

TESIS DE LA UNIVERSIDAD  
DE ZARAGOZA

2021

254

DIEGO IZQUIERDO SIRERA

# Aproximación RBF de funciones explícitas con discontinuidades.

Director/es

López de Silanés, María Cruz  
Parra Lucán, M. Cruz

<http://zaguan.unizar.es/collection/Tesis>

ISSN 2254-7606



Premsas de la Universidad  
Universidad Zaragoza





**Universidad**  
Zaragoza

Tesis Doctoral

**APROXIMACIÓN RBF DE FUNCIONES EXPLÍCITAS  
CON DISCONTINUIDADES.**

Autor

**DIEGO IZQUIERDO SIRERA**

Director/es

López de Silanés, María Cruz  
Parra Lucán, M. Cruz

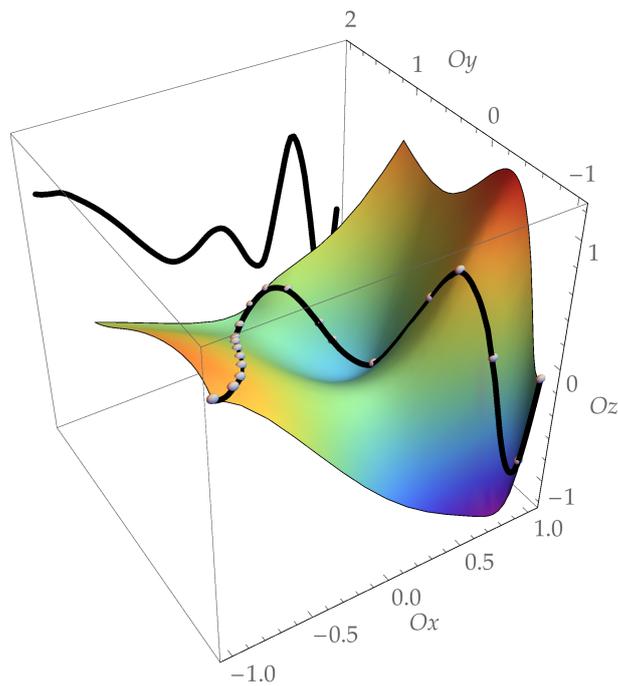
**UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA**  
**Escuela de Doctorado**

Programa de Doctorado en Matemáticas y Estadística

2021



# APROXIMACIÓN RBF DE FUNCIONES EXPLÍCITAS CON DISCONTINUIDADES



## Autor

Diego Izquierdo Sirera

## Directoras

María Cruz López de Silanes Busto

María Cruz Parra Lucán



Instituto Universitario de Investigación  
de Matemáticas  
y Aplicaciones  
**Universidad** Zaragoza



*Para mi hermana María*



---

## AGRADECIMIENTOS

---

El día que decidí emprender este camino de autoconocimiento y esfuerzo era consciente de que no iba a ser fácil pero nunca pensé que el devenir de la vida lo iba a prolongar tanto en el tiempo. *Más vale tarde que nunca* ha sido el mantra que me ha traído hasta aquí.

En primer lugar quiero agradecer a mis directoras, Mari Cruz López de Silanes y Mari Cruz Parra, por su apoyo, dedicación, esfuerzo y, sobre todo, por ser un magnífico ejemplo de lo que es la profesionalidad y la eficiencia en el trabajo. Un gran apoyo en la distancia ha sido Juanjo Torrens. A él tengo que agradecerle su inestimable ayuda al confeccionar la tesis y, más importante, su colaboración en la obtención de resultados.

Este trabajo ha sido financiado por el ministerio de Ciencia e Innovación, a través del proyecto de investigación MTM2009 – 07315 y el Gobierno de Aragón a través de dos grupos de investigación, E65 y T68, y la red de investigación CTPR04/10.

No puedo dejar de agradecer al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Zaragoza por su apoyo. En especial, quiero dar las gracias a Juan Manuel Peña por la confianza que siempre me ha demostrado.

Doy gracias al Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones (IUMA), especialmente a Beatriz Nueno por su apoyo en todas las tareas administrativas y al coordinador del programa de doctorado, José Ignacio Cogolludo, por guiarme en el proceso.

A mi familia y amigos, gracias por su apoyo incondicional que han estado siempre soportando mis frustraciones y preocupaciones.

También tengo que agradecer a Martin Buhmann esa charla que tuvimos en la Estación Delicias que infundió seguridad y confianza en mi trabajo.

Por último, tengo que agradecer los ánimos de todos mis compañeros para terminar la tesis. Sé que todos ellos se alegrarán de corazón cuando la defienda.



---

## RESUMEN

---

Una técnica puntera de aproximación de datos dispersos es la utilización de funciones radiales de base (RBF), que consiste en una combinación lineal finita de funciones de base trasladadas. Las RBF básicamente son funciones radialmente simétricas de la forma  $\Phi(\cdot) = \phi(\|\cdot\|_2)$ , donde  $\|\cdot\|_2$  es la norma euclídea.

Una ventaja de las RBF es que son independientes de la dimensión. Las funciones básicas  $\phi(r)$  toman la distancia euclídea como argumento, por lo que pueden extenderse trivialmente a dimensiones arbitrarias. Esto contrasta con los esquemas polinomiales a trozos, que generalmente se basan en el producto tensor de las dimensiones.

Por lo general, las RBF se aplican a funciones o datos aproximados que solo se conocen en un número finito de puntos (o demasiado difíciles de evaluar de otra manera), de modo que las evaluaciones de la función aproximada pueden realizarse de manera eficiente en la mayoría de las ocasiones.

El objetivo principal de esta memoria es profundizar en el estudio de la aproximación de funciones univariadas y multivariadas explícitas con discontinuidades por medio de las funciones radiales de base, obtener métodos y aplicar tales métodos a la representación de curvas y superficies no regulares. El trabajo se centra en la programación de los métodos obtenidos, la interpretación de los resultados, la obtención de los errores cometidos en variados ejemplos de aproximación y la comparación con algunos métodos existentes. En los trabajos publicados sobre el ajuste de superficies con fallas verticales u oblicuas se utilizan las RBF para conseguir aproximantes o interpolantes con las mismas fallas. En los trabajos referenciados en esta memoria al respecto, esas fallas o líneas de discontinuidad dividen el dominio de la superficie en dos o más componentes conexas disjuntas; coloquialmente se dice que cortan el dominio. En consecuencia, se establece como un segundo objetivo implementar un método de aproximación que, a través de RBF, ajuste superficies con cualquier tipo de falla, es decir, que las líneas de discontinuidad sean curvas que no tienen por qué cortar el dominio de la superficie que se quiere aproximar.

Otro objetivo fundamental de este trabajo es la detección de discontinuidades de salto tanto de la función univariada que se quiera aproximar como de su primera

derivada. Este método de detección se plantea como una aplicación del método de aproximación y puede ser extendido a funciones multivariadas. Existen pocos trabajos de detección de discontinuidades que utilicen RBF, en los artículos revisados se detectan discontinuidades de salto de la función pero no de su primera derivada.

La estrategia de interpolación de funciones con una discontinuidad de salto partiendo de un conjunto de centros equiespaciados definida por Jung [39] para eliminar las oscilaciones del interpolante estándar que presenta junto a la discontinuidad, utiliza la multicuádrica como RBF y cambia esa función de base por la función radial,  $\phi(r) = r$ , en los dos centros más cercanos a la discontinuidad. Se comprueba que esta estrategia puede ser extendida a funciones con varias discontinuidades de salto usando un conjunto de centros dispersos y cambiando la RBF empleada (que puede ser cualquiera) por una RBF no diferenciable en los centros que están junto a las discontinuidades. Esta estrategia es capaz de conseguir aproximantes de funciones cuya primera derivada presenta una o más discontinuidades de salto considerando dichas discontinuidades como centros y cambiando allí la RBF por otra no diferenciable.

Se define la aproximación RBF mediante funciones auxiliares, *aproximación RBFFA*, que es capaz de ajustar funciones no regulares usando una función auxiliar que presenta las mismas discontinuidades. La *aproximación RBFFA*, aplicable a cualquier función definida en  $\mathbb{R}^d$ , consiste en obtener un aproximante mediante un proceso de aproximación RBF en  $\mathbb{R}^{d+1}$  si se desplazan los centros hasta el grafo de una función  $\zeta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , que llamaremos *función auxiliar*, aproximar en  $\mathbb{R}^{d+1}$  y restringir luego el aproximante al grafo de  $\zeta$ . En algunas ocasiones esta aproximación, con una función auxiliar continua que puede ser constante, consigue mejores resultados que el esquema estándar para funciones regulares.

Se proponen diferentes funciones auxiliares, y se estudia experimentalmente la conveniencia de su uso, para ajustar funciones univariadas no regulares con la aproximación RBFFA según las discontinuidades que presente la función o su derivada. Se estudia que, por sus especiales características, es conveniente utilizar funciones radiales de soporte compacto para que la aproximación RBFFA sea realmente efectiva.

La aproximación RBFFA se redefine y adapta para ser aplicada a superficies no regulares que presentan fallas verticales, oblicuas o de ambos tipos. Con la misma idea, este método utiliza una función auxiliar que presenta las mismas fallas que la función a aproximar. La técnica consigue buenos aproximantes y presenta una ventaja ante otros métodos. Los métodos existentes solo consideran líneas de discontinuidad que separan el dominio de la superficie determinando dos o más componentes conexas disjuntas. En cambio, la técnica propuesta en este trabajo no tiene esta limitación y permite aproximar más tipos de superficies no regulares.

Las técnicas propuestas en esta memoria necesitan conocer de antemano los puntos donde la función es discontinua. De este modo, por último, se implementa un método iterativo, que usa la aproximación RBFFA, para localizar aproximadamente dónde la función a aproximar presenta discontinuidades de salto. Además, el método puede localizar discontinuidades de la primera derivada de la función, tomando como valores de la derivada los obtenidos mediante fórmulas de tipo interpolatorio de tres puntos. El método también puede determinar si la función y su derivada son continuas. Por último, se ha implementado el método de detección junto con la aproximación RBFFA para reconstruir por entero una función univariada no regular a partir de datos dispersos.



---

# ÍNDICE GENERAL

---

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Índice general	xi
Índice de figuras	xiii
Índice de cuadros	xvii
Introducción	xix
<b>1. Funciones radiales de base</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Interpolación con funciones radiales de base . . . . .	1
1.2.1. Funciones definidas positivas . . . . .	2
1.2.2. Funciones condicionalmente definidas positivas . . . . .	5
1.3. Funciones de soporte compacto . . . . .	8
1.4. Otras cuestiones . . . . .	11
<b>2. Interpolación de funciones univariadas no regulares</b>	<b>15</b>
2.1. Introducción . . . . .	15
2.2. Interpolación en nodos equiespaciados . . . . .	16
2.2.1. Comportamiento local de la interpolación . . . . .	18
2.2.2. Interpolación con N centros . . . . .	20
2.3. Interpolación de funciones discontinuas . . . . .	28
2.4. Interpolación de funciones no derivables . . . . .	35
<b>3. Aproximación de funciones no regulares</b>	<b>39</b>
3.1. Introducción . . . . .	39
3.2. Aproximación RBF mediante funciones auxiliares . . . . .	41

3.3.	Aproximación RBFFA de funciones univariadas no regulares . . . . .	46
3.3.1.	Aproximación de funciones univariadas discontinuas . . . . .	46
3.3.2.	Aproximación de funciones univariadas no diferenciables . . . . .	52
3.3.3.	Aproximación de funciones univariadas no regulares . . . . .	56
3.4.	Aproximación RBFFA de superficies no regulares . . . . .	61
3.4.1.	Nociones preliminares y planteamiento del problema . . . . .	61
3.4.2.	Método de aproximación . . . . .	63
3.4.3.	Ejemplos numéricos . . . . .	65
<b>4.</b>	<b>Detección de discontinuidades</b>	<b>75</b>
4.1.	Introducción . . . . .	75
4.2.	Detección de discontinuidades de salto de funciones univariadas . . . . .	76
4.2.1.	Descripción del algoritmo . . . . .	76
4.2.2.	Justificación y explicación del algoritmo . . . . .	78
4.2.3.	Consideraciones adicionales . . . . .	82
4.2.4.	Ejemplos numéricos . . . . .	83
4.3.	Aplicaciones del método de detección . . . . .	90
4.3.1.	Detección de discontinuidades de derivada . . . . .	90
4.3.2.	Reconstrucción de funciones no regulares . . . . .	93
	<b>Conclusiones y Problemas abiertos</b>	<b>103</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

1.1. Grafo de la RBF $\Phi$ generada en $\mathbb{R}$ por la función de Wendland $\phi_{3,1}$ y varias RBF $\Phi_\rho(\cdot) = \Phi(\cdot/\rho)$ resultantes de un cambio de escala. . . . .	10
1.2. Grafo de la RBF $\Phi$ generada en $\mathbb{R}^2$ por la función de Wendland $\phi_{3,1}$ y varias RBF $\Phi_\rho(\cdot) = \Phi(\cdot/\rho)$ resultantes de un cambio de escala. . . . .	11
2.1. RBF diferenciables detalladas en el cuadro 2.1. En la leyenda se indica la función básica que la genera. . . . .	17
2.2. RBF no diferenciables detalladas en el cuadro 2.1. En la leyenda se indica la función básica que la genera. . . . .	17
2.3. Interpolación de $f$ en $X = \{-\delta/2, \delta/2\}$ . Las leyendas indican la RBF utilizada. . . . .	21
2.4. Interpolación de la función $f$ dada en el ejemplo 2.2.2 usando la RBF $\Phi_3$ . Izquierda: interpolantes $s_{f,X}$ para $N = 8, 16, 32$ y $64$ . Derecha: función error $ f - s_{f,X} $ en escala logarítmica. . . . .	22
2.5. Interpolación de la función $f$ dada en el ejemplo 2.2.2 usando las RBF $\Phi_1$ y $\Phi_4$ . Izquierda: interpolantes $s_{f,X}$ para $N = 8, 16, 32$ y $64$ . Derecha: función error $ f - s_{f,X} $ en escala logarítmica. . . . .	23
2.6. Interpolación de la función $f$ dada en el ejemplo 2.2.2 usando la RBF $\Phi_7$ . Izquierda: interpolantes $s_{f,X}$ para $N = 8, 16, 32$ y $64$ . Derecha: función error $ f - s_{f,X} $ en escala logarítmica. . . . .	24
2.7. Interpolación de la función $f$ dada en el ejemplo 2.2.3 usando las RBF $\Phi_3$ y $\Phi_4$ . Izquierda: interpolantes $s_{f,X}$ para $N = 8, 16, 32$ y $64$ . Derecha: función error $ f - s_{f,X} $ en escala logarítmica. . . . .	25
2.8. Interpolación de la función $f$ dada en el ejemplo 2.2.3 usando las RBF $\Phi_6$ y $\Phi_7$ . Izquierda: interpolantes $s_{f,X}$ para $N = 8, 16, 32$ y $64$ . Derecha: función error $ f - s_{f,X} $ en escala logarítmica. . . . .	26
2.9. Valor absoluto, en escala logarítmica, de los coeficientes de expansión del interpolante $s_{f,X}$ asociado a la función $f$ del ejemplo 2.2.3 y el conjunto $X$ de $N = 64$ centros equiespaciados. Se usan las RBF $\Phi_3$ y $\Phi_4$ . . . . .	27

2.10. Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 2.3.1. Izquierda: interpolantes $\tilde{s}_{f,X}$ para $N = 8, 16, 32$ y $64$ . Derecha: función error $ f - \tilde{s}_{f,X} $ en escala logarítmica. . . . .	30
2.11. Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 2.3.2. Izquierda: interpolantes $\tilde{s}_{f,X}$ para $N = 8, 16, 32$ y $64$ . Derecha: función error $ f - \tilde{s}_{f,X} $ en escala logarítmica. . . . .	31
2.12. Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 2.3.3. Izquierda: interpolantes $\tilde{s}_{f,X}$ para $N = 8$ y $16$ . Derecha: función error $ f - \tilde{s}_{f,X} $ en escala logarítmica. Para la RBF $\Phi_3$ se toma $c = 0.05$ . . . . .	33
2.13. Interpolantes correspondientes al ejemplo 2.3.4. . . . .	34
2.14. Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 2.4.1. Izquierda: interpolantes $\tilde{s}_{f,X}$ . Derecha: función error $ f - \tilde{s}_{f,X} $ en escala logarítmica. . . . .	36
2.15. Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 2.4.2. Izquierda: interpolantes $\tilde{s}_{f,X}$ . Derecha: función error $ f - \tilde{s}_{f,X} $ en escala logarítmica. . . . .	37
3.1. Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 3.2.1. . . . .	44
3.2. Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 3.2.2. . . . .	45
3.3. Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 3.3.1. . . . .	48
3.4. Resultados de aproximación correspondientes al ejemplo 3.3.2. . . . .	50
3.5. Estimaciones del error máximo y del condicionamiento del sistema lineal asociados a interpolantes RBFFA en función del parámetro $\sigma$ que define una función auxiliar escalonada. La interpretación de estas gráficas se ofrece en el ejemplo 3.3.3. . . . .	51
3.6. Posibles funciones auxiliares $\zeta$ en el intervalo $[-1, 1]$ para las discontinuidades $v_1 = -0.89$ , $v_2 = -0.63$ , $v_3 = -0.45$ , $v_4 = -0.17$ , $v_5 = -0.01$ , $v_6 = 0.27$ , $v_7 = 0.36$ , $v_8 = 0.55$ y $v_9 = 0.86$ . En cada función, se repiten cíclicamente las pendientes indicadas en la leyenda. . . . .	53
3.7. Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 3.3.4. . . . .	54
3.8. Estimación del error máximo de interpolación para la función y centros del ejemplo 3.3.4 según el par de pendientes $(p_0, p_1)$ con las que construir la función auxiliar $\zeta$ . . . . .	55
3.9. Resultados de aproximación correspondientes al ejemplo 3.3.5. . . . .	57
3.10. Resultados de aproximación correspondientes a los ejemplos 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.8. En todos los casos se representan los grafos del aproximante RBFFA $s_{f,X}^*$ junto con los de la función $f$ y el aproximante RBF $s_{f,X}$ . . . . .	60

3.11. (a) Ejemplo de un conjunto de discontinuidad $\mathcal{F}$ (línea continua) en el cuadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Hay cuatro conjuntos $R_i$ , marcados con diferentes niveles de color gris. El conjunto $\partial R$ está formado por todas las líneas tanto de trazo continuo como discontinuo. (b) Grafo de una función en $C_{\mathcal{F}}^2(\Omega')$ . . . . .	62
3.12. Esquema para explicar la condición (3.4). . . . .	64
3.13. Conjunto $X$ de centros usado en todos los ejemplos. . . . .	66
3.14. Gráficos correspondientes al ejemplo 3.4.1. . . . .	70
3.15. Gráficos correspondientes al ejemplo 3.4.2. . . . .	71
3.16. Gráficos correspondientes al ejemplo 3.4.3. . . . .	72
3.17. Gráficos correspondientes al ejemplo 3.4.4. . . . .	73
3.18. Gráficos correspondientes al ejemplo 3.4.5. . . . .	74
4.1. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.1. En (a), (b) y (c) se representa el grafo del interpolante $s_{f,X}^{*,k}$ , los datos (en gris) y los centros seleccionados hasta la iteración $k$ -ésima (en verde). . . . .	84
4.2. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.1. Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores $\eta \beta_{\text{máx}}^k$ y $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ . . . . .	85
4.3. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.2. Grafo del interpolante $s_{f,X}^{*,k}$ , los datos (en gris) y los centros seleccionados hasta la iteración $k$ -ésima (en verde). . . . .	86
4.4. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.2. Aproximación final de $f$ mediante el interpolante $s_{f,X}^{*,4}$ . . . . .	87
4.5. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.2. Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores $\eta \beta_{\text{máx}}^k$ y $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ . . . . .	87
4.6. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.3. Grafo del interpolante $s_{f,X}^{*,k}$ , los datos (en gris) y los centros seleccionados hasta la iteración $k$ -ésima (en verde). . . . .	88
4.7. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.3. Aproximación final de $f$ mediante el interpolante $s_{f,X}^{*,8}$ . . . . .	89
4.8. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.3. Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores $\eta \beta_{\text{máx}}^k$ y $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ . . . . .	89

4.9. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.3.1. Grafo del interpolante  $s_{f,X}^{*,k}$  de los datos de derivada, los datos de derivada (en gris) y los centros seleccionados hasta la iteración  $k$ -ésima (en verde). . . . . 91

4.10. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.3.1. Aproximación final de  $f$  mediante el interpolante  $s_{f,X}^*$ . . . . . 92

4.11. Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.3.1. Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores  $\eta \beta_{\text{máx}}^k$  y  $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ . 92

4.12. Detección de las discontinuidades de  $f$  (cf. subsección 4.3.2). Para cada  $k$ , grafo de  $s_{f,X}^{*,k}$ , datos (en gris) y centros seleccionados hasta la iteración  $k$ -ésima (en verde). . . . . 96

4.13. Detección de las discontinuidades de  $f$  (cf. subsección 4.3.2). Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores  $\eta \beta_{\text{máx}}^k$  y  $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ . 97

4.14. Detección de las discontinuidades de  $f'$  en  $[0, 0.993803]$  (cf. subsección 4.3.2). Para cada  $k$ , grafo de  $s_{f,X}^{*,k}$ , datos estimados de derivada (en gris) y centros seleccionados hasta la iteración  $k$ -ésima (en verde). . . . . 98

4.15. Detección de las discontinuidades de  $f'$  en  $[0, 0.993803]$  (cf. subsección 4.3.2). Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores  $\eta \beta_{\text{máx}}^k$  y  $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ . . . . . 99

4.16. Detección de las discontinuidades de  $f'$  (cf. subsección 4.3.2). A izquierda, intervalo  $[0.993803, 1.52505]$ . A derecha, intervalo  $[1.52505, 2]$ . En todos los casos,  $k = 1$ . . . . . 100

4.17. Reconstrucción final de la función  $f$  (cf. subsección 4.3.2). . . . . 101

---

# ÍNDICE DE CUADROS

---

1.1. Funciones básicas definidas positivas en $\mathbb{R}^d$ . . . . .	4
1.2. Funciones básicas $m$ -cdp en $\mathbb{R}^d$ . . . . .	6
1.3. Funciones de Wu . . . . .	9
1.4. Funciones de Wendland . . . . .	10
2.1. Funciones radiales de base que se usarán en este capítulo. . . . .	17
2.2. Valores de $R$ para diferentes RBF, $(f^-, f^+)$ y $N$ . . . . .	28
3.1. Errores de aproximación correspondientes a los ejemplos 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.8. . . . .	58
3.2. Parámetro $\rho$ y errores de interpolación correspondientes a los ejemplos 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.4.4 y 3.4.5. . . . .	67



---

# INTRODUCCIÓN

---

Esta memoria se enmarca dentro de la teoría de la aproximación de funciones multivariadas y de sus aplicaciones a la reconstrucción de superficies, que es un área muy activa del Análisis Numérico. En la actualidad, debido a que los ordenadores se utilizan en casi todos los campos de las Ciencias y de la Ingeniería, es cada vez más importante implementar funciones matemáticas para realizar evaluaciones eficientes en programas de ordenador. Para ello suele ser necesario utilizar cualquier tipo de aproximación de una función en lugar de su forma matemática exacta. Una razón muy simple es que en muchos casos no es posible implementar funciones exactamente dado que, por ejemplo, pueden venir representadas únicamente por un desarrollo infinito. Además, la función que se desee utilizar puede no conocerse completamente o ser muy costosa de evaluar.

La aproximación de datos aleatoriamente distribuidos es un área de investigación reciente y de rápido crecimiento. Consiste en el problema de reconstruir una función desconocida a partir de ciertos datos dispersos dados.

Naturalmente tiene muchas aplicaciones, como el modelado del terreno, la reconstrucción de superficies, la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, los métodos kernel en Machine Learning y la estimación de parámetros, por nombrar algunos. Además, estas aplicaciones provienen de diferentes campos científicos como son la Matemática Aplicada, la Informática, la Geología, la Biología, la Ingeniería e incluso los Estudios Empresariales.

En particular, las funciones radiales de base se aplican en:

- los métodos de elementos finitos o los métodos espectrales para obtener la solución de ecuaciones diferenciales parciales (Fornberg [26]),
- las redes neuronales y aprendizaje automático, machine learning, (Cucker y Smale [17], Schaback y Wendland [53]),
- las aproximaciones en esferas (Freedman y otros [29], Golitschek y Light [30]),
- las aproximaciones estadísticas, donde los núcleos definidos positivos son muy

importantes (Nisbet y otros [49] o el documento sobre núcleos no estándar y sus aplicaciones de De Marchi y Schaback [18]),

- la investigación geofísica (Freedon y otros [29]),
- y muchas aplicaciones de ingeniería (Ferreira y otros [25]).

Teniendo en cuenta las aplicaciones mencionadas anteriormente, se deduce inmediatamente que la fortaleza del método de aproximación es la capacidad de manejar una gran cantidad de datos en un número arbitrario de dimensiones espaciales, datos que pueden no tener ninguna regularidad y que incluso podrían cambiar su posición con el tiempo.

Las funciones radiales de base son herramientas tradicionales muy potentes para el ajuste de datos arbitrarios en varias dimensiones. En la teoría moderna de la aproximación multivariada, los métodos basados en las funciones radiales de base son de los más utilizados (Iske [34], Wendland [55], Fasshauer [24] o Buhmann [14]).

Entre las funciones radiales de base más conocidas están los splines poliarmónicos o  $D^m$ -splines, también conocidos como superficies spline, debido a su aplicación en la aproximación de superficies. La teoría de los splines poliarmónicos fue introducida y desarrollada por Duchon [20, 21, 22]. Estos splines se corresponden con la siguiente función:

$$\phi_{n,m}(r) = \begin{cases} r^{2m-n} \log(r), & n \text{ par,} \\ r^{2m-n}, & n \text{ impar,} \end{cases}$$

donde  $m$  debe satisfacer  $2m > n$ . Notemos que  $\phi_{n,m}$  es la solución fundamental del  $m$ -ésimo laplaciano iterado. Un caso particular de los splines poliarmónicos son los splines de placa fina o *thin plate splines*,  $\phi_{2,2}(r) = r^2 \log(r)$ . El método elaborado por Duchon sigue las ideas de Attéia [5] acerca de los espacios de funciones spline abstractas, en los que se hace uso de la noción de núcleo reproductor de un espacio semi-Hilbert.

Arcangéli, López de Silanes y Torrens adoptan en [3] un punto de vista diferente al de Duchon, dotando a esos espacios de normas apropiadas para que puedan, por consiguiente, ser tratados como espacios de Hilbert. Este método ha permitido obtener todos los resultados de una manera relativamente simple y, por otra parte, se adapta bien al establecimiento de estimaciones del error. En [3] se estudian también los splines poliarmónicos sobre dominios acotados de  $\mathbb{R}^n$ , de los que no se conocen expresiones explícitas en términos de combinaciones lineales de funciones conocidas (excepto en el caso de dimensión  $n = 1$ ). Es por ello que se ha tratado de aproximar estos splines, lo que se ha hecho discretizándolos por medio del método de los elementos finitos, lo que ha dado lugar a los splines poliarmónicos discretos.

Es de destacar que estos splines se han aplicado tanto a problemas de interpolación como de ajuste de datos. En [3] se recogen resultados de convergencia y de estimaciones del error de los splines obtenidos en ambos casos. Para los splines de ajuste se tienen también resultados en el caso de datos afectados por un ruido. Los splines poliarmónicos discretos se han aplicado en [3] a la construcción, a partir de un conjunto de datos, de la correspondiente función, de una superficie regular (explícita o paramétrica), es decir, de una superficie de clase  $C^1$  o  $C^2$ . Este conjunto puede estar formado por un gran número de valores puntuales de la función y, también en algunos casos, de sus primeras derivadas, o de una infinidad de tales valores en puntos distribuidos de manera continua sobre curvas o sobre subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2$ . Se ha considerado también la posibilidad de que las superficies contengan discontinuidades, como es el caso de las superficies que presentan fallas.

El ajuste por splines poliarmónicos, así como los que usan wavelets, splines multivariantes, elementos finitos, box splines, etc., generalmente requieren una malla. Esto no significa en absoluto que tales métodos a veces no se puedan usar con éxito en el contexto de aproximación de datos dispersos; por el contrario, solo explica por qué estos métodos no se discuten en esta memoria.

El número de métodos multivariados sin malla eficientes se reduce drásticamente. Entre ellos, la aproximación a través de funciones radiales de base, la aproximación por núcleos (condicionalmente) definidos positivos, la aproximación por mínimos cuadrados y, también, los métodos de partición de la unidad.

Para la aplicación de esos métodos, es realmente deseable que haya pocas condiciones en la geometría de los puntos de datos, es decir, donde deben colocarse en el espacio. No se requieren triangulaciones de los puntos de datos o similares para esos algoritmos, mientras que, por ejemplo, los métodos de elementos finitos o spline multivariados normalmente necesitan triangulaciones. Esto no quiere decir que la geometría de los datos no influya en los resultados de la aproximación con métodos sin malla. Por ejemplo, una distribución de los centros en el dominio de la función a aproximar acorde con la variación de los valores que toma la función consigue mejores resultados frecuentemente.

Una técnica puntera de aproximación de datos dispersos es la utilización de funciones radiales de base (RBF), que consiste en una combinación lineal finita de funciones de base trasladadas. Las RBF básicamente son funciones radialmente simétricas de la forma  $\Phi(\cdot) = \phi(\|\cdot\|_2)$ , donde  $\|\cdot\|_2$  es la norma euclídea.

Una ventaja de las RBF es que son independientes de la dimensión. Las funciones básicas  $\phi(r)$  toman la distancia euclídea como argumento, por lo que pueden extenderse trivialmente a dimensiones arbitrarias. Esto contrasta con los esquemas polinomiales a

trozos, que generalmente se basan en el producto tensor de las dimensiones.

Por lo general, las RBF se aplican a funciones o datos aproximados que solo se conocen en un número finito de puntos (o demasiado difíciles de evaluar de otra manera), de modo que las evaluaciones de la función aproximada pueden realizarse de manera eficiente en la mayoría de las ocasiones.

El objetivo principal de esta memoria es profundizar en el estudio de la aproximación de funciones univariadas y multivariadas explícitas con discontinuidades por medio de las funciones radiales de base, obtener métodos y aplicar tales métodos a la representación de curvas y superficies no regulares. El trabajo se centra en la programación de los métodos obtenidos, la interpretación de los resultados, la obtención de errores cometidos en variados ejemplos de aproximación y la comparación con algunos métodos existentes. En los trabajos publicados sobre el ajuste de superficies con fallas verticales u oblicuas se utilizan las RBF para conseguir aproximantes o interpolantes con las mismas fallas. En los trabajos referenciados en esta memoria al respecto, esas fallas o líneas de discontinuidad dividen el dominio de la superficie en dos o más componentes conexas disjuntas; coloquialmente se dice que cortan el dominio. En consecuencia, se establece como un segundo objetivo implementar un método de aproximación que, a través de RBF, ajuste superficies con cualquier tipo de falla, es decir, que las líneas de discontinuidad sean curvas que no tienen por qué cortar el dominio de la superficie que se quiere aproximar.

Otro objetivo fundamental de este trabajo es la detección de discontinuidades de salto tanto de la función univariada que se quiera aproximar como de su primera derivada. Este método de detección se plantea como una aplicación del método de aproximación que puede ser extendido a funciones multivariadas. Existen pocos trabajos de detección de discontinuidades que utilicen RBF, en los artículos revisados se detectan discontinuidades de salto de la función pero no de su primera derivada.

En el capítulo 1, se reúnen conceptos y propiedades sobre RBF que suponen los fundamentos teóricos de los que parten los contenidos de esta tesis. Estos fundamentos son principalmente tres:

- la definición, los tipos y las propiedades más interesantes de las RBF,
- los esquemas RBF estándar de interpolación y aproximación por mínimos cuadrados que son la base del trabajo desarrollado, y
- las condiciones necesarias para la existencia y unicidad del interpolante o el aproximante en el ajuste de datos.

Las características del interpolante de una función univariada con una discontinuidad de salto son estudiadas en el capítulo 2 para un conjunto de centros equiespaciados.

Además, se consideran las técnicas de interpolación de funciones con una discontinuidad de salto en centros equiespaciados definida por Jung [39]. Estas estrategias eliminan las oscilaciones del interpolante cerca de la discontinuidad. Para ello, Jung utiliza la multicuádrica como RBF y adapta el parámetro de forma  $c$  en función del número de centros o cambia esa función de base por la función radial,  $\phi(r) = r$ , en los dos centros más cercanos a la discontinuidad. En el capítulo 2 se comprueba que, al interpolar, la función puede presentar varias discontinuidades de salto, el conjunto de centros puede ser disperso, se puede utilizar cualquier RBF en todos los centros que no están junto a la discontinuidad y, en los que están junto a las discontinuidades, cualquier RBF de clase  $C^0$ . De este modo también se consiguen interpolantes que no presentan oscilaciones cerca de la discontinuidad. Por último se destaca que la técnica estudiada es capaz de conseguir aproximantes cuya primera derivada presenta una o más discontinuidades de salto.

El objetivo final del capítulo 3 es conseguir un método de aproximación que sea capaz de ajustar superficies con fallas tanto verticales como oblicuas que no tienen por qué cortar el dominio de la superficie a aproximar. Para ello, se define la aproximación RBF mediante funciones auxiliares, *aproximación RBFFA*, aplicable a cualquier función definida en  $\mathbb{R}^d$ . Este esquema consiste en obtener un aproximante mediante un proceso de aproximación RBF en  $\mathbb{R}^{d+1}$  si se desplazan los centros hasta el grafo de una función  $\zeta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , que llamaremos *función auxiliar*, aproximar en  $\mathbb{R}^{d+1}$  y restringir luego el aproximante al grafo de  $\zeta$ . Después estudiamos cómo ajustar funciones univariadas no regulares para descubrir algunas de las propiedades de dicha aproximación y la conveniencia de utilizar funciones radiales de soporte compacto para que el método sea realmente efectivo. Se proponen diferentes funciones auxiliares según las discontinuidades de salto de la función o de su derivada analizando su conveniencia y se implementan varios ejemplos obteniendo errores y haciendo comparaciones con la aproximación estándar.

Por último, en el capítulo 3 se reformula el método RBFFA para aplicarlo a superficies con fallas verticales, oblicuas o de los dos tipos. El método se aplica a variados ejemplos numéricos y se obtienen errores de aproximación para resaltar la efectividad del método.

En el capítulo 4 se define un método iterativo que detecta las discontinuidades de salto de una función univariada no continua. También se establecen las pautas para que el método iterativo definido localice las discontinuidades de salto de la primera derivada de una función univariada. El método definido es una aplicación de la aproximación RBFFA de funciones con discontinuidades de salto estudiado en el capítulo 3. Además se presentan varios ejemplos numéricos que muestran la efectividad

del método iterativo de detección de discontinuidades propuesto.

Esta memoria termina con la redacción de las conclusiones del trabajo llevado a cabo junto con varios problemas que se han quedado abiertos y que establecen las futuras líneas de trabajo de investigación del equipo.

---

# CAPÍTULO 1

## FUNCIONES RADIALES DE BASE

---

### Sección 1.1

#### INTRODUCCIÓN

En este capítulo se reúnen conceptos y propiedades sobre funciones radiales de base que suponen los fundamentos teóricos de los que parten los contenidos de esta tesis. En concreto, se define la noción de función radial de base y se presentan los tipos y propiedades de esta clase de funciones, la interpolación y la aproximación por mínimos cuadrados usando funciones radiales de base y se dan las condiciones necesarias para la existencia y unicidad del interpolante o aproximante en el ajuste de datos. Por último, se describen las fortalezas y debilidades generales del ajuste de datos usando funciones radiales de base. Este marco teórico se puede encontrar y ampliar en libros de varios autores como pueden ser Wendland [55], Fasshauer [24] o Buhmann [14], en las referencias que allí aparecen y en las referencias que se van citando a lo largo del capítulo.

### Sección 1.2

#### INTERPOLACIÓN CON FUNCIONES RADIALES DE BASE

Se considera en lo que sigue que  $d, N \in \mathbb{N}$  y que  $\|\cdot\|_2$  es la norma euclídea de  $\mathbb{R}^d$ .

##### DEFINICIÓN 1.2.1.

Una función  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *función radial de base* si existe una función univariada  $\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Phi(x) = \phi(\|x\|_2)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Adoptaremos el convenio, ampliamente difundido, de abreviar la expresión *función*

*radial de base* mediante la sigla RBF, que procede de la versión inglesa de tal expresión, a saber, *radial basis function*. La función univariada  $\phi$  es la *función básica* que genera la RBF  $\Phi$ .

Por otra parte, entenderemos por *interpolación RBF* el problema de aproximación que a continuación se enuncia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sea } f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ una función de la que sólo se conocen sus valores} \\ f(x_1), \dots, f(x_N) \text{ en un conjunto } X = \{x_1, \dots, x_N\} \text{ de puntos distintos} \\ \text{dos a dos de } \mathbb{R}^d. \text{ Se busca una función } s_{f,X} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ que interpole } f \\ \text{en } X \text{ (i.e. } s(x_i) = f(x_i), 1 \leq i \leq N) \text{ y que sea de la forma} \\ \\ s_{f,X}(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \Phi(x - x_j) + p(x), \\ \\ \text{donde } \Phi \text{ es una RBF prefijada y } p \text{ es una función polinómica.} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Obsérvese que el interpolante es, esencialmente, una combinación lineal de funciones trasladadas de una misma RBF  $\Phi$ . Los elementos  $x_j$  del conjunto  $X$  se denominan *centros* y debe entenderse siempre que son distintos dos a dos. Asimismo, del coeficiente  $\beta_j$  de cada función trasladada  $\Phi(\cdot - x_j)$  se dice que es un *coeficiente de expansión* del interpolante.

Los números  $\beta_1, \dots, \beta_N$  resultan de resolver un sistema lineal en el que interviene la matriz que a continuación se introduce:

### DEFINICIÓN 1.2.2.

Se llama *matriz de interpolación* asociada a una RBF  $\Phi$  y un conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  a la matriz

$$A_{\Phi,X} = (\Phi(x_i - x_j))_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (1.2)$$

Para poder expresar y estudiar el sistema lineal del que resultan los coeficientes de expansión del interpolante RBF, se precisa diferenciar dos casos según se comporte la forma cuadrática asociada a la matriz de interpolación. A ello se dedican los dos siguientes apartados.

---

## 1.2.1. Funciones definidas positivas

### DEFINICIÓN 1.2.3.

Una función continua  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  es *definida positiva* si, para todo  $N \in \mathbb{N}$ , para todo

conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$  y para todo vector  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T \in \mathbb{C}^N$  no nulo, se cumple que

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \beta_j \overline{\beta_k} \Phi(x_j - x_k) > 0,$$

es decir, en otras palabras, si la forma cuadrática

$$\beta \in \mathbb{C}^N \mapsto \beta^T \cdot A_{\Phi, X} \cdot \overline{\beta}$$

es definida positiva, siendo  $A_{\Phi, X}$  la matriz de interpolación asociada a  $\Phi$  y  $X$ . Se dice análogamente que la función  $\Phi$  es *semidefinida positiva* si tal forma cuadrática también lo es.

En el caso particular de una función continua  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , se puede demostrar que  $\Phi$  es definida positiva si y sólo si  $\Phi$  es par (i.e.  $\Phi(x) = \Phi(-x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ ) y  $\beta^T \cdot A_{\Phi, X} \cdot \beta > 0$  para todo  $N \in \mathbb{N}$ , para cualquier conjunto de centros  $X \subseteq \mathbb{R}^N$  y para cualquier vector  $\beta \in \mathbb{R}^N$  no nulo.

De la definición anterior se desprenden las siguientes propiedades:

**TEOREMA 1.2.4.**

*Supongamos que  $\Phi$  es una función semidefinida positiva. Entonces:*

- (a)  $\Phi(0) \geq 0$ .
- (b)  $\Phi(-x) = \overline{\Phi(x)}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- (c)  $\Phi$  está acotada, i.e.  $|\Phi(x)| \leq \Phi(0)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- (d)  $\Phi(0) = 0$  si y sólo si  $\Phi \equiv 0$ .
- (e) Si  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  son semidefinidas positivas y  $c_j \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ , entonces

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j(x)$$

*es también semidefinida positiva. Además, si una de las  $\Phi_j$  es definida positiva y la correspondiente  $c_j$  es positiva, entonces  $\Phi$  también es definida positiva.*

- (f) *El producto de dos funciones definidas positivas es una función definida positiva.*

Aunque sea obvio, cabe recalcar que el teorema precedente se aplica a las funciones definidas positivas, pues son caso particular de las funciones semidefinidas positivas.

Para determinar si una RBF es definida positiva, es más simple explotar su simetría radial y reducir el problema al análisis de la función básica que la genera.

Función	$\phi(r)$	Restricciones
Gaussiana	$\exp(-\alpha r^2)$	$\alpha > 0$
Matérn básica	$\exp(-r)$	
Multicuádrlica inversa	$(c^2 + r^2)^{-\alpha}$	$c > 0, \alpha > 0$
Potencia truncada	$(1 - r)_+^\alpha$	$\alpha \geq \lfloor d/2 \rfloor + 1$

**Cuadro 1.1.** Funciones básicas definidas positivas en  $\mathbb{R}^d$

**DEFINICIÓN 1.2.5.**

Una función univariada  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es *definida positiva* sobre  $\mathbb{R}^d$  si la correspondiente función multivariada  $\Phi(x) := \phi(\|x\|_2)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , es definida positiva.

Obsérvese que se puede utilizar una misma función básica  $\phi$  para generar RBF en espacios de distintas dimensiones. Podría ocurrir que la correspondiente RBF  $\Phi(\cdot) = \phi(\|\cdot\|_2)$  fuera definida positiva para una cierta dimensión del espacio, pero no para otra. Se tiene, no obstante, el siguiente resultado, de gran importancia práctica:

**PROPOSICIÓN 1.2.6.**

Si una función univariada  $\phi$  es definida positiva sobre  $\mathbb{R}^d$ , entonces también es definida positiva sobre  $\mathbb{R}^k$  para todo  $k \leq d$ .

El cuadro 1.1 muestra algunas funciones básicas  $\phi$  que son definidas positivas en  $\mathbb{R}^d$ . Las funciones gaussiana y multicuádrlica inversa tienen esta propiedad para cualquier  $d \in \mathbb{N}$ . No es el caso, en cambio, de la potencia truncada. Por ejemplo, la función  $\phi(r) = (1 - r)_+^2$  sólo genera una RBF definida positiva en  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

*Observación 1.2.7.* En el cuadro 1.1 se usan las notaciones  $(x)_+$  y  $\lfloor x \rfloor$ . Recordemos que  $(x)_+ = x$  si  $x \geq 0$  y  $(x)_+ = 0$ , en caso contrario. Asimismo,  $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ .

Retomemos ahora el problema de interpolación RBF dado en (1.1). Recordemos que, dada una función  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , se conocen sus valores  $f(x_1), \dots, f(x_N)$  en un conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ . Sea  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una RBF definida positiva. El interpolante  $s_{f,X}$  de la función  $f$  en  $X$  tiene la forma

$$s_{f,X}(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \Phi(x - x_j),$$

que resulta de tomar  $p \equiv 0$  en (1.1). Si se imponen las condiciones de interpolación

$$s_{f,X}(x_i) = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq N,$$

resulta el sistema lineal

$$A_{\Phi, X} \cdot \beta = f|_X, \quad (1.3)$$

donde  $A_{\Phi, X}$  es la matriz de interpolación asociada a  $\Phi$  y  $X$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$  y  $f|_X = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$ . Como  $\Phi$  es definida positiva, se sigue de la definición 1.2.3 que la matriz  $A_{\Phi, X}$  es definida positiva, luego, en particular, es una matriz regular. Por tanto, el sistema (1.3) tiene solución única, a saber, el vector  $\beta$  de los coeficientes de expansión del interpolante, que queda así plenamente determinado.

### 1.2.2. Funciones condicionalmente definidas positivas

Dado  $m \in \mathbb{N}$ , se denota por  $\mathbb{C}_{m-1}^d[x]$  el espacio de polinomios en  $d$  variables con coeficientes complejos de grado menor o igual que  $m - 1$ . El correspondiente espacio de polinomios con coeficientes reales se denota por  $\mathbb{R}_{m-1}^d[x]$ .

#### DEFINICIÓN 1.2.8.

Una función continua  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  es *condicionalmente definida positiva* de orden  $m$ , en adelante *m-cdp*, si para todo  $N \in \mathbb{N}$ , para todo conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$  y para todo vector  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T \in \mathbb{C}^N$  no nulo que satisfaga la condición

$$\forall p \in \mathbb{C}_{m-1}^d[x], \quad \sum_{j=1}^N \beta_j p(x_j) = 0,$$

se cumple que

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \beta_j \bar{\beta}_k \Phi(x_j - x_k) > 0.$$

En términos de matrices de interpolación, en la definición precedente se exige que, para que  $\Phi$  sea *m-cdp*, se ha de cumplir que, para cualesquiera  $N \in \mathbb{N}$  y  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ , la forma cuadrática

$$\beta \mapsto \beta^T \cdot A_{\Phi, X} \cdot \bar{\beta} \quad (1.4)$$

sea definida positiva cuando se restringe al subespacio vectorial

$$\mathcal{L}_X = \{\beta \in \mathbb{C}^N \mid \beta^T \cdot p|_X = 0 \quad \forall p \in \mathbb{C}_{m-1}^d[x]\}, \quad (1.5)$$

donde  $p|_X = (p(x_1), \dots, p(x_N))^T$ . Con un obvio abuso del lenguaje, cabría decir que los elementos de  $\mathcal{L}_X$  son vectores de  $\mathbb{C}^N$  «perpendiculares», en cierto sentido, a los polinomios de  $\mathbb{C}_{m-1}^d[x]$ . Nótese, por otra parte, que, si  $\Phi$  es definida positiva, la forma

Función	$\phi(r)$	Restricciones	$m$
Multicuádrica	$(-1)^{\lceil \alpha \rceil} (c^2 + r^2)^\alpha$	$c > 0, \alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}$	$\lceil \alpha \rceil$
Spline poliarmónico	$(-1)^{\lceil \alpha \rceil} r^{2\alpha}$	$\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}$	$\lceil \alpha \rceil$
	$(-1)^{\alpha+1} r^{2\alpha} \log r$	$\alpha \in \mathbb{N}$	$\alpha + 1$

**Cuadro 1.2.** Funciones básicas  $m$ -cdp en  $\mathbb{R}^d$

cuadrática (1.4) es definida positiva, sin necesidad de ninguna restricción. Por ello, se amplía la definición 1.2.8 al caso  $m = 0$ , considerando que las funciones 0-cdp son las funciones definidas positivas.

La siguiente proposición destaca un hecho importante sobre el orden de las funciones condicionalmente definidas positivas.

**PROPOSICIÓN 1.2.9.**

Una función  $m$ -cdp es también  $l$ -cdp para todo  $l \geq m$ .

Como consecuencia de esta proposición, es natural hacer referencia al menor de los órdenes para los cuales una función es condicionalmente definida positiva. En otras palabras, cuando se indique que una función  $\Phi$  es  $m$ -cdp debe entenderse que es  $l$ -cdp para cualquier  $l \geq m$ , pero no lo es si  $l < m$ .

El siguiente resultado caracteriza el caso particular de las funciones reales  $m$ -cdp.

**TEOREMA 1.2.10.**

Una función  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continua y par es  $m$ -cdp si y sólo si, para todo  $N \in \mathbb{N}$  y todo conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ , la forma cuadrática

$$\beta \in \mathcal{L}_X \mapsto \beta^T \cdot A_{\Phi, X} \cdot \beta$$

es definida positiva, donde

$$\mathcal{L}_X = \{\beta \in \mathbb{R}^N \mid \beta^T \cdot p|_X = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}_{m-1}^d[x]\}. \quad (1.6)$$

Al igual que en el caso de las funciones definidas positivas, el estudio de las RBF se simplifica acudiendo al análisis de la función básica. La definición 1.2.5 y la proposición 1.2.6 son válidas sin más que sustituir «definida positiva» por « $m$ -cdp». Se indican en el cuadro 1.2 algunas funciones básicas  $\phi$  que son  $m$ -cdp en  $\mathbb{R}^d$ , para cualquier  $d$ . El orden  $m$  se especifica en la última columna. En el caso de los splines poliarmónicos, para  $\alpha = 1$ , se obtiene  $\phi(r) = r^2 \log r$ , que corresponde al llamado *spline de placa fina*.

