



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

Design and construction of a Tesla coil

Autor:

Lucía Aguilera Royo

Director:

Jesús Letosa Fleta

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela de Ingeniería y Arquitectura
Grado en Ingeniería Eléctrica
Curso 2020/2021

AGRADECIMIENTOS

A mi madre, por estar ahí apoyándome durante la carrera y motivándome a luchar por mis sueños.

A las personas que han colaborado en este proyecto y han ayudado a realizarlo.

Y a todas las personas que he ido conociendo a lo largo de estos años de carrera, que de una manera o de otra me han acompañado en este recorrido.

RESUMEN

La bobina de Tesla es un generador electromagnético de alta tensión que se compone de dos circuitos resonantes (L-C) acoplados formando un transformador resonante de alta frecuencia.

Se ha utilizado a lo largo del tiempo para demostraciones e investigaciones, aunque su idea original era para distribuir energía inalámbrica a lo largo del planeta.

Este proyecto ha consistido en el diseño y construcción de una bobina de Tesla a partir de cálculos numéricos y simulaciones.

Para ello se han desarrollado fórmulas para su cálculo analítico a partir de unos valores iniciales de diseño, que posteriormente han sido comparados con las simulaciones en MATLAB Y FEMM.

Por último, se ha construido la bobina y verificado de forma experimental para comprobar que los valores teóricos y simulados coinciden con las mediciones.

“Si lo que quieras es encontrar los secretos del Universo,
piensa en términos de energía, frecuencia y vibración”

Nikola Tesla



DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD

(Este documento debe entregarse en la Secretaría de la EINA, dentro del plazo de depósito del TFG/TFM para su evaluación).

D./Dª. **Lucía Aguilera Royo** , en
aplicación de lo dispuesto en el art. 14 (Derechos de autor) del Acuerdo de 11 de
septiembre de 2014, del Consejo de Gobierno, por el que se aprueba el
Reglamento de los TFG y TFM de la Universidad de Zaragoza,
Declaro que el presente Trabajo de Fin de (Grado/Máster)
Grado en Ingeniería Eléctrica (Título del Trabajo)
Diseño y construcción de una bobina de Tesla

es de mi autoría y es original, no habiéndose utilizado fuente sin ser
citada debidamente.

Zaragoza, 20 de Junio del 2021

AGUILERA ROYO LUCIA - 25207443H

Firmado
digitalmente por
AGUILERA ROYO
LUCIA - 25207443H
Fecha: 2021.06.20
22:07:16 +02'00'

Fdo: **Lucía Aguilera Royo**

ÍNDICE GENERAL

MEMORIA	3
1. Introducción	4
1.1. Objetivo del proyecto	4
1.2. Historia.....	4
2. Funcionamiento de la bobina de Tesla	5
2.1. Bobina de Tesla clásica	6
2.2. Transferencia de energía	7
3. Diseño de los elementos constitutivos	9
3.1. Transformador de alta tensión	9
3.2. Bobina secundaria.....	9
3.3. Toroide.....	11
3.4. Condensador primario	13
3.5. Bobina primaria	14
4. Simulación del sistema.....	15
4.1. Software de elementos finitos FEMM	16
4.1.1. Problema magnetostático	16
4.1.2. Problema electrostático	18
4.2. MATLAB.....	19
4.2.1. Cálculo analítico.....	19
4.2.2. Análisis por circuito equivalente (Simulink)	22
4.2.3. Comparativa analítica y circuito equivalente	24
5. Construcción.....	24
5.1. Toroide.....	25
5.2. Bobina secundaria	25
5.3. Bobina primaria	26
5.4. Explosor	26
5.5. Resistencias de protección	26
5.6. Condensador primario.....	27
5.7. Circuito completo	28
6. Comprobación experimental	28
6.1. Frecuencia de resonancia del primario	29
6.2. Frecuencia de resonancia del secundario.....	29
6.3. Parámetros del circuito primario.....	30
6.3.1. Bobina primaria	30
6.3.2. Condensador primario.....	31
6.4. Parámetros del circuito secundario.....	31
6.4.1. Bobina secundaria y toroide.....	31
6.5. Coeficiente de inducción mutua y coeficiente de acoplamiento	32
6.6. Comprobación del funcionamiento total de la bobina.....	32
6.6.1. Funcionamiento del explosor	32

6.6.2. Medida en bornes del condensador primario.....	33
7. Comparación de los resultados.....	35
8. Conclusión	37
ANEXOS.....	38
1. Bibliografía	39
2. Configuración de las bobinas	42
3. Código para el cálculo analítico.....	44
4. Fórmulas para el cálculo analítico.....	49
5. Medidas básicas de seguridad	52
6. Información del software empleado.....	53
7. Modificaciones en la bobina	55
7.1. Toroide	55
7.2. Bobina primaria solenoidal	55
7.3. Bobina primaria plana.....	56

MEMORIA

1. Introducción

1.1. Objetivo del proyecto

Los objetivos del proyecto son:

- El cálculo y diseño de los elementos de una bobina de Tesla.
- La construcción de la bobina.
- Los ensayos que verifican su correcto funcionamiento.

Para ello, en primer lugar, se realiza una búsqueda bibliográfica para el desarrollo y fundamentación de las expresiones utilizadas en los cálculos teóricos.

Una vez obtenidos los cálculos teóricos, se realizan simulaciones numéricas de los parámetros de diseño a partir del método de elementos finitos con el programa FEMM.

Tras la etapa de diseño quedan determinados los valores de los componentes de la máquina, los cuales permiten comenzar el proceso de construcción.

Y, por último, se realizan los ensayos de laboratorio pertinentes para verificar su funcionamiento y compararlos con los valores teóricos anteriormente calculados.

1.2. Historia

Nikola Tesla fue un ingeniero serbio-americano que nació en el siglo XIX. Desde pequeño se interesó por la electricidad. Empezó estudiando ingeniería eléctrica en la Escuela Politécnica de Graz (Austria) y terminó en Praga.

A principios de 1881, Tesla se trasladó a Budapest para trabajar en una compañía americana de telégrafos. Un año más tarde, Tesla conseguiría trabajo diseñando dinamos en París para la compañía de Thomas Alva Edison.

En 1884 se trasladó a América con la compañía de Edison para realizar una mejora de las dinamos que producía. En la compañía de Edison en América, solo duró 6 meses, ya que hubo discrepancias en las ideas que tenían Edison y Tesla [1].

Esto llevó a la denominada “Guerra de las Corrientes” ya que Tesla estaba trabajando en la corriente alterna, construyendo un transformador, que demostraba que las dinamos de corriente continua que diseñaba Edison eran ineficaces para el transporte de energía a larga distancia.

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

A lo largo de su vida, Tesla patentó 278 inventos, en los cuales se pueden encontrar los rayos X, el Teslascopio, el motor asíncrono, la central hidroeléctrica y la bobina de Tesla, en la cual se centra este proyecto.

A partir del estudio de Heinrich Hertz de las ondas de radio, Tesla se interesó por el estudio de la corriente alterna de alta frecuencia.

Tesla comprobó que sus alternadores solo llegaban a 20 kHz y al querer alcanzar más frecuencia, se centró en los circuitos resonantes excitados por descargas eléctricas aplicados a los transformadores. Esto le llevó a descubrir que para mejorar la linealidad de los transformadores y evitar las pérdidas por corrientes parásitas, tenía que construirlos sin núcleo de hierro.

Para construir la bobina, Tesla unió este nuevo transformador a un condensador, una bobina de inducción y un explosor que cortocircuita el circuito. Una vez que diseñó este circuito observó que si se colocaba otro circuito resonante secundario en resonancia con el primario se podían elevar las tensiones en el secundario [2].

La bobina de Tesla definitiva se presentó en 1891, en el Columbia College con una presentación de su funcionamiento.

Esta se ha utilizado a lo largo del tiempo para demostraciones e investigaciones, aunque su idea original era para distribuir energía inalámbrica a lo largo del planeta [1].

2. Funcionamiento de la bobina de Tesla

La bobina de Tesla es un generador electromagnético de alta tensión que se compone de dos circuitos resonantes (L-C) acoplados formando un transformador resonante de alta frecuencia. Al no estar conectados los dos circuitos físicamente, se crea la unión a través del acoplamiento magnético de las bobinas, que permite la transmisión de energía. Las bobinas se acoplan en aire, sin núcleo magnético.

El modelo que se estudia en este proyecto es el clásico, es decir; el desarrollado por Tesla. Aunque existe otro modelo, llamado estado sólido. Este modifica el circuito clásico sustituyendo el transformador de red por una fuente de potencia comutada de onda cuadrada de alta frecuencia y elimina el explosor, necesitando dos etapas, una de control y otra de potencia [3].

Al ser un transformador resonante, la tensión de salida depende de la relación del condensador primario y del secundario, porque a partir de estos dos condensadores se puede obtener la transferencia de energía entre circuitos.

2.1. Bobina de Tesla clásica

Según se puede observar en la **Ilustración 1**, el circuito primario se cierra cuando se ceba el arco en el explosor, que está conectado en serie al condensador primario C_1 y a la bobina primaria L_1 . La resistencia R_1 que aparece en el circuito es la resistencia equivalente de la bobina primaria L_1 .

El circuito secundario está constituido por la bobina secundaria L_2 , la resistencia R_2 y la capacidad C_2 , que es la unión de la capacidad parásita que se crea en la bobina secundaria L_2 y la capacidad del toroide.

Se acoplan ambos circuitos a partir de la inductancia mutua [5].

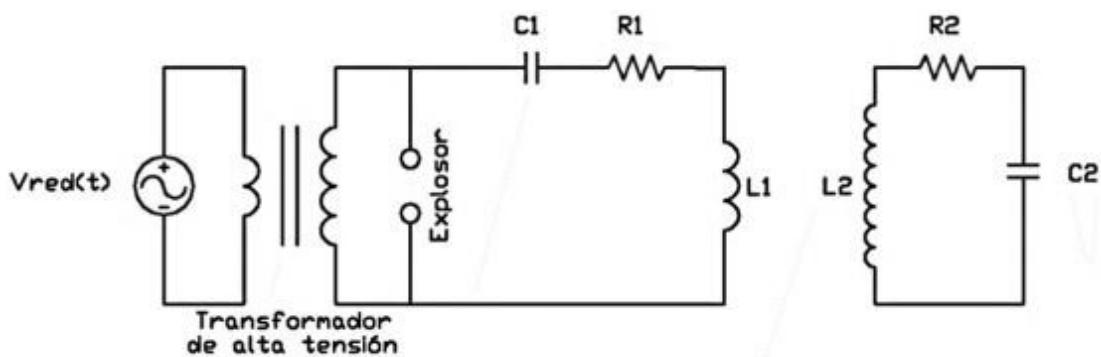


Ilustración 1. Circuito equivalente de una bobina de Tesla clásica [3]

A partir del esquema de la **Ilustración 1**, se resuelve el circuito a partir de la Ley de Kirchhoff de tensión, donde la suma de las tensiones del circuito es igual a cero, sin tener en cuenta el transformador de alta tensión. Además, la intensidad se puede obtener a partir de la derivada respecto al tiempo de la carga de los condensadores [5]. Si se desprecian las resistencias R_1 y R_2 , el circuito puede resolverse analíticamente (**Anexo 4**).

De estos cálculos podemos obtener los siguientes resultados:

- Frecuencias de resonancia en el circuito acoplado (ecuaciones A4.16 y A4.17):

$$w_1 = \omega_2 * \sqrt{\frac{(1+T) - \sqrt{(1-T)^2 + 4 * k^2 * T}}{2 * (1 - k^2)}} \quad (2.1)$$

$$f_1 = \frac{w_1}{2 * \pi} \quad (2.2)$$

$$w_2 = \omega_2 * \sqrt{\frac{(1+T) + \sqrt{(1-T)^2 + 4 * k^2 * T}}{2 * (1 - k^2)}} \quad (2.3)$$

$$f_2 = \frac{w_2}{2 * \pi} \quad (2.4)$$

- Tensión en el primario:

$$v_1(t) = V_1 * \cos\left(\frac{w_2 + w_1}{2} * t\right) * \cos\left(\frac{w_2 - w_1}{2} * t\right) \quad (2.5)$$

- Intensidad en el primario (ecuaciones: A4.2, A4.13, 2.5):

$$i_1(t) = -C_1 * 6000 * \left(\frac{w_1 * \sin(w_1 * t) * \cos(w_2 * t) + w_2}{* \cos(w_1 * t) * \sin(w_2 * t)} \right) \quad (2.6)$$

- Tensión en el secundario:

$$v_2(t) = \frac{2 * k * V_1}{\sqrt{(1-T)^2 + 4 * k^2 * T}} * \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} * \sin\left(\frac{w_2 + w_1}{2} * t\right) * \sin\left(\frac{w_2 - w_1}{2} * t\right) \quad (2.7)$$

- Intensidad en el secundario (ecuaciones: A4.2, A4.13, 2.7):

$$i_2(t) = C_2 * \frac{2 * k * V_1}{\sqrt{(1-T)^2 + 4 * k^2 * T}} * \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} * (w_1 * \cos(w_1 * t) * \sin(w_2 * t) + w_2 * \cos(w_2 * t) * \sin(w_1 * t)) \quad (2.8)$$

2.2. Transferencia de energía

La bobina de Tesla intercambia energía entre el circuito primario y el secundario cuando se encuentra en estado estacionario de oscilación. Al inicio, toda la energía se almacena en el condensador primario hasta que el explosor ceba el arco, cerrando el circuito y haciendo que el circuito primario oscile a la frecuencia de resonancia. Cuando el circuito se halla en resonancia, la intensidad alcanza su valor máximo [6].

