + \gamma} \mu(R_0 - 1) \approx 0.$$

A partir de esta expresión podemos deducir que el equilibrio endémico es estable dado $R_0 > 1$ con perturbaciones desapareciendo de manera oscilatoria. Entonces, podemos encontrar una expresión para el periodo natural de oscilación (es el inverso de la parte compleja de los valores propios multiplicado por 2π) la cual viene dada por $T \sim 2\pi \sqrt{\left(\frac{1}{\mu(R_0-1)}\right)\left(\frac{1}{\mu+\gamma} + \frac{1}{\mu+\sigma}\right)}$, llamando $G = \frac{1}{\mu+\gamma} + \frac{1}{\mu+\sigma}$ a la "longitud de generación ecológica" de la infección donde se incluye el periodo latente y $A \approx \frac{1}{\mu(R_0-1)}$ la edad media del huésped en el momento de la infección [3].

Este hecho aparece representado en la siguiente figura obtenida de [3]:

A partir de este análisis, podemos pensar que el modelo SEIR es una complicación innecesaria del modelo SIR. Dando un pequeño índice de mortalidad ($\mu \ll \gamma, \mu \ll \sigma$), los modelos SIR y SEIR se comportan de manera similar en el equilibrio siempre que el ratio reproductivo básico ($\beta_{SIR}/\gamma_{SIR} = \beta_{SEIR}/\gamma_{SEIR}$) y el periodo de infección promedio ($1/\gamma_{SIR} = 1/\gamma_{SEIR} + 1/\sigma_{SEIR}$) sean idénticos. Sin embargo, ambos modelos se comportan de forma muy diferente en la invasión, con la presencia de una clase expuesta ralentizando la dinámica. Examinando los valores propios en el equilibrio libre de enfermedad nos permite describir el aumento en la prevalencia durante la fase de invasión:

$$I_{SEIR}(t) \approx I(0) \exp\left(\frac{1}{2}[\sqrt{4(R_0 - 1)\sigma\gamma + (\sigma + \gamma)}]t\right),$$

$$\{\approx I(0) \exp([\sqrt{R_0} - 1]\gamma t) \text{ si } \sigma = \gamma\}$$

mientras que sin una clase expuesta las dinámicas están dadas por:

$$I_{SIR}(t) \approx I(0) \exp([(R_0 - 1)\gamma]t),$$

donde la mortalidad natural ha sido ignorada para simplificar la ecuación.

Aunque los modelos SIR y SEIR se comportan de manera similar en el equilibrio (cuando los parámetros se reajustan adecuadamente), el modelo SEIR tiene una tasa de crecimiento más lenta después de la invasión de patógenos debido a que los individuos necesitan pasar por la clase expuesta antes de que puedan contribuir al proceso de transmisión.

