Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447 | **Submetido**: 31/03/2021
Aprovado: 27/05/2021

FRACCIONES EN UN MANUSCRITO ESPAÑOL DEL SIGLO XVII

FRACTIONS IN A 17TH CENTURY SPANISH MANUSCRIPT

Antonio M. Oller-Marcén[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8191-3199

RESUMEN

En este trabajo analizamos un manuscrito anónimo español fechado en 1670. Este manuscrito, que se encuentra depositado en la Biblioteca Nacional de España, está dedicado en exclusiva a los números fraccionarios. El análisis realizado se organiza en torno a dos ejes. En primer lugar, se aborda un análisis didáctico centrado en aspectos conceptuales, fenomenológicos y representacionales. Adicionalmente, se realiza la comparativa del contenido del manuscrito con algunas importantes obras matemáticas que circulaban en España en la fecha de su escritura. Pensamos que el análisis de este documento nos puede proporcionar información relevante sobre elementos importantes relacionados con la enseñanza efectiva de los números fraccionarios durante ese periodo de la historia de la educación matemática en España.
Palabras clave: Fracciones. Aritmética. España. Siglo XVII. Manuscrito.

ABSTRACT

In this work we analyze an anonymous Spanish manuscript dated on 1670. This manuscript, which is deposited in the National Library of Spain, is exclusively devoted to fractional numbers. The analysis that we have carried out is organized around two axes. In the first place, a didactic analysis focused on conceptual, phenomenological and representational aspects is approached. Additionally, the content of the manuscript is compared with some important mathematical books that were circulating in Spain at that time. We think that the analysis of this document can provide us with relevant information about important elements related to the effective teaching of fractional numbers during this period in the history of mathematics education in Spain.
Keywords: Fractions. Arithmetic. Spain. 17th century. Manuscript.

[1] Doctor por la Universidad de Valladolid (UVA). Profesor del Centro Universitário de la Defensa de Zaragoza (CUDZ), Zaragoza, España. Ctra. De Huesca s/n, CP: 50090, Zaragoza, España. E-mail: oller@unizar.es

Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT
ISSN: 2447-6447
Submetido: 31/03/2021
Aprovado: 27/05/2021

INTRODUCCIÓN

Tal y como señala Bishop (1991) medir es, junto a contar, localizar, diseñar, jugar y explicar, una de las seis actividades que se encuentran en el origen de la actividad matemática del ser humano y que son, con mayor o menor grado de importancia, comunes a todas las culturas. Por otro lado cabe señalar que estos procesos de medida juegan un papel fundamental en la génesis histórica del número racional, ya sea a través de la medida directa o de la comparación de cantidades de magnitud (Escolano & Gairín, 2005). En consecuencia, no resulta de extrañar que las fracciones aparezcan ya en los textos matemáticos más antiguos que se conservan; si bien el tratamiento y el manejo de los números fraccionarios fue diferente en distintas culturas (Chemla, 1994).

En el Papiro de Rhind, por ejemplo, se dedica bastante espacio al manejo de fracciones unitarias (aquellas cuyo numerador es la unidad), que resultaban cruciales en el sistema de numeración y en los algoritmos operatorios utilizados en esa cultura. De este modo, se pueden encontrar en el texto multitud de problemas descontextualizados, como este, cuyo objetivo sería simplemente la mera ejercitación de destrezas: “Una cantidad, sus dos tercios, su mitad y su séptima parte, tomadas conjuntamente, valen 37. ¿Cuál es esa cantidad?” (Chace, 1979, p. 74).

El uso de un sistema de numeración posicional de base 10, presente ya en China en textos como el *Jiuzhang suanshu* (Kangshen, Crossley & Lun, 1999) y que se extendió por la India y a través del mundo árabe para acabar llegando a Europa durante la Edad Media, estableció un tratamiento conceptual y algorítmico de los números fraccionarios que se mantuvo prácticamente inalterado hasta bien entrado el siglo XIX.

Esta presencia de las fracciones fue especialmente relevante en las abundantes aritméticas comerciales que se publicaron durante los siglos XV y XVI (Salavert Fabiani, 1990). En este contexto comercial resultaba indispensable el uso de las fracciones para poder presentar equivalencias entre multitud de unidades de medida y abordar problemas de intercambio de divisas de gran interés práctico para los mercaderes de la época (Benoit, 1992). De este modo, resulta relativamente difícil encontrar en este periodo textos dedicados a la enseñanza de la aritmética que no presenten las fracciones entre sus contenidos (Madrid, 2016).

Durante las cuatro décadas centrales del siglo XVII, se produjo en España un cierto estancamiento en las ciencias físico-matemáticas dentro del ámbito universitario (Flórez Miguel, 2006). Este fenómeno se vio reflejado, en parte, en la publicación de un menor número de textos matemáticos en comparación con el siglo anterior. Sin embargo, en el ámbito militar y en las instituciones bajo la influencia de los jesuitas y de otras órdenes religiosas se mantuvo una gran actividad relacionada con la enseñanza de las matemáticas (Gómez, 2011). Esta situación explica parcialmente el enorme número de reediciones de obras de autores del siglo anterior como Pérez de Moya (de su *Arithmetica practica y speculatiua*, publicada en 1562, conocemos reediciones al menos de 1569, 1598, 1609, 1631, 1643 y 1675), Ventallol o Santa Cruz; que se extenderían en algunos casos hasta el primer cuarto del siglo XVIII (Oller-Marcén, 2020).

En este trabajo, pretendemos analizar un manuscrito anónimo español, fechado en 1670, que está dedicado en exclusiva a los números fraccionarios. Al tratarse de un texto manuscrito, y teniendo en cuenta la fecha en la que está firmado, es posible que se trate de un documento de trabajo escrito en el ámbito de alguna institución educativa de la época. Por lo tanto, pensamos que su análisis nos puede proporcionar información relevante sobre aspectos importantes relacionados con la enseñanza efectiva de los números fraccionarios durante ese periodo de la historia de la educación matemática en España.

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

De acuerdo con el objetivo marcado anteriormente, este trabajo aborda una investigación de carácter documental (McCulloch, 2004) en la que se realiza un estudio de caso de tipo exploratorio (Lune & Berg, 2017).

