

## ANEXOS

### 9. OPERACIONES INTERMEDIAS DE TRANSFORMACIÓN DE LOS MODELOS

#### 9.1. Modelo de Anderson y Loewenthal

Según Anderson y Loewenthal (6), la pérdida de potencia producida en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto debida al deslizamiento que se produce entre los dientes en contacto viene determinada por la siguiente expresión:

$$P_S(x) = C_3 \cdot V_S(x) \cdot F_S(x)$$

EC. 9.1

siendo

$P_S(x)$	potencia perdida en el deslizamiento (kilovatios)
$C_3$	$10^{-3}$ (convierte los Vatios en kilovatios)
$F_S(x)$	fuerza de deslizamiento (Newtons)
$V_S(x)$	velocidad de deslizamiento (metros/s)

La expresión anterior está formulada permitiendo analizar la como varía la pérdida de potencia debida al deslizamiento a lo largo de la línea de contacto entre los engranajes en contacto. A continuación se muestran las expresiones que determinan unos puntos característicos de esta línea de contacto. Estas expresiones hacen referencia a parámetros geométricos definidos en el apartado. 9.7:

$$x_A = \frac{(D_p + D_g) \cdot \text{sen} \theta}{2}; \quad x_1 = x_A - 0.5(D_{a,g}^2 - D_{o,g}^2)^{1/2}$$

$$x_3 = x_1 + p_b; \quad x_2 = x_4 - p_b; \quad x_4 = 0.5(D_{a,p}^2 - D_{o,p}^2)^{1/2}$$

$$x_p = x_1 + C_p \cdot \left[ \left( \frac{2 + N_p \cdot m_g}{2P} \right)^2 - \left( \frac{N_p \cdot m_g \cos \theta}{2P} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g \cdot \text{sen} \theta}{2P}$$

EC. 9.2

siendo

$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)
$x_p$	punto de contacto (metros)
$x$	punto de la línea de contacto (metros)
$x_1$	punto de inicio del contacto compartido entre 2 o más dientes (metros)
$x_2$	punto de inicio del contacto único (sólo 1 diente soporta la carga) (metros)
$x_3$	punto de fin del contacto único (sólo 1 diente soporta la carga) (metros)
$x_4$	punto de fin del contacto compartido entre 2 o más dientes (metros)
$P$	paso diametral (nº dientes/pulgada)

$N_p$	n° de dientes del piñón o engranaje de entrada
$N_g$	n° de dientes del engranaje de salida
$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )

La velocidad de deslizamiento expresada en (metros/s) evaluada en un punto (x) de la línea de contacto  $V_S(x)$ , se expresa de la siguiente manera:

$$V_S(x) = C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \frac{(1 + m_g)}{m_g} \cdot |x - x_p|$$

EC. 9.3

siendo

$C_w$	convierte revoluciones a rad (2p)
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$ (1/60)
$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
$x_p$	punto de contacto (metros)
$x$	punto de la línea de contacto (metros)

La fuerza de deslizamiento expresada en (Newtons) evaluada en un punto (x) de la línea de contacto  $F_S(x)$ , se expresa de la siguiente manera:

$$F_S(x) = f(x) \cdot w(x)$$

EC. 9.4

siendo

$f(x)$	coeficiente de rozamiento
$w(x)$	carga normal en el engranaje (Newtons)

El coeficiente de rozamiento entre ambas superficies de contacto, se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = 0,0127 \cdot \log \left( \frac{C_1 \cdot w(x)}{\mu_0 \cdot F \cdot V_S(x) \cdot V_T^2(x)} \right)$$

EC. 9.5

siendo

$C_1$	Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_1 = 45,94$ ), en caso opuesto ( $C_1 = 29,66$ )
$w(x)$	carga normal en el punto de contacto (libras)

$m_0$	viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas (libras·s/pulgadas <sup>2</sup> )
F	ancho de la cara del diente (pulgadas)
$V_T(x)$	velocidad de rodadura (pulgadas/s)
$V_S(x)$	velocidad de deslizamiento (pulgadas/s)

La carga normal expresada en (Newtons) evaluada en un punto (x) de la línea de contacto  $w(x)$ , se expresa de la siguiente manera:

$$w(x) = w_n \text{ si } x_2 \leq x \leq x_3$$

$$w(x) = \frac{w_n}{2} \text{ si } x_1 < x < x_2 \text{ y } x_3 < x < x_4$$

EC. 9.6

$$w_n = \frac{2 \cdot T_p}{D_p \cdot \cos \theta}$$

EC. 9.7

siendo

$T_p$	par transmitido (N·m)
$D_p$	diámetro primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)

La velocidad de rodadura expresada en (metros/s) evaluada en un punto (x) de la línea de contacto  $V_T(x)$ , se expresa de la siguiente manera<sup>14</sup>:

$$V_T(x) = C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot D_p \cdot \left( \text{sen} \theta - \frac{(m_g - 1)|x - x_p|}{D_g} \right) = C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \left( D_p \cdot \text{sen} \theta - \frac{(m_g - 1)|x - x_p|}{m_g} \right)$$

EC. 9.8

siendo

$C_w$	convierte revoluciones a rad (2 $\pi$ )
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$ (1/60)
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
$x_p$	punto de contacto (metros)
x	punto de la línea de contacto (metros)
$D_p$	diámetro primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)

<sup>14</sup> Se corrige un error que existía en el artículo de Anderson y Loewenthal (6 pág. 20), en la ecuación de  $V_T(x)$ . En el artículo “sen $\theta$ ” está en el numerador dividido por  $D_g$ , cuando debe estar multiplicando a  $D_p$  únicamente.

$D_g$  diámetro primitivo del engranaje de salida (metros) (ver aptado. 9.7)

Escribiendo todas las ecuaciones en función únicamente de las variables de entrada y teniendo en cuenta las relaciones geométricas detalladas en el aptado. 9.7, tenemos:

$$x_p = \frac{\left(\frac{C_p \cdot N_p}{P} + \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g}{P}\right) \cdot \text{sen } \theta}{2} - 0.5 \left[ \left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g}{P} + \frac{2C_p}{P} \right)^2 - \left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g}{P} \cdot \cos \theta \right)^2 \right]^{1/2} + C_p \left[ \left( \frac{2 + N_p \cdot m_g}{2P} \right)^2 - \left( \frac{N_p \cdot m_g \cdot \cos \theta}{2P} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g \cdot \text{sen } \theta}{2P}$$

EC. 9.9

siendo

- $C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)
- $x$  punto de la línea de contacto (metros)
- $N_p$  nº de dientes del piñón o engranaje de entrada
- $N_g$  nº de dientes del engranaje de salida
- $P$  paso diametral (nº dientes/pulgada) (ver aptado. 9.7)

$$V_T(x) = C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} \right) \cdot \left( \text{sen } \theta - \frac{\left( \frac{N_g}{N_p} - 1 \right) \cdot |x - x_p|}{\left( \frac{C_p \cdot N_g}{P} \right)} \right) = C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} \right) \cdot \left( \text{sen } \theta - \frac{(m_g - 1) \cdot |x - x_p|}{\left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g}{P} \right)} \right)$$

EC. 9.10

siendo

- $C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)
- $C_w$  convierte revoluciones a rad ( $2\pi$ )
- $C_s$  convierte  $\text{min}^{-1}$  a  $\text{s}^{-1}$  (1/60)
- $x_p$  punto de contacto (metros)
- $x$  punto de la línea de contacto (metros)
- $N_p$  nº de dientes del piñón o engranaje de entrada
- $N_g$  nº de dientes del engranaje de salida
- $P$  paso diametral (nº dientes/pulgada) (ver aptado. 9.7)
- $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)

$$w(x) = \frac{2T_p}{\frac{C_p \cdot N_p}{P} \cdot \cos \theta} \quad \text{si } x_2 \leq x \leq x_3$$

$$w(x) = \frac{T_p}{\frac{C_p \cdot N_p}{P} \cdot \cos \theta} \quad \text{si } x_1 < x < x_2 \text{ y } x_3 < x < x_4$$

EC. 9.11

siendo

- $C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)  
 $w(x)$  carga normal en el engranaje (Newtons)  
 $N_p$  nº de dientes del piñón o engranaje de entrada  
 $P$  paso diametral (nº dientes/pulgada) (ver aptado. 9.7)  
 $T_p$  par transmitido (N·m)

$$V_s(x) = \frac{C_w \cdot C_s \cdot \left(1 + \frac{N_g}{N_p}\right) \cdot n_p \cdot |x - x_p|}{\frac{N_g}{N_p}} = \frac{C_w \cdot C_s \cdot (1 + m_g) \cdot n_p \cdot |x - x_p|}{m_g}$$

EC. 9.12

siendo

- $C_w$  convierte revoluciones a rad (2p)  
 $C_s$  convierte  $\text{min}^{-1}$  a  $\text{s}^{-1}$  (1/60)  
 $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)  
 $x_p$  punto de contacto (metros)  
 $x$  punto de la línea de contacto (metros)

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0.0127 \log \left[ \frac{C_1 \left( \frac{2T_p}{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta} \right) C_{N-L}}{\left( \frac{1}{C_p} \right)^2 \left( \frac{F}{C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s \left( 1 + \frac{N_g}{N_p} \right) n_p |x - x_p|}{N_g \cdot C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s \cdot n_p \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} \right) \left( \text{sen} \theta - \frac{\left( \frac{N_g}{N_p} - 1 \right) |x - x_p|}{\left( \frac{C_p \cdot N_g}{P} \right)} \right)} \right)} \right] \quad \text{si } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0.0127 \log \left[ \frac{C_1 \left( \frac{T_p}{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta} \right) C_{N-L}}{\left( \frac{1}{C_p} \right)^2 \left( \frac{F}{C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s \left( 1 + \frac{N_g}{N_p} \right) n_p |x - x_p|}{N_g \cdot C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s \cdot n_p \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} \right) \left( \text{sen} \theta - \frac{\left( \frac{N_g}{N_p} - 1 \right) |x - x_p|}{\left( \frac{C_p \cdot N_g}{P} \right)} \right)} \right)} \right] \quad \text{si } x_1 < x < x_2 \text{ y } x_3 < x < x_4 \end{array} \right.$$

EC. 9.13

siendo

- f(x)      coeficiente de rozamiento
- $C_w$       convierte revoluciones a rad (2p)
- $C_s$       convierte  $\text{min}^{-1}$  a  $\text{s}^{-1}$  (1/60)
- $C_1$       convierte unidades expresadas en el sistema inglés al sistema internacional
- $C_p$       convierte pulgadas en metros (0,0254)
- $C_{N-L}$     convierte Newtons en libras ( $C_{N-L} = 0.22473211$ )
- $m_0$       viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas ( $\text{Newton} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ )
- $n_p$       velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
- F          ancho de la cara del diente (metros)
- $N_p$       n° de dientes del piñón o engranaje de entrada
- $N_g$       n° de dientes del engranaje de salida
- P          paso diametral (n° dientes/pulgada) (ver aptado. 9.7)
- $T_p$       par transmitido (N·m)

$$F_S(x) = \begin{cases} 0.0127 \left( \frac{2T_p}{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta} \right) \log \left[ \frac{C_1 \left( \left( \frac{2T_p}{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta} \right) C_{N-L} \right)}{\left( \frac{1}{C_p} \right)^2 \left( \frac{F}{C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s \left( 1 + \frac{N_g}{N_p} \right) n_p |x - x_p|}{N_g \cdot C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s \cdot n_p \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} \right) \left( \sin \theta - \frac{\left( \frac{N_g}{N_p} - 1 \right) |x - x_p|}{\left( \frac{C_p \cdot N_g}{P} \right)} \right)} \right)^2} \right] & \text{si } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0.0127 \left( \frac{T_p}{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta} \right) \log \left[ \frac{C_1 \left( \left( \frac{T_p}{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta} \right) C_{N-L} \right)}{\left( \frac{1}{C_p} \right)^2 \left( \frac{F}{C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s \left( 1 + \frac{N_g}{N_p} \right) n_p |x - x_p|}{N_g \cdot C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s \cdot n_p \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} \right) \left( \sin \theta - \frac{\left( \frac{N_g}{N_p} - 1 \right) |x - x_p|}{\left( \frac{C_p \cdot N_g}{P} \right)} \right)} \right)^2} \right] & \text{si } x_1 < x < x_2 \text{ y } x_3 < x < x_4 \end{cases}$$