*Observación 1.2.11.* En el cuadro 1.2 se usa la notación  $\lceil x \rceil$  así definida:  $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x < k\}$ .

Volvamos nuevamente al problema de interpolación RBF definido en (1.1). Dados los valores  $f(x_1), \dots, f(x_N)$  de una función  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  en un conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ , se busca un interpolante  $s_{f,X}$  de  $f$  en  $X$  de la forma

$$s_{f,X}(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \Phi(x - x_j) + p(x),$$

donde  $\Phi$  es ahora una RBF  $m$ -cdp y  $p \in \mathbb{R}_{m-1}^d[x]$ . Este polinomio  $p$ , a su vez, se puede escribir así:

$$p(x) = \sum_{j=1}^Q \alpha_j p_j(x),$$

siendo  $Q = \binom{m-1+d}{d}$  la dimensión del espacio  $\mathbb{R}_{m-1}^d[x]$  y  $\{p_1, \dots, p_Q\}$ , una base de este espacio, que en esta tesis será siempre  $\{1, x, x^2, \dots, x^{Q-1}\}$ . Las condiciones de interpolación

$$s_{f,X}(x_i) = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq N,$$

dan lugar al sistema

$$A_{\Phi,X} \cdot \beta + P \cdot \alpha = f|_X,$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_Q)^T$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$ ,  $f|_X = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$ ,  $A_{\Phi,X}$  es la matriz de interpolación asociada a  $\Phi$  y  $X$  y, finalmente,

$$P = (p_j(x_i))_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq Q} \in \mathbb{R}^{N \times Q}. \quad (1.7)$$

En este sistema hay  $N + Q$  incógnitas y sólo  $N$  ecuaciones. Las  $Q$  ecuaciones que faltan resultan de imponer que el vector  $\beta$  de los coeficientes de expansión pertenezca al subespacio  $\mathcal{L}_X$  dado por (1.6), esto es,

$$\beta^T \cdot p_j|_X = 0, \quad 1 \leq j \leq Q,$$

o equivalentemente, en forma matricial,  $P^T \cdot \beta = 0$ . En definitiva, los coeficientes del interpolante  $s_{f,X}$  son solución del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi,X} & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f|_X \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Para que este sistema lineal tenga solución única es condición necesaria y suficiente que el conjunto  $X$  de centros contenga un conjunto  $\mathbb{R}_{m-1}^d[x]$ -unisolvante, esto es, que

cumpla la siguiente condición:

$$(q \in \mathbb{R}_{m-1}^d[x] \text{ y } q|_X = 0) \implies q \equiv 0.$$

Para  $m = 1$ , la condición de unisolvencia es trivial, mientras que, para  $m = 2$ , requiere que los puntos de  $X$  no estén todos alineados.

### Sección 1.3

## FUNCIONES DE SOPORTE COMPACTO

El *soporte* de una función  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  es la clausura del subconjunto de su dominio en el que  $\Phi$  no se anula. Se dice que  $\Phi$  es de *soporte compacto* si su soporte está acotado.

Como recuerda Wendland [55], el concepto de funciones de base con soporte compacto es suma importancia en el Análisis Numérico, en general, y en la aproximación, en particular. Uno de los ejemplos más destacables de estas funciones, en el caso unidimensional, lo constituyen los *B-splines*. La principal ventaja de las funciones de soporte compacto es que proporcionan matrices de interpolación poco densas e interpolantes que pueden ser evaluados con rapidez. Por lo tanto, el coste computacional de interpolar con funciones radiales de soporte compacto, en general, es inferior al que resulta de utilizar otro tipo de función.

Establezcamos una primera propiedad relevante de las funciones de soporte compacto.

#### TEOREMA 1.3.1.

Sea  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua y de soporte compacto. Si  $\Phi$  es *m-cdp*, entonces  $m = 0$ , esto es,  $\Phi$  es definida positiva.

Si una función básica  $\phi$  tiene soporte compacto, también lo tiene obviamente la RBF  $\phi(\|\cdot\|_2)$  que  $\phi$  genera. El resultado precedente explica que no apareciese ninguna función de soporte compacto en el cuadro 1.2. Sí hay una, en cambio, en el cuadro 1.1.

El siguiente teorema también tiene importantes consecuencias.

#### TEOREMA 1.3.2.

Sea  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y no nula. Si  $\phi$  es definida positiva sobre  $\mathbb{R}^d$  para cualquier  $d$ , entonces  $\phi(r) \neq 0$  para todo  $r \in [0, \infty)$ .

Se deduce de este teorema que una función básica  $\phi$  de soporte compacto no puede generar RBF definidas positivas sobre  $\mathbb{R}^d$  para cualquier  $d$ . Si  $\phi$  no es definida positiva sobre  $\mathbb{R}^d$ , entonces tampoco lo es sobre  $\mathbb{R}^k$  para  $k > d$ . Recordando la proposición 1.2.6,

$d$	$k$	$\phi_{d,k}$	$C^{2k}$
1	0	$(1-r)_+$	$C^0$
1	1	$(1-r)_+^3(r^2 + 3r + 1)$	$C^2$
1	2	$(1-r)_+^5(r^4 + 5r^3 + 9r^2 + 5r + 1)$	$C^4$
3	0	$(1-r)_+^2(r+2)$	$C^0$
3	1	$(1-r)_+^4(3r^3 + 12r^2 + 16r + 4)$	$C^2$
3	2	$(1-r)_+^6(5r^5 + 30r^4 + 72r^3 + 82r^2 + 36r + 6)$	$C^4$
5	0	$(1-r)_+^3(3r^2 + 9r + 8)$	$C^0$
5	1	$(1-r)_+^5(5r^4 + 25r^3 + 48r^2 + 40r + 8)$	$C^2$
5	2	$(1-r)_+^7(35r^6 + 245r^5 + 720r^4 + 1120r^3 + 928r^2 + 336r + 48)$	$C^4$

**Cuadro 1.3.** *Funciones de Wu*

la función  $\phi$ , en todo caso, puede ser definida positiva, como mucho, sobre  $\mathbb{R}^k$  para  $k$  comprendido entre 1 y un valor máximo  $d$ .

A la hora de considerar RBF de soporte compacto, tienen particular interés las que son generadas por funciones básicas de la forma

$$\phi(r) = (1-r)_+ p(r), \quad (1.9)$$

donde  $p$  es una función polinómica univariada. Obsérvese que el soporte de  $\phi$  es el intervalo  $[0, 1]$ . Se puede probar que, si  $\phi$  es definida positiva sobre  $\mathbb{R}^d$ , entonces la RBF  $\Phi(\cdot) = \phi(\|\cdot\|_2)$  pertenece a  $C^{2k}(\mathbb{R}^d)$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ .

A modo de ejemplo, consideremos las funciones de Wu [56], algunas de las cuales aparecen en el cuadro 1.3. Para cada  $d$  y  $k$ , la función de Wu  $\phi_{d,k}$  es definida positiva sobre  $\mathbb{R}^d$  y engendra RBF que, como queda dicho, son de clase  $C^{2k}$ .

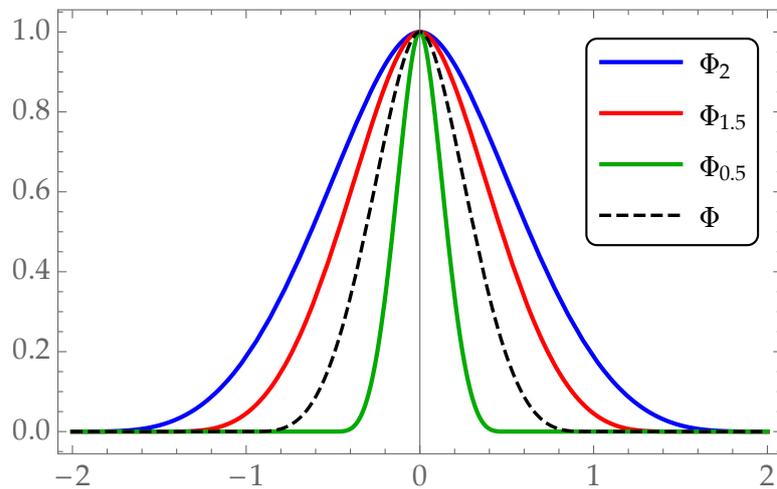
Más conocidas y utilizadas que las funciones de Wu son las funciones de Wendland [54, 55]. También son funciones de la forma (1.9), pero están construidas de modo que el polinomio  $p$  correspondiente tenga el menor grado posible. Fijados  $d \in \mathbb{N}$  y  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , la función de Wendland  $\phi_{d,k}$ :

- es un polinomio de grado  $\lfloor d/2 \rfloor + 3k + 1$  en el intervalo  $[0, 1]$ ,
- es definida positiva sobre  $\mathbb{R}^d$  y engendra RBF de clase  $C^{2k}$ .

Por el modo en que son definidas, las funciones de Wendland son únicas, salvo un factor. El cuadro 1.4 muestra varias de estas funciones. Obsérvese que las potencias truncadas, mencionadas en el cuadro 1.1, son casos particulares de las funciones de Wendland.

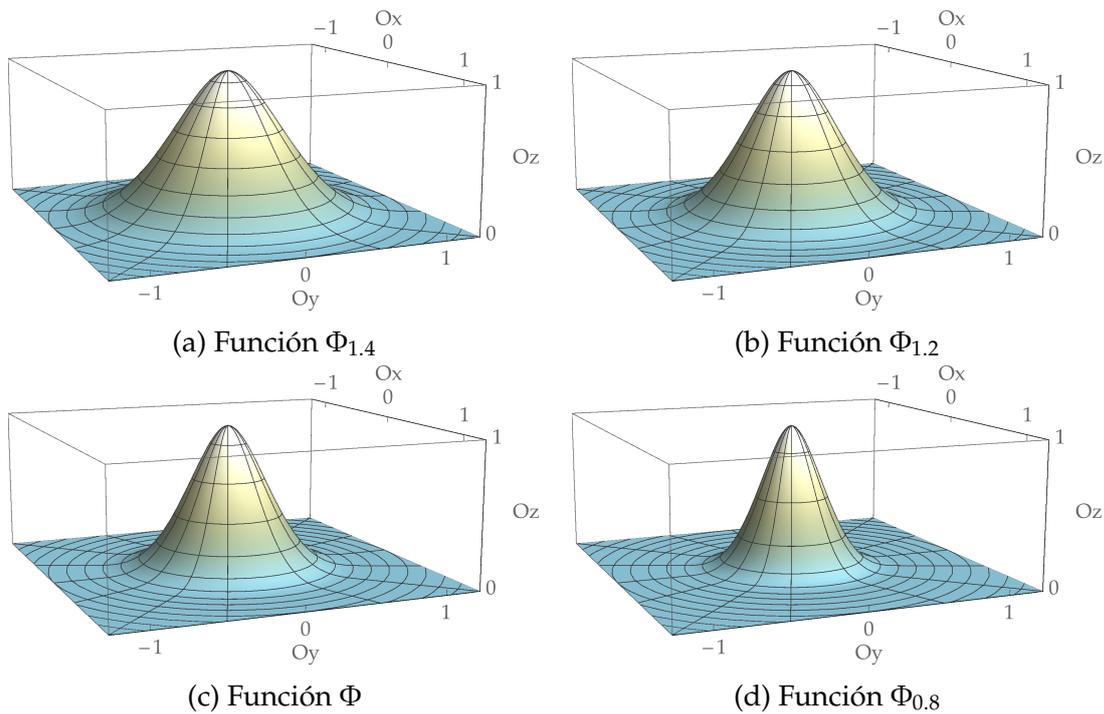
$d$	$k$	$\phi_{d,k}$	$C^{2k}$
1	0	$(1-r)_+$	$C^0$
1	1	$(1-r)_+^3(3r+1)$	$C^2$
1	2	$(1-r)_+^5(8r^2+5r+1)$	$C^4$
3	0	$(1-r)_+^2$	$C^0$
3	1	$(1-r)_+^4(4r+1)$	$C^2$
3	2	$(1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$	$C^4$
5	0	$(1-r)_+^3$	$C^0$
5	1	$(1-r)_+^5(5r+1)$	$C^2$
5	2	$(1-r)_+^7(16r^2+7r+1)$	$C^4$

**Cuadro 1.4.** Funciones de Wendland



**Figura 1.1.** Grafo de la RBF  $\Phi$  generada en  $\mathbb{R}$  por la función de Wendland  $\phi_{3,1}$  y varias RBF  $\Phi_\rho(\cdot) = \Phi(\cdot/\rho)$  resultantes de un cambio de escala.

Una función básica de la forma (1.9) genera en  $\mathbb{R}^d$  una RBF cuyo soporte es una bola de radio 1. Como habrá ocasión de comprobar en esta tesis, en los procesos de aproximación RBF, se necesitan con frecuencia funciones con soportes de otras dimensiones. Se obtienen muy fácilmente mediante un cambio de escala: dada una RBF  $\Phi$  con soporte de radio 1, para cada  $\rho > 0$ , la función  $\Phi_\rho(\cdot) = \Phi(\cdot/\rho)$  es una RBF con las mismas propiedades que  $\Phi$  y con soporte de radio  $\rho$ . Este escalamiento se puede efectuar directamente en la función básica que genera  $\Phi$ , de modo que  $\phi_\rho(\cdot) = \phi(\cdot/\rho)$  genera  $\Phi_\rho$ . Las figuras 1.1 y 1.2 muestran el grafo de la RBF  $\Phi$  que genera la función básica de Wendland  $\phi_{3,1}$  en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ , así como varias RBF que resultan de un cambio de escala.



**Figura 1.2.** Grafo de la RBF  $\Phi$  generada en  $\mathbb{R}^2$  por la función de Wendland  $\phi_{3,1}$  y varias RBF  $\Phi_\rho(\cdot) = \Phi(\cdot/\rho)$  resultantes de un cambio de escala.

## Sección 1.4

### OTRAS CUESTIONES

En muchas ocasiones, en vez de interpolar, tiene más sentido realizar una aproximación por mínimos cuadrados discretos. Así ocurre cuando el número de datos es muy elevado o cuando éstos están contaminados con ruido.

En lugar de (1.1), habría que considerar el siguiente problema. Se dispone de los valores  $f(x_1), \dots, f(x_N)$  de una función  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  en un conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ . Se escoge un conjunto de centros  $Z = \{z_1, \dots, z_M\}$ , con  $M \leq N$ , y una RBF  $\Phi$  que, por simplificar, consideraremos que es definida positiva. Se busca entonces un aproximante de la forma

$$\tilde{s}_{f,X}(x) = \sum_{j=1}^M \beta_j \Phi(x - z_j),$$

tal que  $s_{f,X}(x_i) \approx f(x_i)$  para  $1 \leq i \leq N$ . Sea  $A_{\Phi,Z,X}$  la matriz de colocación

$$A_{\Phi,Z,X} = (\Phi(x_i - z_j))_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M} \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

y, como en ocasiones anteriores, sean  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_M)^T$  y  $f|_X = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$ . El vector  $\beta$  de los coeficientes de expansión se podría obtener de la resolución del sistema sobredeterminado  $A_{\Phi,Z,X} \cdot \beta = f|_X$  mediante el método de los mínimos cuadrados. Ahora bien, como previsiblemente el condicionamiento de la matriz del sistema de ecuaciones normales es muy elevado, es preferible introducir un término de regularización, lo cual conduce, en definitiva, a minimizar en  $\mathbb{R}^M$  el funcional cuadrático

$$J_\lambda(\beta) = \|A_{\Phi,Z,X} \cdot \beta - f|_X\|_2^2 + \lambda \beta^T \cdot A_{\Phi,Z} \cdot \beta,$$

donde  $\lambda$  es un parámetro positivo y  $A_{\Phi,Z}$  es la matriz de interpolación asociada a  $\Phi$  y  $Z$ . El término  $\beta^T \cdot A_{\Phi,Z} \cdot \beta$  representa el cuadrado de la norma de  $\tilde{s}_{f,X}$  en el denominado *espacio nativo* de  $\Phi$ . Es, pues, un término que mide la suavidad del aproximante. El parámetro  $\lambda$  pondera la importancia relativa de este término en relación con el primer sumando de  $J_\lambda(\beta)$ , que controla el grado de aproximación. El mínimo de  $J_\lambda$  se alcanza en el vector  $\beta$  solución del sistema lineal

$$\left( A_{\Phi,Z,X}^T \cdot A_{\Phi,Z,X} + \lambda A_{\Phi,Z} \right) \cdot \beta = A_{\Phi,Z,X}^T \cdot f|_X.$$

Para más detalles, véase, por ejemplo, Fasshauer [24] o Li y otros [43].

En esta tesis no se calcularán aproximantes con tanta generalidad. Nos limitaremos a tomar  $M = N$  y  $Z = X$ . De este modo, se tiene  $A_{\Phi,Z,X} = A_{\Phi,Z} = A_{\Phi,X}$ , matriz que es simétrica y definida positiva. Por ello, el sistema anterior se reduce a

$$(A_{\Phi,X} + \lambda I) \cdot \beta = f|_X,$$

donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $N$ . Obsérvese que el caso  $\lambda = 0$  proporciona directamente el interpolante de  $f$  en  $X$ .

Con las mismas simplificaciones (i.e.  $M = N$  y  $Z = X$ ), si  $\Phi$  es una RBF  $m$ -cdp, entonces el aproximante es de la forma

$$\tilde{s}_{f,X}(x) = \sum_{j=1}^M \beta_j \Phi(x - x_j) + \sum_{j=1}^Q \alpha_j p_j(x),$$

siendo  $\{p_1, \dots, p_Q\}$  una base de  $\mathbb{R}_{m-1}^d[x]$ . Un razonamiento similar muestra que los vectores de coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  son solución del sistema

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi,X} + \lambda I & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f|_X \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

con  $P$  dada por (1.7).

En esta tesis tampoco realizaremos estudios de convergencia, para lo cual referimos a la bibliografía existente y que ahora comentamos. Duchon [21] y Powell [50] han estudiado la convergencia con splines de placa fina ( $\phi(r) = r^2 \log(r)$ ) y las funciones de base radial relacionadas. Las funciones cúbicas y pseudocúbicas ( $\phi(r) = r^3$ ), por ejemplo, y la convergencia con multicuádricas ( $\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$ ) ha sido estudiada por Madych y Nelson [46].

Más recientemente, Buhmann [14] y Wendland [55] estudian la convergencia para la mayoría de las funciones de base radial mencionadas en este capítulo, encontrando que la diferencia entre una función y su interpolante en el dominio de definición,  $|f(x) - s(x)|$ , tiende a cero cuando aumenta el número de centros.

Una teoría más general de la convergencia es proporcionada por Wu y Schaback [57], y por Narcowich y otros [48]. Sus resultados son extendidos por Arcangéli y otros [4], quienes hacen también un completo estudio de la convergencia de los splines poliarmónicos.

Desafortunadamente, para la mayoría de RBF, la matriz de interpolación está llena y mal condicionada cuando el número de centros es elevado (Narcowich y Ward [47]). Para superar este inconveniente se deben aplicar métodos de preconditionamiento e iterativos. Por ejemplo, Fasshauer [23] comprueba la utilidad de métodos generales de preconditionamiento, métodos multinivel, para un número de centros no muy elevado. Otros enfoques que evitan que las matrices de interpolación estén mal condicionadas incluyen la idea de la cuasi-interpolación (por ejemplo, véase Buhmann y Denew [15]).

En las aplicaciones, los parámetros de las RBF, por ejemplo,  $c$  en las multicuádricas ( $\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$ ), desempeñan un papel importante en el condicionamiento del problema de interpolación. En este sentido, se han desarrollado métodos para manejar esta situación (ver Larsson y Fornberg [42]).



---

## CAPÍTULO 2

# INTERPOLACIÓN DE FUNCIONES UNIVARIADAS NO REGULARES

---

### Sección 2.1

#### INTRODUCCIÓN

El aproximante RBF obtenido de una función real de variable real no regular generalmente presenta una serie de oscilaciones en torno a las discontinuidades de salto finito y siempre es continuo. Este hecho es conocido como *fenómeno de Gibbs* y fue estudiado por primera vez por J. Willard Gibbs a finales del siglo XIX.

Este fenómeno se debe a la forma en que se comporta la serie de Fourier de una función periódica, continuamente diferenciable a trozos, frente a una discontinuidad de salto finito. La suma parcial  $n$ -ésima de la serie de Fourier tiene grandes oscilaciones cerca del salto. El exceso que suponen dichas oscilaciones no desaparece a medida que aumenta la frecuencia, pero se acerca a un límite finito. Gibbs determinó que la amplitud máxima límite de la ondulación es de, aproximadamente, un 9 % del valor del salto de la función.

El fenómeno de Gibbs pone de manifiesto la dificultad intrínseca de la aproximación de una función discontinua por una combinación lineal de funciones regulares. Este comportamiento no desaparece aunque se aumente el número de funciones de la combinación lineal.

Por tanto, el fenómeno de Gibbs puede ser observado en diferentes métodos de ajuste de funciones discontinuas. Por ejemplo, Fornberg y Flyer [27] llevan a cabo una interpolación cardinal, es decir, con centros  $x_j = j \in \mathbb{Z}$  y estudian los coeficientes de expansión obtenidos en dicha interpolación de funciones discontinuas con algunas funciones radiales de base. Concluyen que el fenómeno de Gibbs tiene características

similares para diferentes métodos de interpolación, aunque hay diferencias significativas en cómo las oscilaciones decrecen cuando se aumenta el número de datos de la función utilizados para ajustarla. Guessab, Moncayo y Schmeisser [32] definen una clase de esquemas no lineales de subdivisión en cuatro puntos no sólo para funciones discontinuas. Estos esquemas incluyen como caso particular el esquema PHH (o *power-2 scheme*) previamente estudiado por Amat, Donat y otros [2]. Estos esquemas tienen la particularidad de que, al ajustar una función discontinua, no aparece el fenómeno de Gibbs bajo ciertas condiciones que se detallan en el artículo. Jung [39] hace un estudio completo de la interpolación RBF en  $\mathbb{R}$  de una función escalón con centros uniformemente distribuidos en  $[-1, 1]$ . Además, propone un procedimiento para reducir el fenómeno de Gibbs usando multicuádricas, i.e.  $\Phi(x) = \sqrt{|x|^2 + c^2}$ , y adaptando adecuadamente su parámetro de forma,  $c$ .

En este capítulo se analizará este fenómeno oscilatorio y se extenderá la propuesta de Jung para reducir las oscilaciones de Gibbs usando funciones de base no derivables en centros próximos a la discontinuidad y otras funciones radiales de base más regulares en los otros centros. Una parte de los contenidos de este capítulo fue publicada en Izquierdo, López de Silanes y Parra [36].

Anticipemos, por último, que a lo largo de este capítulo se utilizarán y citarán constantemente las RBF que se detalla en el cuadro 2.1. Están representadas gráficamente en las figuras 2.1 y 2.2. Cada función  $\Phi_i$  se define mediante la relación  $\Phi_i(x) = \phi_i(|x|)$ , siendo  $\phi_i$  la función básica correspondiente mostrada en la segunda columna del cuadro. Observemos que, en realidad,  $\Phi_i$  resulta ser la extensión par de  $\phi_i$ .

Las funciones  $\Phi_1$  y  $\Phi_5$  están generadas por las funciones de Wendland  $\phi_{1,1}$  y  $\phi_{3,0}$ , respectivamente. Las funciones  $\Phi_4$  y  $\Phi_7$  son casos particulares de splines poliarmónicos. Por último,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  y  $\Phi_6$  son las funciones gaussiana, multicuádrica y de Matérn básica.

*Observación 2.1.1.* A la vista del cuadro 1.4, podría haber parecido más natural considerar la función de Wendland  $\phi_{1,0}$  en vez de  $\phi_{3,0}$ . Ocurre, sin embargo, que  $\phi_{1,0}$  genera una RBF que, además del origen, no es diferenciable en un par de puntos más, a saber,  $x = -1$  y  $x = 1$ . Para el uso de las RBF que se hará en este capítulo se necesita que la diferenciabilidad pueda fallar tan sólo en  $x = 0$ . Por esta razón es preferible tomar  $\phi_{3,0}$ .

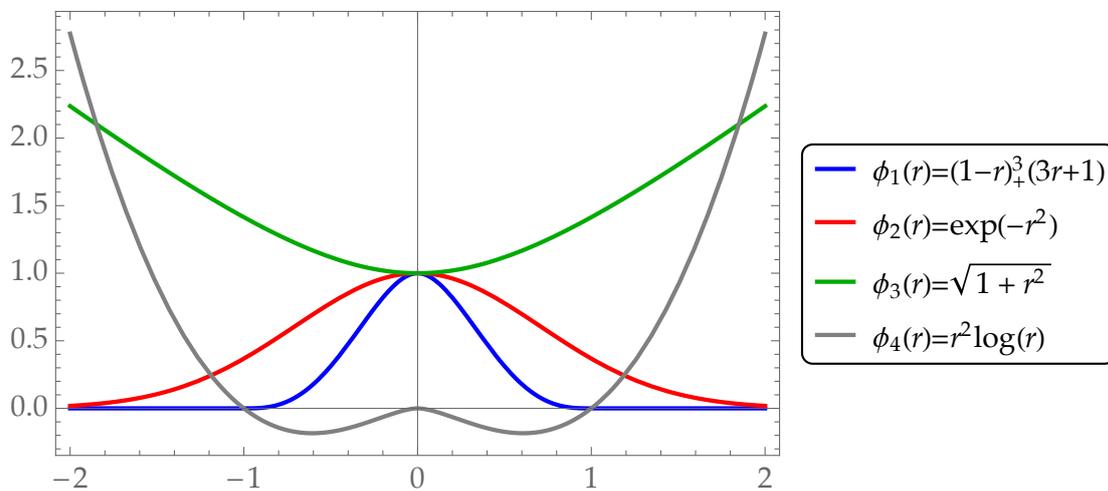
## Sección 2.2

### INTERPOLACIÓN EN NODOS EQUISPACIADOS

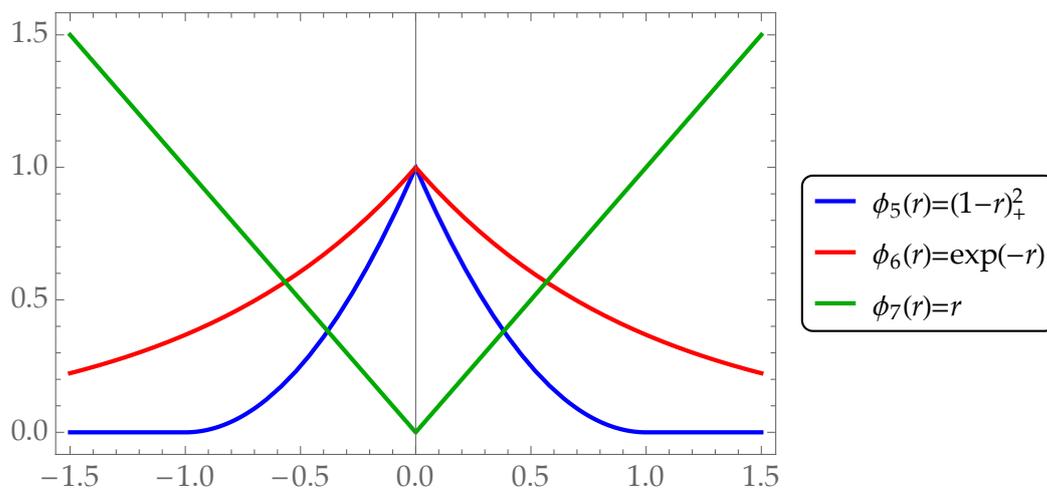
En esta sección se estudiarán algunas características de un interpolante  $s_{f,X}$  para una función  $f$  real de variable real definida en un intervalo  $[a, b]$  que presenta una

RBF	Función básica	Positividad	Diferenciable en $x = 0$	Soporte
$\Phi_1$	$\phi_1(r) = (1 - r)_+^3(3r + 1)$	0-cdp	Sí	$[-1, 1]$
$\Phi_2$	$\phi_2(r) = \exp(-r^2)$	0-cdp	Sí	$\mathbb{R}$
$\Phi_3$	$\phi_3(r) = \sqrt{c^2 + r^2}$	1-cdp	Sí	$\mathbb{R}$
$\Phi_4$	$\phi_4(r) = r^2 \log(r)$	2-cdp	Sí	$\mathbb{R}$
$\Phi_5$	$\phi_5(r) = (1 - r)_+^2$	0-cdp	No	$[-1, 1]$
$\Phi_6$	$\phi_6(r) = \exp(-r)$	0-cdp	No	$\mathbb{R}$
$\Phi_7$	$\phi_7(r) = r$	1-cdp	No	$\mathbb{R}$

**Cuadro 2.1.** Funciones radiales de base que se usarán en este capítulo.



**Figura 2.1.** RBF diferenciables detalladas en el cuadro 2.1. En la leyenda se indica la función básica que la genera.



**Figura 2.2.** RBF no diferenciables detalladas en el cuadro 2.1. En la leyenda se indica la función básica que la genera.

discontinuidad de salto finito. Expresamos la función  $f$  del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & a \leq x < x_c, \\ f_2(x), & x_c \leq x \leq b, \end{cases}$$

siendo  $f_1$  y  $f_2$  dos funciones continuas. Para que haya en  $x_c \in (a, b)$  una discontinuidad de salto finito imponemos que

$$f^+ - f^- \neq 0,$$

donde

$$f^- = \lim_{x \rightarrow x_c^-} f(x) \quad \text{y} \quad f^+ = \lim_{x \rightarrow x_c^+} f(x). \quad (2.1)$$

Para simplificar el estudio, consideraremos que  $[a, b]$  es el intervalo  $[-1, 1]$ , que el punto de discontinuidad  $x_c$  es el punto medio de tal intervalo, es decir,  $x_c = 0$ , que se interpola  $f$  en un conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  de centros equiespaciados en  $[-1, 1]$  y que  $N$  par. Se obtienen resultados análogos si se prescinde de estas restricciones. En la subsección 2.2.1 se va a realizar un estudio local de la interpolación RBF con  $N = 2$  centros cerca de la discontinuidad y en la subsección 2.2.2 se estudiarán las características del interpolante obtenido con más centros en el intervalo  $[-1, 1]$ .

### 2.2.1. Comportamiento local de la interpolación

Se considera  $N = 2$  y  $X_\delta = \{-\delta/2, \delta/2\}$  para algún  $\delta \in (0, 2)$ . Se fija una función radial de base  $\Phi$  y se denota por  $s_{f, X_\delta}$  el correspondiente interpolante RBF de  $f$  en  $X_\delta$ . Se puede comprobar que, independientemente de  $\Phi$ ,  $s_{f, X_\delta}$  es estrictamente monótono en  $[-\delta/2, \delta/2]$ . Por la propia definición del interpolante,  $s_{f, X_\delta}$  es una función continua, ya que es una combinación lineal de funciones que son al menos continuas. La evaluación del interpolante en  $x_c = 0$  arroja un valor  $s_{f, X_\delta}(0)$  intermedio entre  $f(-\delta/2)$  y  $f(\delta/2)$ . Vamos a determinar  $s_{f, X_\delta}(0)$ , para lo cual consideramos tres posibles casos:

- (a)  $\Phi$  es 0-cdp (i.e. definida positiva). De acuerdo con lo expresado en la subsección 1.2.1, el interpolante tiene la siguiente expresión:

$$s_{f, X_\delta}(x) = \beta_1 \Phi(x + \delta/2) + \beta_2 \Phi(x - \delta/2).$$

Las condiciones de interpolación dan lugar al sistema asociado  $A_{\Phi, X_\delta} \cdot \beta = f|_{X_\delta}$ , donde

$$A_{\Phi, X_\delta} = \begin{pmatrix} \Phi(0) & \Phi(\delta) \\ \Phi(\delta) & \Phi(0) \end{pmatrix}, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2)^T \quad \text{y} \quad f|_{X_\delta} = (f(-\delta/2), f(\delta/2))^T.$$

Al resolverlo se obtiene que

$$\beta_1 = \frac{f(\delta/2)\Phi(\delta) - f(-\delta/2)\Phi(0)}{\Phi(\delta)^2 - \Phi(0)^2} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{f(-\delta/2)\Phi(\delta) - f(\delta/2)\Phi(0)}{\Phi(\delta)^2 - \Phi(0)^2},$$

por lo que

$$s_{f, X_\delta}(0) = (f(\delta/2) + f(-\delta/2)) \frac{\Phi(\delta/2)}{\Phi(\delta) + \Phi(0)}.$$

(b)  $\Phi$  es 1-cdp. Según se expone en la subsección 1.2.2, el interpolante ahora es

$$s_{f, X_\delta}(x) = \beta_1 \Phi(x + \delta/2) + \beta_2 \Phi(x - \delta/2) + \alpha_1$$

y los coeficientes  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\alpha_1$  se determinan mediante las condiciones de interpolación y la condición adicional  $\beta_1 + \beta_2 = 0$ . Resulta el sistema asociado

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi, X_\delta} & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f|_{X_\delta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $P = (1 \quad 1)^T$  y  $A_{\Phi, X_\delta}$ ,  $\beta$  y  $f|_{X_\delta}$  definidos como en el caso (a). De este modo, al resolver el sistema, se obtiene

$$\beta_1 = \frac{f(\delta/2) - f(-\delta/2)}{2(\Phi(\delta) - \Phi(0))} = -\beta_2 \quad \text{y} \quad \alpha_1 = \frac{f(-\delta/2) + f(\delta/2)}{2},$$

y así, dado que  $\Phi$  es par,

$$s_{f, X_\delta}(0) = \frac{f(-\delta/2) + f(\delta/2)}{2}.$$

(c)  $\Phi$  es 2-cdp. Recurrimos nuevamente a la subsección 1.2.2. El interpolante es de la forma

$$s_{f, X_\delta}(x) = \beta_1 \Phi(x + \delta/2) + \beta_2 \Phi(x - \delta/2) + \alpha_1 + \alpha_2 x.$$

Las condiciones de interpolación y las condiciones adicionales  $\beta_1 + \beta_2 = 0$  y  $-\beta_1 \delta/2 + \beta_2 \delta/2 = 0$  llevan al sistema

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi, X_\delta} & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f|_{X_\delta} \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde, en este caso,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$  y

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\delta/2 \\ 1 & \delta/2 \end{pmatrix},$$

Se obtiene:

$$\beta_1 = 0 = \beta_2, \quad \alpha_1 = \frac{f(\delta/2) + f(-\delta/2)}{2} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{f(\delta/2) - f(-\delta/2)}{\delta}.$$

Por tanto,

$$s_{f, X_\delta}(0) = \frac{f(\delta/2) + f(-\delta/2)}{2}.$$

Nótese que  $s_{f, X_\delta}$  queda reducido a un polinomio de grado 1, luego su gráfica es una recta.

No tiene sentido pensar en el caso en el que  $\Phi$  fuera  $m$ -cdp con  $m \geq 3$ , ya que entonces el sistema lineal asociado sería compatible indeterminado. Por tanto, el interpolante no sería único. En los tres casos considerados se observa que, por la continuidad de  $\Phi$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s_{f, X_\delta}(0) = \frac{f^+ + f^-}{2}.$$

**Ejemplo 2.2.1.** Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x, & -1 \leq x < 0, \\ \text{cos } x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

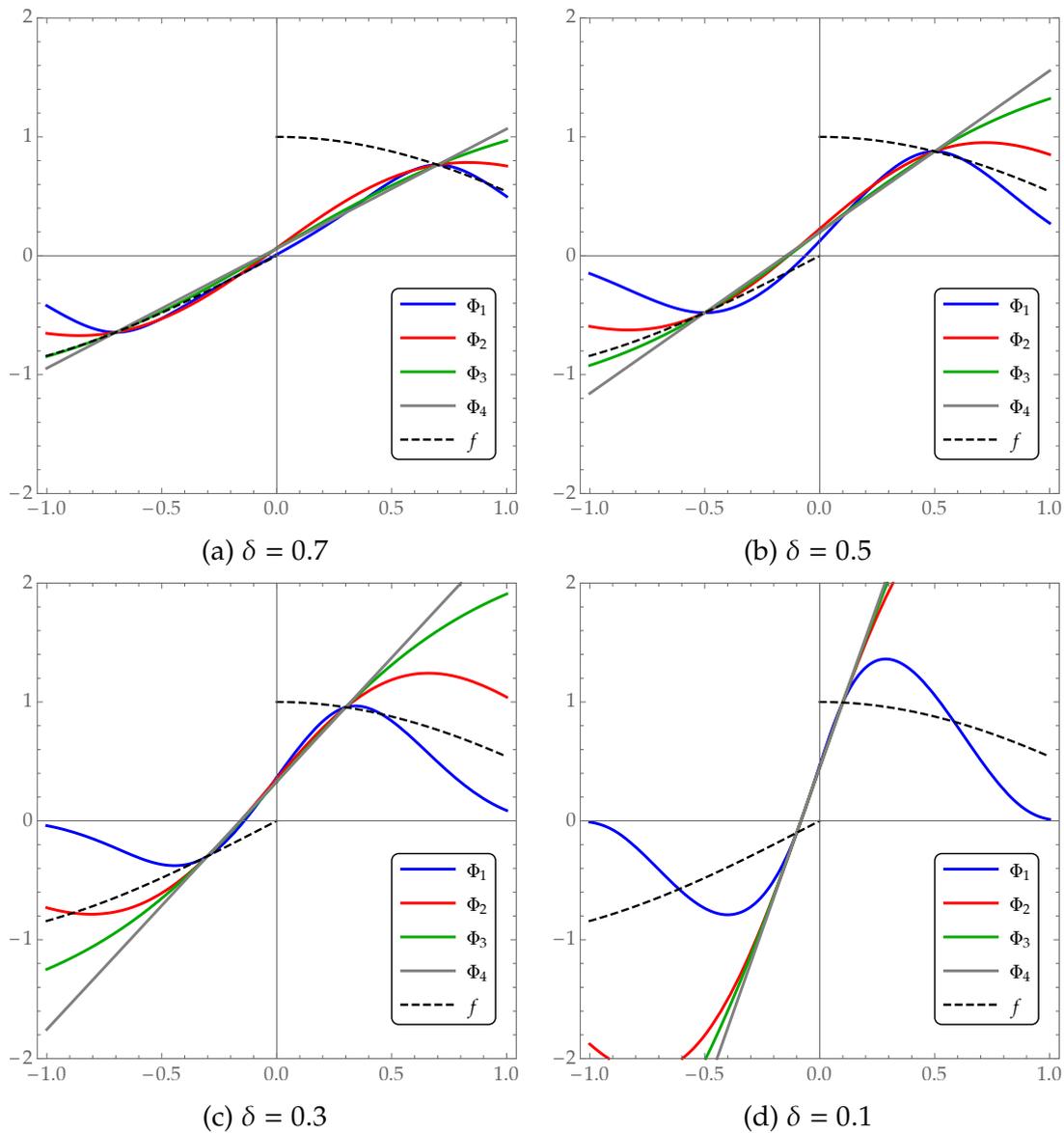
La figura 2.3, muestra los interpolantes  $s_{f, X_\delta}$ , para distintas RBF y varios valores de  $\delta$ . Las RBF utilizadas están definidas en el cuadro 2.1. Dos de ellas,  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , corresponden al caso (a); las dos restantes,  $\Phi_3$  y  $\Phi_4$ , ejemplifican los casos (b) y (c). Se observan claramente las características estudiadas de  $s_{f, X_\delta}$ . Se aprecia, en particular, la monotonía de cada interpolante y la progresiva convergencia de  $s_{f, X_\delta}(0)$  hacia el valor medio del salto (i.e.  $\frac{1}{2}(f^+ + f^-) = 0.5$  en este caso).

---

## 2.2.2. Interpolación con N centros

Consideramos a continuación que  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  es un conjunto de centros, con  $N$  un número par, uniformemente distribuidos en  $[-1, 1]$ , es decir,

$$x_j = -1 + \frac{2(j-1)}{N-1}, \quad j = 1, \dots, N,$$

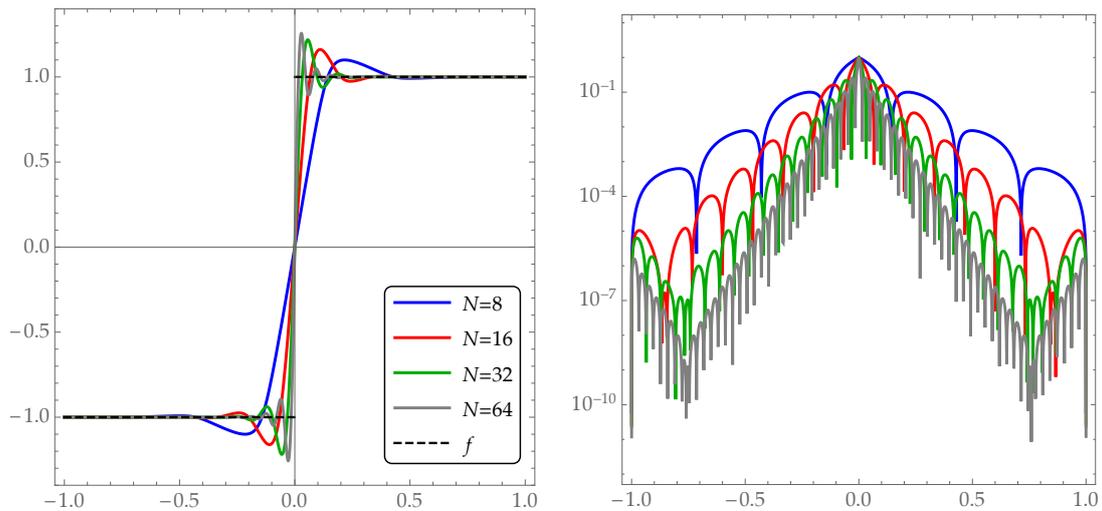
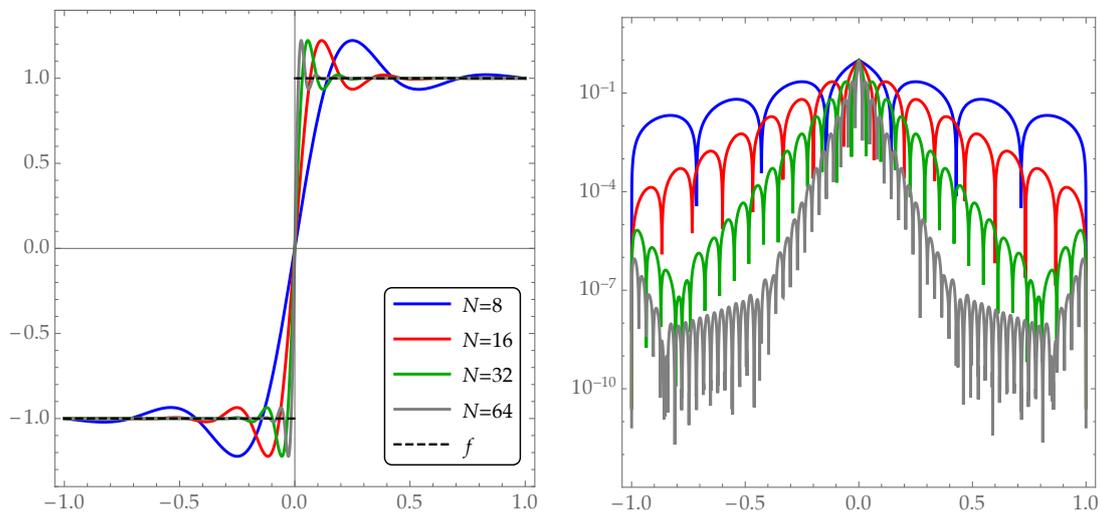


**Figura 2.3.** Interpolación de  $f$  en  $X = \{-\delta/2, \delta/2\}$ . Las leyendas indican la RBF utilizada.

Al igual que en la subsección precedente, sea  $f$  una función que presenta una discontinuidad de salto finito en  $x_c = 0$ . Obsérvese que tal discontinuidad está situada justamente en el punto medio del intervalo  $[x_{N/2}, x_{N/2+1}]$ .

En los siguientes ejemplos calcularemos diversos interpolantes  $s_{f,X}$ , variando la función  $f$ , el número  $N$  de centros y las RBF utilizadas. Enunciaremos luego algunas conclusiones que pueden extraerse de estos experimentos numéricos.

**Ejemplo 2.2.2.** En Jung [39, ejemplo 1], se considera la interpolación de la función

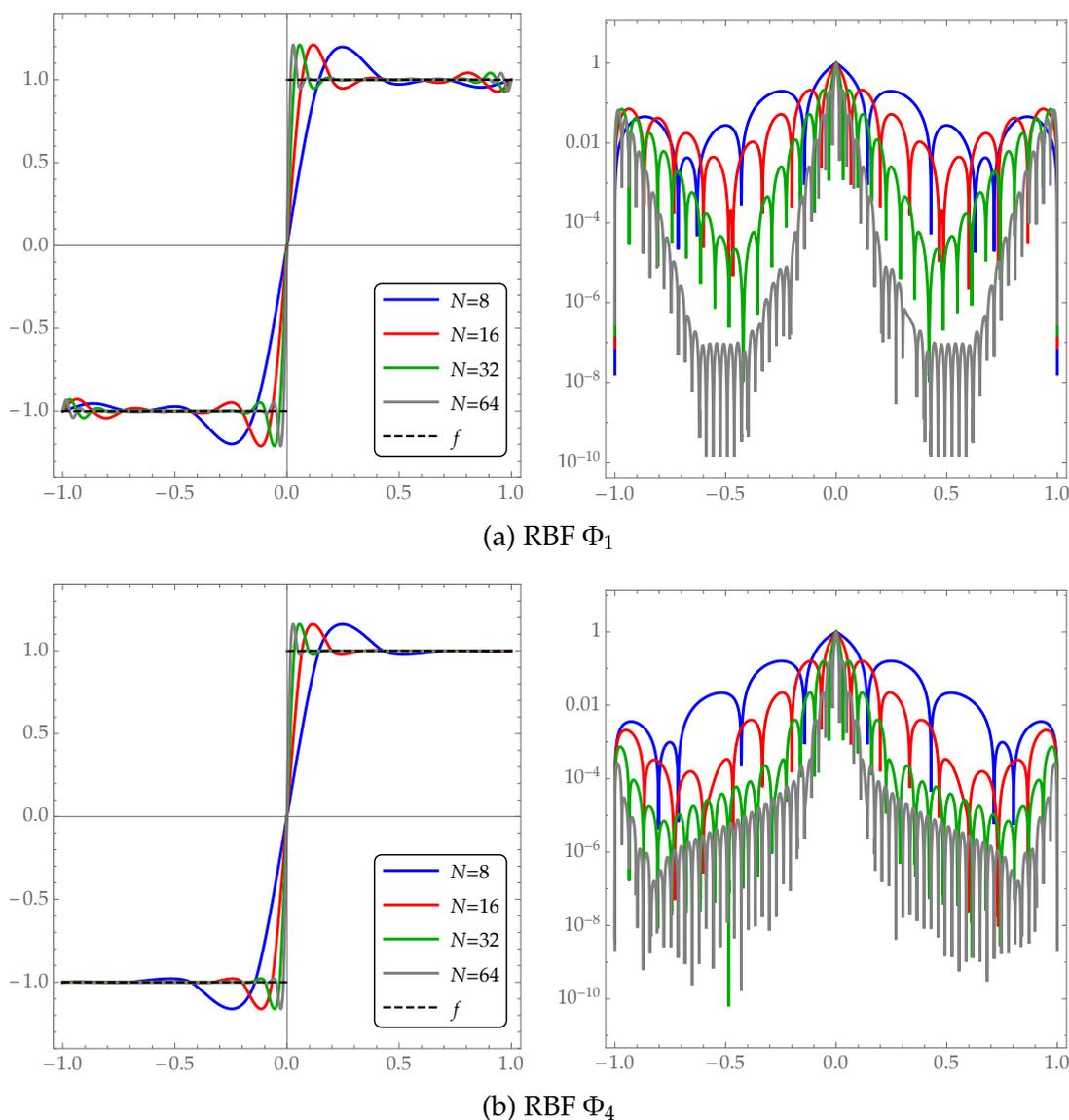
(a) Parámetro  $c$  constante:  $c = 0.05$ (b) Parámetro  $c$  dependiente de  $N$ :  $c = 0.815 \cdot \frac{2}{N-1}$ 

**Figura 2.4.** Interpolación de la función  $f$  dada en el ejemplo 2.2.2 usando la RBF  $\Phi_3$ . Izquierda: interpolantes  $s_{f,X}$  para  $N = 8, 16, 32$  y  $64$ . Derecha: función error  $|f - s_{f,X}|$  en escala logarítmica.

escalón

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Se utilizan para ello diferentes multicuádricas, esto es, la RBF  $\Phi_3$  del cuadro 2.1 para distintos valores de  $c$ . La figura 2.4 muestra dos de las estrategias seguidas por Jung. En la primera, el valor del parámetro de forma  $c$  de la multicuádrica se mantiene constante independientemente del número  $N$  de centros; en la segunda, en cambio, el parámetro  $c$  depende de  $N$ . En ambos casos los interpolantes exhiben el fenómeno de

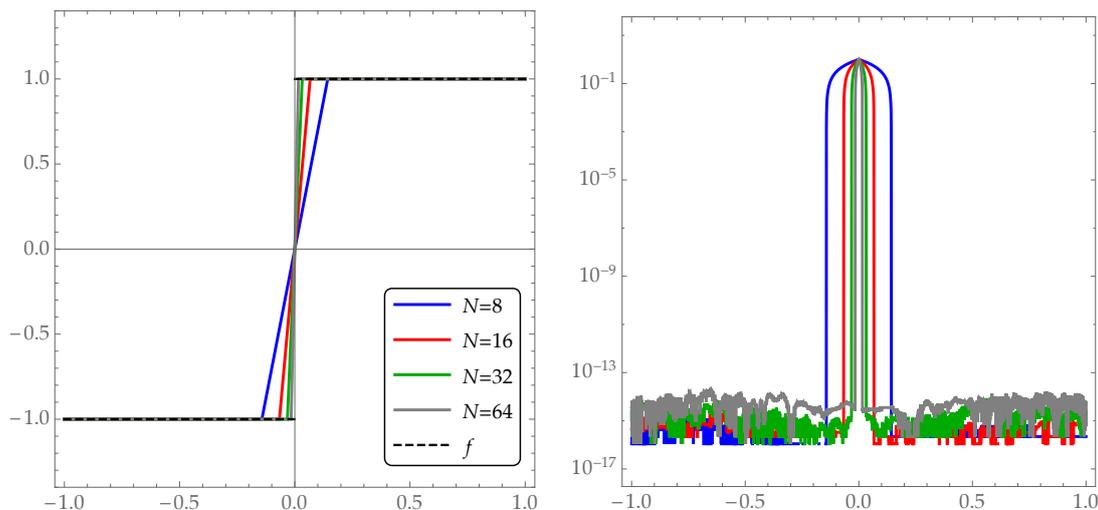


**Figura 2.5.** Interpolación de la función  $f$  dada en el ejemplo 2.2.2 usando las RBF  $\Phi_1$  y  $\Phi_4$ . Izquierda: interpolantes  $s_{f,X}$  para  $N = 8, 16, 32$  y  $64$ . Derecha: función error  $|f - s_{f,X}|$  en escala logarítmica.