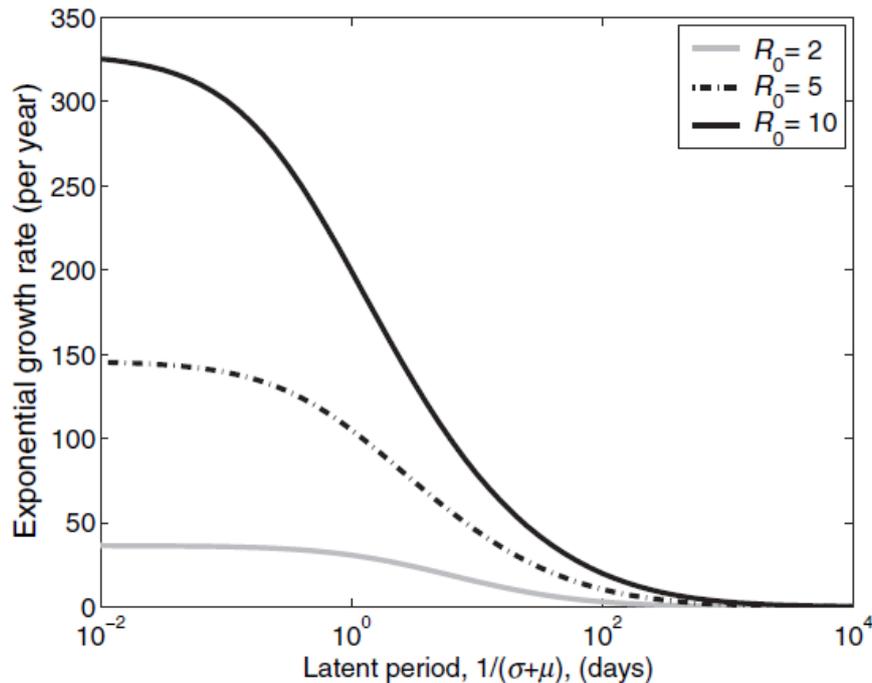


Figura 4.1: Tasa de crecimiento con respecto al periodo latente.

4.2. Modelos con forzamiento temporal

Existen numerosas enfermedades infecciosas cuyas transmisiones varían según el tiempo, es decir, cuya tasa de contagio β no es constante en el tiempo. Por ejemplo, la transmisión de la gripe varía según la estación, alcanzando su punto máximo en invierno.

Para tratar este tipo de enfermedades utilizaremos los modelos de forzamiento temporal que son aquellos en los que algunos de sus parámetros dependen del tiempo (frecuentemente será β dicho parámetro, $\beta(t)$). Los más comunes son aquellos que utilizan forzamiento estacional, es decir utilizan funciones T-periódicas para sus parámetros. Consideramos por lo general que $T = 1$ año. Estos modelos forzados temporalmente reflejan mejor la realidad del patrón observado de las epidemias recurrentes en contraste con los modelos no forzados (los modelos descritos anteriormente), en los cuales se producen oscilaciones amortiguadas hacia un punto de equilibrio.

Una de las enfermedades más comunes basada en un modelo con forzamiento temporal es el sarampión, donde la gran mayoría de la población se infecta durante su niñez y tras superar dicha infección, adquiere inmunidad permanente. Nos vamos a centrar en los países desarrollados, donde no existe una mortalidad infantil muy elevada (por lo que no contemplamos las muertes por causas naturales), así que para aproximar el modelo, basta con considerar a la población infantil en las clases S e I. Vamos a estudiar un modelo basado en la frecuencia, donde la población es constante.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \beta(t) \frac{SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \beta(t) \frac{SI}{N} - \gamma I. \end{cases}$$

Estas ecuaciones ignoran la muerte de individuos susceptibles e infecciosos; además la tasa de contagio es una función que depende del tiempo ($\beta(t)$), se tomará la siguiente función sinusoidal [3]:

$$\beta(t) = \beta_0(1 + \beta_1 \cos(\omega t)),$$

donde el parámetro ω representa la frecuencia de forzamiento, además $\omega/2\pi$ es el número de ciclos por unidad de tiempo, β_0 es la tasa de transmisión media, y β_1 la amplitud estacional.

Como podemos observar el modelo que estamos tratando es concretamente el modelo SIR al que hemos añadido forzamiento por lo que tomaremos que $R_0 = \frac{\beta_0}{\mu + \gamma}$. Este valor representa un promedio anual y en ciertas épocas del año, la tasa de crecimiento puede ser mucho mayor de lo previsto por este valor promedio.

Otra de las consecuencias que observamos al añadir forzamiento estacional a los sistemas de nuestros modelos de enfermedades es la resonancia armónica o subarmónica. Si observamos ahora el modelo SIR con forzamiento siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - (\beta(t) \frac{I}{N} + \mu)S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta(t) \frac{SI}{N} - (\mu + \gamma)I. \end{cases}$$

donde $\beta(t) = \beta_0(1 - \beta_1 \cos(\omega t))$ (en este caso utilizamos el signo menos para garantizar que $\beta(t)$ sea mínimo al comienzo del año epidémico ($t = 0$)).

