

# Acercándonos a la probabilidad en 1.º ESO

por

AURORA DOMENECH PENÓN<sup>1</sup> Y SERGIO MARTINEZ-JUSTE<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup>IES Pilar Lorengar, <sup>2</sup>Universidad de Zaragoza)

Presentamos una secuencia de actividades de probabilidad para 1.º de ESO, en la que a través del juego con material manipulativo, y con un enfoque a través de la resolución de problemas, los alumnos se aproximan al lenguaje probabilístico, al concepto de variabilidad muestral, al análisis y recogida de datos en un experimento y al uso de herramientas para abordar problemas combinatorios y de probabilidad.

## ¿Cómo surge la actividad?

Esta actividad surge a partir de un seminario incluido en el Plan de Formación de Centro sobre formación específica en Didáctica de las Matemáticas que llevamos a cabo en el IES Pilar Lorengar durante el curso 18/19 y que continuamos en el 19/20 en la medida que nos permitió la situación sanitaria. Este seminario apoya y complementa un proyecto de innovación educativa reconocido por la administración de la Comunidad Autónoma de Aragón llevado a cabo en el curso 18/19 basado en la cooperación docente para el desarrollo de unidades didácticas mediante el desarrollo de Lesson Studies (Martínez-Juste, 2020; Martínez-Juste y Domenech, 2019).

Durante esos dos cursos, los componentes del Departamento de Matemáticas recibimos formación de profesores del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Zaragoza. De este seminario salieron ideas para diseñar diferentes unidades didácticas, entre ellas la de probabilidad en 1.º ESO que presentamos aquí, para las que nos dio pautas Pablo Beltrán, profesor asociado en la Universidad de Zaragoza, que fue quien impartió la sesión del seminario dedicada a probabilidad y estadística.

El bloque del currículo Estadística y Probabilidad se trabaja habitualmente al final de curso por lo que está un poco «relegado al olvido»... Sin embargo, consideramos que es importante trabajar este bloque desde la perspectiva de dotar al alumnado de herramientas que le ayuden a desarrollar una cultura estadística y un razonamiento probabilístico que les permitan extraer conclusiones válidas y coherentes en situaciones no deterministas.

Fischbein (1975) defiende la idea de dar a los alumnos la oportunidad de resolver problemas de incertidumbre a edades tempranas confiando en la intuición probabilística de los niños a la hora de asumir un determinado juicio en una situación aleatoria o de incertidumbre. También, Shaughassy (1992) recomienda la introducción al mundo de la probabilidad y estadística desde un modo experimental. Además, históricamente, la probabilidad ha venido asociada desde hace miles de años a situaciones de juego, sin ser formalizada hasta mucho más tarde (Díaz Godino y otros, 1996).

Teniendo en cuenta lo anterior, y los diferentes significados que pueden elegirse para abordar la probabilidad (Arce y otros, 2019), a saber, intuitivo, laplaciano, frecuencial, subjetivo y axiomático, nos decantamos por diseñar, para 1.º de ESO, una actividad experimental y tratada desde el juego (el juego predispone al alumnado a la participación y a sentirse protagonista de lo que va sucediendo en el aula). A lo largo de la actividad, el alumno aprende a dar respuestas a otras situaciones menos contextualizadas reflexionando sobre los resultados obtenidos en los juegos. Hacia el final de la secuencia, se introduce una importante herramienta para abordar problemas de combinatoria y probabilidad como son los diagramas de árbol (Roldan y otros, 2018).

## Actividad

En las sesiones de clase los alumnos están agrupados en grupos de 3 o 4 personas. Es deseable que sean dos los profesores que dinamicen esta actividad dado que se genera en el aula un cierto «barullo» y así un docente va recogiendo los resultados de los grupos en el momento, y el otro pasando por los grupos centra la actividad y resuelve los problemas que puedan surgir. Sin embargo, también hemos experimentado con la propuesta en grupos con un único docente.

