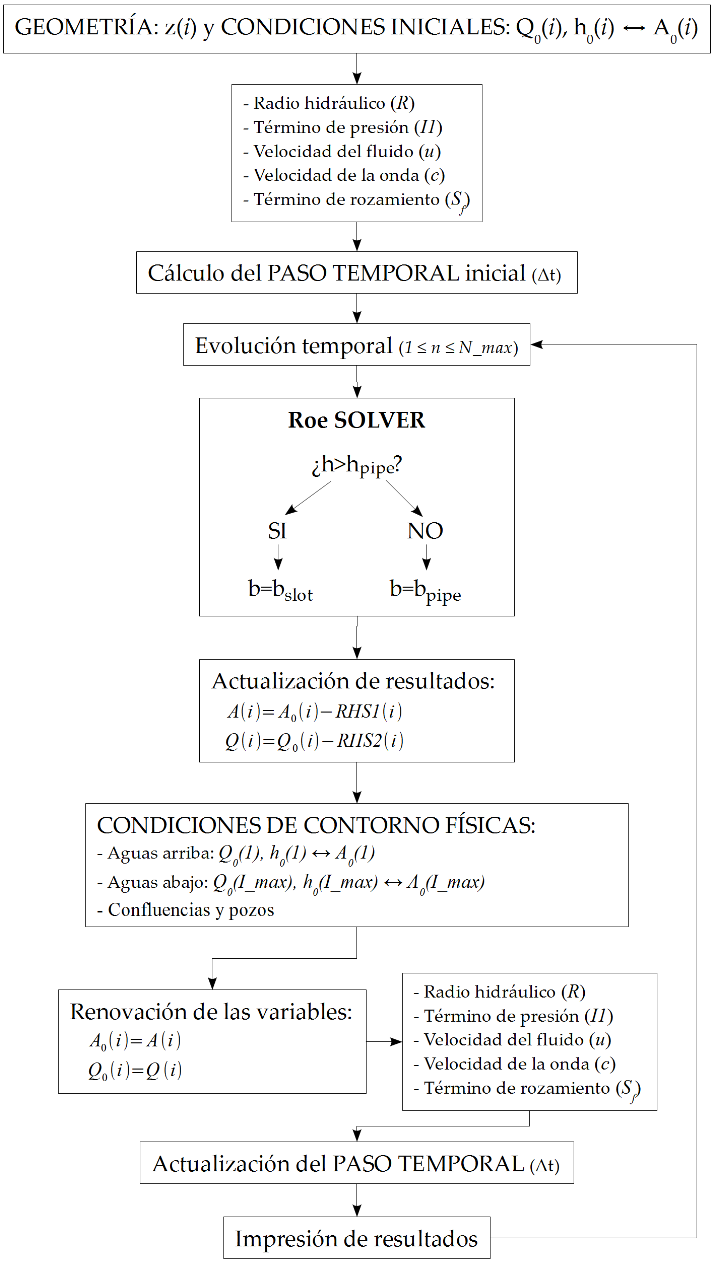
Apéndice A. Diagrama de flujo

La estructura básica del programa se puede resumir en el siguiente diagrama de flujo:



Apéndice B. Aplicación del método de Roe a las ecuaciones de lámina libre

Los autovalores y autovectores para el sistema de ecuaciones *shallow water*, obtenidos en (37) son:

$$\lambda^{1,2}=u\pm c \quad , \quad \boldsymbol{e}^{1,2}=(1, u\pm c)^T$$

Como estamos considerando un sistema discretizado, el esquema de Roe nos exige trabajar con los valores promedio de estas magnitudes en las paredes de las celdas:

$$\tilde{\lambda}^{1,2}=\tilde{u}\pm\tilde{c} \quad , \quad \tilde{\boldsymbol{e}}^{1,2}=(1, \tilde{u}\pm\tilde{c})^T \tag{1}$$

Sustituyendo estas expresiones en (73) (se omitirán los subíndices para no recargar en exceso la notación):

$$\delta\boldsymbol{U}=\sum_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\boldsymbol{e}}_k \quad \rightarrow \quad \delta A=\tilde{\alpha}_1+\tilde{\alpha}_2 \quad , \quad \delta Q=\tilde{\alpha}_1(\tilde{u}+\tilde{c})+\tilde{\alpha}_2(\tilde{u}-\tilde{c}) \tag{2}$$

Es posible despejar los coeficientes $\tilde{\alpha}$ del sistema de ecuaciones (2):

$$\tilde{\alpha}_1=\frac{(\tilde{c}-\tilde{u})\delta A+\delta Q}{2\tilde{c}} \quad , \quad \tilde{\alpha}_2=\frac{(\tilde{c}+\tilde{u})\delta A+\delta Q}{2\tilde{c}} \tag{3}$$