EC. 9.14

siendo

- $F_S(x)$  fuerza de deslizamiento (Newtons)
- $C_1$  convierte unidades expresadas en el sistema inglés al sistema internacional
- $C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)
- $C_w$  convierte revoluciones a rad ( $2\pi$ )
- $C_s$  convierte  $\text{min}^{-1}$  a  $\text{s}^{-1}$  (1/60)
- $C_{N-L}$  convierte Newtons en libras ( $C_{N-L} = 0.22473211$ )
- $m_0$  viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas ( $\text{Newton} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ )
- $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
- $F$  ancho de la cara del diente (metros)
- $N_p$  n° de dientes del piñón o engranaje de entrada
- $N_g$  n° de dientes del engranaje de salida
- $P$  paso diametral (n° dientes/pulgada) (ver apartado. 9.7)
- $T_p$  par transmitido ( $\text{N} \cdot \text{m}$ )

$$P_S(x) = \begin{cases} C_3 \cdot 0.0127 \left( \frac{2T_p \cdot C_w \cdot C_s (1 + m_g) n_p |x - x_p|}{\frac{C_p \cdot N_p \cos \theta m_g}{P}} \right) \log \left[ \frac{C_1 \left( \left( \frac{2T_p}{\frac{C_p \cdot N_p \cos \theta}{P}} \right) C_{N-L} \right)}{\left( \frac{\mu_0 C_{N-L}}{\left( \frac{1}{C_p} \right)^2} \left( \frac{F}{C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s (1 + m_g) n_p |x - x_p|}{m_g \cdot C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s n_p \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} \right) \left( \text{sen} \theta - \frac{(m_g - 1) |x - x_p|}{\left( \frac{C_p \cdot m_g \cdot N_p}{P} \right)} \right)}{\right)} \right)^2} \right] & \text{si } x_2 \leq x \leq x_3 \\ C_3 \cdot 0.0127 \left( \frac{T_p \cdot C_w \cdot C_s (1 + m_g) n_p |x - x_p|}{\frac{C_p \cdot N_p \cos \theta m_g}{P}} \right) \log \left[ \frac{C_1 \left( \left( \frac{T_p}{\frac{C_p \cdot N_p \cos \theta}{P}} \right) C_{N-L} \right)}{\left( \frac{\mu_0 C_{N-L}}{\left( \frac{1}{C_p} \right)^2} \left( \frac{F}{C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s (1 + m_g) n_p |x - x_p|}{m_g \cdot C_p} \right) \left( \frac{C_w \cdot C_s n_p \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} \right) \left( \text{sen} \theta - \frac{(m_g - 1) |x - x_p|}{\left( \frac{C_p \cdot m_g \cdot N_p}{P} \right)} \right)}{\right)} \right)^2} \right] & \text{si } x_1 < x < x_2 \text{ y } x_3 < x < x_4 \end{cases}$$

EC. 9.15

siendo

- $C_3$   $10^{-3}$  (convierte los Vatios en kilovatios)
- $C_w$  convierte revoluciones a rad (2 $\pi$ )
- $C_s$  convierte  $\text{min}^{-1}$  a  $\text{s}^{-1}$  (1/60)
- $P_S(x)$  Potencia perdida en deslizamiento (Kilovatios)
- $C_1$  convierte unidades expresadas en el sistema inglés al sistema internacional
- $C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)
- $C_{N-L}$  convierte Newtons en libras ( $C_{N-L} = 0.22473211$ )
- $m_0$  viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas (Newton·s/m<sup>2</sup>)
- $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
- $F$  ancho de la cara del diente (metros)
- $N_p$  n° de dientes del piñón o engranaje de entrada
- $m_g$  relación de transmisión entre los engranajes de entrada y salida ( $N_g/N_p$ )
- $P$  paso diametral (n° dientes/pulgada) (ver apartado. 9.7)
- $T_p$  par transmitido (N·m)

No se ha introducido la variable  $x_p$  en la función de  $P_S(x)$  en función de las variables principales o de entrada debido a que el tamaño final de la ecuación  $P_S(x)$  sería excesivo. Se tienen en cuenta las variables principales que aparecen en la ecuación 9.9 y que no aparecen en la ecuación 9.15.

De todo este desarrollo matemático se deduce que la potencia perdida debido al deslizamiento existente en el engrane de los engranajes depende de las siguientes variables:

Constante	Significado	Valor
$C_1$	convierte unidades expresadas en el sistema inglés al sistema	29,66
$C_3$	convierte los Vatios en kilovatios	10 <sup>-3</sup>
$C_p$	convierte pulgadas en metros	0,0254
$C_{N-L}$	convierte Newtons en libras	0.22473211
$C_w$	convierte revoluciones a rad	2 $\pi$
$C_s$	convierte min <sup>-1</sup> a s <sup>-1</sup>	1/60

TABLA 9.1 Constantes empleadas en la ecuación 9.15

Variable	Significado	Unidades
$\mu_0$	viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas	Newton·s/m <sup>2</sup>
$\theta$	ángulo de presión	grados
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada	rpm
$F$	ancho de la cara del diente	metros
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada	
$m_g$	relación de transmisión entre los engranajes en contacto	
$P$	paso diametral	nº dientes/pulgada
$T_p$	par transmitido	N·m

TABLA 9.2 Variables principales ecuación 9.15

## 9.2. Modelo de Shipley

### 9.2.1. Pérdidas de potencia debidas al deslizamiento

Según Shipley (3 pág. 370), la pérdida de potencia producida en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto debida al deslizamiento que se produce entre los dientes en contacto viene determinada por la siguiente expresión:

$$P_s (\%) = \frac{50f(H_s^2 + H_T^2)}{\cos\theta(H_s + H_T)}$$

EC. 9.16

siendo

$P_s$	porcentaje de potencia perdida en el deslizamiento (kilovatios)
$f$	coeficiente de rozamiento
$\theta$	ángulo de presión (grados)
$H_s$	deslizamiento específico al inicio de la aproximación de los dientes
$H_T$	deslizamiento específico al final del encaje entre los dientes

Las ecuaciones que se detallan a continuación emplearán parámetros definidos en el apartado 9.7.

El deslizamiento específico al inicio de la aproximación de los dientes viene expresado como:

$$H_s = (1 + m_g) \left\{ \left[ \left( \frac{R_{tg}}{R_g} \right)^2 - \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \theta \right\}$$

EC. 9.17

siendo

$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$R_{t,g}$	radio exterior del engranaje de salida (metros) (ver apartado 9.7)
$R_g$	radio del engranaje de salida (metros) (ver apartado 9.7)
$\theta$	ángulo de presión (grados)

El deslizamiento específico al final de la aproximación de los dientes viene expresado como:

$$H_T = \left( \frac{1 + m_g}{m_g} \right) \left\{ \left[ \left( \frac{R_{tp}}{R_p} \right)^2 - \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \theta \right\}$$

EC. 9.18

siendo

- $m_g$  relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
- $R_{t,p}$  radio exterior del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)
- $R_p$  radio del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)
- $\theta$  ángulo de presión (grados)

Teniendo en cuenta las relaciones geométricas del apartado. 9.7, las ecuaciones de  $H_S$  y  $H_T$  podrán expresarse así:

$$H_S = (1 + m_g) \left\{ \left[ \left( \frac{(N_g + 2)}{N_g} \right)^2 - \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \theta \right\}$$

EC. 9.19

$$H_T = \left( \frac{1 + m_g}{m_g} \right) \left\{ \left[ \left( \frac{(N_p + 2)}{N_p} \right)^2 - \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \theta \right\}$$

EC. 9.20

El coeficiente de fricción está relacionado con la velocidad en la línea de contacto y con la temperatura a la que se encuentra el aceite de lubricación de los engranajes (8 pág. 498). La siguiente gráfica muestra esta relación.

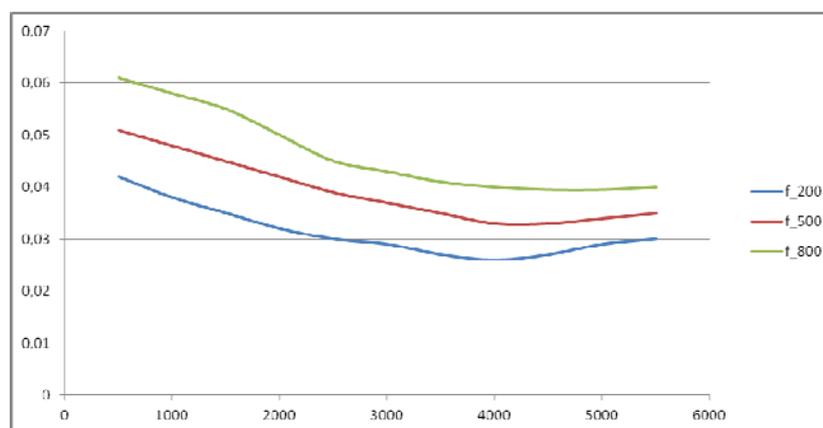


FIGURA 9.1 Coeficiente de fricción promedio para aceites livianos derivados del petróleo.

Entrada del aceite 120°F (49°C) para engranajes endurecidos, 45 SUS a 100°F (38°C)

Las ecuaciones que relacionan estos coeficientes de fricción con la velocidad en la línea de contacto (pies/min) son:

$$f(T=800\text{ Kelvin}) = -2 \cdot 10^{16} \cdot v_p^4 + 2 \cdot 10^{12} \cdot v_p^3 - 8 \cdot 10^9 \cdot v_p^2 + 3 \cdot 10^6 \cdot v_p + 0,0612$$

EC. 9.21

$$f(T=500\text{ Kelvin}) = (f_{500}) = -5 \cdot 10^{18} \cdot v_p^4 + 0,0003 \cdot v_p^{13} - 10^9 \cdot v_p^2 - 5 \cdot 10^6 \cdot v_p + 0,0535$$

EC. 9.22

$$f(T=200\text{ Kelvin}) = 9 \cdot 10^{18} \cdot v_p^4 - 3 \cdot 10^{14} \cdot v_p^3 + 10^9 \cdot v_p^2 - 9 \cdot 10^6 \cdot v_p + 0,0461$$

EC. 9.23

La velocidad en la línea de contacto, expresada en (pies/min), viene determinada por la expresión (8 pág. 498):

$$V_p = n_p \cdot R_p \cdot \frac{C_w \cdot C_d}{C_p}$$

EC. 9.24

siendo

- $C_w$  convierte revoluciones a rad (2 $\pi$ )
- $C_d$  convierte pulgadas a pies (1/12)
- $C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)
- $R_p$  radio primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)
- $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)

Esta velocidad está calculada en base al radio primitivo del engranaje porque la línea de contacto está descrita sobre el diámetro primitivo de los engranajes.