### 1.ª sesión: Introducción y Carreras de caballos

Introducimos la unidad didáctica tanteando el nivel de intuición del alumnado sobre situaciones de incertidumbre y su vocabulario probabilístico. Para ello, comenzamos la sesión pidiéndoles que acaben una serie de frases (figura 1), y luego respondan a una serie de preguntas, de forma que aparecen ya así expresiones como: «probable», «más o menos probable que», «siempre pasa», «pasa a veces», «esto es imposible», «eso siempre será así», etc. Entramos de esta forma en el campo de la aleatoriedad, aclarando y debatiendo vocabulario de probabilidad. Esta actividad se basa en las recomendaciones del primer capítulo del trabajo de Díaz y otros (1996).



Figura 1. Frases que se proyectan en el aula para iniciar la unidad didáctica

Figura 2. Tablero de la carrera de caballos (izquierda) y ficha personal para registrar los resultados (derecha)

Una vez terminado el debate se explica el juego que van realizar que consiste en una carrera de caballos. Hay 12 caballos numerados del 1 al 12. Cada jugador, por turno, va tirando los dos dados y se suman las puntuaciones de ambos. El caballo que tiene el dorsal del resultado obtenido avanza una casilla en el tablero y así sucesivamente. Gana el caballo que antes llegue a la meta y en dicho momento termina la carrera. Antes de comenzar, tras explicar las reglas, cada miembro del equipo debe «apostar» por un caballo para ser el ganador. Se pretende observar si algún alumno apuesta por el suceso imposible «gana el caballo 1» o por sucesos poco probables como «gana el caballo 12». Además, si se realizan varias carreras, esta apuesta inicial permite observar si estas creencias se modifican.

Empieza el juego y cada alumno en su cuaderno va a ir reproduciendo lo que sucede en el tablero (figura 2). De esta manera los alumnos tienen una representación del diagrama de barras del experimento.

Cuando acaba la partida, un miembro del grupo traslada el resultado al profesor, que lo volcará en una hoja de cálculo ya preparada para ello, para poder realizar después la comparativa de lo que ha sucedido en los demás grupos.

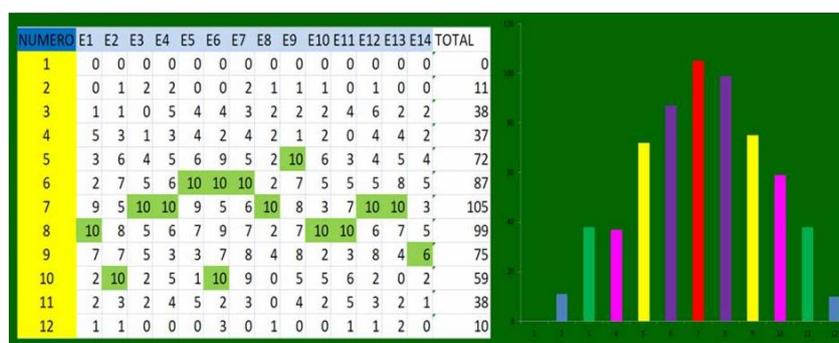


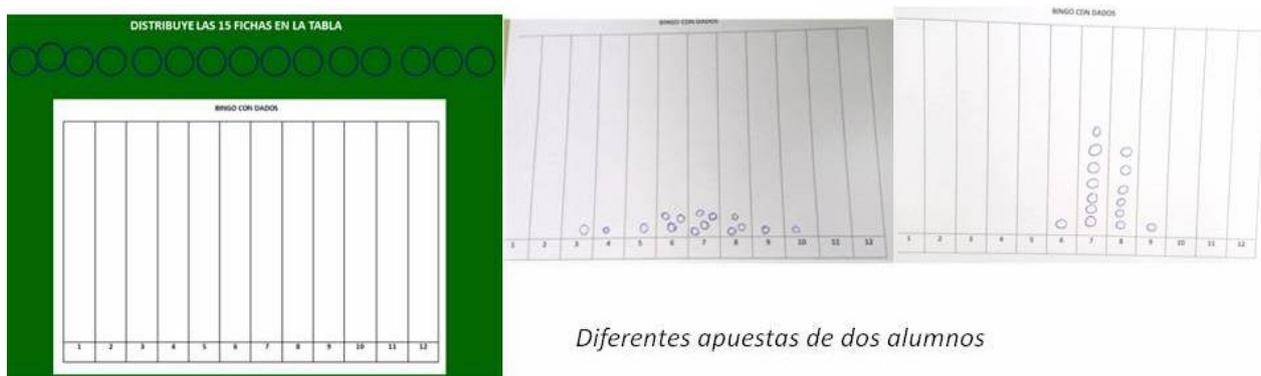
Figura 3. Resultados de las diferentes carreras (izquierda) y diagrama de barras con el acumulado de todas las carreras (derecha)