El análisis realizado es doble. Por un lado, realizamos un análisis del contenido del manuscrito centrado en las dimensiones del análisis didáctico definido por Rico, Lupiáñez y Molina (2013): aspectos conceptuales, fenomenología y sistemas de representación. Esta técnica de análisis de textos dedicados a la enseñanza de las matemáticas ha sido ampliamente utilizada en la literatura tanto en obras antiguas (Madrid, Maz-Machado, López & León-Mantero, 2020) como actuales (Martínez Juste, Muñoz Escolano & Oller Marcén, 2015).

En lo relativo a aspectos conceptuales, ponemos el foco en primer lugar sobre la posible presencia de los distintos constructos asociados a la fracción: parte-todo, cociente, medida, razón y operador. También estamos interesados en el tratamiento de tópicos importantes relacionados con los números racionales, como son la equivalencia de fracciones y las cuatro operaciones básicas (Gairín & Sancho, 2002; Escolano Vizcarra, 2007).

Respecto a la fenomenología y sistemas de representación, adoptamos algunas de las categorías descritas por Rojas, Flores y Carrillo (2013). Así, en lo relativo a los sistemas de representación estamos interesados en distinguir las situaciones y contextos en que se ponen de manifiesto los distintos significados del número racional, en determinar el sentido dado a los algoritmos y en estudiar las situaciones y contextos que aparecen en las tareas planteadas. Por último, en cuanto a los sistemas de representación, estudiamos la posible utilización de representaciones simbólicas y verbales, así como el posible uso de diagramas.

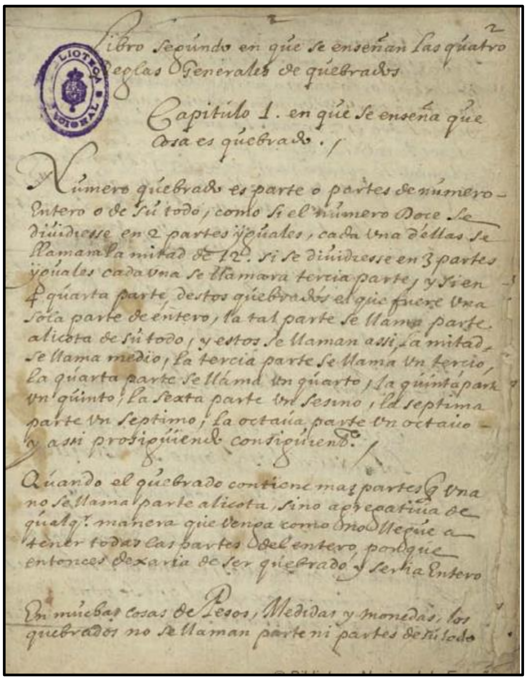
En paralelo con el análisis anterior, también hemos realizado, una comparativa del manuscrito analizado con las secciones relativas a los números fraccionarios de algunas de las obras matemáticas de mayor importancia y más circuladas de entre las publicadas en España durante la segunda mitad del siglo XVI (Madrid, 2016) y la primera mitad del siglo XVII (Dou, 1990). En particular, hemos consultado los siguientes cuatro textos:

- *Libro primero de arithmetica algebratica* (Aurel, 1552).
- *Arithmetica practica y speculatiua* (Pérez de Moya, 1562).
- *El dorado contador* (Santa Cruz, 1603).
- *Arithmetica vniversal* (Zaragoza, 1669).

DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MANUSCRITO Y DE SU CONTENIDO

El manuscrito que vamos a analizar se encuentra depositado en la Biblioteca Nacional de España, con la signatura Mss. 9056. Se trata de un documento de 62 folios en octavo (numerados correlativamente del 2 al 63) con encuadernación muda en pergamino. La caligrafía (ver Figura 1) muestra todos rasgos típicos de la letra bastarda española del siglo XVII.

Figura 1 – Primera página del manuscrito


Libro segundo en que se enseñan las quatro reglas generales de quebrados

Capitulo 1. en que se enseña que cosa es quebrado.

Numero quebrado es parte o partes de numero entero o de su todo, como si el numero doce se dividiesse en 2 partes yguales, cada una dellas se llamara la mitad de 12. si se dividiesse en 3 partes yguales cada una se llamara tercia parte, y si en 4 quarta parte. destos quebrados el que fuere una sola parte de entero, la tal parte se llama parte alicota de su todo, y estos se llaman assi, la mitad se llama medio, la tercia parte se llama un tercio, la quarta parte se llama un quarto, la quinta parte un quinto, la sexta parte un sesmo, la septima parte un septimo, la octava parte un octavo y assi prosiguiendo consiguiente.

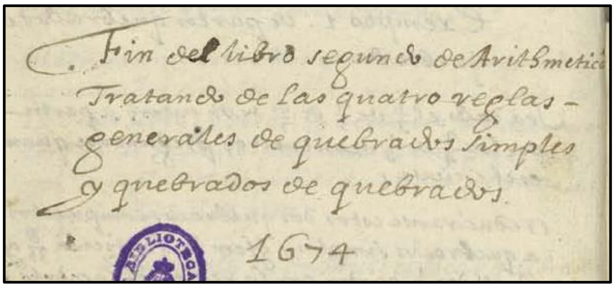
Quando el quebrado contiene mas partes que una no se llama parte alicota, sino agregativa de qualquier manera que venga como no llegue a tener todas las partes del entero, porque entonces dexaria de ser quebrado y seria entero

En muchas cosas de pesos, medidas y monedas, los quebrados no se llaman parte ni partes de su todo

Fuente: Biblioteca Nacional de España, Mss. 9056, f. 2r

El manuscrito comienza con el título: *Libro segundo en que se enseñan las quatro reglas generales de quebrados*. No aparece indicación alguna sobre el autor del mismo, pero en el colofón del manuscrito (Figura 2) vemos que está fechado en 1674.