Gibbs, con oscilaciones cerca del punto de discontinuidad. Con la primera estrategia, la amplitud de la oscilación aumenta al crecer  $N$ , mientras que, con la segunda, se mantiene constante. Las gráficas son muy similares a las obtenidas por Jung.

En la figura 2.5 se sustituyen las multicuádricas por una de las funciones de Wendland y por el spline de placa fina, i.e las RBF  $\Phi_1$  y  $\Phi_4$ . Como cabía esperar, el comportamiento de los interpolantes pone de manifiesto que también están afectados por el fenómeno de Gibbs. En este ejemplo particular, según se desprende de los gráficos de errores, la RBF  $\Phi_4$  ofrece mejores resultados.

Volviendo a las multicuádricas, la segunda de las estrategias mencionadas anterior-



**Figura 2.6.** Interpolación de la función  $f$  dada en el ejemplo 2.2.2 usando la RBF  $\Phi_7$ . Izquierda: interpolantes  $s_{f,X}$  para  $N = 8, 16, 32$  y  $64$ . Derecha: función error  $|f - s_{f,X}|$  en escala logarítmica.

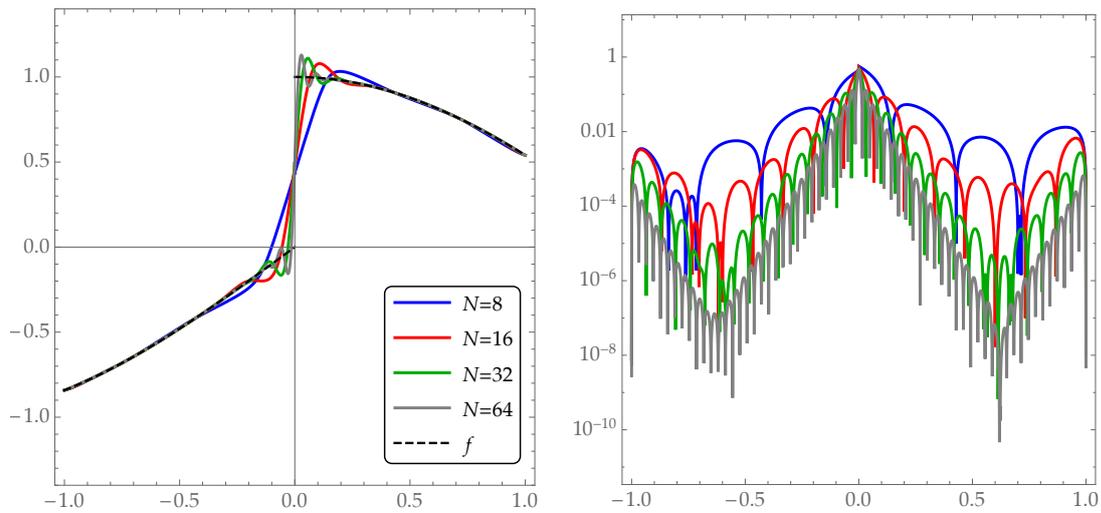
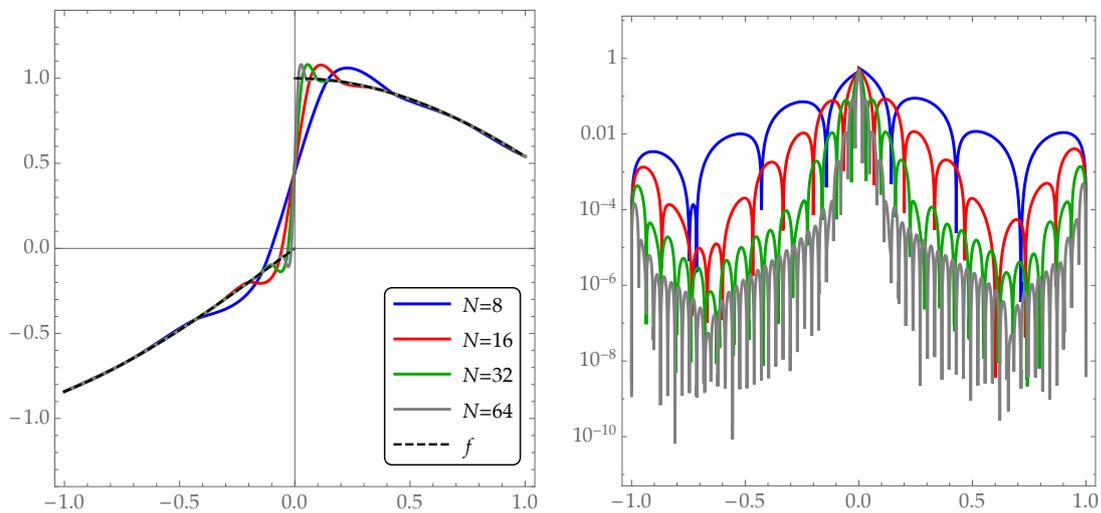
mente sugiere tomar el parámetro  $c$  cada vez menor a medida que crece el número de centros. El caso límite corresponde al valor  $c = 0$ , caso en el que las multicuádricas degeneran en la función lineal  $\Phi_7$ . Lo que sucede al interpolar utilizando justamente  $\Phi_7$  se muestra en la figura 2.5. Jung hace notar que, de hecho, cada interpolante se reduce entonces a la siguiente función lineal a trozos:

$$s_{f,X}(x) = \begin{cases} -1, & x < x_{N/2}, \\ (N-1)x, & x_{N/2} \leq x < x_{N/2+1}, \\ 1, & x \leq x_{N/2+1}. \end{cases}$$

Lógicamente, las oscilaciones desaparecen. Por eso, fuera del entorno de la discontinuidad, los errores que muestra la figura 2.6 se deben sólo a las limitaciones de la aritmética en coma flotante.

**Ejemplo 2.2.3.** Retomamos la función  $f$  del ejemplo 2.2.1, utilizada por Jung [39] en su ejemplo 2. En la figura 2.7 se presentan varios interpolantes RBF obtenidos con las funciones  $\Phi_3$ , con  $c = 0.05$ , y  $\Phi_4$ . Una vez más es bien evidente que las oscilaciones provocadas por el fenómeno de Gibbs en torno a la discontinuidad reducen la calidad de la aproximación.

La figura 2.8 muestra los interpolantes que resultan de emplear las RBF  $\Phi_6$  y  $\Phi_7$ . Todos ellos son funciones no derivables en los centros, por lo que no son buenas aproximaciones de  $f$ . Sin embargo, logran evitar el fenómeno de Gibbs, careciendo así

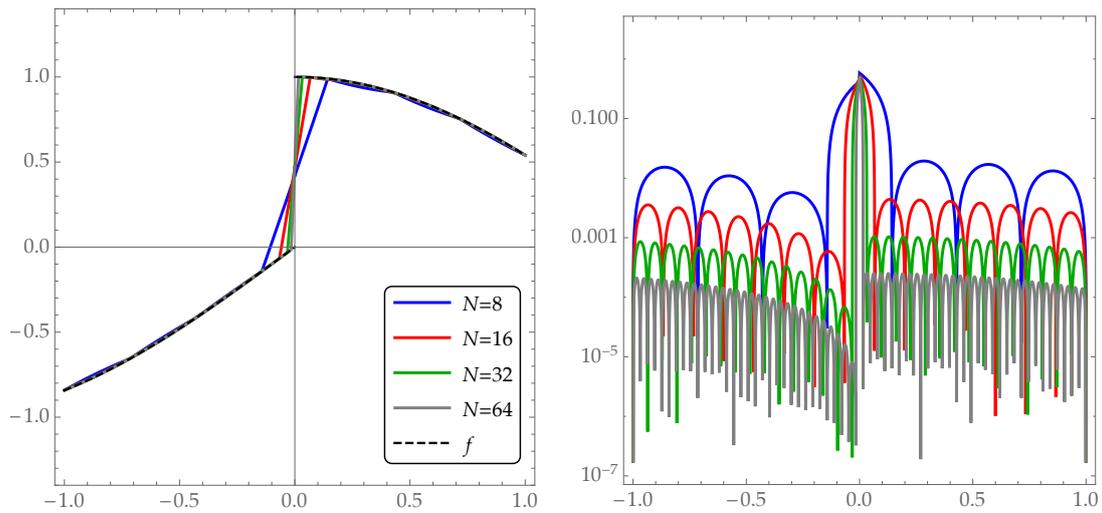
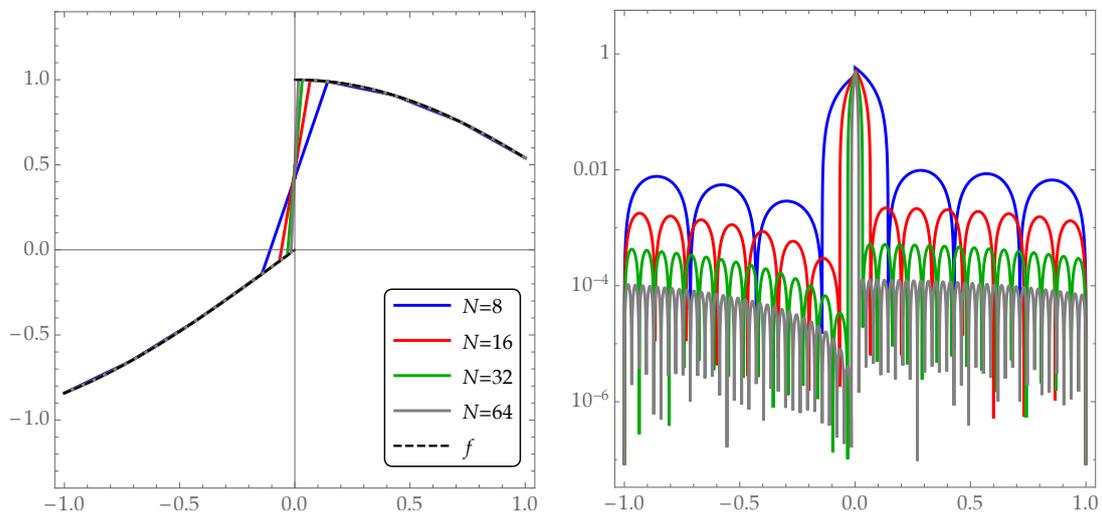
(a) RBF  $\Phi_3$  con  $c = 0.05$ (b) RBF  $\Phi_4$ 

**Figura 2.7.** Interpolación de la función  $f$  dada en el ejemplo 2.2.3 usando las RBF  $\Phi_3$  y  $\Phi_4$ . Izquierda: interpolantes  $s_{f,X}$  para  $N = 8, 16, 32$  y  $64$ . Derecha: función error  $|f - s_{f,X}|$  en escala logarítmica.

de oscilaciones.

De los ejemplos anteriores y de otros experimentos numéricos similares se pueden extraer las siguientes conclusiones:

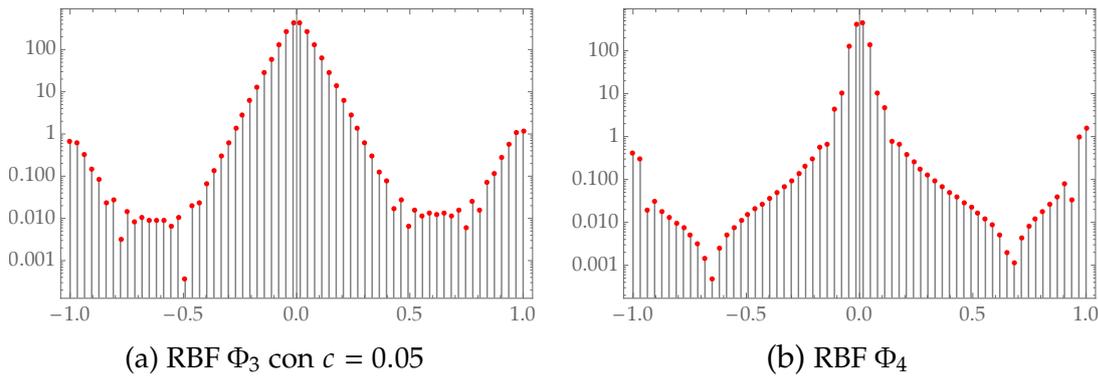
- Cuando se utiliza una RBF diferenciable en  $\mathbb{R}$ , el interpolante  $s_{f,X}$  de la función discontinua  $f$  en el conjunto  $X$  de centros equiespaciados se ve afectado por el fenómeno de Gibbs, por lo que tiene oscilaciones junto al punto de discontinuidad  $x_c$ . Las oscilaciones no desaparecen ni para valores altos de  $N$ , pero crecen hasta un cierto límite. Las oscilaciones máximas se localizan en los intervalos

(a) RBF  $\Phi_6$ (b) RBF  $\Phi_7$ 

**Figura 2.8.** Interpolación de la función  $f$  dada en el ejemplo 2.2.3 usando las RBF  $\Phi_6$  y  $\Phi_7$ . Izquierda: interpolantes  $s_{f,X}$  para  $N = 8, 16, 32$  y  $64$ . Derecha: función error  $|f - s_{f,X}|$  en escala logarítmica.

$(x_{N/2-1}, x_{N/2})$  y  $(x_{N/2+1}, x_{N/2+2})$ .

- Cuando se usan RBF no diferenciables en el origen, el interpolante  $s_{f,X}$  no presenta oscilaciones alrededor del punto de discontinuidad. Por lo general, se logra un menor grado de aproximación, pero el error disminuye en un entorno de  $x_c$ .
- Cada interpolante  $s_{f,X}$ , es una función estrictamente creciente en  $(x_{N/2}, x_{N/2+1})$  si  $f(x_{N/2}) < f(x_{N/2+1})$ , y es estrictamente decreciente si  $f(x_{N/2}) > f(x_{N/2+1})$ .
- Cada coeficiente de expansión  $\beta_i$  del interpolante  $s_{f,X}$  está vinculado al centro  $x_i$ . Los valores absolutos de los coeficientes de expansión asociados a los centros



**Figura 2.9.** Valor absoluto, en escala logarítmica, de los coeficientes de expansión del interpolante  $s_{f,X}$  asociado a la función  $f$  del ejemplo 2.2.3 y el conjunto  $X$  de  $N = 64$  centros equiespaciados. Se usan las RBF  $\Phi_3$  y  $\Phi_4$ .

cercanos a la discontinuidad  $x_c$  son mucho mayores que los de los que están junto a la frontera del intervalo  $[a, b]$ , los cuales, a su vez, son mayores que los valores absolutos de los coeficientes de expansión correspondientes a los restantes centros. Este hecho se aprecia claramente en la figura 2.9.

Definimos la *oscilación máxima* del interpolante del modo siguiente:

$$\text{osc} = \{|f(x) - s_{f,X}(x)| \mid x \in (a, x_{N/2}) \cup (x_{N/2+1}, b)\}.$$

Para calibrar la importancia de tal oscilación resulta conveniente compararla con el salto de la función en el punto de discontinuidad. Se introduce así el índice  $R$  dado por

$$R = \frac{\text{osc}}{|f^+ - f^-|},$$

donde, recordemos,  $f^+$  y  $f^-$  están definidos en (2.1).

Se consideran diferentes funciones escalón (i.e., constantes a izquierda y derecha de  $x_c$ ) y computamos  $R$  con diferentes RBF, números de centros y discontinuidades de salto. El cuadro 2.2 recoge esta información y muestra que la oscilación máxima límite, para un  $N$  dado, depende de la longitud del salto de la discontinuidad y de la RBF usada. Los valores del cuadro 2.2 indican que  $R$  es una medida relativa de la oscilación máxima, puesto que  $R$  es invariante para un  $N$  y una RBF fijados. Esto significa que  $R$  no depende de la longitud de salto para una función radial de base ni del número de centros considerados. Los valores de  $R$  recogidos en el cuadro 2.2 permiten afirmar que la interpolación usando  $\Phi_1$  produce una oscilación máxima límite de aproximadamente el 10.5 % del salto, usando  $\Phi_3$  tal oscilación alcanza aproximadamente el 13.7 % del salto y usando  $\Phi_4$  la oscilación máxima límite es del orden del 8 % del salto.

RBF	$(f^-, f^+)$	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$
$\Phi_1$	$(-1, 1)$	0.099196	0.105459	0.105381	0.105405	0.105448
	$(0, 1)$	0.102875	0.106201	0.105542	0.105422	0.105439
	$(-1.5, 1.5)$	0.099191	0.105459	0.105381	0.105405	0.105448
	$(-0.4, 0.8)$	0.100417	0.105211	0.105435	0.105397	0.105445
$\Phi_3$ ( $c = 0.05$ )	$(-1, 1)$	0.049979	0.080588	0.109322	0.128105	0.136857
	$(0, 1)$	0.049979	0.080588	0.109322	0.128105	0.136857
	$(-1.5, 1.5)$	0.049979	0.080588	0.109322	0.128105	0.136857
	$(-0.4, 0.8)$	0.049979	0.080588	0.109315	0.128103	0.136803
$\Phi_4$	$(-1, 1)$	0.080397	0.080465	0.080466	0.080466	0.080466
	$(0, 1)$	0.080397	0.080465	0.080466	0.080466	0.080466
	$(-1.5, 1.5)$	0.080397	0.080465	0.080466	0.080466	0.080466
	$(-0.4, 0.8)$	0.080397	0.080465	0.080466	0.080466	0.080466

**Cuadro 2.2.** Valores de  $R$  para diferentes RBF,  $(f^-, f^+)$  y  $N$ .

### Sección 2.3

## INTERPOLACIÓN DE FUNCIONES DISCONTINUAS

En la sección anterior, hemos descrito el comportamiento de la interpolación RBF de una función  $f$  con una discontinuidad de salto finito en un conjunto  $X$  de  $N$  centros uniformemente distribuidos. Cuando se usa una RBF diferenciable en  $\mathbb{R}$ , el interpolante  $s_{f,X}$  no reproduce la discontinuidad de la función y aparece el fenómeno de Gibbs. Sin embargo, se observa un comportamiento distinto del interpolante cuando se emplea la RBF  $\Phi_7$ : en este caso,  $s_{f,X}$  no tiene oscilaciones porque resulta ser una función lineal a trozos.

Basándose en este último hecho, Jung [39] presenta un método de interpolación RBF mediante multicuádricas que logra eliminar las oscilaciones. Para ello, se adaptan los parámetros de forma de la multicuádrica empleada. Las oscilaciones se evitan haciendo que este parámetro sea nulo para las RBF asociadas a los centros con coeficientes de expansión cuyo valor absoluto es considerablemente mayor que los correspondientes a los centros situados junto a la frontera. Este criterio deriva del comportamiento de los coeficientes de expansión comentado en el apartado precedente y ejemplificado en la figura 2.9. En la práctica, este criterio supone cambiar la multicuádrica por la RBF lineal  $\Phi_7$  en los dos centros entre los que se encuentra la discontinuidad de salto.

Así pues, volviendo a la situación de la sección 2.2, para interpolar una función  $f$  discontinua en  $x_c = 0$  en un conjunto  $X$  de  $N$  centros equiespaciados del intervalo  $[-1, 1]$ , es suficiente con fijar una RBF  $\Phi$  apropiada y cambiar  $\Phi$  por  $\Phi_7$  en los centros  $x_{N/2}$  y  $x_{N/2+1}$ . Se busca, pues, un interpolante  $\tilde{s}_{f,X}$  de la forma

$$\tilde{s}_{f,X}(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^N \beta_j \Phi(x - x_j) + \sum_{j \in J} \beta_j |x - x_j| + \sum_{k=1}^{\tilde{m}} \alpha_k p_k(x),$$

donde  $J = \{N/2, N/2 + 1\}$ ,  $\tilde{m} = \max\{1, m\}$  si  $\Phi$  es  $m$ -cdp y  $\{p_1, \dots, p_{\tilde{m}}\}$  es una base del espacio de polinomios  $\mathbb{R}_{\tilde{m}-1}[x]$ . Los vectores de coeficientes  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$  y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{m}})^T$  se determinan mediante las condiciones de interpolación y las condiciones adicionales

$$\beta^T \cdot p_j|_X = 0, \quad 1 \leq j \leq \tilde{m},$$

con  $p_j|_X = (p_j(x_1), \dots, p_j(x_N))^T$ . La experiencia numérica muestra la necesidad de que el parámetro  $\tilde{m}$  sea siempre mayor o igual que 1, lo cual deriva, sin duda, de que la RBF lineal  $\Phi_7$  es 1-cdp.

**Ejemplo 2.3.1.** Reconsideramos el ejemplo 2.2.3. Usamos las mismas RBF diferenciales, esto es,  $\Phi_3$ , con  $c = 0.05$ , y  $\Phi_4$ , para interpolar la función

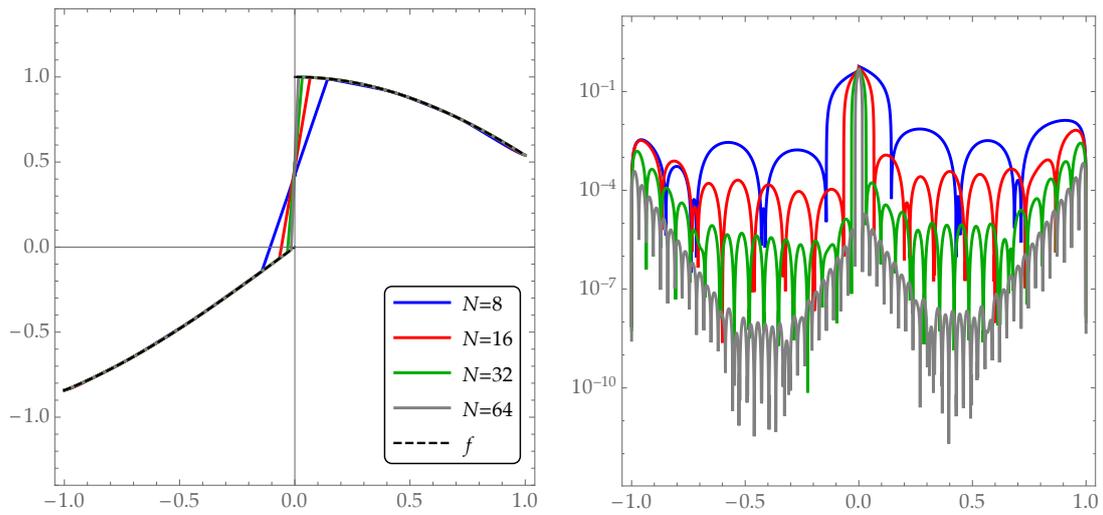
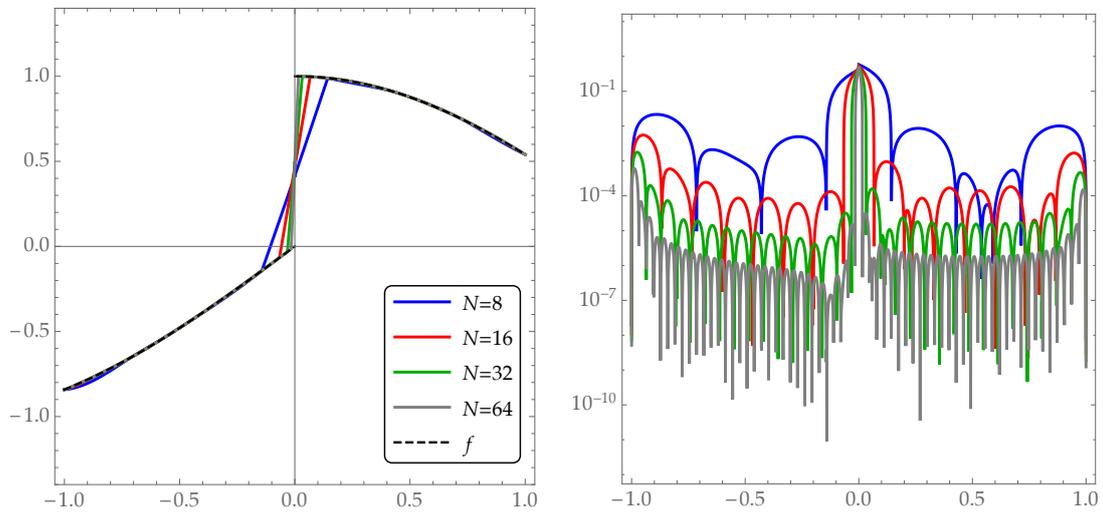
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -1 \leq x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Aplicamos ahora la técnica descrita y sustituimos por  $\Phi_7$  la RBF correspondiente a los centros  $x_{N/2}$  y  $x_{N/2+1}$ . El resultado se muestra en la figura 2.10. Comparando con la figura 2.7 se observa que se evita por completo el fenómeno de Gibbs, se disminuye globalmente el error, reduciendo sustancialmente el entorno de la discontinuidad en el que los errores son elevados y mejorando la aproximación fuera de tal entorno. Si se compara ahora con la figura 2.8(b), la mejora es también general.

**Ejemplo 2.3.2.** Repetimos los cálculos del ejemplo 2.3.1, pero usamos ahora una nueva función, en concreto,

$$f(x) = \begin{cases} \log(1 - x), & -1 \leq x < 0, \\ 0.5 + (x - 0.5)^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

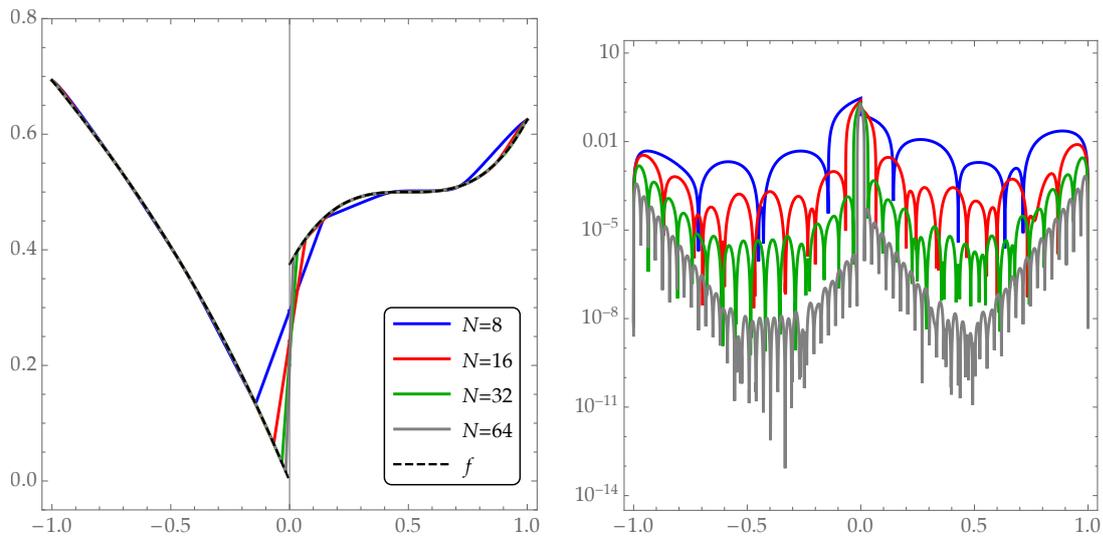
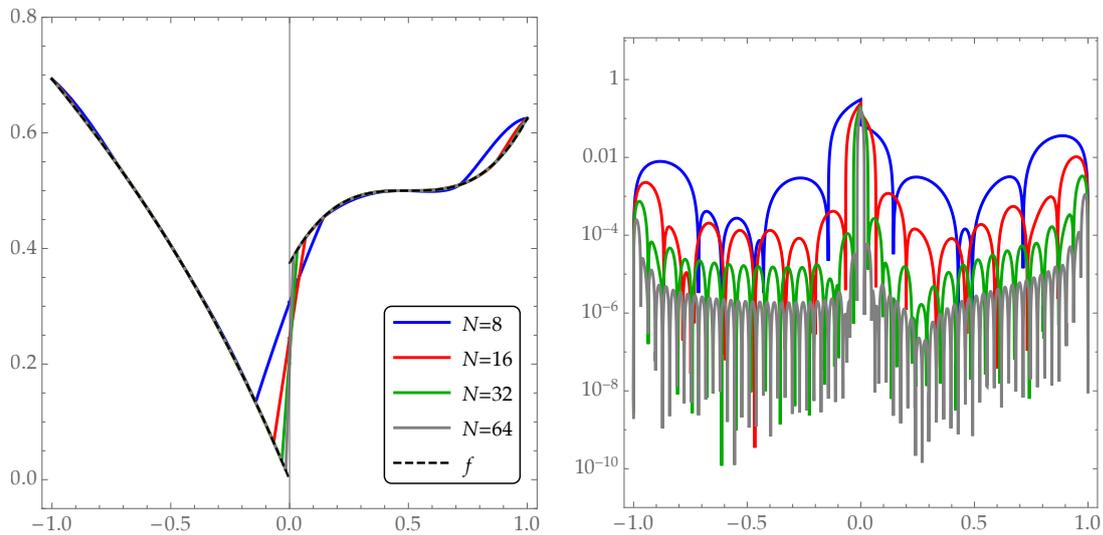
Los resultados se presentan en la figura 2.11.

(a) RBF  $\Phi_3$  con  $c = 0.05$ (b) RBF  $\Phi_4$ 

**Figura 2.10.** Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 2.3.1. Izquierda: interpolantes  $\tilde{s}_{f,X}$  para  $N = 8, 16, 32$  y  $64$ . Derecha: función error  $|f - \tilde{s}_{f,X}|$  en escala logarítmica.

Como ya hemos comentado anteriormente, la razón por la que desaparecen las oscilaciones del fenómeno de Gibbs al introducir  $\Phi_7$  es que esta RBF no es diferenciable en el origen, luego tampoco lo es su trasladada  $\Phi_7(\cdot - x_j)$  en el centro  $x_j$ . Ahora bien, la función  $\Phi_7$  no es la única RBF no diferenciable en el origen. En el cuadro 2.1, por ejemplo, aparecen las funciones  $\Phi_5$  y  $\Phi_6$ . De hecho, hemos usado esta última en el ejemplo 2.2.3; la figura 2.8(a) muestra que también con ella se logra eliminar las oscilaciones en torno a la discontinuidad. Por otra parte, en todos los experimentos numéricos previos, los centros estaban equiespaciados. Nada impide, sin embargo, pensar en un conjunto de centros cualesquiera.

Nos planteamos, pues, extender el procedimiento de interpolación ya descrito para

(a) RBF  $\Phi_3$  con  $c = 0.05$ (b) RBF  $\Phi_4$ 

**Figura 2.11.** Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 2.3.2. Izquierda: interpolantes  $\tilde{s}_{f,X}$  para  $N = 8, 16, 32$  y  $64$ . Derecha: función error  $|f - \tilde{s}_{f,X}|$  en escala logarítmica.

resolver el problema siguiente:

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función que presenta una discontinuidad de salto finito en un punto  $x_c \in (a, b)$ . Dado un conjunto  $X$  de  $N$  centros contenido en  $[a, b] \setminus \{x_c\}$  y los valores de  $f$  en  $X$ , obtener un interpolante  $\tilde{s}_{f,X}$  de  $f$  en  $X$  que sea una función continua sin oscilaciones en torno a  $x_c$ .

El considerar que ningún centro coincide con  $x_c$  se justifica porque habitualmente no se dispone de la posición exacta de la discontinuidad. Asimismo, el buscar la continuidad de  $\tilde{s}_{f,X}$  pretende llenar del mejor modo posible el intervalo, limitado por dos centros

consecutivos, donde se ubica la discontinuidad.

Para resolver este problema, se propone un método que consta de los siguientes pasos:

- (a) Se localizan los centros entre los cuales se halla  $x_c$ , esto es, se determina el índice  $\kappa$  tal que  $x_c \in (x_\kappa, x_{\kappa+1})$ . Este paso se puede realizar mediante algún método de detección de discontinuidades, cuestión sobre la que trataremos más adelante en esta tesis.
- (b) Se fijan una RBF  $\Phi$  diferenciable en  $\mathbb{R}$  y otra RBF  $\bar{\Phi}$  no diferenciable en el origen.
- (c) Se busca un interpolante de la forma

$$\tilde{s}_{f,X}(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^N \beta_j \Phi(x - x_j) + \sum_{j \in J} \beta_j \bar{\Phi}(x - x_j) + p(x),$$

con  $J = \{\kappa, \kappa + 1\}$ , donde  $p \equiv 0$  si  $\Phi$  y  $\bar{\Phi}$  son 0-cdp, o bien, en otro caso,

$$p(x) = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \alpha_j p_j(x),$$

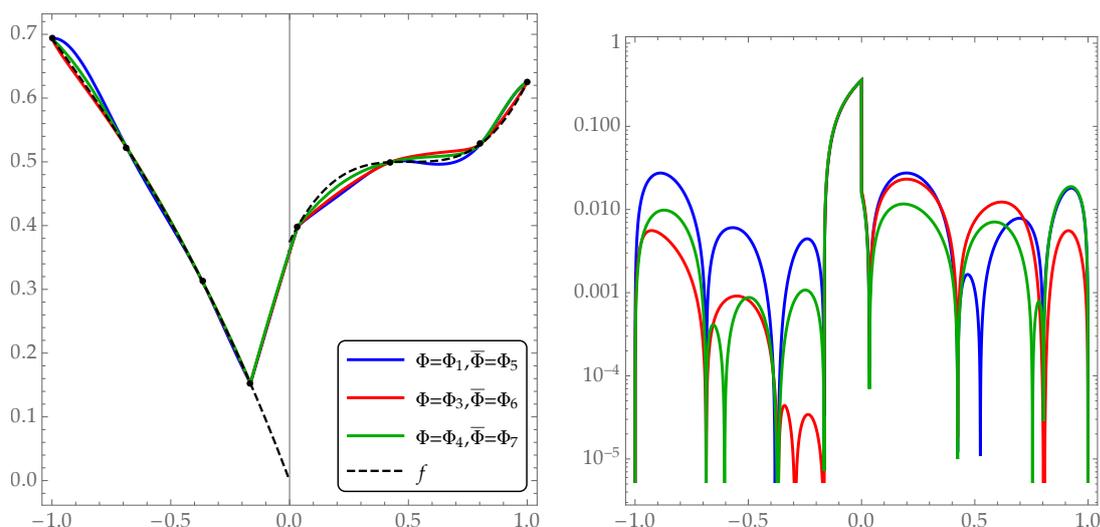
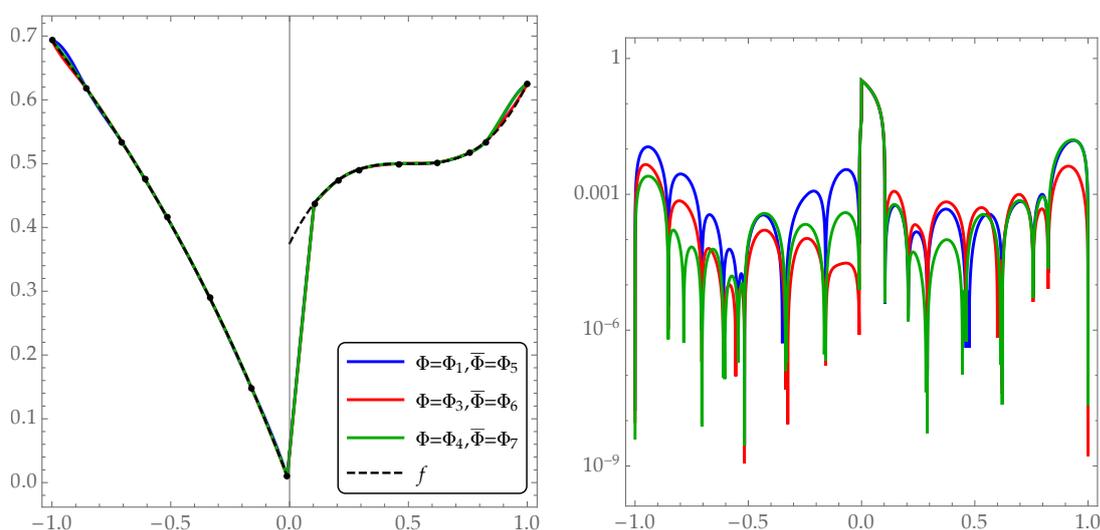
con  $\tilde{m} = \max\{m, \bar{m}\}$ , si  $\Phi$  es  $m$ -cdp y  $\bar{\Phi}$  es  $\bar{m}$ -cdp, siendo  $\{p_1, \dots, p_{\tilde{m}}\}$  una base del espacio de polinomios  $\mathbb{R}_{\tilde{m}-1}[x]$ . Los vectores de coeficientes  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$  y, en su caso,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{m}})^T$  se determinan mediante las condiciones de interpolación y, en su caso, las condiciones adicionales

$$\beta^T \cdot p_j|_X = 0, \quad 1 \leq j \leq \tilde{m},$$

con  $p_j|_X = (p_j(x_1), \dots, p_j(x_N))^T$ .

En el supuesto de que la función  $f$  presentase más de una discontinuidad, se adapta fácilmente este método: bastaría con que el conjunto  $J$  de índices contuviera los de cada par de centros que acotan un punto de discontinuidad. Resulta evidente, por otra parte, que, si  $\bar{\Phi}$  es diferenciable en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , entonces el interpolante  $\tilde{s}_{f,X}$ , por construcción, es una función diferenciable en  $(a, b)$ , salvo en los centros que estén acotando cada discontinuidad.

**Ejemplo 2.3.3.** Retomamos el ejemplo 2.3.2. La figura 2.12 muestra el resultado de aplicar el método de interpolación en dos conjuntos  $X$  de 8 y 16 centros, respectivamente.

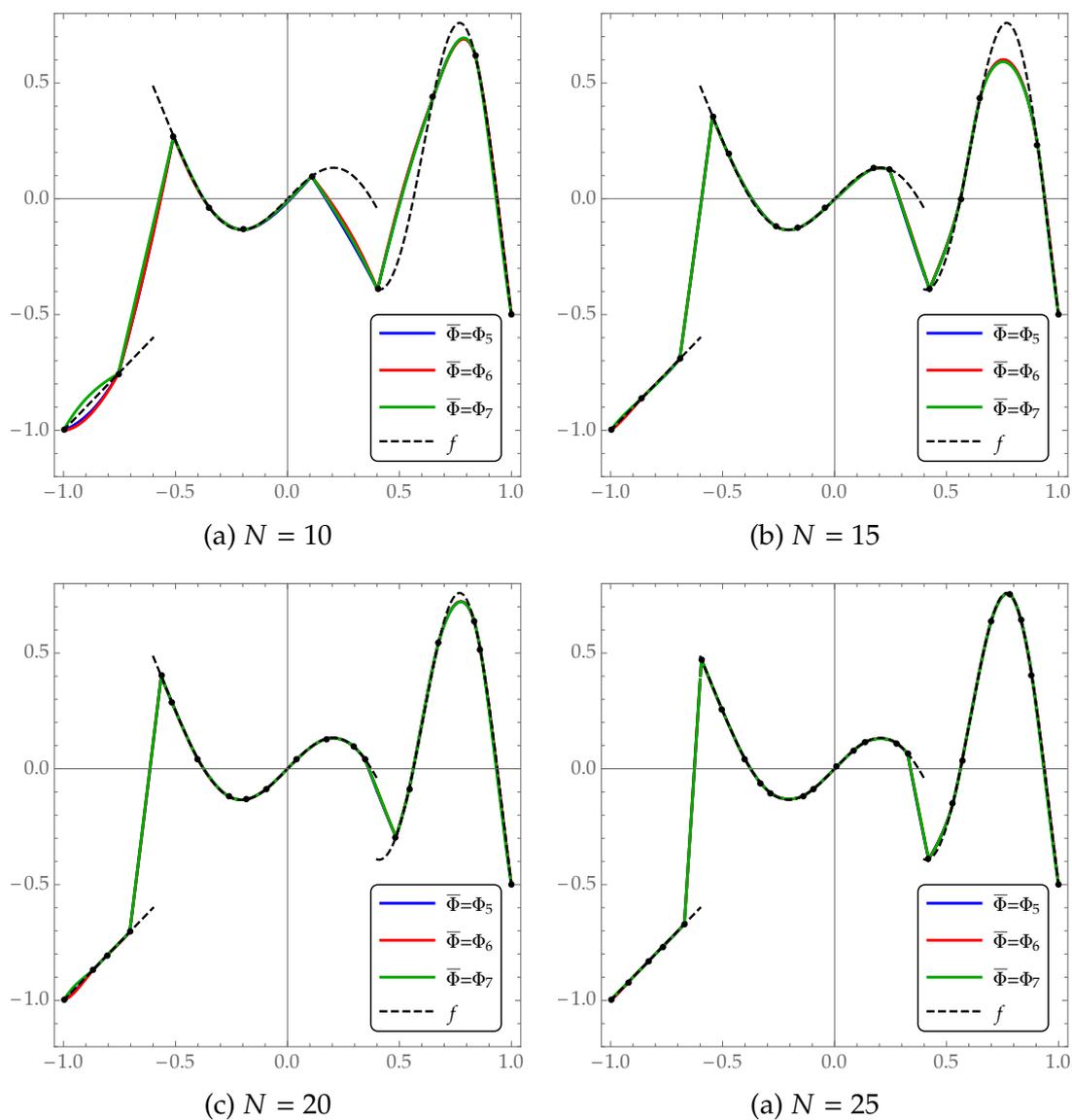
(a)  $N = 8$ (b)  $N = 16$ 

**Figura 2.12.** Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 2.3.3. Izquierda: interpolantes  $\tilde{s}_{f,X}$  para  $N = 8$  y 16. Derecha: función error  $|f - \tilde{s}_{f,X}|$  en escala logarítmica. Para la RBF  $\Phi_3$  se toma  $c = 0.05$ .

En ambos casos los centros se obtienen perturbando un conjunto de puntos equiespaciados en  $[-1, 1]$ . Las leyendas indican las combinaciones de funciones  $\Phi$  y  $\bar{\Phi}$  que se han utilizado. La calidad de los interpolantes, lógicamente, aumenta a medida que crece el número de centros y se acercan dos de ellos al punto de discontinuidad.

**Ejemplo 2.3.4.** Se considera la función

$$f(x) = x \cos\left(\frac{4}{3}\pi x \lfloor x + 1.6 \rfloor\right),$$



**Figura 2.13.** Interpolantes correspondientes al ejemplo 2.3.4.

donde, recordemos,  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota la parte entera. En el intervalo  $[-1, 1]$ , esta función es discontinua en  $x = -0.6$  y  $x = 0.4$ . En la figura 2.13 aparecen los interpolantes obtenidos al usar la función  $\Phi = \Phi_4$  y la función  $\bar{\Phi}$  que, en cada caso, se indica en la leyenda del gráfico correspondiente. El número de centros de  $X$  varía de 10 a 25. A medida que aumenta el número de centros, los distintos interpolantes se vuelven visualmente indistinguibles.

## Sección 2.4

**INTERPOLACIÓN DE FUNCIONES NO DERIVABLES**

En la sección anterior se observa que, cambiando la función radial de base en ciertos centros por otra que es de clase  $C^0$ , se consigue un interpolante que no es derivable en tales centros. Usamos este hecho para el ajuste de funciones continuas cuya primera derivada presenta discontinuidades de salto. Más concretamente, nos planteamos el siguiente problema:

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua cuya primera derivada presenta discontinuidades de salto en los puntos  $v_1, \dots, v_\kappa \in (a, b)$ . Dado un conjunto  $X$  de  $N$  centros contenido en  $[a, b]$  y los valores de  $f$  en  $X$ , obtener un interpolante  $\tilde{s}_{f,X}$  de  $f$  en  $X$  que reproduzca las discontinuidades de  $f'$ .

