



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

Análisis dinámico en un duopolio diferenciado con
propiedad parcial

Dynamic analysis of a differentiated duopoly with
partial property

Autor

Inés Ortega Palacios

Directores

Joaquín Andaluz Funcia

Gloria Jarne Jarne

Facultad de Economía y Empresa
2020

Resumen

El trabajo realizado tiene por objetivo principal introducir la perspectiva temporal en un duopolio que tiene en cuenta diferenciación, tanto horizontal como vertical, así como el nivel de propiedad parcial de la empresa con la variedad de producto de mayor calidad sobre la empresa con la variedad de menor calidad, lo cual permite analizar el efecto de estos aspectos sobre la estabilidad dinámica del equilibrio de Nash, tanto en competencia à la Cournot como en competencia à la Bertrand.

Tomando como referencia un modelo un modelo de duopolio estático, la dimensión temporal se introduce a través de la definición de diferentes tipos de expectativas que implican un determinado grado de racionalidad por parte de las empresas. Se ha analizado la dinámica de un modelo en el cual las expectativas de ambas empresas se basan en funciones de mejor respuesta, obteniendo que los equilibrios de Nash son asintóticamente estables. En el caso de que esta hipótesis se relaje, se definen esquemas de expectativas heterogéneas, donde una de las empresas basa sus expectativas en la Regla del Gradiente, mientras que la segunda actúa de acuerdo con expectativas ingenuas, obteniendo que, para ambos tipos de competencia, existe un umbral en la velocidad de ajuste de la primera empresa que distingue una región en la cual el equilibrio de Nash es estable y una región de no estabilidad, que da lugar a comportamientos cíclicos y caóticos.

Del análisis comparativo de estos umbrales, se desprende que el rango de valores del umbral de la velocidad de ajuste para los cuales el equilibrio de Nash es asintóticamente estable es mayor bajo competencia en cantidades que bajo competencia en precios, lo cual provoca que la competencia en precios sea más inestable.

Abstract

The present work aims to introduce a dynamic perspective in a duopoly taking horizontal and vertical differentiation and partial ownership into account. This appreciation allows us to analyze the effect of these aspects on the dynamic stability of the Nash equilibrium, both in Cournot competition and Bertrand competition. Taking a static duopoly as a reference, a time dimension is introduced through the definition of different types of expectations that imply a certain degree of rationality of the companies. The dynamics of a model in which the expectations of both companies are based on best response functions have been analyzed, obtaining that the Nash equilibria are asymptotically stable. If this hypothesis is relaxed then heterogeneous expectation schemes are defined, in which one of the companies bases its expectations on the Gradient Rule, while the second has naive expectations. As a result, for both types of competition, there is a threshold of the speed of adjustment of the firm that distinguishes a region in which the Nash equilibrium is stable and a region of non-stability, which leads to cyclical and chaotic behaviors.

From the comparative analysis of these thresholds, it follows that the range of values of the threshold of speed of adjustment for which the Nash equilibrium is asymptotically stable is greater under Cournot competition than under Bertrand competition. Therefore, Bertrand competition is more unstable.

Índice general

Resumen	III
Abstract	III
1. Introducción	1
1.1. Principales objetivos y aportación a la literatura	2
1.2. Estructura del trabajo	2
2. El modelo: contexto y definición	3
2.1. Contexto	3
2.2. Definición del modelo	3
3. Análisis estático	5
3.1. Competencia en cantidades	5
3.1.1. Equilibrio de Cournot	5
3.1.2. Influencia de los parámetros sobre el equilibrio	6
3.2. Competencia en precios	8
3.2.1. Equilibrio de Bertrand	8
3.2.2. Influencia de los parámetros sobre el equilibrio	9
3.3. Comparación entre competencia en cantidades y competencia en precios	10
4. Análisis dinámico	11
4.1. Proceso dinámico de ajuste implícito en un oligopolio	11
4.2. Tipologías de expectativas en tiempo discreto	11
4.2.1. Expectativas basadas en las funciones de mejor respuesta	11
4.2.2. Expectativas no basadas en las funciones de mejor respuesta	12
4.3. Análisis cualitativo de sistemas dinámicos	13
4.4. Sistema dinámico con expectativas homogéneas adaptativas	14
4.4.1. Competencia en cantidades	14
4.4.2. Competencia en precios	16
4.5. Modelo dinámico con expectativas heterogéneas	18
4.5.1. Competencia en cantidades	18
4.5.2. Competencia en precios	24
4.5.3. Comparación entre umbrales en competencia en cantidades y en competencia en precios	31
5. Conclusiones principales del trabajo	32
Bibliografía	33

1. Introducción

En el contexto de un duopolio diferenciado horizontal y verticalmente, y en presencia de propiedad parcial, el objetivo del trabajo es estudiar la estabilidad dinámica del equilibrio resultante de la competencia entre empresas con expectativas homogéneas y heterogéneas que compiten tanto en cantidades como en precios.

En concreto, el interés del trabajo se centra en analizar la influencia sobre la estabilidad dinámica de los equilibrios de Nash del grado de diferenciación, tanto horizontal como vertical, así como del nivel de propiedad parcial de la empresa con la variedad de producto de mayor calidad sobre la empresa con la variedad de menor calidad.

Para ello, se introduce la perspectiva temporal en un duopolio donde existe separación entre la propiedad y el control en una de las empresas. En este sentido, se desarrollan dos aproximaciones dinámicas. En una de ellas, ambas empresas toman sus decisiones de acuerdo con el mismo esquema de expectativas, en concreto, expectativas adaptativas (aproximación con expectativas homogéneas). En la otra aproximación dinámica, una de las empresas decide siguiendo un ajuste basado en la Regla del Gradiente mientras que la otra empresa se comporta de acuerdo con un esquema de expectativas Naïve (aproximación con expectativas heterogéneas).

En este sentido, se amplía la literatura centrada en el estudio dinámico de equilibrios surgidos en oligopolios no lineales, en el cual se contextualiza este trabajo. De acuerdo con [Puu \(1991\)](#), la introducción de dinámica con decisión simultánea de las empresas en un sistema no lineal produce movimientos persistentes, periódicos y caóticos alrededor del punto de equilibrio, en su caso, el equilibrio de Cournot. Utilizando la misma función de demanda isoelástica, [Tramontana \(2010\)](#) estudia las condiciones de estabilidad del equilibrio de Nash ante la introducción de no linealidad en la función de demanda, obteniendo mapas de bifurcación que derivan en comportamientos periódicos, e incluso caóticos. Adicionalmente, en el contexto de modelos dinámicos no lineales, [Zhang et al. \(2007\)](#) plantean un duopolio con expectativas heterogéneas con racionalidad limitada para una de las empresas y concluye que la rapidez de ajuste de la empresa con racionalidad limitada puede cambiar la estabilidad del equilibrio, desde una estructura de mercado estable hasta un comportamiento cíclico o caótico.

Adicionalmente, el análisis planteado en este trabajo se basa en mercados de competencia imperfecta con producto diferenciado. En consonancia con [Fanti and Gori \(2012\)](#), se considera un sistema micro-fundamentado de dos empresas con diferenciación de variedades, pudiendo ser, en el caso de [Fanti and Gori \(2012\)](#), complementarios o sustitutivos. La diferenciación horizontal introducida ha sido propuesta, entre otros, por [Singh and Vives \(1984\)](#). En esta línea, [Andaluz and Jarne \(2015\)](#) analizan la estabilidad de los equilibrios de Cournot-Nash y Bertrand-Nash para tres competidores introduciendo diferenciación horizontal entre las variedades, concluyendo que el equilibrio bajo competencia en cantidades es más estable que bajo competencia en precios. El modelo planteado en este trabajo estudia también los efectos de la diferenciación vertical de variedades en un modelo dinámico. En este contexto, [Andaluz and Jarne \(2016\)](#) analizan los efectos del grado de diferenciación de las variedades bajo competencia en precios y en cantidades en la estabilidad del equilibrio de Nash suponiendo racionalidad imitada y diferenciación de calidad de los productos concluyendo que la estabilidad del equilibrio bajo competencia en precios está condicionado por el grado de diferenciación de los productos. Asimismo, deducen que el equilibrio de Cournot-Nash es más estable cuando la diferencia de calidad entre los productos es mínima.

Por otra parte, en el presente trabajo, el estudio se extiende incorporando una relación de propiedad parcial entre las empresas. En este sentido, [Gilo and Spiegel \(2006\)](#) examinan los efectos de competencia coordinada bajo propiedad parcial cruzada. Sus resultados muestran que, en un proceso dinámico, las empresas pueden beneficiarse de inversiones en las empresas rivales incluso si dichas inversiones no tienen efecto en un futuro inmediato, pudiendo facilitar la colusión de las empresas. [Shelegia and Spiegel \(2012\)](#) consideran un modelo de oligopolio de Bertrand estático en el cual la segunda empresa más

eficiente tiene una participación directa o indirecta en la empresa más eficiente, concluyendo que la empresa más eficiente sirve a todo el mercado, pero el límite superior de su precio de equilibrio aumenta con la participación de la segunda empresa y puede ser tan alto como el precio de monopolio de la empresa más eficiente. En esta línea, [Ghosh and Morita \(2017\)](#) abordan el enfoque de la transferencia de conocimiento por el cual la propiedad parcial de las empresas puede derivar en un aumento de beneficios para las empresas si se induce la transferencia de conocimiento entre ellas. En línea con esta hipótesis, [Bárcena-Ruiz and Olaizola \(2007\)](#) consideran un duopolio cuyas empresas son propiedad de diferentes accionistas, como es el caso de empresas del sector automovilístico, considerando que una de ellas es propiedad de uno de los dueños y la otra empresa es propiedad de ambos, de acuerdo con un parámetro de propiedad parcial. En su trabajo, [Bárcena-Ruiz and Olaizola \(2007\)](#) obtienen que la empresa propiedad de un único accionista decide utilizar tecnología más avanzada que la empresa con dos accionistas, que está en línea con la consideración del análisis realizado por el cual la empresa con un sólo accionista se considera la productora de la variedad de mayor calidad.

1.1. Principales objetivos y aportación a la literatura

El objetivo de este trabajo es analizar el comportamiento dinámico de un modelo de duopolio bajo competencia en precios y competencia en cantidades, en particular, bajo el supuesto de que las empresas producen dos variedades de un producto, que está diferenciado tanto horizontal como verticalmente. Adicionalmente, se supone que una de las empresas tiene una participación parcial y pasiva en los beneficios de la otra empresa.

Desde una perspectiva estática se concluye que, tanto para competencia en precios como competencia en cantidades, un aumento en la participación parcial de una empresa sobre la otra provoca que ambas variedades aumenten su precio, por lo que la estrategia de participación parcial tiene un efecto anticompetitivo. Por otra parte, la competencia en precios resulta más eficiente que la competencia en cantidades, corroborando resultados ya conocidos en la literatura ([Singh and Vives \(1984\)](#)).

La dinamización del modelo requiere introducir diferentes esquemas de expectativas correspondientes a distintos grados de racionalidad de las empresas. Del análisis de los modelos dinámicos planteados, se obtiene que si ambas empresas tienen el mismo tipo de expectativas basadas en las funciones de mejor respuesta (aproximación con expectativas homogéneas), tanto el equilibrio de Cournot-Nash como el de Bertrand-Nash son asintóticamente estables (es decir, actúan como atractores, volviendo al equilibrio tras perturbaciones externas). Por el contrario, si una de las empresas presenta un menor grado de racionalidad y actúa de acuerdo con la Regla del Gradiente basada en el beneficio marginal, los equilibrios de Nash pueden perder su carácter atractor y aparecer comportamientos de las variables de decisión cíclicos e incluso caóticos. Además, se concluye que la estabilidad dinámica de los equilibrios se ve influenciada por el grado de diferenciación del producto, tanto horizontal como vertical, y por el nivel de propiedad parcial.

1.2. Estructura del trabajo

El presente trabajo se estructura de la siguiente forma. En primer lugar se describe el modelo estático tomando como referencia el modelo planteado por [Singh and Vives \(1984\)](#). En el Capítulo 3 se calcula el equilibrio de Nash bajo competencia en cantidades y bajo competencia en precios, en un contexto atemporal. El Capítulo 4 trata la dinamización del modelo mediante el empleo de expectativas homogéneas y expectativas heterogéneas y se realiza un análisis de la estabilidad dinámica del equilibrio en ambos tipos de competencia utilizando técnicas de análisis cualitativo. Por último, el Capítulo 5 recoge las conclusiones principales obtenidas del presente trabajo.

2. El modelo: contexto y definición

2.1. Contexto

El modelo desarrollado se basa en el modelo clásico de teoría del oligopolio propuesto por [Singh and Vives \(1984\)](#), el cual se enmarca en el contexto de una economía con un sector monopolístico formado por dos empresas, que producen variedades diferenciadas de un producto, y un sector competitivo que produce un bien numerario. Basándose en los modelos clásicos de teoría del oligopolio de Cournot y Bertrand, los autores definen una función de demanda lineal y dos variedades diferenciadas horizontalmente, analizando el equilibrio del sistema bajo competencia en precios y cantidades. La principal conclusión obtenida es que la competencia à la Cournot, o competencia en cantidades, siempre produce precios más altos y menor bienestar en comparación con la competencia à la Bertrand, o competencia en precios, independientemente de si las variedades del producto son complementarias o sustitutivas. Cuando los bienes son sustitutivos, las ganancias de la empresa son más altas bajo la competencia de Cournot, mientras que si los bienes son complementarios, la competencia de Bertrand es más rentable.

Posteriormente, [Hackner \(2000\)](#) amplía el modelo de [Singh and Vives \(1984\)](#) introduciendo diferenciación vertical, esto es, diferencia en la calidad entre las variedades. De su estudio se deriva que el modelo propuesto por [Singh and Vives \(1984\)](#) es sensible al número de competidores, no pudiendo concluirse que la competencia en precios sea siempre más eficiente.