Figura 2 – Colofón del manuscrito


Fin del libro segundo de Arithmetica
Tratando de las quatro reglas generales de quebrados simples y quebrados de quebrados
1674

Fuente: Biblioteca Nacional de España, Mss. 9056, f. 63v

El contenido se organiza en torno a 19 capítulos de extensión variable, aunque generalmente breve. El Cuadro 1 recoge los títulos de cada uno de estos capítulos, así como los folios a lo largo de los que se desarrollan sus contenidos.

Como podemos observar, es posible agrupar y secuenciar los contenidos del manuscrito del siguiente modo:

- Aspectos elementales (definición, origen, modo de escribir, etc.): Capítulos 1 a 3.
- Manejo de fracciones equivalentes: Capítulos 4 a 6.
- Fracción de una cantidad: Capítulos 7 y 8.

- Operaciones con fracciones: Capítulos 9 a 13.
- Fracciones de fracciones: Capítulos 14 a 19.

Los contenidos que se presentan en el manuscrito son habituales en los textos de aritmética españoles que incluyen las fracciones (Madrid, 2016). Se aprecian, sin embargo, algunas especificidades al respecto.

Por ejemplo, resulta interesante observar que no se explica cómo comparar dos fracciones, algo que sí presentan Pérez de Moya en su *Arithmetica practica y speculatiua* (Pérez de Moya, 1562, pp. 155-157) o Marco Aurel en su *Libro primero de arithmetica algebratica* (Aurel, 1552, ff. 12r-12v). Sin embargo, no aparece este contenido en el *Dorado contador* de Santa Cruz (1603) ni en la *Arithmetica vniversal* de Joseph Zaragoza (1669), por citar dos ejemplos. Así pues, la comparación de fracciones no estaba siempre presente en los tratados de aritmética circulantes y el manuscrito lo omite, al igual que hacen textos más próximos a su época.

Cuadro 1 – Títulos y extensión de los capítulos

	Título	**Folios**
Capítulo 1	*En que se enseña que cosa es quebrado*	2r-2v
Capítulo 2	*En que se enseña numerar los quebrados y como se escriben*	2v-4r
Capítulo 3	*En que se declara el origen y criacion de los numeros quebrados*	4r-5v
Capítulo 4	*En que se enseña el modo de abreviar los quebrados a su menor denominacion*	5v-10r
Capítulo 5	*En que se enseña la regla general de abreviar quebrados*	10r-12v
Capítulo 6	*En que se enseña regla para aumentar la denominacion a los quebrados*	12v-14r
Capítulo 7	*En que se enseña regla para tomar la parte que se quisiere de qualquier quebrado*	14r-16r
Capítulo 8	*En que se enseña regla para buscar el valor de los quebrados en otra especie y algunos la llaman regla sutil y curiosa*	16r-20r
Capítulo 9	*En que se enseña la regla general de sumar quebrados*	20r-29v
Capítulo 10	*En que se enseña la regla general de restar quebrados*	30r-36r
Capítulo 11	*En que se enseña la regla general de multiplicar quebrados*	36v-46r
Capítulo 12	*En que se enseña la regla general de partir quebrados vulgares o simples*	46v-55v
Capítulo 13	*Que trata delas pruebas de las quatro reglas generales de quebrados*	56r-57v
Capítulo 14	*En que se trata de la difinicion de quebrado de quebrado*	57v-58r
Capítulo 15	*En que se pone regla general para reducir los quebrados de quebrados, a quebrados simples*	58r-60v
Capítulo 16	*Que trata de la regla general de sumar quebrados de quebrados*	60v-61v

Capítulo 17	*Que trata de la regla general de restar quebrados de quebrados*	61v-62r
Capítulo 18	*Que trata de la regla general de multiplicar quebrados de quebrados*	62v-63r
Capítulo 19	*Que trata de la regla general de partir quebrados de quebrados*	63r-63v

Fuente: Elaboración propia

Otro aspecto a reseñar está relacionado con la atención prestada a las fracciones de fracciones y a las operaciones entre ellas. La distinción entre "quebrado simple" y "quebrado de quebrado" (también llamados "quebrados compuestos") era común sobre todo en el siglo XVI. Aparece en las obras españolas ya citadas de Marco Aurel y de Pérez de Moya. Sin embargo, lo que resulta insólito es la relativa atención que se presta a la realización de las cuatro operaciones con estos "quebrados compuestos". Ya Marco Aurel (1552, ff. 10v-11r) enseña a "reducir quebrado de quebrado a quebrado simple" y no les presta más atención. Lo mismo hace mucho después Zaragoza (1669, p. 29). Pérez de Moya (1562, pp. 209-210) dedica una breve sección al "orden que se ha de tener para obrar con estos quebrados de quebrados en las reglas generales de Arithmetica" en la que indica el modo de proceder y propone un ejemplo de suma y uno de resta. El manuscrito que nos ocupa sigue una idea similar, pero propone más ejemplos y relativos a las cuatro operaciones.

Por lo que respecta a la secuenciación, esta tampoco resulta del todo inusual aunque contiene algunos aspectos propios. Es reseñable, por ejemplo, la ubicación del Capítulo 8 que solía incluirse generalmente antes del trabajo con fracciones equivalentes. En algunas ocasiones, como es el caso del *Dorado contador*, la simplificación de fracciones se presentaba después de haber presentado las cuatro operaciones; mientras que en este manuscrito las precede.

ASPECTOS CONCEPTUALES

Significados del concepto de fracción

El autor del manuscrito define las fracciones del siguiente modo (f. 2r): "Número quebrado es parte o partes de número entero o de su todo, como si el número Doce se dividiese en 2 partes yguales, cada una dellas se llama la mitad". Esta definición está vinculada al constructo de parte-todo.

Algo más adelante, en el Capítulo 3, se declara que (f. 4v): "Los quebrados se engendran y crian de la partición o división y de ella tienen su origen cuando se parten números enteros por otros números enteros mayores". Es decir, se asigna a la fracción un significado de cociente.

Sin embargo, páginas después se presenta la idea de fracción como operador. Así, en el Capítulo 7 se aborda el cálculo de una fracción de otra presentando ejemplos como el siguiente (f. 15v): “quanto es los 13/16 de 17/24”. En el Capítulo 8, se aborda el cálculo de una fracción de una determinada cantidad (de dinero, de mercancía, etc.). Un ejemplo de este tipo de situaciones es el siguiente (f. 17v): “Los 5/9 de una arroba quantas libras hacen”.