Por lo visto anteriormente, sabemos que nuestros sistemas sin forzamiento presentan un equilibrio libre de enfermedades y un equilibrio endémico. Si el estado de nuestro equilibrio estable es el equilibrio endémico, al introducir forzamiento armónico, los focos estables (oscilaciones amortiguadas) pasarán a ser órbitas (oscilaciones de amplitud constante).

4.2.1. Modelo SEIR con forzamiento temporal

Centrándonos en el modelo SEIR y tomando $\beta(t)$ como el único parámetro que depende del tiempo, tenemos que el sistema de ecuaciones de este modelo es [3]:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu - (\beta(t) \frac{I}{N} + \mu)S, \\ \frac{dE}{dt} = \beta(t) \frac{SI}{N} - (\mu + \sigma)E, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \gamma)I, \end{cases}$$

donde tomamos la población normalizada y $\beta(t) = \beta_0(1 - \beta_1 \cos(\omega t))$ como en el sistema anterior.

Como hemos visto en el estudio del modelo SEIR sin forzamiento, si sustituimos $\beta(t)$ por β_0 , encontramos una expresión para el periodo natural de oscilación

$$T \sim 2\pi \sqrt{\frac{1}{\mu(R_0 - 1)((\mu + \gamma) + (\mu + \sigma))}},$$

de aquí obtenemos que el sistema fluctúa con frecuencia :

$$F = \sqrt{\mu(R_0 - 1)(\mu + \gamma) + \mu(R_0 - 1)(\mu + \sigma)}$$

Si la frecuencia de forzamiento es similar al periodo de las oscilaciones que obtenemos al hallar las soluciones del modelo, la dinámica del modelo imita la del forzamiento (pero con oscilaciones de mayor amplitud).

Si tomamos $\omega = kF$, con $k \in \mathbb{Z}$, el modelo presenta un comportamiento periódico en el cual se observan fluctuaciones con distinta amplitud.

Para este sistema con forzamiento, cambios en los parámetros provocan cambios importantes en el comportamiento de las soluciones como la aparición de ciclos bienales o de mayor periodo, o la aparición de caos.

Los cambios en R_0 o β_1 pueden llevar a resultados cualitativamente diferentes. Por ejemplo, cuando R_0 es grande y el nivel de forzamiento estacional es pequeño, la fracción de infectados muestra oscilaciones armónicas con epidemias anuales de pequeña amplitud. Al aumentar β_1 obtenemos ciclos cada vez de mayor periodo e incluso podemos llegar a un comportamiento caótico.

La mayoría de las enfermedades que modelizamos mediante forzamiento temporal tienen mecanismos oscilatorios anuales, por lo que lo más sensato es tomar $\omega = 2\pi$ para poder asegurar un periodo de forzamiento estacional de un año.

Para la resolución numérica del modelo SEIR, vamos a representar la fracción de infectados con respecto al tiempo para distintos valores de β_1 .