Así, la ecuación 9.16 queda expresada de la siguiente manera:

$$P_s = \frac{50f \left[ \left\{ \left( 1+m_g \right) \left\{ \left[ \left( \frac{N_p \cdot m_g + 2}{N_p \cdot m_g} \right)^2 - \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \theta \right\} \right]^2 + \left\{ \left( \frac{1+m_g}{m_g} \right) \left\{ \left[ \left( \frac{N_p + 2}{N_p} \right)^2 - \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \theta \right\} \right]^2 \right]}{\cos \theta \left[ \left( 1+m_g \right) \left\{ \left[ \left( \frac{N_p \cdot m_g + 2}{N_p \cdot m_g} \right)^2 - \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \theta \right\} + \left( \frac{1+m_g}{m_g} \right) \left\{ \left[ \left( \frac{N_p + 2}{N_p} \right)^2 - \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - \sin \theta \right\} \right]}$$

EC. 9.25

siendo

- $f$  coeficiente de rozamiento
- $\theta$  ángulo de presión (grados)
- $N_p$  nº de dientes del piñón o engranaje de entrada

$m_g$  relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )

De todo este desarrollo matemático se deduce que la potencia perdida debido al deslizamiento existente en el engrane de los engranajes depende de las siguientes variables:

Constante	Significado	Valor
$C_w$	convierte revoluciones a rad	$2\pi$
$C_d$	convierte pulgadas a pies	1/12
$C_p$	convierte pulgadas en metros	0,0254

TABLA 9.3 Constantes empleadas en la ecuación 9.25

Variable	Significado	Unidades
$\theta$	ángulo de presión	grados
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de	rpm
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada	
$m_g$	relación de transmisión entre los engranajes en	
P	paso diametral	nº

TABLA 9.4 Variables principales ecuación 9.25

Comparando la ecuación 9.15 del Modelo de Anderson y Loewenthal (6) con la ecuación 9.25 del Modelo de Shipley (8) se aprecia que el Modelo de Shipley no tiene en cuenta los siguientes parámetros que sí tenía en cuenta el Modelo de Anderson y Loewenthal:

- viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas ( $\mu_0$ )
- ancho de la cara del diente (F)
- par transmitido ( $T_p$ )

#### 9.2.1.1. Limitaciones del modelo

En este modelo no aparece la variable relacionada con el par transmitido por los engranajes pero en la selección del coeficiente de rozamiento es tenido en cuenta por las gráficas empleadas para ello (3 pág. 371). Estas gráficas (ver figura 9.1) presentan el coeficiente de fricción en función de un término de carga adimensional llamado “factor K”, la velocidad en la línea primitiva y el tipo de aceite (8 pág. 498).

#### 9.2.2. Pérdidas de potencia debidas a la fricción del aire

Según Shipley (3 pág. 370), la pérdida de potencia producida en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto debida a la fricción del aire con los elementos rodantes viene determinada por la siguiente expresión:

$$P_w (\%) = \frac{C_{14} \cdot n^3 \cdot D^5 \cdot F^{0.7}}{100 \cdot 10^{15}}$$

EC. 9.26

siendo

- $C_{14}$  Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_{14} = 1$ ), en caso opuesto ( $C_{14} = 9,226 \cdot 10^8$ )
- $n$  velocidad de rotación del engranaje (rpm)
- $D$  diámetro primitivo del engranaje (pulgadas)
- $F$  ancho de la cara del engranaje (pulgadas)

Dado que esta expresión es aplicable para cada uno de los elementos rodantes de la transmisión, a la hora de evaluar las pérdidas debidas a la fricción del aire habrá que tener en cuenta las que se producen en el engranaje de entrada y las que se producen en el engranaje de salida.

Desarrollando y aplicando la ec. 9.26 a cada uno de los engranajes tenemos:

$$P_{W,p} (\%) = \frac{n_p^3 \cdot \left(\frac{N_p}{P}\right)^5 \cdot F^{0.7}}{100 \cdot 10^{15}}$$

EC. 9.27

$$P_{W,g} (\%) = \frac{\left(\frac{n_p}{m_g}\right)^3 \cdot \left(\frac{N_p \cdot m_g}{P}\right)^5 \cdot F^{0.7}}{100 \cdot 10^{15}}$$

EC. 9.28

siendo

- $P_{W,p}$  porcentaje de potencia perdida por la fricción del aire con el engranaje
- $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
- $N_p$  nº de dientes del piñón o engranaje de entrada
- $m_g$  relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
- $F$  ancho de la cara del engranaje (pulgadas)
- $P$  paso diametral (nº dientes/pulgada) (ver apartado. 9.7)

De ahí se deduce que la potencia perdida debida a la fricción del aire con los elementos rodantes depende de las siguientes variables:

<b>Variable</b>	<b>Significado</b>	<b>Unidades</b>
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada	rpm
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada	
$m_g$	relación de transmisión entre los engranajes en contacto	
$P$	paso diametral	nº dientes/pulgada
$F$	ancho de la cara del engranaje	pulgadas

TABLA 9.5 Variables principales ecuación 9.26

#### 9.2.2.1. Limitaciones del modelo

En este modelo los diámetros de los engranajes deben ser menores a 0,51 metros y las relaciones entre la anchura del engranaje y su diámetro deben ser aproximadamente<sup>15</sup> 0,5 (3 pág. 371).

---

<sup>15</sup> Ver apartado 2.3.

### 9.3. Modelo de Buckingham

Según Buckingham (3 pág. 369), la eficiencia que existe en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto teniendo en cuenta las pérdidas de potencia debidas al deslizamiento que se produce entre los dientes en contacto viene determinada por la siguiente expresión:

$$E = 1 - \left[ \frac{1 + \left( \frac{1}{m_g} \right)}{\beta_a + \beta_r} \right] \left( \frac{f_a}{2} \beta_a^2 + \frac{f_r}{2} \beta_r^2 \right)$$

EC. 9.29

siendo

$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$\beta_a$	arco de aproximación
$\beta_r$	arco de encaje entre dientes
$f_a$	coeficiente de rozamiento aproximado
$f_r$	coeficiente de rozamiento en la zona de encaje entre dientes

Las ecuaciones que se detallan a continuación emplearán parámetros definidos en el apartado. 9.7.

$$\beta_a = \frac{(R_{t,g}^2 - R_{b,g}^2)^{1/2} - R_g \sin \theta}{R_{b,g}}$$

EC. 9.30

siendo

$\theta$	ángulo de presión (grados)
$R_{t,g}$	radio exterior del engranaje de salida (metros) (ver apartado. 9.7)
$R_{b,g}$	radio base del engranaje de salida (metros) (ver apartado. 9.7)
$R_g$	radio primitivo del engranaje de salida (metros) (ver apartado. 9.7)

$$\beta_r = \frac{(R_{t,p}^2 - R_{b,p}^2)^{1/2} - R_p \sin \theta}{R_{b,p}}$$

EC. 9.31

siendo

$\theta$	ángulo de presión (grados)
----------	----------------------------

- $R_{t,p}$  radio exterior del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)  
 $R_{b,p}$  radio base del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)  
 $R_p$  radio primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, podemos expresar el arco de aproximación  $\beta_a$  y el arco de receso  $\beta_r$  de la siguiente manera:

$$\beta_a = \frac{\left( \left[ \left( \frac{C_p \cdot (2 + N_p \cdot m_g)}{2P} \right) \right]^2 - \left[ \left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g \cdot \cos \theta}{2P} \right) \right]^2 \right)^{1/2} - \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g \cdot \sin \theta}{2P}}{\left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g \cdot \cos \theta}{2P} \right)}$$

EC. 9.32

$$\beta_r = \frac{\left( \left[ \left( \frac{C_p \cdot (2 + N_p)}{2P} \right) \right]^2 - \left[ \left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta}{2P} \right) \right]^2 \right)^{1/2} - \frac{C_p \cdot N_p \cdot \sin \theta}{2P}}{\left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta}{2P} \right)}$$

EC. 9.33

Teniendo en cuenta que la comparación llevada a cabo por Anderson y Loewenthal (3) era sobre engranajes cilíndricos de dentado recto de acero endurecido, la expresión del coeficiente de rozamiento que el modelo de Buckingham había desarrollado para esa situación, tanto en la fase de aproximación de los dientes en contacto ( $f_a$ ) como en la de receso ( $f_r$ ) era:

$$f_a = f_r = \frac{2}{3} f$$

EC. 9.34

siendo

- $f$  coeficiente de rozamiento  
 $f_a$  coeficiente de rozamiento en la fase de aproximación de los dientes en contacto  
 $f_r$  coeficiente de rozamiento en la fase de receso de los dientes en contacto

El coeficiente de rozamiento ponderado empleado por Buckingham era:

$$f = \frac{0,05}{e^{(C_8 \cdot 0,125 \cdot V_{SB})}} + 0,002 (C_8 \cdot V_{SB})^{1/2}$$

EC. 9.35

siendo

$C_8$  Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema internacional ( $C_8 = 196,8504 \sim 196,9$ ), en caso opuesto ( $C_8 = 1$ )

$V_{SB}$  velocidad de deslizamiento de Buckingham (metros/s)

La velocidad de deslizamiento calculada según Buckingham viene determinada por la siguiente expresión:

$$V_{SB} = \frac{V_P}{2} \left( 1 + \frac{N_p}{N_g} \right) \beta_r \cos \theta$$

EC. 9.36

La velocidad en la línea de contacto  $V_P$ , expresada en (m/s), viene determinada por la expresión (8):

$$V_P = n_p \cdot R_p \cdot C_s \cdot C_w$$

EC. 9.37

siendo

$C_w$  convierte revoluciones a rad (2p)

$C_s$  convierte  $\text{min}^{-1}$  a  $\text{s}^{-1}$  (1/60)

$R_p$  radio primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver aptado. 9.7)

$n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)

Esta velocidad está calculada en base al radio primitivo del engranaje porque la línea de contacto está descrita sobre el diámetro primitivo de los engranajes.

Ésta puede expresarse en m/s, teniendo en cuenta las relaciones detalladas en el aptado. 9.7, así:

$$V_{SB} = \frac{\left( n_p \cdot \left( \frac{C_p \cdot N_p}{2P} \right) \cdot C_s \cdot C_w \right) \left( 1 + \frac{1}{m_g} \right)}{2} \left( \frac{\left( \left[ \left( \frac{C_p \cdot (2 + N_p)}{2P} \right) \right]^2 - \left[ \left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta}{2P} \right) \right]^2 \right)^{1/2} - \frac{C_p \cdot N_p \cdot \sin \theta}{2P}}{\left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta}{2P} \right)} \right) \cos \theta$$

EC. 9.38

siendo

$C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)

$V_P$  velocidad de deslizamiento en la línea de contacto (metros/s)

$N_p$  nº de dientes del piñón o engranaje de entrada

$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$\theta$	ángulo de presión (grados)
P	paso diametral (nº dientes/pulgada)

Para este modelo no se ha expresado la ecuación objetivo 9.29 en función de las variables más significativas debido al tamaño que tendría ésta.

De todo este desarrollo matemático se deduce que la eficiencia de una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto teniendo en cuenta únicamente las pérdidas debido al deslizamiento existente en el engrane de los engranajes depende de las siguientes variables:

Constante	Significado	Valor
$C_w$	convierte revoluciones a rad	$2\pi$
$C_p$	convierte pulgadas en metros	0,0254
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$	1/60
$C_8$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema internacional	196,8504

TABLA 9.6 Constantes empleadas en la ecuación 9.29

Variable	Significado	Unidades
$\theta$	ángulo de presión	grados
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada	rpm
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada	
$m_g$	relación de transmisión entre los engranajes en contacto	
P	paso diametral	nº dientes/pulgada

TABLA 9.7 Variables principales ecuación 9.29

Comparando la ecuación 9.15 del Modelo de Anderson y Loewenthal (6) con la ecuación 9.25 del Modelo de Shipley (8) y con la del Modelo de Buckingham se aprecia que ni el Modelo de Shipley ni el Modelo de Buckingham tienen en cuenta los siguientes parámetros que sí tiene en cuenta el Modelo de Anderson y Loewenthal:

- viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas ( $\mu_0$ )
- ancho de la cara del diente (F)
- par transmitido ( $T_p$ )

### 9.3.1.1. Limitaciones del modelo

En este modelo no aparece la variable relacionada con la carga que deben soportar los engranajes así que las eficiencias predichas son independientes de ésta (3 pág. 369).