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

La energía disponible del circuito primario es la correspondiente al condensador primario, ya que depende de su capacidad y de la tensión del primario:

$$W_c = \frac{1}{2} * C_1 * V_1^2 \quad (2.9)$$

Mediante el acoplamiento magnético, la energía del circuito primario induce una corriente en la bobina del circuito secundario. Al ser el acoplamiento magnético a través del aire se obtienen unos valores de coeficiente de acoplamiento pequeños ($0,1 < k < 0,3$) que dependen de la geometría con la que están construidas las bobinas.

Al suceder esta corriente en la bobina del circuito secundario, este comienza a oscilar, reduciendo la energía del primario al estar transfiriéndose la potencia al secundario. La energía tarda en transferirse varios ciclos (entre 2 y 4 ciclos de operación).

Durante el tiempo que dura la transferencia de energía, se presentan pérdidas de la misma en el circuito primario [7]. Por lo que no toda la energía almacenada en el circuito primario se transfiere al circuito secundario. Se transfiere entre un 60-85 % de la energía, dependiendo de las pérdidas, principalmente en el explosor.

Una vez que se obtiene el valor de energía transferida, se puede adquirir el valor de la tensión en el circuito secundario a partir de la **ecuación 2.9**, aplicada al secundario.

Si el valor de la tensión en el secundario supera el valor de tensión de ruptura dieléctrica en el aire del terminal superior, se observan descargas parciales alrededor del terminal superior [6].

Este valor de tensión se puede calcular a partir del porcentaje de transferencia de la energía, la tensión de carga del condensador primario y los valores de capacidad del primario y del secundario:

$$V_s = V_p * \sqrt{X\% * \frac{C_p}{C_s}} \quad (2.10)$$

En el caso de la bobina de este proyecto, se consigue la tensión de salida del primario y del secundario, a partir de las expresiones analíticas anteriores o mediante simulaciones numéricas circuitales, utilizando MATLAB. Del análisis de los resultados se percibe que la energía se transfiere después de tres ciclos.

3. Diseño de los elementos constitutivos

3.1. Transformador de alta tensión

El transformador de alta tensión es el punto de inicio de la bobina. El cual se encarga de elevar la tensión de la red a tensiones del rango de kilovoltios y cargar el condensador primario, fijando la tensión de este último.

El transformador se selecciona dependiendo de la tensión e intensidad de salida que se pretende fijar en el circuito.

Para este proyecto, el transformador seleccionado es un transformador de alta tensión de Neón. Estos modelos de transformadores están diseñados para voltajes entre 2-15 kV e intensidades entre 8-120 mA [8].

El que se utiliza para este proyecto tiene las siguientes características:

- Voltaje primario: 230 V
- Voltaje secundario: 6000 V
- Corriente secundaria: 34 mA
- Frecuencia: 50 Hz



Ilustración 2. Transformador de alta tensión

Con el valor de tensión del transformador y la capacidad del condensador primario, se consigue el valor de la energía en el circuito primario.

3.2. Bobina secundaria

La bobina secundaria se diseña para soportar tensiones muy altas y de pocos amperios.

Se construye con hilo de cobre de 0,5 mm de diámetro, para que todas las espiras entren en la altura fijada.

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

Esta bobina se diseña con una geometría solenoidal (**Anexo 2**), en la que se fija el valor del número de espiras, el diámetro del hilo de cobre y el diámetro del solenoide.

Se ha diseñado una bobina secundaria con una altura suficientemente alta para ser visualizada en demostraciones con público de pie y con aislamiento de tierra elevado, de forma que se puedan alcanzar altas tensiones en su terminal superior (100 - 600 kV) dependiendo del tamaño del toroide instalado. Se establece una altura próxima a un metro. Dadas las elevadas tensiones que se alcanzan, se construye una bobina monocapa, para minimizar la diferencia de potencial entre espiras adyacentes.

La bobina tiene los siguientes datos:

- Número de espiras: 1584 espiras
- Diámetro del hilo de cobre: 0,5 mm
- Diámetro de la bobina: 20 cm
- Altura: 85,7974 cm



Ilustración 3. Bobina secundaria

A partir de estos datos y la fórmula de Wheeler [10], se calcula el valor de la inductancia secundaria.

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \frac{N_2^2 * R_2^2}{(9 * R_2 + 10 * H_2) * 2540} = \frac{1584^2 * 10^2}{(9 * 10 + 10 * 85,7974) * 2540} \\
 &= 104,203 \text{ mH}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

- N : número de espiras [vueltas].
- R_2 : radio de la bobina [cm].
- H_2 : altura de la bobina [cm].

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

- L_2 : inductancia de la bobina [mH].
- Al ser un arrollamiento de muchas vueltas muy próximas entre si, la bobina presenta una capacidad parásita. La capacidad se resuelve con la fórmula de Medhurst [11]:

$$\begin{aligned}
 K &= 0,1126 * \frac{H_2}{D_2} + 0,08 + \frac{0,27}{\sqrt{\frac{H_2}{D_2}}} = 0,1126 * \frac{85,7974}{20} + 0,08 \\
 &\quad + \frac{0,27}{\sqrt{\frac{85,7974}{20}}} = 0,6934
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

$$C_{parásita} = K * D = 0,6934 * 20 = 13,868 \text{ pF} \tag{3.3}$$

- La resistencia se puede calcular como:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \rho * 4 * N_2 * \frac{D_{espresa}}{D_{hilo}^2} = 1,75 * 10^{-4} \Omega * \frac{\text{mm}^2}{\text{cm}} * 4 \\
 &\quad * 1584 * \frac{20 \text{ cm} + 0,05 \text{ cm}}{0,5 \text{ mm}^2} = 88,9257 \Omega
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

- La longitud del cable:

$$l_2 = N_2 * \pi * D_2 = 1584 \text{ vueltas} * \pi * 0,2 \text{ m} = 995,2565 \text{ m} \tag{3.5}$$

3.3. Toroide

Terminal superior de la bobina secundaria donde suceden las descargas eléctricas. Estas ocurren cuando el terminal supera la tensión de ruptura dieléctrica del toroide.

Al tener forma de aro, la carga se acumula alrededor de la superficie exterior, y al estar esta superficie a una distancia de la bobina secundaria (unos centímetros de distancia a cada lado), se protege la bobina secundaria de estas descargas parciales para evitar cortocircuitos en la bobina.

Su capacidad depende del tamaño del anillo del toroide y de la distancia a la que se encuentra respecto de tierra.

Se construye de un material conductor, como aluminio o cobre.

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

La tensión de salida dependerá de la energía proveniente del circuito primario, el porcentaje de transmisión de esta energía y la capacidad que hay al sumar la capacidad parásita creada en la bobina secundaria y la capacidad del propio toroide.

El toroide de este proyecto se ha construido con un diámetro exterior de 48,5 cm y un diámetro del anillo de 2 cm. Con estos datos podemos obtener su capacidad del toroide a partir de la fórmula empírica de Bert Pool [12] [13]:



Ilustración 4. Toroide

$$\begin{aligned}
 C_{toroide} &= 2,8 * \left(1,2781 - \frac{d_2}{d_1} \right) * \sqrt{0,1217 * d_2 * (d_1 - d_2)} \\
 &= 2,8 * \left(1,2781 - \frac{2}{48,5} \right) * \sqrt{0,1217 * 2 * (48,5 - 2)} \\
 &= 11,6511 \text{ pF}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

- d_1 : Radio externo del toroide [cm].
- d_2 : Radio del anillo del toroide [cm].

- La capacidad del condensador secundario es la suma de la capacidad del toroide (**ecuación 3.6**) y la capacidad parásita creada por las espiras de la bobina (**ecuación 3.3**):

$$C_2 = C_{toroide} + C_{parásita} = 11,6511 \text{ pF} + 13,868 \text{ pF} = 25,5191 \text{ pF} \tag{3.7}$$

- Una vez obtenidos los valores de capacidad del secundario y la inductancia de la bobina secundaria, se obtiene la frecuencia de resonancia del secundario:

$$\begin{aligned}
 f_{res2} = f_{res1} &= \frac{1}{2 * \pi * \sqrt{C_2 * L_2}} \\
 &= \frac{1}{2 * \pi * \sqrt{(11,6511 + 13,868) * 10^{-12} * 104,203041 * 10^{-3}}} \\
 &= 97,599517 \text{ kHz}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

Se ha diseñado este circuito secundario para que la bobina pueda ser alimentada en el futuro por el primario con una placa de electrónica de potencia con una señal de alta frecuencia en torno a 100 kHz. El diseño de dicha placa no es objeto de este proyecto.

3.4. Condensador primario

Este componente es un condensador de alta tensión, ya que está sometido a la tensión del secundario del transformador de entrada. Es de capacidad mayor a la del terminal superior (micro y nano en el primario), debido a que se va a encargar de transmitir la energía hacia el secundario. En el circuito primario la tensión es menor que el secundario y debe soportar intensidades del rango de amperios en la descarga.

Dependiendo de su valor y el porcentaje de transmisión de energía se obtendrá el valor de tensión de salida en el secundario.

Puede estar formado por un condensador de alta tensión o un conjunto de condensadores en paralelo.

En este proyecto, el condensador primario se ha seleccionado a partir de la tensión del secundario del transformador de alta tensión. Para ello se han construido dos condensadores de teflón, un condensador de 5,2 nF y otro de 6,9 nF, que al ponerlos en paralelo se suman las capacidades y se consigue un condensador de 12,1 nF.



Ilustración 5. Condensador primario de 6,9 nF



Ilustración 6. Condensador primario de 5,2 nF

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

Una vez obtenidos los valores de capacidad y sabiendo la tensión en el condensador, podemos calcular a partir de la **ecuación 2.9 del apartado 2.2**, el valor de energía del circuito primario:

$$W_c = \frac{1}{2} * C_1 * V_1^2 = \frac{1}{2} * 12,1 \text{ nF} * 6000 \text{ V}^2 = 0,2178 \text{ J} \quad (3.9)$$

Con el valor de energía en el primario, se establece un valor de porcentaje de transferencia del 80% y se calcula el valor de tensión máxima de salida del secundario:

$$W_2 = W_1 * X\% = 0,2178 * 0,8 = 0,1742 \text{ J} \quad (3.10)$$

$$V_2 = \sqrt{2} * \sqrt{\frac{2 * W_2}{C_2}} = \sqrt{2} * \sqrt{\frac{2 * 0,1742}{25,5191 * 10^{-12}}} = 165,242 \text{ kV} \quad (3.11)$$

- X%: porcentaje de transferencia de energía.
- W: energía almacenada.

3.5. Bobina primaria

La bobina primaria junto con el condensador primario crea el circuito primario.

Respecto de la bobina secundaria, la bobina primaria tiene que cumplir un diámetro superior, ya que se colocará coaxialmente en el exterior de la bobina secundaria. Y, además, un número de espiras que permita que el circuito primario oscile a la misma frecuencia de resonancia que el secundario [9].

Las espiras de la bobina primaria son de sección mayor, se puede utilizar cable de cobre de entre 1 - 4 mm² o una tubería de cobre de ¼ pulgada, dependiendo de la geometría elegida (**Anexo 2**).

Para calcular el valor de la inductancia primaria, se utiliza la ecuación de la frecuencia de resonancia (**ecuación 3.8**) y valor del condensador primario.