Resulta muy interesante señalar que este tipo de situaciones son relacionadas por el autor con la Regla de tres (f. 16r): “se saca de la Regla de tres y aunque allí avia de ser su lugar la pongo aquí por la necesidad que hay della para buscar y sacar el valor de los quebrados”. Así pues, aunque no de forma demasiado explícita, encontramos rasgos de la fracción con significado de razón. Esta idea se ve algo más clara en ejemplos como el siguiente (f. 19r): “A razón de a 39 reales la bara quanto valen 5/8 de bara de paño”.

La relación directa y explícita entre el constructos de parte-todo y el de cociente se encuentra también de manera idéntica en la *Arithmetica practica y speculatiua*, asociando la idea de parte-todo a la definición y la de cociente al origen de las fracciones. En la *Arithmetica vniversal* ambas ideas se presentan juntas (Zaragoza, 1669, p. 24): “el quebrado es una, ò muchas partes de aquellas, en que se imagina dividida una unidad, y nace de la división de un numero menor por otro maior”. señalado anteriormente es común en los textos consultados. Por ejemplo, Santa Cruz (1603, f. 54v) señala que “quebrado es vna parte ò partes de la cosa entera”. Sin embargo, Marco Aurel solo presenta el constructo de cociente y Santa Cruz únicamente el de parte-todo.

El uso de la fracción como operador está presente también en los cuatro documentos analizados. Sin embargo, la mención explícita de la Regla de tres en este ámbito el inusual. Debe tenerse en cuenta a este respecto que, en los tratados de aritmética, las fracciones se solían presentar generalmente antes de las secciones dedicadas a la proporcionalidad y sus aplicaciones.

Fracciones equivalentes

El autor del manuscrito dedica tres breves capítulos al trabajo con fracciones equivalentes, dos de ellos se dedican a la simplificación de fracciones y el tercero al proceso inverso. El enfoque adoptado en cada uno de los dos capítulos dedicados a la simplificación es muy diferente.

En el Capítulo 4 se aborda la simplificación a partir de la idea de dividir numerador y denominador por un mismo número. En este caso, se da una serie de reglas para tratar de buscar ese posible divisor común por tanteo. En concreto se indica (f. 6r) que dicho divisor común “no puede ser mayor que el numerador" o que "no puede ser mayor que la diferencia entre el numerador y el denominador".

En el Capítulo 5, sin embargo, se presenta el algoritmo de Euclides para la obtención del máximo común divisor del numerador y del denominador. El autor lo presenta en los siguientes términos (f. 10v):

> Primeramente se a de partir el denominador del quebrado que se quisiere abreviar por su numerador, y si algo sobrare será nuevo partidor por el qual se partirá el partidor antecedente [...] y assi continuar en ir partiendo [...] hasta hallar un partidor que lo acabe de partir justamente sin que sobre nada y el tal partidor será el commun partidor que se busca

Por otro lado, la regla para aumentar los términos de una fracción dada se presenta de forma independiente en el Capítulo 6 señalando explícitamente que (ff. 12v-13r) "esta regla es la contraria de la abreviar los quebrados".

De los cuatro textos utilizados para la comparación, el único que presenta explícitamente la idea de aumentar los términos de una fracción es la *Arithmetica practica y speculatiua*. El resto de obras consultadas solo se centran en la simplificación, de un modo similar al del manuscrito analizado. Por otra parte, Zaragoza aborda este contenido únicamente a partir del cálculo del máximo común divisor con el algoritmo de Euclides, sin comentar la posibilidad de realizar ningún tipo de tanteo o de estudio de posibles divisores del numerador y del denominador.

Tratamiento de las cuatro operaciones

Las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) se desarrollan a lo largo de los Capítulos 9 a 13. El material se presenta según una estructura similar en los cuatro casos, distinguiendo una serie de casos posibles (que el autor denomina *diferencias*) según la naturaleza de los números intervinientes en la operación (fracción, entero o mixto), si tienen los mismos denominadores, etc.

Cuadro 2 – Casos de las distintas operaciones

Caso	Suma	Resta	Multiplicación	División
1	fracción + entero	mixto – entero	entero × fracción	entero : fracción (o viceversa)
2	mixto + entero	entero – fracción	entero × mixto	mixto : entero (o viceversa)
3	fracción + fracción con el mismo denominador	entero – mixto	fracción × fracción	fracción : fracción con el mismo denominador

4	mixto + mixto con el mismo denominador	fracción – fracción (mismo denominador)	mixto × fracción	mixto : fracción o mixto : mixto (o viceversa) con el mismo denominador
5	fracción + fracción con distintos denominadores	fracción – fracción con distinto denominador	mixto × mixto	fracción : fracción con distintos denominadores
6	tres o más sumandos con distintos denominadores	mixto – fracción		mixto : fracción (o viceversa) con distintos denominadores
7	mixto + mixto con distintos denominadores	mixto – mixto		mixto : mixto con distintos denominadores

Fuente: Elaboración propia

En concreto, el autor del manuscrito distingue siete casos para la suma y la resta, cinco casos para la multiplicación y siete casos para la división. En el Cuadro 2 presentamos los casos considerados en cada operación según el orden en que el autor los presenta.

Esta distinción sistemática en multitud de casos, cada uno de los cuales recibe un tratamiento propio, no era extraña en la época. Por ejemplo, Pérez de Moya sigue el mismo esquema pero presenta en todas las operaciones (excepto en el producto) un menor número de casos y en un orden diferente. En concreto, detalla seis casos para la suma y cinco para cada una de las restantes operaciones. En el Cuadro 3 mostramos a modo de ejemplo la comparativa para la suma.

