



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

Análisis del fenómeno de rodadura de una rueda de ferrocarril de diámetro reducido para vagones de mercancías, en función de factores de operación

Analysis of the rolling phenomenon of a reduced-diameter railway wheel for freight wagons, as a function of operating factors

Autor

David Santiago Pellicer Zubeldía

Director

Emilio Larrodé Pellicer

Escuela de Ingeniería y Arquitectura
2021

Prólogo. Carta al lector, valoración personal y agradecimientos.

El autor del trabajo que ocupa el presente documento desea expresar lo que sigue:

“Yo, don David Santiago Pellicer Zubeldía, autor del Trabajo Fin de Máster (o, más acorde con el registro culto de la lengua española, *Tesis Final de Maestría*) titulado “Análisis del fenómeno de rodadura de una rueda de ferrocarril de diámetro reducido para vagones de mercancías en función de factores de operación”, me complazco en darle la bienvenida a mi tesis.

Espero que disfrute de esta tesis a la que he dedicado, con gusto, un esfuerzo titánico. Esta tesis representa el maridaje entre la Ingeniería Industrial y la Ingeniería Civil, pues aborda temas tanto del material rodante (propios de la primera) cuanto de la infraestructura y la superestructura ferroviarias (propios de la segunda). Además, es una tesis sin precedentes, la cual recoge de una gran variedad de fuentes el conocimiento ferroviario acumulado durante decenios y lo integra armoniosamente.



Figura s/n. Retrato del autor.

Personalmente, he desarrollado gran parte de esta información y la he ilustrado con ilustraciones de elaboración propia, las cuales han resultado de laboriosa ejecución por su propia constitución: estas ilustraciones se crean mediante el apilamiento de capas de objetos (información), que es un procedimiento que permite ilustrar un determinado concepto con todo lujo de detalle. Como verá, estas imágenes amenizan la lectura en gran medida y, de hecho, le puedo dar un dato que apoya esta afirmación: la densidad de palabras en este documento es 282 palabras por página (282,123, más precisamente), que es de dos a tres veces inferior al número de palabras que caben en una página llena de texto dispuesto en una única columna. Espero verdaderamente que la lectura le resulte entretenida y aprenda bastante sobre los temas tratados. Si tiene alguna duda, no dude en contactarme a través de esta dirección de correo: dasapezu@outlook.com.

Tras haber recibido al lector, quisiera realizar valorar qué me ha aportado la tesis a nivel personal. En primer lugar, como aspirante al título de Ingeniero Industrial por el que llevo luchando un sexenio, la entrega y defensa de esta tesis me va a granjear el acceso al título. En segundo lugar, esta tesis me ha servido para especializarme *de iure* en la especialidad de Máquinas y Vehículos y *de facto* en la especialidad de Ingeniería Ferroviaria, no reconocida oficialmente. De hecho, lamento la inexistencia del Grado Universitario en Ingeniería Ferroviaria, que debería ser una titulación habilitante para la proyección de material rodante y de infraestructuras, superestructuras e instalaciones ferroviarias; mimetizando así el Grado Universitario en Ingeniería Aeronáutica, cuyas atribuciones profesionales abarcan desde la proyección de aeronaves hasta la proyección de aeropuertos. En tercer y último lugar, he adquirido unos conocimientos muy amplios en el campo de la Ingeniería Ferroviaria tras haber dedicado un semestre entero a la elaboración de esta tesis (entre 800 horas de trabajo, estimando a la baja, y 1.150 horas de trabajo, estimando al alza). Espero aplicar los conocimientos adquiridos lo largo de mi vida laboral.

Esta tesis no habría sido posible sin mi director, el catedrático don Emilio Larrodé Pellicer, un ingeniero industrial que ejerce su profesión en el área de Ingeniería e Infraestructura de los Transportes del departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Zaragoza. A él agradezco todo cuanto ha hecho por ayudarme en estos últimos meses, que se ha traducido principalmente en el tiempo que me ha dedicado, un tiempo por el cual no ha recibido ninguna bonificación en su salario. Emilio comenzó a ayudarme después de que ciertas personas rechazaran dirigirme una tesis sobre Ingeniería Ferroviaria, ya que a raíz de estas contrariedades me propuso la realización de una tesis acerca de este tema. Él me aclaró desde el primer momento que se trataba de un tema propio de una Tesis Doctoral, así que, en el fondo, he realizado una Tesis Doctoral en un periodo de tiempo de plusmarca. Prueba de ello es la inmensa expansión de mis conocimientos, hasta el punto de que Emilio me confesó, en un acto de humildad que le honra, que yo he llegado a saber más que él acerca del tema.

Para finalizar este escrito, quiero reconocer y agradecer la ayuda prestada por estas personas, quienes resolvieron la totalidad de mis dudas con una gran disposición y diligencia:

- ✓ El ingeniero industrial don Jesús Cuartero Salafranca, quien es profesor titular en la misma área que Emilio. Jesús me resolvió dudas sobre las propiedades de algunos grados de acero.
- ✓ El ingeniero de sistemas (entre otros títulos) don Miguel Ángel Matute Duarte, que es un veterano director de tesis actualmente retirado. Miguel Ángel me envió información sobre el retorneado de las ruedas y me resolvió algunas dudas al respecto.
- ✓ El ingeniero mecánico Herr Oldrich Polach, quien es catedrático en la Universidad Técnica de Berlín. Oldrich Polach es el autor de un método que he aplicado en el trabajo, método sobre cuya implementación me surgieron ciertas dudas, las cuales él resolvió con mucho gusto.
- ✓ El ingeniero industrial don Jesús Jacobo Villacampa Dourdil, quien ejerce su profesión como trabajador en una empresa ferroviaria. Jesús Jacobo me ayudó a disipar ciertas dudas genéricas acerca de la interacción del material rodante con la vía.
- ✓ El matemático don Fernando Vea Muniesa, quien ejercía su profesión como profesor titular en el área de Matemática Aplicada del departamento homónimo de la Universidad de Zaragoza. Fernando me ayudó a salvar la parte con mayor complejidad matemática del trabajo: el promediado del ángulo de lazo por vía de la integración.
- ✓ La ingeniera de caminos, canales y puertos e ingeniera electrónica doña Rosa Victoria Vicente Vas, quien es profesora titular en la Escuela Universitaria Politécnica de La Almunia de Doña Godina, que es centro adscrito a la Universidad de Zaragoza. Rosa Victoria me respondió a ciertas preguntas que le planteé sobre el diseño del trazado ferroviario.



Firmado por

don David Santiago Pellicer Zubeldía

A día

Veintitrés de septiembre del año dos mil veintiuno

En

Zaragoza, Reino de España.”

Universidad Zaragoza

Figuras s/n. Logotipo solemne de la Universidad
(izquierda) y rúbrica del autor (derecha).

Resumen.

Análisis del fenómeno de rodadura de una rueda de ferrocarril de diámetro reducido para vagones de mercancías, en función de factores de operación.

En este trabajo se aborda el problema del desgaste de una rueda de ferrocarril de diámetro reducido, para la cual se determina su vida útil en función de los factores de operación más significativos. La falta de información motiva a este estudio, ya que las ruedas de diámetro reducido comenzaron a emplearse recientemente en respuesta a las nuevas necesidades logísticas. Estas necesidades se basan en el incremento de la altura de las cajas de los vagones y en la creación de autopistas ferroviarias en trazados convencionales, cuyos gálibos son reducidos, lo cual obliga a la implantación de soluciones tales como el montaje de este tipo de ruedas en los vagones para así poder salvar estas limitaciones geométricas.

Para alcanzar el objeto del proyecto se sigue un procedimiento complejo y extenso, pues comprende decenas de tareas (véase el [esquema relacional del trabajo](#) en el primer capítulo). Este procedimiento se puede resumir sucintamente en las ideas – fuerza que siguen:

- ✓ Estudio del contacto rueda – carril, donde intervienen los conceptos del fenómeno de la rodadura.
- ✓ Formulación matemática del problema del desgaste.
- ✓ Recopilación de dimensiones y planteamiento del caso de estudio.
- ✓ Cálculo teórico de la vida útil del elemento frente a diferentes factores de operación.
- ✓ Establecimiento de conclusiones.

Nota I: Para la realización de este proyecto ha sido necesario desarrollar por cuenta propia una parte importante de la información necesaria, la cual se puede encontrar en los anexos.

Nota II: La ingente cantidad de información presente en este documento ha sido organizada con una estructura multinivel para mayor claridad. En concreto, la estructura se compone de 4 niveles, los cuales se denominan tal que así y se identifican con los identificadores entre paréntesis:

1. Capítulo (X).
2. Subcapítulo, sección o apartado (X.Y).
3. Subsección o subapartado (X.Y.Z.).
4. Parte (X.Y.Z.T).

donde la letra X puede representar un número arábigo mayor o igual que 1 en el caso de que el capítulo pertenezca a la memoria o un número romano mayor o igual que I en el caso de que el capítulo sea un anexo. Las letras Y, Z, T, en cambio, únicamente pueden representar lo primero.

Nota III: El cuarto nivel no se incluye en el índice con el propósito de economía y funcionalidad.

Índice.