Ilustración 7. Bobina primaria

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{1}{C_1 * (2 * \pi * f_{res1})^2} = \frac{1}{12,1 * 10^{-9} * (2 * \pi * 97599,517)^2} \\
 &= 219,7655 \text{ microH}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Se ha utilizado la configuración geométrica solenoidal (**Anexo 2**) para la obtención del valor del número de espiras, a partir de los siguientes parámetros fijados de construcción de:

- Radio bobina primaria (R_1): 14 cm
- Altura bobina primaria (H_1): 10 cm
- Sección del cable (S_1): $2,5 \text{ cm}^2$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \sqrt{\frac{L_1 * ((9 * R_1 + 10 * H_1) * 2540)}{R_1^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{219,7655 * 10^{-3} * ((9 * 14 + 10 * 10) * 2540)}{14^2}} \\
 &= 25,3701 \text{ vueltas}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

- N: número de espiras [vueltas].
- L: inductancia de la bobina [mH].

- Longitud del cable de la bobina primaria:

$$l_1 = N_1 * \pi * D_1 = 25,3701 \text{ vueltas} * \pi * 0,28 \text{ m} = 22,3167 \text{ m} \tag{3.14}$$

- Resistencia de la bobina primaria:

$$R_1 = \rho * \frac{l_1}{S_1} = 1,75 * 10^{-4} \Omega * \frac{\text{mm}^2}{\text{cm}} * \frac{2231,67 \text{ cm}}{2,5 \text{ mm}^2} = 0,1562 \Omega \tag{3.15}$$

4. Simulación del sistema

Para este proyecto se han utilizado dos softwares de simulación: FEMM Y MATLAB.

En FEMM se ha simulado magnetostáticamente las dos bobinas y electroestáticamente el terminal superior, utilizando el método de elementos finitos en 2D. Con el programa de MATLAB se ha resuelto analíticamente a partir de las fórmulas del apartado 2.1, los valores de tensión e intensidad del primario y secundario, y con de la herramienta Simulink se ha obtenido el valor de tensión e intensidad del primario y secundario del circuito equivalente.

4.1. Software de elementos finitos FEMM

A partir de este software se han simulado las dos bobinas y el toroide para verificar los resultados de las fórmulas del apartado 3.

Ambos problemas son estáticos, en los que resuelven numéricamente las ecuaciones de Maxwell correspondientes a cada caso en dos dimensiones (**referencia del manual de uso en el Anexo 6**).

4.1.1. Problema magnetostático

A partir del problema magnetostático de FEMM, se pueden calcular los valores de inductancia de las bobinas.

Para abordar este problema se utiliza el potencial magnético vector \mathbf{A} , que consiste en definir el potencial para conseguir el vector \mathbf{B} mediante la fórmula [15]:

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}} \quad (4.1)$$

Sustituyendo esta expresión en la Ley de Ampere e imponiendo la condición:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0 \quad (4.2)$$

Se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = -\mu \vec{\mathbf{J}} \quad (4.3)$$

Aplicando las condiciones de contorno adecuadas en las fronteras de cálculo, el programa FEMM resuelve esta ecuación diferencial numéricamente mediante el método de elementos finitos.

El modelo que se plantea es el siguiente:

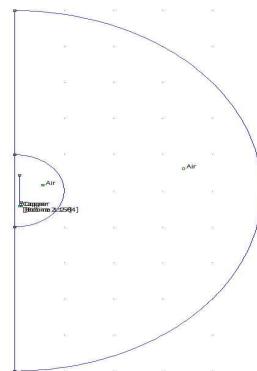


Ilustración 8. Simulación bobinas en FEMM

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

El modelo tiene simetría axisimétrica. Se dibujan las bobinas respecto al eje de simetría, respetando el diámetro del hilo de cobre respectivo a cada bobina y se le asignan sus propiedades (material de la bobina, circuito y número de vueltas). Alrededor de las bobinas se crean dos fronteras semicirculares, una más cercana y otra más lejana, para poder crear un mallado más fino en la primera frontera. A estas fronteras se les da la propiedad de aire en su interior y al borde de la frontera se les da la condición de frontera tangencial (valor de la derivada es cero).

- Para calcular las inductancias de cada una de las bobinas, imponemos una corriente unidad (1 A), por la bobina a calcular, y cero en la otra [17], obteniendo los siguientes resultados:
 - $L_1: 212,965 \mu\text{H}$
 - $L_2: 104,481 \text{ mH}$
- Para el coeficiente de acoplamiento, se deben poner ambas bobinas a 1 A y se calcula la energía del campo magnético, y con ella se obtiene la inductancia L_A y para la inductancia L_B se le da a una bobina el valor de 1 A y a la otra el valor de -1 A.

$$L = \frac{2 * W}{I^2} \quad (4.4)$$

- W: energía del campo magnético [J]

$$L_A = \frac{2 * W}{I^2} = \frac{2 * 0,0535642 J}{1^2} = 0,1071284 H \quad (4.5)$$

$$L_B = \frac{2 * W}{I^2} = \frac{2 * 0,0511206 J}{1^2} = 0,1022412 H \quad (4.6)$$

A partir de estos dos resultados, se puede calcular el valor de la inductancia mutua ([3] Página 40, apartado 5.2.3.):

$$M = \frac{L_A - L_B}{4} = \frac{0,1071284 H - 0,1022412 H}{4} = 0,0012218 H \quad (4.7)$$

A partir de este valor se obtiene el valor del coeficiente de acoplamiento:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 * L_2}} = \frac{1,2218 \text{ mH}}{\sqrt{212,965 \mu\text{H} * 104,481 \text{ mH}}} = 0,2586 \quad (4.8)$$

4.1.2. Problema electrostático

A partir del problema electrostático de FEMM, se puede conseguir el valor de capacidad y el valor de campo eléctrico del toroide.

Este problema consiste en resolver la ecuación diferencial con las condiciones de frontera adecuadas:

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.9)$$

El modelo que se plantea es el siguiente:

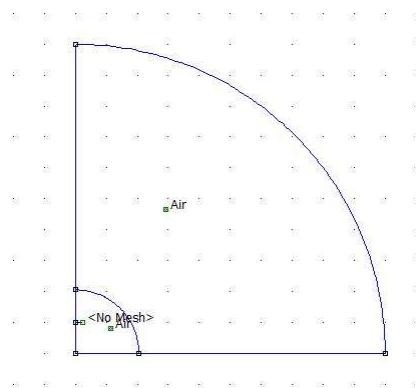


Ilustración 9. Simulación toroide en FEMM

Tiene simetría axisimétrica. Se dibuja el toroide a la altura que vaya a estar respecto a tierra y comenzando en el eje de simetría. Se respeta el diámetro de la plancha interior y el diámetro transversal del aro exterior. Al toroide se le da la propiedad de conductor y al interior del aro se le añade un bloque de tipo “no mesh” para que no calcule el interior del aro. Alrededor del toroide se crean dos fronteras de un cuarto de semicírculo, una más cercana y otra más lejana, para poder crear un mallado más fino en la primera frontera. A la línea inferior del semicírculo se le da la propiedad de tierra, para poder adquirir los valores del toroide respecto a tierra. A estas fronteras se les da la propiedad de aire en su interior y al borde de la frontera se les da la condición de frontera tangencial (valor de la derivada es cero).

- Para calcular el valor de capacidad del toroide, primero se pone a potencial de 1 V para crear el vector E alrededor del toroide y con la carga obtenemos la capacidad. Alcanzando el siguiente resultado:

- $C_{\text{toroide}} = 19,4295 \text{ pF}$

- Para el valor máximo de tensión que puede alcanzar el toroide antes que se inicie la ionización, primero se debe adquirir el valor del campo eléctrico en el punto donde el valor sea máximo. Alcanzando el siguiente resultado:

$$- E = 19,6044 \text{ V/m} \text{ (máximo en: } r=242,5 \text{ mm, } z=1000 \text{ mm)}$$

A partir del campo eléctrico se logra el valor de la tensión, al conocer el valor de ruptura dieléctrica del aire (3 MV/m).

$$V_{Ini_ioniz} = \frac{3 \text{ MV/m}}{19,6044 \text{ V/m}} = 153,026 \text{ kV} \quad (4.10)$$

4.2. MATLAB

4.2.1. Cálculo analítico

Con el código descrito en el Anexo 3 y la explicación del apartado 2.1, se resuelven analíticamente los valores de intensidad y tensión del circuito primario y secundario que son los siguientes:

- Frecuencias de resonancia en el circuito acoplado (ecuaciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4):

$$\begin{aligned} w_1 &= \omega_2 * \sqrt{\frac{(1+T) - \sqrt{(1-T)^2 + 4 * k^2 * T}}{2 * (1 - k^2)}} \\ &= 2 * \pi * 97599 * \sqrt{\frac{(1+1) - \sqrt{(1-1)^2 + 4 * 0,1937^2 * 1}}{2 * (1 - 0,1937^2)}} \\ &= 561275,77 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$f_1 = \frac{w_1}{2 * \pi} = \frac{561275,77}{2 * \pi} = 89329,81 \text{ Hz} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \omega_2 * \sqrt{\frac{(1+T) + \sqrt{(1-T)^2 + 4 * k^2 * T}}{2 * (1 - k^2)}} \\ &= 2 * \pi * 97599 * \sqrt{\frac{(1+1) + \sqrt{(1-1)^2 + 4 * 0,1937^2 * 1}}{2 * (1 - 0,1937^2)}} \\ &= 682943,22 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$f_2 = \frac{w_2}{2 * \pi} = \frac{682943,22}{2 * \pi} = 108693,79 \text{ Hz} \quad (4.14)$$

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

- Tensión en el primario (ecuación 2.5):

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= V_1 * \cos\left(\frac{w_2 + w_1}{2} * t\right) * \cos\left(\frac{w_2 - w_1}{2} * t\right) \\
 &= 6000 * \cos\left(\frac{682943,22 + 561275,77}{2} * t\right) \\
 &\quad * \cos\left(\frac{682943,22 - 561275,77}{2} * t\right) \\
 &= 6000 * \cos(622109,495t) * \cos(60833,725t) V
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

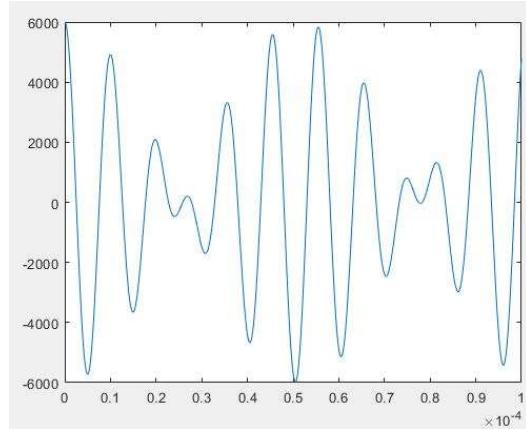


Ilustración 10. Tensión del primario

- Intensidad en el primario (ecuación 2.6):

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= -C_1 * 6000 * (w_1 * \sin(w_1 * t) * \cos(w_2 * t) + w_2 * \cos(w_1 * t) * \sin(w_2 * t)) \\
 &= -12,1 * 10^{-9} * 6000 \\
 &\quad * (561275,77 * \sin(561275,77t) * \cos(682943,22t) + 682943,22 \\
 &\quad * \sin(682943,22t) * \cos(561275,77t)) \\
 &= -40,7486 * \sin(561275,77t) * \cos(682943,22t) - 49,5817 \\
 &\quad * \sin(682943,22t) * \cos(561275,77t)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

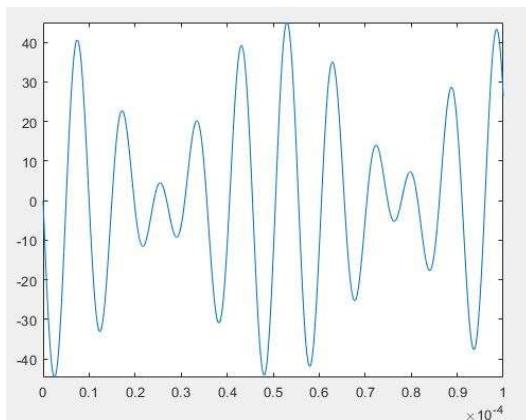


Ilustración 11. Intensidad del primario

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

- Tensión en el secundario (ecuación 2.7):

$$\begin{aligned}
 v_2(t) &= \frac{2 * k * V_1}{\sqrt{(1 - T)^2 + 4 * k^2 * T}} * \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} * \sin\left(\frac{w_2 + w_1}{2} * t\right) * \sin\left(\frac{w_2 - w_1}{2} * t\right) \\
 &= \frac{2 * 0,1937 * 6000}{\sqrt{(1 - 1)^2 + 4 * 0,1937^2 * 1}} * \sqrt{\frac{104,203041 * 10^{-3}}{219,7655 * 10^{-6}}} \\
 &\quad * \sin\left(\frac{682943,22 + 561275,77}{2} * t\right) * \sin\left(\frac{682943,22 - 561275,77}{2} * t\right) \\
 &= 130650,6845 * \sin(622109,495t) * \sin(60833,725t) V
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