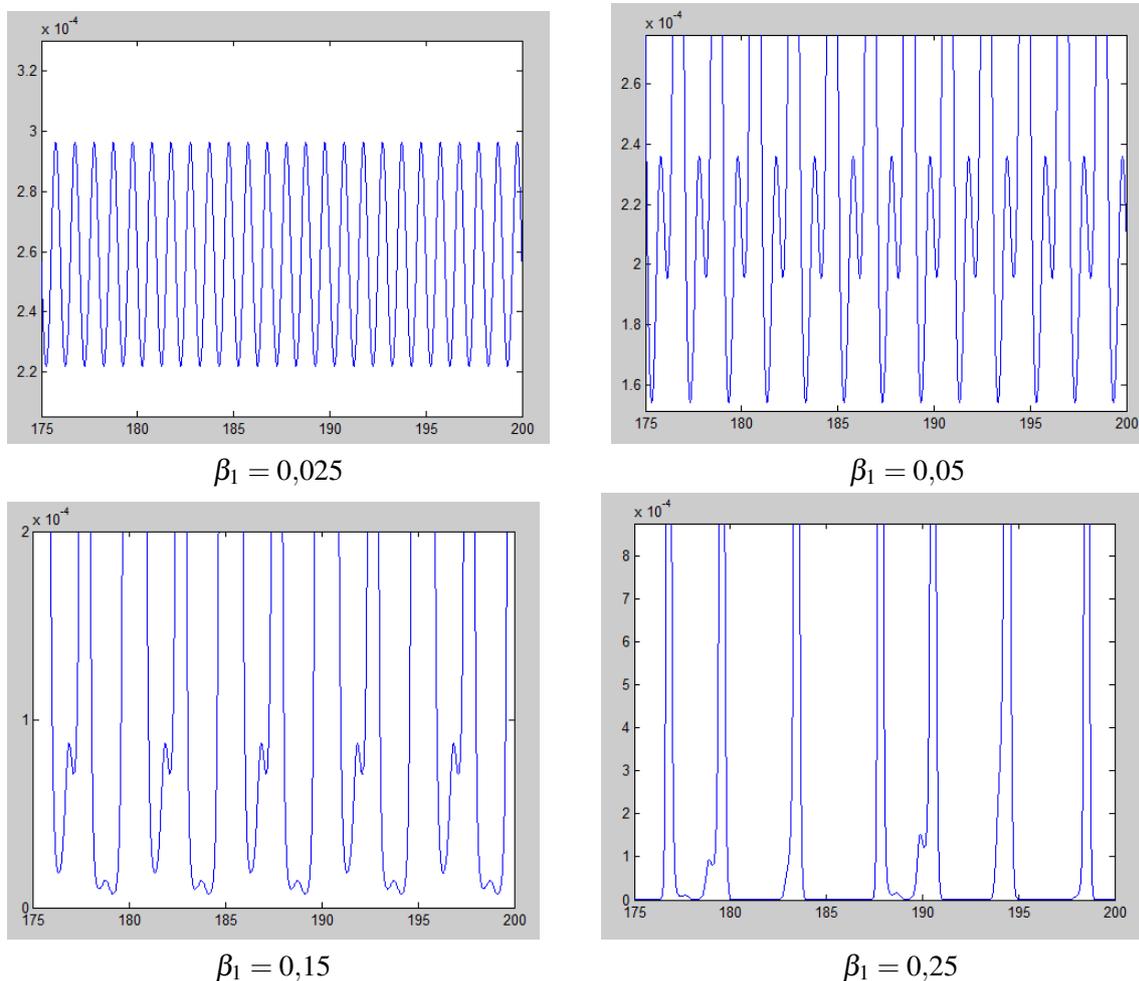


Figura 4.2: Resolución numérica del modelo SEIR tomando como β_1 los valores indicados debajo de cada imagen, $\beta_0 = 1250$, $\mu = 0,02$ por año, $\sigma = 365/8$ y $\gamma = 365/5$. Las condiciones iniciales utilizadas son $S(0) = 6 \times 10^{-2}$ y $E(0) = I(0) = 10^{-3}$.

Como podemos observar, cuando $\beta_1 = 0,025$ tenemos brotes anuales de pequeña amplitud. Al aumentar β_1 a $0,05$ observamos resonancia subarmónica dando lugar a dinámicas bienales. Posteriormente, tomando $\beta_1 = 0,15$ tenemos que los brotes se dan cada cinco años y finalmente cuando $\beta_1 = 0,25$ vemos un comportamiento caótico del cual hablaremos más adelante.

A continuación, en la *Figura 4.2* [3] producimos un diagrama de bifurcación que toma diferentes valores de β_1 a lo largo del eje x y cuyo eje y representa la prevalencia de infección (una vez cada año).