1. Introducción.....	1
1.1. Objeto y justificación del trabajo.....	1
1.2. Alcance del trabajo.....	1
1.3. Esquema relacional del trabajo.....	3
2. Revisión del estado de la técnica.....	9
2.1. Perspectiva operacional.....	9
2.2. Perspectiva económica.....	13
2.3. Perspectiva técnica.....	14
3. Descripción del proyecto.....	16
3.1. Fase de formulación teórica.....	16
3.2. Fase de planteamiento.....	18
3.3. Fase de obtención e interpretación de resultados.....	20
3.4. Fase de establecimiento de conclusiones.....	20
4. Estudio teórico del contacto rueda – carril.....	21
4.1. Introducción.....	21
4.2. Conceptos previos sobre el fenómeno de la rodadura.....	21
4.3. Introducción al problema geométrico.....	22
4.3.1. Problema general de contacto.....	22
4.3.2. Cuerpos cuasi-idénticos en contacto.....	23
4.4. Solución de Hertz al problema geométrico y normal.....	25
4.4.1. Hipótesis.....	25
4.4.2. Parámetros geométricos de partida.....	25
4.4.3. Elipse de Hertz.....	29
4.4.4. Distribución de presiones y desplazamientos normales.....	31
4.4.5. Resumen y otras teorías.....	32
4.5. Problema tangencial.....	33
4.5.1. Vías de resolución.....	33
4.5.2. Zonas de la elipse de Hertz y curva de tracción.....	34
4.5.3. Teoría de Carter.....	36
4.5.4. Teoría de Johnson y de Johnson – Vermeulen.....	38
4.5.5. Teoría lineal de Kalker.....	40
4.5.6. Teoría lineal de Kalker con saturación.....	42
4.5.7. Introducción al método de Polach.....	45
4.5.8. Formulación del método de Polach.....	46

4.5.9. Método de Polach con coeficiente de rozamiento variable.....	51
5. Estudio teórico del desgaste.....	55
5.1. Introducción.....	55
5.2. Desgaste por abrasión y adhesión.....	55
5.2.1. Diferencias entre desgaste por abrasión y por adhesión.....	55
5.2.2. Hipótesis.....	55
5.2.3. Modelo de Reye – Archand – Khrushchov.....	56
5.2.4. Modelos de transferencia de energía.....	57
5.2.5. Opción por un modelo y ley de desgaste para la realización de los cálculos.....	61
5.3. Profundidad de desgaste.....	62
5.3.1. Por revolución.....	62
5.3.2. Total o absoluta.....	65
5.4. Eliminación del desgaste.....	67
5.5. Combinación del desgaste con los daños por fatiga.....	70
5.5.1. Introducción y alcance del análisis de fatiga.....	70
5.5.2. Modelo del índice de fatiga.....	70
6. Desarrollos teóricos adicionales.....	72
6.1. Introducción.....	72
6.2. Ajustes polinómicos de coeficientes.....	72
6.3. Contacto pestaña – carril.....	73
6.4. Relaciones entre parámetros del trazado.....	73
7. Planteamiento computacional del problema.....	74
7.1. Introducción.....	74
7.2. <i>Software</i> utilizado.....	75
7.3. Hipótesis de cálculo.....	75
7.4. Diagrama de flujo.....	79
7.5. Tabla de variables.....	81
7.5.1. Variables de símbolo latino.....	81
7.5.2. Variables de símbolo griego.....	87
7.6. Prontuario de ecuaciones.....	89
7.6.1. Relación entre los parámetros cinemáticos del juego y los del trazado.....	90
7.6.2. Saturación del descentramiento.....	91
7.6.3. Pseudodeslizamientos.....	94
7.6.4. Fuerza normal sobre cada rueda.....	95
7.6.5. Solución de Hertz.....	96
7.6.6. Método de Polach.....	98

7.6.7. Caracterización del contacto pestaña – carril.....	100
7.6.8. Modelo de transferencia de energía, leyes de la BRR y la USFD.	102
7.6.9. Modelo del índice de fatiga.	103
8. Definición del caso de estudio.	104
8.1. Introducción.....	104
8.2. Objeto del caso.	104
8.3. Datos característicos del problema.	104
8.3.1. De las ruedas y los carriles.	104
8.3.2. Del material rodante.....	105
8.3.3. Del trazado ferroviario.	106
8.4. Bogies tomados como referencia.	107
8.5. Rangos de variación de los parámetros.....	108
8.5.1. De las ruedas y de su bogie.....	109
8.5.2. De la carga transportada.....	110
8.5.3. Del trazado ferroviario.....	112
8.5.4. Otros.	113
9. Definición de los escenarios de cálculo.	115
9.1. Introducción.....	115
9.2. Fijación de valores constantes.....	115
9.3. Escenarios I – VI.	116
9.4. Escenario VII. Cálculo de la vida útil de una rueda de 920 mm de diámetro.	117
9.5. Escenario VIII. Cálculo de la vida útil de una rueda de 680 mm de diámetro.	123
9.6. Escenario IX. Cálculo de la vida útil de una rueda de 355 mm de diámetro.	124
9.7. Escenario X. Análisis de sensibilidad.....	125
10. Resultados interpretados de los escenarios del problema.....	128
10.1. Escenarios I – VI.	128
10.2. Escenario VII.....	129
10.3. Escenario VIII.....	132
10.4. Escenario IX.....	136
10.5. Escenario X.....	139
11. Conclusiones.	142
11.1. Conclusiones del problema.....	142
11.2. Líneas abiertas del problema.....	146
12. Fuentes de información.	148
12.1. De la memoria.....	148
12.2. De los anexos.	149

Anexo I. Conceptos previos al estudio del contacto rueda – carril.	154
I.1. Rodadura de un sólido rígido.	154
I.2. Rodadura de un sólido deformable.	156
I.3. Deslizamiento.....	159
I.3.1. Concepto de deslizamiento.....	159
I.3.2. Terminología y ecuaciones básicas del deslizamiento.....	160
I.3.3. Establecimiento de los sistemas de referencia.....	163
I.3.4. Pseudodeslizamiento longitudinal.....	165
I.3.5. Pseudodeslizamiento transversal.	171
I.3.6. Giro.....	175
I.4. Relación entre los parámetros cinemáticos del juego y los del trazado ferroviario.	179
I.4.1. Descentramiento.....	179
I.4.2. Velocidad de descentramiento.	182
I.4.3. Descentramiento y velocidad de descentramiento promedios.....	187
I.4.4. Ángulo de lazo.....	189
I.4.5. Velocidad de cambio del ángulo de lazo.....	190
I.4.6. Seno del ángulo de lazo y variación del ángulo de lazo promedios.....	192
I.4.7. Ángulo de lazo promedio.	194
I.4.8. Conjunción de los efectos del descentramiento y del ángulo de lazo.....	197
I.4.9. Ángulo de desplazamiento longitudinal del área de contacto.	201
I.4.10. Balanceo y velocidad de balanceo.	203
I.5. Obtención de la fuerza normal en función de las cargas y del trazado.....	206
I.5.1. Cargas integrantes de la fuerza normal.	206
I.5.2. Efecto de las rampas y pendientes.	208
I.5.3. Efecto de la aceleración centrífuga en las curvas.	215
I.5.4. Efecto de la compensación de la aceleración centrífuga mediante el peralte.....	218
I.5.5. Conjunción de todos los efectos.	230
I.5.6. Descomposición de la fuerza normal en el área de contacto.....	231
I.6. Movimiento de lazo.	233
I.7. Regiones de la rueda y el carril donde se puede producir su contacto.....	236
Anexo II. Ajustes polinómicos de coeficientes.....	240
II.1. Coeficientes de Hertz.	240
II.1.1. Coeficiente mH	240
II.1.2. Coeficiente nH	244
II.1.3. Coeficiente rH	245
II.2. Coeficientes de Kalker.....	250

II.2.1. Coeficiente C_{11} .	251
II.2.2. Coeficiente C_{22} .	255
II.2.3. Coeficiente C_{23} .	256
II.2.4. Coeficiente C_{32} .	258
II.2.5. Coeficiente C_{33} .	259
II.3. Comprobación de los ajustes de los coeficientes en condiciones de trabajo reales.	263
II.3.1. De los ajustes de los coeficientes de Hertz.	263
II.3.2. De los ajustes de los coeficientes de Kalker.	265
Anexo III. Geometrías y materiales de las ruedas y los carriles.	275
III.1. Tipos de perfiles de ruedas.	275
III.1.1. Perfil 1/40.	275
III.1.2. Perfil S 1002.	276
III.1.3. Perfil EPS.	276
III.2. Tipos de perfiles de carriles.	278
III.2.1. Perfil RN 45.	280
III.2.2. Perfil 54E1.	281
III.2.3. Perfil 60E1.	282
III.3. Selección de perfiles para la rueda y el carril.	283
III.3.1. Rueda.	283
III.3.2. Carril.	283
III.4. Construcción de los perfiles mediante funciones matemáticas.	284
III.4.1. Rueda.	284
III.4.2. Carril.	291
III.5. Posicionamiento relativo de los perfiles.	296
III.5.1. En una alineación recta.	296
III.5.2. En una alineación curva.	303
III.5.3. En una alineación curva con contacto pestaña – carril. Teoría I.	311
III.5.4. En una alineación curva con contacto pestaña – carril. Teoría II.	320
III.5.5. En una alineación curva con contacto pestaña – carril. Teoría III.	328
III.5.6. En una alineación curva con contacto pestaña – carril. Práctica.	335
III.6. Materiales de la rueda y del carril.	344
III.6.1. Rueda.	344
III.6.2. Carril.	347
Anexo IV. Características del material rodante.	350
IV.1. Tipos de vagones.	350
IV.2. Vagones de piso alto o tradicionales.	351