En este sentido, el modelo descrito en el presente trabajo incluye la ampliación propuesta por [Hackner \(2000\)](#). Adicionalmente, se va a suponer que una de las empresas tiene una participación parcial y pasiva en el beneficio de la otra empresa. El interés de este modelo reside en introducir la perspectiva temporal, esto es, dinamizar el modelo, y analizar la influencia del grado de diferenciación, tanto horizontal como vertical, así como el nivel de propiedad parcial, sobre la estabilidad dinámica del equilibrio de Nash tanto en competencia en precios como en competencia en cantidades.

2.2. Definición del modelo

Siguiendo a [Hackner \(2000\)](#), se considera una economía compuesta por un sector oligopolista que produce dos variedades diferenciadas de un producto y un sector competitivo que produce un bien numerario. Se define la función de utilidad de un consumidor representativo como sigue:

$$V(q_1, q_2, M) = U(q_1, q_2) + M. \quad (2.1)$$

siendo $U(q_1, q_2)$ de la forma

$$U(q_1, q_2) = s_1 q_1 + s_2 q_2 - \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2 + 2\gamma q_1 q_2) \quad (2.2)$$

donde

- s_1 y s_2 son los parámetros positivos que representan la calidad de las variedades; esto es, los parámetros de *diferenciación vertical*.
- $\gamma \in (0, 1)$ es una medida inversa del *grado de diferenciación horizontal*. En concreto:
 - Si γ tiende a 0, las variedades se encuentran en su diferenciación máxima.
 - Si γ tiende a 1, los productos son sustitutivos perfectos y no existe diferenciación horizontal.
- q_1 y q_2 son las cantidades consumidas de las variedades diferenciadas.

- M es la cantidad consumida del bien numerario.

Sean y, p_1, p_2 la renta monetaria y los precios de las variedades respectivamente, suponiendo unitario el precio del bien numerario. Entonces, el problema del consumidor viene dado por:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } V(q_1, q_2, M) = U(q_1, q_2) + M \\ \text{s.a. } y = p_1 q_1 + p_2 q_2 + M \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

Resolviendo (2.3) por sustitución se obtiene:

$$\text{Max } \hat{V}(q_1, q_2) = s_1 q_1 + s_2 q_2 - \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2 + 2\gamma q_1 q_2) + y - p_1 q_1 - p_2 q_2. \quad (2.4)$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{V}(q_1, q_2)}{\partial q_1} = s_1 - q_1 - \gamma q_2 - p_1 = 0 \\ \frac{\partial \hat{V}(q_1, q_2)}{\partial q_2} = s_2 - q_2 - \gamma q_1 - p_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

La condición de segundo orden viene determinada por la matriz hessiana, H , como sigue:

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -\gamma \\ -\gamma & -1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Al ser la matriz H definida negativa en todo su dominio, puede asegurarse que la función $\hat{V}(q_1, q_2)$ es cóncava, y por lo tanto, el punto crítico que se encuentre resolviendo el sistema dado por las condiciones de primer orden dado en (2.5), será máximo global.

De (2.5) se deriva el sistema inverso de demanda, obteniendo:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = s_1 - q_1 - \gamma q_2 \\ p_2 = s_2 - q_2 - \gamma q_1 \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Despejando la ecuación (2.7) respecto a las cantidades, se obtiene el sistema directo de demanda:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{s_1 - \gamma s_2 - p_1 + \gamma p_2}{1 - \gamma^2} \\ q_2 &= \frac{s_2 - \gamma s_1 - p_2 + \gamma p_1}{1 - \gamma^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Suponemos que $s_1 > s_2 > 0$, esto es, la Empresa 1 ofrece una variedad de mayor calidad y, por tanto, más valorada por los consumidores. A efectos de simplificación, suponemos que $s = s_1 > s_2 = 1$. De esta forma, el parámetro s es una medida relativa de la diferencia de calidad entre las variedades.

Adicionalmente, suponemos que la empresa que ofrece alta calidad (Empresa 1) tiene una participación parcial y pasiva en el beneficio de la Empresa 2 en la cuantía $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$. Luego, suponiendo costes de producción nulos, los beneficios individuales vienen dados por:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= p_1 q_1 + \theta p_2 q_2 \\ \Pi_2 &= (1 - \theta) p_2 q_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

El objetivo de las empresas será maximizar su beneficio individual mediante la elección de su cantidad de producción o de su precio, dados los niveles de diferenciación (γ, s) y del grado de propiedad parcial (θ).

El modelo propuesto se encuadraría en un modelo más general de delegación estratégica. En concreto, los propietarios de la Empresa 1, en una primera etapa, decidirían el nivel de participación, θ , que maximizaría el beneficio. En una segunda etapa, los managers (gerentes) de ambas empresas competirían en el mercado a través de la elección de la cantidad o del precio, suponiendo dado el valor de θ . El objetivo del presente trabajo es analizar la estabilidad dinámica de los equilibrios de Nash resultantes de esta segunda etapa.

3. Análisis estático

El análisis estático del equilibrio, tanto en un contexto de competencia en cantidades, o à la Cournot, como en precios, o à la Bertrand, permite deducir la influencia de los parámetros del modelo sobre el equilibrio, en concreto, los parámetros referidos a los niveles de diferenciación vertical y horizontal y el grado de propiedad parcial de la Empresa 1 en el beneficio de la Empresa 2. Adicionalmente, el estudio permite establecer la comparación entre los niveles de precios y cantidades resultantes de ambos tipos de competencia.

3.1. Competencia en cantidades

La demanda bajo competencia en cantidades viene expresada por el sistema inverso de demanda dado por (2.7), siendo las funciones de beneficios de las empresas de la forma:

$$\begin{aligned}\Pi_1(q_1, q_2) &= p_1 q_1 + \theta p_2 q_2 = (s - q_1 - \gamma q_2) q_1 + \theta (1 - q_2 - \gamma q_1) q_2 \\ \Pi_2(q_1, q_2) &= (1 - \theta) p_2 q_2 = (1 - \theta) (1 - q_2 - \gamma q_1) q_2\end{aligned}\quad (3.1)$$

3.1.1. Equilibrio de Cournot

Derivando la función de beneficio Π_i de la empresa i respecto de la cantidad q_i , se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0 &\implies (s - q_1 - \gamma q_2) + q_1(-1) + \theta q_2(-\gamma) = 0 \implies s - 2q_1 - \gamma(1 + \theta)q_2 = 0 \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0 &\implies (1 - \theta)[(1 - q_2 - \gamma q_1) + (-1)q_2] = 0 \implies 1 - 2q_2 - \gamma q_1 = 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

Las condiciones suficientes para asegurar las condiciones de máximo vienen dadas como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} &= -2 < 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2} &= -2(1 - \theta) < 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

De las igualdades obtenidas en (3.2), se derivan las funciones de mejor respuesta para cada una de las empresas como sigue:

$$\begin{aligned}q_1 &= R_1(q_2) = \frac{s - \gamma(1 + \theta)q_2}{2} \\ q_2 &= R_2(q_1) = \frac{1 - \gamma q_1}{2}\end{aligned}\quad (3.4)$$

Resolviendo el sistema dado por las condiciones de primer orden en (3.2), el equilibrio de *Cournot-Nash* es de la forma:

$$E^C = \left(q_1^C = \frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)}, \quad q_2^C = \frac{2 - \gamma s}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \right) \quad (3.5)$$

Sabiendo que $s > 1$, $\gamma \in [0, 1]$, $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, entonces $q_1^C > 0$. Además se cumple:

$$q_2^C > 0 \iff 1 < s < \frac{2}{\gamma}.$$

3.1.2. Influencia de los parámetros sobre el equilibrio

El efecto de cada uno de los parámetros del modelo sobre las cantidades en equilibrio de las empresas, q_1^C y q_2^C , viene dado por el estudio del signo de la derivada de los valores en equilibrio respecto de cada uno de ellos. Con el objetivo de poder comparar la influencia sobre las empresas, se realiza el estudio del signo sobre los precios en equilibrio derivados del equilibrio de Cournot-Nash.

De acuerdo con el sistema inverso de demanda definido en (2.7), sustituyendo las cantidades del sistema por el equilibrio de Cournot-Nash obtenido en (3.5), el precio de la Empresa 1 en equilibrio vienen dado como sigue:

$$p_1^C = s - q_1^C - \gamma q_2^C = s - \frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} - \gamma \frac{2 - \gamma s}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} = \frac{s(2 - \gamma^2\theta) - (1 - \theta)\gamma}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \quad (3.6)$$

Equivalentemente, para la Empresa 2:

$$p_2^C = 1 - q_2^C - \gamma q_1^C = 1 - \frac{2 - \gamma s}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} - \gamma \frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} = \frac{2 - \gamma s}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \quad (3.7)$$

De esta forma, se puede determinar el comportamiento de los precios en equilibrio bajo competencia en cantidades, p_1^C y p_2^C , ante cambios en los parámetros del modelo.

Diferencia de calidad, s

Para estudiar la influencia del parámetro de diferenciación vertical, s , sobre los precios en equilibrio, se procede de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1^C}{\partial s} &= \frac{2 - \theta\gamma^2}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} > 0 \\ \frac{\partial p_2^C}{\partial s} &= \frac{-\gamma}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} < 0 \end{aligned} \quad \forall 0 \leq \theta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (3.8)$$

En consecuencia, un aumento en la diferencia de calidad entre las variedades produce un aumento en el precio de la variedad de mayor calidad, producida por la Empresa 1. Por el contrario, este aumento en s provoca una reducción del precio en la variedad de menor calidad, esto es, la producida por la Empresa 2.

Participación parcial, θ

La influencia de la participación parcial de la Empresa 1 en el beneficio de la Empresa 2 sobre los precios de equilibrio se determina a partir de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1^C}{\partial \theta} &= \frac{\gamma(2 - \gamma^2)(2 - \gamma s)}{[4 - \gamma^2(1 + \theta)]^2} > 0 \\ \frac{\partial p_2^C}{\partial \theta} &= \frac{\gamma^2(2 - \gamma s)}{[4 - \gamma^2(1 + \theta)]^2} > 0 \end{aligned} \quad \forall 0 \leq \theta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (3.9)$$

Consiguientemente, un aumento en la participación parcial de la Empresa 1 en los beneficios de la Empresa 2 hace que ambas variedades aumenten su precio en el equilibrio. Por lo tanto, si una mayor participación provoca una elevación de los precios para ambas variedades, la estrategia de propiedad parcial tiene un efecto anticompetitivo, esto es, produce un aumento en el poder de mercado de ambas empresas.

Diferenciación horizontal, γ

La influencia del parámetro de diferenciación horizontal sobre el precio de la Empresa 1 es de la forma:

$$\frac{\partial p_1^C}{\partial \gamma} = \frac{(1 - \theta) [4\gamma s - 4 - (1 + \theta) \gamma^2]}{[4 - \gamma^2 (1 + \theta)]^2} \quad (3.10)$$

La expresión puede cambiar de signo, por lo que la influencia del parámetro viene condicionada por un valor crítico del parámetro s como sigue:

$$\frac{\partial p_1^C}{\partial \gamma} > 0 \iff s > \frac{4 + (1 + \theta) \gamma^2}{4\gamma} = \bar{s} \quad (3.11)$$

El valor crítico \bar{s} cumple:

$$\bar{s} = \frac{4 + (1 + \theta) \gamma^2}{4\gamma} = \frac{1}{\gamma} + \frac{(1 + \theta) \gamma}{4} > 1 \quad (3.12)$$

Adicionalmente, resulta inmediato comprobar que $\bar{s} < 2/\gamma$, ya que:

$$\bar{s} = \frac{4 + (1 + \theta) \gamma^2}{4\gamma} < \frac{2}{\gamma} \iff (1 + \theta) \gamma^2 < 4 \quad (3.13)$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \text{Si } \bar{s} < s < 2/\gamma &\implies \frac{\partial p_1^C}{\partial \gamma} > 0 \\ \text{Si } 1 < s < \bar{s} &\implies \frac{\partial p_1^C}{\partial \gamma} < 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por lo tanto, existe un valor crítico en la diferencia de calidad por debajo del cual, una menor diferenciación horizontal implica un menor precio del producto de calidad alta. Si la diferencia de calidad está por encima de \bar{s} , una mayor diferenciación horizontal provoca una disminución del precio de la variedad de mayor calidad.

Un estudio equivalente se realiza en el caso de la Empresa 2, obteniendo:

$$\frac{\partial p_2^C}{\partial \gamma} = \frac{-s(4 + \gamma^2(1 + \theta)) + 4\gamma(1 + \theta)}{[4 - \gamma^2(1 + \theta)]^2} \quad (3.15)$$

La influencia del parámetro sobre el precio en equilibrio de la Empresa 2 viene condicionado por un valor crítico $\bar{\bar{s}}$ de la forma:

$$\frac{\partial p_2^C}{\partial \gamma} > 0 \iff s < \frac{4\gamma(1 + \theta)}{4 + \gamma^2(1 + \theta)} = \bar{\bar{s}} \quad (3.16)$$

Si bien no puede asegurarse que $\bar{\bar{s}} > 1$ en todo caso, se satisface la siguiente expresión:

$$\bar{\bar{s}} = \frac{4\gamma(1 + \theta)}{4 + \gamma^2(1 + \theta)} < \frac{2}{\gamma} \iff \gamma^2(1 + \theta) < 4 \quad (3.17)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{Si } 1 < s < \bar{\bar{s}} &\implies \frac{\partial p_2^C}{\partial \gamma} > 0 \\ \text{Si } \bar{\bar{s}} < s < 2/\gamma &\implies \frac{\partial p_2^C}{\partial \gamma} < 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

En el caso de que $\bar{\bar{s}} < 1$, entonces será inmediato $\partial p_2^C / \partial \gamma < 0$. De esta forma, existe un umbral $\bar{\bar{s}}$ por debajo del cual una mayor diferenciación horizontal implica un menor precio del producto de

calidad baja. Por encima de ese umbral, una mayor diferenciación horizontal provoca un aumento del precio de la variedad de mayor calidad.