Cuadro 3 – Casos de la suma en Pérez de Moya (1562) y en nuestro manuscrito

Caso	**Manuscrito**	**Pérez de Moya**
1	fracción + entero	fracción + fracción
2	mixto + entero	entero + fracción
3	fracción + fracción con el mismo denominador	entero + mixto
4	mixto + mixto con el mismo denominador	mixto + fracción
5	fracción + fracción con distintos denominadores	mixto + mixto
6	tres o más sumandos con distintos denominadores	tres o más sumandos

7	mixto + mixto con distintos denominadores	

Fuente: Elaboración propia

Como podemos apreciar, no solo los casos considerados son diferentes en general, sino que los que coinciden se presentan en un orden diferente. Es muy destacable el hecho de que en el manuscrito se distinguen casos diferentes según si las fracciones tienen denominador común o no. Este fenómeno también se da en la resta, pero no (por razones obvias) en la multiplicación ni en la división.

Para tratar de entender los posibles motivos de estas diferencias, es interesante observar el caso de la multiplicación (Cuadro 4).

Cuadro 4 – Casos de las distintas operaciones

Caso	Manuscrito	Pérez de Moya
1	entero × fracción	fracción × fracción
2	entero × mixto	entero × fracción
3	fracción × fracción	entero × mixto
4	mixto × fracción	mixto × fracción
5	mixto × mixto	mixto × mixto

Fuente: Elaboración propia

Como podemos observar, Pérez de Moya comienza presentando el producto de fracciones y después aborda los otros casos considerando los enteros como fracciones de denominador 1 y convirtiendo los mixtos en fracciones. Es decir, comienza presentando una regla "general" y continua reduciendo el resto de casos a esa regla. Por el contrario, el manuscrito comienza presentando casos que podrían considerarse casos más sencillos puesto que la multiplicación, cuando uno de los factores es entero, mantiene el significado de suma reiterada.

Sin embargo, al analizar detenidamente el contenido del manuscrito observamos que la sección dedicada a la multiplicación comienza presentando una regla general para la multiplicación, señalando que "aunque alguna dellas [de los factores] no tenga quebrado se pondrá […] dándole la unidad por denominación" (f. 36v). Así pues, sucede que lo que el manuscrito presenta como caso 3, vuelve a ser lo que se ha descrito como regla general al inicio del capítulo. Curiosamente, esta reiteración no sucede al abordar la división, cuyo capítulo no comienza con el enunciado de una regla general.

En cualquier caso, no todos los autores optan por este tipo de presentación basada en distinguir casos. En ocasiones se encuentran tratamientos mucho más sintéticos que se reducen a la presentación de reglas generales. Por ejemplo, para el caso de la suma (Zaragoza, 1669, p. 30) dice: “reduzganse los quebrados a un comun denominador, y sumense los numeradores […] Los compuestos se reducen a simples, para sumarles”. Aunque podría pensarse que este enfoque más breve sería el propio de textos más modernos, lo cierto es que Marco Aurel (1552, f. 13r) ya presenta esta única regla para la suma sin distinguir ningún tipo de casos e indicando explícitamente que “assi haras con los otros avnque aya mas de dos quebrados”.

En una posición intermedia se encuentra el *Dorado contador*. Si bien la obra de Santa Cruz trata de forma separada la suma de fracciones con igual o con distinto denominador y se consideran algunos casos especiales en las distintas operaciones, no encontramos en este libro una enumeración sistemática de casos.

FENOMENOLOGÍA

En cuanto a aspectos fenomenológicos, debemos recordar que el principal (aunque no el único) significado asignado al concepto de fracción es el de cociente. En consecuencia los únicos 8 ejercicios contextualizados que aparecen en los capítulos 4 y 5, relacionados con la simplificación de fracciones, aparecen siempre vinculados a un contexto de reparto equitativo de una cierta cantidad. Por ejemplo (f. 12r): “Partir 333 Reales entre 592 pobres preguntase a quanto cave cada uno?”.

Asociados al significado de fracción como operador, encontramos que todos los ejercicios que se plantean en el capítulo 8 aparecen en un contexto metrológico en el que se requiere generalmente un cambio de unidades de medida o un paso de unidades a subunidades. Tal es el caso del siguiente ejemplo (f. 17r): “los 7/12 de un real quantos marevedis hacen” para cuya resolución el autor hace uso de que 1 real equivalía a 34 maravedís.

Por lo que respecta a las operaciones elementales con fracciones, observamos desde el punto de vista fenomenológico un tratamiento claramente diferenciado de la suma y resta por una parte y de la multiplicación y división por la otra. De este modo, los 36 ejemplos que se plantean para la suma y resta de fracciones (17 y 19 ejemplos, respectivamente) aparecen de forma totalmente descontextualizada; de manera que los datos de los problemas son siempre números fraccionarios abstractos. Sin embargo, en lo que respecta a la multiplicación y la división sí que encontramos ejemplos planteados de forma contextualizada, muy relacionados nuevamente con el significado de cociente.

Para la multiplicación el autor presenta hasta 29 ejemplos diferentes. Casi la mitad de ellos, un total de 14, se plantean de forma totalmente descontextualizada. Los 15 ejemplos restantes involucran en todos los casos el cálculo del precio de una cierta cantidad de mercancía a partir del precio unitario, como en el siguiente (f. 40r): "A razón de a 1/2 Real la libra de carnero quanto costara 1/2 libra?".