IV.2.1. Plataforma.	351
IV.2.2. Bogies y ruedas.	352
IV.3. Vagones de piso bajo Modalohr.	353
IV.3.1. Autopistas ferroviarias donde están en uso.	353
IV.3.2. Diferencias entre los vagones Modalohr y los tradicionales.	354
IV.3.3. Altura máxima admisible de la carga.	356
IV.4. Vagones de piso bajo ROLA.	357
IV.4.1. Autopistas ferroviarias donde están en uso.	357
IV.4.2. Plataforma.	358
IV.4.3. Bogies y ruedas.	359
IV.4.4. Altura máxima admisible de la carga.	361
Anexo V. Diseño del trazado ferroviario de ensayo.	364
V.1. Criterios de diseño.	364
V.1.1. Normativa aplicable y referencias.	365
V.1.2. Prefijado de los parámetros más característicos.	365
V.2. Procedimiento de representación gráfica.	367
V.2.1. Alzado o perfil longitudinal.	367
V.2.2. Planta.	367
V.2.3. Sección o perfil transversal.	368
V.3. Representación simplificada del alzado y de la planta.	370
V.4. Presentación de los datos paramétricos.	381
V.5. Tratamiento computacional de los datos paramétricos.	391
V.5.1. Creación de una tabla unificada.	391
V.5.2. Desarrollo de nuevas ecuaciones.	393
V.5.3. Tabla finalmente introducida en el EES.	396
Anexo VI. Escenarios de verificación, comparación y comprobación.	404
VI.1. Escenario I. Verificación de la necesidad de limitar la carga en las ruedas más pequeñas.	404
VI.1.1. Planteamiento.	404
VI.1.2. Resultados.	405
VI.1.3. Análisis comparativo.	406
VI.2. Escenario II. Comparación del desgaste (BRR) sufrido por ruedas de diferentes diámetros.	408
VI.2.1. Planteamiento.	408
VI.2.2. Resultados.	412
VI.2.3. Análisis comparativo.	419
VI.3. Escenario III. Repetición de los cálculos (USFD) y comparación con los previos (BRR).	422
VI.3.1. Planteamiento.	422

VI.3.2. Resultados.....	422
VI.3.3. Análisis comparativo.....	428
VI.4. Escenario IV. Comprobaciones de bloqueo y descarrilamiento.	431
VI.4.1. Planteamiento.	431
VI.4.2. Resultados.....	432
VI.4.3. Análisis comparativo.....	436
VI.5. Escenario V. Comprobaciones de descarrilamiento con otros ángulos de contacto.	437
VI.5.1. Planteamiento.	437
VI.5.2. Resultados.....	438
VI.5.3. Análisis comparativo.....	439
VI.6. Escenario VI. Búsqueda de los parámetros más influyentes en el desgaste.	440
VI.6.1. Planteamiento.	440
VI.6.2. Resultados.....	442
VI.6.3. Análisis comparativo.....	445

Índice de figuras.

1.1. Esquema relacional del trabajo.	8
2.1. Transporte acompañado con los vagones de piso bajo.	10
2.2. Gálibos considerados.	11
2.3. Partes altas de los contornos de referencia de varios gálibos.	12
2.4. Ampliación de la esquina superior derecha de la figura 2.3.	12
4.1. Punto de contacto de las superficies antes de ser cargadas.	23
4.2. Compresión de un cuerpo contra el otro y variables y desplazamiento.	24
4.3. Radios de curvatura R_{x1} , R_{x2} , R_{y1} y R_{y2}	27
4.4. Representación gráfica de los radios.	28
4.5. Cálculo de R_{y2}	28
4.6. Intersección de paraboloides.	29
4.7. Graficación de mH , nH y rH	31
4.8. Representación de la distribución de presiones semielipsoidal.	32
4.9. Evolución de las zonas según v_x creciente.	35
4.10. Representación de F_x respecto a v_x puro.	35
4.11. Distribución de la tensión tangencial según la teoría de Carter.	37
4.12. Curva de tracción de Carter.	38
4.13. Zonas de adhesión y deslizamiento basadas en la teoría de Johnson y Vermeulen.	39
4.14. Línea de tracción de Kalker contra la curva de tracción de Carter.	42
4.15. Curva de tracción según la teoría lineal de Kalker y comparación con la de CONTACT.	43
4.16. Curva de tracción obtenida por el método SHE contra la curva calculada por CONTACT.	44
4.17. Comparativa de las curvas de tracción para un caso de giro puro.	45
4.18. División de la elipse de Hertz en las dos zonas y estado tensional en la línea A – B – C.	47
4.19. Diferencia en la pendiente inicial de la curva de tracción para condiciones secas y húmedas... 52	
4.20. Comparación de una curva de tracción experimental con las curvas de tracción para diversos coeficientes de reducción.	53
5.1. Mapa de desgaste del modelo de RAK para la toma del coeficiente KRAK.	57
5.2. Ley de desgaste de la USFD representada gráficamente.	60
5.3. Superficie de material perdido que aparece en la tasa de desgaste de la ley de la BRR.	63
5.4. Masa de material perdido que aparece en la tasa de desgaste de la ley de la USFD.	64
5.5. Reperfilado de una rueda que ha sufrido pérdida de material por desgaste.	68
5.6. Reperfilados de una rueda de metropolitano a lo largo de su vida útil.	69
7.1. Representación gráfica de algunas de las correlaciones que posibilitan el cálculo del desgaste. 74	
7.2. Diagrama de flujo con los flujos de cálculo conducentes a la solución del problema.	80

9.1. Fijación del sistema de referencia uvw en el bogie Y – 25 modificado.....	118
9.2. Posición de los juegos en el bogie según el sentido en el que este realice el recorrido.	119
9.3. Reparto del desgaste a lo largo de la pestaña	121
9.4. Fijación del sistema de referencia uvw en el bogie Graz Pauker 702 modificado.....	124
10.1. Gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 920 mm.	129
10.2. Gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 680 mm.	132
10.3. Gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 355 mm.	136
10.4. Gráficas diámetro – kilometraje para la rueda de 920 mm tras haber variado su carga por eje y su empate.	139
10.5. Gráficas diámetro – kilometraje para la rueda de 355 mm tras haber variado su carga por eje y su empate.	140
I.1. Demostración de la nulidad de la velocidad en el CIR en la rodadura ideal.....	154
I.2. Balance de fuerzas y de momentos alrededor del EIR.	155
I.3. Balance de fuerzas y de momentos alrededor del CIR.	156
I.4. Triángulo escaleno que relaciona las dimensiones de interés.	157
I.5. Correspondencia o no entre los puntos en una situación sin/con deslizamiento.....	159
I.6. Sistemas de referencia y transformaciones entre los mismos.	164
I.7. Posición de equilibrio de un juego de ruedas en recta y en curva y deslizamientos generados en la curva.....	166
I.8. Composición de movimientos en el caso de rodadura con deslizamiento.....	167
I.9. Diagrama cinemático – dinámico que ilustra las consecuencias de la aplicación de un par acelerador y uno decelerador.....	168
I.10. Cambio del ángulo de lazo originado por el movimiento de lazo y por el ángulo de ataque. ...	170
I.11. Triángulo de velocidades $V - V_c - V_{ax}$ y descomposición de V_{ax} en el sistema $xcyczc$ del área de contacto.	172
I.12. Adopción de una nueva posición de equilibrio en curva y descomposición de V_{ax} en el sistema $xcyczc$ del área de contacto.	173
I.13. Efecto de Φ , que es la causante de ΔV_{yIII} , y descomposición de ΔV_{yIII} en el sistema $xcyczc$ del área de contacto.	174
I.14. Descomposición de ω en los ejes yc y zc	176
I.15. Descomposición de ψ en los ejes los ejes yc y zc	177
I.16. Posición de equilibrio en una curva a la derecha.	181
I.17. Transición entre dos alineaciones rectas mediante dos curvas de transición y una circular intercalada.	182
I.18. Ángulo de ataque generado por un bogie de dos ejes al negociar una curva.....	189
I.19. Conjunción de los efectos del descentramiento y del ángulo de lazo en un bogie trazante de una curva.....	198

I.20. Rotación de un bogie en torno del punto sobre el que pivota y consecuente modificación del descentramiento.....	199
I.21. Aparición del ángulo de desplazamiento longitudinal del área de contacto por causa del ángulo de lazo.....	202
I.22. Aparición del ángulo de balanceo en un juego trazante de una curva.....	204
I.23. Diagrama de las fuerzas de interés sobre una rueda en rampa y en pendiente.....	208
I.24. Aproximación geométrica de las ruedas de un juego para agilizar el cálculo del momento de inercia $I_{ }$	212
I.25. Diagrama de las fuerzas que actúan sobre un juego en el recorrido de una curva.....	216
I.26. Diagrama de las fuerzas que actúan sobre un juego en el recorrido de una curva peraltada. ...	220
I.27. Descomposición de la fuerza normal en el área de contacto.....	232
I.28. Semiperiodo del movimiento oscilatorio de lazo.....	233
I.29. Delimitación de las regiones de contacto A, B y C.....	236
I.30. Contacto en la región B debido a un excesivo desgaste del carril y de la rueda.....	237
II.1. Curva original de mH suavizada y línea de tendencia.....	241
II.2. Curva $mH - \theta$ ajustada y representada en el EES.....	243
II.3. Graficación de mH junto con nH y rH . Repetición de la figura 4.7.....	244
II.4. Curva $nH - \theta$ ajustada y representada en el EES.....	245
II.5. Ajuste de la relación $rH - \theta$ realizado por el cauce habitual.....	247
II.6. Primer reajuste de la relación $rH - \theta$	248
II.7. Segundo reajuste de la relación $rH - \theta$	249
II.8. Representación gráfica de la función $C11 - ab$	254
II.9. Representación gráfica de la función $C22 - ab$	256
II.10. Representación gráfica de la función $C23 - ab$	258
II.11. Representación gráfica de la función $C32 - ab$	259
II.12. Representación gráfica de la función $C33 - ab$	262
II.13. Curva original de $C11$ y línea de tendencia.....	268
II.14. Curva original de $C22$ y línea de tendencia.....	269
II.15. Curva original de $C23$ y línea de tendencia.....	270
II.16. Curva original de $C32$ y línea de tendencia.....	272
II.17. Curva original de $C33$ y línea de tendencia.....	272
III.1. Aspecto del perfil 1/40.....	275
III.2. Aspecto del perfil S1002.....	276
III.3. Aspecto del perfil EPS.....	277
III.4. Datos geométricos del perfil RN 45.....	280
III.5. Datos geométricos del perfil 54E1.....	281