De acuerdo con los valores críticos obtenidos, se observa que $\bar{s} > \bar{\bar{s}}$ ya que:

$$\bar{s} = (1 + \theta) \frac{1}{\bar{\bar{s}}} \quad (3.19)$$

Por lo tanto, se satisface:

$$\bar{s} > \bar{\bar{s}} \iff (1 + \theta) > \bar{\bar{s}}^2 \quad (3.20)$$

De esta forma, si $1 < s < \bar{\bar{s}} < \bar{s}$, entonces si los bienes son muy sustitutivos, el precio de la variedad de mayor calidad disminuirá, mientras que el de menor calidad aumentará el precio de su variedad. En cambio, si la diferencia de calidad entre las variedades es alta (supera el valor crítico \bar{s}), la Empresa 1 aumentará su precio mientras que, con el objetivo de no perder poder de mercado, la Empresa 2 disminuirá el precio de su producto.

3.2. Competencia en precios

De acuerdo con el sistema directo de demanda dado en (2.8), las funciones de beneficio bajo competencia en precios vienen determinadas por:

$$\begin{aligned} \Pi_1(p_1, p_2) &= p_1 q_1 + \theta p_2 q_2 = p_1 \left[\frac{s - \gamma - p_1 + \gamma p_2}{1 - \gamma^2} \right] + \theta p_2 \left[\frac{1 - \gamma s - p_2 + \gamma p_1}{1 - \gamma^2} \right] \\ \Pi_2(p_1, p_2) &= (1 - \theta) p_2 q_2 = (1 - \theta) p_2 \left[\frac{1 - \gamma s - p_2 + \gamma p_1}{1 - \gamma^2} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.2.1. Equilibrio de Bertrand

Derivando la función de beneficio Π_i de la empresa i respecto del precio p_i , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 0 &\implies \frac{1}{1 - \gamma^2} (s - \gamma - 2p_1 + \gamma p_2 + \gamma \theta p_2) = 0 \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 0 &\implies (1 - \theta) \left(\frac{1 - \gamma s - p_2 + \gamma p_1}{1 - \gamma^2} - \frac{p_2}{1 - \gamma^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Las condiciones suficientes para asegurar las condiciones de máximo vienen dadas como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial p_1^2} &= -2 \frac{1}{1 - \gamma^2} < 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial p_2^2} &= -2 \frac{1 - \theta}{1 - \gamma^2} < 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

El equilibrio bajo competencia en precios, o de Bertrand, se obtiene resolviendo el sistema dado por las condiciones de primer orden. De esta forma, el equilibrio de *Bertrand-Nash* es:

$$E^B = \left(p_1^B = \frac{[2 - (1 + \theta)\gamma^2]s - (1 - \theta)\gamma}{4 - (1 + \theta)\gamma^2}, \quad p_2^B = \frac{2 - \gamma^2 - \gamma s}{4 - (1 + \theta)\gamma^2} \right) \quad (3.24)$$

Sabiendo que $s > 1, \gamma \in [0, 1], \theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, entonces $p_1^B > 0$. Además, se cumple:

$$p_2^B > 0 \iff 1 < s < \frac{2}{\gamma} - \gamma.$$

3.2.2. Influencia de los parámetros sobre el equilibrio

El efecto de los parámetros del modelo sobre los precios en equilibrio de las empresas, p_1^B y p_2^B , viene dado por el estudio del signo de la derivada de los valores en equilibrio respecto de cada uno de ellos.

Diferencia de calidad, s

La influencia de la diferencia de calidad sobre los precios en equilibrio viene determinada como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_1^B}{\partial s} &= \frac{2 - (1 + \theta)\gamma^2}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} > 0 \\ \forall 0 \leq \theta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma \leq 1 \\ \frac{\partial p_2^B}{\partial s} &= \frac{-\gamma}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} < 0\end{aligned}\quad (3.25)$$

Por lo tanto, cuanto más diferencia vertical exista entre las variedades de las empresas, mayor será el precio de la variedad de mayor calidad, esto es, de la variedad de la Empresa 1, y menor será el precio de la variedad de la Empresa 2.

Participación parcial, θ

Para evaluar la influencia de la participación parcial de la Empresa 1 en los beneficios de la Empresa 2, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_1^B}{\partial \theta} &= \frac{2\gamma(2 - \gamma s - \gamma^2)}{[4 - \gamma^2(1 + \theta)]^2} > 0 \\ \forall 0 \leq \theta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma \leq 1 \\ \frac{\partial p_2^B}{\partial \theta} &= \frac{\gamma^2(2 - \gamma s - \gamma^2)}{[4 - \gamma^2(1 + \theta)]^2} > 0\end{aligned}\quad (3.26)$$

Por consiguiente, un aumento en la propiedad parcial de la Empresa 1 sobre los beneficios de la Empresa 2, produce un aumento en el precio en equilibrio de ambas empresas, esto es, aumenta el poder de mercado de ambas empresas. De esta forma, al igual que el resultado derivado de la competencia en cantidades dado por (3.9), la estrategia de propiedad parcial bajo competencia en precios tiene un efecto anticompetitivo.

Diferenciación horizontal, γ

La influencia del parámetro de diferenciación horizontal bajo competencia en precios sobre el precio de las empresas es de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_1^B}{\partial \gamma} &= \frac{-(1 + \theta)\gamma[4s + 2\gamma(1 - \theta)] - (1 - \theta)[4 - (1 + \theta)\gamma^2]}{[4 - \gamma^2(1 + \theta)]^2} < 0 \\ \forall 0 \leq \theta < \frac{1}{2}, 0 \leq \gamma \leq 1 \\ \frac{\partial p_2^B}{\partial \gamma} &= \frac{-4s - 4\gamma(1 - \theta) - (1 + \theta) - (1 + \theta)\gamma^2 s}{[4 - \gamma^2(1 + \theta)]^2} < 0\end{aligned}\quad (3.27)$$

En consecuencia, un aumento en el grado de diferenciación horizontal entre las variedades provoca que los precios de ambas variedades aumenten, por lo que, al aumentar su diferenciación horizontal, ambas empresas ganan cuota de mercado.

3.3. Comparación entre competencia en cantidades y competencia en precios

Una vez obtenido el equilibrio de Nash en ambos tipos de competencia, se establece la comparación entre los niveles de precios de equilibrio resultantes. Esta comparación permite corroborar si la competencia en precios conduce a una situación más eficiente que la competencia a través de la elección de las cantidades.

En este sentido, dados los precios en equilibrio bajo competencia en cantidades obtenidos en (3.6) y (3.7), y los precios derivados bajo competencia en precios, esto es, el equilibrio de Bertrand dado en (3.24), entonces:

$$\begin{aligned}
 p_1^C - p_1^B &= \frac{s(2 - \gamma^2\theta) - (1 - \theta)\gamma}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} - \frac{[2 - (1 + \theta)\gamma^2]s - (1 - \theta)\gamma}{4 - (1 + \theta)\gamma^2} = \frac{\gamma^2 s}{4 - (1 + \theta)\gamma^2} > 0 \\
 p_2^C - p_2^B &= \frac{2 - \gamma s}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} - \frac{2 - \gamma^2 - \gamma s}{4 - (1 + \theta)\gamma^2} = \frac{\gamma^2}{4 - (1 + \theta)\gamma^2} > 0
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Por lo tanto, la competencia en precios resulta más eficiente que la competencia en cantidades, alcanzando precios menores en el equilibrio. Estos resultados se encuentran en línea con los resultados obtenidos por [Singh and Vives \(1984\)](#).

4. Análisis dinámico

Tradicionalmente, los modelos de Organización Industrial se han desarrollado en un contexto atemporal, si bien las empresas toman sus decisiones a lo largo de un horizonte temporal.

En este sentido, de acuerdo con [Cabral \(2012\)](#), la incorporación del estudio de los procesos dinámicos surgidos en los modelos de oligopolio es un aspecto que puede ofrecer importantes resultados en el campo de la Organización Industrial, ya que proporcionan un importante valor añadido con respecto a los modelos estáticos.

4.1. Proceso dinámico de ajuste implícito en un oligopolio

En los dos escenarios considerados en la sección anterior y atendiendo a la definición de equilibrio de Nash, si en un momento dado, todas las empresas seleccionan los niveles de producción o precios de equilibrio de Nash, ninguna de ellas cambiará unilateralmente su elección con el fin de aumentar su beneficio. Por tanto, en ausencia de cooperación, el nivel de producción o precio de todas las empresas permanecerá estable en la situación de equilibrio.

Si, por el contrario, los valores seleccionados de las variables de decisión no constituyen un equilibrio de Nash, al menos una empresa es capaz de aumentar su beneficio variando su decisión unilateralmente. Como todas las empresas serán racionales teniendo un comportamiento optimizador, actuarán de la misma forma, formando un proceso dinámico de sucesivos ajustes en los valores de las variables de elección que puede converger o no a una situación de equilibrio.

Las propiedades del sistema dinámico de ajuste resultante dependerán de dos elementos: de la naturaleza del tiempo considerada, pudiendo ser continuo o discreto, y de la manera en la que las empresas ajustan sus decisiones, la cual depende a su vez de cómo elaboren sus expectativas.

El tipo de expectativas viene determinado por el nivel de conocimiento que las empresas tengan de su entorno, dado por las condiciones de la demanda y los costes. Ello conduce a la adopción de un comportamiento más o menos racional. En este trabajo, los modelos dinámicos se desarrollan en un contexto de tiempo discreto y se distingue entre los esquemas de expectativas basados en las funciones de mejor respuesta y los no basados en las funciones de mejor respuesta, que se explican brevemente a continuación. Para una revisión detallada de este tema véase [Bischi et al. \(2010\)](#)

4.2. Tipologías de expectativas en tiempo discreto

Este trabajo se encuadra un contexto de tiempo discreto, esto es, el valor del tiempo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si se supone que la función de demanda es conocida por todas las empresas que operan en el mercado, se definen esquemas de expectativas basados en las funciones de mejor respuesta. En el caso de que esta hipótesis se relaje, se pueden definir esquemas de expectativas que implican un menor grado de racionalidad por parte de las empresas. Es el caso de la denominada Regla del Gradiente, basada en el beneficio marginal.

4.2.1. Expectativas basadas en las funciones de mejor respuesta

En el modelo de Cournot, sea $q_{i,t}$ la cantidad ofrecida por la Empresa i en el periodo de tiempo t . Entonces, la producción en el periodo de tiempo siguiente, $q_{i,t+1}$, dependerá de su expectativa sobre la producción de sus rivales en dicho periodo. Una misma especificación de las expectativas es aplicable en el caso de la competencia en precios.

Sea el caso de un duopolio, en el cual se tiene un conocimiento total de la función de demanda. La

decisión de cada empresa es el resultado del problema de maximización del beneficio:

$$\max_{q_{i,t+1}} \prod_i (q_{i,t+1}, q_{j,t+1}^e); i \neq j, i, j = 1, 2 \quad (4.1)$$

donde $q_{j,t+1}^e$ representa la expectativa de la empresa i sobre la cantidad producida por la empresa j en el periodo $t + 1$.

Si los problemas de maximización tienen solución única, es posible deducir relaciones que constituyen las funciones de mejor respuesta, de la forma:

$$q_{i,t+1} = R_i(q_{j,t+1}^e); i \neq j, i, j = 1, 2 \quad (4.2)$$

En este sentido, se distinguen dos tipos de esquemas de expectativas: expectativas naïve o de Cournot y expectativas adaptativas.

Expectativas naïve

Las expectativas naïve suponen que cada empresa espera que su rival no modifique su producción respecto a la producción fijada en el periodo anterior, esto es, $q_{i,t+1}^e = q_{i,t}$. De esta forma, el sistema dinámico es:

$$T_c \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} &= R_1(q_{2,t}) \\ q_{2,t+1} &= R_2(q_{1,t}) \end{cases} \quad (4.3)$$

Nótese que en el modelo estático presentado se puede considerar existencia de un ajuste dinámico que corresponde a este tipo de expectativas.

Expectativas adaptativas

Las expectativas adaptativas son una generalización de las expectativas naïve. De acuerdo con dicho esquema, en cada periodo, cada empresa cambia su cantidad producida de manera proporcional a la diferencia entre el valor dado por su función de mejor respuesta y la cantidad ofrecida en el periodo inmediatamente anterior. Esto es:

$$q_{i,t+1} - q_{i,t} = \beta_i (R_i(q_{j,t}) - q_{i,t}); 0 \leq \beta_i \leq 1; i \neq j; i, j = 1, 2. \quad (4.4)$$

De esta forma, el modelo de Cournot bajo las expectativas adaptativas en un duopolio viene determinado por el siguiente sistema dinámico:

$$T_A \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} &= (1 - \beta_1) q_{1,t} + \beta_1 R_1(q_{2,t}) \\ q_{2,t+1} &= (1 - \beta_2) q_{2,t} + \beta_2 R_2(q_{1,t}) \end{cases} \quad (4.5)$$

donde β_i es la propensión al cambio en el nivel de producción de un periodo a otro por parte de la Empresa i . En el caso de que $\beta_i = 0$, entonces la empresa no modifica el nivel de producción en el periodo $t + 1$. En cambio, si $\beta_i = 1$, el sistema es el obtenido bajo expectativas naïve, definido en (4.3).

4.2.2. Expectativas no basadas en las funciones de mejor respuesta

El supuesto implícito en las expectativas anteriores, que supone que las empresas tienen pleno conocimiento de las funciones de demanda, puede relajarse, dando origen a otros esquemas de expectativas que implican un menor grado de racionalidad por parte de las empresas. Un ejemplo muy utilizado en esta literatura, es el esquema de expectativas basado en el beneficio marginal conocido como Regla del Gradiente.