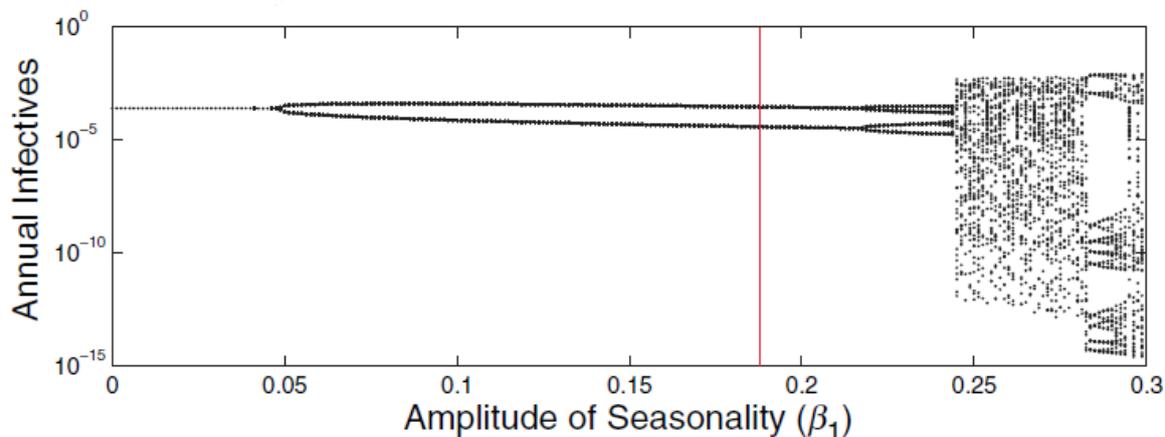


Figura 4.3: Diagrama de bifurcación que determina el comportamiento de las órbitas en función de β_1 donde tomamos $\beta_1 \in [0, 0.3]$, $\beta_0 = 1250$, $\mu = 0.02$ por año, $\sigma = 365/8$ y $\gamma = 365/5$. Las condiciones iniciales utilizadas son $S(0) = 6 \times 10^{-2}$ y $E(0) = I(0) = 10^{-3}$.

Observamos que para $\beta_1 = 0.1$ existen dos puntos, por lo que las dinámicas para ese valor son bienales y se repiten cada dos años. Para niveles de forzamiento modestos las dinámicas imitan a las de la función de forzamiento y son anuales. Para valores superiores a $\beta_1 \approx 0.0455$ las dinámicas se vuelven multianuales. Finalmente para valores de β_1 superiores a 0.19 las dinámicas son más complejas pudiendo existir multiestabilidad, es decir la coexistencia de dos o más atractores, pudiendo ser atractores caótico o una órbita periódica. En la *Figura 4.2* esta hecho para un conjunto de condiciones iniciales y la dinámica observada en $\beta_1 = 0.19$ es de una órbita periódica, pero para otras condiciones iniciales la dinámica puede ser análoga a la observada por ejemplo en $\beta_1 = 0.25$.

Es decir, a partir de ciertos valores de β_1 tenemos un comportamiento caótico. En la representación gráfica de este comportamiento aparece un atractor caótico [7], el cual explicamos a continuación.

Definición 4.2.1. Un conjunto U se denomina región de captura (trapping region) para la aplicación F siempre que su clausura sea compacta y

$$cl(F(U)) \subset int(U).$$

Definición 4.2.2. Un conjunto A invariante topológicamente transitivo compacto para un difeomorfismo F se denomina conjunto atractor (attracting set) si existe una región de captura U tal que

$$A = \bigcap_{j \geq 0} F^j(U).$$

Como la región de captura tiene un clausura compacta, el conjunto atractor es necesariamente compacto.