III.6. Datos geométricos del perfil 60E1.....	282
III.7. Colocación del sistema de referencia $X_p Y_p Z_p$ en los perfiles de la rueda izquierda y de la derecha.....	284
III.8. Representación del perfil de la rueda derecha en el EES.....	290
III.9. Representación del perfil de la rueda izquierda en el EES.....	291
III.10. Colocación del sistema de referencia $X_s Y_s Z_s$ en el perfil del carril.....	292
III.11. Representación del perfil del carril en el EES.....	295
III.12. Posicionamiento de un juego de ruedas de un diámetro nominal cualquiera en una vía de ancho ibérico.....	297
III.13. Fases del cambio de coordenadas.....	298
III.14. Posicionamiento conjunto de los perfiles y cotas para ser determinadas.....	300
III.15. Resultado del posicionamiento para la rueda y carril derechos.....	301
III.16. Comprobación del juego de 3,50 mm y del nivelado en el punto Co	301
III.17. Resultado del posicionamiento para la rueda y carril izquierdos.....	302
III.18. Posicionamiento de un juego de ruedas de un radio nominal cualquiera en una vía de ancho ibérico descriptora de una curva donde $y \geq y_{lím}$	305
III.19. Curvas de y para diferentes valores de r_o y R	306
III.20. Contacto por encima del radio umbral en la rueda derecha.....	308
III.21. Contacto por encima del radio umbral en la rueda izquierda.....	309
III.22. Contacto por debajo del radio umbral en la rueda derecha.....	310
III.23. Contacto por debajo del radio umbral en la rueda izquierda.....	311
III.24. Representación de las acciones sobre las áreas de contacto.....	312
III.25. Representación de los posibles movimientos de un bogie al trazar una curva.....	313
III.26. Ilustración del trazado de una curva por parte de un bogie con sus variables cinemático – dinámicas.....	315
III.27. Descomposición de las fuerzas F_x y F_y en el sistema de coordenadas uvw	320
III.28. Aparición de los deslizamientos rígidos V_x, e' y V_x, i' por insuficiencia de descentramiento..	323
III.29. Influencia en el tipo de movimiento del bogie y cálculo de la flecha del carril interno.....	326
III.30. Diagrama de fuerzas sobre el área de contacto de la pestaña.....	328
III.31. Modificación de la posición del área de contacto a lo largo de la pestaña.....	331
III.32. Doble contacto de la rueda izquierda con el carril: banda – carril y pestaña – carril.....	337
III.33. Extensión del área de contacto banda de rodadura – carril generada en la rueda izquierda..	338
III.34. Distancia para que el área de contacto potencial pestaña – carril llegue a efecto.....	340
III.35. Extensión del área de contacto pestaña – carril.....	340
III.36. Contacto en la rueda derecha cuando la pestaña contacta con el carril en la izquierda.....	342
III.37. Extensión del área de contacto generada en la rueda derecha.....	343
IV.1. Vagón de piso alto o tradicional, modelo Sggnss 80'', con su reflejo.....	351

IV.2. Dimensiones del vagón de piso alto o tradicional seleccionado.....	351
IV.3. Bogie Y – 25 con un despiece parcial practicado.....	352
IV.4. Autopistas ferroviarias francesas actuales y futuras.....	353
IV.5. Tipos de vagones Modalohr.....	354
IV.6. Dimensiones del vagón doble de cola (UIC 1).....	354
IV.7. Maniobras de carga de una cisterna en un vagón Modalohr.....	355
IV.8. Cabezas tractoras en medio vagón Modalohr de cola.....	355
IV.9. Autopistas ferroviarias que han adoptado el sistema ROLA.....	357
IV.10. Vagón ROLA, modelo Saadkms, cargado con un camión y renderizado.....	358
IV.11. Dimensiones del vagón ROLA seleccionado.....	358
IV.12. Bogie Saadkms690 equipado con ruedas ROLA.....	360
V.1. Alzado y planta del tramo I.....	371
V.2. Alzado y planta del tramo II.....	372
V.3. Alzado y planta del tramo III.....	372
V.4. Alzado y planta del tramo IV.....	373
V.5. Alzado y planta del tramo V.....	373
V.6. Alzado y planta del tramo VI.....	374
V.7. Alzado y planta del tramo VII.....	374
V.8. Alzado y planta del tramo VIII.....	375
V.9. Alzado y planta del tramo IX.....	375
V.10. Alzado y planta del tramo X.....	376
V.11. Alzado y planta del tramo XI.....	376
V.12. Alzado y planta del tramo XII.....	377
V.13. Alzado y planta del tramo XIII.....	377
V.14. Alzado y planta del tramo XIV.....	378
V.15. Alzado y planta del tramo XV.....	378
V.16. Alzado y planta del tramo XVI.....	379
V.17. Alzado y planta del tramo XVII.....	379
V.18. Alzado y planta del tramo XVIII.....	380
V.19. Alzado y planta del tramo XIX.....	380
VI.1. Resultados gráficos del escenario I.....	405
VI.2. Visualización del decrecimiento del área de contacto con el radio de la rueda.....	407
VI.3. Dimensiones de los bogies ensayados.....	410
VI.4. Perfiles desgastados (BRR) de las ruedas del bogie Y – 25.....	412
VI.5. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas del bogie Y – 25.....	413
VI.6. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas del bogie Saas z-706.....	414

VI.7. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas del bogie 691.....	416
VI.8. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas del bogie BA 741.	417
VI.9. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas del bogie Graz Pauker 702.	417
VI.10. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas delanteras de los bogies.	419
VI.11. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en el resto de las ruedas de los bogies.	421
VI.12. Profundidad de desgaste máxima (USFD) en las ruedas del bogie Y – 25.....	422
VI.13. Profundidad de desgaste máxima (USFD) en las ruedas del bogie Saas z-706.	423
VI.14. Profundidad de desgaste máxima (USFD) en las ruedas del bogie 691.	425
VI.15. Profundidad de desgaste máxima (USFD) en las ruedas del bogie BA 741.	426
VI.16. Profundidad de desgaste máxima (USFD) en las ruedas del bogie Graz Pauker 702.	426
VI.17. Profundidad de desgaste máxima (BRR y USFD) en las ruedas delanteras de los bogies.	428
VI.18. Profundidad de desgaste máxima (BRR y USFD) en el resto de las ruedas de los bogies.	429
VI.19. Graficación de los resultados del análisis de sensibilidad para la rueda W2.	445

Índice de tablas.

2.1. Tipos de gálibo en función del ancho de vía.....	10
4.1. Tabla con los coeficientes de Hertz.	30
4.2. Coeficientes de Kalker en función de la ratio a/b y del módulo de Poisson equivalente ν	41
4.3. Parámetros tipo k_A , k_S , μ_0 , A_f y B_f en condiciones secas y húmedas sin contaminación.	54
5.1. Relación entre el índice de desgaste y la tasa de desgaste según la ley de la BRR.	59
5.2. Relación entre el índice de desgaste y la tasa de desgaste según la ley de la USFD.	60
7.1. Variables de símbolo latino.....	81
7.2. Variables de símbolo griego.....	87
8.1. Características de los bogies tomados como referencia.	108
9.1. Fijación de los valores constantes para todos los escenarios.....	116
9.2. Datos de entrada particulares del escenario VII.....	117
9.3. Establecimiento de los subescenarios del escenario X.....	126
10.1. Datos de la gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 920 mm.	131
10.2. Datos de la gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 680 mm.	133
10.3. Datos de la gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 355 mm.	137
I.1. Masa máxima por eje y por metro tolerada en las líneas férreas según su categoría.	207
I.2. Máximo exceso de peralte según el parámetro T	225
I.3. Tipo de tren en función de ac_{fnc} e I	226
II.1. Valores de mH en función de los valores de θ	240
II.2. Cotejado de los valores originales de mH con los ajustados.....	242
II.3. Valores de rH en función de los valores de θ	246
II.4. Coeficientes de Kalker con la dependencia respecto al módulo de Poisson mejor apreciable...	250
II.5. Ajustes parabólicos $C_{11} - \nu$ para cada valor de a/b	252
II.6. Valor único de C_{11} para cada razón a/b	253
II.7. Valor de C_{22} en $\nu = 0,285$ para cada uno de los 19 ajustes parabólicos $C_{22} - \nu$	255
II.8. Valor de C_{23} en $\nu = 0,285$ para cada uno de los 19 ajustes parabólicos $C_{23} - \nu$	257
II.9. Evolución de C_{33} con ν en función del cociente a/b	260
II.10. Valor de C_{33} en $\nu = 0,285$ para cada uno de los 19 ajustes parabólicos $C_{33} - \nu$	261
II.11. Comprobación de los ajustes de los coeficientes de Hertz con un paso $\theta = 5^\circ$	264
II.12. Comprobación de los ajustes de los coeficientes de Kalker con un paso $ab \leq 1 = 0,05$	266
II.13. Comprobación de los ajustes de los coeficientes de Kalker con un paso $ab \geq 1 = 0,25$	267
II.14. Cotejado de los valores originales de C_{11} con los ajustados.	269
II.15. Cotejado de los valores originales de C_{22} con los ajustados.	270
II.16. Cotejado de los valores originales de C_{23} con los ajustados.	271