Por simplificar el problema, suponemos que  $X$  contiene los puntos de discontinuidad de  $f'$  y que, de hecho, estos puntos son los  $\kappa$  primeros centros, i.e.  $x_1 = v_1, \dots, x_\kappa = v_\kappa$ . Para obtener  $\tilde{s}_{f,X}$ , basta seguir la estrategia del método dado en la sección 2.3. Se fijan dos RBF  $\Phi$  y  $\bar{\Phi}$ , la primera diferenciable en  $x = 0$ , la segunda, no. Entonces, el interpolante es de la forma

$$\tilde{s}_{f,X}(x) = \sum_{j=\kappa+1}^N \beta_j \Phi(x - x_j) + \sum_{j=1}^{\kappa} \beta_j \bar{\Phi}(x - x_j) + p(x),$$

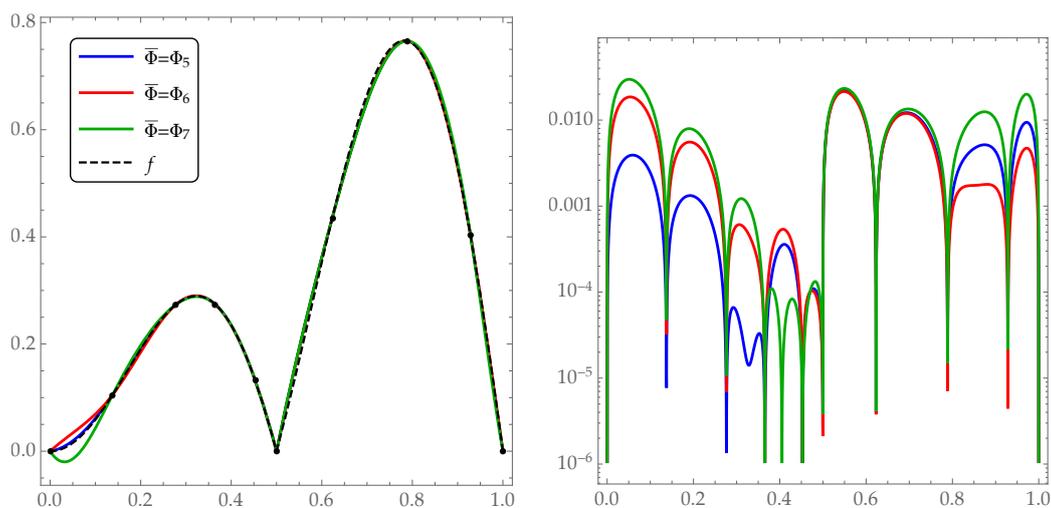
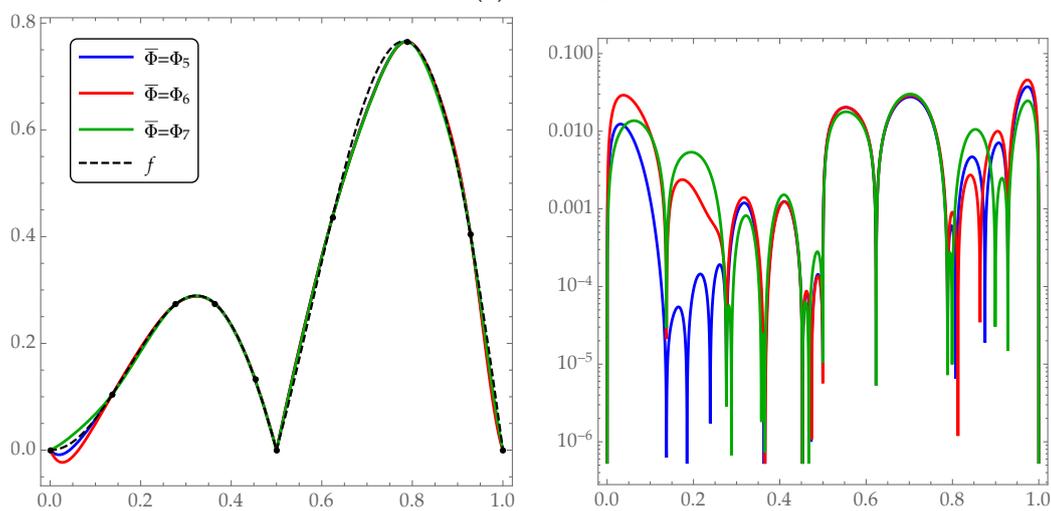
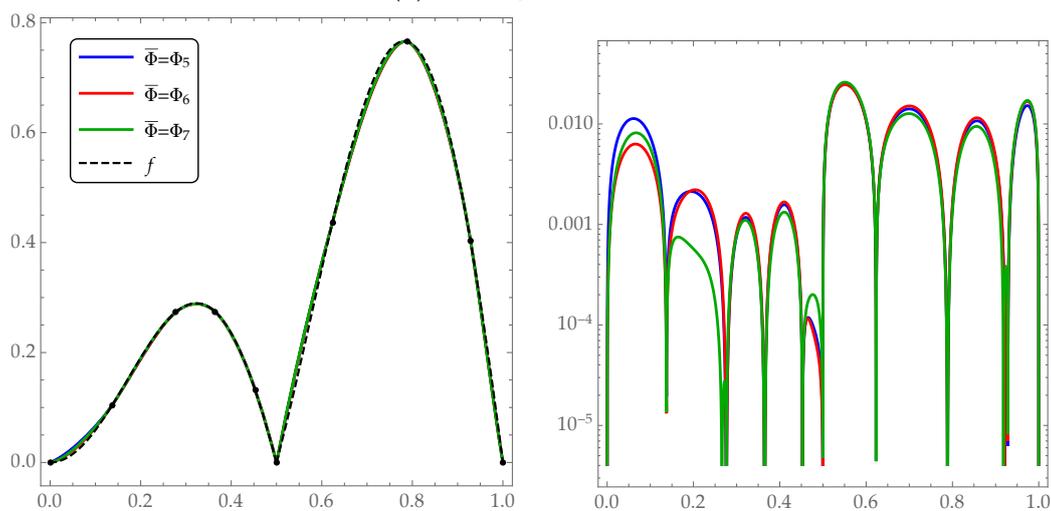
donde  $p \equiv 0$  si  $\Phi$  y  $\bar{\Phi}$  son 0-cdp, o bien, en otro caso,

$$p(x) = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \alpha_j p_j(x),$$

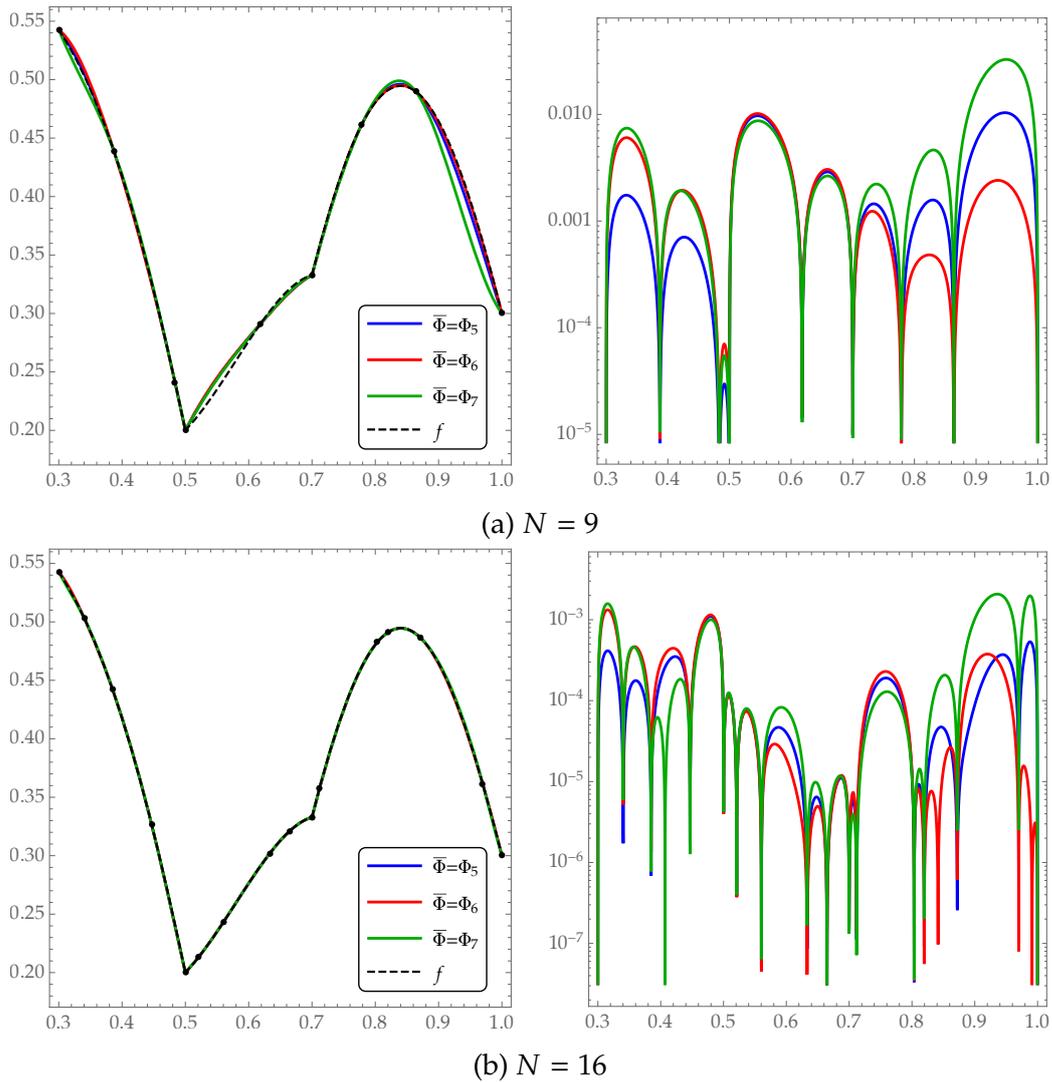
con  $\tilde{m} = \max\{m, \bar{m}\}$ , si  $\Phi$  es  $m$ -cdp y  $\bar{\Phi}$  es  $\bar{m}$ -cdp, siendo  $\{p_1, \dots, p_{\tilde{m}}\}$  una base del espacio de polinomios  $\mathbb{R}_{\tilde{m}-1}[x]$ . Los vectores de coeficientes  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$  y, en su caso,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\tilde{m}})^T$  se determinan nuevamente mediante las condiciones de interpolación y, en su caso, las condiciones adicionales

$$\beta^T \cdot p_j|_X = 0, \quad 1 \leq j \leq \tilde{m},$$

con  $p_j|_X = (p_j(x_1), \dots, p_j(x_N))^T$ .

(a) RBF  $\Phi_1$ (b) RBF  $\Phi_3$  con  $c = 0.05$ (c) RBF  $\Phi_4$ 

**Figura 2.14.** Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 2.4.1. Izquierda: interpolantes  $\tilde{s}_{f,X}$ . Derecha: función error  $|f - \tilde{s}_{f,X}|$  en escala logarítmica.



**Figura 2.15.** Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 2.4.2. Izquierda: interpolantes  $\tilde{s}_{f,X}$ . Derecha: función error  $|f - \tilde{s}_{f,X}|$  en escala logarítmica.

**Ejemplo 2.4.1.** Sea  $f(x) = |x \text{sen}(2\pi x)|$ , función que consideramos definida en el intervalo  $[0, 1]$ . Su derivada tiene una discontinuidad de salto finito en  $x = 0.5$ . Se aplica la estrategia descrita para interpolar  $f$  en un conjunto de 10 centros, incluido el punto de discontinuidad de  $f'$ . La figura 2.14 muestra los interpolantes obtenidos para cada una de las posibles combinaciones de  $\Phi \in \{\Phi_1, \Phi_3, \Phi_4\}$  y  $\bar{\Phi} \in \{\Phi_5, \Phi_6, \Phi_7\}$ . Para  $\Phi_3$  se toma  $c = 0.05$ .

**Ejemplo 2.4.2.** Consideramos ahora una variante de la función del ejemplo precedente, en concreto,  $f(x) = 0.5|x \text{sen}(2\pi x)| + |x - 0.7|$ . Su primera derivada tiene discontinuidades en  $x = 0.5$  y  $x = 0.7$ . En la figura 2.15 se presentan los interpolantes  $\tilde{s}_{f,X}$  de  $f$  en dos conjuntos de centros de 9 y 16 puntos del intervalo  $[0.3, 1]$ , incluidos los

puntos de discontinuidad de  $f'$ . Se toma  $\Phi = \Phi_1$  y se combina esta función con cada  $\bar{\Phi} \in \{\Phi_5, \Phi_6, \Phi_7\}$ .

---

## CAPÍTULO 3

# APROXIMACIÓN DE FUNCIONES NO REGULARES

---

### Sección 3.1

#### INTRODUCCIÓN

A pesar de su destacado papel en el área de la aproximación de funciones a partir de datos dispersos, los métodos RBF no se suelen usar en el caso de que las funciones presenten discontinuidades. Hay para ello una razón que reposa sobre una limitación intrínseca de estos métodos: los aproximantes RBF son combinaciones lineales de trasladadas de funciones regulares (continuas, al menos), luego no pueden reproducir singularidades de orden bajo. Hemos tenido ocasión de comprobarlo en el capítulo anterior. Además, el fenómeno de Gibbs induce oscilaciones indeseadas en las proximidades de los puntos de discontinuidad de salto finito.

Para tratar de superar este problema, se han propuesto diversas estrategias, como simplificar las hipótesis sobre los conjuntos de discontinuidad (cf. [9]) o desarrollar esquemas adaptativos que llevan a situar más centros cerca de las singularidades (cf. [19]). En el segundo capítulo de esta misma tesis, en el caso de funciones univariadas, se ha propuesto un procedimiento para eliminar el fenómeno de Gibbs usando localmente funciones de base que son continuas, pero no diferenciables, en los centros situados junto a la discontinuidad. Tal procedimiento da lugar, de hecho, a un método de aproximación de funciones con discontinuidades de salto finito, extensible al caso en el que las discontinuidades estén en las derivadas. No es, sin embargo, un método satisfactorio, pues no logra reproducir bien las singularidades de la función.

En este capítulo se pretende aportar una solución más efectiva del problema descrito. Se propone un nuevo procedimiento de aproximación mediante funciones radiales

de base que, por un lado, consigue reproducir las discontinuidades de la función o de su derivada, sin perder, por otro lado, las buenas propiedades de aproximación características de los métodos RBF. Le daremos el nombre de *aproximación RBFFA*.

En el artículo de Izquierdo y otros [38], se publicó una primera versión de este método, adaptado al contexto de la reconstrucción de superficies explícitas con fallas. En esencia, este artículo describe un esquema de interpolación que consiste en mover los puntos de interpolación del plano al grafo de una función auxiliar simple no regular, calcular un interpolante trivariado con la ayuda de funciones radiales de base de soporte compacto y proyectar este interpolante en el plano para finalmente obtener el interpolante bivariado deseado.

Comenzaremos este capítulo presentando el método de aproximación RBFFA en un contexto general en  $\mathbb{R}^d$ . Se trata, de hecho, de un procedimiento de interpolación o ajuste aplicable a cualquier función definida en  $\mathbb{R}^d$ . No obstante, es el caso de funciones no regulares el que realmente ha motivado el desarrollo de la aproximación RBFFA y en el que nos centraremos a lo largo de las siguientes secciones. Veremos primero cómo se usa el método en el caso de funciones univariadas. Esto nos permitirá descubrir algunas de sus propiedades y la conveniencia de utilizar funciones radiales de soporte compacto para que el método sea realmente efectivo. Pasaremos luego al caso bivariado, donde retomaremos y ampliaremos el artículo ya citado, considerando entonces la aproximación de funciones definidas sobre conjuntos del plano con discontinuidades de salto finito o con gradiente discontinuo en un cierto subconjunto de su dominio, o lo que es lo mismo, con un lenguaje más propio de las aplicaciones geológicas, trataremos de la reconstrucción de superficies explícitas con fallas verticales u oblicuas.

Cabe señalar, por último, que, en la misma línea del método de interpolación dado en [38], posteriormente, Rossini en un artículo reciente [52], propone un esquema de interpolación para funciones con gradiente discontinuo a través de núcleos de escala variable y definiendo una función auxiliar con las mismas discontinuidades. Esa función auxiliar se define solo cuando la línea de falla es una función explícita que divide el dominio de la función a interpolar. Rossini forma parte de un equipo con trabajos en el campo de la aproximación RBF de curvas y superficies con discontinuidades (véanse, por ejemplo, las referencias [6], [7], [8], [10], [11], [12] y [13]).

## Sección 3.2

**APROXIMACIÓN RBF MEDIANTE FUNCIONES AUXILIARES**

Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función de la que se conocen sus valores  $f(x_1), \dots, f(x_N)$  en un conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ . Dada una RBF  $\Phi$   $m$ -cdp en  $\mathbb{R}^d$  (con  $m \geq 0$ ), hemos visto en las subsecciones 1.2.1 y 1.2.2 y en la sección 1.4 cómo calcular una función  $s_{f,X}$  que aproxima la función  $f$ , sea porque la interpola en el conjunto  $X$  (i.e.  $s_{f,X}|_X = f|_X$ ), sea porque toma en él un valor similar (i.e.  $s_{f,X}|_X \approx f|_X$ ). Por fijar ideas y simplificar la exposición, consideremos que  $\Phi$  es 0-cdp, esto es, definida positiva. La función  $s_{f,X}$  tiene la forma

$$s_{f,X}(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j \Phi(x - x_j).$$

El vector  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$  es solución del sistema

$$(A_{\Phi,X} + \lambda I) \cdot \beta = f|_X,$$

donde  $A_{\Phi,X}$  es la matriz de interpolación asociada a  $\Phi$  y  $X$ ,  $I$  es la matriz identidad de orden  $N$  y  $\lambda$  es un parámetro de ajuste mayor o igual que 0, dando lugar a un interpolante de  $f$  en  $X$  si  $\lambda = 0$ .

Denotemos los elementos de  $\mathbb{R}^{d+1}$  en la forma  $(x, y)$  con  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $y \in \mathbb{R}$ . Sea  $\phi$  la función básica que genera  $\Phi$ , luego  $\Phi(\cdot) = \phi(\|\cdot\|_2)$ , y supongamos que también es 0-cdp en  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Tiene sentido entonces plantearse la aproximación de una hipotética función desconocida que tomase los valores  $f(x_1), \dots, f(x_N)$  en el conjunto de centros

$$\tilde{X} = \{(x_j, 0) \mid j = 1, \dots, N\}.$$

Buscamos, para ello, un aproximante RBF de la forma

$$\tilde{s}_{f,\tilde{X}}(x, y) = \sum_{j=1}^N \tilde{\beta}_j \tilde{\Phi}((x, y) - (x_j, 0)),$$

donde  $\tilde{\Phi}$  es la RBF generada por  $\phi$  en  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Si también denotamos por  $\|\cdot\|_2$  la norma euclídea en  $\mathbb{R}^{d+1}$ , la definición de  $\tilde{\Phi}$  es formalmente idéntica a la de  $\Phi$ , esto es,  $\tilde{\Phi}(\cdot) = \phi(\|\cdot\|_2)$ . No habrá riesgo de confusión en estas notaciones de la norma euclídea, pues,

por el contexto, quedará claro en qué espacio se aplica.

El vector  $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_N)^T$  es solución del sistema

$$\left( A_{\tilde{\Phi}, \tilde{X}} + \lambda I \right) \cdot \beta = f|_X,$$

siendo  $A_{\tilde{\Phi}, \tilde{X}}$  la matriz de interpolación asociada a  $\tilde{\Phi}$  y  $\tilde{X}$ . Como

$$\|(x_i, 0) - (x_j, 0)\|_2 = \|x_i - x_j\|_2,$$

resulta que  $A_{\tilde{\Phi}, \tilde{X}} = A_{\Phi, X}$ , por lo que  $\tilde{\beta} = \beta$ , ya que ambos vectores son la solución única del mismo sistema lineal. Obviamente, además,

$$\tilde{\Phi}((x, 0) - (x_j, 0)) = \phi(\|(x, 0) - (x_j, 0)\|_2) = \phi(\|x - x_j\|_2) = \Phi(x - x_j).$$

Se concluye, pues, que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \tilde{s}_{f, \tilde{X}}(x, 0) = s_{f, X}(x).$$

En otras palabras, el aproximante  $s_{f, X}$  de  $f$  en  $X$  no es más que la restricción al hiperplano  $y = 0$  del aproximante  $\tilde{s}_{f, \tilde{X}}$ . A una conclusión análoga se llega si los centros de  $\tilde{X}$  están situados en un hiperplano cualquiera  $y = c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ , o si  $\phi$  es una función  $m$ -cdp con  $m > 0$ .

El razonamiento precedente muestra que se puede obtener un aproximante  $s_{f, X}$  de una función  $f$  definida en  $\mathbb{R}^d$  mediante un proceso de aproximación RBF en  $\mathbb{R}^{d+1}$  si se desplazan los centros hasta un hiperplano  $y = c$ , esto es, hasta el grafo de una función constante  $\zeta : x \in \mathbb{R}^d \mapsto c \in \mathbb{R}$ . Pero vayamos todavía más allá. Este paso por  $\mathbb{R}^{d+1}$  sugiere que quizás, en determinadas circunstancias, resultase adecuado situar los centros en el grafo de una función *no constante*  $\zeta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , que llamaremos *función auxiliar*. Si entonces se efectúa una aproximación en  $\mathbb{R}^{d+1}$  y se restringe luego el aproximante al grafo de  $\zeta$ , se acaba obteniendo un función  $s_{f, X}^*$  que interpola o ajusta la función  $f$ . Cabe, pues, proponer y analizar un método de aproximación que consta de los pasos siguientes:

*Entrada:* El conjunto  $X$  de centros, los valores  $f|_X$ , una función auxiliar  $\zeta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  y el parámetro de ajuste  $\lambda$ .

*Paso 1.* Se escoge una función básica  $\phi$  que sea  $m$ -cdp en  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

*Paso 2.* Se construye el conjunto de centros  $\tilde{X} = \{(x_j, \zeta(x_j)) \mid j = 1, \dots, N\}$ .

*Paso 3.* Se halla un aproximante RBF  $\tilde{s}_{f, \tilde{X}}$ , definido en  $\mathbb{R}^{d+1}$ , a partir de  $\tilde{X}$ ,  $f|_X$ , la función básica  $\phi$  y el parámetro  $\lambda$ .

*Paso 4.* Se define la función  $s_{f,X}^*$  mediante la relación

$$s_{f,X}^*(x) = \tilde{s}_{f,\tilde{X}}(x, \zeta(x)).$$

*Salida:* El aproximante  $s_{f,X}^*$ .

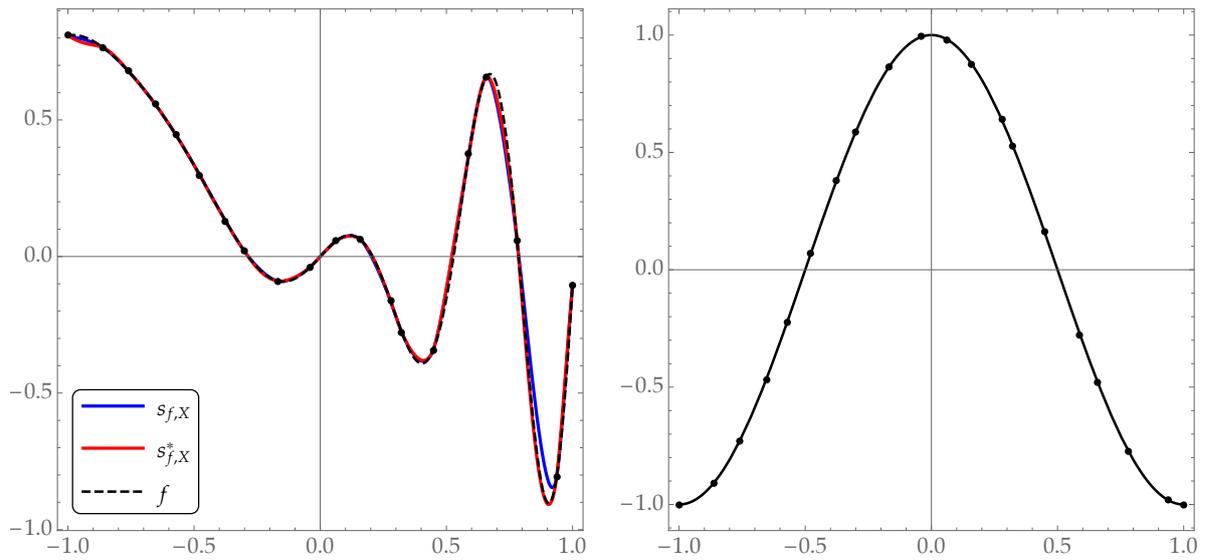
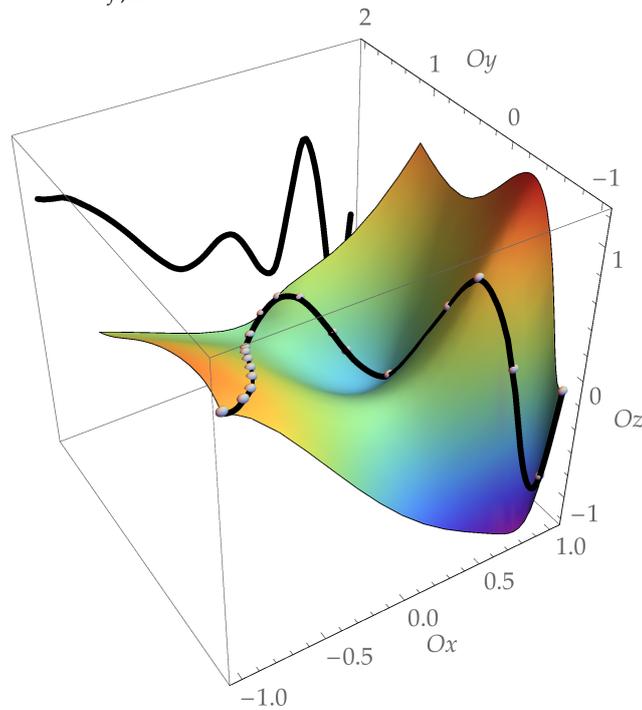
En lo sucesivo, para referirnos a este método hablaremos, según proceda, de *interpolación o aproximación RBF mediante funciones auxiliares*, que abreviaremos en lo sucesivo por *RBFFA*.

A primera vista, no parece que la aproximación RBFFA tenga alguna ventaja desde una perspectiva computacional con respecto a una mera aproximación RBF en  $\mathbb{R}^d$ . En efecto, tal método es más costoso en memoria, pues hay que guardar los valores de  $\zeta$  en  $X$ , y en tiempo, ya que exige evaluar repetidamente la función  $\zeta$ . No obstante, si  $\phi$  es una función básica de soporte compacto, sí que parece claro un posible beneficio: como  $\|(x_i, \zeta(x_i)) - (x_j, \zeta(x_j))\|_2 \geq \|x_i - x_j\|$ , la matriz de interpolación asociada a  $\tilde{\Phi}$  y  $\tilde{X}$  estará menos llena que la matriz de interpolación asociada a  $\Phi$  y  $X$  y tendrá un menor condicionamiento. Por tanto, el cálculo del aproximante RBFFA  $s_{f,X}^*$  conduce a un sistema lineal más estable que el obtenido en la aproximación RBF directa en  $\mathbb{R}^d$ . A lo largo de este capítulo veremos, no obstante, que la gran ventaja de la aproximación RBFFA radica en su aplicabilidad a la reconstrucción de funciones no regulares.

Indiquemos, por último, que el grado de suavidad del aproximante  $s_{f,X}^*$  depende, obviamente, de la regularidad de la función auxiliar. Si se necesita que  $s_{f,X}^*$  sea de clase  $C^k$ , basta con asegurarse de que también lo son la RBF  $\tilde{\Phi}$  y la función auxiliar  $\zeta$ .

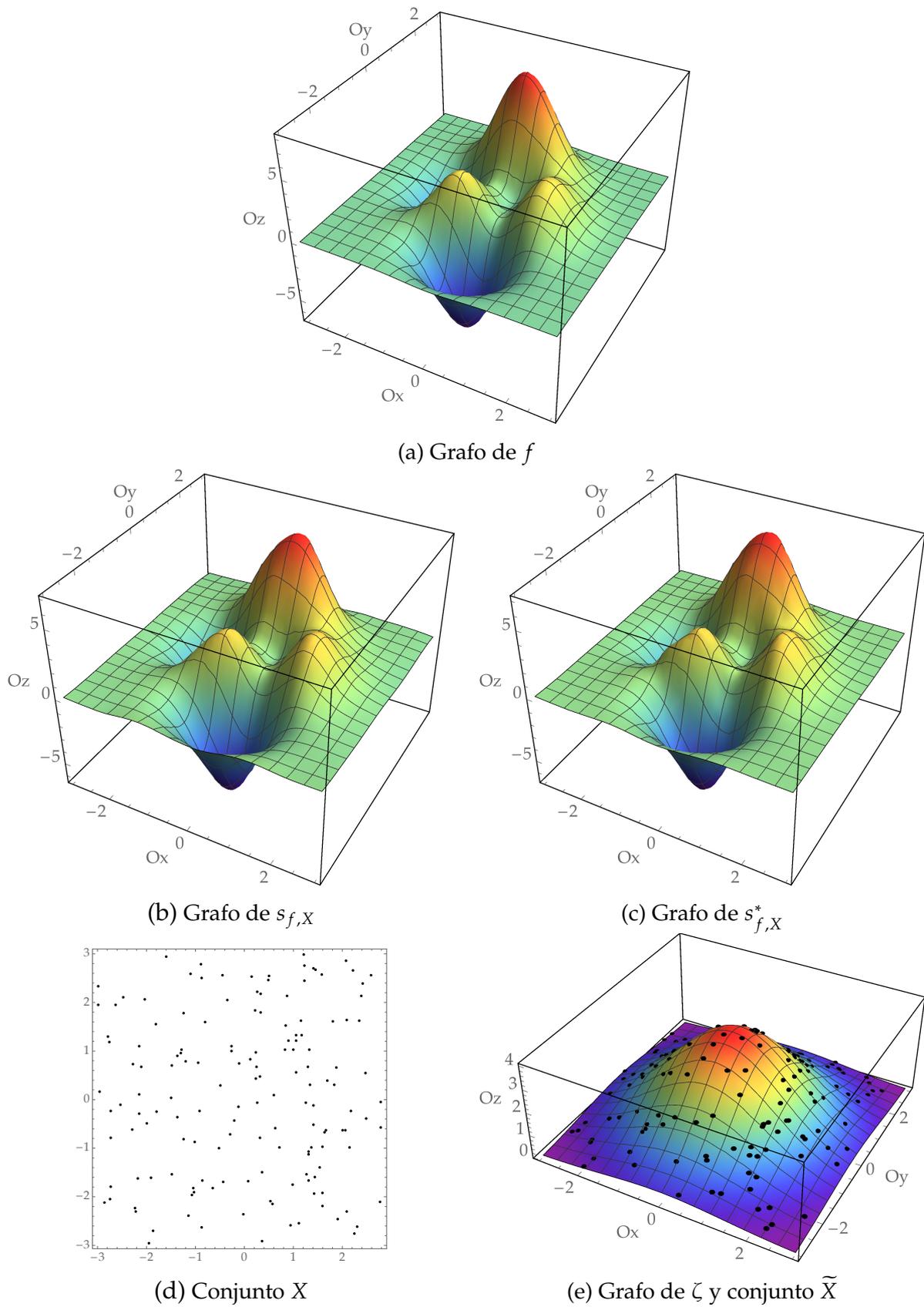
**Ejemplo 3.2.1.** Sea  $f(x) = x \cos(\frac{4}{3}\pi x(x + 1.6))$ . Se consideran un conjunto  $X$  de centros formado por  $N = 20$  puntos del intervalo  $[-1, 1]$ , la función básica  $\phi(r) = r^2 \log(r)$ , que es 2-cdp, y la función auxiliar  $\zeta(x) = \cos(\pi x)$ . Con estos datos, se calcula el interpolante RBFFA  $s_{f,X}^*$  y, a efectos de comparación, el interpolante RBF  $s_{f,X}$  usando la misma función básica. La figura 3.1(a) muestra los grafos de  $f$ ,  $s_{f,X}^*$  y  $s_{f,X}$ , así como los puntos en los que se produce la interpolación. En este ejemplo concreto puede constatar que la interpolación RBFFA da incluso mejores resultados que la interpolación RBF.

Para la mejor comprensión de este método, la figura 3.1(b) presenta el grafo de la función auxiliar  $\zeta$  junto con los centros del conjunto  $\tilde{X}$ . Por último, en la figura 3.1(c) aparece el grafo del interpolante  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$ , la curva  $C = \{(x, \zeta(x), s_{f,X}^*(x)) \mid x \in [-1, 1]\}$  y su proyección sobre un plano paralelo al plano  $xz$ , revelando justamente el grafo del interpolante  $s_{f,X}^*$ . Observemos que la curva  $C$  está contenida en el grafo de  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$ , ya que, por definición,  $s_{f,X}^*(x) = \tilde{s}_{f,\tilde{X}}(x, \zeta(x))$ . Observemos también que sobre esta curva se disponen los puntos de  $\mathbb{R}^3$  por los que se fuerza a pasar al grafo de  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$  al interpolar

(a) Grafos de  $s_{f,X}$ ,  $s_{f,X}^*$  y  $f$ (b) Grafo de  $\zeta$  y conjunto  $\tilde{X}$ (c) Grafo de  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$ , curva  $C$  y proyección**Figura 3.1.** Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 3.2.1.

los valores  $f|_X$  sobre los centros de  $\tilde{X}$ .

Cabe reseñar, por último, que el aspecto del grafo de  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$  varía enormemente en función de cuáles sean las funciones  $\phi$  y  $\zeta$  que se escoja, influyendo en la calidad de la aproximación de  $f$ .



**Figura 3.2.** Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 3.2.2.

**Ejemplo 3.2.2.** Consideremos ahora la función

$$f(x, y) = 3(1 - x)^2 e^{-x^2 - (y+1)^2} - 10 \left( -x^3 + \frac{x}{5} - y^5 \right) e^{-x^2 - y^2} - \frac{1}{3} e^{-(x+1)^2 - y^2}.$$

Su grafo está representado en la figura 3.2(a). Esta función está predefinida en el programa Matlab, donde se denomina *peaks*.

Se considera asimismo el conjunto  $X$  constituido por  $N = 150$  puntos aleatoriamente distribuidos en el rectángulo  $[-3, 3] \times [-3, 3]$  y que se muestra en la figura 3.2(d). Al igual que en el ejemplo precedente, usamos la función básica  $\phi(r) = r^2 \log(r)$  y, como función auxiliar, tomamos la función  $\zeta(x, y) = 4 \exp(-(x^2 + y^2)/2)$ . El grafo de  $\zeta$  y el conjunto de centros  $\tilde{X}$  se representan en la figura 3.2(e). Aplicamos los métodos de aproximación RBF y RBFFA, con el parámetro de ajuste  $\lambda = 0.05$ , que proporcionan las funciones  $s_{f,X}$  y  $s_{f,X}^*$  representadas en las figuras 3.2(b) y 3.2(c). En este caso, el aproximante intermedio  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$  está definido en  $\mathbb{R}^3$ . No lo representamos de ningún modo.

### Sección 3.3

## APROXIMACIÓN RBFFA DE FUNCIONES UNIVARIADAS NO REGULARES

En esta sección consideraremos cómo adaptar el método RBFFA para la aproximación de funciones univariadas no regulares. Lo haremos en tres pasos. Primero nos centraremos en funciones con discontinuidades de salto finito; luego analizaremos el caso de las funciones con derivada discontinua; por último, daremos algunas indicaciones para aquellas funciones que presenten simultáneamente discontinuidades de salto finito tanto en la propia función como en su derivada. En los artículos de Izquierdo y otros [35, 37], se publicó una parte de los contenidos de esta sección.

### 3.3.1. Aproximación de funciones univariadas discontinuas

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función que presenta discontinuidades de salto finito en los puntos  $v_1, \dots, v_\kappa \in (a, b)$ . Supongamos una vez más que se conocen los valores de  $f$  en un conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset [a, b]$ . La aproximación RBFFA proporciona un método simple de obtener una función  $s_{f,X}^*$  que no sólo interpola o ajusta  $f$  en los puntos dados, sino que además reproduce sus discontinuidades, supuestas éstas conocidas con una cierta exactitud. En efecto, para ello basta con aplicar el método con una función auxiliar  $\zeta$  que sea discontinua en los mismos puntos que  $f$ , la más simple

de las cuales es una función escalonada de la forma:

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0, & x < v_1, \\ \sigma, & v_1 \leq x < v_2, \\ 2\sigma, & v_2 \leq x < v_3, \\ \dots & \\ \kappa\sigma, & v_k \leq x. \end{cases} \quad (3.1)$$

Es evidente que se podría pensar en funciones auxiliares más complicadas. No obstante, los ejemplos que proporcionaremos seguidamente ponen de manifiesto que es suficiente utilizar funciones escalonadas de la forma dada. Más adelante haremos algún comentario sobre la elección del parámetro de salto  $\sigma$  que aparece en la definición de la función  $\zeta$ .

**Ejemplo 3.3.1.** Consideremos la función utilizada en los ejemplos 2.3.1 y 2.3.2, esto es,

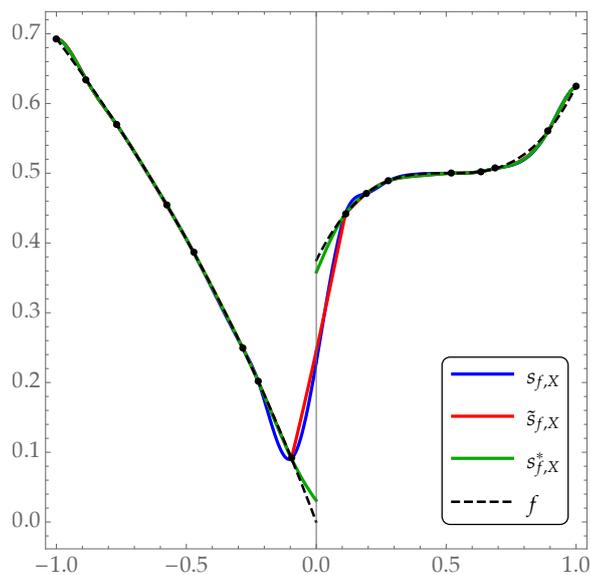
$$f(x) = \begin{cases} \log(1-x), & -1 \leq x < 0, \\ 0.5 + (x-0.5)^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esta función es discontinua en  $v = 0$ , lo cual nos lleva a la función auxiliar

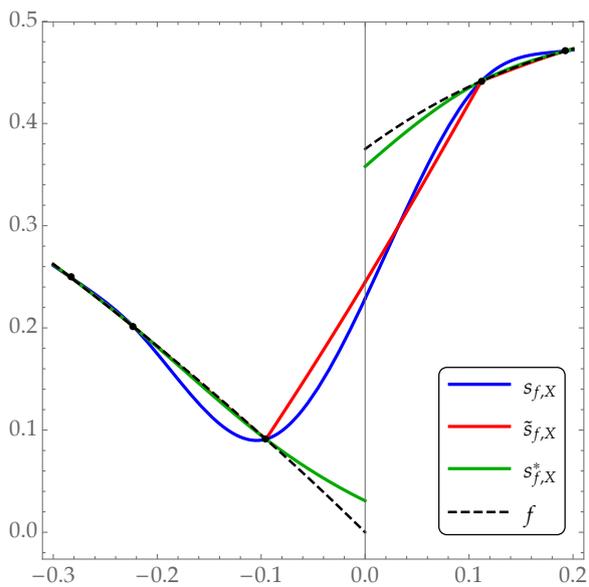
$$\zeta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sigma, & 0 \leq x. \end{cases}$$

Fijamos, en concreto, el valor  $\sigma = 2$ . Se interpola  $f$  en un conjunto  $X$  de  $N = 16$  centros contenidos en el intervalo  $[-1, 1]$  que resultan de perturbar un conjunto de puntos equiespaciados. Como función básica escogemos la función de Wendland  $\phi_{3,1}$ , es decir,  $\phi(r) = \phi_{3,1}(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$ , que es 0-cdp. Resulta así el interpolante  $s_{f,X}^*$ .

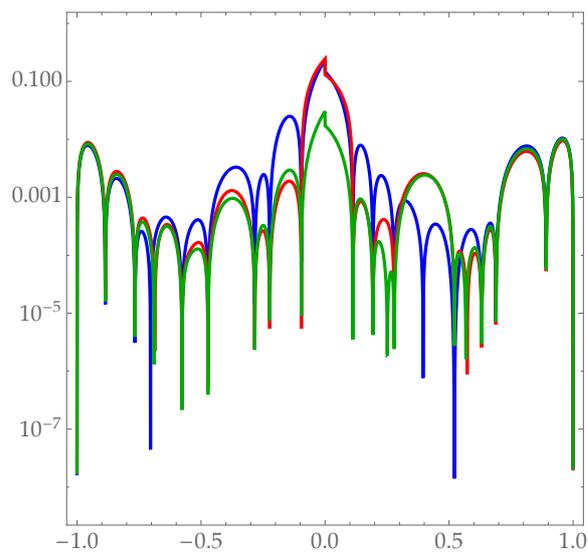
Para comparar, calculamos también el interpolante RBF  $s_{f,X}$ , así como el interpolante  $\tilde{s}_{f,X}$  resultante de aplicar el método adaptativo de la sección 2.3 con  $\Phi$  y  $\bar{\Phi}$  generadas, respectivamente, por  $\phi$  y por la función de Wendland  $\phi_{3,0}$ . Los tres interpolantes y la función  $f$  aparecen representados en la figura 3.3(a). El comportamiento de cada función en las proximidades de la discontinuidad se aprecia mejor en la figura 3.3(b). Los errores correspondientes están reflejados en la figura 3.3(c): son los grafos, en escala logarítmica, de las funciones  $|s_{f,X} - f|$ ,  $|\tilde{s}_{f,X} - f|$  y  $|s_{f,X}^* - f|$ . El grafo de la función auxiliar  $\zeta$  y el conjunto de centros  $\bar{X} = \{(x_j, \zeta(x_j)) \mid j = 1, \dots, N\}$  se muestran en la figura 3.3(d). Por último, la figura 3.3(e) recoge el grafo del interpolante RBF  $\tilde{s}_{f,\bar{X}}$  de



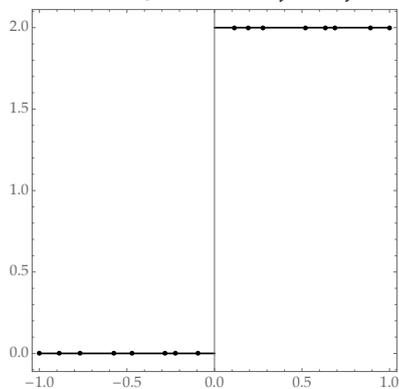
(a) Grafos de  $s_{f,X}$ ,  $\tilde{s}_{f,X}$ ,  $s_{f,X}^*$  y  $f$



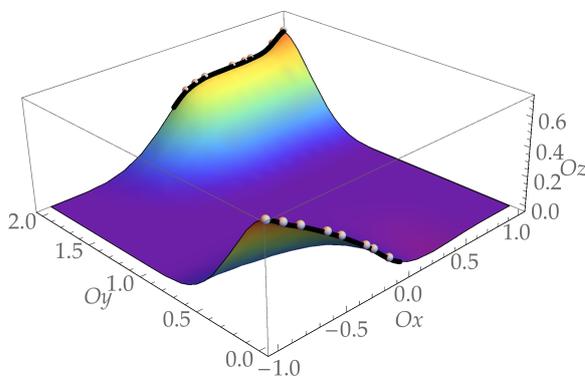
(b) Detalle de los grafos de  $s_{f,X}$ ,  $\tilde{s}_{f,X}$ ,  $s_{f,X}^*$  y  $f$



(c) Errores de interpolación



(d) Grafo de  $\zeta$  y conjunto  $\tilde{X}$



(e) Grafo de  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$  y puntos interpolados en  $\mathbb{R}^3$

Figura 3.3. Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 3.3.1.

$f|_X$  en  $\tilde{X}$  y los puntos que el grafo interpola en  $\mathbb{R}^3$ .

Del examen de los gráficos de la figura 3.3 se concluye que, fuera de las proximidades de la discontinuidad, la calidad del interpolante RBFFA  $s_{f,X}^*$  es tan buena como la de los otros interpolantes. Además, cerca de la discontinuidad,  $s_{f,X}^*$  reproduce bastante más fielmente la forma del grafo de  $f$ . Varios ensayos numéricos adicionales muestran que esto es así incluso en presencia de errores a la hora de fijar la posición de la discontinuidad.

**Ejemplo 3.3.2.** Se considera la función

$$f(x) = x \cos\left(\frac{4}{3}\pi x \lfloor x + 1.6 \rfloor\right),$$

ya utilizada en el ejemplo 2.3.4. Recordemos que, en el intervalo  $[-1, 1]$ , esta función es discontinua en  $v_1 = -0.6$  y  $v_2 = 0.4$ . Para aplicar la aproximación RBFFA, definimos la función auxiliar

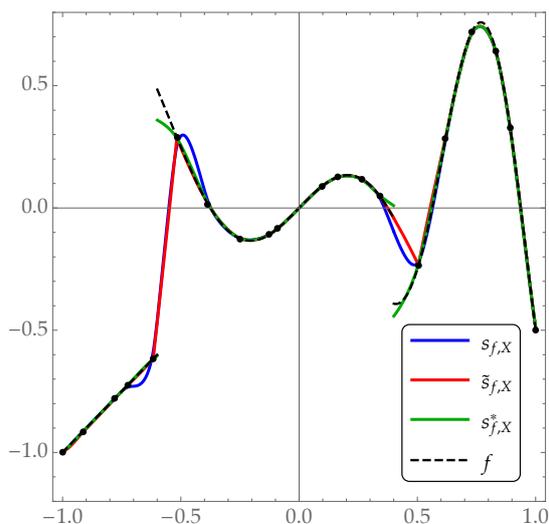
$$\zeta(x) = \begin{cases} 0, & x < -0.6, \\ 1, & -0.6 \leq x < 0.4, \\ 2, & 0.4 \leq x. \end{cases}$$

Tomamos asimismo la función básica  $\phi(r) = r^2 \log(r)$ , el parámetro de ajuste  $\lambda = 10^{-3}$  y el conjunto  $X$  constituido por  $N = 20$  centros resultantes de perturbar puntos equiespaciados del intervalo  $[-1, 1]$ . Resulta la función  $s_{f,X}^*$ , que comparamos con el aproximante RBF  $s_{f,X}$  y el aproximante  $\tilde{s}_{f,X}$  que procede del método adaptativo de la sección 2.3, modificado para ajustar en lugar de interpolar, con  $\Phi$  y  $\bar{\Phi}$  generadas, respectivamente, por  $\phi$  y por la función de Wendland  $\phi_{3,0}$ .

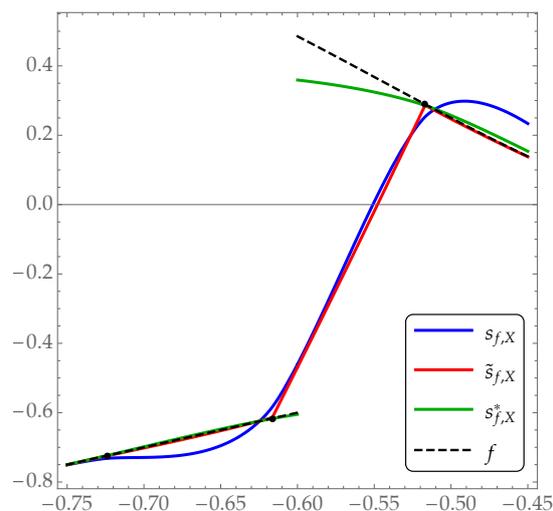
Los gráficos 3.4(a), (b) y (c) muestran la función  $f$  y los tres aproximantes. Los errores están representados en la figura 3.4(d). El grafo de la función auxiliar  $\zeta$  y el conjunto de centros  $\tilde{X} = \{(x_j, \zeta(x_j)) \mid j = 1, \dots, N\}$  aparecen en la figura 3.4(e). Finalmente, la figura 3.4(f) presenta el grafo del aproximante RBF  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$  de  $f|_X$  en  $\tilde{X}$  y los puntos que el grafo aproxima en  $\mathbb{R}^3$ .

Llegamos a las mismas conclusiones que en el ejemplo precedente: el aproximante RBFFA es el que mejor refleja la forma del grafo de la función  $f$  y tiene, fuera del entorno de las discontinuidades, una calidad semejante a la de los otros aproximantes.