## 9.4. Modelo reducido de Anderson y Loewenthal

### 9.4.1. Pérdidas de potencia debidas al deslizamiento

Anderson y Loewenthal (3 pág. 367), desarrollaron el mismo modelo que desarrollaron 3 años antes de que publicasen el que se ha descrito en el apartado 9.1, expresando la pérdida de potencia producida en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto debida al deslizamiento en función de otras variables. Se detalla a continuación:

$$\overline{P}_S = C_1 f \overline{W} \overline{V}_S$$

EC. 9.39

siendo

$\overline{P}_S$	potencia media perdida en el deslizamiento (kilovatios)
$C_1$	Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_1 = 3,03 \cdot 10^{-4}$ ), en caso opuesto ( $C_1 = 10^{-3}$ ) <sup>16</sup>
$f$	coeficiente de fricción
$W$	carga normal (Newtons)
$\overline{V}_S$	velocidad media de deslizamiento (metros/s)

La velocidad de deslizamiento promedio expresada en (pulgadas/s), viene determinada por la siguiente expresión <sup>17</sup>:

$$\overline{V}_S = C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \frac{1 + m_g}{m_g} \cdot \frac{l_T}{C_p}$$

EC. 9.40

siendo

$C_w$	convierte revoluciones a rad (2p)
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$ (1/60)
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$l_T$	longitud de la línea de contacto (metros)
$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)

La carga normal promedio que deben soportar los dientes en contacto es:

<sup>16</sup> Se corrige un error que existía en el artículo de Anderson y Loewenthal (3 pág. 368), en la tabla de los valores de las constantes,  $C_1$  si las unidades de las variables de la ecuación se expresan en unidades del sistema internacional vale  $10^{-3}$  y no  $2 \cdot 10^{-3}$ , ya que el objetivo de esa constante es transformar los vatios en kilovatios. Asimismo, si las unidades de las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano, que en vez de valer  $C_1 3,03 \cdot 10^{-4}$ , vale  $1,515 \cdot 10^{-4}$ .

<sup>17</sup> Se ha corregido un error que existía en el artículo de Anderson y Loewenthal (3 pág. 368), donde pone en él 0,262 debe poner 0,1047 que es igual a  $C_w \cdot C_s$ . Esto es debido a que las unidades en que se expresa  $\overline{V}_S$  en el artículo citado son pulgadas/s y las de las variables  $n_p$  y  $l_T$  son rpm y pulgadas, respectivamente.

$$\bar{W} = \frac{T_p}{D_p \cos \theta}$$

EC. 9.41

siendo

W	carga normal promedio en el punto de contacto (Newtons)
D <sub>p</sub>	diámetro primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)
T <sub>p</sub>	par transmitido (N·m)
θ	ángulo de presión (grados)

El coeficiente de rozamiento, que debe quedar limitado en el rango 0,01-0,02<sup>18</sup> (3 pág. 368), viene expresado así:

$$f = 0,0127 \cdot \log \left( \frac{C_6 \cdot (\bar{W} \cdot C_{N-L})}{\frac{F}{C_p} \cdot \mu \cdot \bar{V}_s \cdot \bar{V}_T^2} \right)$$

EC. 9.42

siendo

C <sub>6</sub>	Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano (C <sub>6</sub> = 45,94), en caso opuesto (C <sub>6</sub> = 29,66)
C <sub>N-L</sub>	convierte Newtons en libras (C <sub>N-L</sub> = 0,22473211)
W	carga normal en el punto de contacto (Newtons)
m	viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas (libras·s/pulgadas <sup>2</sup> )
F	ancho de la cara del diente (metros)
V <sub>T</sub>	velocidad de rodadura promedio (pulgadas/s)
V <sub>S</sub>	velocidad de deslizamiento promedio (pulgadas/s)

La velocidad de rodadura promedio expresada en (pulgadas/s), viene determinada por la siguiente expresión:

$$\bar{V}_T = C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \left[ \frac{D_p \cdot \text{sen} \theta}{C_p} - \frac{l_T}{4C_p} \cdot \left( \frac{m_g - 1}{m_g} \right) \right] = C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \left[ \frac{N_p \cdot \text{sen} \theta}{P} - \frac{l_T}{4C_p} \cdot \left( \frac{m_g - 1}{m_g} \right) \right]$$

EC. 9.43

<sup>18</sup> En el artículo de Anderson y Loewenthal (3 pág. 368), donde pone en él que el coeficiente debe estar dentro del rango 0,01-0,2 debe poner 0,01-0,02.

siendo

$C_w$	convierte revoluciones a rad (2 $\pi$ )
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$ (1/60)
$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)
$D_p$	diámetro primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)
$P$	paso diametral (n° dientes/pulgada)
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$l_T$	longitud de la línea de contacto (metros)

La longitud de la línea de contacto expresada en (metros) queda determinada por la siguiente ecuación:

$$l_T = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{C_p}{P} (N_p + 2) \right)^2 - \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} \cdot \cos \theta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \left( \frac{C_p}{P} (N_p \cdot m_g + 2) \right)^2 - \left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g}{P} \cdot \cos \theta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{C_p}{P} (N_p [1 + m_g]) \right) \cdot \text{sen} \theta \right\}$$

EC. 9.44

Esta ecuación puede expresarse de una forma más reducida relacionándola con los puntos característicos que definieron Anderson y Loewenthal (6 págs. 18-19) y que ya habíamos mencionado en el punto 2. Mostraré a continuación esta relación por poder entender más fácilmente su significado.

Dado que se habían empleado 4 puntos característicos ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$ ) para definir las fases del contacto entre los dientes de los engranajes, lo lógico es pensar que la longitud de la línea de contacto vendrá determinada en su totalidad por la diferencia entre  $x_4$  y  $x_1$ . Veamos que es así:

$x_A$ ,  $x_1$  y  $x_4$  pueden expresarse así:

$$x_A = \frac{(D_p + D_g) \text{sen} \theta}{2} = \frac{C_p}{2 \cdot P} (N_p \cdot (1 + m_g) \text{sen} \theta)$$

$$x_1 = x_A - 0.5 (D_{a,g}^2 - D_{o,g}^2)^{1/2} = x_A - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g}{P} + \frac{2 \cdot C_p}{P} \right)^2 - \left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g \cdot \cos \theta}{P} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$x_4 = 0.5 (D_{a,p}^2 - D_{o,p}^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} + \frac{2 \cdot C_p}{P} \right)^2 - \left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta}{P} \right)^2 \right]^{1/2}$$

EC. 9.45

luego,

$$l_T = \frac{1}{2} \{ 2 \cdot x_4 + 2 \cdot (x_A - x_1) - 2 \cdot x_A \} = x_4 - x_1$$

EC. 9.46

siendo

- $C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)
- $x_1$  punto de inicio del contacto compartido entre 2 o más dientes (metros)
- $x_4$  punto de fin del contacto compartido entre 2 o más dientes (metros)

El coeficiente de rozamiento puede expresarse también así:

$$f = 0,0127 \cdot \log \left( \frac{C_6 \cdot \left( \frac{P \cdot T_p \cdot C_{N-L}}{C_p \cdot N_p \cos \theta} \right)}{\left( \frac{F}{C_p} \cdot \mu \left( C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \frac{1+m_g \cdot l_T}{m_g \cdot C_p} \right) \cdot \left( C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \left[ \frac{N_p}{P} \cdot \text{sen} \theta - \frac{l_T}{4 \cdot C_p} \cdot \left( \frac{m_g - 1}{m_g} \right) \right] \right)^2} \right)^2 \right)$$

EC. 9.47

siendo

- $C_6$  Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_6 = 45,94$ ), en caso opuesto ( $C_6 = 29,66$ )
- $C_w$  convierte revoluciones a rad (2p)
- $C_s$  convierte  $\text{min}^{-1}$  a  $\text{s}^{-1}$  (1/60)
- $C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)
- $C_{N-L}$  convierte Newtons en libras ( $C_{N-L} = 0.22473211$ )
- $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
- $m_g$  relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
- $l_T$  longitud de la línea de contacto (metros)
- $m$  viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas (libras·s/pulgadas<sup>2</sup>)
- $F$  ancho de la cara del diente (metros)
- $P$  paso diametral (nº dientes/pulgada)

Teniendo en cuenta las relaciones del apartado 9.7, la ecuación 9.39 queda desarrollada de la siguiente manera:

$$\bar{P}_s = C_1 \cdot \left\{ 0,0127 \cdot \log \left( \frac{C_6 \cdot \left( \frac{P \cdot T_p \cdot C_{N-L}}{C_p \cdot N_p \cos \theta} \right)}{\left( \frac{F}{C_p} \cdot \mu \left( C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \frac{1+m_g \cdot l_T}{m_g \cdot C_p} \right) \cdot \left( C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \left[ \frac{C_p \cdot N_p}{P} \cdot \text{sen} \theta - \frac{l_T}{4 \cdot C_p} \cdot \left( \frac{m_g - 1}{m_g} \right) \right] \right)^2} \right)^2 \right\} \cdot \left( \frac{P \cdot T_p \cdot C_{N-L}}{C_p \cdot N_p \cos \theta} \right) \cdot \left[ C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \frac{1+m_g \cdot l_T}{m_g \cdot C_p} \right]$$

EC. 9.48

siendo

$C_1$	Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_1 = 3,03 \cdot 10^{-4}$ ), en caso opuesto ( $C_1 = 10^{-3}$ )
$C_6$	Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_6 = 45,94$ ), en caso opuesto ( $C_6 = 29,66$ )
$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)
$C_w$	convierte revoluciones a rad ( $2\pi$ )
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$ (1/60)
$C_{N-L}$	convierte Newtons en libras ( $C_{N-L} = 0.22473211$ )
$P$	paso diametral ( $n^\circ$ dientes/pulgada)
$N_p$	$n^\circ$ de dientes del piñón o engranaje de entrada
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$\theta$	ángulo de presión (grados)
$T_p$	par transmitido (N·m)
$l_T$	longitud de la línea de contacto (metros)
$m$	viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas (libras·s/pulgadas <sup>2</sup> )
$F$	ancho de la cara del diente (metros)

De todo este desarrollo matemático se deduce que la potencia perdida debido al deslizamiento existente en el engrane de los engranajes en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto depende de las siguientes variables:

Constante	Significado	Valor
$C_1$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema internacional	$2 \cdot 10^{-3}$
$C_w$	convierte revoluciones a rad	$2\pi$
$C_p$	convierte pulgadas en metros	0,0254
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$	1/60
$C_6$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema internacional	29,66
$C_{N-L}$	convierte Newtons en libras	0,22473211

TABLA 9.8 Constantes empleadas en la ecuación 9.48

Variable	Significado	Unidades
$\theta$	ángulo de presión	grados
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada	rpm
$N_p$	$n^\circ$ de dientes del piñón o engranaje de entrada	
$m_g$	relación de transmisión entre los engranajes en contacto	
$P$	paso diametral	$n^\circ$
$T_p$	par transmitido	N·m
$F$	ancho de la cara del diente	metros

m	viscosidad absoluta del lubricante en condiciones	libras·s/pulgadas <sup>2</sup>
---	---	--------------------------------

TABLA 9.9 Variables principales ecuación 9.48

Comparando la ecuación 9.15 del Modelo de Anderson y Loewenthal (6) con la ecuación 9.48 del modelo que desarrollaron tres años más tarde se ve que el modelo depende de las mismas variables pero este último es más sencillo de aplicar debido a que las variables empleadas han sido promediadas en vez de calcularlas para cada punto de la línea de contacto. Así pues, este modelo sigue teniendo en cuenta las siguientes variables al contrario que el Modelo de Shipley (ec. 9.25) y que el Modelo de Buckingham (ec. 9.29):

- viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas ( $\mu_0$ )
- ancho de la cara del diente (F)
- par transmitido ( $T_p$ )

#### 9.4.2. Pérdidas de potencia debidas a la rodadura

En cuanto a las pérdidas debidas a la rodadura existente entre los dientes en contacto, Anderson y Loewenthal (3 pág. 367) desarrollaron, al igual que sucedió con el modelo que consideraba las pérdidas de potencia debidas al deslizamiento, un modelo que tenía en cuenta las pérdidas de potencia producidas en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto debidas a la rodadura. A continuación se detallarán las ecuaciones que no hayan sido detalladas en el apartado anterior y están relacionadas con este tipo de pérdidas de potencia.