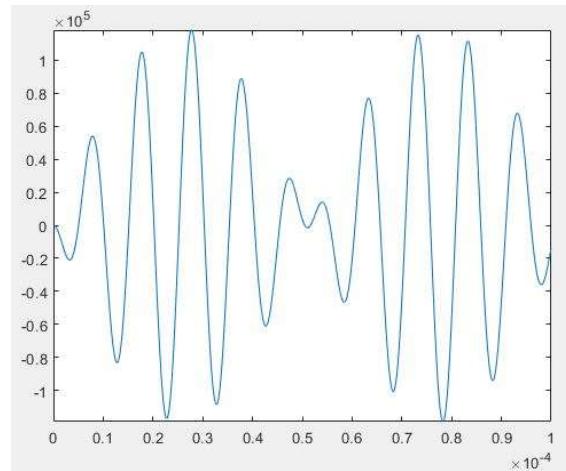


Ilustración 12. Tensión del secundario

- Intensidad en el secundario (ecuación 2.8):

$$\begin{aligned}
 i_2(t) &= C_2 * \frac{2 * k * V_1}{\sqrt{(1 - T)^2 + 4 * k^2 * T}} * \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} * (w_1 * \cos(w_1 * t) * \sin(w_2 * t) + w_2 \\
 &\quad * \cos(w_2 * t) * \sin(w_1 * t)) \\
 &= 25,5191 * 10^{-12} * \frac{2 * 0,1937 * 6000}{\sqrt{(1 - 1)^2 + 4 * 0,1937^2 * 1}} * \sqrt{\frac{104,203041 * 10^{-3}}{219,7655 * 10^{-6}}} \\
 &\quad * (561275,77 * \cos(561275,77t) * \sin(682943,22t) + 682943,22 \\
 &\quad * \cos(682943,22t) * \sin(561275,77t)) \\
 &= 1,8713 * \cos(561275,77t) * \sin(682943,22t) + 2,277 \\
 &\quad * \cos(682943,22t) * \sin(561275,77t)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

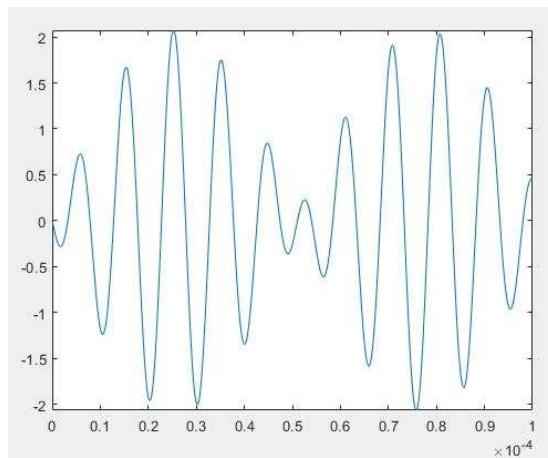


Ilustración 13. Intensidad del secundario

En las ilustraciones 12 y 14 se observa que, una vez que el primario ha cedido toda la energía al circuito secundario, la tensión en el primario llega a cero y es máxima en el secundario. Con la intensidad sucede lo mismo que con la tensión, una vez que el primario se ha quedado a cero, es cuando la intensidad en el secundario es máxima.

También se puede ver que tarda en pasarse toda la energía al secundario tres ciclos. La frecuencia de resonancia calculada es de 97,599517 kHz.

4.2.2. Análisis por circuito equivalente (Simulink)

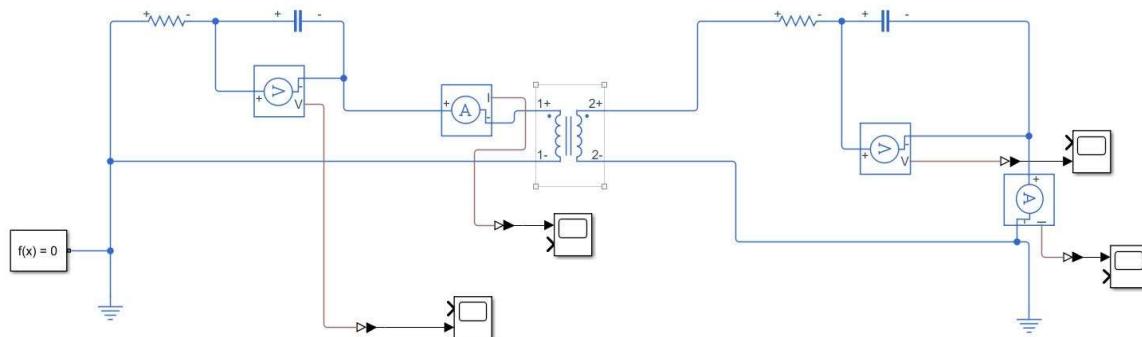


Ilustración 14. Circuito equivalente

Se dibuja en Simulink el circuito equivalente de la bobina con los datos obtenidos a partir del código del Anexo 3:

V_{Primario}	C_1	L_1	R_1	C_{Toroide}
6000 V	12,1 nF	219,7655 μ H	0,1562 Ω	11,65 pF

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

L_2	R_2	C_{Parasita}	K	f_{res}
104,2 mH	88,93 Ω	13,87 pF	0,1937	97,599 kH

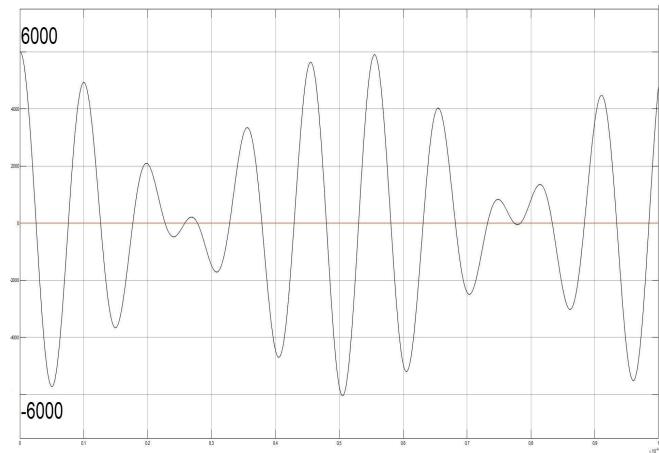


Ilustración 15. Tensión en el primario (V)

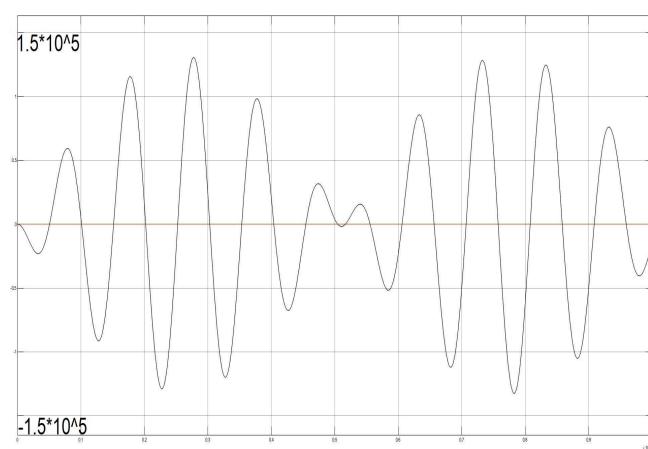


Ilustración 16. Tensión en el secundario (V)

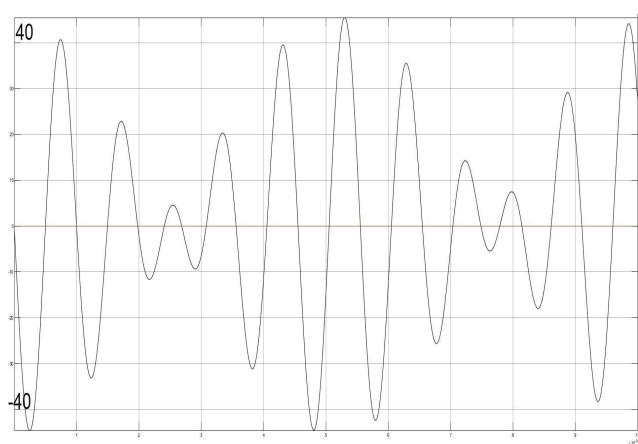


Ilustración 17. Intensidad en el primario (A)

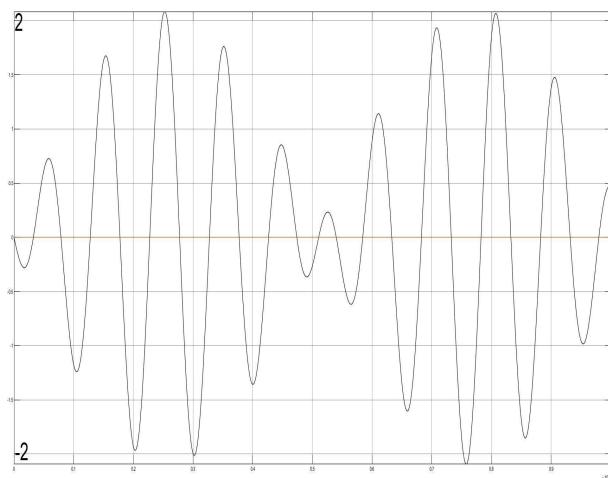


Ilustración 18. Intensidad en el secundario (A)

En la visualización de las ondas ($t = 1 * 10^{-4}$), cuando se ha transferido toda la energía del primario al secundario, se observa que tanto la tensión y la intensidad del primario pasan a tener valores mínimos y la tensión e intensidad en el terminal superior pasan a ser máximos. También se puede ver que toda la energía tarda en pasarse del primario al secundario tres ciclos.

4.2.3. Comparativa analítica y circuito equivalente

Para poder comparar ambas simulaciones, se eliminan las resistencias del circuito

equivalente, ya que en el cálculo analítico el valor de las resistencias es cero (ver Anexo 4).

Una vez modificado el circuito equivalente y simulado, se observan conjuntamente las gráficas obtenidas, y ambas formas de onda y amplitudes son similares, lo que varía es el tiempo en el que comienza la onda.

5. Construcción

Para la realización de este proyecto se ha construido el toroide, la bobina secundaria, la bobina primaria y el condensador primario según los valores establecidos y/o diseñados. La construcción y montaje de estos elementos han sido realizados por el técnico de laboratorio del Departamento de Ingeniería Carlos Millán de Cortés, por el profesor jubilado del Departamento Antonio Pardina Carrera y la projectista Lucía Aguilera Royo. El resto de componentes de la bobina se han impuesto en el diseño a partir de lo que se disponía en el departamento de Ingeniería eléctrica.

5.1. Toroide

Se ha construido el toroide con un tubo curvado de cobre de 2 cm de diámetro y de diámetro exterior de 48,5 cm. En su interior se ha colocado una lámina de cobre creando la base interior del toroide. Se han soldado ambas partes para formar el conjunto que se muestra en la imagen.



Ilustración 19. Toroide

5.2. Bobina secundaria

Se ha utilizado un tubo de PVC sobre el cual se han bobinado 1584 espiras de hilo de cobre de 0,5 mm de diámetro en una capa.

Para montarla se construyó una estructura rotatoria donde se introduce el tubo de PVC y se puede ir girando para bobinar. Primero se bobinan unos pocos centímetros de altura para saber cuánto van a ocupar todas las espiras, en 10 cm entran con ese hilo 181 espiras.

Por lo tanto, para una frecuencia de 100 kHz, con el toroide construido, se han necesitado 85,797 cm de altura y 1584 espiras.



Ilustración 20. Construcción bobina secundaria

5.3. Bobina primaria

Se ha utilizado una lámina de 10 cm de ancho y 88 cm de largo, para al doblarlo crear un aro. La lámina se plastifica para evitar conducción y se crean dos agujeros para la salida de ambos extremos de la bobina. Se ha utilizado un cable TOPFLEX V-K H07V-K de 2,5 mm² de sección.

La bobina primaria es el último componente en construirse, porque se necesita el circuito secundario y el valor del condensador primario para conocer la cantidad de espiras. Se han montado 26 espiras.