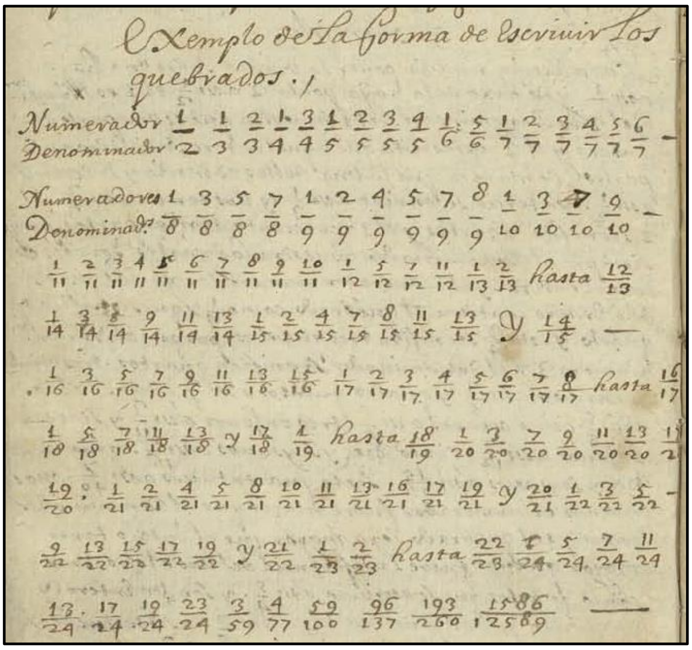
En el caso de la división, se proponen 28 ejemplos. De ellos, solo 3 se presentan en un contexto puramente matemático. Los restantes se corresponden con dos contextos claramente diferenciados. El más frecuente es el del cálculo de un precio unitario (22 ejemplos) en el que se conoce el precio de una cierta cantidad de mercancía y se solicita el precio por unidad, como en el problema siguiente (f. 52r): "Comprando 5/6 de @ de paño por 5/8 de Ducado pregunto a quanto sale la ana?". Por último, encontramos 3 ejemplos en los que la división se plantea en una situación de reparto de una cierta cantidad de dinero entre varias personas. Esto implicaría, si el reparto es a partes iguales, que el divisor debería ser siempre un entero. Sin embargo encontramos dos enunciados como el siguiente, en los que se abordan repartos no equitativos y en los que el autor del manuscrito se ve obligado a introducir una aclaración (f. 54r): "Sean dados 10 Reales y 1/8 a partir entre 4 compañeros y 1/2 a saber entre 5 compañeros y que los 4 dellos lleven partes iguales, pero que el otro lleve la 1/2 de lo que cave a uno de los 4. Preguntase cuanto cave a cada uno?".

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

La notación utilizada para las fracciones es descrita por el autor del manuscrito del siguiente modo (ff. 2r-3v): "se escriben […] con dos números y una raya entre ellos, el uno de los quales se llama numerador y es el que se pone siempre sobre la raya y el otro se llama denominador o divisor que es el que se pone debaxo de la raya". Los números mixtos se escriben yuxtaponiendo la parte entera y fraccionaria.

No encontramos en el manuscrito el sistema de representación decimal. De los documentos utilizados para la comparación, solo la *Arithmetica vniversal* de Joseph Zaragoza dedica espacio a las "partes décimas" (Zaragoza, 1669, pp. 36-44).

Figura 3 – Ejemplos de notación fraccionaria

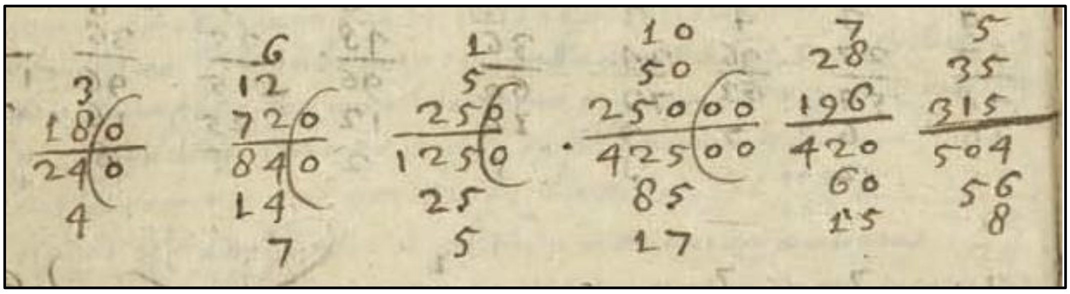


Fuente: Biblioteca Nacional de España, Mss. 9056, f. 3v

También se proporcionan instrucciones relativas a la representación verbal de las fracciones (ff. 3v-4r): "se pronuncian nombrando primero el numero del numerador y luego el numero del denominador acabad con estas dos silavas 'avos' como para explicar este quebrado 12/12 se dice que es doce diez y siete avos".

A lo largo del manuscrito se pueden encontrar algunas representaciones asociadas a la aplicación de algoritmos u operaciones concretas que involucran elementos gráficos. En algunos casos, estas notaciones recogen e ilustran un procedimiento concreto. En la Figura 4, por ejemplo, se aprecian los pasos dados para simplificar fracciones.

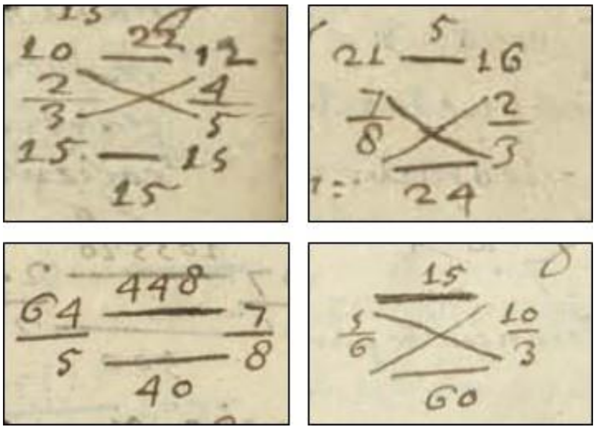
Figura 4 – Representación asociada a la simplificación de fracciones



Fuente: Biblioteca Nacional de España, Mss. 9056, f. 9v

En otras ocasiones, se trata de visualizar los algoritmos de las distintas operaciones elementales. Así, en la Figura 5 podemos ver como se ilustran los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división.

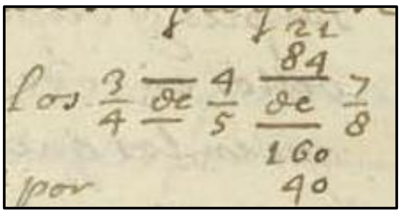
Figura 5 – Representaciones asociadas a las operaciones con fracciones



Fuente: Biblioteca Nacional de España, Mss. 9056, ff. 23r, 31r, 41r y 53r

Por último, al abordar el manejo de las fracciones de fracciones, como ya hemos comentado, el autor del manuscrito propone que estas se conviertan siempre en fracciones simples. Este proceso de conversión lleva asociada una representación que mostramos en la Figura 6.