Definición 4.2.3. Un conjunto A invariante topológicamente transitivo compacto para un difeomorfismo F , se denomina atractor de F si es un conjunto atractor tal que no presenta conjuntos subatractores no triviales, es decir, $A' \subset A$ tal que $\emptyset \neq A' \neq A$.

Definición 4.2.4. Un difeomorfismo F es caótico en un conjunto invariante A si cumple las condiciones de la definición de caos de Devaney, es decir, si cumple que:

- El difeomorfismo F tiene dependencia sensible en las condiciones iniciales cuando lo restringimos al atractor A .

- F es topológicamente transitivo en A .

Todas estas definiciones previas nos ayudan a entender la definición de un atractor caótico, el cual hemos visto que sucede en nuestro modelo SEIR con forzamiento para valores de $\beta_1 \in [0, 0.3]$.

Definición 4.2.5. Llamamos atractor caótico a un conjunto A de un difeomorfismo F tal que el conjunto A es un atractor de F y F es caótico en A .

En los modelos sin forzamiento las condiciones iniciales no influyen en el estado de equilibrio del sistema, sin embargo, al añadir forzamiento temporal, pueden darse varios estados de equilibrio endémico que dependerán de las condiciones iniciales que tomemos del sistema, es decir tendremos una multiestabilidad. Por lo que estos sistemas con forzamiento no solo presentan cambios en sus soluciones al variar sus parámetros, sino que también presentan sensibilidad al modificar sus condiciones iniciales.

A continuación, vamos a corroborar la dependencia de las condiciones iniciales de los sistemas para $\beta_1 = 0,19$.

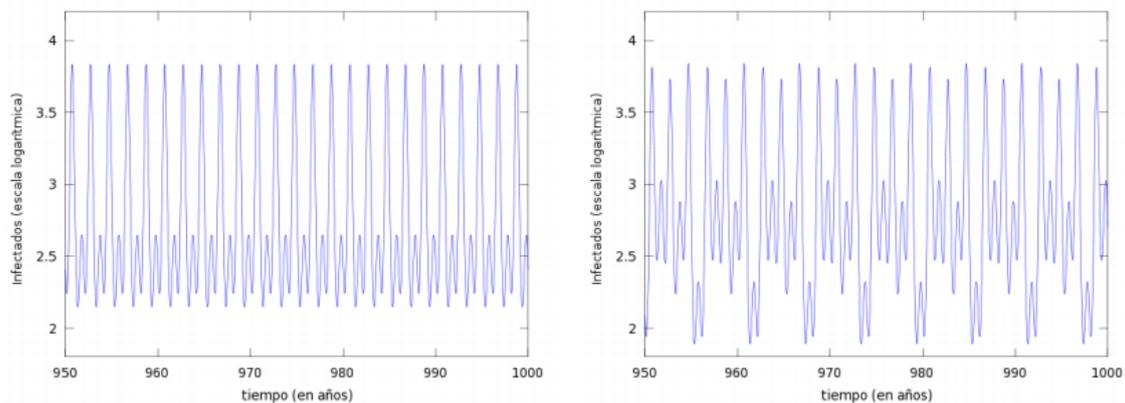


Figura 4.4: Resolución numérica del modelo SEIR tomando como $\beta_1 = 0,19$, $\beta_0 = 1250$, $\mu = 0,02$ por año, $\sigma = 365/8$ y $\gamma = 365/5$ y $N = 5000000$. Las condiciones iniciales utilizadas son, en primer lugar $S(0) = 6 \times 10^{-2}N$ y $E(0) = I(0) = 10^{-3}N$ y en la segunda $S(0) = 6 \times 10^{-2}N$, $E(0) = 0,1N$ y $I(0) = 10^{-3}N$

En la *Figura 4.3* (donde hemos tomado escala logarítmica) para $\beta_1 = 0,19$ observamos que el mismo sistema presenta diferentes estados de equilibrio para distintas condiciones iniciales.