Ilustración 21. Construcción bobina primaria

5.4. Explosor

Está diseñado con dos piezas de hierro, son lisas en la parte interior y roscadas en la parte exterior del cubo de material aislante abierto por la parte superior. La parte exterior es roscada y sujetada con una tuerca para poder separar o juntar la distancia entre las dos piezas para regular la tensión a la que salta el arco.



Ilustración 22. Explosor

5.5. Resistencias de protección

Se colocan estas resistencias para proteger el transformador de alta tensión en el instante en el que se ceba el arco en el explosor y el transformador está en cortocircuito.

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

Se colocan dos resistencias de $2\text{ k}\Omega$, una entre el transformador y la parte superior del condensador primario y la otra entre la parte inferior del condensador primario y la otra parte del transformador.



Ilustración 23. Resistencias

5.6. Condensador primario

El condensador primario es una combinación de dos condensadores en paralelo de tubo de teflón de distintos tamaños para conseguir distintas capacidades.



Ilustración 24. Condensador primario de $6,9\text{ nF}$



Ilustración 25. Condensador primario de $5,2\text{ nF}$

5.7. Circuito completo

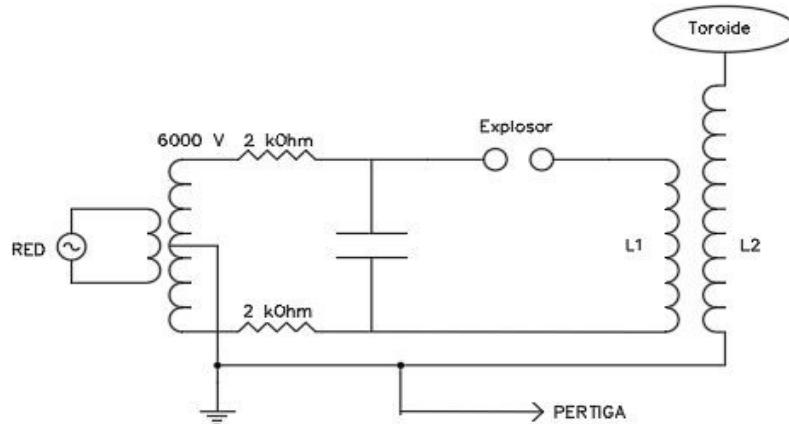


Ilustración 26. Circuito de montaje completo

Se conecta el circuito como está dibujado en la **Ilustración 26**, ya que la configuración de la bobina sigue este circuito.



Ilustración 27. Construcción de la bobina de Tesla completa

6. Comprobación experimental

En el laboratorio se han realizado una serie de ensayos de la bobina para verificar si los datos obtenidos en los apartados 3 y 4 coinciden con lo obtenido en las pruebas realizadas.

6.1. Frecuencia de resonancia del primario

Para la medida de la frecuencia de resonancia se ha utilizado el generador de funciones ARBITRARY FUNCTION GENERATOR AFG310 de SONY Tektronix, con una onda senoidal de frecuencia variable para ir variando la frecuencia hasta alcanzar la frecuencia de resonancia del circuito, una placa protoboard donde se coloca una resistencia de $5\ \Omega$ y un osciloscopio para ver la señal de tensión y la frecuencia.

En la **Ilustración 28**, se representa el montaje del circuito primario para la medida de la resonancia.

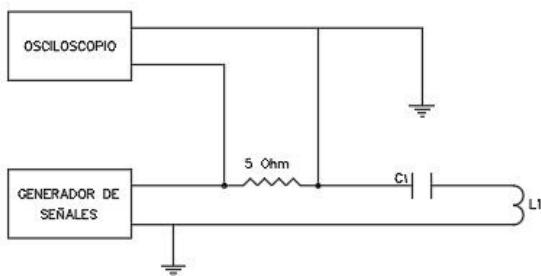


Ilustración 28. Montaje del circuito primario para medir la frecuencia.

Del análisis del circuito se deduce que a la frecuencia de resonancia del conjunto LC serie, la tensión en el punto donde se conecta la sonda del osciloscopio tiende a un máximo de tensión. Se realiza un barrido de frecuencia hasta encontrar la frecuencia a la que dicha amplitud se hace máxima, concluyendo que la frecuencia de resonancia del circuito primario es de 98,5 kHz.

6.2. Frecuencia de resonancia del secundario

Para la medida de la frecuencia de resonancia se ha utilizado la misma técnica que el apartado anterior (circuito primario), solo variando el valor de la resistencia por una resistencia de $1\ k\Omega$, ya que la impedancia del circuito LC es superior en este circuito (**Ilustración 29**):

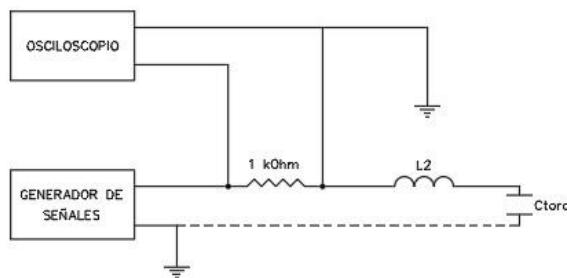


Ilustración 29. Montaje del circuito secundario para medir la frecuencia.

Del análisis del circuito se deduce que a la frecuencia de resonancia del conjunto LC serie, la tensión en el punto donde se conecta la sonda del osciloscopio tiende a un máximo de tensión. Se realiza un barrido de frecuencia hasta encontrar la frecuencia a la que dicha amplitud se hace máxima, concluyendo que la frecuencia de resonancia del circuito secundario es de 100,6 kHz.

Prácticamente la frecuencia de resonancia del circuito secundario coincide con la del primario ya que entre los dos hay una diferencia de 2,1 kHz, si aumentamos las vueltas del circuito primario para acercarnos al valor del secundario (valor fijo), la frecuencia disminuye aumentando la diferencia y si disminuimos las vueltas, aumenta la frecuencia siendo superior a la del secundario. Por lo tanto, el valor elegido en la construcción (26 vueltas) es el valor fijado para el primario.

6.3. Parámetros del circuito primario

6.3.1. Bobina primaria

Para la medida de la inductancia se ha utilizado un analizador de componentes WAYNEKERR Multi Bridge 6425, para una frecuencia de 100 kHz, que es el valor más cercano al valor de frecuencia de resonancia. Conectando el analizador a los extremos de la bobina, ha dado una inductancia de 214,4 μ H.



Ilustración 30. Medida bobina primaria

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

Para la medida de la resistencia de la bobina primaria, se utiliza el analizador de componentes utilizado para la medida de inductancia, el cual nos da un valor de $180\text{ m}\Omega$.

6.3.2. Condensador primario

Para la medida de capacidad se ha utilizado un analizador de componentes WAYNEKERR Multi Bridge 6425, para una frecuencia de 100 kHz , que es el valor más cercano al valor de frecuencia de resonancia. Conectando el analizador a los extremos de los condensadores en paralelo, ha dado una capacidad de $12,1\text{ nF}$.



Ilustración 31. Medida condensador primario

6.4. Parámetros del circuito secundario

6.4.1. Bobina secundaria y toroide

Para la medida de la inductancia se ha utilizado un analizador de componentes WAYNEKERR Multi Bridge 6425, para una frecuencia de 100 kHz , que es el valor más cercano al valor de frecuencia de resonancia. Unidos en serie la bobina y el toroide, se conecta el analizador entre el toroide y tierra. El analizador ha dado una inductancia de $105,08\text{ mH}$ y una capacidad del toroide de $23,6\text{ pF}$.

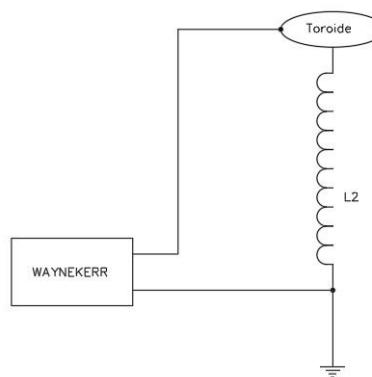


Ilustración 32. Medida del circuito secundario

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

Para la medida de la resistencia de la bobina secundaria, se utiliza el analizador de componentes utilizado para la medida de inductancia, el cual nos da un valor de 86Ω .

6.5. Coeficiente de inducción mutua y coeficiente de acoplamiento

Para hallar el coeficiente de inducción mutua se realiza un ensayo con el analizador de componentes WAYNEKERR Multi Bridge 6425. Se hará la medida con una frecuencia de 100 kHz, que es el valor más cercano al valor de frecuencia de resonancia.

Primero se conectan las dos bobinas en serie para obtener el valor de L_A y después se invierte la bobina secundaria para conseguir el valor de L_B .

A partir de la **ecuación 4.7** se calcula el valor de M :

$$M = \frac{L_A - L_B}{4} = \frac{108,65 \text{ mH} - 103,75 \text{ mH}}{4} = 1,225 \text{ mH} \quad (6.1)$$

Con este valor se puede adquirir el coeficiente de acoplamiento a partir de la **ecuación A4.8**:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 * L_2}} = \frac{1,225 \text{ mH}}{\sqrt{214,4 \mu\text{H} * 105,08 \text{ mH}}} = 0,258 \quad (6.2)$$

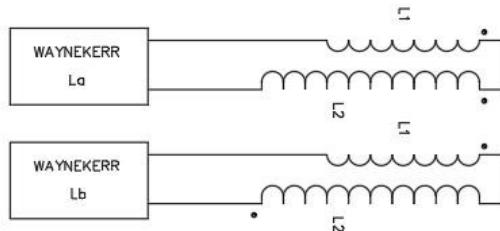


Ilustración 33. Montaje para medida de acoplamiento

6.6. Comprobación del funcionamiento total de la bobina

6.6.1. Funcionamiento del explosor

Una vez montada toda la bobina, se conecta la bobina de Tesla (**Ilustración 27**) a un autotransformador y un vatímetro.

Diseño y construcción de una bobina de Tesla



Ilustración 34. Entrada prueba bobina de Tesla

En el ensayo se va subiendo la tensión hasta la tensión máxima del autotransformador (270 V). Según la distancia del explosor, el arco saltará a una tensión distinta. A menor distancia, menor valor de tensión. En este caso, el explosor tiene una distancia de 1 mm, se va aumentando la tensión en el primario que a su vez va cargando el condensador hasta que salta el arco en torno a 68-70 V del autotransformador cerrando el circuito primario. En este intervalo de tiempo que ha saltado el arco se realiza la transferencia de potencia del primario al secundario.

Al saltar el arco, el condensador se descarga y se vuelve a cargar hasta que el arco vuelve a saltar, esto crea un ciclo de cargas y descargas en el condensador. Al aumentar la tensión, estos ciclos de carga y descarga del condensador aumentan, ya que el condensador se carga antes.

6.6.2. Medida en bornes del condensador primario

Se ha conectado una sonda de alta tensión en los bornes del condensador de la cual se ha obtenido la siguiente ilustración:

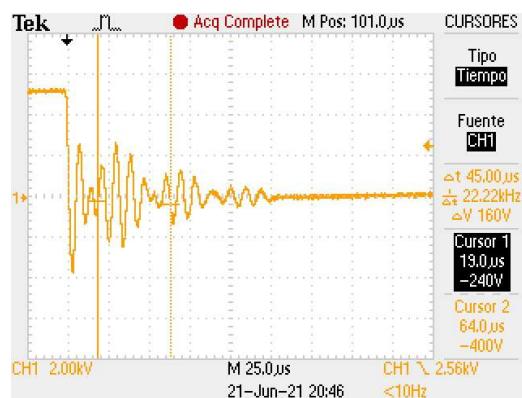


Ilustración 34. Onda de tensión en bornes del C1

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

En la **ilustración 34** se observa la onda de tensión en bornes del condensador primario, en la cual se muestra que, en tres ciclos de transferencia, la tensión tiende a cero, porque se ha transferido toda la potencia al secundario.

Se puede visualizar que en cada ciclo de transferencia la amplitud máxima del ciclo es menor que la anterior, ya que en el proceso de transferencia de energía de primario a secundario hay perdidas, principalmente en el explosor, pero también en las resistencias y por fugas a tierra desde el toroide del secundario.

A partir de esta señal se consigue el valor de la frecuencia de resonancia de la bobina, para ello se aumenta el tiempo por división de la señal (**Ilustración 35**).