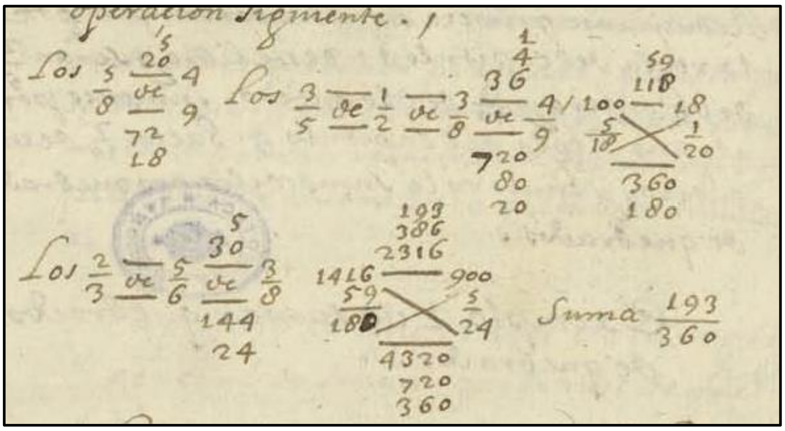
Figura 6 – Representación asociada a las fracciones de fracciones



Fuente: Biblioteca Nacional de España, Mss. 9056, f. 59v

Todas estas representaciones gráficas se utilizan constantemente a lo largo del manuscrito. Es decir, no se plantean solo como una estrategia para recordar los distintos procesos y algoritmos, sino que prácticamente se diría que forman parte de ellos.

Figura 7 – Resolución de un problema

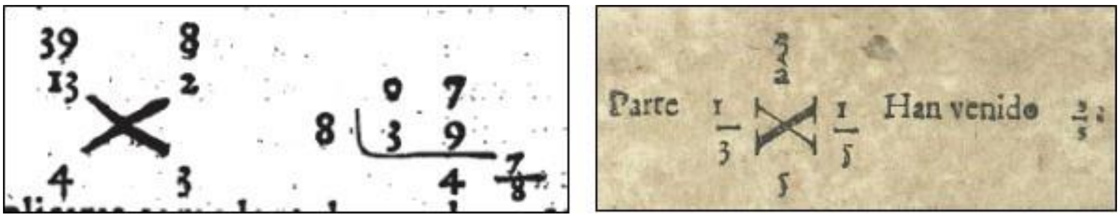


Fuente: Biblioteca Nacional de España, Mss. 9056, f. 61v

Como ejemplo de nuestra afirmación anterior podemos ver en la Figura 7 la solución que se propone, ya casi al final del texto, al siguiente problema (f. 61r): "Sean dados a sumar los 5/8 de 4/9 de un entero con los 2/3 de 5/6 de 3/8 de otro entero y con los 3/5 de la 1/2 de 3/8 de 4/9 de un entero, preguntase quanto será la suma".

Estos sistemas de representación gráficos son más ricos que en documentos impresos de la época por la mayor flexibilidad que proporciona un texto manuscrito. No aparece nada parecido, por ejemplo, en la obra de Zaragoza ni en la de Marco Aurel. En la *Arithmetica practica y speculatiua* aparecen representaciones similares, pero muy imperfectas; mientras que en el *Dorado contador* sí que aparecen representaciones similares mucho más satisfactorias desde el punto de vista tipográfico (Figura 8).

Figura 8 – Representaciones gráficas asociadas a la división en textos impresos



Fuente: (Pérez de Moya, 1562, p. 200) izquierda y (Santa Cruz, 1603, f. 100v) derecha

COMENTARIOS FINALES

Como hemos señalado, no aparece en el texto ninguna indicación sobre el autor del manuscrito. Tampoco aparece ninguna referencia que pueda indicar que el manuscrito forme parte de una obra más amplia. En ese sentido, que el título comience con "Libro segundo" y que se aborden únicamente los números fraccionarios parecería indicar la existencia de un primer libro que podría haber tratado sobre la numeración y las operaciones con enteros, tal y como era común en las aritméticas de la época. Desafortunadamente, tras una revisión del Inventario General de Manuscritos de la Biblioteca Nacional y una búsqueda en el catálogo de la citada biblioteca no hemos sido capaces de encontrar ningún documento que pudiera estar relacionado con este.

Como consecuencia de todo lo anterior, se pueden plantear distintas hipótesis acerca de la naturaleza del documento analizado. Podríamos encontrarnos ante parte del manuscrito original de una obra que no llegó a publicarse o que no se conserva. También podría tratarse de un documento personal compuesto con el objetivo de dictar un curso de matemáticas, de modo que tomaría elementos de textos existentes pero con un cierto grado de elaboración personal del autor. Finalmente, podría tratarse de las notas manuscritas de un alumno redactadas como fruto del seguimiento de un curso. Respecto a estas dos últimas opciones, hay que tener en cuenta que, como señalan Alcaide González y Capel Sáez (2000) la tradición de dictar y copiar lecciones se mantuvo en España hasta bien entrado el siglo XVIII. De hecho, algunos elementos parecerían indicar que se trataría de un documento vinculado al ámbito militar. En varios de los problemas contextualizados incluidos en el texto se hace referencia a soldados, incluso en un contexto de campaña. Un ejemplo muy claro es el siguiente (f. 10r): “Partir 315 berjas de trinchera entre 756 soldados para que lo trasladen y se fortifiquen”

En una comparación general de los contenidos con las cuatro obras consideradas, pese a las similitudes evidentes que cabría esperar, hemos constatado algunas diferencias significativas en el tratamiento de estos contenidos tanto a nivel conceptual como de detalle, secuenciación, etc. De hecho, pensamos que las diferencias detectadas son lo suficientemente importantes como para concluir que el material incluido en el manuscrito es original. Las mayores similitudes, como ha quedado de manifiesto en las secciones anteriores, se encuentran con la *Arithmetica practica y especulatiua* de Pérez de Moya, lo que no es de extrañar teniendo en cuenta la gran influencia de esta obra en la historia de las matemáticas en España (Meavilla Seguí, 2005).