En cada periodo de tiempo, cada empresa aumenta (reduce) su cantidad si su beneficio marginal, $\partial \Pi_{i,t} / \partial q_{i,t}$, es positivo (negativo), esto es, la diferencia entre la cantidad de la Empresa i en un momento t y el momento siguiente, $t + 1$, responde a la expresión:

$$q_{i,t+1} - q_{i,t} = \alpha_i(q_{i,t}) \frac{\partial \Pi_i(q_{1,t}, q_{2,t})}{\partial q_{i,t}}, i = 1, 2 \quad (4.6)$$

La función $\alpha_i(q_{i,t}) > 0$ representa la velocidad de ajuste de la Empresa i . Habitualmente, se asocia a dicha función una especificación lineal de la forma $\alpha_i q_{i,t}$, con $\alpha_i > 0$. Por lo tanto, en el caso del modelo de Cournot en un duopolio, el esquema de expectativas da lugar al sistema dinámico no lineal:

$$T_G \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1,t} + \alpha_1 q_{1,t} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_{1,t}} \\ q_{2,t+1} = q_{2,t} + \alpha_2 q_{2,t} \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_{2,t}} \end{cases} \quad (4.7)$$

A efectos de simplificación, se suelen considerar valores simétricos para el parámetro de velocidad de ajuste de la forma: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

En la literatura de oligopolios dinámicos existen modelos en los que las empresas son homogéneas en sus expectativas, si bien también pueden encontrarse modelos basados en expectativas heterogéneas, tales como [Tramontana \(2010\)](#), [Agiza and Elsadany \(2004\)](#) y [Elsadany et al. \(2013\)](#). En este trabajo, se plantea un sistema de cada uno de los tipos.

4.3. Análisis cualitativo de sistemas dinámicos

Cualquiera de los sistema dinámicos presentados en el apartado anterior responden a un sistema dinámico discreto bidimensional pudiendo ser lineal o no lineal.

El análisis cuantitativo de estos sistemas, consiste en la obtención de las trayectorias temporales solución, lo que puede resultar inabordable, por lo que en esta literatura es muy usual recurrir al análisis cualitativo del sistema dinámico planteado. De forma muy resumida, este tipo de análisis consiste en analizar el comportamiento en el tiempo de las variables del modelo y, en particular, en el largo plazo. Para ello, se calculan los valores de equilibrio o estados estacionarios que responden a valores de las variables que si son alcanzados, en ausencia de shocks exógenos, se mantiene en el tiempo. Una vez determinados estos puntos, se aborda el estudio de su estabilidad dinámica. Se considera que un punto de equilibrio es asintóticamente estable (es un atractor) si una vez alcanzado el equilibrio, cuando se produce una perturbación externa que saca a las variables de esos valores, dicho punto se vuelve a alcanzar después de un periodo de tiempo transitorio. En caso de que no sea alcanzable de nuevo se considera que el punto de equilibrio no es asintóticamente estable.

El análisis cualitativo también analiza el tipo de comportamiento dinámico de las variables en el periodo transitorio que hay hasta que el equilibrio se recupera o el que aparece permanentemente si el equilibrio no es asintóticamente estable. A continuación, hacemos una breve formalización de estos conceptos que utilizaremos en el análisis posterior de los modelos dinámicos planteados. Para una revisión en profundidad véase [Gandolfo \(1976\)](#) y [Fernández Perez et al. \(2003\)](#).

Sean $x_{1,t}$ y $x_{2,t}$ variables en el tiempo t de un sistema dinámico discreto bidimensional, T , definido de la forma:

$$T \equiv \begin{cases} x_{1,t+1} = f_1(x_{1,t}, x_{2,t}) \\ x_{2,t+1} = f_2(x_{1,t}, x_{2,t}) \end{cases} \iff x_{t+1}^- \equiv T(\bar{x}_t) \quad (4.8)$$

donde $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

Los puntos de equilibrio o estados estacionarios se definen como los puntos fijos de la función vectorial T . La condición que asegura la estabilidad asintótica local del punto de equilibrio x^e es que los valores propios de la matriz jacobiana del sistema dinámico en el equilibrio sean en módulo menores que 1, estando la matriz jacobiana dada por:

$$JT(x_1^e, x_2^e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Los valores propios de la matriz jacobiana son aquellos valores λ que satisfacen la ecuación característica dada por:

$$|JT(x_1^e, x_2^e) - \lambda I_2| = 0 \quad (4.10)$$

Sean T y D la traza y el determinante de la matriz jacobiana determinada en (4.9), respectivamente. Esta ecuación característica puede escribirse en términos de T y D como:

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0 \quad (4.11)$$

En resumen, si los valores propios obtenidos, λ_1 y λ_2 satisfacen $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$, entonces el punto de equilibrio x^e es localmente asintóticamente estable. Por el contrario, si $|\lambda_i| > 1$ para algún i , entonces el punto de equilibrio x^e es inestable.

En algunos modelos, el cálculo de los valores propios puede resultar complejo, por lo que existen unas condiciones, denominadas condiciones de Schur, que determinan las circunstancias bajo las cuales el punto de equilibrio es asintóticamente estable, y son de la forma:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 1 + T + D > 0 \\ \text{(ii)} \quad & 1 - T + D > 0 \\ \text{(iii)} \quad & 1 - D > 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.4. Sistema dinámico con expectativas homogéneas adaptativas

El análisis de los modelos dinámicos con expectativas homogéneas adaptativas se realiza tanto en un contexto de competencia en cantidades, o de Cournot, como en precios, o de Bertrand. En primer lugar, se plantea el sistema dinámico y, seguidamente, se calculan los puntos de equilibrio del sistema.

Finalmente, se estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio, de manera que se pueda estudiar bajo qué casos el sistema converge hacia alguno de los puntos de equilibrio.

4.4.1. Competencia en cantidades

Sistema dinámico y puntos de equilibrio

El sistema dinámico de un duopolio bajo competencia en cantidades con expectativas homogéneas adaptativas viene determinado como sigue:

$$T_A^C \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} = (1 - \beta_1) q_{1,t} + \beta_1 R_1(q_{2,t}) \\ q_{2,t+1} = (1 - \beta_2) q_{2,t} + \beta_2 R_2(q_{1,t}) \end{cases} \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta las funciones de mejor respuesta de cada una de las empresas dadas por (3.4), el sistema resultante es lineal y toma la forma:

$$T_A^C \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} = (1 - \beta_1) q_{1,t} + \beta_1 \frac{s - \gamma(1 + \theta) q_{2,t}}{2} \\ q_{2,t+1} = (1 - \beta_2) q_{2,t} + \beta_2 \frac{1 - \gamma q_{1,t}}{2} \end{cases} \quad (4.14)$$

Los puntos de equilibrio se obtienen bajo el supuesto $q_{i,t} = q_{i,t+1} = q_i$, $i = 1, 2$. Por lo tanto, tomando el sistema dinámico planteado en (4.14), se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_1 &= (1 - \beta_1) q_1 + \beta_1 \frac{s - \gamma(1 + \theta) q_2}{2} \\ q_2 &= (1 - \beta_2) q_2 + \beta_2 \frac{1 - \gamma q_1}{2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Resolviendo el sistema dado en (4.15), el punto de equilibrio obtenido es el equilibrio de Cournot-Nash obtenido en el sistema estático bajo competencia en cantidades dado en (3.5):

$$E^* = \left(q_1^* = \frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)}, \quad q_2^* = \frac{2 - \gamma s}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \right) \quad (4.16)$$

Estabilidad de los puntos de equilibrio

Con el objetivo de estudiar la estabilidad del punto de equilibrio obtenido en (4.16), se procede a calcular la matriz jacobiana del sistema dado en (4.14). Por lo tanto, la matriz obtenida en este caso es:

$$JT_A^C = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 & \frac{-\beta_1 \gamma(1 + \theta)}{2} \\ \frac{-\beta_2 \gamma}{2} & 1 - \beta_2 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Del sistema 2-dimensional lineal se observa que la matriz jacobiana, JT_A^C , no depende de q_1 y q_2 al ser lineal, luego la matriz jacobiana en el equilibrio satisface $JT_A^{C*} = JT_A^C$.

Para determinar la estabilidad del punto de equilibrio, se procede a calcular la traza y el determinante de la matriz jacobiana en el equilibrio:

$$\begin{aligned} \text{Traza} = T &= 2 - \beta_1 - \beta_2 \\ \text{Determinante} = D &= 1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_1 \beta_2 \frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{4} \end{aligned} \quad (4.18)$$

El cumplimiento de las condiciones de Schur dadas en (4.12), determinan si el punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable.

Respecto a la tercera condición, se tiene:

$$\begin{aligned} 1 - D &= 1 - \left[1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_1 \beta_2 \frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{4} \right] = \beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \beta_2 \frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{4} > 0 \\ \Leftrightarrow \beta_1 &> \frac{-\beta_2}{1 - \beta_2 \frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{4}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Pero $\frac{-\beta_2}{1 - \beta_2 \frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{4}} < 0$, luego, sabiendo que $\beta_1 \in [0, 1]$, la expresión es siempre cierta.

En relación con la condición (ii) de Schur, se procede como sigue:

$$1 - T + D = \beta_1 \beta_2 \frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{4} > 0 \quad (4.20)$$

Finalmente, la primera condición de Schur es de la forma:

$$\begin{aligned} 1 + T + D &= 4 - 2\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_1 \beta_2 \frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{4} > 0 \\ \Leftrightarrow \beta_2 &< \frac{8(2 - \beta_1)}{8 - \beta_1[4 - \gamma^2(1 + \theta)]} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Pero se ve que $8(2 - \beta_1) \geq 8$ y $8 - \beta_1 [4 - \gamma^2(1 + \theta)] \leq 8$. Por lo tanto:

$$\frac{8(2 - \beta_1)}{8 - \beta_1 [4 - \gamma^2(1 + \theta)]} \geq 1 \quad (4.22)$$

Entonces, la expresión es siempre cierta, ya que $\beta_2 \in [0, 1]$.

En conclusión, todas las condiciones de Schur se satisfacen, por lo que *el equilibrio de Cournot-Nash bajo expectativas homogéneas adaptativas es localmente asintóticamente estable*.

Para ilustrar el caso anterior, se muestran las trayectorias temporales $q_{i,t}$ y el plano de fases ($q_{1,t}, q_{2,t}$) de las cantidades obtenidas al simular el sistema dinámico descrito en (4.14) ¹. Tomando como condiciones iniciales y los valores de los parámetros los descritos en la Figura 4.1 se observa el resultado obtenido analíticamente, esto es, el carácter atractor del punto de equilibrio. Por consiguiente, se puede observar que las trayectorias temporales de las cantidades, $q_{i,t}$, convergen de forma monótona al equilibrio de Cournot-Nash. Esta convergencia monótona al punto de equilibrio (naranja) también puede observarse claramente en el Plano de Fases expuesto en la Figura 4.2.

4.4.2. Competencia en precios

Sistema dinámico y puntos de equilibrio

El sistema dinámico de un duopolio bajo competencia en precios con expectativas homogéneas adaptativas viene determinado como sigue:

$$T_A^B \equiv \begin{cases} p_{1,t+1} = (1 - \beta_1) p_{1,t} + \beta_1 R_1(p_{2,t}) \\ p_{2,t+1} = (1 - \beta_2) p_{2,t} + \beta_2 R_2(p_{1,t}) \end{cases} \quad (4.23)$$

Teniendo en cuenta las funciones de mejor respuesta de cada una de las empresas obtenidas de (3.22), el sistema resultante es lineal y toma la forma:

$$T_A^B \equiv \begin{cases} p_{1,t+1} = (1 - \beta_1) p_{1,t} + \beta_1 \frac{s + \gamma(1 + \theta) p_{2,t} - \gamma}{2} \\ p_{2,t+1} = (1 - \beta_2) p_{2,t} + \beta_2 \frac{1 - \gamma s + \gamma p_{1,t}}{2} \end{cases} \quad (4.24)$$

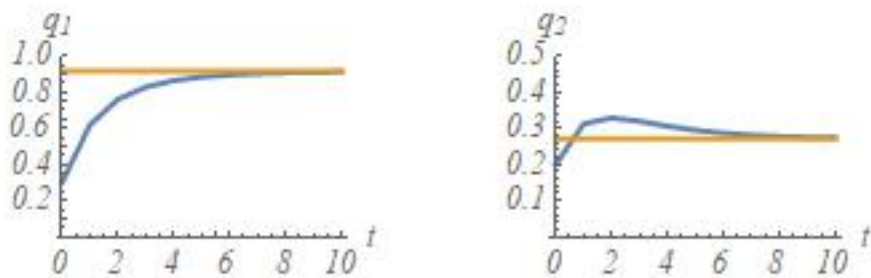


Figura 4.1: Competencia en Cantidades. Expectativas homogéneas. Trayectorias solución: $\beta_1 = \beta_2 = 0,5, \gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 2, q_{1,0} = 0,3, q_{2,0} = 0,2$

¹Las simulaciones matemáticas realizadas se han desarrollado en Wolfram-Mathematica (Inc.)

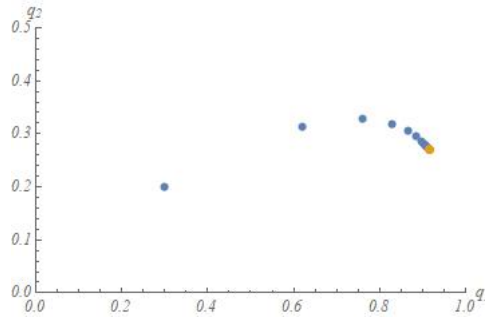


Figura 4.2: Competencia en Cantidades. Expectativas homogéneas. Plano de fases: $\beta_1 = \beta_2 = 0,5$, $\gamma = 0,5$, $\theta = 0,25$, $s = 2$, $q_{1,0} = 0,3$, $q_{2,0} = 0,2$

Los puntos de equilibrio se obtienen bajo el supuesto $p_{i,t} = p_{i,t+1} = p_i$, $i = 1, 2$. De esta forma, tomando el sistema dinámico planteado en (4.24), el sistema de ecuaciones obtenido es:

$$\begin{aligned} p_1 &= (1 - \beta_1) p_1 + \beta_1 \frac{s + \gamma(1 + \theta) p_2 - \gamma}{2} \\ p_2 &= (1 - \beta_2) p_2 + \beta_2 \frac{1 - \gamma s + \gamma p_1}{2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Resolviendo el sistema dado en (4.25), el punto de equilibrio obtenido es el equilibrio de Bertrand-Nash obtenido del sistema estático bajo competencia en precios dado en (3.24):

$$E^* = \left(p_1^* = \frac{[2 - (1 + \theta)\gamma^2]s - (1 - \theta)\gamma}{4 - (1 + \theta)\gamma^2}, \quad p_2^* = \frac{2 - \gamma^2 - \gamma s}{4 - (1 + \theta)\gamma^2} \right) \quad (4.26)$$

Estabilidad de los puntos de equilibrio

Con el objetivo de estudiar la estabilidad del punto de equilibrio obtenido en (4.26), se procede a calcular la matriz jacobiana del sistema dado en (4.24), obteniendo:

$$JT_A^B = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 & \frac{\beta_1 \gamma (1 + \theta)}{2} \\ \frac{\beta_2 \gamma}{2} & 1 - \beta_2 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Del sistema 2-dimensional lineal se observa que la matriz jacobiana, JT_A^B , no depende de p_1 y p_2 al ser lineal, luego la matriz jacobiana en el equilibrio satisface $JT_A^{B*} = JT_A^B$.