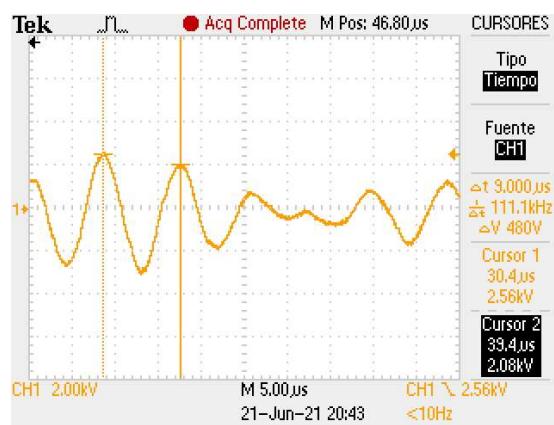


Ilustración 35. Medida de la frecuencia de resonancia

En la ilustración anterior se observa que entre picos de la onda tenemos una frecuencia de resonancia de 111,1 kHz. Este valor es cercano al obtenido por las medidas de resonancia de cada circuito y al calculado.

Para obtener el valor del tiempo en el que dispara el explosor, se rodea la bobina con un cable de $2,5 \text{ mm}^2$ y se conecta al osciloscopio. Como se observa en la **Ilustración 36**, para cada 1,25 ms, aparece en el osciloscopio una línea correspondiente al disparo del explosor y transferencia de energía del primario al secundario.

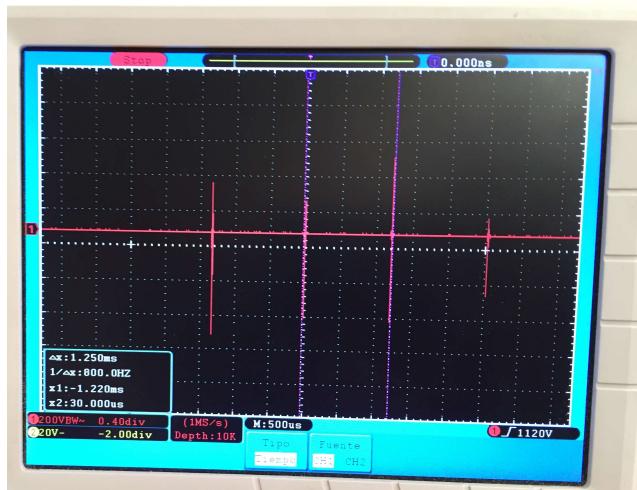


Ilustración 36. Visualización osciloscopio

7. Comparación de los resultados

En este apartado se van a comparar los resultados adquiridos en los apartados anteriores, a partir de la Tabla 1.

Tabla 1. Comparativa resultados

	FEMM	Analítico	Medidas
L_2 (mH)	104,481	104,203	105,08
R_2 (Ω)	-	88,9257	86
C_1 (nF)	-	12,1	12,1
L_1 (μ H)	212,965	219,7655	214,4
R_1 (m Ω)	-	156,2171	180
CT (pF)	-	11,6511	-
CP (pF)	-	13,868	-
C_2 (pF)	19,4295	25,5191	23,6
M (H)	0,0012218	0,00094	0,001225
k	0,2586	0,2	0,258
f_{res} (kHz)	111,704497	97,599444	101,065772

En la tabla se puede visualizar que:

- Los valores de las inductancias secundarias son aproximados.
- En el caso de las resistencias, el valor de medida en el secundario es similar al analítico y en el primario el valor de la resistencia es un poco superior al analítico, pero al ser unos valores pequeños entra dentro de lo permitido.
- El condensador primario tiene el mismo valor en el analítico y en las medidas porque el valor obtenido en las medidas ha sido el utilizado en el cálculo analítico.

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

- Con las medidas de la inductancia primaria se observa, que para FEMM al utilizar 25 vueltas exactas, el valor es menor que en cálculo analítico y que el valor medido está entre los otros dos. Los tres resultados presentan una aproximación aceptable. Si aumentamos las vueltas de FEMM a 26 (como en las medidas) obtenemos un valor de 230,343 μ H, un valor que se aleja de los otros dos, por lo tanto el valor obtenido por FEMM de 25 vueltas es el más aceptable.
- Para el toroide, en las medidas y FEMM solo se obtiene el valor de la capacidad del toroide respecto de tierra, sin contar la bobina secundaria. Y en las fórmulas se tiene en cuenta además la capacidad generada por la bobina secundaria. Comparando los resultados se puede ver que el valor de las fórmulas analíticas y el de las medidas son similares y el valor de FEMM es un poco menor que el medido.
- Para el coeficiente de inducción mutua, en las medidas y en FEMM se ha utilizado el método de cálculo de L_A y L_B , consiguiendo valores muy aproximados. Para el cálculo analítico se ha aproximado el campo magnético que crea un solenoide largo en su extremo por la mitad del campo de un solenoide infinito, obteniéndose:

$$M = \frac{\pi * \mu_0 * N_1 * N_2 * R_2^2}{2 * H_2} \quad (7.1)$$

Esta aproximación da lugar a un valor de M de valor inferior al experimental y al simulado. El resultado podría mejorarse utilizando la expresión del solenoide finito para calcular el campo B en cada una de las posiciones de las espiras del primario, pero no se ha considerado necesario al disponer de una simulación numérica muy próxima con el resultado experimental.

- Para la frecuencia de resonancia, se contempla que el valor de las fórmulas y las medidas están cercanos y el valor de FEMM se aleja un poco, porque la capacidad secundaria calculada es menor que en los otros dos casos.

De la comparación, se concluye que los valores calculados, los simulados por FEMM y las medidas, presentan una buena aproximación. Por lo tanto, se puede decir que el método propuesto en este proyecto es fiable para el diseño de bobinas de Tesla.

8. Conclusión

Este proyecto ha consistido en el diseño y construcción de una bobina de Tesla a partir de cálculos numéricos y simulaciones.

Para ello se han desarrollado fórmulas para su cálculo analítico a partir de unos valores iniciales de diseño, que posteriormente han sido comparados con las simulaciones en MATLAB Y FEMM.

MATLAB ha permitido calcular analíticamente los valores y obtener las señales de tensión e intensidad en las bobinas. La herramienta de Simulink ha permitido calcular el circuito para conseguir las tensiones y corrientes en bobinas y compararlas con las calculadas analíticamente.

FEMM nos ha permitido resolver a partir de fórmulas magnetostáticas los valores de inductancia de las bobinas y del acoplamiento magnético y a partir de fórmulas electrostáticas, hemos podido alcanzar el valor del campo eléctrico alrededor del toroide y su capacidad respecto de tierra.

Estas simulaciones han sido de gran ayuda para comparar los resultados con los cálculos analíticos y estar seguros de los valores antes de construir la bobina.

Los ensayos han mostrado que, si se hacen bien los cálculos, se puede conseguir una bobina que funciona de acuerdo a los parámetros calculados.

Como línea futura, en el anexo 7 se presentan nuevas modificaciones para la mejora de la bobina y alcanzar una tensión de salida superior.

ANEXOS

1. Bibliografía

[1] B. Carlson, W. *Tesla, inventor de la era eléctrica*. Traducido por L. Sánchez Fernández, Barcelona, Editorial Planeta S.A., 2014.

[2] Colaboradores de Wikipedia, *Historia de la bobina Tesla - History of the Tesla coil*. Wikipedia, la enciclopedia libre, 2021, accesible por internet en la dirección:
https://es.qaz.wiki/wiki/History_of_the_Tesla_coil

[3] Saray Menjíbar Ruiz, *Diseño paramétrico de bobinas de Tesla*, Trabajo Fin de Grado, Escuela de Ingeniería y Arquitectura, Abril, 2017, accesible por internet en la dirección:
<https://zaguan.unizar.es/record/61378?ln=es>

[4] Damián Zuriaga Miguel, *Diseño e implementación de un circuito de excitación resonante para una bobina de tesla de estado sólido (SSTC)*, Trabajo Fin de Grado, Escuela de Ingeniería y Arquitectura, Septiembre, 2018, accesible por internet en la dirección:
<https://zaguan.unizar.es/record/76510?ln=es#>

[5] Eduardo Pérez de Obanos Francés, *Diseño y construcción de una bobina Tesla*, Proyecto Final de Carrera, Universidad Pública de Navarra, Febrero, 2010, accesible por internet en la dirección:
<http://academica-e.unavarra.es/handle/2454/1797>

[6] Barton B. Anderson, *The classic Tesla coil - A dual-tuned resonant transformer*, Documentos SCRIBD, Noviembre, 2000, accesible por internet en la dirección:
<https://es.scribd.com/document/179695376/The-Classic-Tesla-Coil-A-Dual-Tuned-Resonant-Transformer>

[7] Colaboradores de Wikipedia, *Efecto pelicular*, Wikipedia, la enciclopedia libre, 2020, accesible por internet en la dirección:
https://es.wikipedia.org/wiki/Efecto_pelicular

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

[8] D. F. Hurtado Romero, F. E. Villamar Eras, *Diseño y construcción de una bobina de Tesla de 15 kV en el primario para el laboratorio de alta tensión de la Universidad Politécnica Salesiana Sede Cuenca*, Tesis, Universidad Politécnica Salesiana Sede Cuenca, Abril, 2014, accesible por internet en la dirección:

<https://dspace.ups.edu.ec/bitstream/123456789/6308/1/UPS-CT002881.pdf>

[9] K. Wilson, *Tesla Coil Design, Construction and Operation Guide*, Tesla coil design, 2009-2018, accesible por internet en la dirección:

<http://www.teslacoildesign.com/index.html>

[10] H. Mehlhose, *Tesla Coil Design*, 1999, accesible por internet en la dirección:

http://home.wtal.de/herbs_teslapage/design.html

[11] R. G. Medhurst, *H.F. Resistance and self-capacitance of single-layer solenoids*, Wireless Engineer, Marzo, 1947, accesible por internet en la dirección:

<http://g3ynh.info/zdocs/refs/Medhurst/Med80-92.pdf>

[12] T. Chandler, *Re: Equation 9, Capacitance of a Toroid*, Correo electrónico publicado, Febrero, 1996, accesible por internet en la dirección:

<https://www.pupman.com/listarchives/1996/march/msg00002.html>

[13] B. Pool, *Re: Equation 9, Capacitance of a Toroid*, Correo electrónico publicado, Marzo, 1996, accesible por internet en la dirección:

<https://www.pupman.com/listarchives/1996/march/msg00021.html>

[14] H. Cadavid, G. Aponte, O. Roman Tudela, F.J. García, *Diseño y construcción de una bobina Tesla*, Revista Energía y Computación. Vol. X, nº2, 2001, accesible por internet en la dirección:

https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/1392/Diseno_y_construccion_de_una_bobina_tesla.pdf;jsessionid=2FA2FE500939042915C0C73EC5435A19?sequence=1

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

[15] J. Letosa, A. Usón, *Fundamentos de teoría electromagnética, Asignatura Líneas eléctricas*, Moodle 2, Universidad de Zaragoza, Curso 2019 - 2020, accesible por internet en la dirección:

<https://moodle.unizar.es/>

[16] J. Sarrate, R. Clarió, *El Método de los Elementos Finitos en problemas electromagnéticos: planteamiento y aplicaciones*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Universidad Politécnica de Cataluña, Vol. 17, 2001, accesible por internet en la dirección:

<https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099/4253/RR172F.pdf>

[17] J. Letosa, A. Usón, *Fundamentos de teoría electromagnética, Asignatura Física II*, Moodle 2, Universidad de Zaragoza, Curso 2016 - 2017, accesible por internet en la dirección:

<https://moodle.unizar.es/>

[18] Amazing1, *Manual Bobina Tesla Amazing1*, 2021, Information Unlimited, accesible por internet en la dirección:

<https://www.amazing1.com/>

[19] Varios autores, *Tesla Coils Safety Information*, 1996, accesible por internet en la dirección:

www.classictesla.com/safety.html

[20] D. Meeker, *Finite Element Method Magnetics*, Version 4.2, User's Manual, 2020, accesible en la dirección:

<https://www.femm.info/wiki/Documentation/>

[21] The MathWorks Inc, *MATLAB*, 2021, accesible en la dirección:

<https://es.mathworks.com/products/matlab.html>

2. Configuración de las bobinas

- Bobina plana



Ilustración A1. Bobina plana [10]

La bobina se enrolla en un solo plano. La inductancia se puede calcular con la ecuación de Wheeler modificada al valor W (ancho de la bobina):

$$L = \frac{N^2 * R^2}{(8 * R + 11 * W) * 2540} \quad (\text{A2.1})$$

- L: inductancia de la bobina [mH].
- N: espiras de la bobina [vueltas].
- R: radio de la bobina hasta el centro de ella [cm].
- W: ancho de la bobina [cm].
- 2540: factor de conversión para pasar de pulgadas a centímetros.