## 2.ª sesión: Recogida de datos, comparaciones y bingo (BEANO)

En esta sesión se presentan y debaten los resultados que obtuvieron en el juego todos los grupos. Presentamos el documento generado en tres clases de unos 28 alumnos cada una, aunque se realizó en cinco grupos. Esta recoge un total de 631 tiradas (figura 3).

Se establece un debate interesante al responder a preguntas como: «¿algún caballo avanza más rápido que otro?», «¿alguno no avanzó nada?», «¿siempre gana el mismo dorsal?», «¿en todos los grupos ha pasado lo mismo?».

Una vez comentados los resultados se realiza un «bingo» (figura 4). Este juego es una adaptación casi sin variaciones del juego BEANO propuesto por Vickery (2012). El objetivo es ver si han intuido el patrón de probabilidad que se obtiene al lanzar sucesivamente dos dados y sumar sus puntuaciones. A través de este tipo de actividades se pueden estudiar también las intuiciones de los alumnos sobre la probabilidad de cada caso, la variabilidad o la media muestrales. Cuestiones en las que, en general, los alumnos de secundaria, o incluso de bachillerato, tienen ciertas carencias (Begué y otros, 2018).



*Diferentes apuestas de dos alumnos*

Figura 4. Cartones del juego y algunos ejemplos de distribución de las fichas

Los estudiantes disponen de 15 fichas (que las simbolizan con círculos en sus cartones) y deben apostar las 15 entre los números 1 y 12. Las pueden apostar como ellos deseen, y vamos a volver a jugar con los dados. Se van lanzando los dados, cantando la suma de las puntuaciones. Si ellos tienen una ficha en esa puntuación, la tachan o pintan. Gana quien consiga tachar o pintar sus 15 fichas.

Se puede repetir el bingo analizando cuáles han sido las distribuciones de fichas ganadoras en la primera tirada y haciendo preguntas como: ¿Cambiarías tu apuesta? ¿Por qué?

Termina la clase analizando las diferentes apuestas y contrastando los bingos ganadores con la distribución comentada al comienzo de clase.

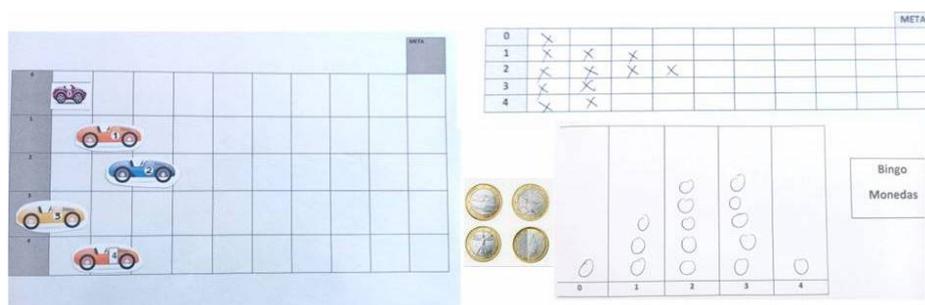


Figura 5. Tablero de la carrera (izquierda), ficha personal para anotar los resultados (derecha arriba) y cartón de Bingo (derecha abajo)

### 3.ª sesión: Contamos caras de monedas

En esta sesión se repiten los juegos de las sesiones anteriores, pero con otro experimento aleatorio. En este caso se trata del lanzamiento de cuatro monedas de forma simultánea y se cuentan cuántas monedas han caído de cara.

En la carrera hay 5 coches (figura 5, izquierda) numerados del 0 al 4. Al igual que en la 1.ª sesión, los alumnos reproducen en su cuaderno lo que ven en el tablero (figura 5, derecha arriba) y apuestan antes de comenzar la carrera por el coche que creen que va a ganarla. Tras la carrera se realiza un bingo análogo al del día anterior (figura 5, derecha abajo).