Para determinar la estabilidad del punto de equilibrio, se procede a calcular la traza y el determinante de la matriz jacobiana en el equilibrio:

$$\begin{aligned} \text{Traza} &= T = 2 - \beta_1 - \beta_2 \\ \text{Determinante} &= D = 1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_1 \beta_2 \frac{4 - \gamma^2 (1 + \theta)}{4} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Cabe destacar que la traza y el determinante de la matriz jacobiana obtenida bajo competencia en precios son iguales que las obtenidas bajo competencia en cantidades, dadas en (4.18). Por lo tanto, las condiciones de Schur planteadas para el sistema dinámico bajo competencia en cantidades son iguales a las que se obtendrían bajo competencia en precios. Luego, se derivan los mismos resultados. Es decir, bajo $\beta_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, las tres condiciones de Schur se cumplen, luego, *el punto de equilibrio obtenido en el sistema dinámico bajo competencia en precios es localmente asintóticamente estable*.

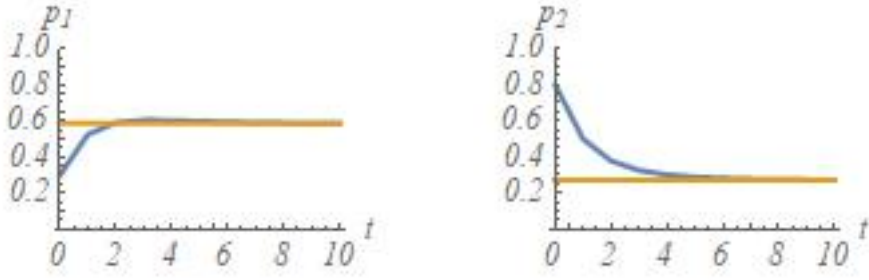


Figura 4.3: Competencia en Precios. Expectativas homogéneas. Trayectorias solución: $\beta_1 = \beta_2 = 0,5, \gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 1,5, p_{1,0} = 0,3, p_{2,0} = 0,8$

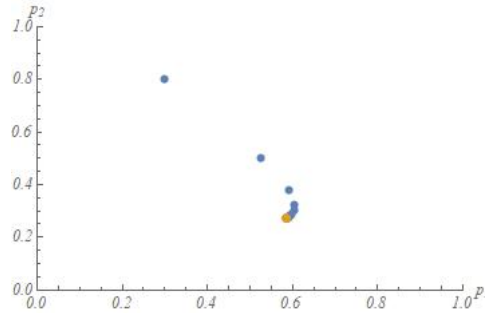


Figura 4.4: Competencia en Precios. Expectativas homogéneas. Plano de fases: $\beta_1 = \beta_2 = 0,5, \gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 1,5, p_{1,0} = 0,3, p_{2,0} = 0,8$

Como puede observarse en la simulación de las trayectorias solución con valores iniciales dados en la Figura 4.3, las trayectorias de los precios convergen de forma monótona al equilibrio de Bertrand-Nash dado en (4.26). Adicionalmente, del Plano de Fases dado en la Figura 4.4, se desprende el mismo resultado, al converger la sucesión de puntos $(p_{1,t}, p_{2,t})$ al punto de equilibrio (naranja).

4.5. Modelo dinámico con expectativas heterogéneas

Al igual que en el caso de los modelos con expectativas homogéneas, en los cuales ambas empresas toman el mismo esquema de expectativas, el análisis de los modelos dinámicos con expectativas heterogéneas se realiza tanto en un contexto de competencia en cantidades, o de Cournot, como en precios, o de Bertrand. En este segundo caso, las empresas toman dos esquemas de expectativas diferentes. En el caso de la Empresa 1, se suponen expectativas basadas en la Regla del Gradiente definida en (4.6), y en la Empresa 2 se suponen expectativas naïve, definidas en (4.3).

4.5.1. Competencia en cantidades

Sistema dinámico y puntos de equilibrio

El sistema dinámico de un duopolio bajo competencia en cantidades con expectativas heterogéneas viene determinado como sigue:

$$T_H^C \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1,t} + \alpha q_{1,t} \frac{\partial \Pi_{1,t}}{\partial q_{1,t}} \\ q_{2,t+1} = R_2(q_{1,t}) \end{cases} \quad (4.29)$$

Sustituyendo las expresiones del sistema por las calculadas de acuerdo con el sistema de competencia en cantidades estático, dadas en (3.2) y (3.4), el sistema dinámico bajo competencia en

cantidades con expectativas heterogéneas es de la forma:

$$T_H^C \equiv \begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1,t} + \alpha q_{1,t} [s - 2q_{1,t} - \gamma(1 + \theta)q_{2,t}] \\ q_{2,t+1} = \frac{1 - \gamma q_{1,t}}{2} \end{cases} \quad (4.30)$$

En este caso, los puntos fijos o de equilibrio, satisfacen $q_{i,t+1} = q_{i,t} = q_i$, $i = 1, 2$. Entonces, tomando el sistema definido en (4.30), se tiene:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1 + \alpha q_1 [s - 2q_1 - \gamma(1 + \theta)q_2] \\ q_2 &= \frac{1 - \gamma q_1}{2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Resolviendo el sistema dado en (4.31), se obtienen un punto frontera y un punto interior, que coincide con el equilibrio de Cournot-Nash obtenido del sistema estático bajo competencia en cantidades dado en (3.5):

$$\begin{aligned} \text{Punto Frontera: } E_1^* &= \left(q_1^* = 0, q_2^* = \frac{1}{2} \right) \\ \text{Equilibrio de Cournot-Nash: } E_2^* &= \left(q_1^* = \frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)}, q_2^* = \frac{2 - \gamma s}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Estabilidad de los puntos de equilibrio

Con el objetivo de estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrios obtenidos en (4.32), se procede a calcular la matriz jacobiana del sistema dado en (4.30) como:

$$JT_H^C(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha[s - 4q_1 - \gamma(1 + \theta)q_2] & -\alpha\gamma(1 + \theta)q_1 \\ \frac{-\gamma}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

- Estudio del punto frontera: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

En primer lugar, se evalúa la matriz jacobiana del sistema en el punto de equilibrio, de forma que se obtiene:

$$JT_H^C(E_1^*) = JT_H^C\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\left[s - \frac{\gamma(1 + \theta)}{2}\right] & 0 \\ \frac{-\gamma}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Al ser $JT_H^C(E_1^*)$ una matriz triangular, es inmediato comprobar que los valores propios de la matriz son las componentes de la diagonal. Por lo tanto, se observa:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & \Rightarrow |\lambda_1| < 1 \\ \lambda_2 &= 1 + \alpha\left[s - \frac{\gamma(1 + \theta)}{2}\right] & \Rightarrow |\lambda_2| > 1 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por lo tanto, al menos uno de los valores propios tiene valor absoluto mayor que 1, por lo que *el punto frontera es inestable*. Cabe destacar que el punto frontera corresponde a una situación de monopolio ya que únicamente la Empresa 1 produce, puesto que, $q_2 = 0$.

- Estudio del equilibrio de Cournot-Nash: La matriz jacobiana evaluada en el equilibrio de Cournot-Nash es de la forma:

$$JT_H^C(E_2^*) = \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha \left[\frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \right] & -\alpha\gamma(1 + \theta) \left[\frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \right] \\ \frac{-\gamma}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Entonces, la traza y el determinante de la matriz jacobiana evaluada en el equilibrio son:

$$\begin{aligned} \text{Traza} = T &= 1 - 2\alpha \left[\frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \right] \\ \text{Determinante} = D &= \frac{-\alpha\gamma^2(1 + \theta)}{2} \left[\frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Las condiciones de Schur definidas en (4.12) determinan bajo qué condiciones el punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable.

El cumplimiento de la tercera condición es clara, ya que:

$$1 - D = 1 + \frac{\alpha\gamma^2(1 + \theta)}{2} \left[\frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \right] = 1 + \frac{\alpha\gamma^2(1 + \theta)}{2} q_1^* > 0 \quad (4.38)$$

En el caso de la condición (ii), se tiene:

$$1 - T + D = \alpha \left[\frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \right] \left[\frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{2} \right] = \alpha \left[\frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{2} \right] q_1^* > 0 \quad (4.39)$$

Por último, la condición (i) de Schur es de la forma:

$$1 + T + D = 2 - \alpha \left[\frac{2s - \gamma(1 + \theta)}{4 - \gamma^2(1 + \theta)} \right] \left[\frac{4 + \gamma^2(1 + \theta)}{2} \right] > 0 \iff \alpha < \alpha_C \quad (4.40)$$

donde

$$\alpha_C = \alpha(s, \gamma, \theta) = 2 \left[\frac{2}{4 + \gamma^2(1 + \theta)} \right] \left[\frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{2s - \gamma(1 + \theta)} \right] \quad (4.41)$$

Por lo tanto, las condiciones de Schur se cumplen si $\alpha \in (0, \alpha_C)$.

Por lo tanto, en definitiva, de este análisis se concluye que *existe un umbral de la velocidad de ajuste por debajo del cual el equilibrio tiene un carácter atractor y superado ese umbral pierde la estabilidad asintótica*.

Resulta interesante estudiar el comportamiento en función del umbral. En concreto, tiene interés analizar el comportamiento de las trayectorias cuando se supere el umbral. Para ello, se recurre a simulaciones. Tomando $\gamma = 0,5$, $\theta = 0,25$, $s = 2$, $q_{1,0} = 0,3$, $q_{2,0} = 0,2$, el umbral para el cual se asegura que hay estabilidad asintótica es $\alpha_C = 1,01342$. De esta forma, tomando un valor por debajo de ese umbral, por ejemplo, $\alpha = 0,8$, tal y como muestra la Figura 4.5 la cual representa la trayectoria solución del sistema descrito en (4.30), existe convergencia al equilibrio de Cournot-Nash. De la misma forma, la Plano de Fases en este caso (Figura 4.6) muestra la convergencia al punto de equilibrio (naranja).

Aumentando el valor de α bajo las mismas condiciones iniciales, la estabilidad del equilibrio se ve afectada, tal y como se puntualiza dado el umbral de α para el cual el punto de equilibrio es estable, descrito en (4.41). En la Figura 4.7 puede observarse que, tomando $\alpha = 1,2$, el punto de equilibrio deja de ser estable. En su lugar, la trayectoria obtenida oscila entre dos puntos alrededor del punto de equilibrio, esto es, se obtiene como atractor un 2-ciclo. Aumentando el valor de la velocidad de

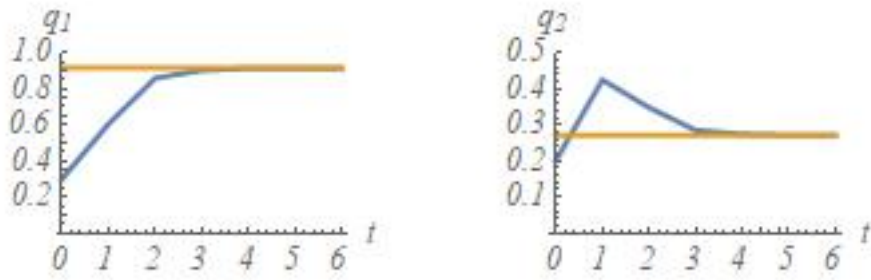


Figura 4.5: Competencia en Cantidades. Expectativas heterogéneas. Trayectorias solución: $\alpha = 0,8, \gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 2, q_{1,0} = 0,3, q_{2,0} = 0,2$.

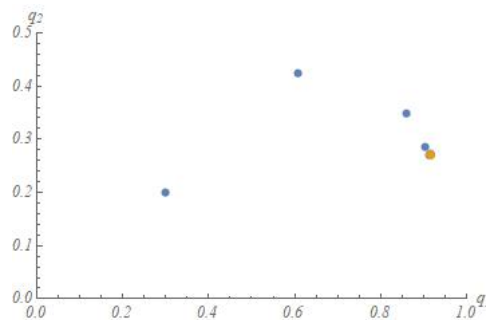


Figura 4.6: Competencia en Cantidades. Expectativas heterogéneas. Plano de fases: $\alpha = 0,8, \gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 2, q_{1,0} = 0,3, q_{2,0} = 0,2$.

ajuste a $\alpha = 1,3$, se obtiene como atractor una trayectoria oscilante de 4 puntos alrededor del punto de equilibrio, es decir, un 4-ciclo. Finalmente, se ha tomado $\alpha = 1,5$, obteniendo que la trayectoria solución sigue un comportamiento caótico. El comportamiento descrito para cada uno de los valores de α puede observarse claramente en la Figura 4.8. En este sentido, los Planos de Fases muestran los puntos de oscilación (verde) alrededor del equilibrio de Cournot-Nash (naranja) que se obtienen al aumentar el valor de la velocidad de ajuste de forma que el sistema no converge al punto de equilibrio. Por lo tanto, se observa que conforme nos alejamos del umbral de la velocidad de ajuste, las trayectorias se complican mostrando un comportamiento oscilante o caótico en cada caso.

Influencia de los parámetros sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio

En relación con los puntos de equilibrio obtenidos en (4.32), se ha analizado la estabilidad de ambos puntos, viendo que, en el caso del punto frontera, uno de los valores propios tiene valor absoluto mayor que 1, por lo que el punto es inestable, independientemente de los parámetros s, γ y θ .