II.17. Cotejado de los valores originales de C33 con los ajustados.	273
III.1. Tipos de carriles establecidos por la norma.	278
III.2. Propiedades del carril RN 45.	280
III.3. Propiedades del carril 54E1.	281
III.4. Propiedades del carril 60E1.	282
III.5. Coordenadas del perfil de la rueda derecha.	290
III.6. Coordenadas del perfil del carril.	295
III.7. Propiedades mecánicas exigidas al grado ER8.	344
III.8. Porcentajes máximos de los elementos del grado ER8.	345
III.9. Valores mínimos de dureza y resiliencia del grado ER8.	345
III.10. Propiedades del acero ER8 no consignadas en la norma.	346
III.11. Porcentajes máximos de los elementos del grado R260.	347
III.12. Porcentajes máximos de elementos residuales del grado R260.	348
IV.1. Altura máxima admisible según el tipo de gálibo para el vagón Modalohr.	356
IV.2. Altura máxima admisible según el tipo de gálibo para el vagón ROLA.	361
IV.3. Altura máxima admisible según el tipo de gálibo para el vagón ROLA con camiones largos.	362
V.1. Datos paramétricos del tramo I.	382
V.2. Datos paramétricos del tramo II.	383
V.3. Datos paramétricos del tramo III.	383
V.4. Datos paramétricos del tramo IV.	384
V.5. Datos paramétricos del tramo V.	384
V.6. Datos paramétricos del tramo VI.	384
V.7. Datos paramétricos del tramo VII.	385
V.8. Datos paramétricos del tramo VIII.	385
V.9. Datos paramétricos del tramo IX.	386
V.10. Datos paramétricos del tramo X.	386
V.11. Datos paramétricos del tramo XI.	387
V.12. Datos paramétricos del tramo XII.	387
V.13. Datos paramétricos del tramo XIII.	388
V.14. Datos paramétricos del tramo XIV.	388
V.15. Datos paramétricos del tramo XV.	388
V.16. Datos paramétricos del tramo XVI.	388
V.17. Datos paramétricos del tramo XVII.	389
V.18. Datos paramétricos del tramo XVIII.	389
V.19. Datos paramétricos del tramo XIX.	390
V.20. Tabla finalmente introducida en el EES.	397

VI.1. Combinaciones de carga por eje límite y diámetro del escenario I.....	404
VI.2. Resultados tabulares del escenario I.	405
VI.3. Carga por eje en función del diámetro para una presión de 1.235 MPa.	408
VI.4. Datos de entrada adicionales del escenario II.	411
VI.5. Cómputo de la ratio de desgaste promedio (BRR) en los bogies de 4 ruedas.	414
VI.6. Cómputo de la ratio de desgaste promedio (BRR) en el bogie de 6 ruedas.....	416
VI.7. Cómputo de la ratio de desgaste promedio (BRR) en los bogies de 8 ruedas.	418
VI.8. Comparación de la ratio de desgaste promedio (BRR y USFD) en los bogies de 4 ruedas.....	423
VI.9. Comparación de la ratio de desgaste promedio (BRR y USFD) en el bogie de 6 ruedas.	425
VI.10. Comparación de la ratio de desgaste promedio (BRR y USFD) en los bogies de 8 ruedas.....	427
VI.11. Comprobaciones de bloqueo y descarrilamiento en las curvas a derechas (W1).	433
VI.12. Comprobaciones de bloqueo y descarrilamiento en las curvas a izquierdas (W2).....	433
VI.13. Inclusión del efecto de la fuerza centrífuga no compensada en las comprobaciones.....	435
VI.14. Comprobaciones de descarrilamiento según el valor de γ_0 (W2)	438
VI.15. Datos de entrada propuestos como base del análisis de sensibilidad.	440
VI.16. Resultados del análisis de sensibilidad.	443

1. Introducción.

1.1. Objeto y justificación del trabajo.

El objeto de este trabajo es abordar el problema del desgaste en ruedas ferroviarias de reducido diámetro, mayor que en ruedas ferroviarias convencionales debido a su mayor recorrido angular sobre los carriles, estudiando y calculando su vida útil en función de diferentes factores de operación y cotejándolo con el de una rueda convencional.

Las nuevas necesidades logísticas, a saber; el incremento de la altura de las cajas de los vagones para incrementar la capacidad de transporte y la creación de autopistas ferroviarias en líneas convencionales con limitaciones de gálibo, han forzado, entre otras soluciones, al rebaje de la altura de los pisos de los vagones mediante el montaje de ruedas de diámetro reducido para así poder salvar las limitaciones geométricas existentes. Debido a la novedad de estas ruedas, su vida útil no ha sido apenas estudiada, lo cual justifica el presente trabajo.

1.2. Alcance del trabajo.

El trabajo abarca los bloques de tareas que se listan a continuación. El único propósito de esta lista es la definición de los límites del trabajo sin describir detalladamente el trabajo o proyecto realizado (léase la descripción del proyecto en el [capítulo 3](#)). He aquí la lista:

- ✓ Revisión del estado de la técnica. Consiste en revisar el problema de desgaste desde varios puntos de vista.
- ✓ Descripción del proyecto. Consiste en detallar las principales tareas realizadas en el proyecto.
- ✓ Estudio del fenómeno de la rodadura. Este estudio se dedica tanto a la faceta cinemática cuanto a la faceta dinámica del fenómeno de la rodadura y parte de ciertos conceptos físicos genéricos, los cuales se aplican posteriormente a las ruedas ferroviarias.
- ✓ Estudio del contacto rueda – carril. Este estudio se centra en las teorías de contacto, asentadas sobre en la Mecánica de Contacto por Fricción, una rama de la Mecánica Newtoniana.
- ✓ Estudio del desgaste. Es un estudio que se centra en el desgaste por abrasión y por adhesión, que son dos tipos de desgaste que normalmente se combinan y se calculan a la vez mediante determinados modelos y leyes de desgaste. Estos modelos y leyes de desgaste permiten el cómputo de la profundidad que alcanza la pérdida de material en la rueda (la profundidad de desgaste). Adicionalmente a estos modelos, se presenta otro modelo para la predicción de la aparición de grietas por fatiga de contacto rodante. Ambos parámetros (profundidad de desgaste y la predicción realizada sobre la aparición de grietas) sirven para determinar la periodicidad del reperfilado de la rueda (el mecanismo para eliminar los daños de la rueda).

- ✓ Realización de ajustes polinómicos. Mediante diferentes modelos matemáticos es posible ajustar los coeficientes tabulados con polinomios, lo cual agiliza la resolución del problema.
- ✓ Estudio del contacto pestaña – carril. Este estudio trata de caracterizar todo lo relativo al contacto que se produce entre la pestaña de la rueda y el carril en las curvas más cerradas: dinámica (fuerzas sobre la pestaña, posibilidad de descarrilamiento, distribución de la carga entre la banda de rodadura y la pestaña), cinemática (parámetros cinemáticos que caracterizan cómo el bogie traza la curva) y obtención de los parámetros de contacto.
- ✓ Búsqueda de relaciones entre parámetros del trazado. Los parámetros del trazado ferroviario son parámetros de entrada al problema y se introducen en una tabla. Esta tabla se puede reducir gracias a ciertas relaciones matemáticas existentes entre algunos parámetros.
- ✓ Planteamiento computacional del problema. Para el planteamiento computacional del problema de desgaste se elige el *software* en el cual se llevará a cabo su resolución, se establecen las hipótesis de cálculo, se representa el diagrama de flujo, se definen las variables y, finalmente, se recogen en un prontuario las ecuaciones introducidas en el *software*. La resolución del problema permite el cómputo de la vida útil de la rueda.
- ✓ Definición del caso de estudio. Para la definición del caso de estudio se define su objeto, se recogen los datos característicos del problema (que pueden ser de las ruedas, de los carriles, del material rodante o del trazado ferroviario), se toma una decena de bogies como referencia y se establecen los rangos dentro de los cuales se variarán los parámetros.
- ✓ Definición de los escenarios de cálculo. En este punto se plantean diferentes escenarios de cálculo. No todos los escenarios planteados tienen como objetivo el cómputo de la vida útil de una rueda de un diámetro concreto, sino que algunos son auxiliares a este fin.
- ✓ Presentación de los resultados y posterior interpretación. Los resultados de todos los escenarios se presentan ordenadamente y se interpretan posteriormente.
- ✓ Establecimiento de conclusiones. Establécense las conclusiones del problema en base a las interpretaciones de los resultados. También se incluyen las líneas abiertas del problema.

A la vida útil de una rueda le afectan multitud de factores, tales como el trazado de la vía, el ancho de vía, el clima, etc. Por ello, es preciso establecer en qué condiciones de partida va a obtenerse la vida útil:

- ✓ Transporte de mercancías.
- ✓ Ancho de vía ibérico (1.668 mm).
- ✓ Temperatura en condiciones normales.
- ✓ Ausencia de nieve en la vía y de ráfagas de viento en su entorno.
- ✓ Normativa del Administrador de Infraestructuras Ferroviarias (ADIF).