Si realizamos un desarrollo análogo para la ecuación (74) y haciendo uso de (38):

$$\delta\boldsymbol{F}=\tilde{\boldsymbol{J}}\,\delta\boldsymbol{U}=\sum_k \tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\boldsymbol{e}}_k$$

$$\begin{gathered}\delta Q=\tilde{\alpha}_1(\tilde{u}+\tilde{c})+\tilde{\alpha}_2(\tilde{u}-\tilde{c})\\ \delta\left(\frac{Q^2}{A}+g\,I_1\right)=\delta\left(\frac{Q^2}{A}+g\,\frac{A^2}{2b}\right)=\left(g\,\frac{A}{b}-\frac{Q^2}{A^2}\right)\delta A+2\frac{Q}{A}\delta Q=\tilde{\alpha}_1(\tilde{u}+\tilde{c})^2+\tilde{\alpha}_2(\tilde{u}-\tilde{c})^2=\cdots\\ \cdots=\frac{(\tilde{c}-\tilde{u})\delta A+\delta Q}{2\tilde{c}}(\tilde{u}+\tilde{c})^2+\frac{(\tilde{c}+\tilde{u})\delta A+\delta Q}{2\tilde{c}}(\tilde{u}-\tilde{c})^2=(\tilde{c}^2-\tilde{u}^2)\delta A+2\tilde{u}\,\delta Q\end{gathered} \tag{4}$$

Para obtener la relación anterior se han sustituido las expresiones para los coeficientes $\tilde{\alpha}$, calculadas anteriormente (3). Por comparación de términos:

$$g\,\frac{A}{b}\,\delta A=\tilde{c}^2\,\delta A \tag{5}$$

$$-\frac{Q^2}{A^2}\,\delta A+\frac{2\,Q}{A}\,\delta Q=2\,\tilde{u}\,\delta Q-\tilde{u}^2\,\delta A \tag{6}$$

Por último, despejando las velocidades y recuperando los índices en la notación:

$$\tilde{u}_{i+1/2}=\frac{Q_{i+1}\sqrt{A_i}+Q_i\sqrt{A_{i+1}}}{\sqrt{A_i A_{i+1}}\left(\sqrt{A_{i+1}}+\sqrt{A_i}\right)} \tag{7}$$

$$\tilde{c}_{i+1/2}=\sqrt{\frac{g}{2}\left[\left(\frac{A}{b}\right)_{i+1}-\left(\frac{A}{b}\right)_i\right]} \tag{8}$$

Únicamente falta por incluir la discretización del término fuente de las ecuaciones:

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0\\ g\,\tilde{I}_2+g\,\tilde{A}\left(S_0-\tilde{S}_f\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ g\,\dfrac{\tilde{A}^2}{2\,\tilde{b}^2}\cdot\dfrac{\delta b}{\delta x}-g\,\tilde{A}\,\dfrac{\delta z}{\delta x}-g\,\tilde{A}\,\tilde{S}_f\end{pmatrix} \tag{9}$$

donde hemos tenido en cuenta que:

$$S_0=-\frac{\delta z}{\delta x}\quad,\quad \tilde{I}_2=\frac{\tilde{A}^2}{2\,\tilde{b}^2}\cdot\frac{\delta b}{\delta x}$$

Entonces:

$$\tilde{\boldsymbol{R}}\,\delta x=\begin{pmatrix}0\\ g\,\dfrac{\tilde{A}^2}{2\,\tilde{b}^2}\,\delta b-g\,\tilde{A}\,\delta z-g\,\tilde{A}\,\delta x\,\tilde{S}_f\end{pmatrix}_{i+1/2} \tag{10}$$

Además, de la ecuación (85):

$$\tilde{\boldsymbol{R}}\,\delta x=\sum_k\tilde{\beta}_k\,\tilde{\boldsymbol{e}}_k=\tilde{\beta}_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1+\tilde{\beta}_2\tilde{\boldsymbol{e}}_2=\tilde{\beta}_1\begin{pmatrix}1\\ \tilde{u}+\tilde{c}\end{pmatrix}_{i+1/2}+\tilde{\beta}_2\begin{pmatrix}1\\ \tilde{u}-\tilde{c}\end{pmatrix}_{i+1/2} \tag{11}$$

Resolviendo en cada componente:

$$
\begin{gathered}
0=\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_2 \Rightarrow \tilde{\beta}_1=-\tilde{\beta}_2 \equiv \tilde{\beta} \\
g\,\frac{\tilde{A}^2}{2\tilde{b}^2}\delta b-g\,\tilde{A}\,\delta z-g\,\tilde{A}\,\delta x\,\tilde{S}_f=\tilde{\beta}\left(\tilde{u}+\tilde{c}\right)-\beta\left(\tilde{u}-\tilde{c}\right)\Rightarrow \\
\Rightarrow \tilde{\beta}=\frac{g}{2\tilde{c}}\left(\frac{\tilde{A}^2}{2\tilde{b}^2}\delta b-\tilde{A}\,\delta z-\tilde{A}\,\delta x\,\tilde{S}_f\right)
\end{gathered}
\tag{12}
$$