Respecto al equilibrio de Cournot-Nash, a partir de las condiciones de Schur se concluye que el punto es localmente asintóticamente estable si $\alpha(s, \theta, \gamma) \in (0, \alpha_C)$, donde α_C queda definido en (4.41). Por lo tanto, se puede estudiar la variación en el rango de valores de α para los cuales el equilibrio es estable mediante el análisis de la influencia de los parámetros s, γ y θ en el umbral de la velocidad de ajuste, α_C , y evaluar si el intervalo se ve disminuido o aumentado en función de los parámetros.

■ Diferencia de calidad, s .

Para estudiar la influencia del parámetro de diferenciación vertical, s , sobre el umbral de velocidad de ajuste, se procede de la forma:

$$\frac{\partial \alpha_C}{\partial s} = - \left[\frac{8}{4 + \gamma^2(1 + \theta)} \right] \left[\frac{4 - \gamma^2(1 + \theta)}{[2s - \gamma(1 + \theta)]^2} \right] < 0 \quad (4.42)$$

En consecuencia, un aumento en la diferencia de calidad de las variedades provoca una

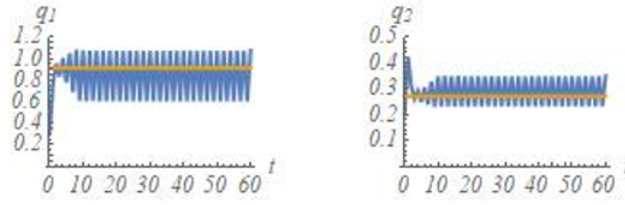
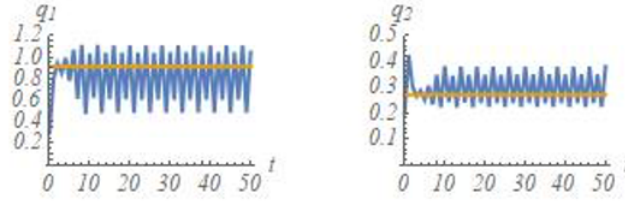
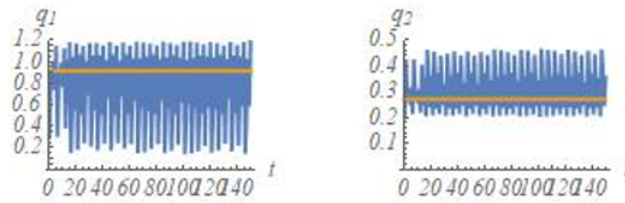
(a) $\alpha = 1,2$ (b) $\alpha = 1,3$ (c) $\alpha = 1,5$

Figura 4.7: Competencia en Cantidades. Expectativas heterogéneas. Trayectoria solución: $\gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 2, q_{1,0} = 0,3, q_{2,0} = 0,2$.

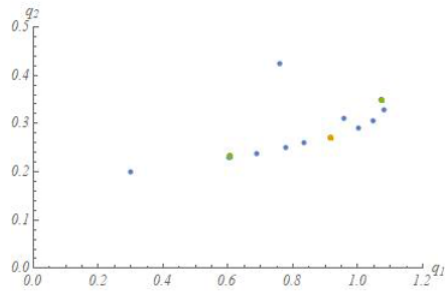
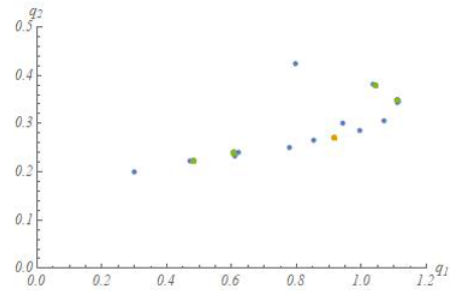
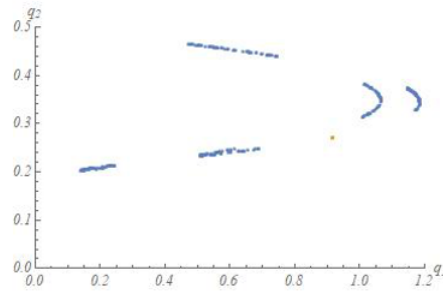
(a) $\alpha = 1,2$ (b) $\alpha = 1,3$ (c) $\alpha = 1,5$

Figura 4.8: Competencia en Cantidades. Expectativas heterogéneas. Plano de Fases: $\gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 2, q_{1,0} = 0,3, q_{2,0} = 0,2$.

disminución en el umbral de la velocidad de ajuste, α_C , y por ende, una disminución del rango de valores de α para los cuales el equilibrio es asintóticamente estable.

■ Participación parcial, θ

La influencia de la participación parcial de la Empresa 1 en el beneficio de la Empresa 2 sobre el umbral de velocidad de ajuste se determina a partir de las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \alpha_C}{\partial \theta} = \frac{-\gamma^4 (1 + \theta)^2 + 8\gamma^2 (1 + \theta) - 16\gamma s + 16}{[4 + \gamma^2 (1 + \theta)][2s - \gamma(1 + \theta)]} \quad (4.43)$$

La expresión puede cambiar de signo, por lo que la influencia del parámetro viene condicionada por un valor crítico como sigue:

$$\frac{\partial \alpha_C}{\partial \theta} > 0 \iff s < \frac{-\gamma^4 (1 + \theta)^2 + 8\gamma^2 (1 + \theta) + 16}{16\gamma} = \bar{s} \quad (4.44)$$

El valor crítico \bar{s} cumple:

$$\bar{s} = \frac{-\gamma^4 (1 + \theta)^2 + 8\gamma^2 (1 + \theta) + 16}{16\gamma} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma(1 + \theta)[8 - \gamma^2(1 + \theta)]}{16} > 1 \quad (4.45)$$

Adicionalmente, tomando $x = \gamma^2 (1 + \theta)$, se puede ver que:

$$\bar{s} < \frac{2}{\gamma} \iff x^2 - 8x + 16 > 0 \iff (x - 4)^2 > 0 \quad (4.46)$$

Luego, la condición se cumplirá siempre ya que $x = \gamma^2 (1 + \theta) < 4$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{Si } 1 < s < \bar{s} &\implies \frac{\partial \alpha_C}{\partial \theta} > 0 \\ \text{Si } \bar{s} < s < \frac{2}{\gamma} &\implies \frac{\partial \alpha_C}{\partial \theta} < 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Entonces, si la calidad de la variedad no supera el valor crítico \bar{s} , un aumento en la participación parcial de la Empresa 1 sobre el beneficio de la Empresa 2 provoca un aumento en el umbral de la velocidad de ajuste, α_C , lo que hace aumentar el intervalo de valores para los cuales el sistema es asintóticamente estable.

■ Diferenciación horizontal, γ

La influencia del parámetro de diferenciación horizontal sobre el umbral de velocidad de ajuste viene determinado por la expresión:

$$\frac{\partial \alpha_C}{\partial \gamma} = \frac{-\gamma^4 (1 + \theta)^2 + 16\gamma^2 (1 + \theta) - 32\gamma s + 16}{[4 + \gamma^2 (1 + \theta)][2s - \gamma(1 + \theta)]} \quad (4.48)$$

El signo de la derivada no está determinado, por lo que la influencia del parámetro de diferenciación horizontal viene condicionada por un valor crítico como sigue:

$$\frac{\partial \alpha_C}{\partial \gamma} > 0 \iff s < \frac{-\gamma^4 (1 + \theta)^2 + 16\gamma^2 (1 + \theta) + 16}{32\gamma} = \bar{\bar{s}} \quad (4.49)$$

Sea $x = \gamma^2 (1 + \theta)$. Si bien no puede asegurarse que $\bar{\bar{s}} > 1$, en todo caso, se satisface:

$$\bar{\bar{s}} = \frac{-\gamma^4 (1 + \theta)^2 + 16\gamma^2 (1 + \theta) + 16}{32\gamma} < \frac{2}{\gamma} \iff x^2 - 16x + 48 > 0 \iff (x - 4)(x - 12) > 0 \quad (4.50)$$

Pero $x < 4$, por lo que la expresión es siempre cierta. Por lo tanto, si $\bar{s} > 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{Si } 1 < s < \bar{s} &\implies \frac{\partial \alpha_C}{\partial \gamma} > 0 \\ \text{Si } \bar{s} < s < \frac{2}{\gamma} &\implies \frac{\partial \alpha_C}{\partial \gamma} < 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Entonces, si la calidad de la variedad no supera el valor crítico \bar{s} , una disminución en la diferenciación horizontal entre las variedades hace que α_C aumente, lo que provoca que el intervalo de valores para los cuales el sistema es estable aumente. Cabe destacar que en el caso de que $\bar{s} < 1$, será inmediato $\partial \alpha_C / \partial \gamma < 0$.

4.5.2. Competencia en precios

Sistema dinámico y puntos de equilibrio

El sistema dinámico de un duopolio bajo competencia en precios con expectativas heterogéneas, donde la Empresa 1 sigue el esquema de expectativas de la Regla del Gradiente y la Empresa 2 sigue expectativas naïve, viene determinado de la forma:

$$T_H^B \equiv \begin{cases} p_{1,t+1} = p_{1,t} + \alpha p_{1,t} \frac{\partial \Pi_{1,t}}{\partial p_{1,t}} \\ p_{2,t+1} = R_2(p_{1,t}) \end{cases} \quad (4.52)$$

Sustituyendo las expresiones del sistema por las calculadas de acuerdo con el sistema de competencia en cantidades estático, dadas en (3.22), el sistema dinámico bajo competencia en precios con expectativas heterogéneas es de la forma:

$$T_H^B \equiv \begin{cases} p_{1,t+1} = p_{1,t} + \alpha p_{1,t} \left[\frac{s - \gamma - 2p_{1,t} + \gamma(1 + \theta)p_{2,t}}{1 - \gamma^2} \right] \\ p_{2,t+1} = \frac{1 - \gamma s + \gamma p_{1,t}}{2} \end{cases} \quad (4.53)$$

En este caso, los puntos fijos o de equilibrio, satisfacen $p_{i,t+1} = p_{i,t} = p_i$, $i = 1, 2$. Entonces, tomando el sistema definido en (4.53), se tiene:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1 + \alpha p_1 \left[\frac{s - \gamma - 2p_1 + \gamma(1 + \theta)p_2}{1 - \gamma^2} \right] \\ p_2 &= \frac{1 - \gamma s + \gamma p_1}{2} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Resolviendo el sistema dado en (4.54), se obtienen un punto frontera y un punto interior que corresponde al equilibrio de Bertrand-Nash obtenido del sistema estático bajo competencia en cantidades dado en (3.24):

$$\begin{aligned} \text{Punto Frontera: } E_1^* &= \left(p_1^* = 0, p_2^* = \frac{1 - \gamma s}{2} \right) \\ \text{Equilibrio de Bertrand-Nash: } E_2^* &= \left(p_1^* = \frac{[2 - (1 + \theta)\gamma^2]s - (1 - \theta)\gamma}{4 - (1 + \theta)\gamma^2}, p_2^* = \frac{2 - \gamma^2 - \gamma s}{4 - (1 + \theta)\gamma^2} \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Estabilidad de los puntos de equilibrio

Con el objetivo de estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio obtenidos en (4.55), se procede a calcular la matriz jacobiana del sistema dado en (4.53), dada por:

$$JT_H^B(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{1-\gamma^2} [s - \gamma - 4p_1 + \gamma(1+\theta)p_2] + 1 & \frac{\alpha\gamma(1+\theta)}{1-\gamma^2} p_1 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

- Estudio del punto frontera: $\left(0, \frac{1-\gamma s}{2}\right)$.

En primer lugar, se evalúa la matriz jacobiana del sistema en el punto de equilibrio, de forma que se obtiene:

$$JT_H^B(E_1^*) = JT_H^B\left(0, \frac{1-\gamma s}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{1-\gamma^2} \left[s - \gamma + \gamma(1+\theta)\left(\frac{1-\gamma s}{2}\right)\right] & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Al ser JT_H^B una matriz triangular, es inmediato comprobar que los valores propios de la matriz son las componentes de la diagonal. Por lo tanto, se observa:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & \Rightarrow |\lambda_1| < 1 \\ \lambda_2 &= 1 + \frac{\alpha}{1-\gamma^2} \left[s - \gamma + \gamma(1+\theta)\left(\frac{1-\gamma s}{2}\right)\right] & \Rightarrow |\lambda_2| > 1 \end{aligned} \quad (4.58)$$

De este modo, al menos uno de los valores propios tiene valor absoluto mayor que 1, por lo que *el punto frontera no es estable*.

- Estudio del equilibrio de Bertrand-Nash:

La matriz jacobiana evaluada en el equilibrio de Bertrand-Nash es de la forma:

$$JT_H^B(E_2^*) = JT_H^B(p_1^*, p_2^*) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\alpha}{1-\gamma^2} p_1^* & \frac{\alpha\gamma(1+\theta)}{1-\gamma^2} p_1^* \\ \frac{\gamma}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Entonces, la traza y el determinante de la matriz jacobiana evaluada en el equilibrio son:

$$\begin{aligned} \text{Traza} = T &= 1 - \frac{2\alpha}{1-\gamma^2} p_1^* \\ \text{Determinante} = D &= \frac{-\alpha\gamma^2(1+\theta)}{2(1-\gamma^2)} p_1^* \end{aligned} \quad (4.60)$$

Las condiciones de Schur definidas en (4.12) determinan bajo qué condiciones el punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable. Sea $K = 1 - T + D$ de la forma:

$$K = 1 - T + D = \frac{\alpha p_1^*}{2(1-\gamma^2)} [4 - \gamma^2(1+\theta)] > 0 \quad (4.61)$$

Las condiciones de Schur pueden reescribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad 1 + T + D &> 0 & \iff 2T + K > 0 \\ \text{(ii)} \quad 1 - T + D &> 0 & \iff K > 0 \\ \text{(iii)} \quad 1 - D &> 0 & \iff 2 - (T + K) > 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

La tercera condición es cierta, ya que:

$$1 - D = 1 + \frac{\alpha\gamma^2(1 + \theta)}{2(1 - \gamma^2)}p_1^* > 0 \quad (4.63)$$

En el caso de la condición (ii), resulta inmediato comprobar que se cumple en cualquier caso ya que, de acuerdo con las condiciones de Schur definidas en (4.62)

$$K = \frac{\alpha p_1^*}{2(1 - \gamma^2)} [4 - \gamma^2(1 + \theta)] > 0 \quad (4.64)$$

Por último, de acuerdo con las condiciones de Schur definidas en (4.62), la primera condición es de la forma:

$$2T + K = 2 - \frac{\alpha p_1^*}{1 - \gamma^2} \frac{4 + \gamma^2(1 + \theta)}{2} > 0 \iff \alpha < \alpha_B \quad (4.65)$$

donde

$$\alpha_B = \alpha(s, \gamma, \theta) = \frac{4 - (1 + \theta)\gamma^2}{[2 - (1 + \theta)\gamma^2]s - (1 - \theta)\gamma} \cdot \frac{4(1 - \gamma^2)}{[4 + \gamma^2(1 + \theta)]} \quad (4.66)$$

Por lo tanto, las condiciones de Schur se cumplen si $\alpha \in (0, \alpha_B)$.