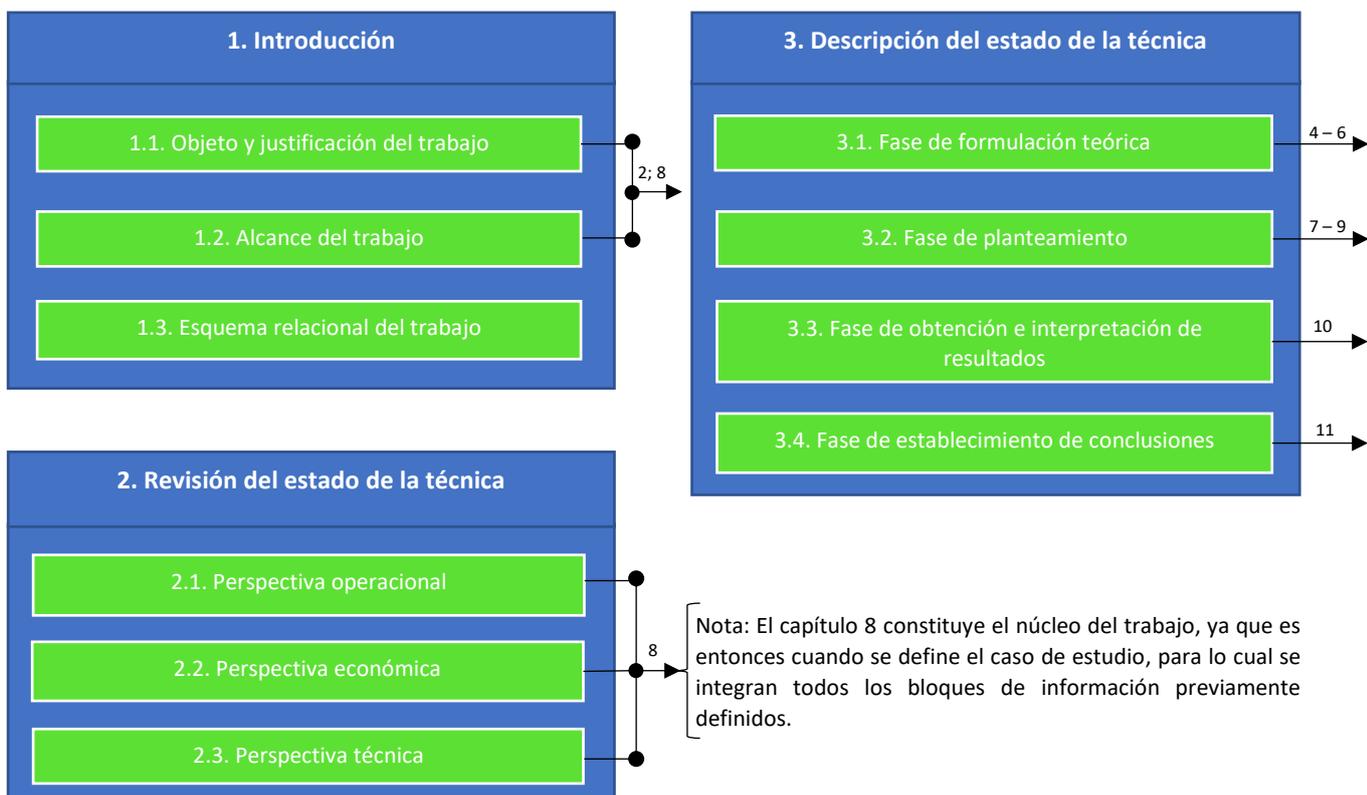
Además, se va a buscar un enfoque teórico – práctico, para lo cual se diseñará un trazado ferroviario basado en datos reales en el cual se ensayará la vida útil de la rueda. Este trazado se mostrará en uno de los anexos, ya que constituye un desarrollo por cuenta propia (léase la nota I del resumen).

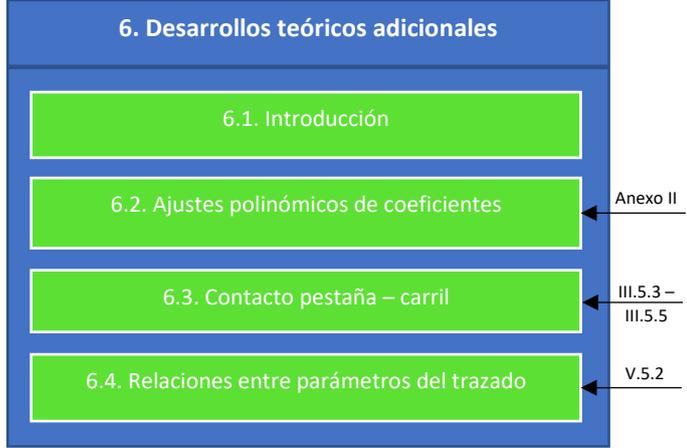
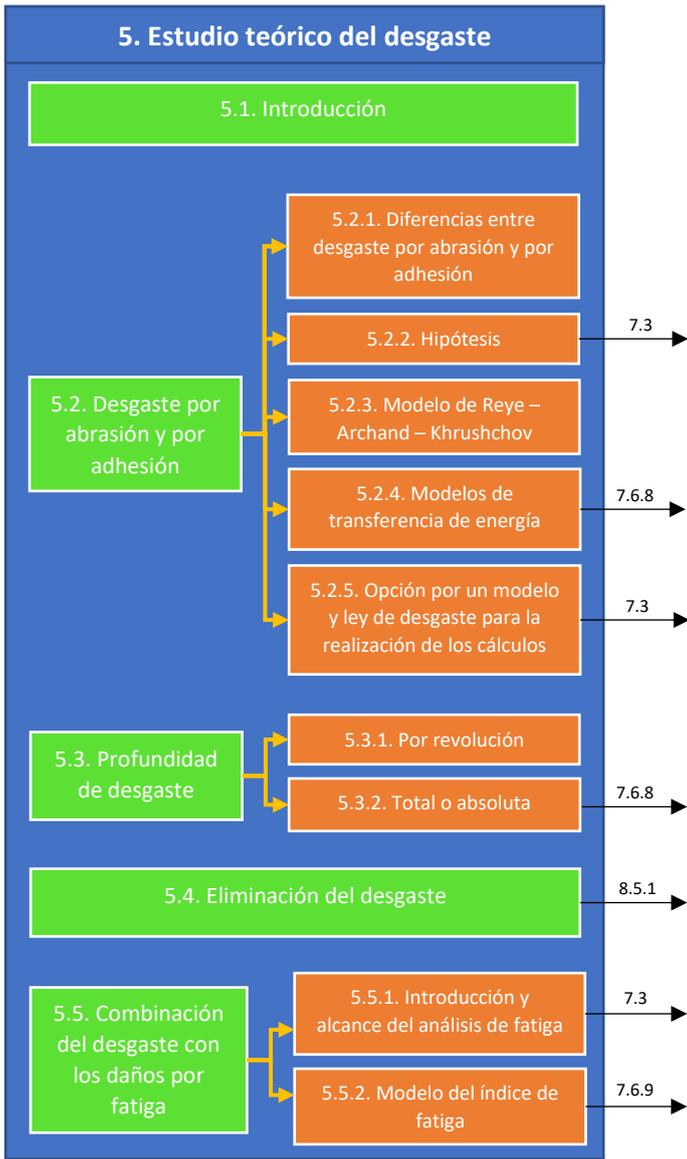
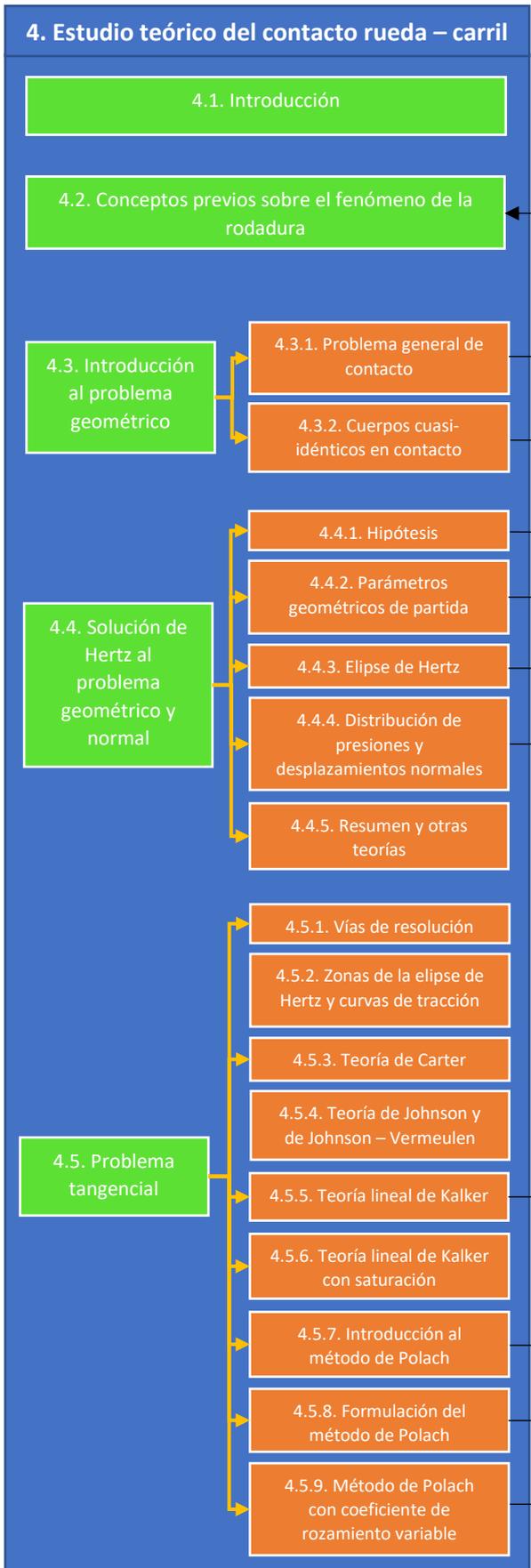
1.3. Esquema relacional del trabajo.