$$\overline{P}_R = C_2 \cdot \overline{h} \overline{V}_T \cdot F \cdot CR$$

EC. 9.49

siendo

$P_R$	potencia media perdida en la rodadura (kilovatios)
$C_2$	Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_2 = 1,97$ ), en caso opuesto ( $C_2 = 9 \cdot 10^4$ )
F	anchura de la cara del diente (pulgadas)
CR	relación de contacto (nº dientes en contacto/vuelta)
$V_T$	velocidad de rodadura promedio (pulgadas/s)
h	espesor medio de la capa de aceite (pulgadas)

La relación de contacto viene determinada por la siguiente expresión:

$$CR = \frac{l_T \cdot P}{\pi \cos \theta}$$

EC. 9.50

siendo

$l_T$	longitud de la línea de contacto (pulgadas)
P	paso diametral (nº dientes/pulgada)

$\theta$  ángulo de presión (grados)

El espesor medio de la capa de aceite viene determinado por la siguiente expresión empírica:

$$\bar{h} = C_7 \cdot (V_T \cdot \mu)^{0.67} \cdot \bar{W}^{(-0.067)} \cdot R_{eq}^{0.464}$$

EC. 9.51

siendo

- $C_7$  Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_7 = 4,34 \cdot 10^{-3}$ ), en caso opuesto ( $C_7 = 2,05 \cdot 10^{-7}$ )
- $W$  carga normal en el punto de contacto (libras)
- $m$  viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas (libras·s/pulgadas<sup>2</sup>)
- $V_T$  velocidad de rodadura promedio (pulgadas/s)
- $R_{eq}$  radio equivalente de contacto (pulgadas)

El radio equivalente de contacto viene definido por la siguiente expresión:

$$R_{eq} = \frac{\left[ \frac{N_p}{P} \cdot \text{sen}\theta + \frac{l_T}{C_p \cdot 2} \right] \left[ \frac{N_p \cdot m_g}{P} \cdot \text{sen}\theta - \frac{l_T}{C_p \cdot 2} \right]}{2 \cdot \left( \frac{N_p + N_p \cdot m_g}{P} \right) \cdot \text{sen}\theta}$$

EC. 9.52

siendo

- $C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)
- $l_T$  longitud de la línea de contacto (metros)
- $P$  paso diametral (nº dientes/pulgada)
- $\theta$  ángulo de presión (grados)
- $N_p$  nº de dientes del piñón o engranaje de entrada
- $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
- $m_g$  relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )

Expresando la ecuación 9.49 en función de los parámetros y variables más representativas que intervienen en las ecuaciones anteriores quedaría:

$$\bar{P}_R = C_{pot} \cdot C_2 \left\{ C_7 \left( C_w \cdot C_s \cdot n_p \left[ \frac{N_p \cdot \text{sen}\theta}{P} - \frac{l_T}{4C_p} \left( \frac{m_g - 1}{m_g} \right) \right] \mu \right)^{0.67} \left( \frac{C_{N-L} \cdot T_p \cdot P}{N_p \cos\theta} \right)^{-0.067} \cdot R_{eq}^{0.464} \left( C_w \cdot C_s \cdot n_p \left[ \frac{N_p \cdot \text{sen}\theta}{P} - \frac{l_T}{4C_p} \left( \frac{m_g - 1}{m_g} \right) \right] \right) \right\} F \cdot CR$$

EC. 9.53

siendo

- $P_R$  potencia media perdida en la rodadura (kilovatios)
- $C_2$  Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_2 = 1,97$ ), en caso opuesto ( $C_2 = 9 \cdot 10^4$ )
- $C_7$  Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_7 = 4,34 \cdot 10^{-3}$ ), en caso opuesto ( $C_7 = 2,05 \cdot 10^{-7}$ )
- $C_w$  convierte revoluciones a rad ( $2p$ )
- $C_s$  convierte  $\text{min}^{-1}$  a  $\text{s}^{-1}$  ( $1/60$ )
- $C_p$  convierte pulgadas en metros ( $0,0254$ )
- $C_{N-L}$  convierte Newtons en libras ( $C_{N-L} = 0,22473211$ )
- $F$  anchura de la cara del diente (pulgadas)
- $T_p$  par transmitido ( $\text{N}\cdot\text{m}$ )
- $CR$  relación de contacto ( $n^\circ$  dientes en contacto/vuelta)
- $V_T$  velocidad de rodadura promedio (metros/s)
- $l_T$  longitud de la línea de contacto (metros)
- $P$  paso diametral ( $n^\circ$  dientes/pulgada)
- $m$  viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas ( $\text{libras}\cdot\text{s}/\text{pulgadas}^2$ )
- $N_p$   $n^\circ$  de dientes del piñón o engranaje de entrada
- $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
- $m_g$  relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
- $R_{eq}$  radio equivalente de contacto (pulgadas)

De todo este desarrollo matemático se deduce que la potencia perdida debido al deslizamiento existente en el engrane de los engranajes en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto depende de las siguientes variables:

Constante	Significado	Valor
$C_2$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema internacional	$9 \cdot 10^4$
$C_w$	convierte revoluciones a rad	$2p$
$C_p$	convierte pulgadas en metros	$0,0254$
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$	$1/60$

$C_7$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema internacional	2,05·10 <sup>-7</sup>
$C_{N-L}$	convierte Newtons en libras	0,22473211
$C_{pot}$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema internacional	1,35581795

TABLA 9.10 Constantes empleadas en la ecuación 9.53

Variable	Significado	Unidades
$\theta$	ángulo de presión	grados
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada	rpm
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada	
$m_g$	relación de transmisión entre los engranajes en contacto	
$P$	paso diametral	nº dientes/pulgada
$T_p$	par transmitido	N·m
$F$	ancho de la cara del diente	metros
$m$	viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas	libras·s/pulgadas <sup>2</sup>

TABLA 9.11 Variables principales ecuación 9.53

### 9.4.3. Pérdidas de potencia debidas a la fricción del aire

En cuanto a las pérdidas debidas a la fricción del aire con los elementos rodantes, Anderson y Loewenthal (3 pág. 367) desarrollaron, al igual que sucedió con el modelo que consideraba las pérdidas de potencia debidas al deslizamiento y a la rodadura, un modelo que tenía en cuenta las pérdidas de potencia producidas en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto debidas a la fricción del aire. A continuación se detallarán las ecuaciones que no hayan sido detalladas en el apartado anterior y están relacionadas con este tipo de pérdidas de potencia.

$$\overline{P_{w,g}} = C_3 \cdot \left( 1 + 2,3 \cdot \frac{P \cdot F}{N_p \cdot C_p \cdot m_g} \right) \cdot \left( \frac{n_p \cdot C_w \cdot C_s}{m_g} \right)^{2,8} \cdot \left( \frac{N_p \cdot C_p \cdot m_g}{P} \right)^{4,6} \cdot (0,028 \mu + C_4)^{0,2}$$

EC. 9.54

$$\overline{P_{w,p}} = C_3 \cdot \left( 1 + 2,3 \cdot \frac{P \cdot F}{N_p \cdot C_p} \right) \cdot (n_p \cdot C_w \cdot C_s)^{2,8} \cdot \left( \frac{N_p \cdot C_p}{P} \right)^{4,6} \cdot (0,028 \mu + C_4)^{0,2}$$

EC. 9.55

siendo

$P_{w,g}$  potencia media perdida por la fricción del aire con el engranaje de salida (kilovatios)

$P_{w,p}$  potencia media perdida por la fricción del aire con el engranaje de entrada (kilovatios)

$C_3$  Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_3 = 4,05 \cdot 10^{-13}$ ), en caso opuesto ( $C_3 = 2,82 \cdot 10^{-7}$ )

$C_4$  Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_4 = 2,86 \cdot 10^{-9}$ ), en caso opuesto ( $C_4 = 0,019$ )

$C_w$	convierte revoluciones a rad ( $2\pi$ )
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$ ( $1/60$ )
$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)
$F$	anchura de la cara del diente (metros)
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$P$	paso diametral (nº dientes/pulgada)
$m$	viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas ( $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ )

Para calcular la eficiencia en la transmisión se tendrá en cuenta esta expresión:

$$P_w = P_{w,p} + P_{w,g}$$

EC. 9.56

Estas ecuaciones no ha habido que desarrollarlas más ya que venían en función de los parámetros con los que se van a trabajar. De todo ellas se deduce que la potencia perdida debido a la fricción del aire con los elementos rodantes en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto depende de las siguientes variables:

Constante	Significado	Valor
$C_3$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema internacional	$2,82\cdot 10^{-7}$
$C_p$	convierte pulgadas en metros	0,0254
$C_4$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema	0,019
$C_{pot}$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema	1,35581795

TABLA 9.12 Constantes empleadas en la ecuación 9.56

Variable	Significado	Unidades
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada	rpm
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada	
$m_g$	relación de transmisión entre los engranajes en contacto	
$P$	paso diametral	nº dientes/pulgada
$F$	ancho de la cara del diente	metros
$m$	viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas	libras·s/pulgadas <sup>2</sup>

TABLA 9.13 Variables principales ecuación 9.56

#### 9.4.4. Limitaciones de los tres modelos

En estos modelos se ha empleado una simplificación para poder calcular el promedio de la potencia perdida debido al deslizamiento en vez de calcularla siguiendo el método descrito en el apartado 9.1. El coeficiente de fricción, la velocidad de deslizamiento, el espesor de la capa de aceite y la velocidad de rodadura han sido calculados en el punto medio entre el punto de comienzo del engrane y el punto de engrane. Además, la ecuación para calcular el

coeficiente de fricción se basa en los resultados obtenidos por Benedict y Kelley al realizar ensayos con un frenómetro y se considera de aplicación para una relación entre el espesor de la capa de aceite y la rugosidad de la superficie de contacto menor que 2<sup>19</sup> (3 pág. 367).

---

<sup>19</sup> Ver aptdo. 2.3.

### 9.5. Modelo de Merrit

Merrit (3 pág. 370), desarrolló un modelo basado en el cálculo de la eficiencia de una transmisión de engranajes cilíndricos de dentado recto al igual que hizo Buckingham (3 pág. 369). Se detalla a continuación el modelo:

$$P(\%) = \frac{f}{2} \cdot \pi \left( \frac{1}{N_p} + \frac{1}{N_g} \right) \cdot 100$$

EC. 9.57

siendo

f	coeficiente de fricción
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada
$N_g$	nº de dientes del engranaje de salida

El coeficiente de rozamiento entre ambas superficies de contacto, se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = C_{13} \cdot \left( \frac{1,6}{v^{0,15} \cdot V_e^{0,15} \cdot V_{SM}^{0,35} \cdot R_M^{0,5}} \right)$$

EC. 9.58

siendo

$C_{13}$	Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_{13} = 0,18$ ), en caso opuesto ( $C_{13} = 0,0114$ )
v	viscosidad cinemática del lubricante (pies <sup>2</sup> /s)
$V_e$	velocidad a la entrada (pulgadas/s)
$V_{SM}$	velocidad de deslizamiento de Merrit (pulgadas/s)
$R_M$	radio primitivo de contacto de Merrit (pulgadas)

La velocidad a la entrada para Merrit expresada en (pulgadas/s), viene determinada por la ecuación:

$$V_e = 2V_p \cdot \sin \theta$$

EC. 9.59

siendo

$V_p$	velocidad en la línea de contacto (pulgadas/s)
$\theta$	ángulo de presión (grados)

La velocidad en la línea de contacto, expresada en (pulgadas/s), viene determinada por la expresión (8):

$$V_p = n_p \cdot R_p \cdot \frac{C_w \cdot C_s}{C_p} = n_p \cdot \frac{N_p \cdot C_w \cdot C_s}{2 \cdot P}$$

EC. 9.60

siendo

$C_w$	convierte revoluciones a rad ( $2\pi$ )
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$ ( $1/60$ )
$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)
$R_p$	radio primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada
$P$	paso diametral (nº dientes/ pulgada)
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)

La velocidad de deslizamiento de Merrit, expresada en (pulgadas/s), viene determinada por la ecuación:

$$V_{SM} = V_p \cdot \left[ \frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta \left( \frac{1}{N_p} + \frac{1}{N_g} \right) \right]$$