Por lo tanto, *existe un umbral de la velocidad de ajuste por debajo del cual el equilibrio tiene un carácter atractor y superado ese umbral pierde estabilidad asintótica.*

Al igual que en el caso de la competencia en cantidades, resulta interesante estudiar el comportamiento en función del umbral de velocidad de ajuste. En concreto, tiene interés analizar el comportamiento de las trayectorias cuando se supere dicho umbral. Dadas las condiciones iniciales $\gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 1,5, p_{1,0} = 0,8, p_{2,0} = 0,4$, el umbral para el cual se asegura estabilidad asintótica del punto de equilibrio es $\alpha_B = 1,18967$. Entonces, tomando un valor por debajo de este umbral, por ejemplo, $\alpha = 1$, tal y como muestra la Figura 4.9 la cual representa la trayectoria solución del sistema dinámico con expectativas heterogéneas bajo competencia en precios descrito en (4.53), existe convergencia al equilibrio de Bertrand-Nash. De la misma forma, la Plano de Fases en este caso (Figura 4.10) muestra la convergencia al punto de equilibrio (naranja).

Aumentando el valor de α bajo las mismas condiciones iniciales, la estabilidad del equilibrio se ve afectada, tal y como se puntualiza dado el umbral de α para el cual el punto de equilibrio es estable, descrito en (4.66). En la Figura 4.7 puede observarse que, tomando $\alpha = 1,55$, la trayectoria obtenida converge a dos puntos alrededor del punto de equilibrio por lo que se obtiene como atractor un 2-ciclo. Tomando $\alpha = 1,3$, se obtiene una trayectoria oscilante de 4 puntos alrededor del punto de equilibrio, es decir, un 4-ciclo. Finalmente, escogiendo $\alpha = 1,7$, la trayectoria obtenida para los precios sigue un comportamiento caótico. En la Figura 4.12 se muestran los Planos de Fases con los puntos de oscilación (verde) alrededor del equilibrio de Cournot-Nash (naranja) que se obtienen al aumentar el valor de la velocidad de ajuste de forma que el sistema no converge al punto de equilibrio sino que tiene un comportamiento oscilante o caótico en cada caso.

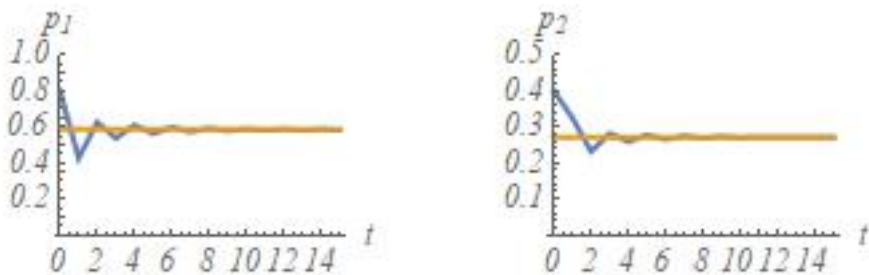


Figura 4.9: Competencia en Precios. Expectativas heterogéneas. Trayectorias solución: $\alpha = 1, \gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 1,5, p_{1,0} = 0,8, p_{2,0} = 0,4$.

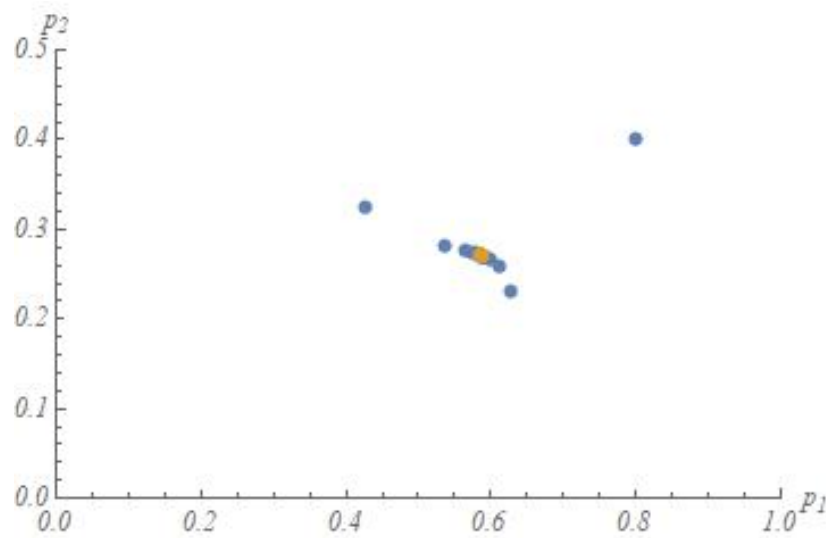
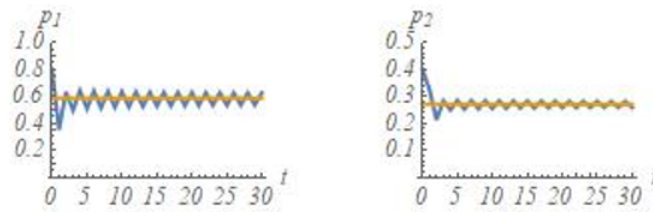
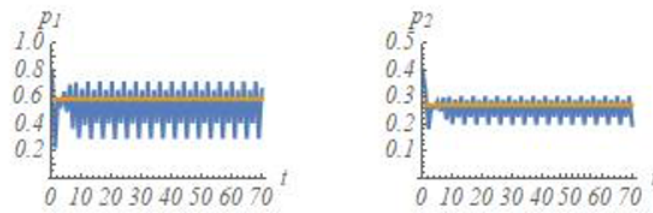


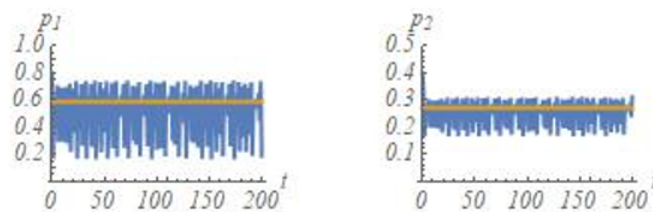
Figura 4.10: Competencia en Precios. Expectativas heterogéneas. Plano de fases: $\alpha = 1, \gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 1,5, p_{1,0} = 0,8, p_{2,0} = 0,4$.



(a) $\alpha = 1,2$



(b) $\alpha = 1,55$



(c) $\alpha = 1,7$

Figura 4.11: Competencia en Precios. Expectativas heterogéneas. Trayectoria solución: $\gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 1,5, p_{1,0} = 0,8, p_{2,0} = 0,4$.

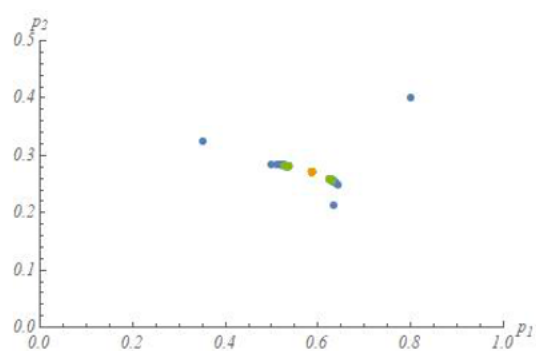
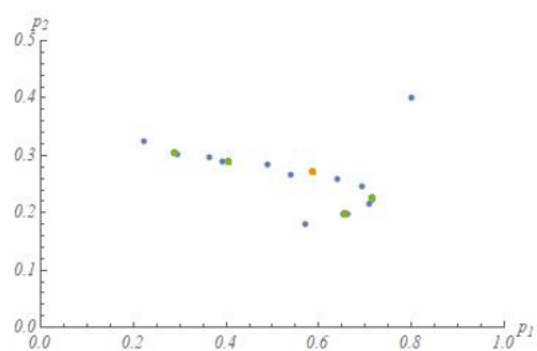
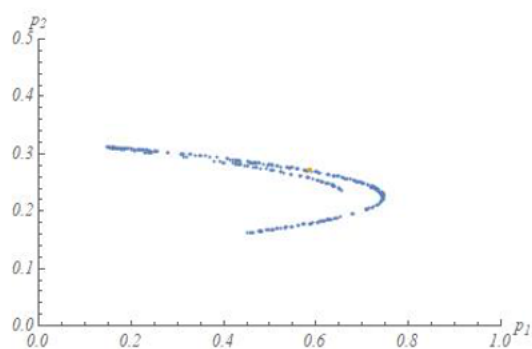
(a) $\alpha = 1,2$ (b) $\alpha = 1,55$ (c) $\alpha = 1,7$

Figura 4.12: Competencia en Precios. Expectativas heterogéneas. Plano de Fases: $\gamma = 0,5, \theta = 0,25, s = 1,5, p_{1,0} = 0,8, p_{2,0} = 0,4$.

Influencia de los parámetros sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio

Al igual que en el caso de la competencia en cantidades, resulta de interés analizar la influencia de los parámetros del modelo sobre umbral de la velocidad de ajuste.

Dados los puntos de equilibrio obtenidos en (4.55), se analiza la estabilidad de ambos puntos, viendo que, en el caso del punto frontera, uno de los valores propios tiene valor absoluto mayor que 1, por lo que el punto es inestable, independientemente de los parámetros s, γ y θ .

Respecto al equilibrio de Bertrand-Nash, a partir de las condiciones de Schur se concluye que el punto es localmente asintóticamente estable si $\alpha \in (0, \alpha_B)$, donde α_B queda definido en (4.66). Por lo tanto, se puede estudiar la variación en el rango de valores de α para los cuales el equilibrio es estable mediante el análisis de la influencia de los parámetros s, γ y θ en el umbral de la velocidad de ajuste, α_B , y evaluar si el intervalo se ve disminuido o aumentado en función de los parámetros.

■ Diferencia de calidad, s .

La influencia del parámetro de diferenciación vertical, s sobre el umbral de velocidad de ajuste, viene determinada como sigue:

$$\frac{\partial \alpha_B}{\partial s} = \frac{4(1 - \gamma^2)[4 - \gamma^2(1 + \theta)]}{[4 + \gamma^2(1 + \theta)]} \frac{(-1)[2 - \gamma^2(1 + \theta)]}{[s[2 - \gamma^2(1 + \theta)] - \gamma(1 - \theta)]^2} < 0 \quad (4.67)$$

Por consiguiente, un aumento en la diferencia de calidad de las variedades provoca una disminución en el umbral de la velocidad de ajuste, α_B , luego, el rango de valores de α para los cuales el equilibrio es estable disminuye.

■ Participación parcial, θ

La participación parcial de la Empresa 1 en el beneficio de la Empresa 2 influencia al umbral de velocidad de ajuste de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_B}{\partial \theta} = & \frac{-4(1 - \gamma^2)\gamma^2}{[4 + \gamma^2(1 + \theta)][(2 - \gamma^2(1 + \theta))s - \gamma(1 - \theta)]} \\ & - \frac{4\gamma^2(1 - \gamma^2)[4 - (1 + \theta)\gamma^2]}{[4 + \gamma^2(1 + \theta)]^2[(2 - \gamma^2(1 + \theta))s - \gamma(1 - \theta)]} \\ & + \frac{4(\gamma^2s - \gamma)(1 - \gamma^2)[4 - \gamma^2(1 + \theta)]}{[4 + \gamma^2(1 + \theta)][(2 - \gamma^2(1 + \theta))s - \gamma(1 - \theta)]^2} \end{aligned} \quad (4.68)$$

La expresión podría cambiar de signo, por lo que es conveniente estudiar la influencia del parámetro mediante la definición de un valor crítico como sigue:

$$\frac{\partial \alpha_B}{\partial \theta} > 0 \iff s > \frac{16 - 8\gamma^2(1 - \theta) - \gamma^4(1 + \theta)^2}{(1 + \theta)\gamma^3[8 - \gamma^2(1 + \theta)]} = \bar{s} \quad (4.69)$$

Dado el valor crítico \bar{s} , puede verse que, mediante transformaciones algebraicas la siguiente expresión es cierta:

$$\bar{s} > 1 \iff 16(1 - \gamma^2) + \gamma^2(1 + \theta)(1 - \gamma)[8 - \gamma^2(1 + \theta)] > 0 \quad (4.70)$$

De manera equivalente, sea $x = \gamma^2(1 + \theta)$, y suponer $\gamma \neq 1$, entonces:

$$\bar{s} < \frac{2}{\gamma} - \gamma \iff (x - 4)^2 < 0 \quad (4.71)$$

Pero la expresión no es cierta, esto es, $\bar{s} > \frac{2}{\gamma} - \gamma$. En el caso $\gamma = 1$, la expresión no sería cierta nunca, procediendo a la misma conclusión. En consecuencia, se cumple $s < \bar{s}$, luego $\frac{\partial \alpha_B}{\partial \theta} < 0$.

Entonces, si el parámetro de participación parcial aumenta, disminuirá el umbral de velocidad de ajuste α_B , por lo que también se verá disminuido el intervalo de valores para los cuales el equilibrio de Bertrand-Nash es estable.