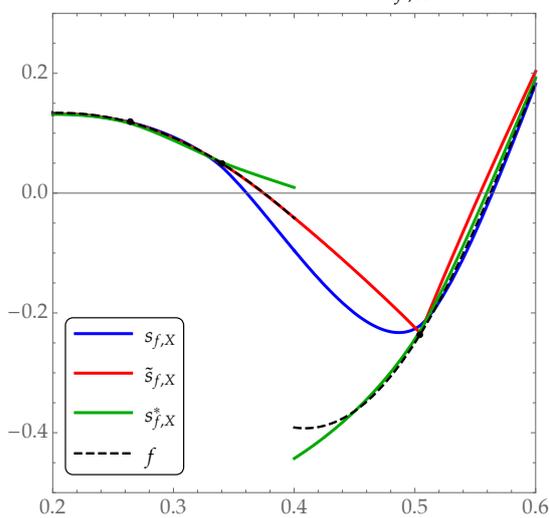
Volvamos ahora al parámetro  $\sigma$  que hay que fijar para definir la función auxiliar  $\zeta$ . Observemos que el grafo de  $\zeta$  queda dividido en dos o más componentes conexas. Han de estar lo suficientemente separadas como para que, al construir el aproximante intermedio  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$ , las RBF ligadas a los centros de  $\tilde{X}$  situados en una componente conexa



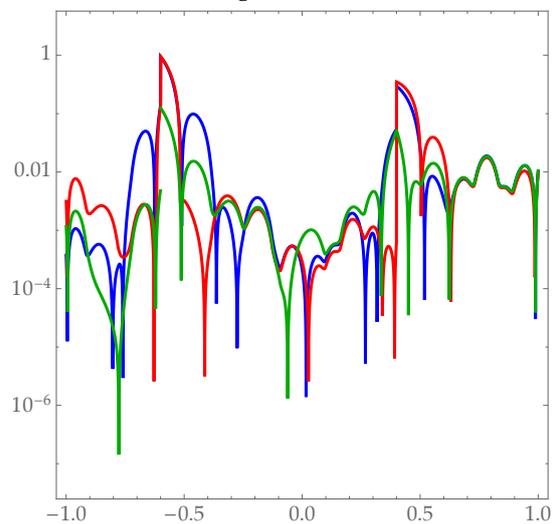
(a) Grafos de  $s_{f,X}$ ,  $\tilde{s}_{f,X}$ ,  $s_{f,X}^*$  y  $f$



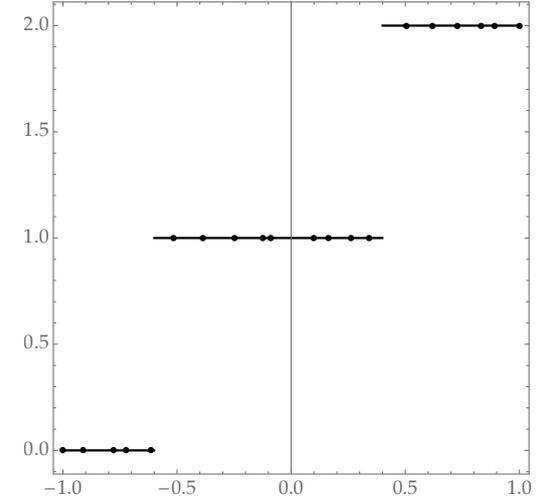
(b) Detalle de los grafos cerca de  $v_1 = -0.6$



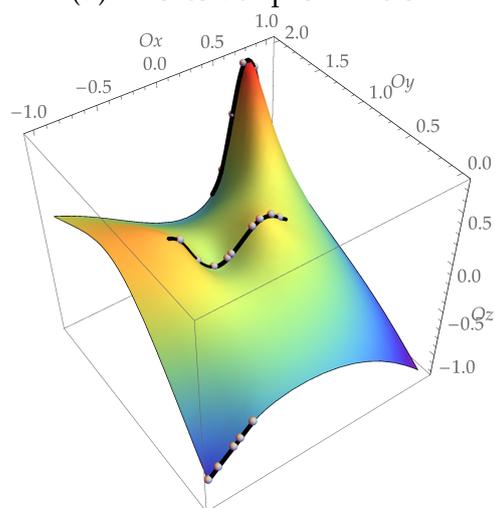
(c) Detalle de los grafos cerca de  $v_2 = 0.4$



(d) Errores de aproximación

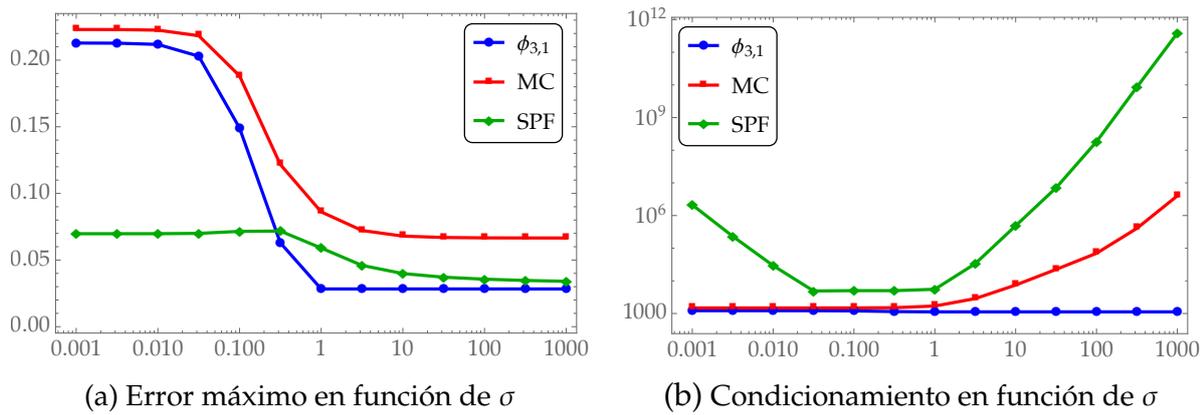


(e) Grafo de  $\zeta$  y conjunto  $\tilde{X}$



(f) Grafo de  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$  y puntos aproximados en  $\mathbb{R}^3$

Figura 3.4. Resultados de aproximación correspondientes al ejemplo 3.3.2.



**Figura 3.5.** Estimaciones del error máximo y del condicionamiento del sistema lineal asociados a interpolantes RBFFA en función del parámetro  $\sigma$  que define una función auxiliar escalonada. La interpretación de estas gráficas se ofrece en el ejemplo 3.3.3.

tengan una influencia casi nula en los valores de  $\tilde{s}_{f,\bar{X}}$  en las restantes componentes conexas. De este modo, al construir luego el aproximante  $s_{f,X}^*$ , se consigue que sean esencialmente los valores de  $f$  en centros de una componente conexa del grafo de  $f$  los que determinen el valor del aproximante en tal componente, evitando la distorsión que pueden introducir los datos localizados en otros arcos. El siguiente ejemplo ilustra estas consideraciones y proporciona algún criterio a tener en cuenta al elegir el valor de  $\sigma$

**Ejemplo 3.3.3.** Retomemos el ejemplo 3.3.1. Es evidente que se podría haber usado alguna otra función básica  $\phi$ , como en el ejemplo 3.3.2, y que se podría haber empleado otro valor de  $\sigma$  para definir la función auxiliar  $\zeta$ . La figura 3.5 ilustra qué hubiera sucedido al variar  $\phi$  y  $\sigma$ . Se muestra, en primer lugar, una estimación  $\|s_{f,X}^* - f\|_{\infty,Y}$  del error máximo de interpolación, obtenida como sigue:

$$\|s_{f,X}^* - f\|_{\infty,Y} = \max_{y \in Y} |s_{f,X}^*(y) - f(y)|,$$

donde  $Y$  es un conjunto de 200 puntos equiespaciados del intervalo  $[-1, 1]$ . Se ha calculado el interpolante  $s_{f,X}^*$  para las siguientes funciones básicas: la función de Wendland  $\phi_{3,1}$ , que es la usada en el ejemplo 3.3.1, la multicuadrática  $\phi(r) = \sqrt{r^2 + 0.05^2}$  y el spline de placa fina  $\phi(r) = r^2 \log(r)$ . A las dos últimas se hace referencia con las siglas MC y SPF en la figura 3.5. También se ha hecho variar el parámetro  $\sigma$ , cambiando, por tanto, de función auxiliar. El gráfico izquierdo de la figura 3.5 presenta el error máximo en función de  $\sigma$  para los interpolantes correspondientes a cada función básica.

Para valores pequeños de  $\sigma$ , el error máximo es grande, del orden de la mitad del salto de  $f$  en el punto de discontinuidad. Es lo que cabe esperar, pues los centros de

$\tilde{X}$  asociados a un lado y otro de la discontinuidad no están suficientemente separados. A medida que  $\sigma$  aumenta, disminuye el error, hasta estabilizarse. Cualquier mejora ulterior requeriría de más puntos de interpolación.

Queda claro, pues, que  $\sigma$  no puede ser demasiado pequeño. Ahora bien, tampoco puede ser demasiado grande, al menos si se usan RBF que no sean de soporte compacto. En efecto, el cálculo de cada interpolante comporta la resolución de un sistema lineal. El gráfico derecho de la figura 3.5 presenta unas estimaciones del condicionamiento de las matrices de tales sistemas lineales. Cuando  $\sigma$  aumenta también crece el condicionamiento si se emplean RBF que no sean de soporte compacto, perjudicando así la estabilidad de los cálculos.

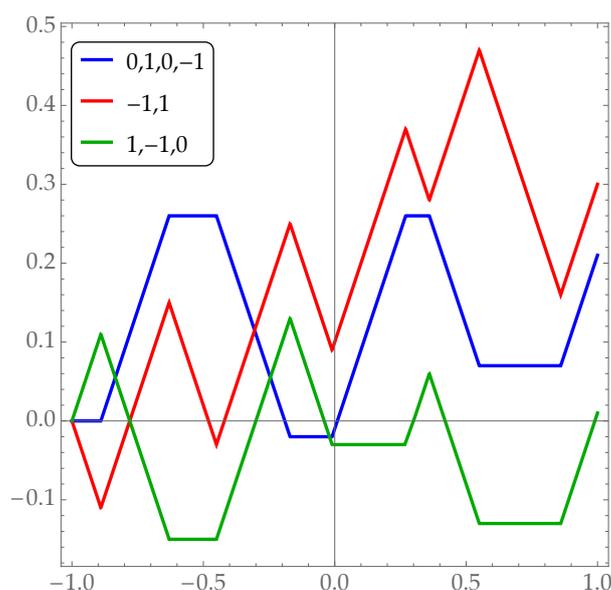
De todo lo anterior se concluye que lo más recomendable es utilizar funciones básicas de soporte compacto, porque así es más fácil fijar un valor razonable de  $\sigma$ .

### 3.3.2. Aproximación de funciones univariadas no diferenciables

Nos centramos ahora en la aproximación de una función continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cuya primera derivada presenta discontinuidades de salto en los puntos  $v_1, \dots, v_\kappa$  del intervalo  $(a, b)$ . Ya consideramos parcialmente este problema en la sección 2.4. Daremos aquí una respuesta mucho más satisfactoria usando la aproximación RBFFA. Veamos cómo.

Supongamos nuevamente que se conocen los valores de  $f$  en un conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset [a, b]$  y que se ha fijado, en su caso, el valor del parámetro de ajuste  $\lambda$ . Para poder hallar un aproximante RBFFA, falta construir una función auxiliar  $\zeta$ . Hemos de exigirle que tenga las mismas propiedades que la función  $f$ , para que así las transmita al aproximante  $s_{f, X}^*$ . Por tanto, la función  $\zeta$  ha de ser continua en  $[a, b]$ , mientras que  $\zeta'$  ha de presentar discontinuidades de salto finito en  $v_1, \dots, v_\kappa$ . Son muchas las funciones que se podrían escoger, pero, al igual que en la sección precedente, basta optar por una que sea simple, en concreto, una función lineal a trozos, cuyo grafo será, pues, una línea poligonal. Concretando, la función  $\zeta$  se define como sigue:

$$\zeta(x) = \begin{cases} p_0(x - a), & a \leq x < v_1, \\ p_1(x - v_1) + q_1, & v_1 \leq x < v_2, \\ p_2(x - v_2) + q_2, & v_2 \leq x < v_3, \\ p_3(x - v_3) + q_3, & v_3 \leq x < v_4, \\ \dots & \\ p_\kappa(x - v_\kappa) + q_\kappa, & v_\kappa \leq x \leq b. \end{cases} \quad (3.2)$$



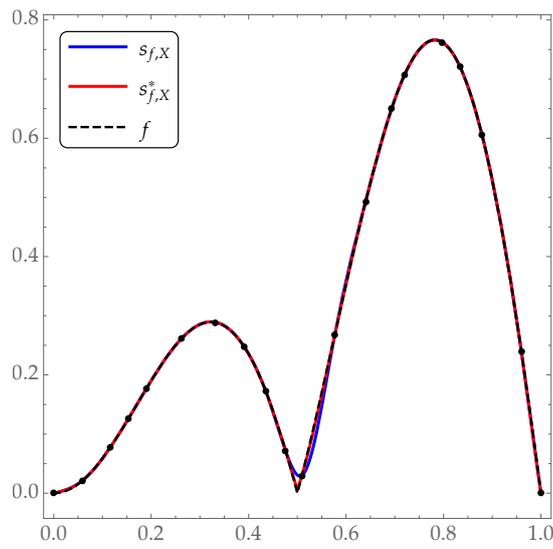
**Figura 3.6.** Posibles funciones auxiliares  $\zeta$  en el intervalo  $[-1, 1]$  para las discontinuidades  $v_1 = -0.89$ ,  $v_2 = -0.63$ ,  $v_3 = -0.45$ ,  $v_4 = -0.17$ ,  $v_5 = -0.01$ ,  $v_6 = 0.27$ ,  $v_7 = 0.36$ ,  $v_8 = 0.55$  y  $v_9 = 0.86$ . En cada función, se repiten cíclicamente las pendientes indicadas en la leyenda.

Las pendientes  $p_0, \dots, p_\kappa$  podrían tomar cualesquiera valores. No obstante, la experimentación numérica muestra que se obtienen resultados satisfactorios con  $-1$ ,  $0$  o  $1$ . Obviamente, además, hay que exigir que  $p_i \neq p_{i+1}$ , para  $i = 0, \dots, \kappa - 1$ . Los coeficientes  $q_i$  se escogen de modo que  $\zeta$  sea continua. Por consiguiente, para  $i = 0, \dots, \kappa - 1$ ,  $q_{i+1} = p_i(v_{i+1} - v_i) + q_i$ , con  $v_0 = a$  y  $q_0 = 0$ .

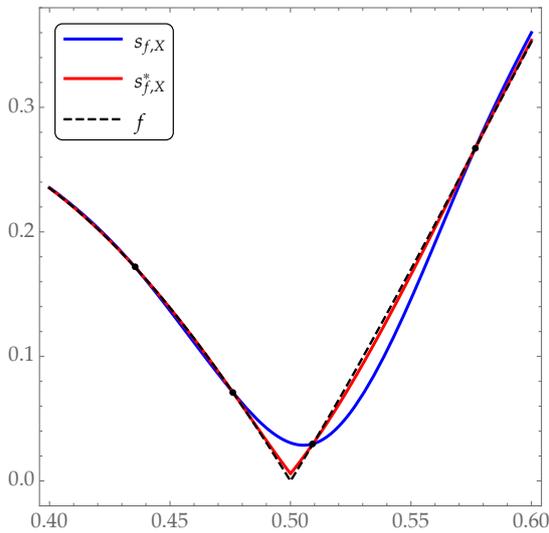
La figura 3.6 muestra alguna de las funciones auxiliares que es posible construir para un conjunto de ocho discontinuidades en el intervalo  $[-1, 1]$ . En las leyendas del gráfico se indican las pendientes de cada segmento de la línea poligonal, que se repiten cíclicamente.

Para mostrar la efectividad de la aproximación RBFFA, retomamos los ejemplos de la sección 2.4. Nótese que, en el método expuesto en tal sección, se necesitaba conocer el valor de la función  $f$  en los propios puntos de discontinuidad de  $f'$ , lo cual es una suposición muy poco realista. Esa restricción queda ahora completamente eliminada.

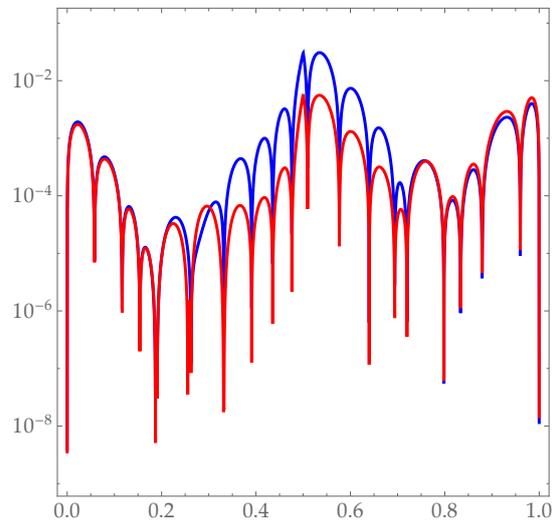
**Ejemplo 3.3.4** (Cf. ejemplo 2.4.1). Sea  $f(x) = |x \operatorname{sen}(2\pi x)|$ , función que consideramos definida en el intervalo  $[0, 1]$ . Su derivada tiene una discontinuidad de salto finito en  $x = 0.5$ . Interpolamos  $f$  en un conjunto  $X$  de  $N = 20$  centros de tal intervalo. Para



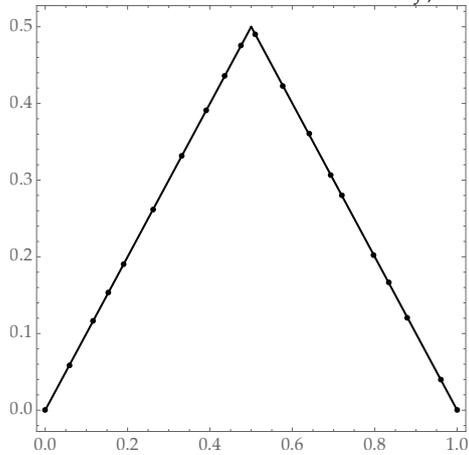
(a) Grafos de  $s_{f,X}$ ,  $s_{f,X}^*$  y  $f$



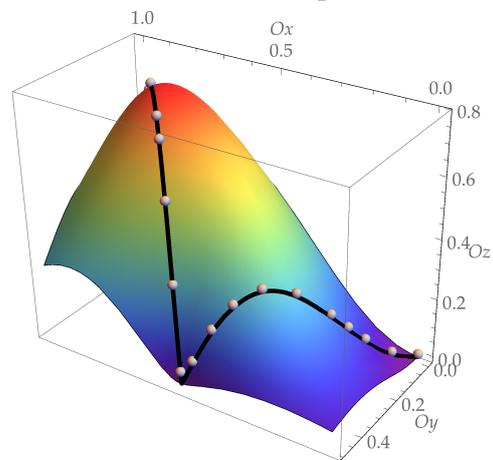
(b) Detalle de los grafos de  $s_{f,X}$ ,  $s_{f,X}^*$  y  $f$



(c) Errores de interpolación

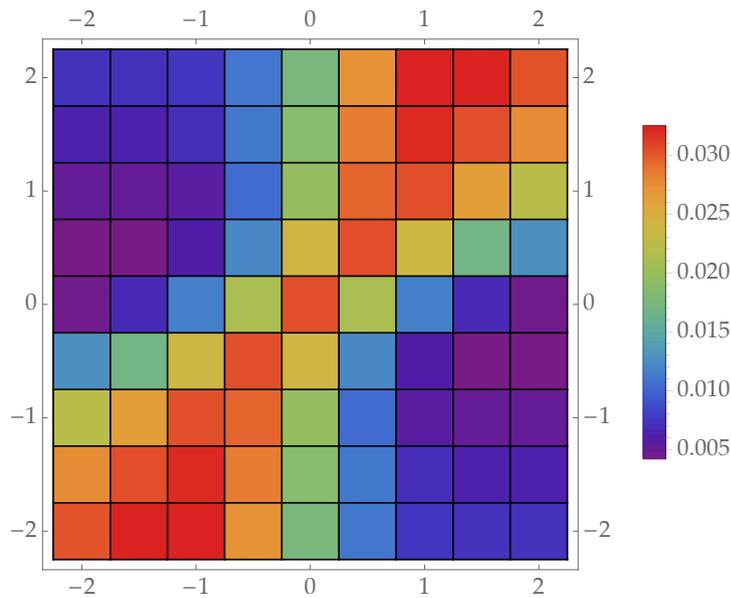


(d) Grafo de  $\zeta$  y conjunto  $\tilde{X}$



(e) Grafo de  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$  y puntos interpolados en  $\mathbb{R}^3$

**Figura 3.7.** Resultados de interpolación correspondientes al ejemplo 3.3.4.



**Figura 3.8.** Estimación del error máximo de interpolación para la función y centros del ejemplo 3.3.4 según el par de pendientes  $(p_0, p_1)$  con las que construir la función auxiliar  $\zeta$ .

construir la función auxiliar  $\zeta$ , elegimos las pendientes  $p_0 = 1$  y  $p_1 = -1$ . Por tanto,

$$\zeta(x) = \begin{cases} x, & x < 0.5, \\ 1 - x, & x \geq 0.5. \end{cases}$$

Asimismo la función básica  $\phi$  seleccionada es la función  $\phi_{3,1}$  de Wendland. Se obtiene el interpolante RBFFA  $s_{f,X}^*$  que representamos en la figura 3.7(a) junto con el interpolante RBF  $s_{f,X}$  a efectos de comparación. Se aprecia mejor en la figura 3.7(b) que  $s_{f,X}^*$  reproduce con bastante fidelidad la discontinuidad de  $f'$ .

Se ofrecen también los grafos de las funciones error  $|s_{f,X} - f|$  y  $|s_{f,X}^* - f|$  (cf. figura 3.7(c)), el grafo de  $\zeta$  y el conjunto de centros  $\tilde{X} = \{(x, \zeta(x)) \mid x \in X\}$  (cf. figura 3.7(d)) y el grafo del interpolante RBF  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$  de  $f|_X$  en  $\tilde{X}$  y los puntos que el grafo interpola en  $\mathbb{R}^3$  (cf. figura 3.7(e)).

La figura 3.8 muestra la influencia que tiene la elección de las pendientes para construir la función auxiliar  $\zeta$ . Se representa en tal figura una estimación del error máximo  $\|s_{f,X}^* - f\|_{\infty,Y}$ , definido en el ejemplo 3.3.3, para distintos pares de pendientes  $(p_0, p_1)$ , donde tanto  $p_0$  como  $p_1$  varían entre  $-2$  y  $2$ . Se observa, primero, que el gráfico es simétrico respecto de la diagonal, donde se sitúan, con alguna excepción, los mayores errores. Los mejores resultados se obtienen con  $(p_0, p_1) = (2, -0.5)$  o  $(-0.5, 2)$ ; el error es  $0.00421126$ . Para  $(p_0, p_1) = (1, -1)$ , que son las pendientes escogidas para efectuar los gráficos, el error es ligeramente mayor y vale  $0.00555374$ .

**Ejemplo 3.3.5** (Cf. ejemplo 2.4.2). Sea ahora  $f(x) = 0.5|x \sin(2\pi x)| + |x - 0.7|$ , función cuya primera derivada es discontinua en  $x = 0.5$  y  $x = 0.7$ . Se suponen conocidos los valores de  $f$ , afectados de ruido, en un conjunto  $X$  de  $N = 20$  centros del intervalo  $[0.3, 1]$ . En este caso, en vez de interpolar, se aplica la aproximación RBFFA con el parámetro de ajuste  $\lambda = 0.01$ . Se toma  $(p_0, p_1, p_2) = (1, 0, -1)$ , lo que lugar a la función auxiliar

$$\zeta(x) = \begin{cases} x - 0.3, & x < 0.5, \\ 0.2, & 0.5 \leq x < 0.7, \\ 0.9 - x, & x \geq 0.7. \end{cases}$$

La función básica  $\phi$  vuelve a ser la función de Wendland  $\phi_{3,1}$ .

Las figuras 3.9(a), (b) y (c) muestran el grafo del aproximante RBFFA  $s_{f,X}^*$  y los datos que ajusta, así como los grafos del aproximante RBF  $s_{f,X}$  y de la función  $f$ . Se observa claramente el error que está afectando a los datos. A pesar de ello, la función  $s_{f,X}^*$  aproxima  $f$  razonablemente bien y reproduce las discontinuidades de la derivada. Los restantes gráficos de la figura 3.9 presentan, como en el ejemplo anterior, los errores de aproximación, el grafo de  $\zeta$ , los centros de  $\tilde{X}$ , el grafo del interpolante RBF  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$  de  $f|_X$  en  $\tilde{X}$ , afectados por el ruido, y los puntos que el grafo ajusta en  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.3.3. Aproximación de funciones univariadas no regulares

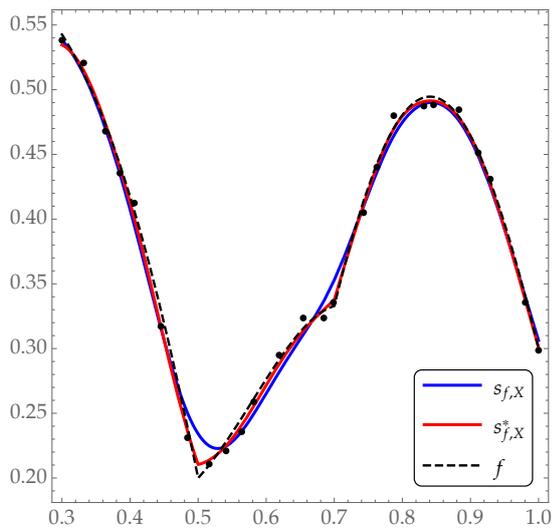
Como complemento de las dos subsecciones precedentes, consideramos ahora la aproximación RBFFA de funciones en el caso de que las discontinuidades de salto estén presentes tanto en la propia función como en la derivada primera. La clave reside, una vez más, en elegir una función auxiliar  $\zeta$  que tenga las mismas discontinuidades que la función, para lo cual basta con adaptar la expresión de  $\zeta$  dada en la relación (3.2).

Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , sean  $v_1, \dots, v_\kappa \in (a, b)$  los puntos en los que  $f$  o  $f'$  presentan discontinuidades. Para definir la función  $\zeta$  como en (3.2), se fijan primero las pendientes  $p_0, \dots, p_\kappa$  y un parámetro de salto  $\sigma > 0$ . Considerando entonces que  $v_0 = a$  y  $q_0 = 0$ , los coeficientes  $q_i$  se calculan del modo siguiente:

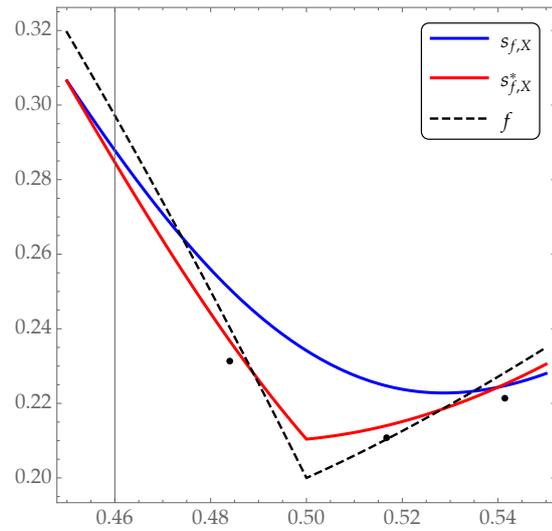
$$\forall i = 0, \dots, \kappa - 1, q_{i+1} = \begin{cases} p_i(v_{i+1} - v_i) + q_i, & \text{si } f \text{ es continua en } v_i, \\ p_i(v_{i+1} - v_i) + q_i + \sigma, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es evidente que, si  $p_0 = \dots = p_\kappa = 0$ , resulta la relación (3.1) y que, si  $\sigma = 0$ , entonces se obtiene (3.2), cubriendo así los casos vistos en las subsecciones anteriores. Nótese que en los puntos  $v_i$  de discontinuidad de  $f$  se puede tomar, si se quiere,  $p_i = p_{i+1}$ .

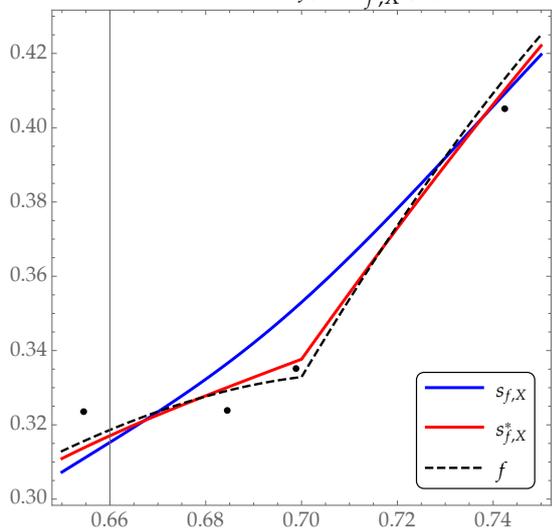
En cuanto a la función básica  $\phi$ , ya hemos comentado que los mejores resultados se



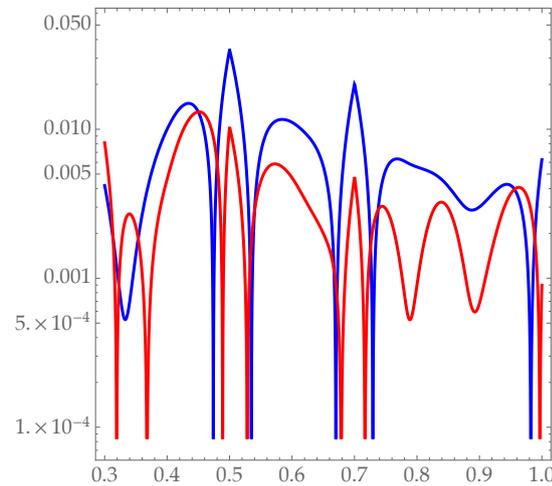
(a) Grafos de  $s_{f,X}$ ,  $s_{f,X}^*$  y  $f$



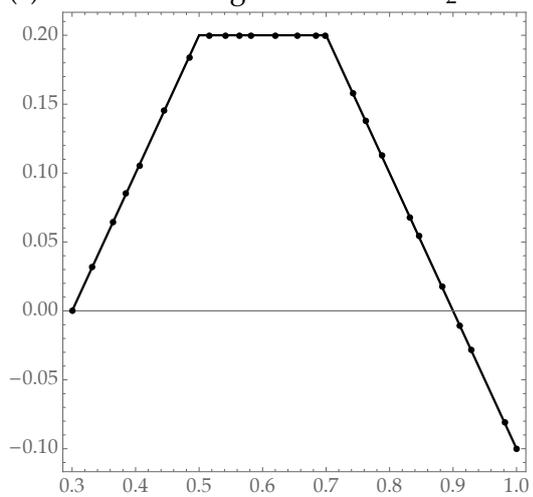
(b) Detalle de los grafos cerca de  $v_1 = 0.5$



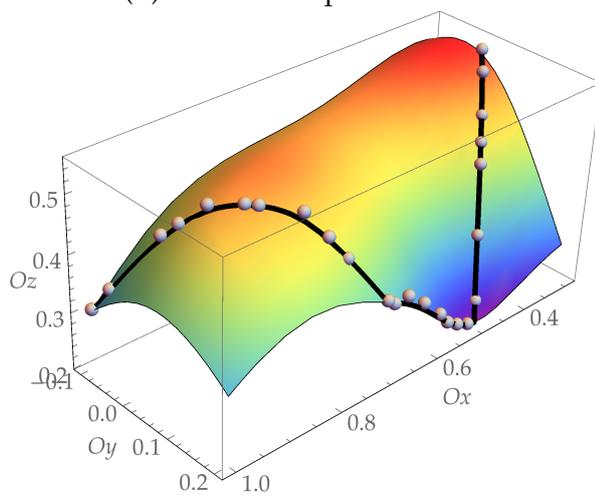
(c) Detalle de los grafos cerca de  $v_2 = 0.7$



(d) Errores de aproximación



(e) Grafo de  $\zeta$  y conjunto  $\tilde{X}$



(f) Grafo de  $\tilde{s}_{f,\tilde{X}}$  y puntos aproximados en  $\mathbb{R}^3$

**Figura 3.9.** Resultados de aproximación correspondientes al ejemplo 3.3.5.

Ejemplo	$\lambda$	$E_{\text{rms}}$	$E_{\text{m}}$	$E_{\text{r}}$
3.3.6	0	0.00113012	0.0108384	0.00111233
	0.02	0.0133652	0.0496902	0.0131548
3.3.7	0	0.000805156	0.00520838	0.00160252
	0.01	0.0156676	0.0523016	0.0311837
3.3.8	0	0.00429133	0.0409235	0.00598855
	0.005	0.0207091	0.0934043	0.0288995

**Cuadro 3.1.** Errores de aproximación correspondientes a los ejemplos 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.8.

obtienen generalmente con una RBF de soporte compacto. Además, si  $[0, \rho]$  es el soporte de  $\phi$ , entonces conviene que el parámetro de salto  $\sigma$  sea suficientemente grande como para que los discos de radio  $\rho$  centrados en puntos de una componente conexa del grafo de  $\zeta$  no contengan puntos de las restantes componentes conexas. Así pues,  $\sigma$  siempre ha de ser mayor o igual que  $\rho$ .

Se ha aplicado este método a las funciones que se indica más abajo en los correspondientes ejemplos. En todos los casos se ha efectuado una interpolación de datos exactos y un ajuste de datos afectados por un ruido cuya amplitud máxima es aproximadamente el 3% del rango de la función. Se ha usado siempre el mismo conjunto  $X$  de  $N = 30$  centros que procede de perturbar puntos equiespaciados en el dominio de  $f$ . La función básica  $\phi$  es la función de Wendland  $\phi_{3,1}$  tras un cambio de escala, esto es,  $\phi(r) = \phi_{3,1}(r/\rho)$  para algún  $\rho > 0$ . Se indica asimismo la función auxiliar  $\zeta$  empleada en cada ejemplo. Los grafos de los aproximantes obtenidos se presentan en la figura 3.10. Para poder juzgar mejor de forma visual la calidad de la aproximación, se acompaña el grafo del aproximante RBFFA  $s_{f,X}^*$  con los de la función  $f$  y el aproximante RBF  $s_{f,X}$ .

El cuadro 3.1 refleja el error asociado a cada aproximante  $s_{f,X}^*$ , calculado de tres modos distintos:

$$E_{\text{rms}} = \left( \frac{1}{200} \|s_{f,X}^* - f\|_{2,Y}^2 \right)^{1/2}, \quad E_{\text{m}} = \|s_{f,X}^* - f\|_{\infty,Y}, \quad E_{\text{r}} = \frac{\|s_{f,X}^* - f\|_{2,Y}}{\|f\|_{2,Y}},$$

donde  $Y$  es un conjunto de 200 puntos uniformemente distribuidos en el dominio de  $f$  y, para una función cualquiera  $g$ ,

$$\|g\|_{\infty,Y} = \max_{y \in Y} |g(y)| \quad \text{y} \quad \|g\|_{2,Y} = \left( \sum_{y \in Y} g(y)^2 \right)^{1/2}.$$

**Ejemplo 3.3.6.**

*Función:*  $f(x) = x \cos(\pi x \lfloor x + 1.6 \rfloor) + 2.5|x - 0.6|$ , definida en  $[0, 1]$ .

*Discontinuidades:* salto de  $f$  en 0.4, salto de  $f'$  en 0.6.

$$\text{Función auxiliar: } \zeta(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 0.4, \\ x + 1.6, & 0.4 \leq x < 0.6, \\ 2.8 - x, & 0.6 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

*Función básica:*  $\phi(r) = \phi_{3,1}(r/1.5)$ .

**Ejemplo 3.3.7.**

*Función:*  $f(x) = x \cos(\pi x \lfloor x + 1.6 \rfloor) + 3|x^2 - x + 0.16|$ , definida en  $[0, 1]$ .

*Discontinuidades:* salto de  $f$  en 0.4, salto de  $f'$  en 0.2 y 0.8.

$$\text{Función auxiliar: } \zeta(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 0.2, \\ 0.4 - x, & 0.2 \leq x < 0.4, \\ x + 2.1, & 0.4 \leq x < 0.8, \\ 3.7 - x, & 0.8 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

*Función básica:*  $\phi(r) = \phi_{3,1}(r/2)$ .

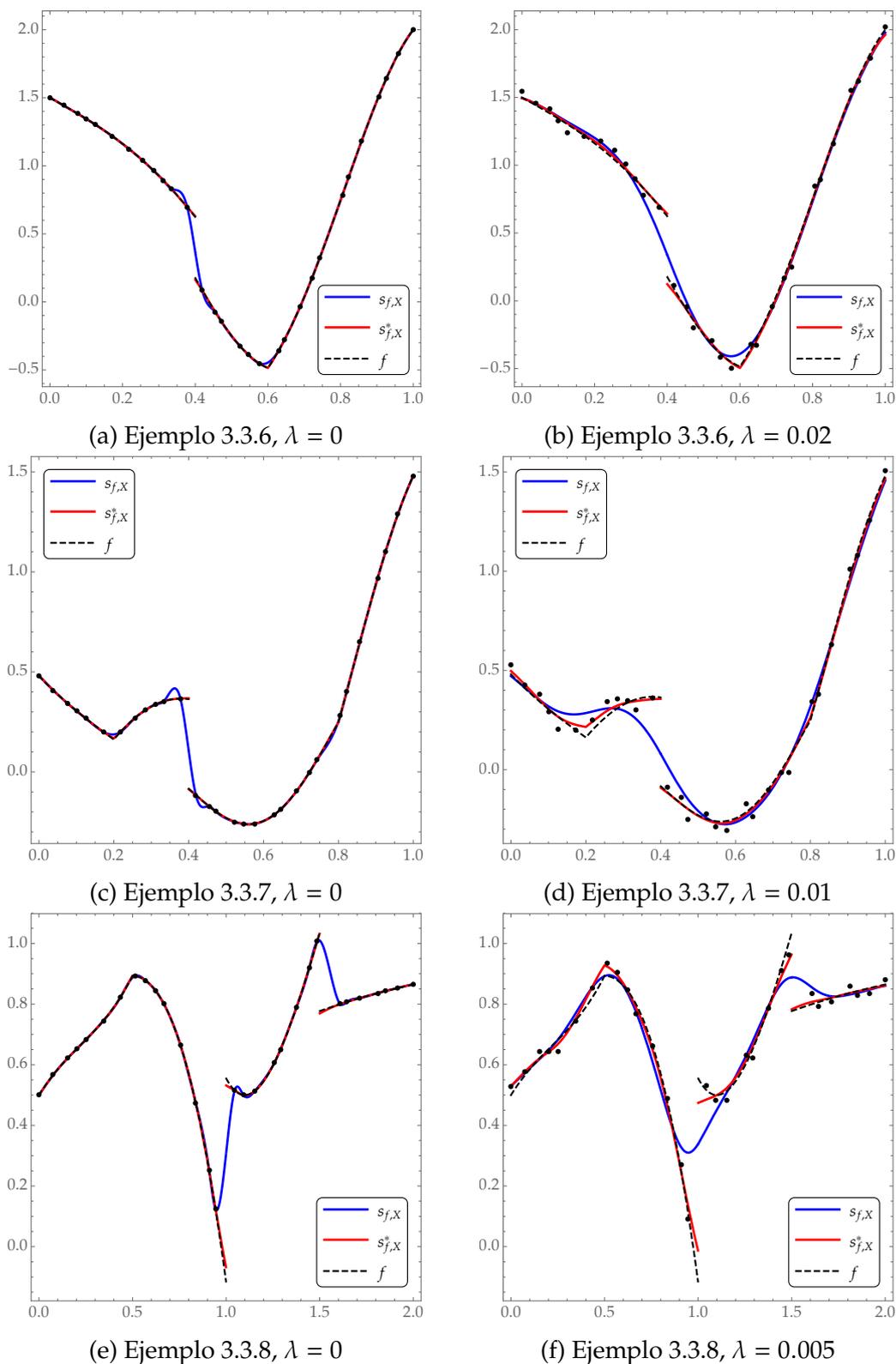
**Ejemplo 3.3.8.**

$$\text{Función: } f(x) = \begin{cases} 1.5 - \exp(-x) - 2.5x^2|x - 0.5|, & 0 \leq x < 1, \\ 15(x - 1.1)^2 \exp(-x) + 0.5, & 1 \leq x < 1.5, \\ 1 - \exp(-x), & 1.5 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

*Discontinuidades:* salto de  $f$  en 1 y 1.5, salto de  $f'$  en 0.5.

$$\text{Función auxiliar: } \zeta(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < 0.5, \\ x - 1, & 0.5 \leq x < 1, \\ 3, & 1 \leq x < 1.5, \\ 6, & 1.5 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

*Función básica:*  $\phi(r) = \phi_{3,1}(r/3)$ .



**Figura 3.10.** Resultados de aproximación correspondientes a los ejemplos 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.8. En todos los casos se representan los grafos del aproximante RBFFA  $s_{f,X}^*$  junto con los de la función  $f$  y el aproximante RBF  $s_{f,X}$ .

## Sección 3.4

**APROXIMACIÓN RBFFA DE SUPERFICIES NO REGULARES**

En esta última sección, aplicaremos el método RBFFA a la aproximación de funciones bivariadas no regulares. Adoptamos para ello un vocabulario más propio de las ciencias geofísicas, en el que se habla, más bien, de reconstrucción de superficies con fallas. Dado que es una cuestión de mucha mayor complejidad que la equivalente en el caso univariado, comenzamos introduciendo algunos conceptos previos. Asimismo, para enfatizar que el hecho de que se aproximan funciones definidas en  $\mathbb{R}^2$ , denotaremos los elementos de este espacio con letra negrita, esto es, en la forma  $\mathbf{x}$ .

**3.4.1. Nociones preliminares y planteamiento del problema**

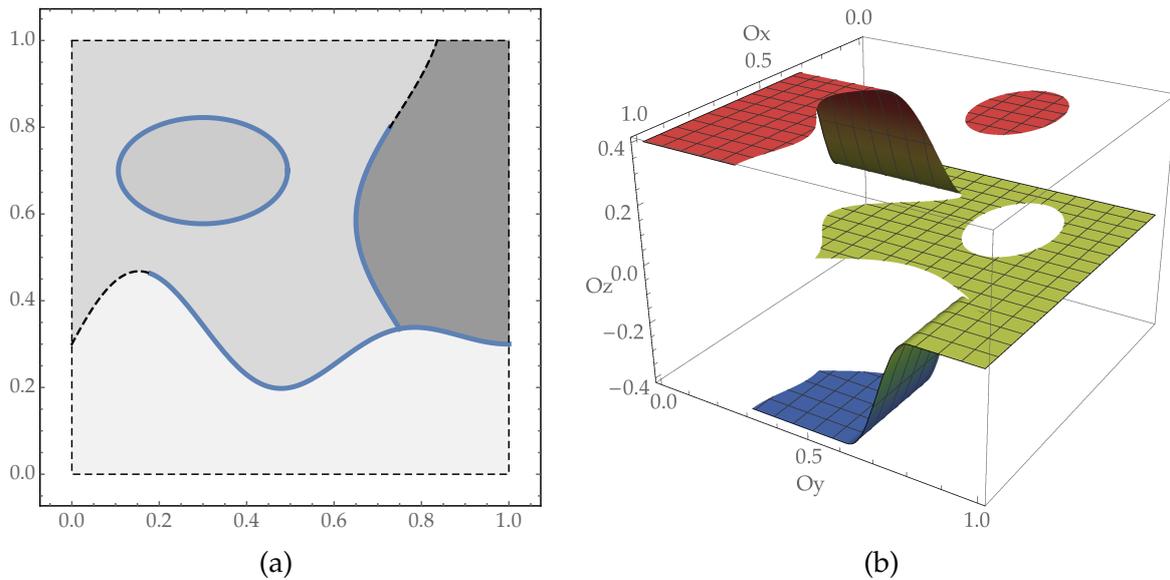
Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  de frontera lipschitziana. De acuerdo con Arcangéli y otros [3, Subsection IX-2.1], y con algunas simplificaciones, se dice que un subconjunto no vacío  $\mathcal{F}$  de  $\overline{\Omega}$  es un *conjunto de discontinuidad* si existe una familia finita  $\{R_1, \dots, R_\kappa\}$  de conjuntos abiertos, disjuntos dos a dos, tal que  $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{\kappa} \overline{R}_i$  y  $\mathcal{F} \subset \partial R$ , donde  $R = \bigcup_{i=1}^{\kappa} R_i$ . Los extremos de los arcos contenidos en  $\mathcal{F}$  se excluyen de  $\mathcal{F}$ , a menos que pertenezcan a  $\partial\Omega$ . En la figura 3.11(a) se proporciona un ejemplo de conjunto de discontinuidad.

Sea asimismo  $\Omega' = \Omega \setminus \overline{\mathcal{F}}$  y, para cada entero no negativo  $k$ , sea

$$C_{\mathcal{F}}^k(\Omega') = \{v \in C^k(\Omega') \mid \forall i = 1, \dots, \kappa, v|_{R_i} \in C^k(\overline{R}_i)\}.$$

Una función  $f \in C_{\mathcal{F}}^k(\Omega')$  puede presentar discontinuidades de salto en puntos de  $\mathcal{F}$ . Dado que  $f$  pertenece a cualquier  $C^k(\overline{R}_i)$ , la función  $f$  tiene una extensión continua a  $\mathcal{F}$  desde cada lado de  $\mathcal{F}$ . Ahora bien, como  $f \in C^k(\Omega')$ , tales extensiones no son necesariamente idénticas, es decir, si  $\mathbf{x} \in \mathcal{F} \cap \partial R_i \cap \partial R_j$ , podría ocurrir que  $f|_{R_i}(\mathbf{x}) \neq f|_{R_j}(\mathbf{x})$ . Si  $f$  pertenece a  $C_{\mathcal{F}}^k(\Omega')$  y es discontinua en cada punto de  $\mathcal{F}$ , entonces el grafo de  $f$  es lo que denominamos una *superficie explícita con fallas verticales* y  $\mathcal{F}$  es entonces la *línea de falla* de la superficie. La figura 3.11(b) muestra una superficie explícita que presenta fallas verticales sobre el conjunto de discontinuidad representado en la figura 3.11(a).

Razonando análogamente se comprende que, si  $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C_{\mathcal{F}}^k(\Omega')$ , entonces  $\nabla f$ , el gradiente de  $f$ , puede ser una función vectorial discontinua en algún punto de  $\mathcal{F}$ . Si realmente lo fuese en todo punto de  $\mathcal{F}$ , diríamos entonces que el grafo de  $f$  es una



**Figura 3.11.** (a) Ejemplo de un conjunto de discontinuidad  $\mathcal{F}$  (línea continua) en el cuadrado  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Hay cuatro conjuntos  $R_i$ , marcados con diferentes niveles de color gris. El conjunto  $\partial R$  está formado por todas las líneas tanto de trazo continuo como discontinuo. (b) Grafo de una función en  $C_{\mathcal{F}}^2(\Omega')$ .

superficie con *fallas oblicuas*. Evidentemente, podría darse el caso de una función de  $C_{\mathcal{F}}^k(\Omega')$  que presentara fallas verticales en una parte de  $\mathcal{F}$  y fallas oblicuas en el resto.

Con las notaciones que acabamos de introducir, el problema de aproximación de superficies con fallas a partir de datos dispersos se puede enunciar del modo siguiente:

Dado un vector  $f|_X = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T \in \mathbb{R}^N$  de valores de una función  $f \in C_{\mathcal{F}}^k(\Omega')$  en un conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \overline{\Omega} \setminus \mathcal{F}$ , encontrar una función  $s_{f,X}^* \in C_{\mathcal{F}}^k(\Omega')$  tal que  $s_{f,X}^*|_X = f|_X$ , si se quiere interpolar los datos, o bien  $s_{f,X}^*|_X \approx f|_X$ , si se pretende más bien aproximarlos.

Por lo general, se desconoce inicialmente la ubicación del conjunto  $\mathcal{F}$ . Por eso, la resolución de este problema es normalmente un proceso que comporta dos etapas: primero se aplica un algoritmo de detección para localizar  $\mathcal{F}$ , luego se reconstruye propiamente la función  $f$  mediante algún método de aproximación. Existen en la literatura diversos trabajos que versan sobre una de estas fases. Con respecto a la detección de fallas cabe citar, por ejemplo, los artículos de Gutzmer e Iske [33], López de Silanes y otros [45], y Jung y otros. [41]. En cuanto a la segunda etapa, se pueden consultar las obras de Arcangéli y otros [3, Chapter IX], Bozzini y Rossini [12], Gout y otros [31], Driscoll y Heryudono [19], así como López de Silanes y otros [44]. De ambos pasos tratan los artículos de Allasia y otros [1], Bozzini y otros [9], y Crampton y Mason [16].