EC. 9.61

siendo

$V_p$	velocidad en la línea de contacto (pulgadas/s)
$\theta$	ángulo de presión (grados)
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada
$N_g$	nº de dientes del engranaje de salida

Por último, el radio primitivo de contacto de Merrit, expresado en (pulgadas), es igual a:

$$R_M = \frac{1}{C_p} \frac{D_p \cdot D_g}{(D_p + D_g)} \cdot \frac{\text{sen} \theta}{2} = \frac{1}{P} \frac{N_p \cdot m_g}{(1 + m_g)} \cdot \frac{\text{sen} \theta}{2}$$

EC. 9.62

siendo

$P$	paso diametral (nº dientes/pulgada)
$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)
$D_p$	diámetro primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)
$D_g$	diámetro primitivo del engranaje de salida (metros) (ver apartado. 9.7)
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada

- $m_g$  relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
- $\theta$  ángulo de presión (grados)

Teniendo en cuenta las relaciones indicadas en el apartado 9.7, la ecuación 9.57 queda de la siguiente manera:

$$\%perdida = \frac{1}{2} C_{13} \left[ \frac{1,6}{v^{0,15} \left( 2n_p \frac{N_p \cdot C_w \cdot C_s}{2P} \cdot \text{sen}\theta \right)^{0,15} \left( n_p \frac{N_p \cdot C_w \cdot C_s}{2P} \left[ \frac{\pi}{2} \cos\theta \left( \frac{1}{N_p} + \frac{1}{N_p \cdot m_g} \right) \right] \right)^{0,35} \left( \frac{1}{P} \frac{N_p \cdot m_g}{1+m_g} \frac{\text{sen}\theta}{2} \right)^{0,5}} \right] \cdot \pi \left( \frac{1}{N_p} + \frac{1}{N_p \cdot m_g} \right) 100$$

EC. 9.63

siendo

- $C_{13}$  convierte unidades expresadas en el sistema inglés al sistema internacional
- $C_w$  convierte revoluciones a rad ( $2\pi$ )
- $C_s$  convierte  $\text{min}^{-1}$  a  $\text{s}^{-1}$  ( $1/60$ )
- $v$  viscosidad cinemática del lubricante ( $\text{pies}^2/\text{s}$ )
- $P$  paso diametral ( $n^\circ$  dientes/pulgada)
- $m_g$  relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
- $\theta$  ángulo de presión (grados)
- $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)

De todo este desarrollo matemático se deduce que la potencia perdida debido al deslizamiento existente en el engrane de los engranajes en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto depende de las siguientes variables:

Constante	Significado	Valor
$C_{13}$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema internacional	0,0114
$C_w$	convierte revoluciones a rad	$2\pi$
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$	$1/60$

TABLA 9.14 Constantes empleadas en la ecuación 9.63

Variable	Significado	Unidades
$\theta$	ángulo de presión	grados
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de	rpm
$N_p$	$n^\circ$ de dientes del piñón o engranaje de entrada	
$m_g$	relación de transmisión entre los engranajes en	
$P$	paso diametral	$n^\circ$
$v$	viscosidad cinemática del lubricante	$\text{pies}^2/\text{s}$

TABLA 9.15 Variables principales ecuación 9.63

Comparando la ecuación 9.63 del Modelo de Merrit (3) con las ecuaciones 9.15 y 9.48 desarrolladas por Anderson y Loewenthal (6) y (3), con la ecuación 9.25 del Modelo de Shipley y con la ecuación 9.29 del Modelo de Buckingham se ve que la ecuación 9.63 difiere

del resto en que emplea la variable viscosidad cinemática del lubricante ( $\nu$ ) en vez de la variable viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas ( $\mu_0$ ) y que no emplea ni la variable del ancho de cara del diente ( $F$ ) ni la del par transmitido ( $T_p$ ).

#### *9.5.1.1. Limitaciones del modelo*

En este modelo la pérdida de potencia se ha evaluado en un punto situado con respecto del punto de engrane a  $\frac{1}{4}$  del diámetro base a lo largo de la línea de contacto. El paso diametral<sup>20</sup> es igual a 1, la relación de contacto es igual a 1,5 y el diagrama de la carga que soporta el engranaje es trapezoidal. El coeficiente de fricción está basado, como en el caso del Modelo reducido de Anderson y Loewenthal en el propuesto por Benedict y Kelley y en otros modelos (3 pág. 370).

---

<sup>20</sup> Ver apartado 2.3.

## 9.6. Modelo de Goy, Townsend y Zaretsky

Según Goy, Townsend y Zaretsky(7), la pérdida de potencia producida en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto debida al deslizamiento que se produce entre los dientes en contacto viene determinada por la siguiente expresión:

$$Q_s = C_1 f \overline{W_N} v_s$$

EC. 9.64

siendo

$C_1$	Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_1 = 3,03 \cdot 10^{-4}$ ), en caso opuesto ( $C_1 = 10^{-3}$ )
$f$	coeficiente de fricción
$W_N$	carga normal (libras)
$v_s$	velocidad media de deslizamiento (pulgadas/s)

El coeficiente de rozamiento, que debe quedar limitado en el rango 0,01-0,02 (7 pág. 49), viene expresado así:

$$f = 0,0127 \cdot \log \left( \frac{C_6 (\overline{W_N} \cdot C_{N-L})}{\frac{F}{C_p} \cdot \mu \cdot v_s \cdot v_r} \right)$$

EC. 9.65

siendo

$C_6$	Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_6 = 45,94$ ), en caso opuesto ( $C_6 = 29,66$ )
$C_{N-L}$	convierte Newtons en libras ( $C_{N-L} = 0,22473211$ )
$W_N$	carga normal en el punto de contacto (Newtons)
$m$	viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas (libras·s/pulgadas <sup>2</sup> )
$F$	ancho de la cara del diente (metros)
$v_r$	velocidad de rodadura promedio (pulgadas/s)
$v_s$	velocidad de deslizamiento promedio (pulgadas/s)

La carga normal promedio que deben soportar los dientes en contacto es:

$$\overline{W_N} = \frac{T_p}{D_p \cos \theta} = \frac{P \cdot T_p}{C_p \cdot N_p \cos \theta}$$

EC. 9.66

siendo

$W_N$	carga normal promedio en el punto de contacto (Newtons)
$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)
$D_p$	diámetro primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)
$P$	paso diametral (nº dientes/pulgada)
$N_p$	número dientes piñón
$T_p$	par transmitido (N·m)
$\theta$	ángulo de presión (grados)

La velocidad de deslizamiento promedio expresada en pulgadas/s, viene determinada por la siguiente expresión <sup>21</sup>:

$$\overline{V_S} = C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \frac{1 + m_g}{m_g} \cdot \frac{Z}{C_p}$$

EC. 9.67

siendo

$C_w$	convierte revoluciones a rad (2 $\pi$ )
$C_s$	convierte min <sup>-1</sup> a s <sup>-1</sup> (1/60)
$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$Z$	longitud de la línea de contacto (metros)

La longitud de la línea de contacto expresada en (metros) queda determinada por la siguiente ecuación:

$$Z = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{C_p}{P} (N_p + 2) \right)^2 - \left( \frac{C_p \cdot N_p}{P} \cos \theta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \left( \frac{C_p}{P} (N_p \cdot m_g + 2) \right)^2 - \left( \frac{C_p \cdot N_p \cdot m_g}{P} \cos \theta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{C_p}{P} (N_p [1 + m_g]) \right) \cdot \text{sen} \theta \right\}$$

EC. 9.68

La velocidad de rodadura promedio expresada en pulgadas/s, viene determinada por la siguiente expresión:

<sup>21</sup> Se ha corregido un error que existía en el artículo de Gay, Townsend y Zaretsky (7 pág. 49), donde pone en él 0,0262 debe poner 0,1047 que es igual a  $C_w \cdot C_s$ . Esto es debido a que las unidades en que se expresa  $V_S$  en el artículo citado son pulgadas/s y las de las variables  $n_p$  y  $Z$  son rpm y pulgadas, respectivamente.

$$\bar{V}_r = C_w \cdot \frac{C_s}{C_p} \cdot n_p \cdot \left[ D_p \cdot \text{sen}\theta - \frac{Z}{4} \left( \frac{m_g - 1}{m_g} \right) \right]$$

EC. 9.69

siendo

$C_w$	convierte revoluciones a rad (2p)
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$ (1/60)
$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$D_p$	diámetro primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros) (ver apartado. 9.7)
$Z$	longitud de la línea de contacto (metros)

El coeficiente de rozamiento puede expresarse también así:

$$f = 0,0127 \cdot \log \left( \frac{C_6 \cdot \left( \frac{P \cdot T_p \cdot C_{N-L}}{C_p \cdot N_p \cdot \cos \theta} \right)}{\left( \frac{F}{C_p} \cdot \mu \cdot \left( C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \frac{1 + m_g}{m_g} \cdot \frac{Z}{C_p} \right) \cdot \left( C_w \cdot \frac{C_s}{C_p} \cdot n_p \cdot \left[ \frac{C_p \cdot N_p}{P} \cdot \text{sen}\theta - \frac{Z}{4} \left( \frac{m_g - 1}{m_g} \right) \right] \right) \right)^2} \right)$$

EC. 9.70

siendo

$C_6$	Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_6 = 45,94$ ), en caso opuesto ( $C_6 = 29,66$ )
$C_w$	convierte revoluciones a rad (2p)
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$ (1/60)
$C_p$	convierte pulgadas en metros (0,0254)
$C_{N-L}$	convierte Newtons en libras ( $C_{N-L} = 0.22473211$ )
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
$m_g$	relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
$Z$	longitud de la línea de contacto (metros)
$m$	viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas (libras·s/pulgadas <sup>2</sup> )
$F$	ancho de la cara del diente (metros)
$P$	paso diametral (nº dientes/pulgada)

Teniendo en cuenta las relaciones del apartado 9.7, la ecuación 9.39 queda desarrollada de la siguiente manera:

$$\bar{P}_s = C_1 \left\{ 0,0127 \log \left[ \frac{C_6 \left( \frac{PT_p \cdot C_{N-L}}{C_p \cdot N_p \cos \theta} \right)}{\left( \frac{F}{C_p} \mu \left( C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \frac{1+m_g \cdot Z}{m_g \cdot C_p} \right) \left( C_w \cdot \frac{C_s \cdot n_p}{C_p} \left[ \frac{C_p \cdot N_p \cdot \sin \theta}{P} - \frac{Z}{4} \left( \frac{m_g - 1}{m_g} \right) \right] \right)^2} \right] \right\} \left( \frac{PT_p \cdot C_{N-L}}{C_p \cdot N_p \cos \theta} \right) \left[ C_w \cdot C_s \cdot n_p \cdot \frac{1+m_g \cdot Z}{m_g \cdot C_p} \right]$$

EC. 9.71

siendo

- $C_1$  Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_1 = 3,03 \cdot 10^{-4}$ ), en caso opuesto ( $C_1 = 10^{-3}$ )
- $C_6$  Si las variables de la ecuación están expresadas en unidades del sistema americano ( $C_6 = 45,94$ ), en caso opuesto ( $C_6 = 29,66$ )
- $C_p$  convierte pulgadas en metros (0,0254)
- $C_w$  convierte revoluciones a rad ( $2\pi$ )
- $C_s$  convierte  $\text{min}^{-1}$  a  $\text{s}^{-1}$  (1/60)
- $C_{N-L}$  convierte Newtons en libras ( $C_{N-L} = 0.22473211$ )
- $P$  paso diametral (nº dientes/pulgada)
- $N_p$  número dientes piñón
- $n_p$  velocidad de rotación del piñón o engranaje de entrada (rpm)
- $m_g$  relación de transmisión ( $N_g/N_p$ )
- $\theta$  ángulo de presión (grados)
- $T_p$  par transmitido (N·m)
- $Z$  longitud de la línea de contacto (metros)
- $m$  viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas (libras·s/pulgadas<sup>2</sup>)
- $F$  ancho de la cara del diente (metros)

De todo este desarrollo matemático se deduce que la potencia perdida debido al deslizamiento existente en el engrane de los engranajes en una transmisión por engranajes cilíndricos de dentado recto depende de las siguientes variables:

Constante	Significado	Valor
$C_1$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema internacional	$2 \cdot 10^{-3}$
$C_w$	convierte revoluciones a rad	$2\pi$
$C_p$	convierte pulgadas en metros	0,0254
$C_s$	convierte $\text{min}^{-1}$ a $\text{s}^{-1}$	1/60

$C_6$	convierte unidades del sistema americano en unidades del sistema internacional	29,66
$C_{N-L}$	convierte Newtons en libras	0,22473211

TABLA 9.16 Constantes empleadas en la ecuación 9.71

Variable	Significado	Unidades
$\theta$	ángulo de presión	grados
$n_p$	velocidad de rotación del piñón o engranaje de	rpm
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada	
$m_g$	relación de transmisión entre los engranajes en	
$P$	paso diametral	nº
$T_p$	par transmitido	N·m
$F$	ancho de la cara del diente	metros
$m$	viscosidad absoluta del lubricante en	libras·s/pulgadas <sup>2</sup>

TABLA 9.17 Variables principales ecuación 9.71

Comparando la ecuación 9.71 del Modelo de Goy, Townsend y Zaretsky (7) con las ecuaciones 9.15 y 9.48 desarrolladas por Anderson y Loewenthal (6) y (3) se ve que la ecuación 9.71 es idéntica a la del Modelo reducido de Anderson y Loewenthal (ec. 9.48). Así pues, este modelo sigue teniendo en cuenta las siguientes variables al contrario que el Modelo de Shipley (ec. 9.25) y que el Modelo de Buckingham (ec. 9.29):

- viscosidad absoluta del lubricante en condiciones atmosféricas ( $\mu_0$ )
- ancho de la cara del diente ( $F$ )
- par transmitido ( $T_p$ )

### 9.7. Relaciones geométricas comunes a todos los modelos

Estas relaciones han sido obtenidas del libro Manual de Engranajes. Diseño, manufactura y aplicación de engranajes (8).

$$\begin{aligned}
 D_g &= \frac{N_g}{P}; & D_p &= \frac{N_p}{P} \\
 D_{o,p} &= D_p \cdot \cos \theta; & D_{o,g} &= D_g \cdot \cos \theta \\
 D_{a,p} &= D_p + \frac{2}{P}; & D_{a,g} &= D_g + \frac{2}{P} \\
 p_b &= \frac{\pi \cdot D_{o,p}}{N_p}; & p &= \frac{\pi \cdot D_p}{N_p}; & P \left( \text{en } \frac{\text{n}^\circ \text{ dientes}}{\text{metros}} \right) &= \frac{N_p}{D_p} = \frac{\pi}{p} \\
 R_{b,p} &= 0,5 \cdot (D_p \cdot \cos \theta) = \frac{N_p \cdot \cos \theta}{2 \cdot P}; & R_{b,g} &= 0,5 \cdot (D_g \cdot \cos \theta) = \frac{N_g \cdot \cos \theta}{2 \cdot P} \\
 R_{t,p} &= 0,5 \cdot \left( D_p + \frac{2}{P} \right) = \frac{(N_p + 2)}{2 \cdot P}; & R_{t,g} &= 0,5 \cdot \left( D_g + \frac{2}{P} \right) = \frac{(N_g + 2)}{2 \cdot P} \\
 p_b &= \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{b,p}}{N_p}; & p &= \frac{2 \cdot \pi \cdot R_p}{N_p}; & P \left( \text{en } \frac{\text{n}^\circ \text{ dientes}}{\text{metros}} \right) &= \frac{N_p}{2 \cdot R_p} = \frac{\pi}{p}
 \end{aligned}$$

EC.9.1

siendo

$D_g$	diámetro primitivo del engranaje de salida (metros)
$D_p$	diámetro primitivo del piñón o engranaje de entrada (metros)
$P$	paso diametral (nº dientes/ metro)
$D_{o,p}$	diámetro base del piñón o engranaje de entrada (metros)
$D_{o,g}$	diámetro base del engranaje de salida (metros)
$D_{a,p}$	diámetro exterior del piñón o engranaje de entrada (metros)
$D_{a,g}$	diámetro exterior del engranaje de salida (metros)
$R_{b,p}$	radio base del piñón o engranaje de entrada (metros)
$R_{b,g}$	radio base del engranaje de salida (metros)
$R_{t,p}$	radio exterior del piñón o engranaje de entrada (metros)
$R_{t,g}$	radio exterior del engranaje de salida (metros)
$p$	paso circunferencial (metros/nº dientes)
$p_b$	paso circunferencial base (metros/nº dientes)
$N_p$	nº de dientes del piñón o engranaje de entrada
$N_g$	nº de dientes del engranaje de salida

## 10. TEORÍA DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

### 10.1. Introducción

La teoría de diseño de experimentos es normalmente empleada en trabajos experimentales donde la variable objetivo que se está estudiando depende de múltiples factores. El diseño factorial  $2^k$  es una de las herramientas más empleadas por los investigadores y de las más importantes dentro de la teoría del diseño de experimentos. Previamente a realizar los experimentos es útil tener una idea de, entre todas las variables que intervienen en el experimento, cuáles deben ser el principal foco de atención (9).

Este diseño se encarga de analizar el efecto que  $k$  variables tienen sobre la variable objetivo, teniendo en cuenta que cada una de las  $k$  variables puede tomar un valor alto o bajo, es decir, existen dos niveles de valores que pueden tomar cada variable. Estos valores pueden ser cuantitativos o cualitativos.

Con un diseño  $2^k$  existen  $2^k$  combinaciones posibles de las variables a tener en cuenta en sus dos niveles. Cuantos más valores hay involucrados en el estudio mayor número de combinaciones hay que analizar y ello acarrea más dificultades para llevar a cabo el diseño de experimentos así como más dificultad para detectar a las variables más significativas.

En esas situaciones los diseños suelen verse reducidos habiendo que agrupar factores e interacciones y se requieren ciertas modificaciones en la metodología del diseño de experimentos (10). En el caso que nos ocupa no será necesario ya que emplearemos un diseño con  $k = 4$ .

Los datos con los que se va a realizar el diseño de experimentos suelen haber sido obtenidos previamente mediante la experimentación. En ese caso, para cada una de las combinaciones posibles de los  $k$  factores considerados existen varios valores de la variable objetivo (tantos como repeticiones haya tenido el experimento realizado en esas condiciones). Sin embargo, existen ocasiones en las que llevando a cabo las simulaciones por ordenador el número de veces que se lleva a cabo dicho experimento no altera los resultados obtenidos ya que los algoritmos de cálculo empleados, siempre se comportan de la misma manera porque no existe nada que altere su comportamiento. En ese caso se cuenta con un único dato para cada una de las  $2^k$  combinaciones de variables a analizar. Ésta precisamente es la situación en que se ha llevado a cabo este estudio, dado que la fase de experimentación en el laboratorio se pretende realizar posteriormente a este estudio previo.

A continuación va a detallarse la metodología que se ha empleado en el diseño de experimentos llevado a cabo en este trabajo.

## 10.2. Diseño empleado

Para determinar la influencia o el efecto que las variables seleccionadas en cada caso tienen sobre la variable objetivo en cada modelo se va a aplicar la teoría de los diseños de experimentos. Se empleará un diseño experimental factorial  $2^k$  siendo  $k$  el número de variables en estudio (en este apartado se muestra  $k = 4$ ) y 2 el número de niveles para restringir los valores que éstas pueden tomar a sus valores máximos y mínimos.

Dado que este estudio se va a llevar a cabo computacionalmente y no se van a obtener datos experimentales, la repetibilidad obtenida en los resultados que puedan obtenerse en cada una de las situaciones de cálculo que se lleven a cabo es del 100 %, ya que las ecuaciones no van a variar y no van a existir perturbaciones que puedan alterar o intervenir en el resultado de manera indirecta e impredecible. Tratándose entonces de un estudio teórico, el número de réplicas de este diseño que van a tener las  $2^4 = 16$  combinaciones posibles es de 1.

A continuación se muestra una tabla en la que se describen todas las combinaciones entre las variables de estudio (de ahora en adelante llamados factores) y los valores que pueden tomar las variables que emplearemos para denotar si los factores se encuentran en su nivel alto o bajo.

A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD	Y
-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+	o
-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	d
-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	cd
-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	-	bcd
-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	c
-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	b
+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	a
-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	+	+	bd
+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-	abc
-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	+	+	bc
+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+	ac
+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	ad
+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	acd
+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+	ab
+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-	abd
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	abcd

TABLA 10.1 Combinaciones y sus variables ( $2^4$ )

### 10.2.1. Estimadores

$$\hat{\mu} = \frac{o+a+b+c+d+ab+ac+ad+bc+bd+cd+abc+abd+acd+bcd+abcd}{2^4}$$

EC. 10.1

siendo

$m$  estimador del efecto de todos los factores (la media aritmética de estos)

$$\hat{A} = \frac{a+ab+ac+ad+abc+abd+acd+abcd}{8} - \frac{o+b+c+d+bc+bd+cd+bcd}{8}$$

EC. 10.2

$$\hat{B} = \frac{b+ab+bc+bd+abc+abd+bcd+abcd}{8} - \frac{o+a+c+d+ac+ad+cd+acd}{8}$$

EC. 10.3

$$\hat{C} = \frac{c+ac+bc+cd+abc+acd+bcd+abcd}{8} - \frac{o+a+b+d+ab+ad+bd+abd}{8}$$

EC. 10.4

$$\hat{D} = \frac{d+ad+bd+cd+abd+acd+bcd+abcd}{8} - \frac{o+a+b+c+ab+ac+bc+abc}{8}$$

EC. 10.5

siendo

A, B, C, D            estimador del efecto del factor A, B, C y D respectivamente

$$AB = \frac{o+d+cd+c+abc+ab+abd+abcd}{8} - \frac{a+b+ac+ad+bc+bd+acd+bcd}{8}$$

EC. 10.6

$$AC = \frac{o+d+b+bd+abc+ac+acd+abcd}{8} - \frac{a+c+ab+ad+bc+cd+abd+bcd}{8}$$

EC. 10.7

$$AD = \frac{o+c+b+bc+ad+acd+abd+abcd}{8} - \frac{a+d+ab+ac+bd+cd+abc+bcd}{8}$$

EC. 10.8

$$BC = \frac{o+d+bcd+a+abc+bc+ad+abcd}{8} - \frac{b+c+ab+ac+bd+cd+abd+acd}{8}$$

EC. 10.9

$$BD = \frac{o+bcd+c+a+bd+ac+abd+abcd}{8} - \frac{b+d+ab+ad+bc+cd+abc+acd}{8}$$

EC. 10.10

$$CD = \frac{o+cd+bcd+b+a+acd+ab+abcd}{8} - \frac{c+d+ac+ad+bc+bd+abc+abd}{8}$$

EC. 10.11

$$ABC = \frac{cd+c+b+a+bd+abc+ad+abcd}{8} - \frac{o+d+ab+ac+bc+abd+acd+bcd}{8}$$

EC. 10.12

$$ABD = \frac{d+cd+b+a+bc+ac+abd+abcd}{8} - \frac{o+c+ab+ad+bd+abc+acd+bcd}{8}$$

EC. 10.13

$$BCD = \frac{d+bcd+c+bd+bc+ac+ad+abcd}{8} - \frac{o+a+b+ab+cd+abc+acd+abd}{8}$$

EC. 10.14

$$ABCD = \frac{o+cd+bd+bc+ac+ad+ab+abcd}{8} - \frac{a+b+c+d+abc+abd+acd+bcd}{8}$$

EC. 10.15

siendo el resto de estimadores los que estiman los efectos de las correspondientes interacciones entre los factores A, B, C y D.

La variable objetivo va a depender de los niveles en que se muevan las variables representadas por los factores A, B, C y D. Cada factor va a moverse en dos niveles, de ahí que el estudio de experimentos se denomine factorial del tipo  $2^k$ . Los niveles se describirán para cada caso estudiado anteriormente en función de las variables seleccionadas.