■ Diferenciación horizontal, γ

La influencia del parámetro de diferenciación horizontal sobre el umbral de velocidad de ajuste, α_B , viene determinado como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_B}{\partial \gamma} = & \frac{-8(1 - \gamma^2)\gamma(1 + \theta)}{[4 + \gamma^2(1 + \theta)][(2 - \gamma^2(1 + \theta))s - \gamma(1 - \theta)]} \\ & - \frac{8[4 - \gamma^2(1 + \theta)](1 - \gamma^2)\gamma(1 + \theta)}{[4 + \gamma^2(1 + \theta)]^2[(2 - \gamma^2(1 + \theta))s - \gamma(1 - \theta)]} \\ & + \frac{4[4 - \gamma^2(1 + \theta)](1 - \gamma^2)[1 + 2\gamma s(1 + \theta) - \theta]}{[4 + \gamma^2(1 + \theta)][(2 - \gamma^2(1 + \theta))s - \gamma(1 - \theta)]^2} \\ & - \frac{8\gamma[4 - \gamma^2(1 + \theta)]}{[4 + \gamma^2(1 + \theta)][(2 - \gamma^2(1 + \theta))s - \gamma(1 - \theta)]} \end{aligned} \quad (4.72)$$

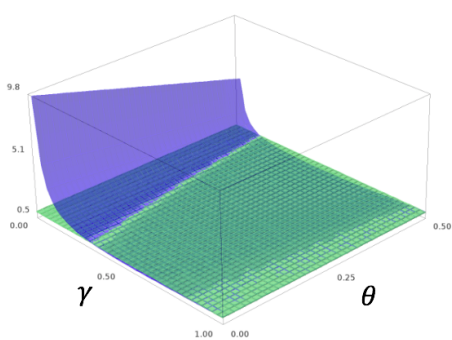
El signo de la derivada podría no estar determinado, por lo que la influencia del parámetro de diferenciación horizontal vendría condicionada por un valor crítico como sigue:

$$\frac{\partial \alpha_B}{\partial \gamma} > 0 \iff s < \bar{s} \quad (4.73)$$

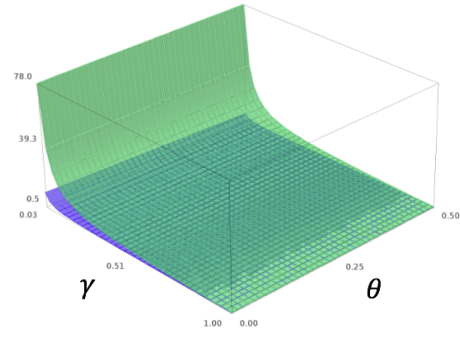
donde

$$\bar{s} = \frac{-\gamma^6 - 17\gamma^4 + \gamma^4\theta^3(1 + \gamma^2) + \gamma^2\theta^2(\gamma^4 + 17\gamma^2 - 16) + 32\gamma^2 - (\gamma^6 + \gamma^4 + 16\gamma^2 + 16)\theta + 16}{2[\gamma^5\theta^3 + 7\gamma^5 - 24\gamma^3 + (9\gamma^5 - 8\gamma^3)\theta^2 + (15\gamma^5 - 32\gamma^3)\theta + 32\gamma]} \quad (4.74)$$

Mediante el lenguaje matemático Sage Math se comprueba que, si bien no puede asegurarse que $\bar{s} > 1$, se puede asegurar que $\bar{s} < \frac{2}{\gamma} - \gamma$:



(a) $f(\gamma, \theta) = \bar{s}$ (azul) y $g(\gamma, \theta) = 1$ (verde)



(b) $f(\gamma, \theta) = \bar{s}$ (azul) y $g(\gamma, \theta) = \frac{2}{\gamma} - \gamma$ (verde)

Figura 4.13: Representación gráfica de \bar{s} y sus valores frontera

De esta forma:

$$\begin{aligned} \text{Si } 1 < s < \bar{s} &\implies \frac{\partial \alpha_B}{\partial \gamma} > 0 \\ \text{Si } \bar{s} < s < \frac{2}{\gamma} - \gamma &\implies \frac{\partial \alpha_B}{\partial \gamma} < 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

Entonces, si la calidad de la variedad no supera el valor crítico \bar{s} , una disminución en la diferenciación horizontal entre las variedades hace que α_B aumente, lo que provoca que el intervalo de valores para los cuales el sistema es estable aumente. Nótese que en el caso de que $\bar{s} < 1$, será inmediato $\partial \alpha_B / \partial \gamma < 0$.

4.5.3. Comparación entre umbrales en competencia en cantidades y en competencia en precios

Una vez analizadas las condiciones de estabilidad, se establece la comparación entre los umbrales obtenidos, α_C y α_B , en competencia en cantidades y en competencia en precios, respectivamente. Esta comparación permite comprobar que la competencia en precios es más inestable que la competencia en cantidades.

Dados los dos umbrales, α_C y α_B , obtenidos en (4.41) y (4.66), entonces:

$$\begin{aligned} \alpha_B - \alpha_C &= \frac{4(4 - (1 + \theta)\gamma^2)}{4 + \gamma^2(1 + \theta)} \left[\frac{1 - \gamma^2}{[2 - (1 + \theta)\gamma^2]s - (1 - \theta)\gamma} - \frac{1}{2s - \gamma(1 + \theta)} \right] \\ &= \frac{4(4 - (1 + \theta)\gamma^2)}{4 + \gamma^2(1 + \theta)} \left[\frac{-\gamma(\gamma s(1 - \theta) + 2\theta - \gamma^2(1 + \theta))}{([2 - (1 + \theta)\gamma^2]s - (1 - \theta)\gamma)(2s - \gamma(1 + \theta))} \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$

Por lo tanto, el signo de la expresión $\alpha_B - \alpha_C$ vendrá determinado por el signo de $-A$ donde

$$A = \gamma s(1 - \theta) + 2\theta - \gamma^2(1 + \theta) \quad (4.77)$$

Suponer $A < 0$, entonces:

$$A < 0 \implies s < \frac{\gamma^2(1 + \theta) - 2\theta}{\gamma(1 - \theta)} \quad (4.78)$$

Sabiendo que, por definición, $s > 1$, entonces la condición obtenida en (4.78) debe ser mayor que

1. Sin embargo, sabiendo que $\gamma \in [0, 1]$, $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$:

$$1 < \frac{\gamma^2(1 + \theta) - 2\theta}{\gamma(1 - \theta)} \iff \gamma(\gamma - 1) + (\gamma^2 + \gamma - 2) > 0 \quad (4.79)$$

Pero la expresión no es cierta, puesto que $\gamma - 1 < 0$ y $\gamma^2 + \gamma - 2 < 0$. Por consiguiente, $\alpha_C > \alpha_B$.

En conclusión, los precios obtenidos bajo competencia en cantidades son mayores que los precios obtenidos bajo competencia en precios lo que hace que las empresas bajo competencia en cantidades tengan mayor poder de mercado y que bajo competencia en precios, la competencia entre las empresas sea más agresiva. En este sentido, una mayor competencia entre las empresas desestabiliza el equilibrio, por lo que el rango de valores de α para los cuales el equilibrio de Nash es asintóticamente estable es mayor bajo competencia en cantidades que bajo competencia en precios, resultando la competencia en precios más inestable.

5. Conclusiones principales del trabajo

El trabajo realizado tiene por objetivo principal introducir la perspectiva temporal en un doupolio que tiene en cuenta diferenciación, tanto horizontal como vertical, así como el nivel de propiedad parcial de la empresa con la variedad de producto de mayor calidad sobre la empresa con la variedad de menor calidad, lo cual permite analizar el efecto de estos aspectos sobre la estabilidad dinámica del equilibrio de Nash, tanto en competencia a la Cournot como en competencia a la Bertrand. Tomando como referencia un modelo estático, se toman expectativas diferentes en función del conocimiento de las empresas. En el caso de que las empresas tengan pleno conocimiento de sus funciones de demanda, se ha analizado la dinámica de un modelo en el cual las expectativas de ambas empresas se basan en funciones de mejor respuesta, en concreto, expectativas homogéneas adaptativas. En el caso de que esta hipótesis se relaje, se definen esquemas de expectativas que implican un menor grado de racionalidad por parte de las empresas. De esta manera, se ha analizado un modelo en el cual las empresas tienen expectativas heterogéneas, donde una de ellas basa sus expectativas en la Regla del Gradiente, mientras que la segunda tiene expectativas ingenuas.

Del análisis del modelo estático de partida, la principal conclusión que se desprende, tanto para competencia en precios como competencia en cantidades, es que un aumento en la participación parcial de una empresa sobre la otra provoca que ambas variedades aumenten su precio, esto es, la estrategia de participación parcial tiene un efecto anticompetitivo, siendo la competencia en precios más eficiente que la competencia en cantidades. Este resultado se ha reproducido en la literatura.

Bajo competencia en cantidades, la diferencia de calidad produce un aumento de precio de la variedad de mayor calidad y el efecto contrario en el caso de la Empresa 2. En relación con la diferenciación horizontal, si los bienes son muy sustitutivos, el precio de la variedad de mayor calidad disminuye, mientras el de menor calidad baja. Sin embargo, si la diferencia de calidad está por encima de un determinado punto crítico, la Empresa 1 aumentará el precio de su producto mientras que para competir, la Empresa 2 disminuirá el precio de su variedad. En el caso de la competencia en precios, la diferencia de calidad produce el mismo efecto sobre los precios que la competencia en cantidades, mientras que en relación con el grado de diferenciación horizontal, cuanto menos sustitutivos sean los productos, las empresas aumentarán el precio de sus variedades, ganando ambas cuota de mercado.

Respecto al análisis dinámico, mientras las dos empresas basan sus expectativas en funciones de mejor respuesta, el equilibrio de Nash es asintóticamente estable, tanto en competencia en cantidades como en competencia en precios. Sin embargo, basta que una empresa (en este caso, la Empresa 1) tome un esquema de expectativas basado en la Regla del Gradiente para que el equilibrio de Nash pierda su carácter atractor. Ésto es un resultado habitual en la literatura.

En este caso, tanto en competencia en cantidades como en precios, existe un umbral de la velocidad de ajuste de la empresa 1, que depende del resto de parámetros del modelo, que distingue una región en la cual el equilibrio de Nash es estable y una región de no estabilidad. Superando ese umbral es el momento en el cual se pierde la estabilidad, dando lugar a comportamientos cíclicos y, llegado un cierto punto, a comportamientos caóticos en ambos tipos de competencia.

Además, analizando la influencia de los parámetros del modelo en el umbral de estabilidad, se ha obtenido que en el caso del parámetro de diferenciación de calidad el efecto que tiene en el umbral es el mismo para ambos tipos de competencia, esto es, una mayor diferenciación de calidad desestabiliza el equilibrio. Sin embargo, la influencia de los parámetros de propiedad parcial y de diferenciación horizontal en el umbral de estabilidad viene condicionada por la diferenciación vertical existente, tanto bajo competencia en precios como en cantidades.

Finalmente, del análisis comparativo de los umbrales en competencia en cantidades y en competencia en precios se desprende que el rango de valores del umbral de la velocidad de ajuste para los cuales el equilibrio de Nash es asintóticamente estable es mayor bajo competencia en cantidades que bajo competencia en precios, lo cual provoca que la competencia en precios sea más inestable.

Bibliografía

- H. Agiza and A. Elsadany. Chaotic dynamics in nonlinear duopoly game with heterogeneous players. *Applied Mathematics and Computation*, 149:843–860, 2004.
- J. Andaluz and G. Jarne. On the dynamics of economic games based on product differentiation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 113:16–27, 2015.
- J. Andaluz and G. Jarne. Stability of vertically differentiated cournot and bertrand-type models when firms are boundedly rational. *Annals of Operations Research*, 238:1–25, 2016.
- J. Bárcena-Ruiz and N. Olaizola. Cost-saving production technologies and partial ownership. *Economics Bulletin*, 15(6):1–8, 2007.
- G.I. Bischi, C. Chiarella, M. Kopel, and F. Szidarovszky. *Nonlinear Oligopolies. Stability and Bifurcations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- L. Cabral. Oligopoly dynamics. *International Journal of Industrial Organization*, 30(3):278–282, 2012.
- A. Elsadany, H Agiza, and E.M. Elabbasy. Complex dynamics and chaos control of heterogeneous quadropoly game. *Applied Mathematics and Computation*, 219:11110–11118, 2013.
- L. Fanti and L. Gori. The dynamics of a differentiated duopoly with quantity competition. *Economic Modelling*, 29, 03 2012.
- C. Fernández Perez, F.J. Vázquez Hernández, and J.M. Vegas Montaner. *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*. Ediciones Paraninfo, Madrid, 2003.
- G. Gandolfo. *Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica*. Tecnos, Madrid, 1976.
- A. Ghosh and H. Morita. Knowledge transfer and partial equity ownership. *The RAND Journal of Economics*, 48:1044–1067, 12 2017.
- D. Gilo and Y. Spiegel. Partial cross ownership and tacit collusion. *The RAND Journal of Economics*, 37(1):81–99, 2006.
- J. Hackner. A note on price and quantity competition in differentiated oligopolies. *Journal of Economic Theory*, 93(2):233–239, August 2000.
- Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 12.1. URL <https://www.wolfram.com/mathematica>. Champaign, IL, 2020.
- T. Puu. Chaos in duopoly pricing chaos. *Chaos Solitons & Fractals*, 1:573–581, 12 1991.
- S. Shelegia and Y. Spiegel. Bertrand competition when firms hold passive ownership stakes in one another. *Economics Letters*, 114(1):136–138, 2012.
- N. Singh and X. Vives. Price and quantity competition in a differentiated duopoly. *The RAND Journal of Economics*, 15(4):546–554, 1984. ISSN 07416261.
- F. Tramontana. Heterogeneous duopoly with isoelastic demand function. *Economic Modelling*, 27(1): 350–357, 2010.
- J. Zhang, Q. Da, and Y. Wang. Analysis of nonlinear doupoly game with heterogeneous players. *Economic Modelling*, 24:138–148, 2007.