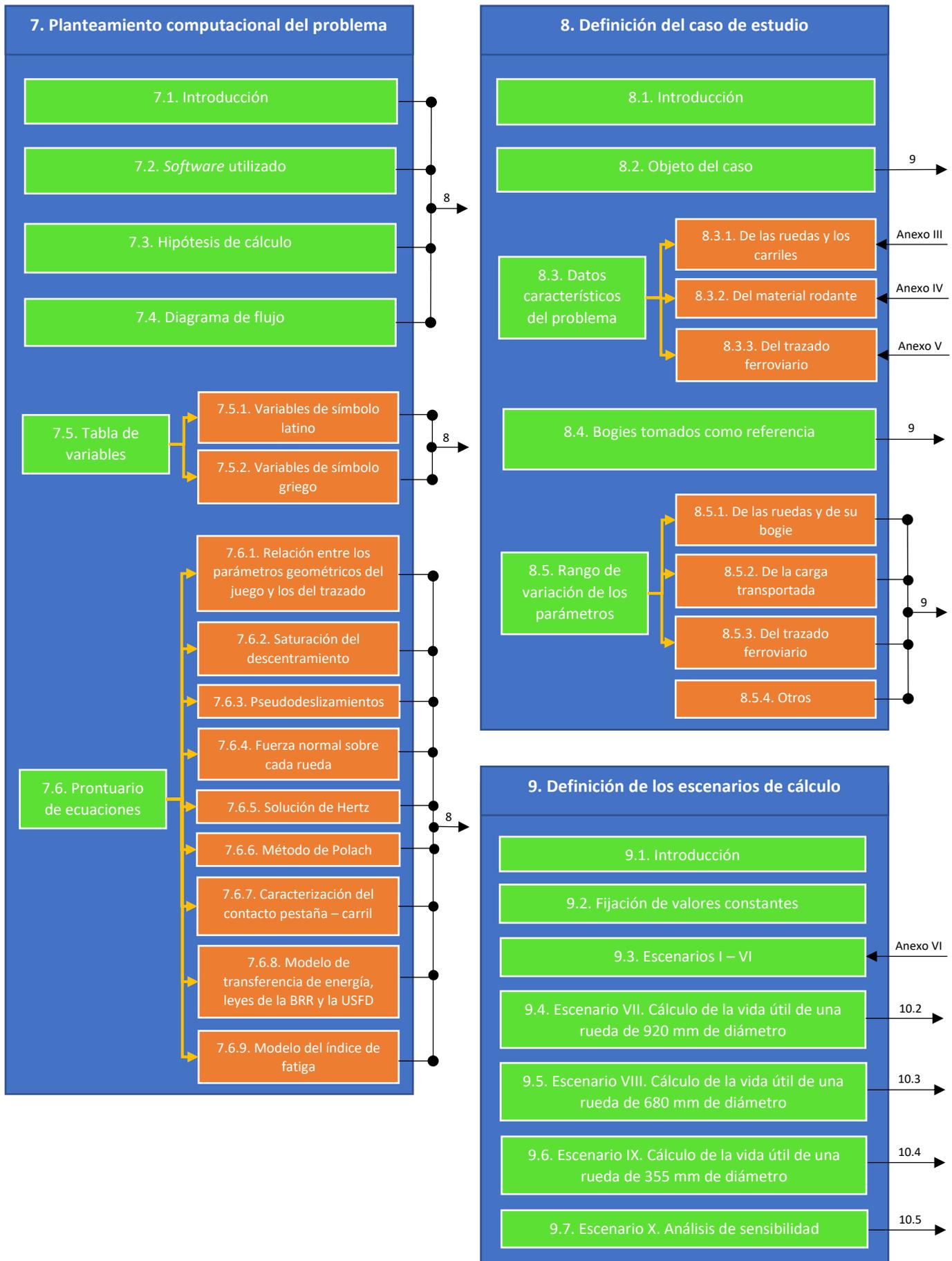
Una vez definidas los bloques de tareas en el alcance, lo que se va a realizar es un esquema que relacione las principales tareas de dichos bloques (centrándose en las relaciones externas, pues las internas se dan por supuestas). Para ello, lo que se va a realizar es representar los títulos de los capítulos, de los subcapítulos/secciones/apartados y de las subsecciones/subapartados como sigue:

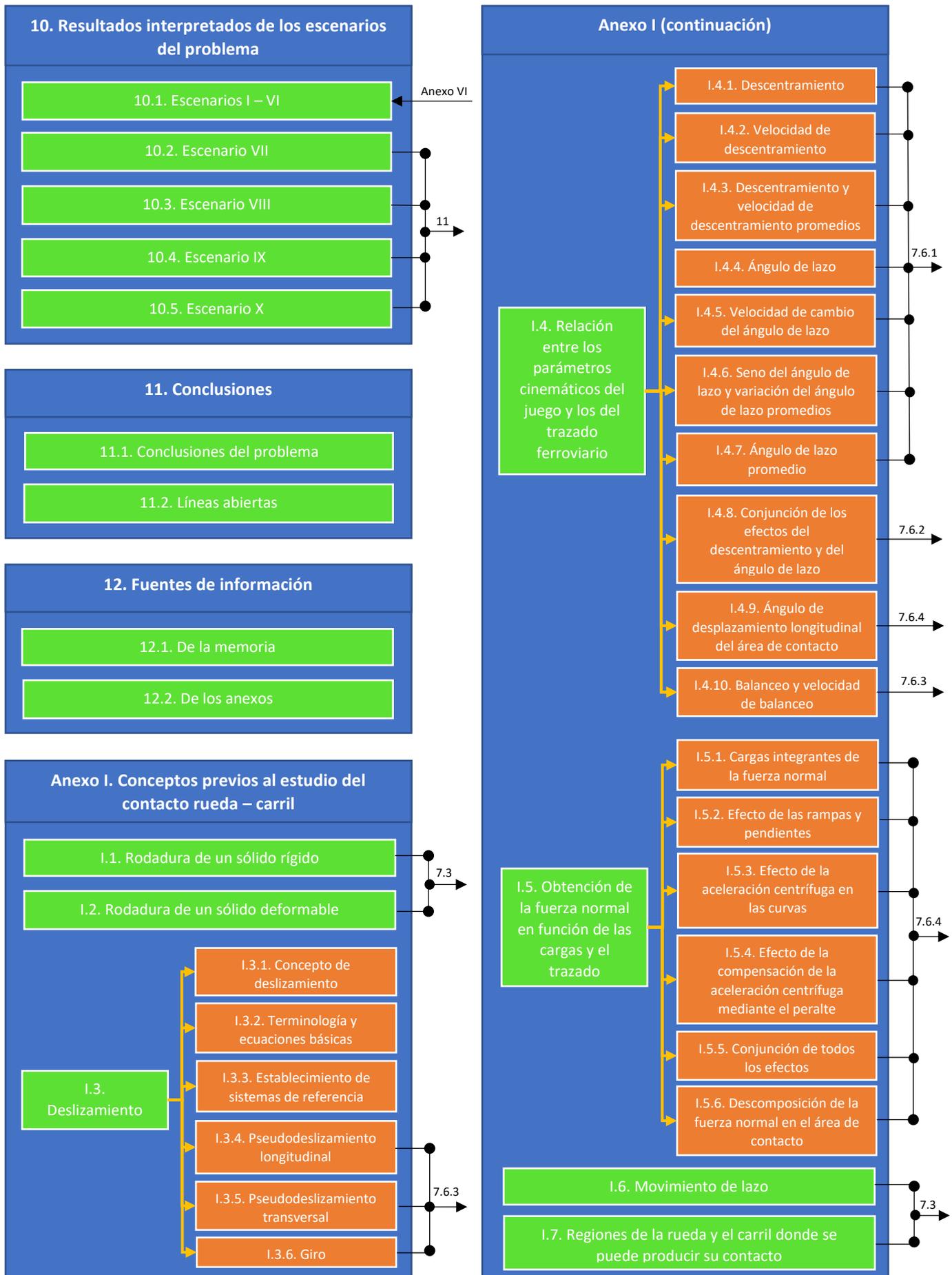
- ✓ Los capítulos, sean de la memoria o anexos, se representan como rectángulos de color azul.
- ✓ Los subcapítulos/secciones/apartados se representan como rectángulos de color verde, los cuales se insertan dentro de los rectángulos correspondientes a los capítulos que los contienen.
- ✓ Las subsecciones/subapartados se representan como rectángulos de color naranja, los cuales se insertan dentro de los rectángulos correspondientes a los capítulos que los contienen. Además, flechas amarillas ligan aquellos rectángulos con los correspondientes a los subcapítulos/secciones/apartados que los contienen.