- Bobina solenoidal

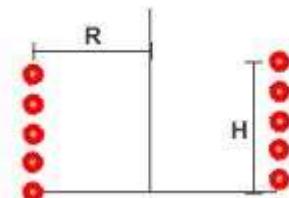


Ilustración A2. Bobina solenoidal [10]

La bobina se enrolla en forma de cilindro. La inductancia se puede calcular con la ecuación de Wheeler:

$$L = \frac{N^2 * R^2}{(9 * R + 10 * H) * 2540} \quad (\text{A2.2})$$

- L: inductancia de la bobina [mH].
- N: espiras de la bobina [vueltas].
- R: radio de la bobina [cm].

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

- H: altura de la bobina [cm].
- 2540: factor de conversión para pasar de pulgadas a centímetros.
- Bobina cónica inversa

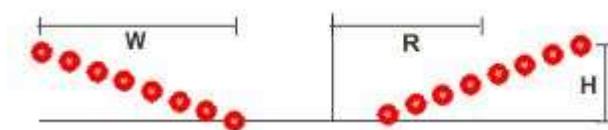


Ilustración A3. Bobina cónica inversa [10]

La bobina se enrolla en forma de plato hondo. La inductancia se puede calcular con la ecuación de Wheeler:

$$L = \sqrt{(L_{solenoidal} * \operatorname{sen} \alpha)^2 + (L_{plana} * \operatorname{sen} \alpha)^2} \quad (\text{A2.3})$$

- L: inductancia de la bobina cónica inversa [mH].
- $L_{solenoidal}$: inductancia de la bobina solenoidal (A2.2) [mH].
- L_{plana} : inductancia de la bobina plana (A2.1) [mH].
- N: espiras de la bobina [vueltas].
- R: radio de la bobina [cm].
- W: ancho de la bobina [cm].
- H: altura de la bobina [cm].
- 2540: factor de conversión para pasar de pulgadas a centímetros.

3. Código para el cálculo analítico

```

clc
clear all
%DATOS de diseño

% DISEÑO BASADO EN C1 NOMINAL PREESTABLECIDO

C1N = 12.1    % Valor de C1 elegido nF
V1N = 6000; % Tensión nominal de operación en el primario en V

%-----
% Datos cobre
Rho = 1.75e-4;    % Resistividad del cobre [Ohm.mm^2/cm)
Rho_m =8.885e-5; % Densidad de masa del cobre [kg/ (mm^2.cm) ]
%-----

% Datos bobina Secundario
Nes=1584;          % número de espiras
DH=0.5e-3;          % diámetro hilo en m
DB=20e-2;          % diámetro del carrete en m
Kr=8.33;           % coeficiente relleno cobre en porcentaje
%-----

% Datos bobina de primario
% Bobina cilíndrica
Dbp = 28e-2;        % diámetro del carrete en m
Hbp = 0.1;           % Altura bobina m
Sp_cil = 2.5e-6;     % Sección del cable m2

% Bobina plana
Rpmin = 0.125;      % radio minimo de la bobina en m
Rpmax = 0.325;      % radio máximo de la bobina en m
Sp_plana = 7e-6;     % Sección del cable m2

% Bobina conica invertida
Rcmin = 0.125;      % radio minimo de la bobina en m
Rcmax = 0.325;      % radio máximo de la bobina en m
hc = 0.05;           % Altura de la bobina en m
Sp_con = 7e-6;       % Sección del cable m2
%-----

% Datos del terminal de secundario toroidal
DTE = 0.485;         % Diametro exterior del toroide en m
DTT = 0.02;           % Diámetro transversal del toroide en m
%-----
FTE = 0.8 ;          % Factor de transferencia de energía

%RESULTADOS
% Resultados Bobina secundario
R = (DB/2)*100;      % Radio bobina en cm
Hb=Nes*DH*(1+Kr/100); % Altura bobina en m
H = Hb*100;           % Altura bobina en cm

```

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

```

% Inductancia de la bobina de secundario con formula de Wheeler
L2 = R^2*Nes^2/((9*R+10*H)*2540);           % Inductancia de la bobina
en mH

% Resistencia bobina secundario
De=(DB+DH)*100;                                % cálculo diámetro espira
Cu en cm
LongB2=Nes*DH*(1+Kr/100)*100;                   % longitud arrollamiento en
cm
r=100*DB/2;                                      % radio bobina Cm
ResB2=Rho*4*Nes*De/(DH*1000)^2;                 % cálculo
resistencia bobina en Ohmios
Peso_cu_B2=Rho_m*pi^2*(DH*1000)^2*De*Nes/4;   % cálculo peso
cobre en kg

% Capacidad entre espiras de la bobina con fórmula de Medhurst
D = DB*100;           % Diámetro de la bobina en cm
K = 0.1126*(H/D) + 0.08 + 0.27/sqrt(H/D);
CL2 = K*D;           % Capacidad en pF

% Capacidad del Toroide
d1 = DTE*100;           % Diámetro exterior del toroide en cm
d2 = DTT*100;           % Diámetro transversal del toroide en cm
% Capacidad del toroide en pF con fórmula de Bert-Pool
Ctoro = 2.8*(1.2781-(d2/d1))*sqrt(0.1217*d2*(d1-d2));

% Capacidad total de secundario en pF
C2 = CL2 + Ctoro;

% Frecuencia de resonancia del secundario desacoplado en Hz
frs = 1/(2*pi()*sqrt(L2*1e-3*C2*1e-12));

% Cálculo de la energía disponible en el condensador de primario

W1 = (1/2)*C1N*1E-9*V1N^2;   % J
W2 = W1*FTE;                 % energía disponible en secundario J

% Cálculo de potencia minima necesaria en el trafo de alim para
transferir integralmente la potencia del primario al secundario (FTE
= 1), supuesto un solo disparo por cada semiciclo de la tensión de
red
que estimo, según lo visto en la biblio en un mínimo de un 20%
P1 = W1/10e-3;           % Potencia entregada al primario en W
C1 = C1N;                 % Valor elegido para la capacidad de
primario

% Calculo de la tensión de secundario alcanzada V
V2 = sqrt(2*W2/(C2*1e-12));

% Cálculo de la inductancia de primario para que este circuito
desacoplado
% oscile a la frecuencia de resonancia del primario
frp = frs;

L1 = 1/(C1*1e-9*(2*pi()*frp)^2);   % En H

```

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

```
% Cálculo de número de vueltas del primario en función del tipo de
bobina implementado

% TIPO 1: Bobina cilíndrica (uso la fórmula de Wheeler)
Rbp = (Dbp/2)*100; % Radio bobina en cm
Hcm = Hbp*100; % Altura bobina primario en cm
N1_cil = sqrt(L1*1e3*(9*Rbp+10*Hcm)*2540/Rbp^2);
% Resistencia de bobina cilíndrica
Long_B1_cil = N1_cil*(pi()*Dbp); % Longitud bobina de
primario en m
Res1_cil = Rho*Long_B1_cil*100/(Sp_cil*1e6); % Resistencia bobina del
primario en Ohm

% TIPO 2: Bobina plana
anchura = (Rpmx-Rpmin)*100; % Anchura de la bobina en cm
Rmitad = Rpmin*100+anchura/2; % Radio mitad de la bob en cm
N1_plana = sqrt(L1*1e3*(8*Rmitad+11*anchura)*2540/Rmitad^2);
% Resistencia de bobina plana
Long_B1_plana = N1_plana*(2*pi()*Rmitad); % Longitud bobina de
primario en m
Res1_plana = Rho*Long_B1_plana/(Sp_plana*1e6); % Resistencia bobina
del primario en Ohm

% Tipo 3: Bobina cónica invertida
anchura = (Rcmx-Rcmin)*100; % Anchura de la bobina en cm
Rmitad = Rcmin*100+anchura/2; % Radio mitad de la bob en cm
hc_cm = hc*100;
Lu1 = Rmitad^2/((9*Rmitad+10*hc_cm)*2540); % factor solenoidal
Lu2 = Rmitad^2/((8*Rmitad+11*anchura)*2540); % factor solenoidal
angulo = atan(hc_cm/anchura);
N1_con = sqrt(L1*1e3*sqrt(1/((Lu1*sin(angulo))^2+(Lu2*cos(angulo))^2)));
% Resistencia de bobina plana
Long_B1_con = N1_con*(2*pi()*Rmitad); % Longitud bobina de primario
en m
Res1_con = Rho*Long_B1_con/(Sp_con*1e6); % Resistencia bobina del
primario en Ohm

Res1 = Res1_cil; % Tomo la resistencia de la bobina ciclíntrica
N1 = N1_cil; % Tomo el número de vueltas de la bobina cilíndrica

% Cálculo del coeficiente de acoplamiento
% TIPO 1: Bobina cilíndrica
M12 = (1.26e-6*N1_cil*Nes*pi()*(DB/2)^2)/(2*Hb);
kcil = M12/sqrt(L1*L2/1000);

% TIPO 2: Bobina plana
M12 = (1.26e-6*N1_plana*Nes*pi()*(DB/2)^2)/(2*Hb);
kp = M12/sqrt(L1*L2/1000);
% Tipo 3: Bobina cónica invertida
M12 = (1.26e-6*N1_con*Nes*pi()*(DB/2)^2)/(2*Hb);
kcon = M12/sqrt(L1*L2/1000);

k = kcil;
```

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

```

% Salida de resultados a la consola
% DATOS DEL MODELO UTILIZADO EN LOS CÁLCULOS
% (Algunos datos geométricos son calculados a partir de los datos)
% Bobina de secundario
disp('DATOS');
disp(sprintf('BOBINA DE SECUNDARIO'));
disp(sprintf('Número de espiras      =% f',Nes));
disp(sprintf('DIAMETRO BOBINA        =% f cm',DB*100));
disp(sprintf('ALTURA BOBINA          =% f cm',H));
disp(sprintf('DIAMETRO DEL HILO       =% f mm',DH*1000));
disp(sprintf('FACTOR RELLENO          =% f por ciento',Kr));
disp(' ');
% Bobina de primario
disp(sprintf('BOBINA DE PRIMARIO CILINDRICA'));
disp(sprintf('Número de espiras      =% f',N1));
disp(sprintf('DIAMETRO BOBINA        =% f cm',Dbp*100));
disp(sprintf('ALTURA BOBINA          =% f cm',Hbp*100));
disp(sprintf('SECCIÓN DEL HILO        =% f mm2',Sp_cil*1e6));
disp(' ');
% Condensador de secundario toroidal
disp(sprintf('Terminal toroidal'));
disp(sprintf('DIAMETRO EXTERIOR DEL TOROIDE      =% f cm',DTE*100));
disp(sprintf('DIAMETRO TRANSVERSAL DEL TOROIDE      =% f cm',DTT*100));
disp(' ');
% Tensiones de trabajo
disp(sprintf('Tensiones de trabajo '));
disp(sprintf('TENSIÓN NOMINAL DE SECUNDARIO      =% f kV',V2/1000));
disp(sprintf('TENSIÓN NOMINAL DE PRIMARIO          =% f kV',V1N/1000));
disp(sprintf('FACTOR DE TRANSFERENCIA DE ENERGÍA =% f',FTE));
disp(' ');
% RESULTADOS
disp('RESULTADOS');
disp(sprintf('RESISTENCIA BOBINA PRIMARIO      =% f mOhmios',Res1*1000));
disp(sprintf('COEFICIENTE AUTOIND PRIMARIO      =% f microH',L1*1e6));
disp(sprintf('CAPACIDAD PRIMARIO                =% f nF',C1));
disp(' ');
disp(sprintf('RESISTENCIA BOBINA SECUNDARIO      =% f Ohmios',Res2));
disp(sprintf('COEFICIENTE AUTOIND SECUNDARIO =% f mH',L2));
disp(sprintf('CAPACIDAD SECUNDARIO              =% f pF',C2));
disp(' ');
disp(sprintf('COEFICIENTE DE ACOPLAMIENTO      =% f ',k));
disp(sprintf('FRECUENCIA DE RESONANCIA          =% f kHz',frs/1000));
disp(' ');
disp(sprintf('ENERGIA EN EL PRIMARIO          =% f J',W1));
disp(sprintf('POTENCIA DEMANDADA              =% f W',P1));
%-----
-----
```