### 10.3. Significatividad de los efectos

Una vez que se han calculado los efectos de los factores principales sobre la variable objetivo y sus interacciones, es necesario determinar cuáles son más relevantes a la hora de influir en el valor de la variable objetivo. Para ello se han empleado tres métodos que permiten obtener una idea aproximada de la influencia de cada uno de los factores sobre la variable objetivo de forma gráfica y un cuarto método que permite cuantificar y descartar los efectos más significativos de los factores principales y sus interacciones.

Los métodos gráficos empleados son:

- Gráfico de efectos principales
- Diagrama de Pareto
- Gráfico de distribución normal

El 4º método es:

- Método de la MEDA

#### 10.3.1. Gráfico de los efectos principales

Consiste en representar las medias estimadas de los factores principales para los niveles - y +, es decir, se calcula la media aritmética de todos los estimadores en los que cada uno de los factores principales respectivamente se encuentran en el nivel + y respectivamente en el nivel -. Como ejemplo, véase a continuación el caso siguiente:

A	B	C	D	Y
-	-	-	-	o
-	-	-	+	d
-	-	+	+	cd
-	+	+	+	bcd
-	-	+	-	c
-	+	-	-	b
+	-	-	-	a
-	+	-	+	bd
+	+	+	-	abc
-	+	+	-	bc
+	-	+	-	ac
+	-	-	+	ad
+	-	+	+	acd
+	+	-	-	ab
+	+	-	+	abd
+	+	+	+	abcd

TABLA 10.2 Combinaciones y sus variables

Para el factor A será:

$$A^+ = \frac{a + ab + ac + ad + acd + abd + abcd + abc}{8}$$

EC. 10.16

$$A^- = \frac{o+b+c+d+cd+bcd+bd+bc}{8}$$

EC. 10.17

Para el factor B, C y D se procederá de la misma manera. De esta forma se obtiene un gráfico que permite analizar cómo influye cada factor principal en la variable objetivo a través de considerar las pendientes de las rectas representadas.

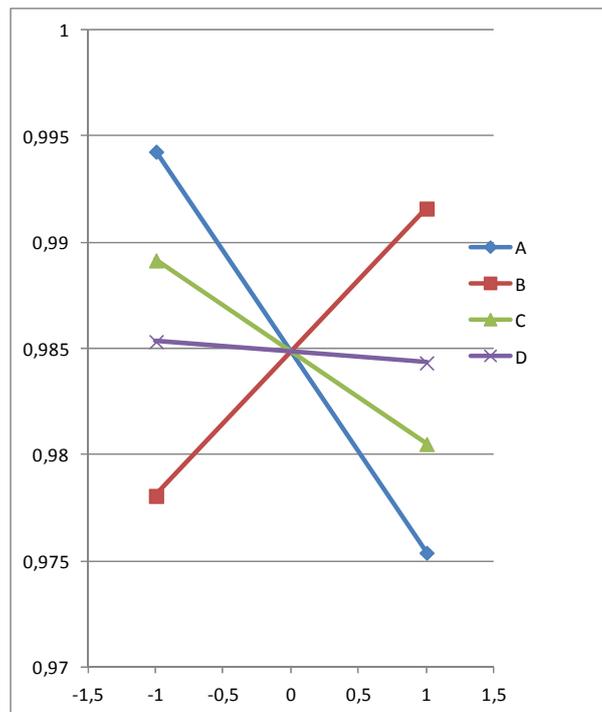


FIGURA 10.1 Ejemplo del gráfico de efectos principales

### 10.3.2. Diagrama de Pareto

Consiste en representar en un diagrama de barras horizontal cada uno de los efectos calculados de cada factor y de sus interacciones. Visualmente se aprecia qué efectos ejercen mayor influencia sobre la variable objetivo. En este gráfico se aprecia que si los efectos de las variables principales son muy pequeños, cualquier interacción en la que intervengan también se verá disminuida debido a la poca relevancia de ese factor principal. En el gráfico se representan los efectos con su signo, pero si queremos que todos aparezcan uno encima de otro para poder compararlos entre ellos más fácilmente puede graficarse el efecto en valor absoluto en vez del efecto con su signo, así saldrán todos representados sobre el eje X positivo.

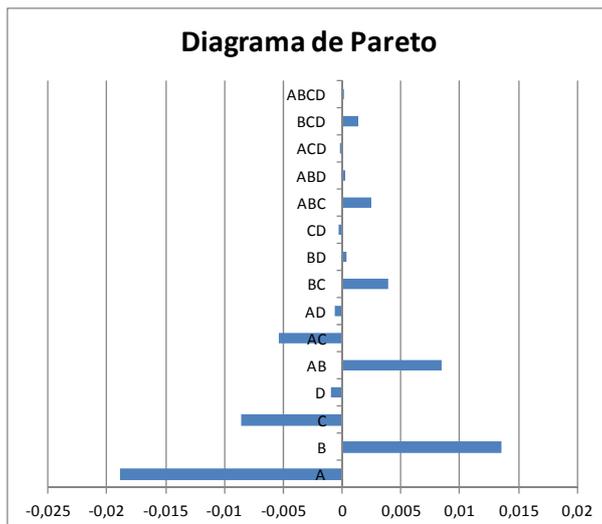


FIGURA 10.2 Ejemplo del diagrama de Pareto

### 10.3.3. Gráfico de distribución normal

Este gráfico se emplea para verificar si los efectos de los factores y sus interacciones siguen una distribución normal. Para ello se representan estos frente a unos percentiles y en función de cómo están distribuidos los efectos de los factores y de sus interacciones en torno a la línea que define la normalidad de los mismos se determina si el efecto es o no significativo. Cuanto más se aleje un efecto de la línea más significativo será. (11)

Los percentiles están calculados empleando la función “DISTR.NORM.ESTAND.INV(probabilidad)” de Microsoft Excel que, para una probabilidad dada, calcula el inverso de la distribución normal estándar acumulada. Para esta distribución, la media es 0 y la desviación estándar es 1. El argumento “probabilidad” contiene un valor numérico entre 0 y 1. Indica la probabilidad para la cual desea conocer el inverso de la distribución normal estándar. En la tabla que se muestra en el apartado. 10.4 aparecen los percentiles (columna z) en función de las probabilidades (ver ec. 10.18).

$$probabilidad = \frac{(i - 0,5)}{n}$$

EC. 10.18

En este estudio, si k=3, n=7 (A, B, C, AB, AC, BC y ABC) si k=4 entonces n=15 (A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD, ABCD)

i	probabilidad en %
1	3,33333333
2	10
3	16,6666667
4	23,3333333
5	30
6	36,6666667
7	43,3333333
8	50

9	56,6666667
10	63,3333333
11	70
12	76,6666667
13	83,3333333
14	90
15	96,6666667

TABLA 10.3 Percentiles para k=3 y k=4

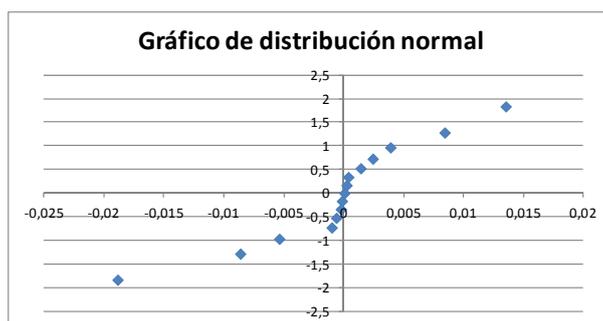


FIGURA 10.3 Ejemplo de gráfico de distribución normal

#### 10.3.4. Método de la MEDA

Este método emplea la mediana de las desviaciones a la mediana para poder establecer un valor a partir del cual se considerarán los efectos como significativos.

Con los efectos de las interacciones de los factores ordenados de menor a mayor, se calcula la mediana. A partir de ahí se determinan las desviaciones de estos con respecto de la mediana y se vuelven a ordenar de menor a mayor para volver a calcular la mediana de estas desviaciones, obteniendo así la MEDA.

El criterio a seguir es que un efecto es significativo sí se cumple que:

$$|\text{Efecto}| \geq 2,2 \cdot \frac{\text{MEDA}}{0,675}$$

EC. 10.19

A partir de aquí, con aquellos efectos considerados significativos se puede construir una ecuación que modele el comportamiento de la función principal teniendo en cuenta únicamente aquellas variables principales y sus interacciones más significativas. Esta función únicamente tendrá validez en el entorno definido al definir los niveles máximos y mínimos que pueden tomar las variables principales del problema en estudio.

Este es un ejemplo para un caso de k=3 en el que únicamente los efectos A, B y AC han sido significativos.

$$y = \mu + \frac{A}{2}x_1 + \frac{B}{2}x_2 + \frac{AC}{2}x_1x_3$$

EC. 10.20

siendo

$m$  estimador del efecto de todos los factores (la media aritmética de estos)

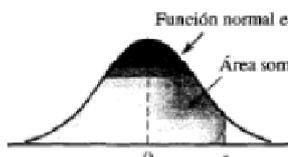
$A, B, AC$  estimador del efecto del factor A y B y de la interacción de los factores A y C, respectivamente

$x_1, x_2$  y  $x_3$  variables asociadas a los factores A, B y C respectivamente

### 10.4. Tabla para el cálculo de percentiles con la distribución normal estándar

**Tabla A.3** Áreas de la curva normal estándar

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$   
 Función normal estándar de la densidad  
 Área sombreada =  $\Phi(z)$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0038
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3482
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

(continúa)

TABLA 10.4 Tabla 1 Áreas de la distribución normal estándar (cálculo de percentiles) (11 pág. 740)

**Tabla A.3** Áreas de la curva normal estándar (cont.)  $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

<i>z</i>	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

TABLA 10.5 Tabla 2 Áreas de la distribución normal estándar (cálculo de percentiles) (11 pág. 741)



## 11. BIBLIOGRAFÍA

1. *Load-independent power losses of gear systems: A review.* **Stavytskyy, Valeriy, et al.** 10B, 2010, TEKA Kom. Mot. i Energ. Roln., pp. 205-213.
2. **Xu, Hai.** Development of a generalized mechanical efficiency prediction methodology for gear pairs. [Dissertation]. Ohio : The Ohio State university, 2005. p. 258.
3. *Comparison of Spur Gear Efficiency. Prediction Methods.* **Anderson, Neil E. and Loewenthal, Stuart H.** s.l. : NASA-CP-2210, 1983, pp. 365-382.
4. *Modelo analítico de rendimiento de engranajes rectos convencionales.* **Pleguezuelos, Miguel and Pedrero, José Ignacio.** 1, 2009, Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica, Vol. 13, pp. 27-38.
5. **Anderson, Neil E. and Loewenthal, Stuart H.** *Effect of geometry and operating conditions on spur gear system power loss.* AVRADCOM, NASA. San Francisco : National Technical Information Service. US Department of Commerce, 1980. Technical Memorandum 81426. 80-C-2.
6. —. *Spur-Gear-System Efficiency at part and full load.* Scientific and Technical Information Office, NASA. AVRADCOM. Washington, D.C. : s.n., 1980. p. 39, Technical report. 162.
7. **Goy, John J., Townsend, Dennis P. and Zaretsky, Erwin V.** *Gearing.* Washington, D.C. : NASA, 1985. p. 76, AVSCOM Technical Report. NASA-RP-1152.
8. **Dudley, Darle W.** *Manual de Engranajes. Diseño, manufactura y aplicación de engranajes.* México : Compañía Editorial Continental S.A., 1973.
9. **Montgomery, Douglas C. and Runger, George C.** *Applied statistics and probability for engineers.* 3ª. s.l. : John Wiley and Sons Inc., 2003.
10. **Montgomery, Douglas C.** *Design and analysis of experiments.* 5ª. s.l. : John Wiley and Sons, Inc., 2001. p. 684.
11. **Devore, Jay L.** *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias.* Sexta. México : Thomson Learning, 2005.
12. *Determination of power losses in gear transmissions with rolling and sliding friction incorporated.* **Michlin, Y. and Myunster, V.** 37 (2002), Israel : Elsevier Science Ltd., 2001, pp. 167-174.