### 4.ª y 5.ª sesión: Analizamos la experiencia y nos aproximamos a asignar probabilidades a sucesos

Estas sesiones se dedican a formalizar algunos de los conceptos aparecidos en los juegos. Para ellos se proporcionan al alumnado diagramas de árbol dirigidos e «incompletos» para que rellenen y luego poner en común (figura 6).

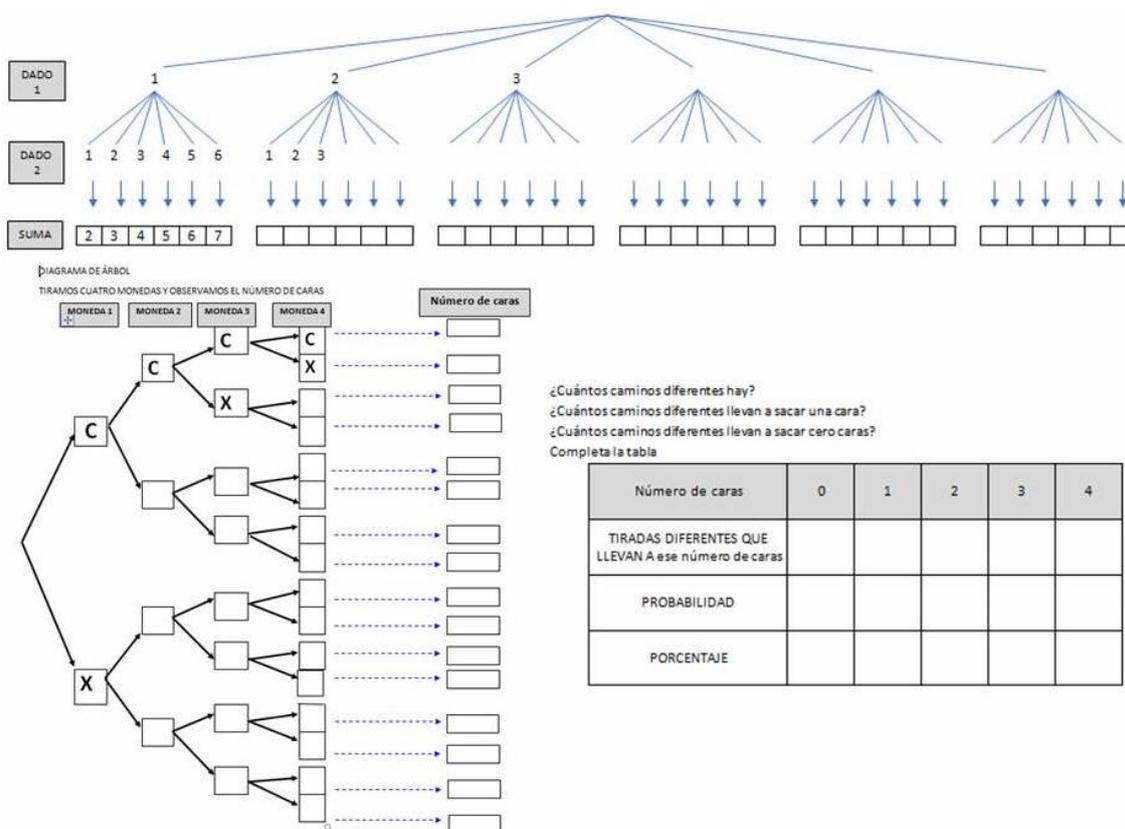


Figura 6. Ficha con los diagramas de árbol asociados a los experimentos

El diagrama de árbol es una herramienta de gran utilidad que permite obtener mucha información de una situación compleja a «simple vista». Esa información está organizada, lo que, en el campo de la probabilidad y conteo de casos, nos permite tener todo el abanico de posibilidades del experimento delante y cuantificar lo que ha sucedido en el juego. De la lectura del árbol y el conteo y recordando lo trabajado con fracciones y con razones, se instruye al alumnado en la asignación de probabilidades.