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

```

% Calculos analiticos con Res1 = Res2 = 0 Ohmios y representación
gráfica.
tfinal = 1e-4 % tiempo final de visualización en las
gráficas en segundos
T = frp/frs; % Coeficiente de sintonización
wra1 = 2*pi()*frs*sqrt(((1+T)-sqrt((1-T)^2+4*k^2*T))/(2*(1-k^2)));
% Frec angular de resonancia 1 del circ completo acoplado
wra2 = 2*pi()*frs*sqrt(((1+T)+sqrt((1-T)^2+4*k^2*T))/(2*(1-k^2)));
% Frec angular de resonancia 2 del circ completo acoplado
fra1 = wra1/(2*pi()); % Frec de resonancia 1 en Hz
fra2 = wra2/(2*pi()); % Frec de resonancia 2 en Hz
V2m = (2*k*V1N/sqrt((1-T)^2+4*k^2*T))*sqrt((L2*1e-3)/L1); % Amplitud de la tensión de secundario en voltios

wa = (wra1+wra2)/2; % frecuencia auxiliar operativa 1
wb = (wra1-wra2)/2; % frecuencia auxiliar operativa 2

V2t = @(t) V2m*sin(wa*t)*sin(wb*t); % Variación temporal de V2 por claculo analitico
I2t = @(t) 12*V2m*(wa*cos(wa*t)*sin(wb*t)+wb*sin(wa*t)*cos(wb*t)); % Variación temporal de I2 en A;
figure(1);
fplot(V2t, [0 tfinal]);
figure(2);
fplot(I2t, [0 tfinal]);

V1t = @(t) V1N*cos(wa*t)*cos(wb*t); % Variación temporal de V2 por claculo analitico
I1t = @(t) 9*V1N*(wa*sin(wa*t)*cos(wb*t)+wb*cos(wa*t)*sin(wb*t)); % Variación temporal de I2 en A;
figure(3);
fplot(V1t, [0 tfinal]);
figure(4);
fplot(I1t, [0 tfinal]);

```

4. Fórmulas para el cálculo analítico

A partir del circuito de la Ilustración 1, del apartado 2.1 se pueden obtener las fórmulas del circuito a partir de la Ley de Kirchhoff de tensión, sin tener en cuenta el transformador de alta tensión [5]:

$$R_i * i_i + \frac{1}{C_i} * \int i_i dt + L_i * \frac{di_i}{dt} + M * \frac{di_i}{dt} = 0 \quad (\text{A4.1})$$

La intensidad se puede obtener como la derivada respecto del tiempo de la carga de los condensadores.

$$\frac{dq_i}{dt} = i_i \quad (\text{A4.2})$$

Donde el subíndice i tiene el valor de 1 para el circuito primario y 2 para el circuito secundario. Combinando las cuatro ecuaciones (A4.1) y (A4.2) para los dos subíndices, se obtiene:

$$R_1 * \frac{dq_1}{dt} + \frac{1}{C_1} * q_1 + L_1 * \frac{d^2 q_1}{dt^2} + M * \frac{d^2 q_2}{dt^2} = 0 \quad (\text{A4.3})$$

$$R_2 * \frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{C_2} * q_2 + L_2 * \frac{d^2 q_2}{dt^2} + M * \frac{d^2 q_1}{dt^2} = 0 \quad (\text{A4.4})$$

Sustituyendo las derivadas por el operador D:

$$\left[D^2 + \frac{R_1}{L_1} * D + \frac{1}{L_1 * C_1} \right] * q_1 + \frac{M}{L_1} * D * q_2 = 0 \quad (\text{A4.5})$$

$$\left[D^2 + \frac{R_2}{L_2} * D + \frac{1}{L_2 * C_2} \right] * q_2 + \frac{M}{L_2} * D * q_1 = 0 \quad (\text{A4.6})$$

Se despeja de forma matricial las dos ecuaciones despejando q_1 y q_2 y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} (1 - k^2) * D^4 + \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \right) * D^3 + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{R_1}{L_1} * \frac{R_2}{L_2} \right) * D^2 \\ + \left(\frac{R_1}{L_1} * \omega_2^2 + \omega_1^2 * \frac{R_2}{L_2} \right) * D + \omega_2^2 * \omega_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A4.7})$$

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

De las variables de esta ecuación podemos saber que:

- La variable k es el coeficiente de acoplamiento:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 * L_2}} \quad (A4.8)$$

- La variable ω es la frecuencia de resonancia de los circuitos desacoplados:

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{L_i * C_i}} = 2 * \pi * f_i \quad (A4.9)$$

La ecuación A4.7 es de cuarto grado por lo tanto tiene cuatro raíces complejas D , de las cuales se obtienen 4 soluciones de las ecuaciones A4.5 y A4.6:

$$q_1 = \sum_{i=1}^4 A_i * e^{D_i t} \quad (A4.10)$$

$$q_2 = \sum_{i=1}^4 B_i * e^{D_i t} \quad (A4.11)$$

De estas dos ecuaciones se pueden obtener A_i y B_i , evaluándolas en $t=0$ (condición inicial):

$$q_1 = q_2 = 0 \quad D * q_1 = D * q_2 = 0 \quad (A4.12)$$

Para obtener el valor de tensión de cada condensador se utiliza la fórmula de tensión del condensador:

$$v_i = \frac{1}{C_i} * q_i \quad (A4.13)$$

Uniendo la ecuación A4.13 con las ecuaciones A4.10 y A4.11 y despejando la ecuación A4.7 con un valor de resistencias cero (caso ideal), se obtiene la ecuación de tensión en el secundario:

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

$$v_2(t) = \frac{2 * k * V_1}{\sqrt{(1-T)^2 + 4 * k^2 * T}} * \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} * \sin\left(\frac{w_2 + w_1}{2} * t\right) * \sin\left(\frac{w_2 - w_1}{2} * t\right) \quad (A4.14)$$

De las variables de esta ecuación podemos saber que:

- La variable T es el coeficiente sintonización:

$$T = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{L_2 * C_2}{L_1 * C_1} \quad (A4.15)$$

- La variable w es la frecuencia de resonancia de los circuitos acoplados:

$$w_1 = \omega_2 * \sqrt{\frac{(1+T) - \sqrt{(1-T)^2 + 4 * k^2 * T}}{2 * (1 - k^2)}} \quad (A4.16)$$

$$w_2 = \omega_2 * \sqrt{\frac{(1+T) + \sqrt{(1-T)^2 + 4 * k^2 * T}}{2 * (1 - k^2)}} \quad (A4.17)$$

5. Medidas básicas de seguridad

Las bobinas de Tesla producen altas tensiones e intensidades a alta frecuencia. Estas descargas de alta tensión pueden producir lesiones y/o muerte. Por lo tanto, se deben seguir unas medidas de utilización para prevenir esto [18]:

- Antes de utilizar la bobina, si se tienen dudas de funcionamiento, consultar a un experto.
- Al producir ozono, debe ser utilizada en espacios abiertos y ventilados.
- No utilizar durante periodos prolongados.
- Evitar la exposición de los ojos al explosor ya que se emite luz ultravioleta, mejor usar gafas de protección.
- Comprobar que las tomas de tierra están bien conectadas.
- Una vez montado el circuito, no manipular si no es necesario.
- No tocar la bobina cuando está encendida, salvo que se toque con la pétiga de seguridad.
- No tocar el condensador primario después del funcionamiento por si todavía está cargado.
- Colocarse a una distancia suficientemente lejos para llegar con la pétiga el terminal superior, pero manteniéndose a una distancia de seguridad.
- No utilizar cerca de líquidos o cosas inflamables.
- Mantener alejado del alcance de los niños.
- Colocar interruptor de seguridad para evitar conectar sin darse cuenta.
- Mantener alejados los aparatos electrónicos, ya que si están lo suficientemente cerca pueden sufrir interferencias.
- Las bobinas producen ruido y una exposición alargada a él puede afectar a la audición.

6. Información del software empleado

- FEMM (Finite Element Method Magnetics)

Es un software libre desarrollado por David Meeker. Es un conjunto de programas para resolver problemas electromagnéticos en dominios bidimensionales, planos y axisimétricos.

En la actualidad aborda actualmente problemas magnetostáticos lineales y no lineales, problemas electróstaticos lineales y problemas de flujo de calor. [20]

En la página web oficial se puede encontrar:

- Su descarga gratuita es accesible desde la dirección:
<https://www.femm.info/wiki/Download>
- La documentación necesaria para la utilización del software, como:
 - Manual de usuario
 - Tutorial de magnetismo
 - Tutorial de electrostática

Todos estos documentos son accesibles desde la dirección:

<https://www.femm.info/wiki/Documentation/>

- Información sobre el autor del software, accesible desde la dirección:
<https://www.femm.info/wiki/DavidMeeker>
- Ejemplos de problemas, accesible desde la dirección:
<https://www.femm.info/wiki/Examples>
- Preguntas más frecuentes, accesible desde la dirección:
<https://www.femm.info/wiki/FAQ>

- MATLAB R2020b

Es un sistema de cómputo numérico que ofrece un entorno de desarrollo integrado. Está disponible para las plataformas Unix, Windows, macOS y GNU/Linux [20]. Para su utilización es necesaria la compra de una licencia (para este proyecto se ha utilizado la licencia de la Universidad de Zaragoza).

- Las prestaciones para MATLAB son las siguientes [21]:
 - Análisis de datos

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

- Gráficas
- Desarrollo de algoritmos
- Creación de apps
- Uso de MATLAB con otros lenguajes
- Conexión con hardware
- Realización de cálculos
- Compartir los programas
- Ejecución en nube
- Las utilizaciones de MATLAB son las siguientes [21]:
 - Sistemas de control
 - Machine learning
 - Procesamiento de señales
 - Deep learning
 - Mantenimiento predictivo
 - Prueba y medición
 - Procesamiento de imágenes
 - Robótica
 - Comunicaciones inalámbricas
- La documentación necesaria para la utilización del software es accesible desde la dirección:
<https://es.mathworks.com/products/matlab/getting-started.html>
- Su descarga es accesible desde la dirección:
<https://es.mathworks.com/products/matlab/whatsnew.html>

7. Modificaciones en la bobina

7.1. Toroide

Se está construyendo otro toroide de tamaño superior para poder obtener una tensión superior de salida.



Ilustración A4. Toroide

A partir de la fórmula empírica de Bert Pool [12] [13] se obtiene la siguiente capacidad:

$$C_{toroide} = 2,8 * \left(1,2781 - \frac{40}{60} \right) * \sqrt{0,1217 * 40 * (60 - 40)} = 16,8926 \text{ pF} \quad (\text{A7.1})$$

- d_1 : Radio externo del toroide [cm].
- d_2 : Radio del anillo del toroide [cm].

- La capacidad del condensador 2 total es la suma de la capacidad del toroide y la capacidad parásita creada por las bobinas de la bobina (3.4):

$$C_2 = C_{toroide} + C_{par\ ásita} = 16,8926 \text{ pF} + 13,868 \text{ pF} = 30,7606 \text{ pF} \quad (\text{A7.2})$$

A partir de este valor del secundario se puede crear un circuito primario para obtener un valor superior de tensión, respecto al modelo de la memoria.

7.2. Bobina primaria solenoidal

En la bobina del circuito primario se ha creado una modificación respecto a las vueltas de la bobina. Se ha creado una bobina primaria de 36 vueltas con tomas intermedias para poder variar el bobinado del primario dependiendo del condensador primario o del circuito

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

secundario. Podemos obtener la inductancia máxima de la bobina primaria con la fórmula de Wheeler [10]:



Ilustración A5. Bobina primaria con tomas

$$L = \frac{N^2 * R^2}{(9 * R + 10 * H) * 2540} = \frac{36^2 * 14^2}{(9 * 14 + 10 * 15) * 2540} = 362,34 \text{ mH}$$

(A7.3)

7.3. Bobina primaria plana

Se ha creado una bobina plana para añadir inducción en el primario al unirla con la bobina solenoidal o para utilizarla como bobina primaria ella sola. A partir de una pinza se puede variar la inductancia cambiando la posición.

Se ha construido a partir de tubo de cobre de $\frac{1}{4}$ de pulgada sobre un soporte, se ha construido de 13 vueltas.



Ilustración A6. Bobina plana

Diseño y construcción de una bobina de Tesla

La bobina se enrolla en un solo plano. La inductancia se puede calcular con la ecuación de Wheeler modificada:

$$L = \frac{N^2 * R^2}{(8 * R + 11 * W) * 2540} = \frac{13^2 * 15,75^2}{(8 * 15,75 + 11 * 18,5) * 2540} = 50 \text{ mH}$$

(A7.4)