### 3.4.2. Método de aproximación

Para resolver al problema de aproximación de superficies con fallas, se propone utilizar el método RBFFA, que vamos a reescribir y explicitar algo más:

*Entrada:* El conjunto  $X$  de centros, los valores  $f|_X$ , una función auxiliar  $\zeta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y el parámetro de ajuste  $\lambda$ .

*Paso 1.* Se escoge una función básica  $\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  de soporte compacto y definida positiva en  $\mathbb{R}^3$ .

*Paso 2.* Se fija un número  $\rho > 0$  y se define la función básica  $\phi_\rho(\cdot) = \phi(\cdot/\rho)$ , cuyo soporte es  $[0, \rho]$ .

*Paso 3.* Se construye el conjunto de centros  $\tilde{X} = \{(\mathbf{x}_1, z_1), \dots, (\mathbf{x}_N, z_N)\}$ , donde, para  $i = 1, \dots, N$ ,  $z_i = \zeta(\mathbf{x}_i)$ .

*Paso 4.* Se halla la matriz de interpolación

$$A_{\Phi_\rho, \tilde{X}} = \left( \Phi_\rho(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \right)_{1 \leq i, j \leq N},$$

con  $\Phi_\rho(\cdot) = \phi_\rho(\|\cdot\|_2)$ .

*Paso 5.* Se resuelve el sistema lineal  $(A_{\Phi_\rho, \tilde{X}} + \lambda I) \cdot \beta = f|_X$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden  $N$ .

*Paso 6.* Se define  $\tilde{s}_{f, \tilde{X}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  del modo siguiente:

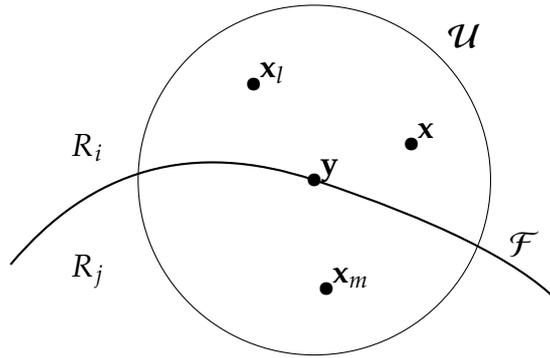
$$\tilde{s}_{f, \tilde{X}}(\mathbf{x}, z) = \sum_{i=1}^N \beta_i \Phi_\rho(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|).$$

*Paso 7.* Se define  $s_{f, X}^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como  $s_{f, X}^*(\mathbf{x}) = \tilde{s}_{f, \tilde{X}}(\mathbf{x}, \zeta(\mathbf{x}))$ .

*Salida:* El aproximante  $s_{f, X}^*$ .

En esta descripción de la aproximación RBFFA se ha optado directamente por tomar funciones básicas de soporte compacto, pues son las que mejor se adaptan a las características de este método. Hemos visto asimismo en los ejemplos de la subsección 3.3.3 que era preciso realizar un cambio de escala en la función básica seleccionada para que los resultados fueran satisfactorios. Cuando se aplica el método RBFFA para la reconstrucción de superficies, esa necesidad de escalamiento es todavía más perentoria. De ahí que se haya explicitado en el algoritmo la selección de un número  $\rho$  que ejerce de factor de escala y que determina el radio del soporte de la RBF  $\Phi_\rho$  realmente utilizada.

Supongamos, por otra parte, que se desea obtener un aproximante de clase  $C^k$  fuera de la línea de falla, esto es, que  $s_{f, X}^*$  pertenezca a  $C_{\mathcal{F}}^k(\Omega')$ . Con tal fin, en vista de los



**Figura 3.12.** Esquema para explicar la condición (3.4).

pasos 2, 6 y 7 del método RBFFA, es suficiente imponer que

$$\Phi(\cdot) \in C^k(\mathbb{R}^3) \quad \text{y} \quad \zeta \in C^k_{\mathcal{F}}(\Omega'). \quad (3.3)$$

Por ejemplo, si  $\Omega$  y  $\mathcal{F}$  fueran los conjuntos dibujados en la figura 3.11(a), podríamos tomar  $\zeta$  como la función representada en la figura 3.11(b) al objeto de obtener aproximantes de clase  $C^2$  de una superficie con fallas verticales.

Hagamos ahora algunas consideraciones que afectan esencialmente al caso de superficies con fallas verticales. La hipótesis sobre  $\zeta$  dada en (3.3) no garantiza, sin embargo, que el aproximante  $s_{f,X}^*$  tenga un comportamiento aceptable cerca del conjunto de discontinuidad. De hecho, se requiere una condición adicional que liga el parámetro  $\rho$  con la función  $\zeta$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{para todo } \mathbf{y} \in \mathcal{F} \text{ no situado en un entorno de un extremo de } \mathcal{F} \text{ que} \\ \text{pertenezca a } \Omega, \text{ existe un entorno } \mathcal{U} \text{ de } \mathbf{y} \text{ tal que, si } \mathbf{y} \in \partial R_i \cap \partial R_j, \\ \text{con } i \neq j, \text{ entonces} \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

$$\forall \mathbf{a} \in R_i \cap \mathcal{U}, \forall \mathbf{b} \in R_j \cap \mathcal{U}, \quad |\zeta|_{R_i}(\mathbf{a}) - \zeta|_{R_j}(\mathbf{b})| \geq \rho.$$

A grandes rasgos, lo que esta condición impone es que, cerca de la línea de falla, los valores de  $\zeta$  en lados opuestos de  $\mathcal{F}$  deberían diferir, al menos, en  $\rho$  unidades. Demos una explicación intuitiva. Supongamos que se quiere evaluar el aproximante en un punto  $\mathbf{x}$  cercano a un punto  $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$  el cual, a su vez, está suficientemente lejos de cualquier posible extremo de  $\mathcal{F}$ . Para reproducir el comportamiento de  $f$ , el aproximante  $s_{f,X}^*$  debe ser discontinuo en  $\mathcal{F}$ . Así pues, el valor de  $s_{f,X}^*$  en  $\mathbf{x}$  debería depender tan sólo de los centros de  $X$  que estén en el mismo lado de  $\mathcal{F}$  que  $\mathbf{x}$ . En la situación representada en la figura 3.12,  $s_{f,X}^*(\mathbf{x})$  puede depender del centro  $\mathbf{x}_l$ , porque tanto  $\mathbf{x}$  como  $\mathbf{x}_l$  están en el mismo lado. Ahora bien, veamos qué sucede con el centro  $\mathbf{x}_m$ . En virtud de (3.4), con

las notaciones introducidas en la descripción del método RBFFA, se tiene:

$$\|(\mathbf{x}, z) - (\mathbf{x}_m, z_m)\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m, z - z_m)\| \geq |z - z_m| = |\zeta(\mathbf{x}) - \zeta(\mathbf{x}_m)| = |\zeta|_{R_i}(\mathbf{x}) - \zeta|_{R_j}(\mathbf{x}_m)| \geq \rho,$$

lo cual implica que  $\Phi_\rho((\mathbf{x}, z) - (\mathbf{x}_m, z_m)) = 0$ , pues el soporte de  $\Phi_\rho$  tiene radio  $\rho$ . En consecuencia, de acuerdo con los pasos 6 y 7 del método, el centro  $\mathbf{x}_m$  no contribuye al valor de  $s_{f,X}(\mathbf{x})$ , como cabía esperar. Observemos que este razonamiento muestra al mismo tiempo que los elementos  $(l, m)$  y  $(m, l)$  de la matriz de interpolación  $A_{\Phi_\rho, \bar{X}}$  son ambos nulos.

Las cosas son un tanto distintas en las cercanías de un extremo de  $\mathcal{F}$  contenido en  $\Omega$ . Se puede comprobar que  $\zeta$  (de hecho, cualquier función en  $C^k_{\mathcal{F}}(\Omega')$ ) es continua en tales puntos (cf. [3, Remark IX-2.1]). Por tanto, no es posible lograr, como antes, una separación neta de los puntos de interpolación situados en lados opuestos de  $\mathcal{F}$ . Este hecho, no obstante, no plantea problemas en la práctica, ya que, debido precisamente a la continuidad de  $\zeta$  en los extremos, los valores de esta función en ambos lados no son todavía tan distintos.

Si no se satisface (3.4), los valores conocidos de  $f$  en un lado de la línea de falla influyen fuertemente en los valores que proporciona el aproximante en el otro lado, dando lugar a abombamientos y oscilaciones del grafo de  $s^*_{f,X}$  cerca de  $\mathcal{F}$ . Como ya hemos señalado en otro momento, ésta es la razón por la que, en el marco de los métodos RBF, la aproximación no se puede realizar satisfactoriamente cuando se usan funciones radiales con soporte global o incluso con funciones de soporte compacto si no se tiene cuidado con la localización de las líneas de falla.

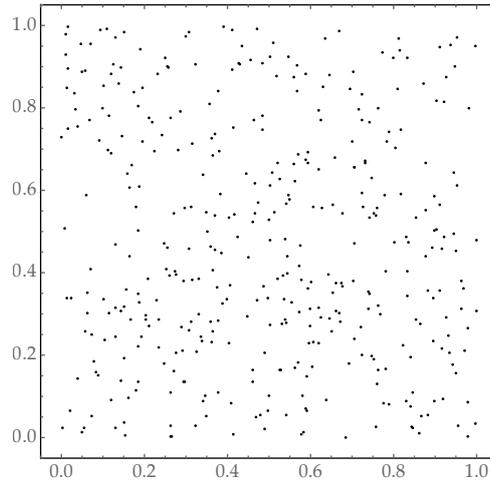
En resumen, el método RBFFA permite resolver adecuadamente el problema de aproximación planteado en la subsección precedente, siempre y cuando se disponga de una función auxiliar adecuada. En particular, en el caso de fallas verticales, la función  $\zeta$  debería satisfacer las condiciones (3.3) y (3.4). Para las fallas oblicuas, esta última condición no es relevante, pues las discontinuidades en el gradiente del aproximante son más bien inducidas por las de la función auxiliar.

---

### 3.4.3. Ejemplos numéricos

Se ha aplicado el método RBFFA para interpolar varias superficies explícitas con fallas verticales u oblicuas. Son comunes a todos los casos:

- el abierto  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ;
- el conjunto de centros  $X$ , representado en la figura 3.13; contiene 400 puntos aleatoriamente distribuidos en  $\bar{\Omega}$ ;



**Figura 3.13.** Conjunto  $X$  de centros usado en todos los ejemplos.

- la función básica  $\phi(r) = (1 - r)_+^4(4r + 1)$ , esto es, la función de Wendland  $\phi_{3,1}$ ;
- el parámetro de ajuste  $\lambda = 0$  (es nulo, ya que se interpola).

Para cada superficie, se detallan más abajo la correspondiente función  $f$  de la que es el grafo, la línea de falla  $\mathcal{F}$  y la función auxiliar  $\zeta$ . El parámetro  $\rho$  se indica en el cuadro 3.2. Nótese, por un lado, que  $\Phi_\rho(\cdot) = \phi(\|\cdot\|_2/\rho)$ , que es la RBF utilizada, pertenece a  $C^2(\mathbb{R}^3)$ . Por otro lado, se construye siempre la función auxiliar  $\zeta$  de modo que pertenezca a  $C^2_{\mathcal{F}}(\Omega')$ . Por tanto, el aproximante  $s_{f,X}^*$  dado por el método RBFFA también pertenece a tal espacio funcional. Las figuras 3.14–3.18 muestran los grafos de  $f$ ,  $s_{f,X}^*$  y  $\zeta$  que corresponden a cada ejemplo. Se proporcionan asimismo las curvas de nivel de  $f$  y  $s_{f,X}^*$ , que también muestran el conjunto  $\mathcal{F}$ . Cabe mencionar que las funciones de los ejemplos 3.4.2 y 3.4.3 fueron introducidas en [3, Section IX-6], mientras que la del ejemplo 3.4.1 es una variante de una función dada por Gutzmer e Iske [33].

Para medir la calidad de la aproximación, se han calculado los errores en media cuadrática, máximo y relativo dados por

$$E_{\text{rms}} = \left( \frac{1}{1600} \|s_{f,X}^* - f\|_{2,Y}^2 \right)^{1/2}, \quad E_{\text{m}} = \|s_{f,X}^* - f\|_{\infty,Y}, \quad E_{\text{r}} = \frac{\|s_{f,X}^* - f\|_{2,Y}}{\|f\|_{2,Y}},$$

donde  $Y$  es un conjunto de 1600 puntos uniformemente distribuidos en  $\bar{\Omega}$  y, para una función cualquiera  $g$ ,

$$\|g\|_{\infty,Y} = \max_{y \in Y} |g(y)| \quad \text{y} \quad \|g\|_{2,Y} = \left( \sum_{y \in Y} g(y)^2 \right)^{1/2}.$$

El cuadro 3.2 recoge estos errores. Es interesante destacar que los errores relativos

Ejemplo	$\rho$	$E_{\text{rms}}$	$E_m$	$E_r$
3.4.1	2	0.0116365	0.136864	0.00471453
3.4.2	2	0.0014977	0.0189778	0.00624966
3.4.3	0.8	0.00303705	0.0383191	0.00759886
3.4.4	3	0.0011854	0.02192	0.00310228
3.4.5	5	0.000670274	0.00673547	0.00300504

**Cuadro 3.2.** Parámetro  $\rho$  y errores de interpolación correspondientes a los ejemplos 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.4.4 y 3.4.5.

obtenidos en los ejemplos 3.4.2 y 3.4.3 son incluso menores que los errores hallados en [3], donde se interpolaban 1600 puntos.

Concluamos con algunas consideraciones sobre la función auxiliar  $\zeta$ . En estos ejemplos, en aras de la simplicidad,  $\zeta$  es esencialmente una función constante a trozos que toma valores de la forma  $\mu\rho$ , con  $\mu \in \mathbb{Z}$ , a fin de satisfacer la condición (3.4). El grafo de  $\zeta$  es, en su mayoría, la unión de piezas planas. Ocurre, sin embargo, que, cerca de los extremos de  $\mathcal{F}$  que pertenecen a  $\Omega$ , se han de unir suavemente dos o más de estas piezas. Para ello se usan dos funciones que simulan rampas ascendentes y descendentes. Se trata de las funciones  $U_{a_1, a_2}$  y  $D_{a_1, a_2}$ , con  $a_1 < a_2$ , definidas por

$$U_{a_1, a_2}(t) = \begin{cases} 0, & t < a_1, \\ H_1\left(\frac{t - a_1}{a_2 - a_1}\right), & a_1 < t \leq a_2, \\ 1, & t > a_2, \end{cases} \quad y \quad D_{a_1, a_2}(t) = \begin{cases} 1, & t < a_1, \\ H_0\left(\frac{t - a_1}{a_2 - a_1}\right), & a_1 < t \leq a_2, \\ 0, & t > a_2. \end{cases}$$

En estas relaciones se denotan por  $H_0$  y  $H_1$  los polinomios cuánticos que satisfacen las siguientes condiciones de interpolación de Hermite:

$$\forall i = 0, 1, \forall \ell = 1, 2, \quad H_i(j) = \delta_{ij} \quad \text{and} \quad H_i^{(\ell)}(j) = 0,$$

esto es,  $H_0(t) = (1 + 3t + 6t^2)(1 - t)^3$  y  $H_1(t) = t^3(10 - 15t + 6t^2)$ . Ambas funciones pertenecen a  $C^2(\mathbb{R})$ .

#### Ejemplo 3.4.1.

Función  $f$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 + \lfloor 3.5\sqrt{x^2 + y^2} \rfloor) \sin \pi x \sin \pi y, & (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 < 0.16, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Conjunto de discontinuidad:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = & \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 = 0.16 \} \\ & \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 16/49, (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.16 \} \\ & \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 36/49, (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.16 \}.\end{aligned}$$

Función auxiliar:

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} \rho, & x^2 + y^2 \leq 16/49 \text{ y } (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.16, \\ -\rho, & 16/49 < x^2 + y^2 \leq 36/49 \text{ y } (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.16, \\ \rho, & x^2 + y^2 > 36/49 \text{ y } (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.16, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $\rho = 2$ .

### Ejemplo 3.4.2.

Función  $f$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.5 \cos^4 g(x, y), & g(x, y) \leq \pi/2, y > \psi(x), \\ 0.25(1 - x)^2 \cos^2 g(x, y), & g(x, y) \leq \pi/2, y \leq \psi(x), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $\psi(x) = 0.5 + 0.2 \sin 5\pi x/3$  y  $g(x, y) = (\pi/1.3)((x - 0.2)^2 + (y - 0.7)^2)$ .

Conjunto de discontinuidad:

$$\mathcal{F} = \{ (x, \psi(x)) \mid 0 \leq x < 0.9 \}.$$

Función auxiliar:

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} \rho D_{0.5, 0.9}(x), & x < 0.9 \text{ y } y > \psi(x), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $\rho = 2$ .

### Ejemplo 3.4.3.

Función  $f$ :

$$f(x, y) = g_1(x, y)(g_2(x, y) + 1.1 - x),$$

donde  $g_1$  denota la conocida función de Franke

$$\begin{aligned}g_1(x, y) = & 0.75 \exp(-0.25(9x - 2)^2 - 0.25(9y - 2)^2) \\ & + 0.75 \exp(-(9x + 1)^2/49 - (9y + 1)/10) \\ & + 0.5 \exp(-0.25(9x - 7)^2 - 0.25(9y - 3)^2) \\ & - 0.2 \exp(-(9x - 4)^2 - (9y - 7)^2),\end{aligned}$$

y  $g_2$  se define por

$$g_2(x, y) = \begin{cases} -\exp\left(2 + \frac{0.35^2}{(x - 0.5)^2 - 0.35^2} + \frac{0.3^2}{(y - 0.6)^2 - 0.3^2}\right), & (x, y) \in O, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con

$$O = \{(x, y) \in (0.15, 0.85) \times (0.3, 0.9) \mid y > \psi(x)\}$$

$$\text{y } \psi(x) = 1.4 - 5.8x + 10.7x^2 - 5.7x^3.$$

*Conjunto de discontinuidad:*

$$\Gamma = \{(x, \psi(x)) \mid 0.15 < x < 0.85\}.$$

*Función auxiliar:*

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} \rho U_{0.15, 0.45}(x), & 0.15 < x \leq 0.55 \text{ y } y > \psi(x), \\ \rho D_{0.55, 0.85}(x), & 0.55 < x < 0.85 \text{ y } y > \psi(x), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $\rho = 0.8$ .

#### **Ejemplo 3.4.4.**

*Función  $f$ :*

$$f(x, y) = \text{sen}(\pi x) \exp(-3|x - y|).$$

*Conjunto de discontinuidad:*

$$\mathcal{F} = \{(x, x) \mid 0 \leq x < 1\}.$$

*Función auxiliar:*

$$\zeta(x, y) = |x - y|.$$

#### **Ejemplo 3.4.5.**

*Función  $f$ :*

$$f(x, y) = (0.1 + |y - g(x)|) \text{sen}(\pi y), \text{ con } g(x) = 0.5 + 0.2 \text{sen}(5\pi x/3).$$

*Conjunto de discontinuidad:*

$$\mathcal{F} = \{(x, g(x)) \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

*Función auxiliar:*

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} y/g(x) & , y < g(x), \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

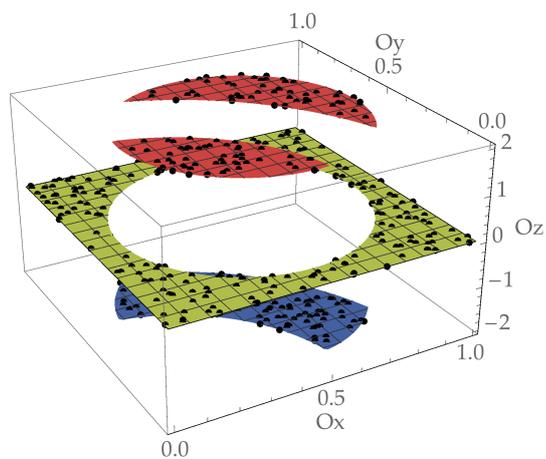
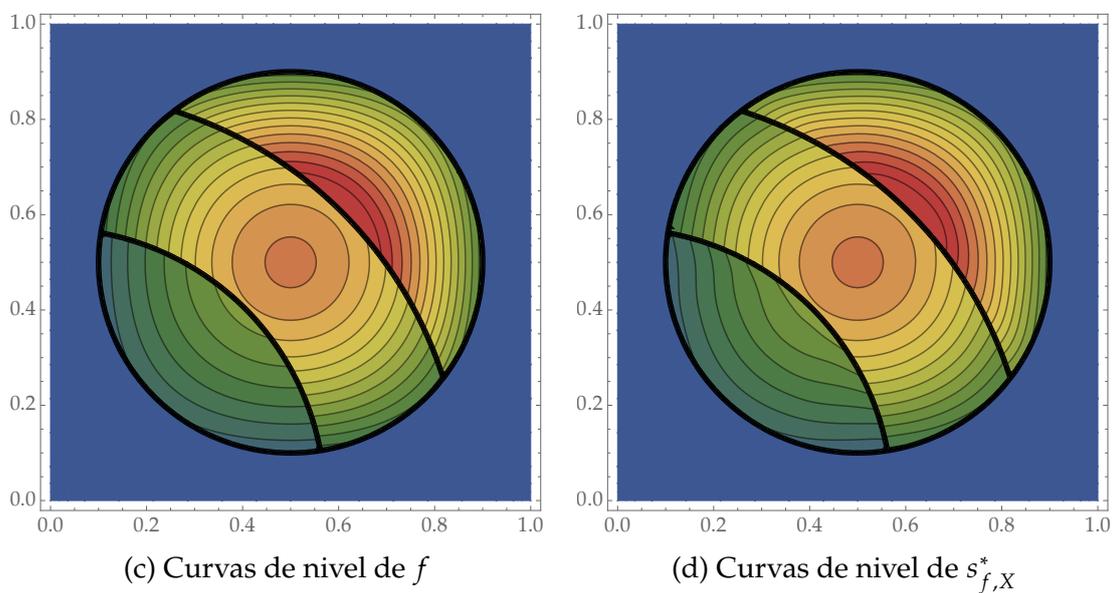
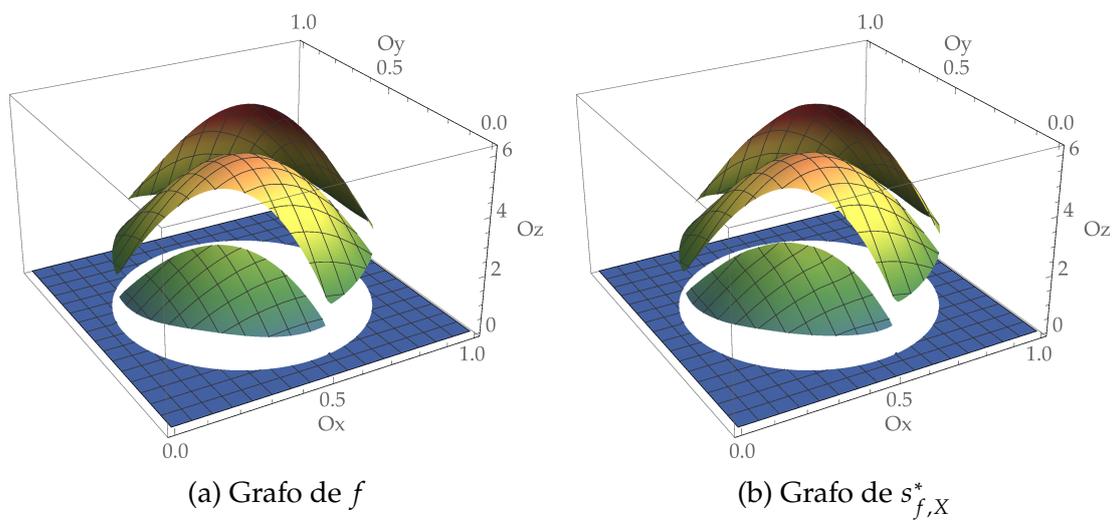
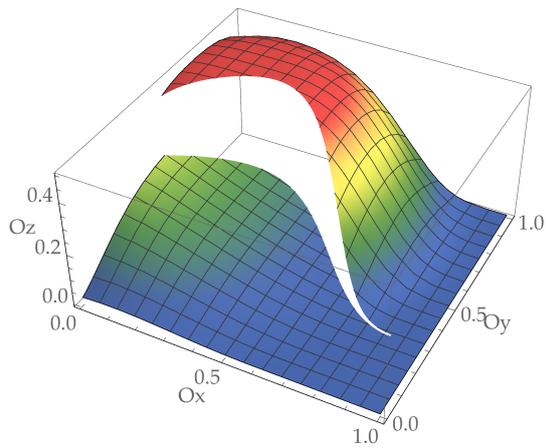
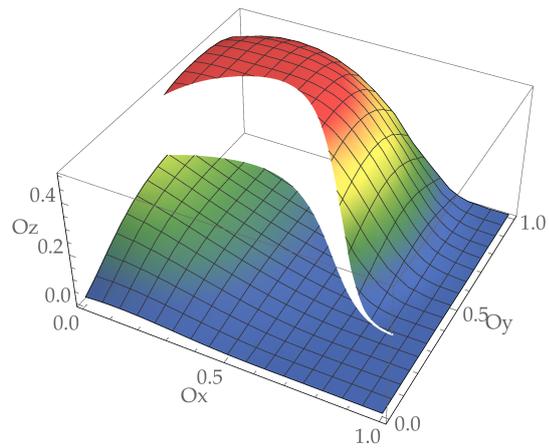


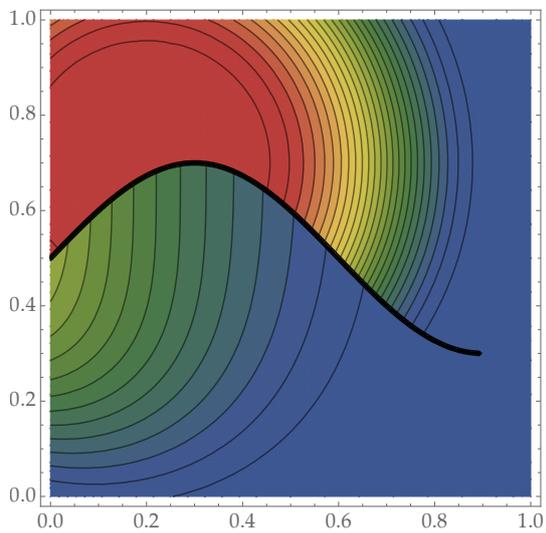
Figura 3.14. Gráficos correspondientes al ejemplo 3.4.1.



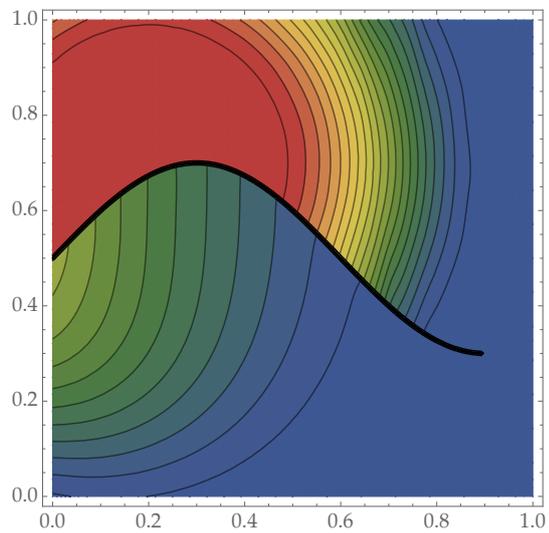
(a) Grafo de  $f$



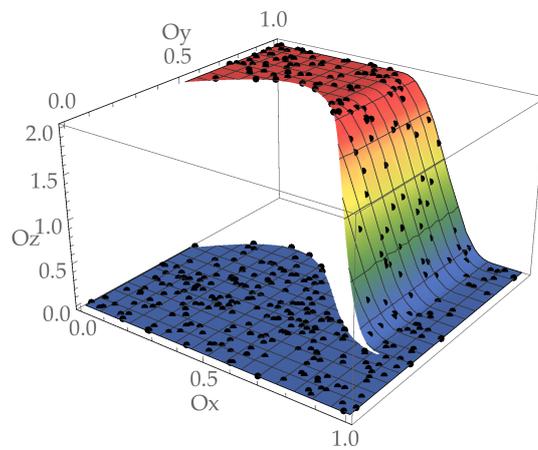
(b) Grafo de  $s_{f,X}^*$



(c) Curvas de nivel de  $f$

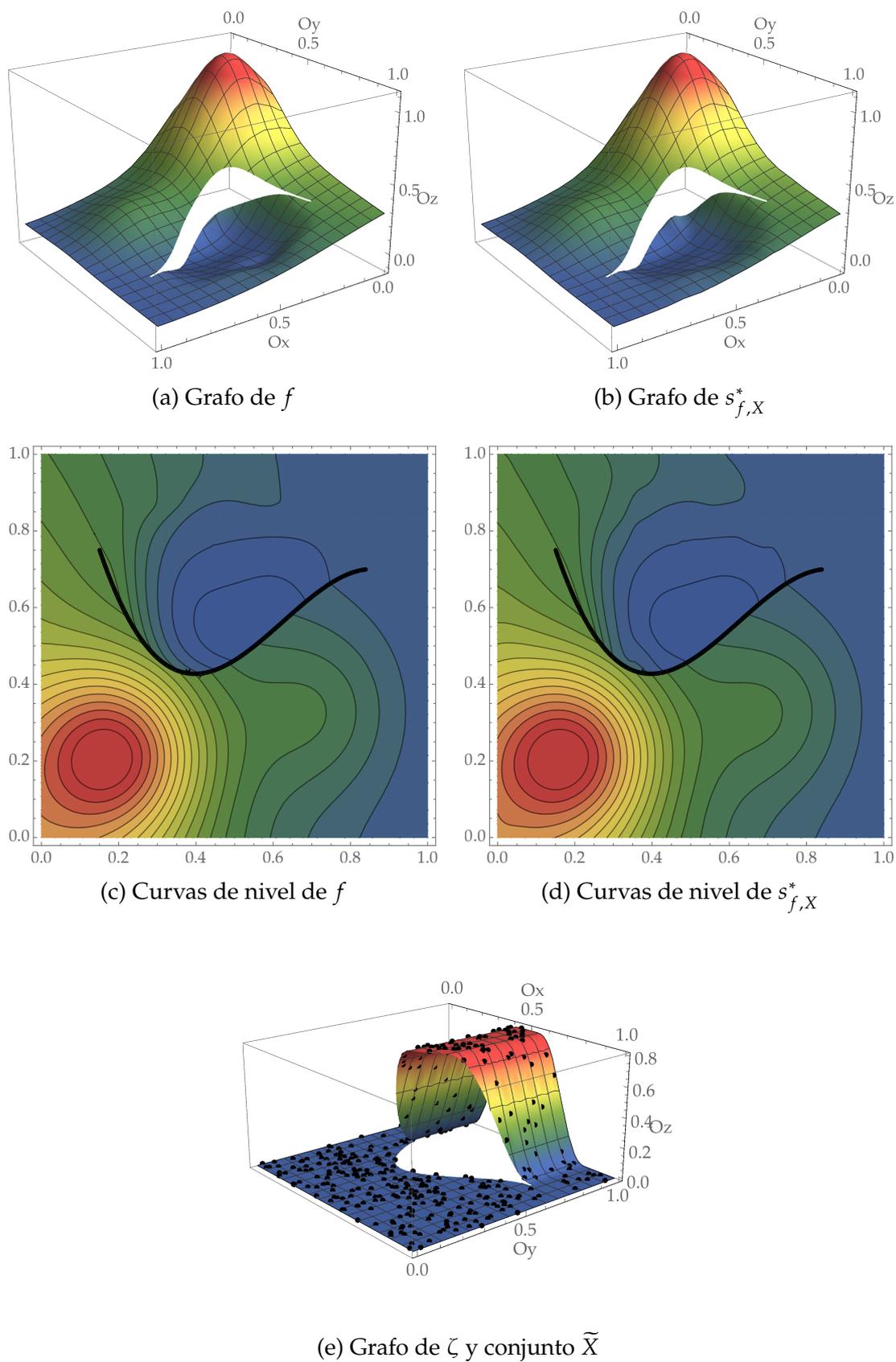


(d) Curvas de nivel de  $s_{f,X}^*$



(e) Grafo de  $\zeta$  y conjunto  $\tilde{X}$

Figura 3.15. Gráficos correspondientes al ejemplo 3.4.2.



**Figura 3.16.** Gráficos correspondientes al ejemplo 3.4.3.

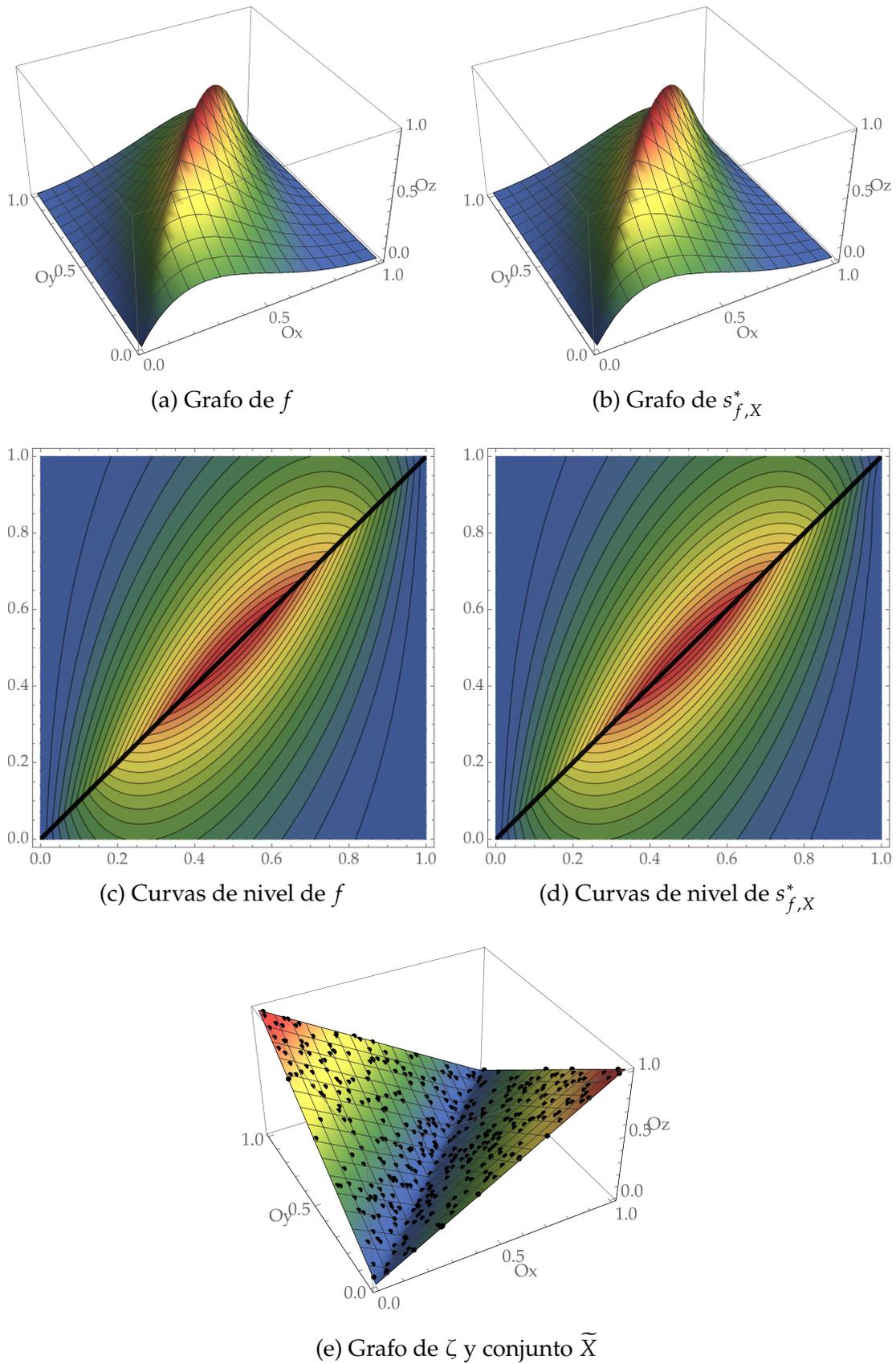
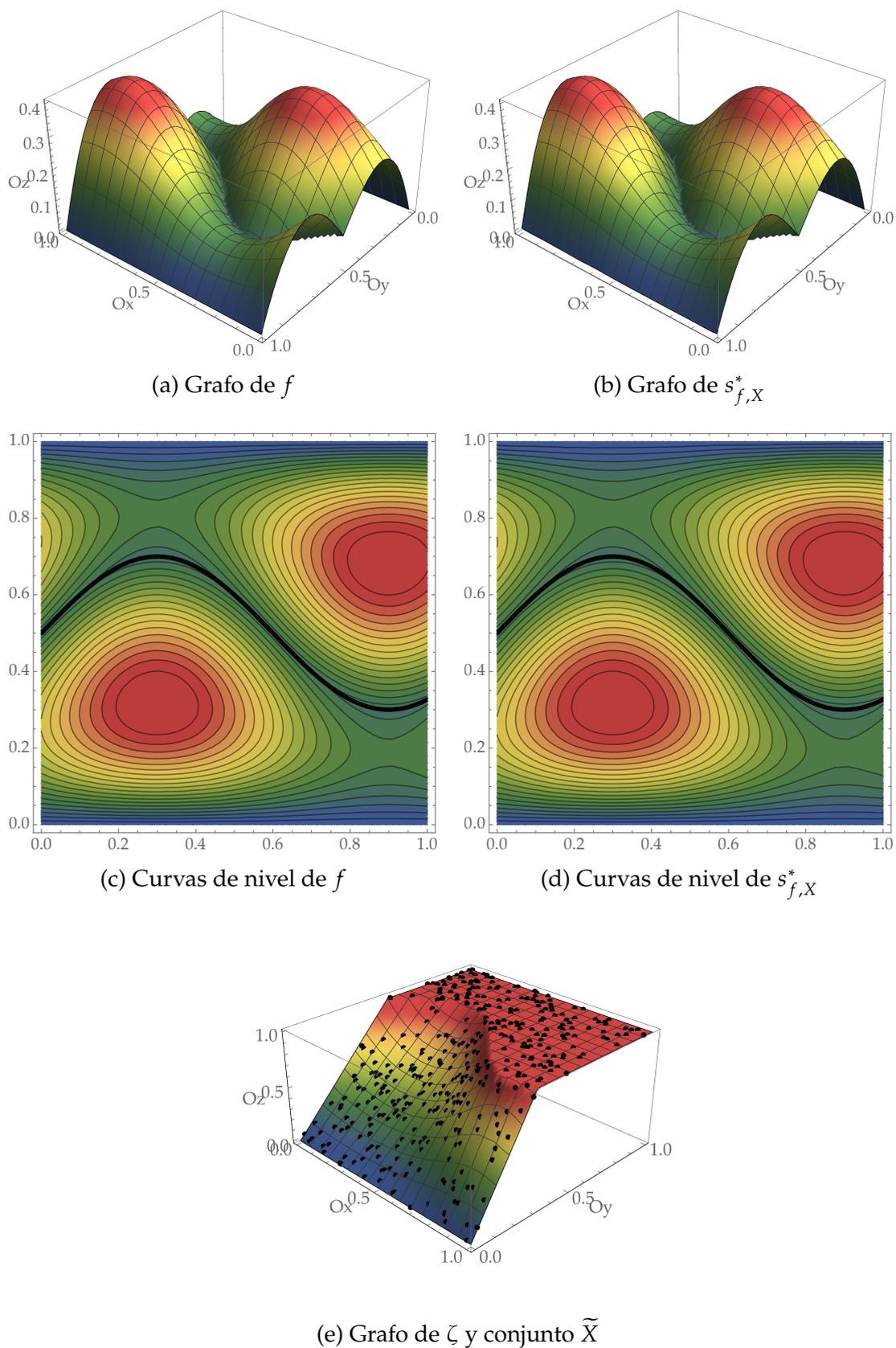


Figura 3.17. Gráficos correspondientes al ejemplo 3.4.4.



**Figura 3.18.** Gráficos correspondientes al ejemplo 3.4.5.

---

## CAPÍTULO 4

# DETECCIÓN DE DISCONTINUIDADES

---

### Sección 4.1

### INTRODUCCIÓN

La detección de las discontinuidades de una función a partir de un conjunto discreto de datos de la función constituye un amplio campo de investigación que cada autor trata con diferentes enfoques. Revisemos ahora algunas referencias sobre la detección de discontinuidades utilizando funciones radiales de base.

Jung [39] afirma que los coeficientes de expansión obtenidos al interpolar una función mediante funciones radiales de base pueden ser indicadores de la no suavidad de la función, hecho que ya hicimos notar a propósito del ejemplo 2.2.3 y que ilustramos en la figura 2.9 . Para una función analítica en su dominio con centros equidistantes, llega a las siguientes conclusiones:

- Si  $f$  es suave en su dominio, el máximo valor absoluto de los coeficientes de expansión se localiza en las proximidades de la frontera del dominio.
- Si  $f$  es discontinua, el máximo valor absoluto de los coeficientes de expansión se localiza en las proximidades de la discontinuidad, es decir, en los dos centros más próximos a la discontinuidad si solo hay un salto.

Jung y Durante [40] utilizan como indicador de las discontinuidades los valores  $C_i = |\lambda_i s'_{f,X}(x_i)|$  donde  $\lambda_i$  son los coeficientes de expansión y  $s'_{f,X}(x_i)$  es la derivada del interpolante calculada en el centro  $i$ -ésimo. Utilizan la llamada interpolación local lineal a trozos para ir encontrando todos los saltos que tiene la función partiendo de centros equiespaciados.

Fornberg y Flyer [27] estudian los valores de los coeficientes de expansión para la interpolación RBF y, junto a otros autores, completan su estudio en [28] considerando

centros equiespaciados.

Romani, Rossini y Schenone [51] proponen un método iterativo para detectar las discontinuidades de salto de funciones univariadas basado en la interpolación con VSK (Variably Scaled Kernels). El método identifica los valores más altos en valor absoluto de los coeficientes de expansión y va construyendo una función auxiliar con saltos en los centros asociados a esos valores. También estudian la detección de fallas verticales en superficies a través de la descomposición del dominio.

Todos los métodos de detección de discontinuidades que han sido propuestos, de una manera u otra, detectan fuertes cambios de la pendiente del interpolante, que pueden ser indicadores de la presencia de uno o más saltos en la función. Por tanto, en cualquier método de detección se ha de determinar qué umbral de cambio se considera que determina la presencia de un salto. En consecuencia, los métodos existentes pueden fallar en dos situaciones. Si la función presenta varios saltos y uno de ellos es mucho menor que el resto, puede que el método no lo detecte. Además, si la función tiene fuertes variaciones de pendiente, es posible que el método considere falsamente que hay un salto en dicha zona.

Algunos autores han publicado resultados sobre la detección de líneas de falla en superficies como, por ejemplo, Allasia y otros [1], Bozzini y otros [9], Crampton y Mason [16], Gutzmer e Iske [33], López de Silanes y otros [45], y Jung y otros [41].

En este capítulo se va a aplicar el método de interpolación RBFFA propuesto en el capítulo 3 para definir un algoritmo iterativo que localice los saltos de una función y su derivada a partir de centros aleatoriamente distribuidos. Después se presentarán ejemplos numéricos en los que se detectan discontinuidades para mostrar la efectividad de dicho procedimiento y se aplicará la aproximación RBFFA para reconstruir varias funciones.

## Sección 4.2

# DETECCIÓN DE DISCONTINUIDADES DE SALTO DE FUNCIONES UNIVARIADAS

### 4.2.1. Descripción del algoritmo

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de la que se conoce un vector  $f|_X = (f(x_1), \dots, f(x_N))$  cuyas componentes son los valores de  $f$  en un conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  contenido en  $[a, b]$ . A partir de estos datos, se pretende determinar si  $f$  tiene discontinuidades de salto finito y, en su caso, cuántas son y dónde se localizan. Para responder

a estas cuestiones, se propone en este apartado un algoritmo iterativo cuyos pasos justificaremos y explicaremos más detalladamente en la subsección siguiente.

En esencia, este algoritmo calcula en la iteración  $k$ -ésima un interpolante RBFFA a partir de  $X$  y  $f|_X$ , haciendo uso de una función auxiliar  $\zeta^{k-1}$  que tiene en cuenta las discontinuidades detectadas en las iteraciones anteriores. La existencia de coeficientes de expansión del interpolante que sean, en valor absoluto, significativamente mayores que el resto indica que los centros asociados a tales coeficientes están cerca de posibles discontinuidades. Tales centros se almacenan en un conjunto  $U^k$  y se unen a todos los centros seleccionados en las iteraciones previas, dando lugar a un conjunto  $V^k$  de centros. Este conjunto se subdivide, agrupando los centros que sean próximos, y se calcula la media de cada subgrupo, que es, pues, la aproximación de una discontinuidad de  $f$ . Resulta así un conjunto  $D^k$  que reúne todas las discontinuidades detectadas hasta entonces. Concluye la iteración  $k$ -ésima preparando la función auxiliar  $\zeta^k$  que será utilizada en la iteración siguiente.

Sin más dilación, presentamos el algoritmo de detección:

*Entrada:* El conjunto ordenado  $X$  de centros y el vector  $f|_X$ .

*Paso 1.* Se fija una función básica  $\phi$  con soporte  $[0, \rho]$  y definida positiva en  $\mathbb{R}^2$ .

*Paso 2.* Se fijan los valores de los parámetros que necesitará el algoritmo:  $\eta > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\delta \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  y  $k_{\text{máx}} \in \mathbb{N}$ . Asimismo, se realizan las asignaciones  $\zeta^0 \equiv 0$  (la función auxiliar inicial  $\zeta^0$  es la función nula) y  $V^0 = D^0 = \emptyset$ .

*Paso 3.* Para  $k = 1, \dots, k_{\text{máx}}$ , se realizan los pasos 4, ..., 10:

*Paso 4.* Se obtiene el vector  $\beta^k$  formado por los coeficientes de expansión del interpolante RBFFA  $s_{f,X}^{*,k}$  calculado a partir de  $X$ ,  $f|_X$  y la función auxiliar  $\zeta^{k-1}$ . Se usa para ello la función básica fijada en el paso 1.

*Paso 5.* Se calculan la media  $\bar{\beta}^k$ , el máximo  $\beta_{\text{máx}}^k$  y la desviación estándar  $\beta_s^k$  de los valores absolutos de los coeficientes de expansión contenidos en  $\beta^k$ .

*Paso 6.* Se realiza la asignación  $V^k = U^k \cup V^{k-1}$ , donde

$$U^k = \left\{ x_j \in X \mid |\beta_j^k| \geq \eta \beta_{\text{máx}}^k, |\beta_j^k| > \bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k, 1 + \delta \leq j \leq N - \delta \right\},$$

*Paso 7.* Si  $V^k = V^{k-1}$ , entonces se toma  $D^k = D^{k-1}$  y se concluye la iteración, terminando el algoritmo.

*Paso 8.* Se divide  $V^k$  en subconjuntos  $V_1^k, \dots, V_{L^k}^k$  de centros próximos. Cada subconjunto  $V_i^k$  satisface la siguiente condición: sean  $x_p \in V_i^k$  y  $x_q \in V^k$ , si  $|p - q| \leq \ell$  entonces  $x_q \in V_i^k$ .

*Paso 9.* Para  $i = 1, \dots, L^k$ , se halla la media  $v_i^k$  de los centros en  $V_i^k$  y se define el conjunto  $D^k = \{v_1^k, \dots, v_{L^k}^k\}$ .

*Paso 10.* Se construye la función auxiliar  $\zeta^k$  que será usada en la siguiente iteración. Es de la forma dada en (3.1), con  $\rho$  como parámetro de salto:

$$\zeta^k(x) = \begin{cases} 0, & x < v_1^k, \\ j\rho, & v_j^k \leq x < v_{j+1}^k, \quad j = 1, \dots, L^k - 1, \\ L^k\rho, & v_{L^k}^k \leq x. \end{cases}$$

*Salida:* El conjunto  $D^k$ .