Es reseñable la riqueza de significados del número racional presentes en el documento. Tan solo está ausente de forma explícita el significado de medida. No obstante, este está en cierto modo implícito en la presencia de los significados de operador y de razón, muy vinculados a los contextos de medida de magnitudes (Gairín, 1998). Estos significados, además, aparecen estrechamente ligados a situaciones y contextos concretos. Esta variedad contrasta en cierto modo con la relativa escasez de significados relacionados con las operaciones entre números racionales. La suma y la resta aparecen desprovistas de cualquier significado concreto.

La multiplicación y la división aparecen mayoritariamente vinculadas a situaciones comerciales en las que calcular precios unitarios o emplearlos para obtener el precio de cierta cantidad de mercancía.

La distinción de múltiples casos a la hora de presentar los algoritmos de las cuatro operaciones básicas puede haber sido una decisión de carácter didáctico del autor del manuscrito. Existe obras anteriores (Aurel, 1552) y contemporáneas (Zaragoza, 1669) en las que se adopta un tratamiento conjunto sin distinguir casos. Es posible que al autor optara por dar un tratamiento sistemático similar al del influyente Pérez de Moya, pero incluyendo modificaciones bien en el número de casos considerados, bien en el orden. Las decisiones tomadas por el autor del manuscrito a este respecto parecen estar orientadas a presentar inicialmente los casos más sencillos.

Debemos señalar que, al tratarse de un manuscrito, encontramos una mayor riqueza de representaciones de carácter gráfico en comparación con las obras impresas. Estos diagramas nos proporcionan una interesante e importante información sobre el modo en que se aplicaban de forma efectiva "con la pluma" los procedimientos y algoritmos asociados a las fracciones.

En definitiva pensamos que el estudio de este manuscrito, que no había sido analizado anteriormente, proporciona una visión muy cercana del modo en que se planteaba la enseñanza de los números racionales en la segunda mitad del siglo XVII español. Aunque el estudio de obras impresas es evidentemente de gran importancia, las diferencias constatadas entre este manuscrito e importantes libros de la época, pone de manifiesto la necesidad de complementar el análisis de manuales con el de otras fuentes históricas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del Grupo S60_20R (Investigación en Educación Matemática) reconocido por el Gobierno de Aragón.

REFERENCIAS

Alcaide González, R., & Capel Sáez, H. (2000). *El curso de Cosmografía de Lucuce en las academias de matemáticas militares: el problema de los textos científicos y el desarrollo de la ciencia española del siglo XVIII*. Barcelona: UB.

Aurel, M. (1552). *Libro primero de arithmetica algebratica*. Valencia: Ioan de Mey.

Benoit, P. (1992). Arithmétiques commerciales et comptabilités dans la France médiéval. En:

P. Benoit, K. Chemla & J. Ritter, J. (Eds.). *Historie de fractions, fractions d'histoire* (pp. 307-323). Basel: Birkhäuser.

Bishop, A.J. (1991). *Mathematical enculturation*. Dordrecht: Kluwer.

Chace, A.B. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus*. Reston, EEUU: National Council of Teachers of Mathematics.

Chemla, K. (1994). Some ancient solutions to the problem of fractioning numbers. En I. Grattan-Guiness (Ed.). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* (pp. 160-166). Londres: Routledge.

Dou, A. (1990). Las Matemáticas en la España de los Austrias. En L. Español (Coord.). *Estudios sobre Julio Rey Pastor: (1888-1962)* (pp. 151-172). Logroño: Instituto de Estudios Riojanos.

Escolano Vizcarra, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza. Zaragoza (España). Recuperado de https://zaguan.unizar.es/record/84666/files/?ln=es.

Escolano, R., & Gairín, J.M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*(1), 17-35.

Flórez Miguel, C. (2006). Ciencias, siglos XV-XVII. En: L.E. Rodríguez San Pedro Bezares (Coord.). *Historia de la Universidad de Salamanca* (pp. 409-431). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Gairín, J.M. (1998). Números racionales positivos: reflexiones sobre la instrucción. *Aula*, *10*, 41-64.

Gairín, J.M. & Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos*. Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Revista Épsilon*, *28*(77), 9-22.

Kangshen, S., Crossley, J.N., & Lun, A.W.-C. (1999). *The nine chapters on the mathematical art*. Beijing: Oxford University Press.

Lune, H., & Berg, B. L. (2017). *Qualitative Research Methods for the Social Sciences*. Essex: Pearson.

Madrid, M.J. (2016). *Los libros de aritmética en España a lo largo del siglo XVI*. (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca. Salamanca (España). Recuperado de http://hdl.handle.net/10366/131718.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., López, C. y León-Mantero, C. (2020). Old arithmetic books: Mathematics in Spain in first half of the Sixteenth-Century. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(1), em0553.

Martínez Juste, S., Muñoz Escolano, J. M., & Oller Marcén, A.M. (2015). Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la LOGSE-LOE-LOMCE. *Avances de investigación en educación matemática*, *8*, 95-115.

Meavilla Seguí, V. (2005). Historia de la Educación Matemática en España: el contenido algebraico de la Arithmetica practica, y specvlatiua de Juan Pérez de Moya (ca. 1512–1596). *Revista Brasileira de História da matemática*, *5*(9), 19-35.

McCulloch, G. (2004). *Documentary research in education, history, and the social sciences*. New York: Routledge/Falmer.

Oller-Marcén, A.M. (2020). El Tyrocinio Arithmetico de Maria Andres Casamayor de la Coma. En: J. Bernués & P.J. Miana (Eds.). *Tyrocinio Arithmetico* (pp. 105-127). Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.

Pérez de Moya, J. (1562). *Arithmetica practica y speculatiua*. Salamanca: Mathias Gast.

Rico, L., Lupiáñez, J.L., & Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.

Rojas, N., Flores, P, & Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de investigación en Educación Matemática*, *4*, 47-64.

Salavert Fabiani, V. (1990). Introducción a la historia de la aritmética práctica en la corona de Aragón en el siglo XVI. *Dynamis: Acta Hispanica ad Medicinae Scientiarumque Historiam Illustrandam*, *10*, 63-91.

Santa Cruz, M.G. de (1603). *El dorado contador*. Sevilla: Bartholome Gomez.

Zaragoza, J. (1669). *Arithmetica vniversal*. Valencia: Geronimo Vilagrasa.