## Conclusiones

En cuatro sesiones se trabajaron conceptos que se desarrollan usualmente como la distinción entre fenómenos aleatorios y deterministas, distinción entre suceso seguro, imposible y probable. Pero, además, con esta actividad, los alumnos se han acercado a nociones más profundas del estudio de la incertidumbre, por ejemplo:

- Se trabaja el concepto de variabilidad aleatoria. Muchos de los alumnos acercan sus predicciones, sobre todo en los juegos de BEANO, a los patrones observados mediante la experiencia y confirmados posteriormente con el recuento de casos favorables mediante los diagramas de árbol. Pero también han tenido la posibilidad de ver que no siempre se ajustan a ese patrón cuando el número de tiradas es bajo. Caras de sorpresa cuando veían que en muchos grupos ganaba el caballo número 7, pero en su grupo el 7 casi ni se había movido. En este sentido también se trabaja lo que se conoce como «la falacia del jugador», es decir, creer que la secuencia previa influirá en las siguientes repeticiones.
- La no equiprobabilidad, cuando en 1.º ESO en general en los libros de texto, tienden a aparecer problemas solo de situaciones equiprobables que se resuelven mediante la regla de Laplace, lo que les conduce luego en cursos superiores a decir sin pensar demasiado que la probabilidad de obtener un 2 en la suma de las probabilidades de dos dados es  $1/11$ .
- Acercamiento al significado de probabilidad frecuencial (contando la frecuencia relativa de un suceso), y también al significado de distribución de probabilidad, lo que se hacía evidente especialmente en el segundo bingo, en el que las «apuestas» en la mayoría del alumnado ya reproducían la de una Binomial  $(4, 1/2)$ .
- Recogida de datos de forma organizada en una situación ya para ellos «compleja» desde el punto de vista de todas las opciones que tenían que barajar. De hecho, cuando con estos mismos grupos de alumnos se realizó en 2.º ESO un trabajo de estadística descriptiva con datos recogidos en Educación Física, fue bastante natural y sencillo que organizaran la información.
- Favorecer el sentido estocástico y estadístico del alumno; ya que con la parte de bingo de la actividad, de alguna manera se provoca en el alumno una reflexión acerca de lo que ha visto, para ver si tras lo analizado cambiaría su apuesta, lo que contribuye a iniciarlos en una formación con mayor criterio, de proporcionarles cierta cultura probabilística y que estén menos expuestos ante situaciones en las que probabilidad y estadística son manipuladas de forma conveniente a quien propicia un juego o a quien pretende vender una información «engañososa».
- Y también hemos ido ya abonando el terreno para trabajar experimentos compuestos, que normalmente no se trabajan en este nivel.

## Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 y el grupo S60\_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

## Referencias

- ARCE, M., L. CONEJO y J. M. MUÑOZ-ESCOLANO (2019), *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*, Síntesis, Madrid.
- BEGUÉ, N., C. BATANERO y M. GEA (2018), «Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria», *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 63–79.
- DÍAZ, J., C. BATANERO, y M. J. CAÑIZARES (1996), *Azar y probabilidad*, Síntesis, Madrid.
- FISCHBEIN, E. (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Reidel, Dordrecht.
- MARTÍNEZ-JUSTE, S. (2020). Elaboración y consolidación de secuencias didácticas innovadoras de matemáticas en secundaria mediante el desarrollo de Lesson Studies. En Libro de actas de CIMIE19: AMIE. Lleida: AMIE.
- MARTÍNEZ-JUSTE, S., y A. DOMENECH (2019), «Lesson Study para innovar en matemáticas», *Entorno abierto*, 30, 7–10.
- ROLDAN, A. F., C. BATANERO, y P. BELTRÁN-PELLICER (2018), «El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en probabilidad y combinatoria», *Épsilon*, 100, 49-63.
- SHAUGHNESSY, J. M. (1992), «Research in probability and statistics: Reflections and directions», en D. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics education*, MacMillan.
- VICKERY, N. (2012), «BEANO (Probability with bean)s» [entrada de blog], *Walking in Mathland*, disponible en: <<http://walkinginmathland.weebly.com/teaching-math-blog/beans-probability-with-beans>>.