Nótese que el algoritmo termina, bien porque se satisface la condición  $V^k = V^{k-1}$  en el paso 7, bien porque se alcanza el número máximo de iteraciones. En ambos casos, la salida consta del último conjunto  $D^k$  que se haya calculado. Si  $D^k = \emptyset$ , de hecho,  $D^1 = \emptyset$ , el algoritmo no ha detectado ninguna discontinuidad de  $f$ . En caso contrario, los elementos de  $D^k$  son las aproximaciones de las discontinuidades que el algoritmo ha encontrado.

---

## 4.2.2. Justificación y explicación del algoritmo

Una vez expuestos los principios generales del algoritmo y descritos sus pasos, vamos ahora a justificar y explicar éstos con mayor detenimiento.

### Entrada y pasos 1 y 2.

Los únicos datos que necesita el algoritmo son el conjunto  $X$  de centros y el vector  $f|_X$  con los valores de  $f$  en  $X$ . Cabe insistir en que los centros han de estar ordenados en sentido creciente.

El algoritmo depende de una serie de parámetros que hay que adaptar a los datos. En primer lugar, en el paso 1, se fija la función básica  $\phi$  definida positiva en  $\mathbb{R}^2$  y de soporte compacto con la que se realizará la interpolación RBFFA. En todos los ejemplos numéricos que luego presentaremos,  $\phi$  resulta de hacer un cambio de escala en la función de Wendland  $\phi_{3,1}$ , esto es,  $\phi(\cdot) = \phi_{3,1}(\cdot/\rho)$ , con  $\rho > 0$ . El soporte de la RBF generada por  $\phi$ , esto es,  $\Phi(\cdot) = \phi(\|\cdot\|_2)$ , es un disco de radio  $\rho$ .

En el paso 2 se fijan los parámetros  $\eta > 0$ ,  $\mu > 0$ ,  $\delta \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  y  $k_{\text{máx}} \in \mathbb{N}$ . Se explicará su sentido en el paso en el que sean utilizados. En este mismo paso se prepara también la primera iteración con las asignaciones  $\zeta^0 \equiv 0$  y  $V^0 = D^0 = \emptyset$ . Recordemos que, a lo largo del algoritmo,  $V^k$  denota el conjunto de centros seleccionados hasta la iteración  $k$ -ésima inclusive,  $D^k$  es el conjunto de discontinuidades que se deriva de tales

centros y  $\zeta^k$  es la función auxiliar con saltos en los puntos de  $D^k$  que se utilizará en la interpolación RBFFA de la iteración siguiente. Antes de comenzar las iteraciones, no se ha seleccionado ningún centro, luego lógicamente  $V^0 = \emptyset$  y, en consecuencia,  $D^0 = \emptyset$  y  $\zeta^0 \equiv 0$ .

### Paso 3.

El algoritmo es esencialmente un bucle en el que se repiten los pasos 4 a 10. En principio, el algoritmo debería terminar cuando se verificase, en algún momento, la condición del paso 7. Por si acaso, se limita con el parámetro  $k_{\text{máx}}$  el número de iteraciones.

### Paso 4.

Lo primero que debe hacerse en cada iteración es calcular el interpolante RBFFA  $s_{f,X}^{*,k}$ . Siempre se utilizan los mismos datos, esto es,  $X$  y  $f|_X$ , así como la misma función básica  $\phi$ . Lo que varía de una iteración a otra es la función auxiliar: en la iteración  $k$ -ésima se emplea la función  $\zeta^{k-1}$  que se determina al final de la iteración  $k-1$  a partir de las discontinuidades de salto de  $f$  halladas hasta entonces.

En realidad, salvo que, por ejemplo, se quiera efectuar algún gráfico, no se necesita propiamente el interpolante  $s_{f,X}^{*,k}$ , sino el vector  $\beta^k$  de sus coeficientes de expansión, que resulta de resolver el sistema lineal  $A_{\Phi, \tilde{X}^k} \cdot \beta^k = f|_X$ , donde

$$\tilde{X}^k = \{(x_j, \zeta^{k-1}(x_j)) | j = 1, \dots, N\}$$

y

$$A_{\Phi, \tilde{X}^k} = \left( \Phi\left((x_i, \zeta^{k-1}(x_i)) - (x_j, \zeta^{k-1}(x_j))\right) \right)_{1 \leq i, j \leq N}.$$

### Paso 5.

A partir del vector  $\beta^k = (\beta_1^k, \dots, \beta_N^k)$  obtenido en el paso precedente, se calculan la media  $\bar{\beta}^k$ , el máximo  $\beta_{\text{máx}}^k$  y la desviación estándar  $\beta_s^k$  de los valores absolutos de los coeficientes de expansión, es decir,

$$\bar{\beta}^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\beta_i^k|, \quad \beta_{\text{máx}}^k = \max_{1 \leq i \leq N} |\beta_i^k|, \quad \beta_s^k = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (|\beta_i^k| - \bar{\beta}^k)^2}.$$

**Paso 6.**

Éste es el paso crucial del algoritmo, pues en él se seleccionan los centros de  $X$  que se considera próximos a una discontinuidad de salto de  $f$ . De acuerdo con Jung [39], estos centros son los que se corresponden con valores grandes, en valor absoluto, de los coeficientes de expansión. ¿Cuándo se debe considerar que uno de tales valores  $|\beta_i^k|$  es *grande*? En el algoritmo se usan dos criterios complementarios. Por un lado,  $|\beta_i^k|$  debería estar suficientemente alejado del valor medio de los valores absolutos de los coeficientes de expansión, esto es,

$$|\beta_i^k| > \bar{\beta}^k + \mu\beta_s^k$$

para algún  $\mu > 0$ . Por otra parte,  $|\beta_i^k|$  debe representar un porcentaje suficientemente elevado de  $\beta_{\text{máx}}^k$ , o sea,

$$|\beta_i^k| \geq \eta\beta_{\text{máx}}^k$$

para algún  $\eta \in (0, 1)$ . La elección de  $\mu$  y  $\eta$  es, justamente, uno de los puntos más delicados del algoritmo. Si atendemos a su significado, tanto  $\mu$  como  $\eta$  tendrían que ser números lo más elevados posible dentro de un rango razonable. Por lo general, se toma  $\eta$  alrededor de 0.6 y  $\mu$  entre 1 y 3.

Jung señala, por otra parte, que, si el máximo valor absoluto de los coeficientes de expansión se localiza en las proximidades de la frontera del dominio, entonces  $f$  es una función continua en su dominio. Por ello, para evitar falsos positivos en la detección de discontinuidades, se debe prescindir de los centros cercanos a los extremos del intervalo  $[a, b]$ . En concreto, se desechan los  $\delta$  primeros y los  $\delta$  últimos centros, siendo  $\delta \in \mathbb{N}$  otro de los parámetros fijados en el paso 2.

De acuerdo con lo expuesto, en este paso se escogen los centros que constituyen el conjunto  $U^k$  definido en el algoritmo, eso es,

$$U^k = \left\{ x_j \in X \mid |\beta_j^k| \geq \eta\beta_{\text{máx}}^k, |\beta_j^k| > \bar{\beta}^k + \mu\beta_s^k, 1 + \delta \leq j \leq N - \delta \right\}.$$

Este conjunto se une a los centros obtenidos en cualquiera de las iteraciones precedentes, dando lugar al conjunto de centros  $V^k = U^k \cup V^{k-1}$ .

**Paso 7.**

Si  $V^k = V^{k-1}$ , o, lo que es lo mismo, si  $U^k \subset V^{k-1}$ , en el paso 6 no se habría seleccionado ningún centro que no hubiese sido escogido en alguna iteración previa. Se considera entonces que el algoritmo ha encontrado todos los centros cercanos a

discontinuidades, por lo que se pueden concluir las iteraciones. Dado que  $V^k = V^{k-1}$ , de  $V^k$  se deduciría el mismo conjunto de discontinuidades que en la iteración  $k-1$ . No hace falta recalcularlo. Basta con hacer  $D^k = D^{k-1}$  y dar  $D^k$  como salida del algoritmo. El conjunto  $D^{k-1}$  habrá sido obtenido en el paso 8 de la iteración anterior.

Si  $f$  es una función continua (y no hay falsos positivos), no se habrá seleccionado ningún centro ya en la primera iteración, es decir, se tendrá  $V^1 = \emptyset = V^0$ , por lo que concluye el algoritmo y la salida será  $D^1 = D^0 = \emptyset$ .

### Pasos 8 y 9.

Entre estos dos pasos se calcula un conjunto  $D^k \subset (a, b)$  de discontinuidades de  $f$  a partir de los centros contenidos en  $V^k$ . Para ello, primero se divide  $V^k$  en subconjuntos disjuntos o clústeres, en lenguaje más estadístico,  $V_1^k, \dots, V_{L^k}^k$ , constituidos por centros próximos en algún sentido. En concreto, se toma el parámetro  $\ell \in \mathbb{N}$  fijado en el paso 2 y se construye cada subconjunto  $V_i^k$  de modo que satisfaga la siguiente condición: sean  $x_p \in V_i^k$  y  $x_q \in V^k$ , si  $|p - q| \leq \ell$  entonces  $x_q \in V_i^k$ .

Un vez hallada la partición  $V^k = V_1^k \cup \dots \cup V_{L^k}^k$ , para cada  $i = 1, \dots, L^k$ , se halla la media  $v_i^k$  de los centros en  $V_i^k$  y se define finalmente el conjunto  $D^k = \{v_1^k, \dots, v_{L^k}^k\}$ .

Demos algún ejemplo. Supongamos que  $N = 100$  y que  $\ell = 2$ . Si

$$V^k = \{x_{12}, x_{14}, x_{33}, x_{34}, x_{36}, x_{43}, x_{51}, x_{52}\},$$

entonces  $V^k$  se descompone en  $L^k = 4$  subconjuntos, a saber,

$$V_1^k = \{x_{12}, x_{14}\}, \quad V_2^k = \{x_{33}, x_{34}, x_{36}\}, \quad V_3^k = \{x_{43}\}, \quad V_4^k = \{x_{51}, x_{52}\}.$$

Entonces, se tiene que  $D^k = \{v_1^k, v_2^k, v_3^k, v_4^k\}$ , donde

$$v_1^k = \frac{x_{12} + x_{14}}{2}, \quad v_2^k = \frac{x_{33} + x_{34} + x_{36}}{3}, \quad v_3^k = x_{43}, \quad v_4^k = \frac{x_{51} + x_{52}}{2}.$$

### Paso 10.

Se cierra cada iteración construyendo la función auxiliar  $\zeta^k$  que se empleará en la siguiente iteración. Se define del modo indicado en el algoritmo. Nótese que se produce un salto de amplitud  $\rho$  en cada una de las discontinuidades  $v_i^k$  detectadas hasta ese momento.

### 4.2.3. Consideraciones adicionales

El método de detección es, al mismo tiempo, un método de reconstrucción de la función  $f$ , pues en cada iteración se calcula un interpolante de  $f$  que es cada vez más preciso. En efecto, a medida que transcurren las iteraciones, crece el número de discontinuidades conocidas de  $f$  y se mejora la precisión con la que éstas son aproximadas. De este modo, la función auxiliar  $\zeta^k$  se adapta cada vez mejor a la forma de  $f$ , induciendo una disminución de las oscilaciones del interpolante  $s_{f,X}^{*,k}$  y un aumento de la calidad de la aproximación. Nótese que, salvo que se agote el número máximo de iteraciones, la función auxiliar  $\zeta^k$  obtenida al término de la penúltima iteración contiene ya todas las discontinuidades que el algoritmo es capaz de detectar. Por eso, con frecuencia, se puede tomar el último interpolante  $s_{f,X}^{*,k}$  como una buena aproximación de la función  $f$ .

Hay, no obstante, varias circunstancias que motivan el realizar una interpolación adicional al terminar el algoritmo. Supongamos que quedase algún centro  $x_j$  entre una discontinuidad  $v_i$  de  $f$  y la estimación  $v_i^k$  dada por el algoritmo, que es también una discontinuidad de  $s_{f,X}^{*,k}$ . Como  $x_j$  está en lados opuestos de  $v_i$  y  $v_i^k$ , el grafo de  $s_{f,X}^{*,k}$  obligado a pasar por  $(x_j, f(x_j))$ , necesariamente presentará alguna oscilación o trazo que se aparta significativamente del grafo de  $f$ . Es lo que se aprecia, sobre todo, en los gráficos de las primeras iteraciones del algoritmo. De observarse un caso así, es preferible eliminar de  $X$  los centros próximos a las discontinuidades obtenidas e interpolar entonces el conjunto de centros que quede.

Puede ocurrir también que el algoritmo no sea capaz de detectar todas las discontinuidades de la función  $f$ . Así puede suceder, por ejemplo, si  $f$  presenta una gran variabilidad o los saltos en las discontinuidades son de magnitudes muy diferentes. En casos así, no siempre los mismos parámetros son adecuados para todas las discontinuidades. Para solventar esta dificultad, pueden adoptarse varias estrategias. Se podría aplicar el algoritmo una vez y luego repetirlo en los subintervalos determinados por las discontinuidades obtenidas. También se podría dividir directamente el intervalo  $[a, b]$  en varios subintervalos más reducidos y aplicar el algoritmo en cada uno de ellos. En todo caso, habría que procurar utilizar en cada ocasión los parámetros más adecuados.

Otro problema que puede darse es que no es posible distinguir muchas veces, cuando sólo se dispone de datos discretos, entre una discontinuidad de salto y una zona de fuerte crecimiento o decrecimiento de la función. Por eso, es posible que el algoritmo señale como punto de discontinuidad un punto en el que, en realidad,  $f$  es derivable pero  $f'$  es muy elevada.

Indiquemos, por último, otro hecho fácilmente constatable en los ejemplos numéri-

cos: a medida que avanzan las iteraciones, disminuye la magnitud de los coeficientes de expansión. Nótese que éstos son tanto mayores, en valor absoluto, cuanto más oscila el interpolante. Pero, al mejorar la forma de la función auxiliar, las oscilaciones se reducen, disminuyendo, en consecuencia, el valor de los coeficientes de expansión.

#### 4.2.4. Ejemplos numéricos

**Ejemplo 4.2.1.** Retomamos la función del ejemplo 3.3.1:

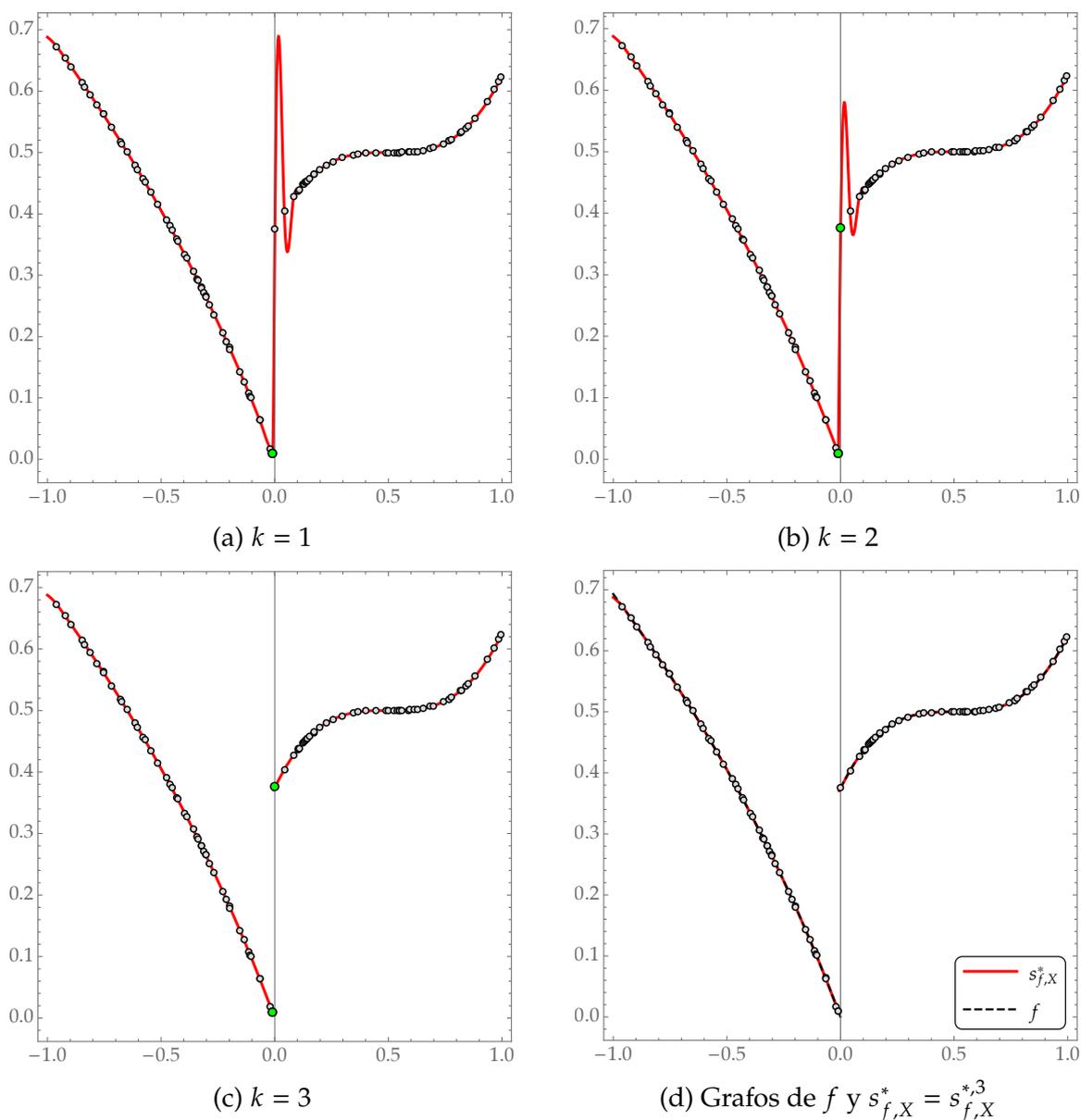
$$f(x) = \begin{cases} \log(1-x), & -1 \leq x < 0, \\ 0.5 + (x-0.5)^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Recordemos que  $f$  es discontinua en  $v = 0$ .

Aplicamos el algoritmo de detección a partir de un conjunto ordenado  $X$  de  $N = 100$  centros aleatoriamente distribuidos en  $[-1, 1]$  con los parámetros siguientes:  $\eta = 0.6$ ,  $\mu = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $\ell = 3$ ,  $\rho = 2$ ,  $k_{\text{máx}} = 20$ . Termina el algoritmo tras 3 iteraciones y se obtiene  $D^3 = \{-0.00619688\}$ . La figura 4.1 muestra los datos (i.e., los puntos  $(x_j, f(x_j))$  para  $j = 1, \dots, N$ , los interpolantes  $s_{f,X}^{*,k}$  de cada iteración y, en verde, los puntos  $(x_j, f(x_j))$  correspondientes a los centros que van siendo seleccionados. A efectos de comparación, se añade un gráfico en el que se superponen los grafos de  $f$  y del interpolante  $s_{f,X}^* = s_{f,X}^{*,3}$ , que es el último calculado. Ya se ha indicado que la función básica  $\phi$  es siempre, en los ejemplos, la función de Wendland  $\phi_{3,1}$  con un cambio de escala, esto es,  $\phi(r) = \phi_{3,1}(r/\rho)$ . Lo recordamos una vez más.

La figura 4.2 presenta los valores absolutos de los coeficientes de expansión en escala logarítmica. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores  $\eta \beta_{\text{máx}}^k$  y  $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ . Los puntos situados por encima de ambas líneas son los que determinan los centros que son seleccionados. Quizá visualmente puede parecer que hay poca diferencia entre los puntos situados por encima y por debajo de tales líneas; pero piénsese en que se está usando una escala logarítmica, luego, en realidad, las diferencias de magnitud entre unos y otros son muy considerables. Se observan también dos fenómenos que ya hemos comentado en varios lugares: la progresiva disminución de los valores de los coeficientes de expansión en cada iteración y el efecto frontera, que provoca el aumento de los valores de los coeficientes de expansión correspondientes a centros próximos a los extremos del intervalo.

No se trazan las funciones auxiliares  $\zeta^k$  que se construye para cada iteración. Son simplemente funciones escalonadas con saltos de magnitud  $\rho$ . La última es  $\zeta^2$ , que vale 0 si  $x < -0.00619688$  y  $\rho = 2$  si  $x \geq -0.00619688$ .

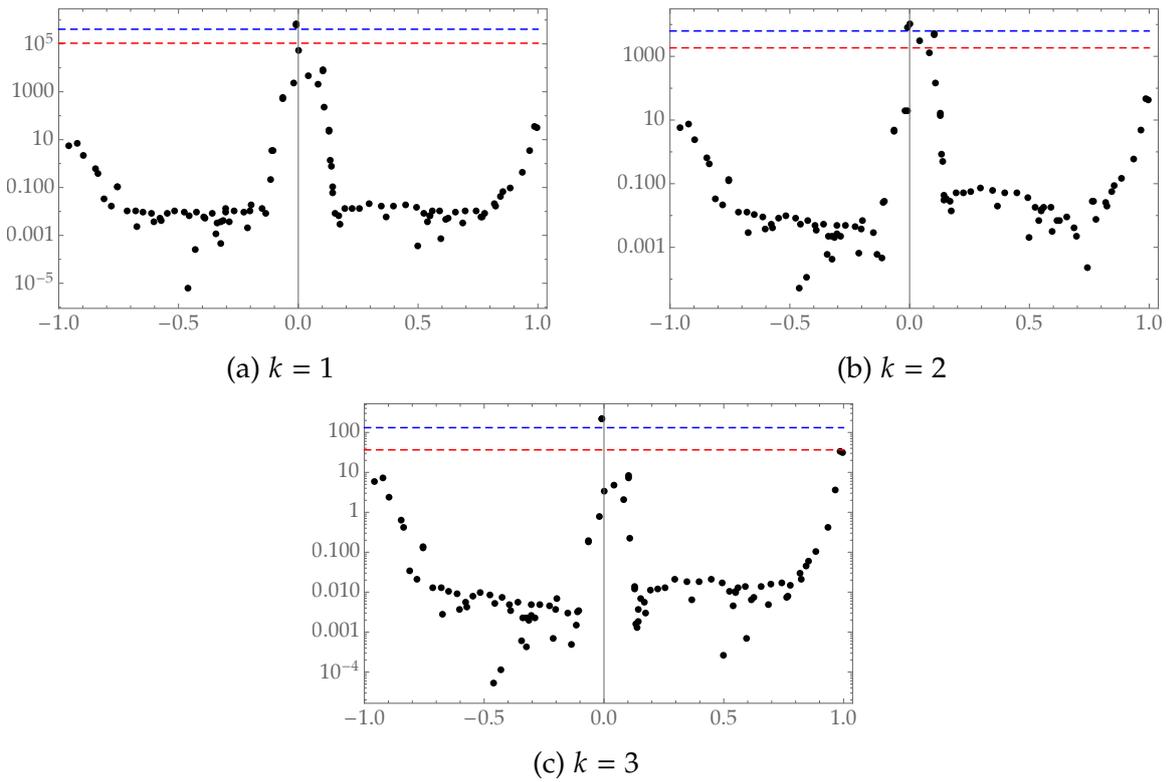


**Figura 4.1.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.1. En (a), (b) y (c) se representa el grafo del interpolante  $s_{f,X}^{*,k}$ , los datos (en gris) y los centros seleccionados hasta la iteración  $k$ -ésima (en verde).

**Ejemplo 4.2.2.** Consideremos la función del ejemplo 3.3.2

$$f(x) = x \cos\left(\frac{4}{3}\pi x \lfloor x + 1.6 \rfloor\right),$$

definida en  $[-1, 1]$  y discontinua en  $v_1 = -0.6$  y  $v_2 = 0.4$ . Usamos el mismo conjunto de centros y los mismos parámetros que en el ejemplo 4.2.1. El algoritmo de detección necesita ahora 4 iteraciones para llegar al conjunto  $D^4 = \{-0.584639, 0.440708\}$ . Las



**Figura 4.2.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.1. Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores  $\eta \beta_{\text{máx}}^k$  y  $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ .

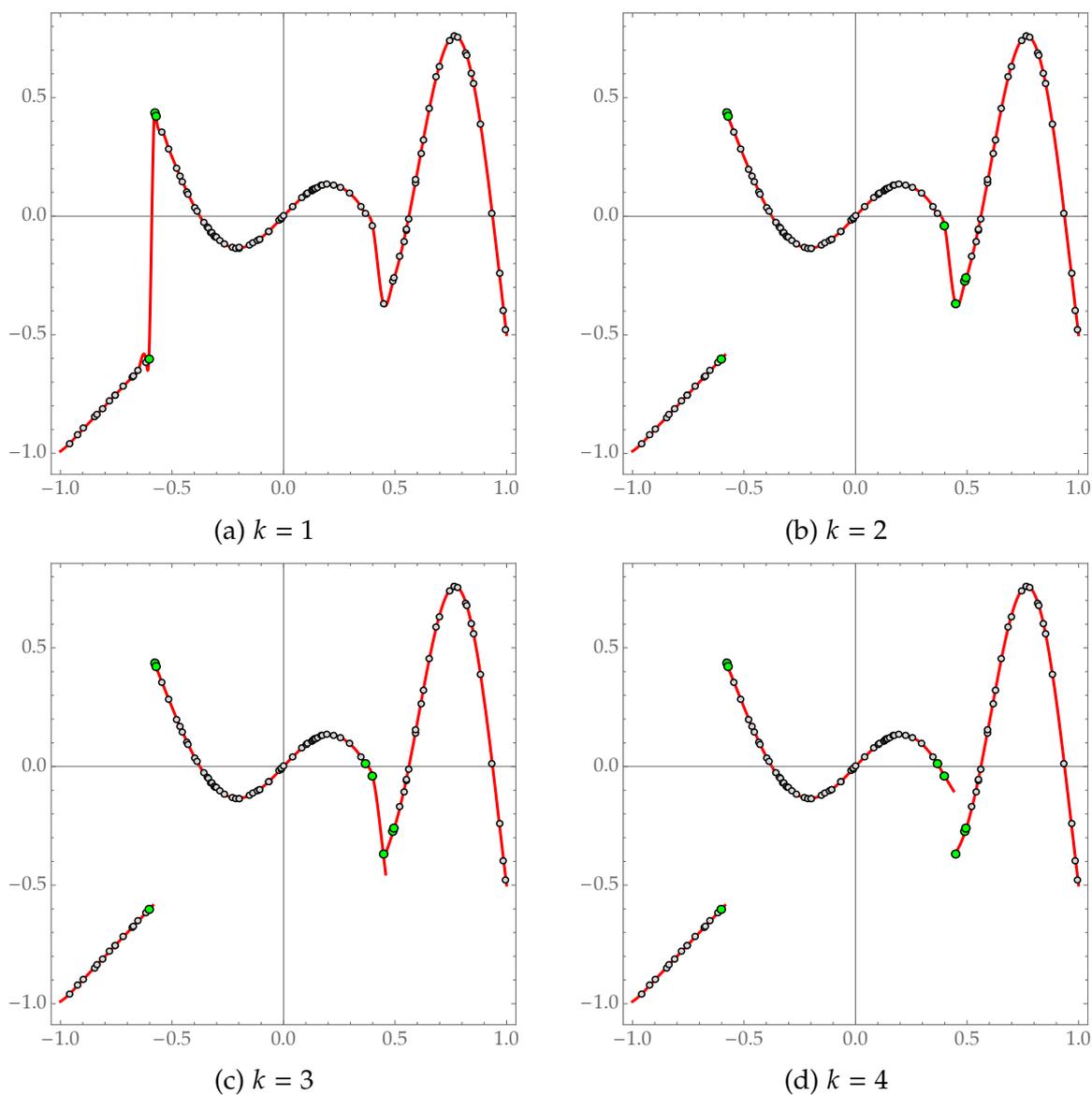
figuras 4.3, 4.4 y 4.5 muestran todo el proceso de detección, así como el interpolante con el que finalmente se aproxima  $f$ .

**Ejemplo 4.2.3.** Sea  $f$  una de las funciones que aparecen en el artículo de Romani, Rossini y Schenone [51], definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x + 2)^6, & x \in [-1, -0.7), \\ (1 - x)^4, & x \in [-0.7, -0.3), \\ (x + 2)^3 - 5, & x \in [-0.3, 0), \\ \text{sen}(7x - 2.1)^2, & x \in [0, 0.6), \\ -x, & x \in [0.6, 0.8), \\ x^2 + 3, & x \in (0.8, 1]. \end{cases}$$

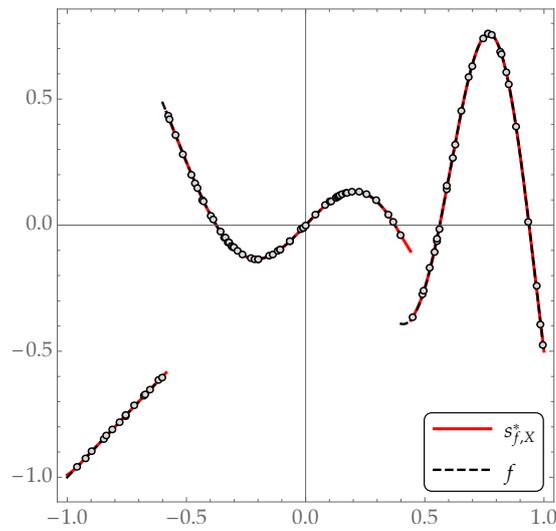
Las discontinuidades de salto de  $f$  son  $v_1 = -0.7, v_2 = -0.3, v_3 = 0, v_4 = 0.6$  y  $v_5 = 0.8$ .

Repetimos el conjunto de centros y parámetros de los dos ejemplos anteriores. El algoritmo de detección se detiene al término de la octava iteración. Las figuras 4.6 y 4.7

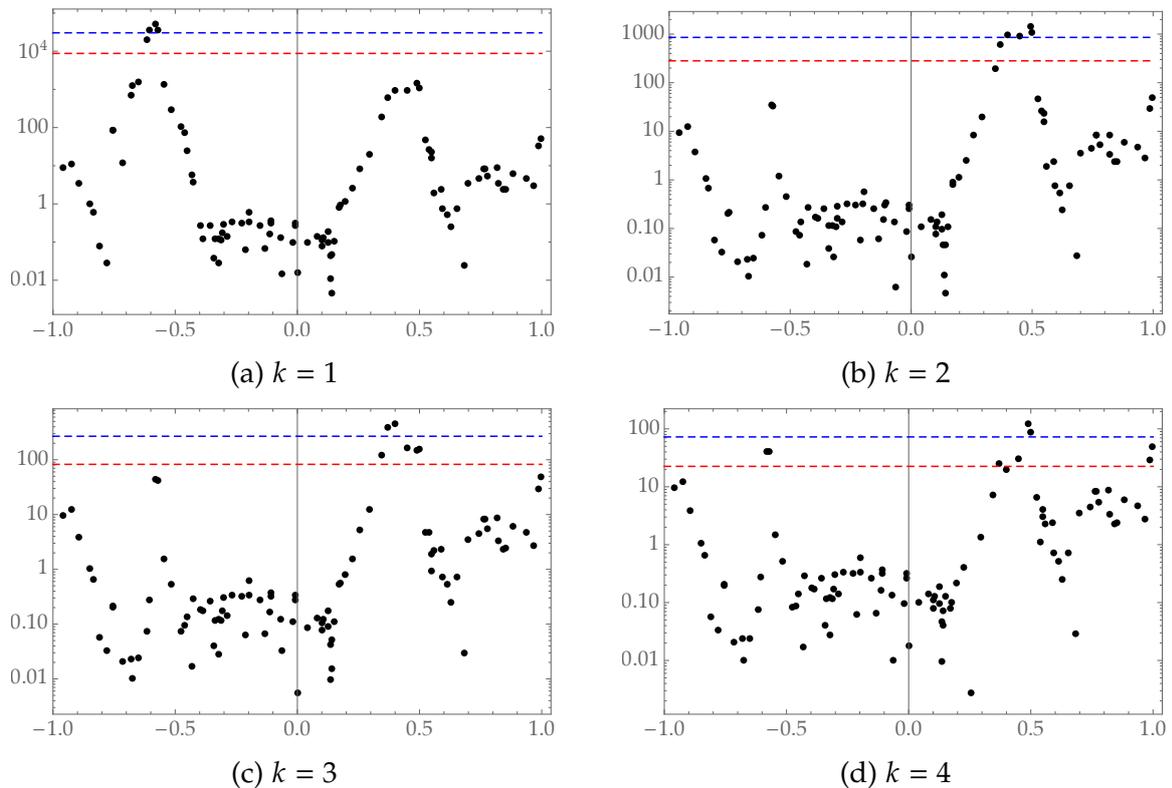


**Figura 4.3.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.2. Grafo del interpolante  $s_{f,X}^{*,k}$ , los datos (en gris) y los centros seleccionados hasta la iteración  $k$ -ésima (en verde).

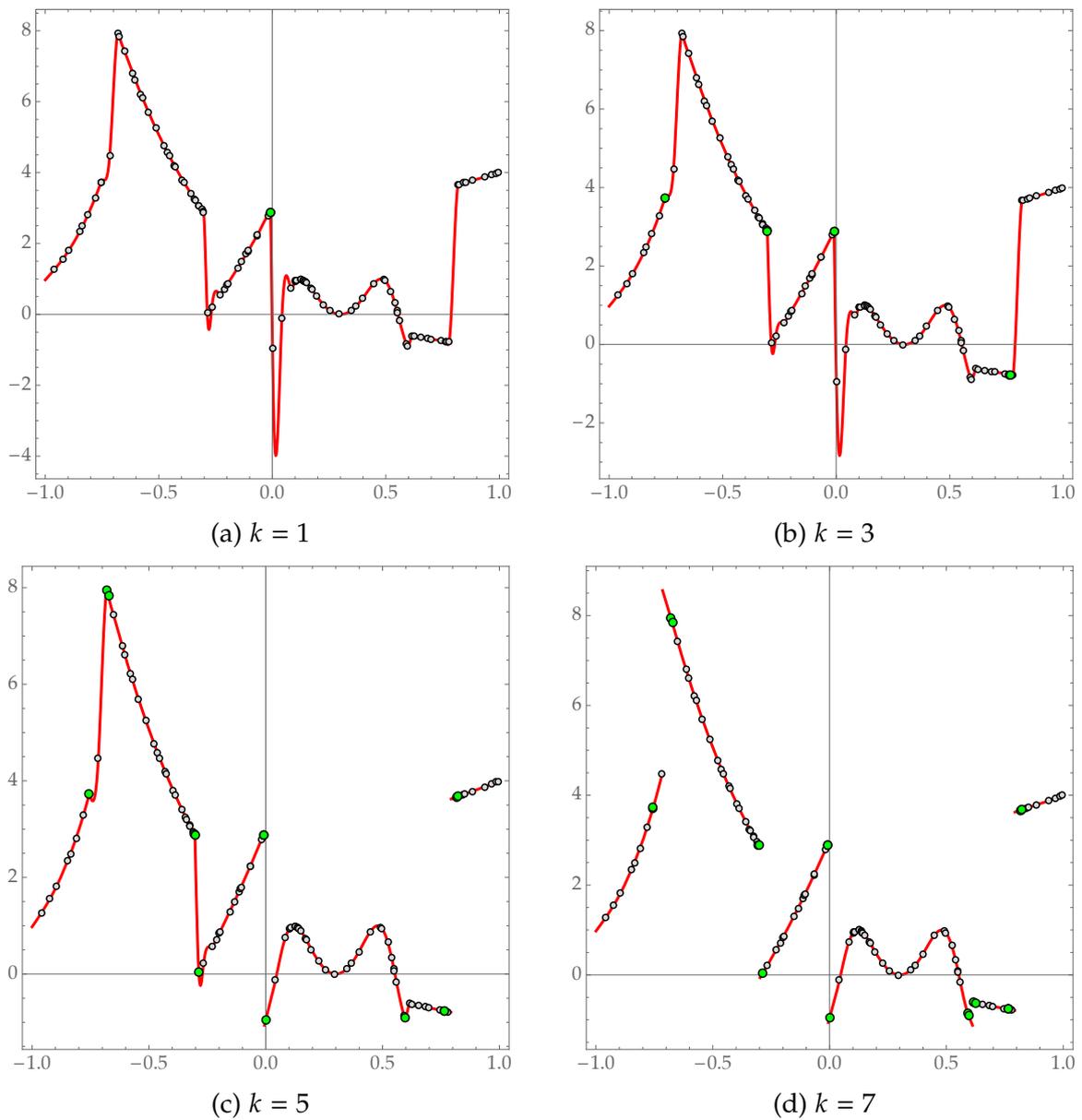
presentan sólo, por brevedad, las iteraciones impares. El interpolante final aparece en la figura 4.8. En este caso, el conjunto de discontinuidades que se obtiene es  $D^8 = \{-0.715616, -0.298048, -0.00619688, 0.606955, 0.792789\}$ .



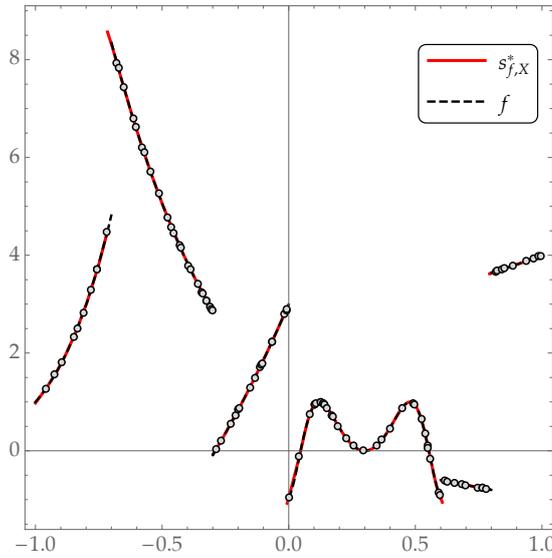
**Figura 4.4.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.2. Aproximación final de  $f$  mediante el interpolante  $s_{f,X}^{*,4}$ .



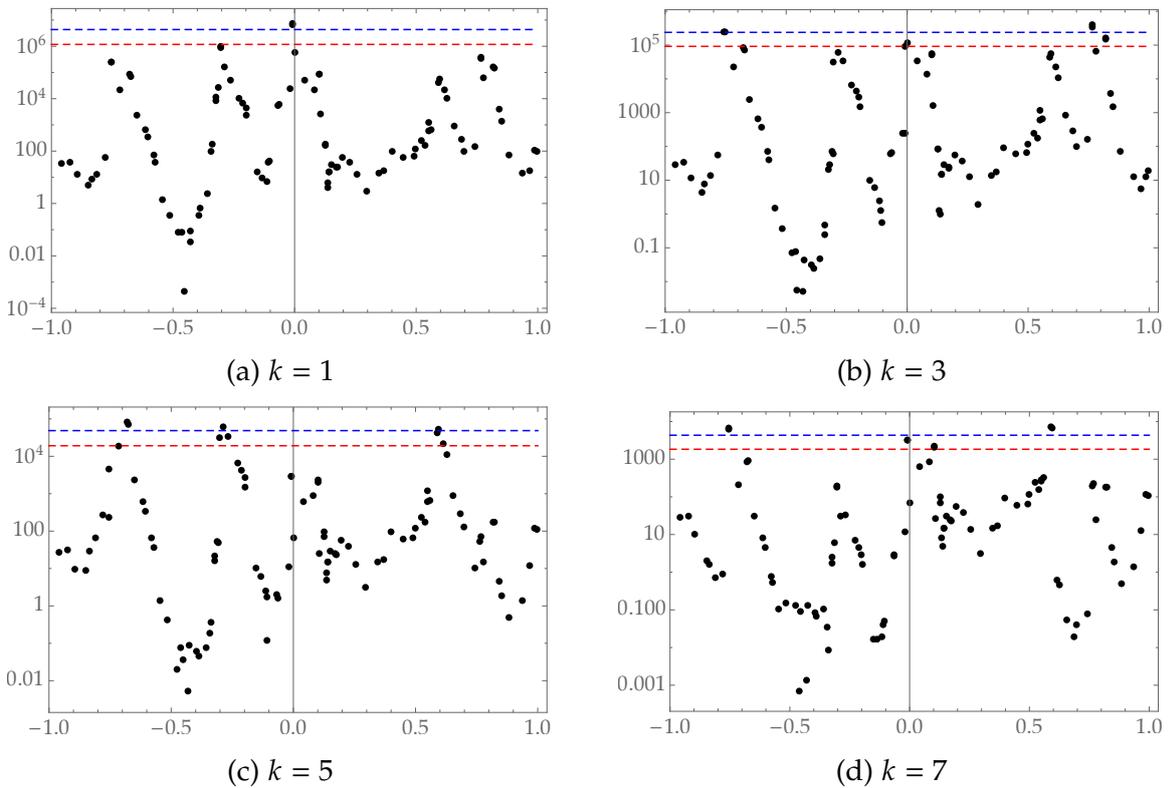
**Figura 4.5.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.2. Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores  $\eta \beta_{\text{máx}}^k$  y  $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ .



**Figura 4.6.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.3. Grafo del interpolante  $s_{f,X}^{*,k}$ , los datos (en gris) y los centros seleccionados hasta la iteración  $k$ -ésima (en verde).



**Figura 4.7.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.3. Aproximación final de  $f$  mediante el interpolante  $s_{f,X}^{*,8}$ .



**Figura 4.8.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.2.3. Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores  $\eta \bar{\beta}_{\max}^k$  y  $\bar{\beta}_s^k + \mu \beta_s^k$ .

## Sección 4.3

## APLICACIONES DEL MÉTODO DE DETECCIÓN

### 4.3.1. Detección de discontinuidades de derivada

Al igual que en la sección precedente, se considera una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de la que sólo se conoce el vector  $f|_X = (f(x_1), \dots, f(x_N))$  de valores de  $f$  en un conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  contenido en  $[a, b]$ , que suponemos ordenado en sentido creciente. Nos planteamos ahora si es posible determinar, a partir de estos datos, si la derivada de  $f$  presenta alguna discontinuidad de salto finito. Es obvio que no se puede aplicar directamente el algoritmo de detección, ya que no se dispone de los valores de  $f'$ . Sin embargo, esta carencia se puede subsanar estimando tales valores. Para ello, se pueden aplicar las siguientes fórmulas de tipo interpolatorio de tres puntos:

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 2, \dots, N-1,$$

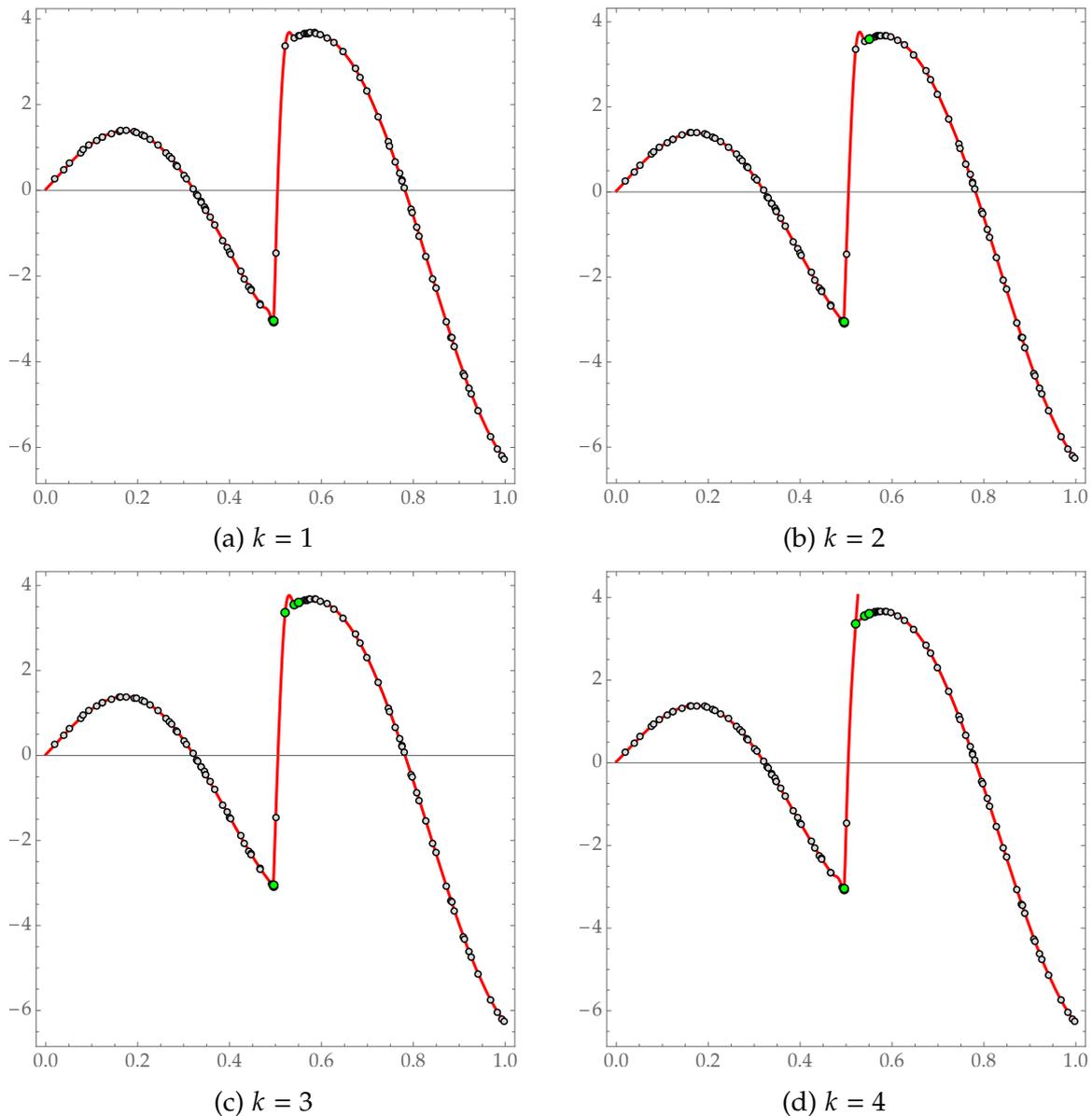
$$f'(x_N) \approx -\frac{f(x_{N-1}) - f(x_{N-2})}{x_{N-1} - x_{N-2}} + \frac{f(x_N) - f(x_{N-2})}{x_N - x_{N-2}} + \frac{f(x_N) - f(x_{N-1})}{x_N - x_{N-1}}.$$

Si los centros estuvieran equiespaciados, la segunda relación, por ejemplo, daría lugar a la bien conocida fórmula de diferencias centradas

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}.$$

Supongamos, por simplificar la exposición, que  $f$  es continua en  $[a, b]$  y que  $f'$  tiene una discontinuidad de salto en  $v \in (a, b)$ . Sea  $f'_a|_X = (f'_{a,1}, \dots, f'_{a,N})$  el vector obtenido a partir de los vectores  $X$  y  $f|_X$  mediante las fórmulas de derivación numérica indicadas. Es claro que, si  $v$  no está en el intervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , entonces  $f'_{a,i}$  constituye una aproximación aceptable de  $f'(x_i)$  y que la estimación será errónea, en todo caso, para aquellos centros próximos a  $v$ . Por ello, es razonable pensar, y así ocurre en realidad, que el algoritmo de detección será capaz de localizar la discontinuidad  $v$  si se aplica, tal cual está expuesto en la subsección 4.2.1, con  $f'_a|_X$  en lugar de  $f|_X$ . Así lo muestra el ejemplo 4.3.1 que ahora daremos.