Representando en la *Figura 4.4* las dos situaciones observadas con condiciones iniciales diferentes para los mismos valores de los distintos parámetros, podemos ver la coexistencia entre ambos comportamientos que puede incluso llegar a ser caóticos con condiciones iniciales próximas a las dadas.

Notemos que la demostración analítica de que (a partir de unas condiciones iniciales dadas) se de un atractor caótico no es factible por lo que se tendrían que utilizar técnicas de demostración asistida por ordenador, las cuales no vamos a tratar en este trabajo.

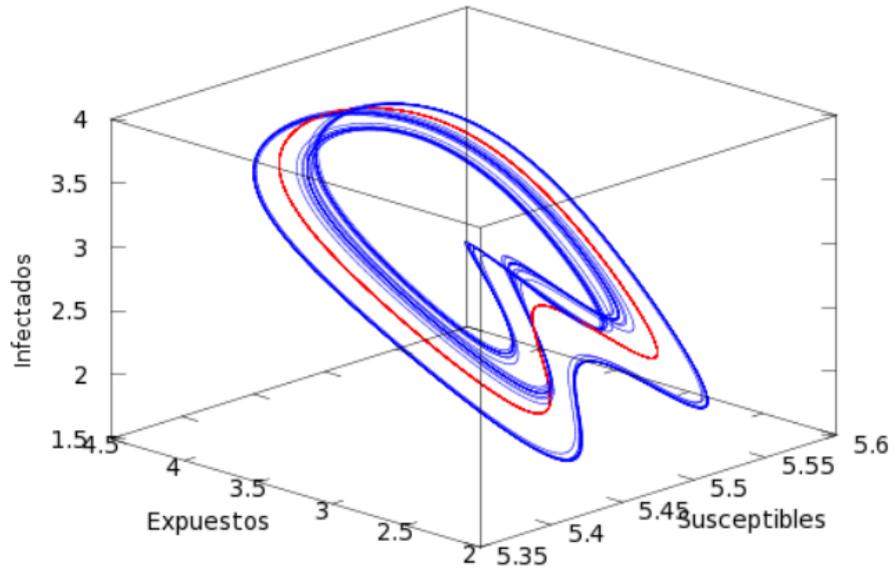


Figura 4.5: Atractor al que se acerca la solución numérica del modelo SEIR tomando como $\beta_1 = 0.19$, $\beta_0 = 1250$, $\mu = 0.02$ por año, $\sigma = 365/8$ y $\gamma = 365/5$ y $N = 5000000$. Las condiciones iniciales utilizadas son, $S(0) = 6 \times 10^{-2}N$ y $E(0) = I(0) = 10^{-3}N$ (rojo) y $S(0) = 6 \times 10^{-2}N$, $E(0) = 0.1N$ y $I(0) = 10^{-3}N$ (azul)

Bibliografía

- [1] A. KOROBENIKOV, G.C. WAKE, *Lyapunov Functions and Global Stability for SIR, SIRS and SIS Epidemiological Models*, Applied Mathematics Letters 15, pp.955-960, 2002.
- [2] MICHAEL Y. LI, JAMES S. MULDOWNNEY, *Global Stability for the SEIR Model in Epidemiology*, Mathematical Biosciences, Volume 125, Issue 2, February 1995, Pages 155-164.
- [3] MATT J. KEELING, PEJMAN ROHANI, *Modeling Infectious Diseases In Humans And Animals*, Princeton University Press, Princeton, 2007.
- [4] YURI A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition*, Applied Mathematics Letters Vol.112.
- [5] JOSEPH TONIEN, *A note on Devaney's definition of chaos*, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, volume 2, 2004, Pages 23-26.
- [6] JUSTIN GUO, *Analysis Of Chaotic Systems*, disponible en <http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Guo.pdf>
- [7] JOSEPH TONIEN, *What Is A Chaotic Attractor?* , disponible en <https://sites.math.northwestern.edu/~clark/publications/chaos.pdf>