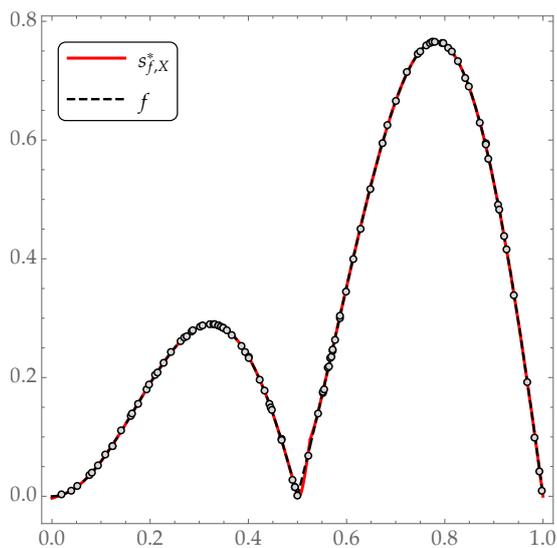
En general, antes de buscar las posibles discontinuidades de  $f'$  hay que cerciorarse



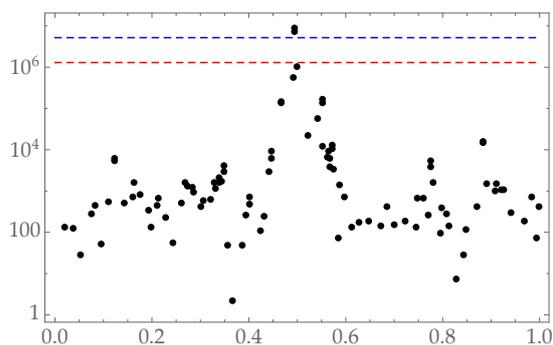
**Figura 4.9.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.3.1. Grafo del interpolante  $s_{f,X}^{*,k}$  de los datos de derivada, los datos de derivada (en gris) y los centros seleccionados hasta la iteración  $k$ -ésima (en verde).

de que  $f$  es continua en el intervalo de estudio. Si se tiene alguna duda al respecto, se puede aplicar el algoritmo de detección con el conjunto de centros  $X$  y el vector  $f|_X$ . Si  $f$  tuviese alguna discontinuidad, entonces hay que reducir el intervalo inicial y aplicar el algoritmo para la detección de las discontinuidades de  $f'$  en cada intervalo limitado por dos discontinuidades consecutivas de  $f$ .

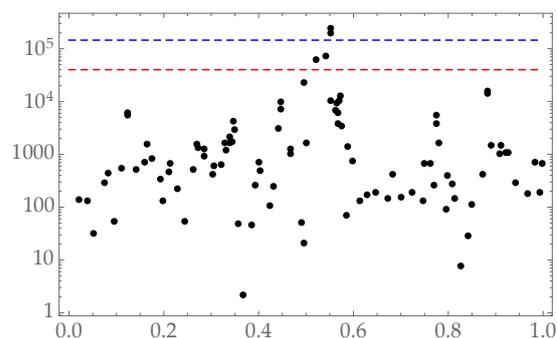
**Ejemplo 4.3.1.** Sea  $f(x) = |x \operatorname{sen}(2\pi x)|$  (cf. ejemplo 3.3.4), función que consideramos definida en el intervalo  $[0, 1]$ . Véase su grafo en la figura 3.7. Se trata de una función



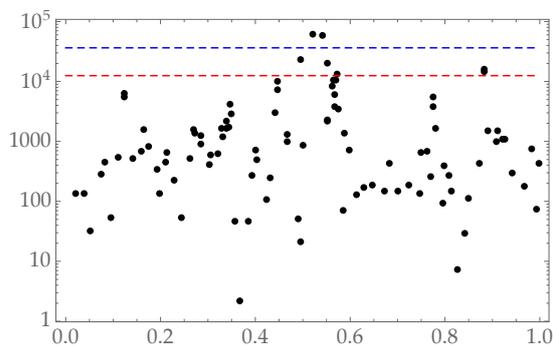
**Figura 4.10.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.3.1. Aproximación final de  $f$  mediante el interpolante  $s_{f,X}^*$ .



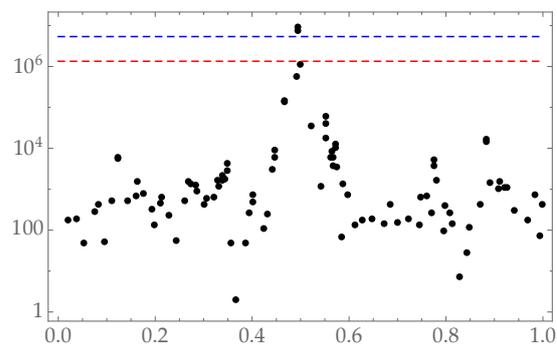
(a)  $k = 1$



(b)  $k = 2$



(c)  $k = 3$



(d)  $k = 4$

**Figura 4.11.** Detección de discontinuidades correspondiente al ejemplo 4.3.1. Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores  $\eta \beta_{\text{máx}}^k$  y  $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ .

continua cuya derivada es discontinua en  $x = 0.5$ . Vamos a ver que es posible detectar esta discontinuidad partiendo de un conjunto ordenado  $X$  de  $N = 100$  centros aleatoriamente distribuidos en  $[0, 1]$  y del correspondiente vector  $f|_X$ .

Mediante las fórmulas de derivación numérica se obtiene el vector  $f'_a|_X$ . Salvo en algún centro próximo a la discontinuidad de  $f'$ , los valores de este vector son bastante cercanos a los de  $f'|_X$ . Con estos datos, que se aprecian en la figura 4.9, se aplica el algoritmo de detección con los parámetros  $\eta = 0.6$ ,  $\mu = 1$ ,  $\delta = 2$ ,  $\ell = 3$ ,  $\rho = 2$  y  $k_{\max} = 20$ . Son suficientes cuatro iteraciones para obtener, como resultado, el conjunto  $D^4 = \{0.525895\}$ . Los centros seleccionados y los interpolantes RBFFA calculados en cada iteración aparecen en la figura 4.9. Los coeficientes de expansión están representados en la figura 4.11.

Así pues, se confirma numéricamente que  $f'$  tiene una discontinuidad de salto finito en algún punto cercano a  $v^4 = 0.525895$ , que es la estimación obtenida. Falta ahora utilizar este dato para aproximar la propia función  $f$ . Para ello, se calcula el interpolante RBFFA  $s_{f,X}^*$  de  $X$  y  $f|_X$  utilizando la misma función básica, es decir,  $\phi(r) = \phi_{3,1}(r/\rho)$ , con  $\rho = 2$ , y una función auxiliar adaptada a la discontinuidad encontrada, en concreto,

$$\zeta(x) = \begin{cases} -x, & x < 0.525895, \\ x - 1.05179, & x \geq 0.525895. \end{cases}$$

El resultado se presenta en la figura 4.10.

---

### 4.3.2. Reconstrucción de funciones no regulares

Como aplicación final, vamos a mostrar de qué modo se pueden integrar los métodos de aproximación RBFFA y de detección de discontinuidades para reconstruir por entero una función univariada no regular a partir de datos dispersos. El punto de partida, como siempre, es un conjunto de centros  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ , que suponemos ordenados crecientemente y que están contenidos en el intervalo  $[a, b]$  en el que está definida la función  $f$  que se quiere aproximar, así como el vector  $f|_X = (f(x_1), \dots, f(x_N))$  de valores de  $f$  en  $X$ . Se busca una función  $s$  tal que  $s|_X = f|_X$ , si se pretende interpolar, o  $s|_X \approx f|_X$ , si sólo se desea ajustar los datos.

Para obtener la función  $s$ , daremos los tres pasos siguientes:

- (a) localizar, si existen, las discontinuidades de  $f$ ;
- (b) ubicar las discontinuidades de  $f'$ , si existen, y
- (c) construir un aproximante  $s$  de  $f$  mediante el método RBFFA.

Para ilustrar cada paso, consideramos la función utilizada en el ejemplo 3.3.8, a saber,

$$f(x) = \begin{cases} 1.5 - \exp(-x) - 2.5x^2|x - 0.5|, & 0 \leq x < 1, \\ 15(x - 1.1)^2 \exp(-x) + 0.5, & 1 \leq x < 1.5, \\ 1 - \exp(-x), & 1.5 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Recordemos que  $f$  presenta una discontinuidad de salto en  $v_2 = 1$  y  $v_3 = 1.5$ , mientras que  $f'$  tiene tal tipo de discontinuidad en  $v_1 = 0.5$ .

Partimos de un conjunto  $X$  de  $N = 100$  centros aleatoriamente distribuidos en  $[0, 2]$  y del vector  $f|_X$  con los correspondientes valores de  $f$  en  $X$ . Aplicamos el método de detección a  $X$  y  $f|_X$  con los parámetros  $\eta = 0.6$ ,  $\mu = 3$ ,  $\delta = 2$ ,  $\ell = 3$ ,  $\rho = 2$  y  $k_{\text{máx}} = 20$ . La función básica es  $\phi(r) = \phi_{3,1}(r/\rho)$ . Se realizan 5 iteraciones y se obtiene  $D^5 = \{0.993803, 1.52505\}$ . El proceso queda reflejado en las figuras 4.12 y 4.13. Disponemos así de unas estimaciones de las discontinuidades de  $f$ , que vamos a denotar por  $d_2 = 0.993803$  y  $d_3 = 1.52505$ .

Para estudiar  $f'$ , conviene primero eliminar de  $X$  algún centro alrededor de las discontinuidades de  $f$ , evitando que haya centros que estén, con respecto a las discontinuidades, en el lado contrario de sus correspondientes estimaciones, o, en otras palabras, que haya centros entre una discontinuidad  $v_i$  y su estimación  $d_i$ . En nuestro caso, suprimimos un centro a cada lado de  $d_2$  y  $d_3$  y también los elementos asociados de  $f|_X$ . Sean  $X_1$  y  $f|_{X_1}$  el conjunto y el vector resultantes.

Dividimos el intervalo  $[a, b]$  en los subintervalos que determinan las discontinuidades de  $f$  que hemos hallado:

$$I_1 = [0, d_2] = [0, 0.993803], I_2 = [d_2, d_3] = [0.993803, 1.52505], I_3 = [d_3, 2] = [1.52505, 2].$$

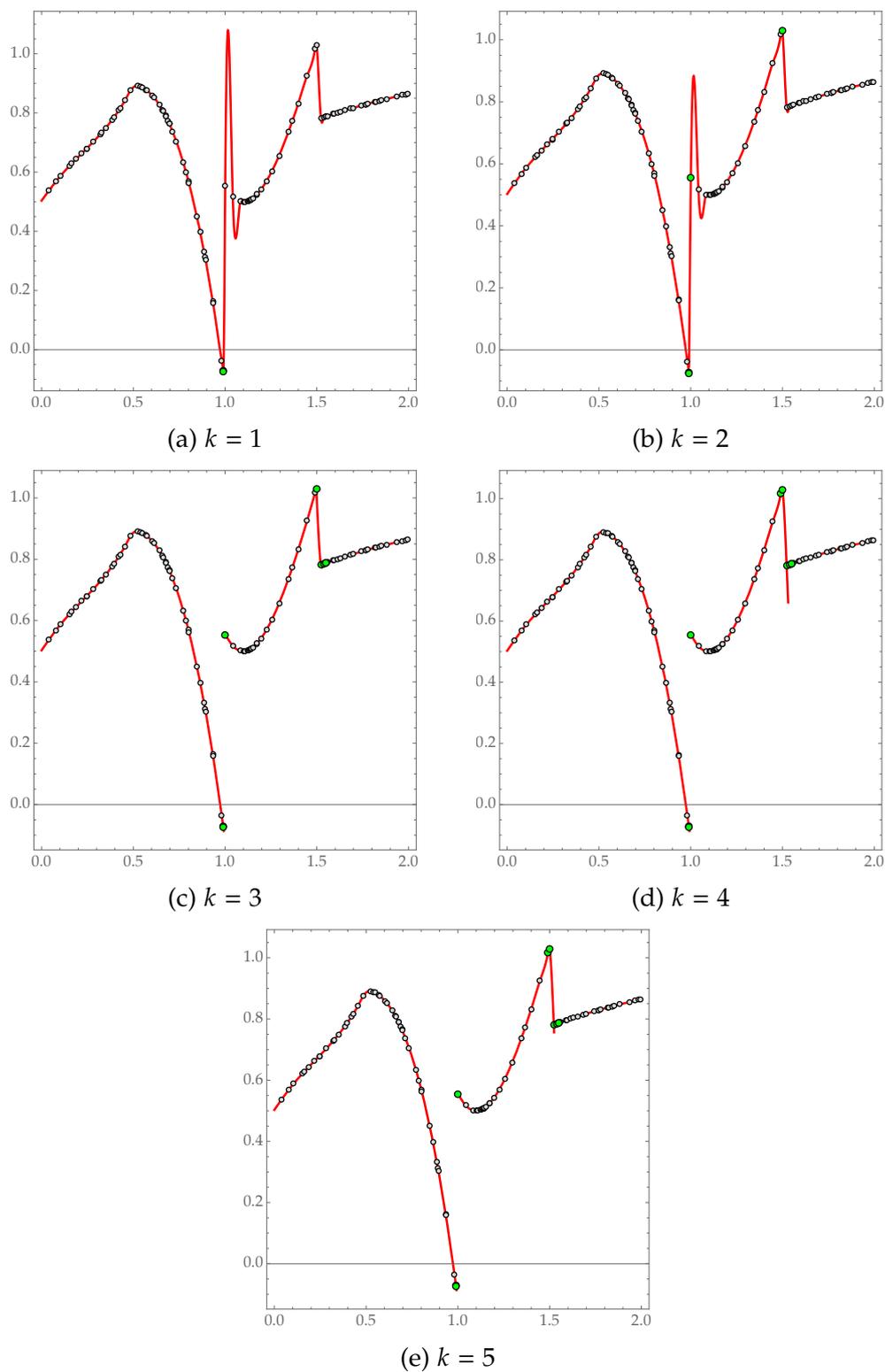
Ahora, para  $i = 1, 2, 3$ , tomamos los centros de  $X_1$  contenidos en  $I_i$  y usamos las fórmulas de derivación numérica para obtener el vector  $f'_a|_{X_1 \cap I_i}$  que aproxima los valores de  $f'$  en  $X_1 \cap I_i$ . Se aplica entonces el método de detección de discontinuidades a  $X_1 \cap I_i$  y  $f'_a|_{X_1 \cap I_i}$ . Hemos utilizado, para ello, los mismos parámetros que para el análisis de  $f$ , aunque, desde luego, se podrían haber escogido unos valores distintos.

Para el intervalo  $I_1$  se realizan 4 iteraciones, recogidas en las figuras 4.14 y 4.15. Resulta la estimación  $d_1 = 0.508442$  de la discontinuidad  $v_1 = 0.5$  de  $f'$ . En los intervalos  $I_2$  e  $I_3$  sólo se efectúa una iteración (véase la figura 4.16), dando como resultado el algoritmo de detección que  $f'$  es continua en ambos intervalos. Es interesante reseñar que la elección de un valor relativamente alto del parámetro  $\mu$  no influye en la precisión de la detección de las discontinuidades obtenidas, tanto de  $f$  como de  $f'$ . Sin embargo, evita un falso positivo en el intervalo  $I_3$ .

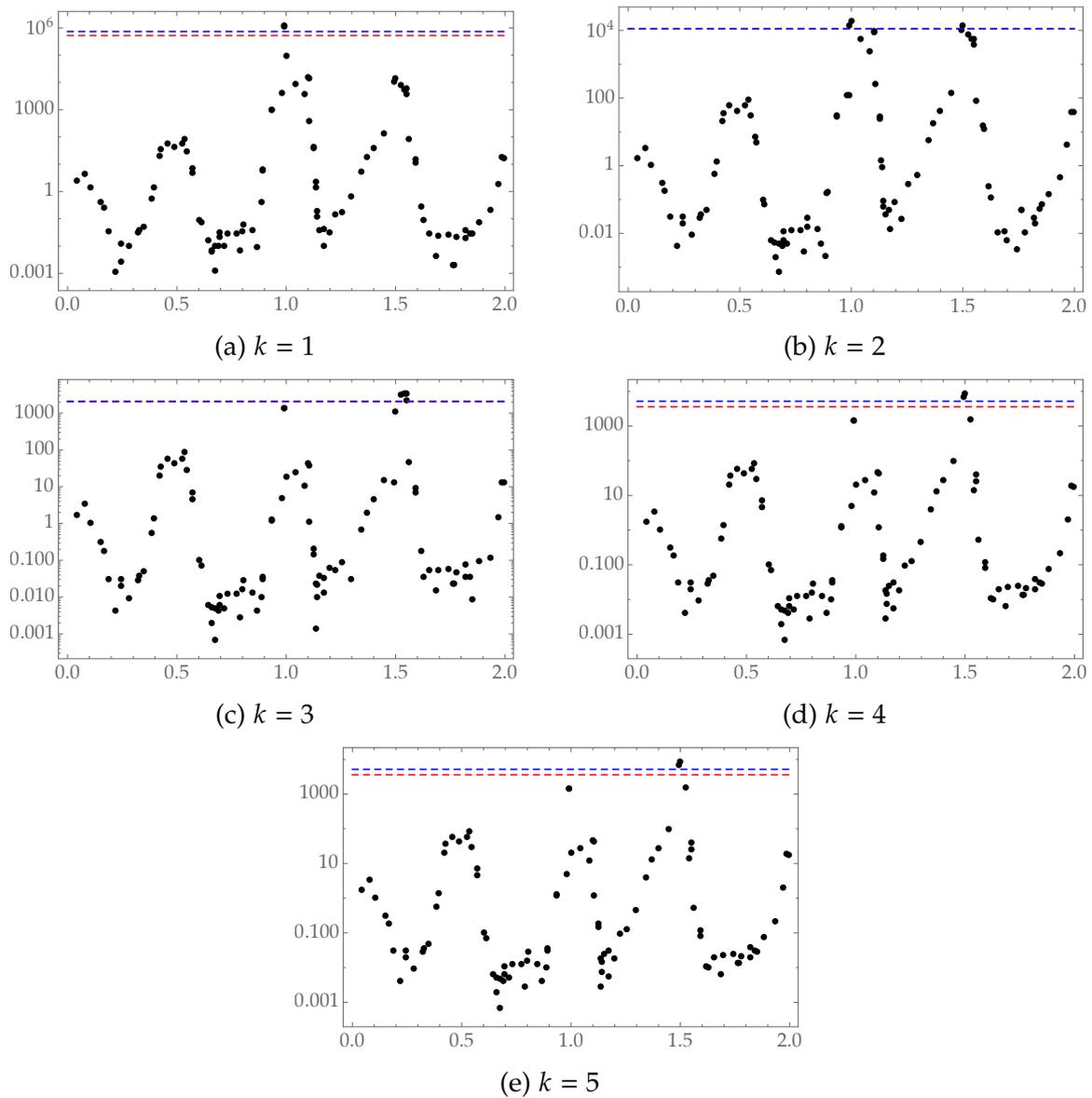
Una vez encontradas las discontinuidades de  $f$  y  $f'$ , estamos en condiciones de aproximar nuevamente la función  $f$  con el método RBFFA. Primero construimos la función auxiliar  $\zeta$ , que es

$$\zeta(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < 0.508442, \\ x - 1.01688, & 0.508442 \leq x < 0.993803, \\ 1.97692, & 0.993803 \leq x < 1.52505, \\ 3.97692, & 1.52505 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

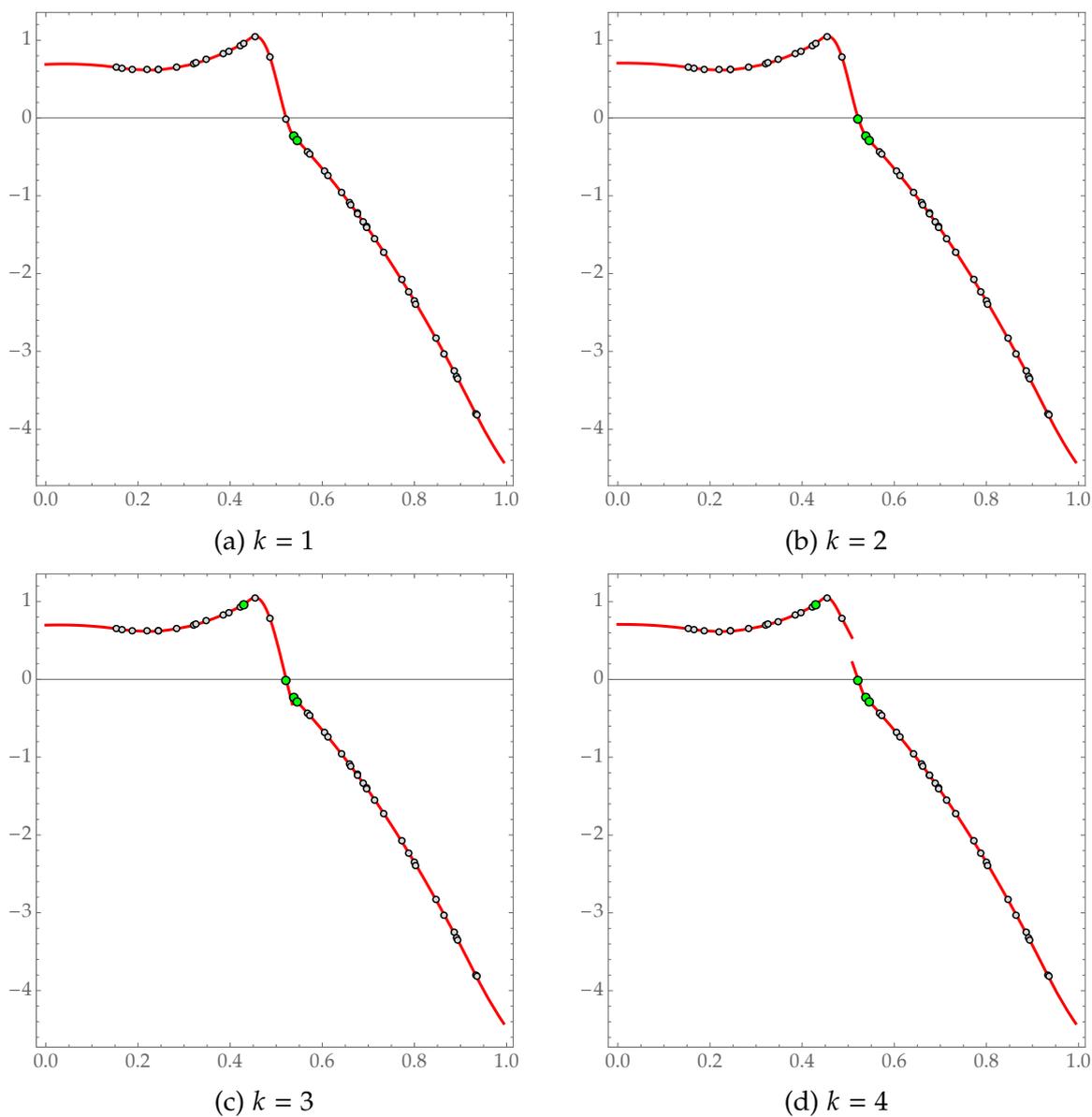
Su grafo aparece en la figura 4.17(a). Luego hallamos el interpolante  $s_{f,X}^*$  a partir de  $X_1$ ,  $f|_{X_1}$  y  $\zeta$ , empleando la misma función básica. Se llega así a la función buscada que aproxima la función  $f$ . A efectos de comparación, se muestran en la figura 4.17(b) los grafos de  $f$  y de  $s_{f,X}^*$ .



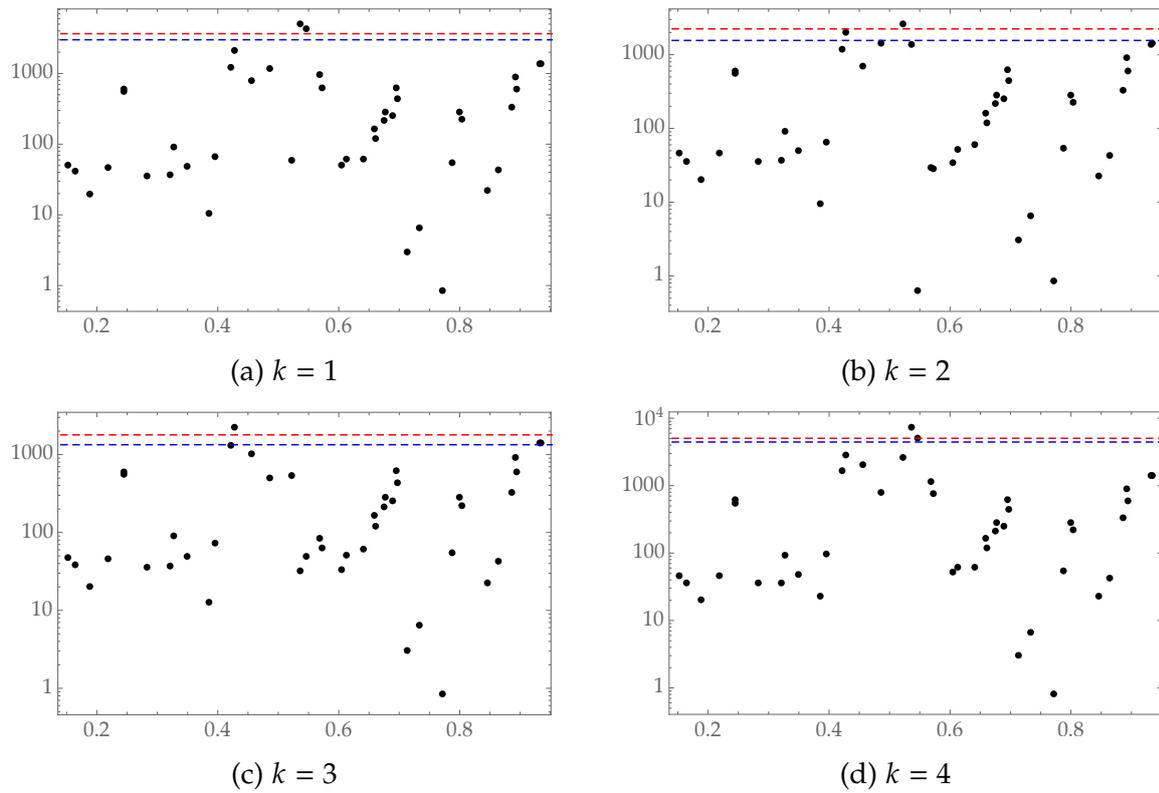
**Figura 4.12.** Detección de las discontinuidades de  $f$  (cf. subsección 4.3.2). Para cada  $k$ , grafo de  $s_{f,X}^{*,k}$ , datos (en gris) y centros seleccionados hasta la iteración  $k$ -ésima (en verde).



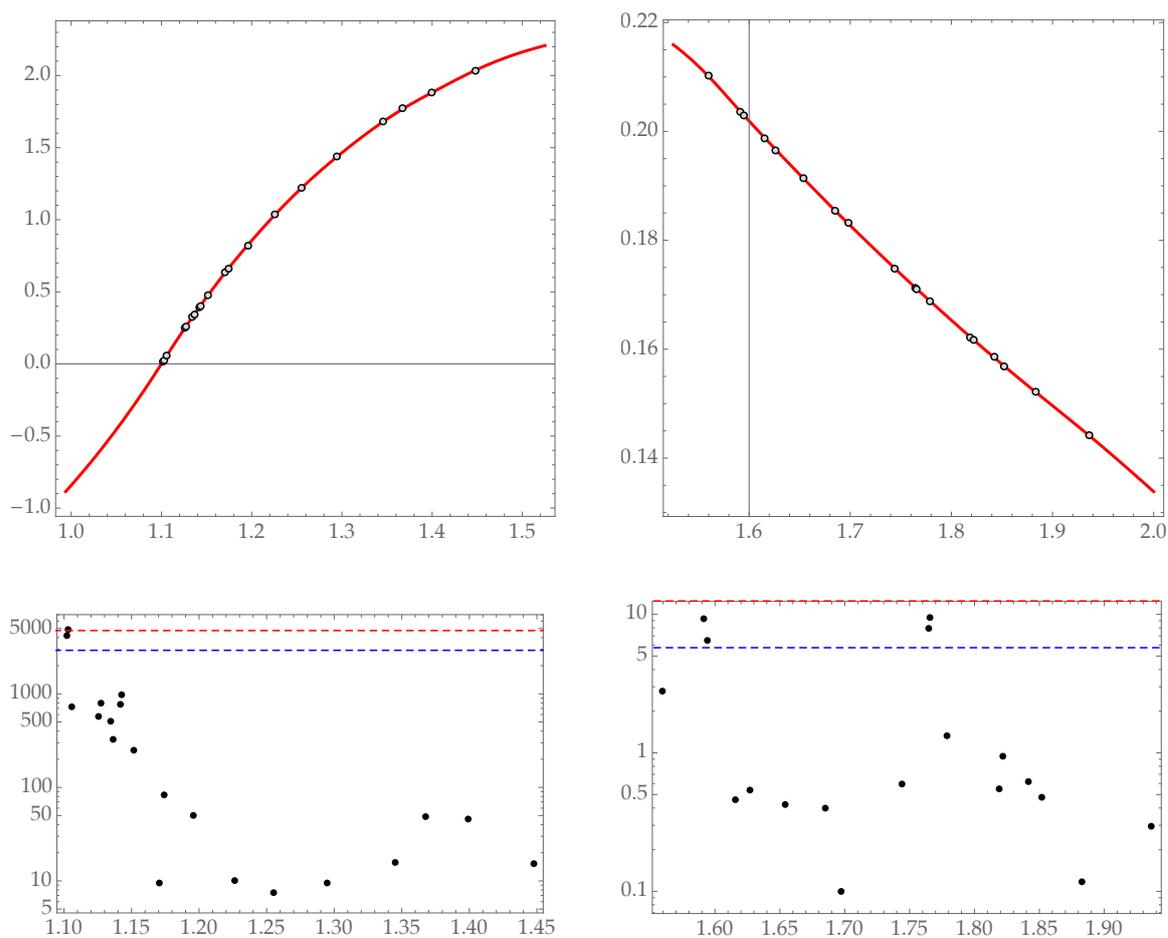
**Figura 4.13.** Detección de las discontinuidades de  $f$  (cf. subsección 4.3.2). Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores  $\eta \beta_{\text{máx}}^k$  y  $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ .



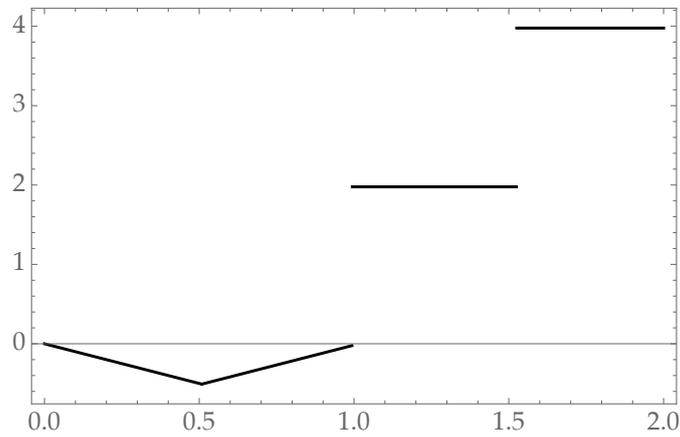
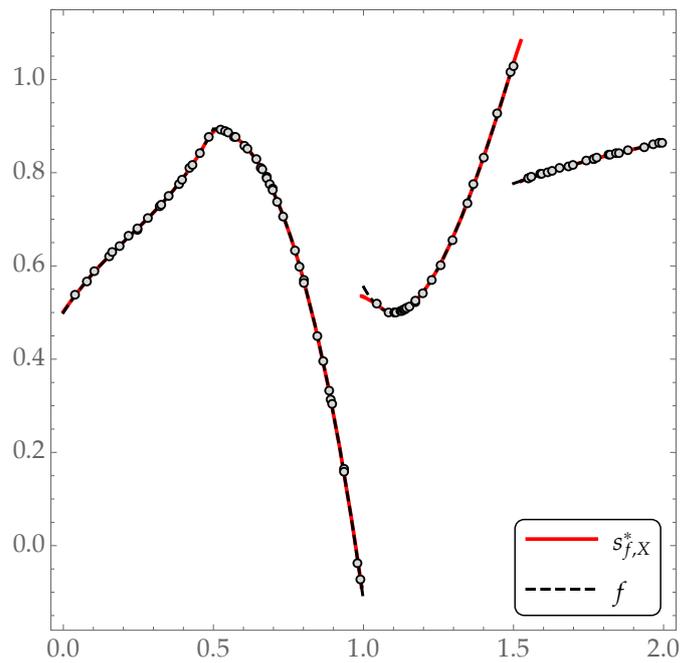
**Figura 4.14.** Detección de las discontinuidades de  $f'$  en  $[0, 0.993803]$  (cf. subsección 4.3.2). Para cada  $k$ , grafo de  $s_{f,X}^{*,k}$ , datos estimados de derivada (en gris) y centros seleccionados hasta la iteración  $k$ -ésima (en verde).



**Figura 4.15.** Detección de las discontinuidades de  $f'$  en  $[0, 0.993803]$  (cf. subsección 4.3.2). Valores absolutos de los coeficientes de expansión. En azul y rojo se marcan, respectivamente, las líneas correspondientes a los valores  $\eta \beta_{\text{máx}}^k$  y  $\bar{\beta}^k + \mu \beta_s^k$ .



**Figura 4.16.** Detección de las discontinuidades de  $f'$  (cf. subsección 4.3.2). A izquierda, intervalo  $[0.993803, 1.52505]$ . A derecha, intervalo  $[1.52505, 2]$ . En todos los casos,  $k = 1$ .

(a) Grafo de la función auxiliar  $\zeta$ (b) Grafos de  $f$  y del interpolante  $s_{f,X}^*$ **Figura 4.17.** Reconstrucción final de la función  $f$  (cf. subsección 4.3.2).



---

## CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

---

Este trabajo es un estudio de la aproximación de funciones explícitas con discontinuidades a través de funciones de base radial para obtener métodos y aplicar tales métodos a la representación de curvas y superficies no regulares. El estudio se centra en la programación de los métodos obtenidos, la interpretación de los resultados, la obtención de errores que se producen al aplicar los métodos en los ejemplos considerados y la comparación con algunos métodos existentes. En los trabajos publicados sobre el ajuste de superficies con fallas verticales u oblicuas se utilizan las RBF para conseguir aproximantes o interpolantes con las mismas fallas. En los trabajos conocidos al respecto esas fallas o líneas de discontinuidad separan el dominio de la superficie determinando dos o más componentes conexas disjuntas, coloquialmente se dice que cortan el dominio.

A continuación se detallan las principales aportaciones de esta memoria.

- La estrategia de interpolación de funciones con una discontinuidad de salto con un conjunto de centros equiespaciados definida por Jung [39] para eliminar las oscilaciones del interpolante cerca de la discontinuidad utiliza la multicuádrica como RBF y cambia esa función de base por la función radial,  $\phi(r) = r$ , en los dos centros más cercanos a la discontinuidad. Se han implementado ejemplos en los que se utilizan varias RBF para interpolar con otras RBF no diferenciables en los centros que están junto a la discontinuidad para eliminar las oscilaciones de los interpolantes de funciones con varias discontinuidades de salto empleando un conjunto de centros dispersos.
- La estrategia descrita en la conclusión anterior es capaz de conseguir aproximantes cuya primera derivada presenta una o más discontinuidades de salto considerando dichas discontinuidades como centros y cambiando allí la RBF por otra no diferenciable.
- Se ha definido la *aproximación RBFFA* que es capaz de ajustar funciones no regulares usando una función auxiliar que presenta las mismas discontinuidades. En

algunas ocasiones esta aproximación consigue mejores resultados que el esquema estándar para funciones regulares usando una función auxiliar que puede ser constante.

- Por sus especiales características, es conveniente utilizar funciones radiales de soporte compacto para que la aproximación RBFFA sea realmente efectiva.
- Se han propuesto diferentes funciones auxiliares, y estudiado experimentalmente la conveniencia de su uso, para ajustar funciones univariadas no regulares con la aproximación RBFFA según las discontinuidades que presente la función o su derivada.
- La aproximación RBFFA ha sido redefinida y adaptada para ser aplicada a superficies no regulares que presentan fallas verticales, oblicuas o de ambos tipos. Con la misma idea, este método utiliza una función auxiliar que presenta las mismas fallas que la función a aproximar. La técnica consigue buenos aproximantes y presenta una ventaja ante otros métodos existentes. Los métodos que existen solo consideran líneas de discontinuidad que separan el dominio de la superficie determinando dos o más componentes conexas disjuntas. En cambio, la técnica propuesta en este trabajo no tiene esta limitación y permite aproximar más tipos de superficies no regulares.
- Las técnicas propuestas en esta memoria necesitan conocer de antemano los puntos donde la función es discontinua. De este modo, se ha implementado un método iterativo, que usa la aproximación RBFFA, para localizar aproximadamente donde la función a aproximar presenta discontinuidades de salto. Además, el método puede localizar discontinuidades de la primera derivada de la función, tomando como valores de la derivada los obtenidos mediante fórmulas de tipo interpolatorio de tres puntos. El método también puede determinar si la función y su derivada son continuas. Por último, se ha implementado el método de detección junto con la aproximación RBFFA para reconstruir por entero una función univariada no regular a partir de datos dispersos.

Se proponen las siguientes líneas de investigación como continuación de las iniciadas en esta tesis:

- Desarrollar un método iterativo que sea una aplicación de la aproximación RBFFA de superficies no regulares para detectar las líneas de falla, verticales y oblicuas, de una superficie.

- 
- Conseguir un resultado de convergencia de la aproximación RBFFA, local o global y obtener estimaciones del error de aproximación, en función de la distancia de llenado,

$$h_{X,\Omega} = \sup_{x \in \Omega} \min_{x_j \in X} \|x - x_j\|_2,$$

donde  $\Omega$  es el dominio de la función que se quiere aproximar. De este modo la convergencia se estudia para  $h_{X,\Omega} \rightarrow 0$ .

- Estudiar si la aproximación RBFFA puede ser adaptada para ser aplicada a funciones no explícitas.
- Realizar distintas aplicaciones de la aproximación RBFFA. Por ejemplo, a la resolución de ecuaciones diferenciales y a la construcción de redes neuronales.



---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] ALLASIA, G., BESENGHI, R., AND CAVORETTO, R. Adaptive detection and approximation of unknown surface discontinuities from scattered data. *Simul. Model. Pract. Theory* 17 (2009), 1059–1070.
- [2] AMAT, S., DONAT, R., LIANDRAT, J., AND TRILLO, C. Analysis of a New Nonlinear Subdivision Scheme. Applications in Image Processing. *Found. Comput. Math.* 6 (2006), 193–225.
- [3] ARCANGÉLI, R., LÓPEZ DE SILANES, M. C., AND TORRENS, J. J. *Multidimensional Minimizing Splines*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.
- [4] ARCANGÉLI, R., LÓPEZ DE SILANES, M. C., AND TORRENS, J. J. An extension of a bound for functions in Sobolev spaces, with applications to  $(m, s)$ -spline interpolation and smoothing. *Numer. Math.* 107, 2 (2007), 181–211.
- [5] ATTÉIA, M. *Hilbertian Kernels and Spline Functions*. Studies in Computational Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [6] BOZZINI, M., AND LENARDUZZI, L. Reconstruction of surfaces from a not large data set by interpolation. *Rend. Mat. Appl.* (7) 25 (2005), 223–239.
- [7] BOZZINI, M., AND LENARDUZZI, L. Stable multiquadric approximation by local thinning. In *Tenth International Conference Zaragoza-Pau on Applied Mathematics and Statistics* (2010).
- [8] BOZZINI, M., AND LENARDUZZI, L. Recovering functions: a method based on domain decomposition. *Math. Comput. Simulation* 99 (2014), 95—107.
- [9] BOZZINI, M., LENARDUZZI, L., AND ROSSINI, M. Non-regular Surface Approximation. In *Mathematical Methods for Curves and Surfaces* (Berlin, Heidelberg, 2014), Springer Berlin Heidelberg, pp. 68–87.
- [10] BOZZINI, M., LENARDUZZI, L., ROSSINI, M., AND SCHABACK, R. Interpolation by basis functions of different scales and shapes. *Calcolo* 41 (2004), 77–87.

- [11] BOZZINI, M., LENARDUZZI, L., AND SCHABACK, R. Adaptive interpolation by scaled multiquadrics. *Adv. Comput. Math.* 16 (2002), 375–387.
- [12] BOZZINI, M., AND ROSSINI, M. Approximating surfaces with discontinuities. *Math. Comput. Model.* 31, 6–7 (2000), 193–216.
- [13] BOZZINI, M., AND ROSSINI, M. The detection and recovery of discontinuity curves from scattered data. *J. Comput. Appl. Math.* 240 (2013), 148–162.
- [14] BUHMANN, M. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. No. 12 in Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [15] BUHMANN, M., AND DINEW, S. Limits of radial basis function interpolants. *Communications on Pure and Applied Analysis* 6(3) (2007), 569–585.
- [16] CRAMPTON, A., AND MASON, J. C. Detecting and approximation fault lines from lines from randomly scattered data. *Numerical Algorithms* 39 (2005), 115–130.
- [17] CUCKER, F., AND SMALE, S. On the mathematical foundations of learning. *Bulletin AMS* 39 (2002), 1–49.
- [18] DE MARCHI, S., AND SCHABACK, R. *Nonstandard Kernels and their Applications*. Preprint-Serie des Instituts für Numerische und Angewandte Mathematik, Göttingen, 2009.
- [19] DRISCALL, T., AND HERYUDONO, A. Adaptive residual subsampling methods for radial basis function interpolation and collocation problems. *Comput. Math. Appl.* 53 (2007), 927–939.
- [20] DUCHON, J. Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. *RAIRO Anal. Numer.* 10(12) (1976), 5–12.
- [21] DUCHON, J. *Splines minimizing rotation invariant semi-norms in Sobolev spaces*. Springer, Berlin, 1977, pp. 85–100. In W. Schempp and K. Zeller, eds.
- [22] DUCHON, J. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces. *Lecture Notes Math.* 571 (1978), 85–100.
- [23] FASSHAUER, G. Solving differential equations with radial basis functions: multilevel methods and smoothing. *Advances in Computational Mathematics* 11 (1999), 139–159.
- [24] FASSHAUER, G. *Meshfree Approximation Methods with Matlab*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007.

- 
- [25] FERREIRA, A., KANSA, E., FASSHAUER, G., AND LEITAO, V. *Second Eccomas Thematic Conference on Meshless Methods*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., University of Porto, Porto, 2007.
- [26] FORNBERG, B. *A practical guide to pseudospectral methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [27] FORNBERG, B., AND FLYER, N. *The Gibbs Phenomenon for Radial Basis Functions*. Sampling Publishing, Potsdam (New York), 2005. In "The Gibbs Phenomenon in Various Representations and Applications".
- [28] FORNBERG, B., FLYER, N., PIRET, C., AND HOVDE, S. Locality properties of radial basis function expansion coefficients for equispaced interpolation. *IMA Journal of Numerical Analysis* 1 (2007), 121–142.
- [29] FREEDEN, W., GERVENS, T., AND SCHREINER, M. *Constructive approximation on the sphere*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [30] GOLITSCHKE, M., AND LIGHT, W. Interpolation by polynomials and radial basis functions on spheres. *Constructive Approximation* 17 (2000), 1–18.
- [31] GOUT, C., LE GUYADER, C., ROMANI, L., AND SAINT-GUIRONS, A.-G. Approximation of surfaces with fault(s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process,  $D^m$ -splines and the finite element method. *Numer. Alg.* 48, 1-3 (2008), 67–92.
- [32] GUESSAB, A., MONCAYO, M., AND SCHMEISSER, G. A class of nonlinear four-point subdivision schemes properties in terms of conditions. *Adv. Comput. Math* 37 (2011), 151–190.
- [33] GUTZMER, T., AND ISKE, A. Detection of discontinuities in scattered data approximation. *Numer. Alg* 16 (1997), 155–170.
- [34] ISKE, A. *Multiresolution Methods in Scattered Data Modelling*. No. 37 in Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, Berlin, 2004.
- [35] IZQUIERDO, D., LÓPEZ DE SILANES, M. C., AND PARRA, M. C. Compactly supported RBF approximation for functions with jump discontinuities. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Approximation Methods and Numerical Modelling in Environment and Natural Resources: MAMERN'11* (2011), B. Amaziane, D. Barrera, M. Rodríguez, and D. Sibibh, Eds., Editorial Universidad de Granada, pp. 439–442.

- [36] IZQUIERDO, D., LÓPEZ DE SILANES, M. C., AND PARRA, M. C. Reduction of Gibbs Phenomenon for 1D RBF interpolation. In *Eleventh International Conference Zaragoza-Pau on Applied Mathematics and Statistics* (2012), pp. 149–159.
- [37] IZQUIERDO, D., LÓPEZ DE SILANES, M. C., AND PARRA, M. C. 1D RBF approximation of non-regular explicit functions. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Approximation Methods and Numerical Modelling in Environment and Natural Resources* (2017), pp. 239–246.
- [38] IZQUIERDO, D., LÓPEZ DE SILANES, M. C., PARRA, M. C., AND TORRENS, J. J. CS-RBF interpolation of surfaces with vertical faults from scattered data. *Math. Comput. Simulat.* 102 (2014), 11–23.
- [39] JUNG, J.-H. A note on the Gibbs phenomenon with multiquadric radial basis functions. *Appl. Numer. Math.* 57 (2007), 213–229.
- [40] JUNG, J.-H., AND DURANTE, V. R. An iterative adaptive multiquadric radial basis function method for detection of local jump discontinuities. *Appl. Numer. Math.* 59 (2009), 1449–1466.
- [41] JUNG, J.-H., GOTTLIEB, S., AND KIM, S. O. Iterative adaptive RBF methods for detection of edges in two-dimensional functions. *Appl. Numer. Math.* 61 (2011), 77–91.
- [42] LARSSON, E., AND FORNBERG, B. Theoretical and computational aspects of multivariate interpolation with increasingly flat radial basis functions. *Comput. Math. Appl.* 49 (2005), 103–130.
- [43] LI, S., LING, L., AND CHEUNG, K. C. Discrete least-squares radial basis functions approximations. *Appl. Math. and Comput.* 355 (2019), 542–552.
- [44] LÓPEZ DE SILANES, M. C., PARRA, M. C., PASADAS, M., AND TORRENS, J. J. Spline approximation of discontinuous multivariate function from scattered data. *J. Comput. Appl. Math.* 131 (2001), 281–298.
- [45] LÓPEZ DE SILANES, M. C., PARRA, M. C., AND TORRENS, J. J. On a new characterization of finite jump discontinuities and its application to vertical fault detection. *Math. Comput. Simul.* 77 (2008), 247–256.
- [46] MADYCH, W. R., AND NELSON, S. A. Bounds on multivariate polynomials and exponential error estimates for multiquadric interpolation. *J. Approx. Theory* 70 (1992), 94–114.

- 
- [47] NARCOWICH, F., AND WARD, J. Norms of inverses and condition numbers for matrices associated with scattered data. *J. Approx. Theory* 64 (1991), 69–94.
- [48] NARCOWICH, F., WARD, J., AND WENDLAND, H. Sobolev Error Estimates and a Bernstein Inequality for Scattered Data Interpolation via Radial Basis Functions. *Constr. Approx.* 24 (2006), 175–186.
- [49] NISBET, R., ELDER, J., AND MINER, G. *Statistical Analysis and Data Mining*. Academic Press, New York, 2009.
- [50] POWELL, M. The uniform convergence of thin plate spline interpolation in two dimensions. *Numer. Math.* 68 (1994), 107–128.
- [51] ROMANI, L., ROSSINI, M., AND SCHENONE, D. Edge detection methods based on RBF interpolation. *J. Comput. Appl. Math.* 349 (2019), 532–547.
- [52] ROSSINI, M. Interpolating functions with gradient discontinuities via variably scaled kernels. *Dolom. Res. Notes Approx.* 11 (2018), 3–14.
- [53] SCHABAK, R., AND WENDLAND, H. *Kernel Techniques: From Machine Learning to Meshless Methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [54] WENDLAND, H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Adv. Comput. Math.* 4 (1995), 522–536.
- [55] WENDLAND, H. *Scattered Data Approximation*. No. 17 in Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [56] WU, Z. Compactly supported positive definite radial functions. *Adv. Comput. Math.* 4 (1995), 283–292.
- [57] WU, Z., AND SCHABAK, R. Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data. *IMA J. Numer. Anal.* 13 (1993), 13–27.