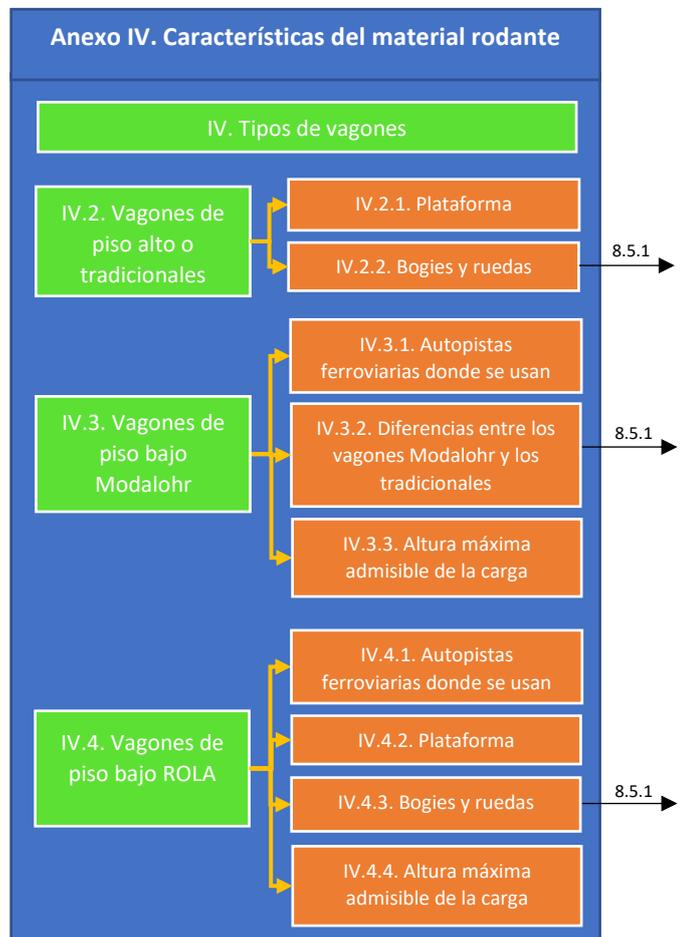
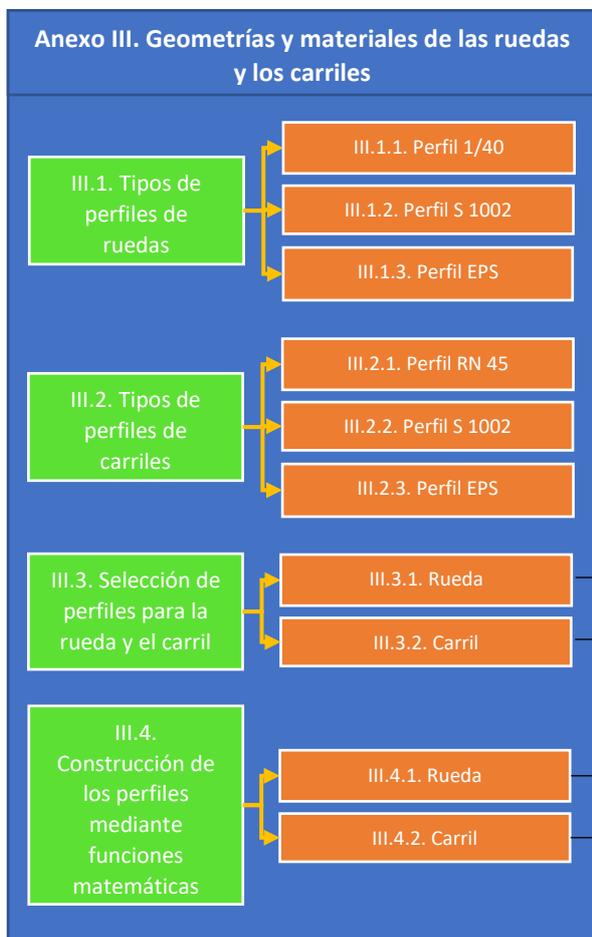
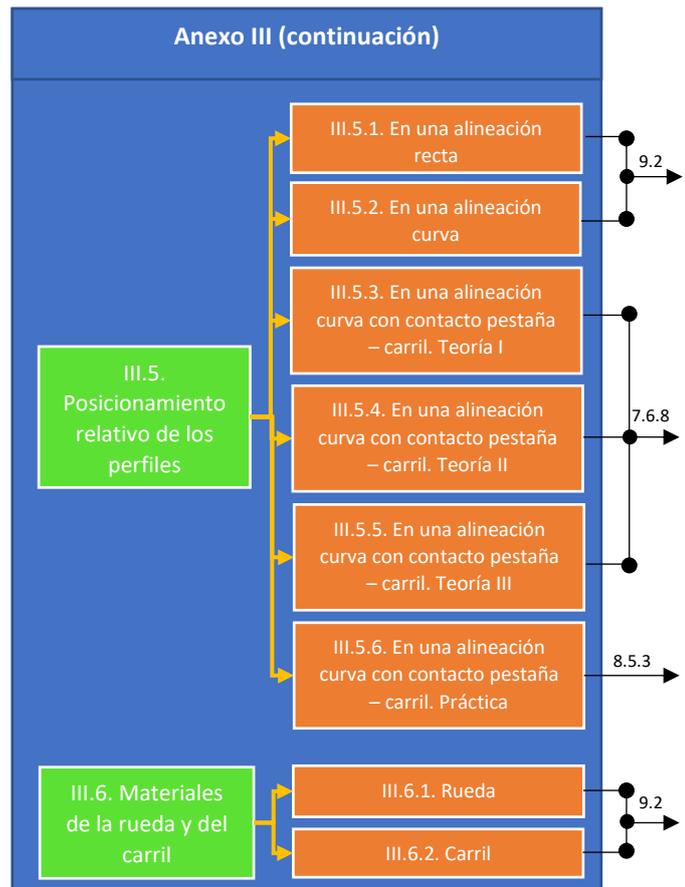
Estos paralelogramos se enlazan entre sí mediante flechas negras, de modo que queden claros cuáles son los flujos de información que permiten la resolución del problema. Cuando de un bloque no surja ni a él llegue ninguna flecha, ese será un bloque aislado. Trátase de una información que no puede proporcionar el índice del documento, por lo que este esquema constituye un suplemento a este. Inmediatamente abajo comienza el esquema, que se reparte en varias páginas dada su gran extensión:











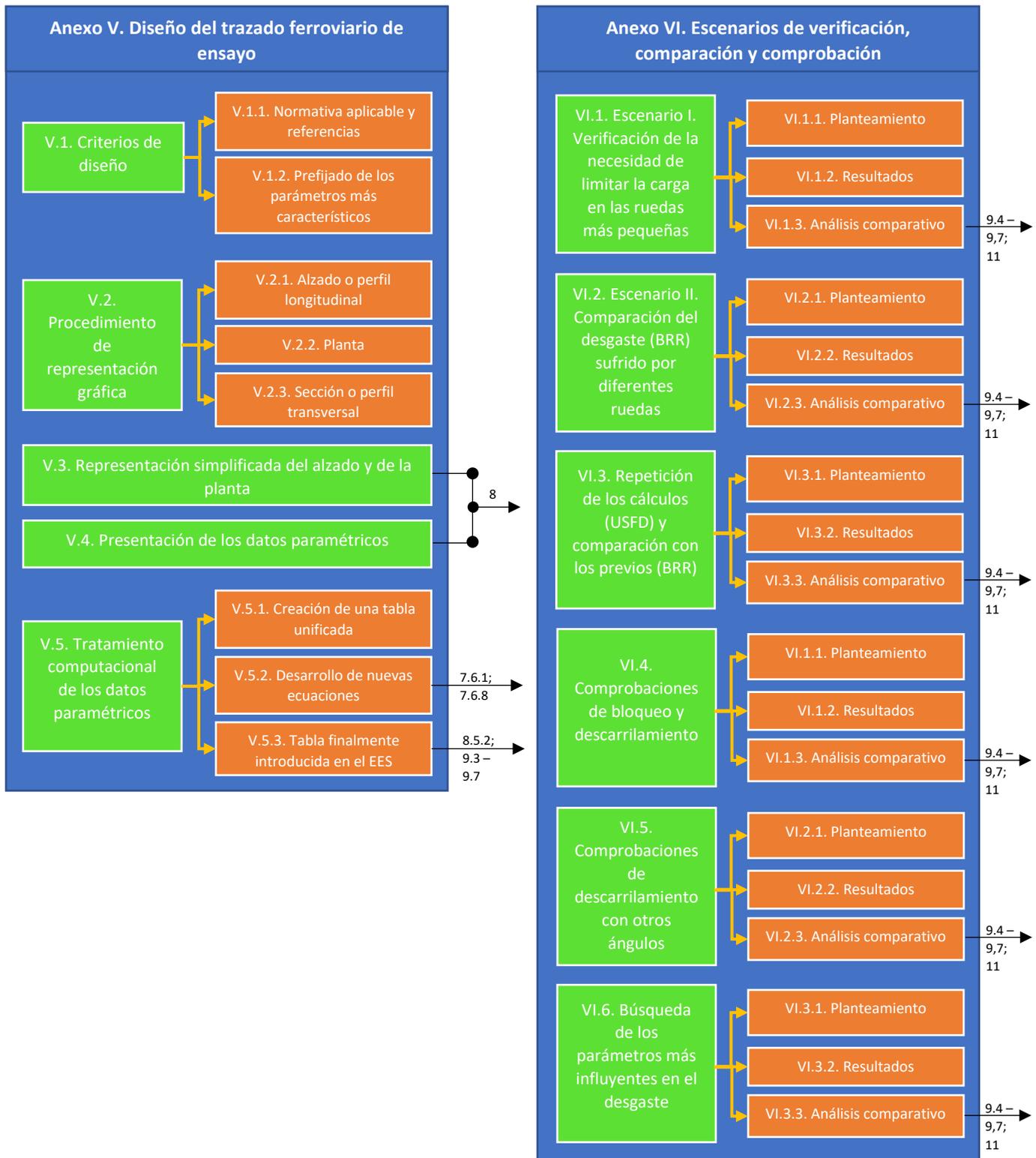


Figura 1.1. Esquema relacional del trabajo.

2. Revisión del estado de la técnica.

Este problema puede abordarse desde tres puntos de vista diferenciados: operacional, económico y técnico.

2.1. Perspectiva operacional.

Desde el punto de vista de la operación, se persigue que los vagones dispongan de un plano de carga lo más próximo posible a los carriles para de esta manera poder cargar semirremolques (con o sin sus cabinas tractoras) y atravesar los túneles (o puentes, por debajo de ellos) de las autopistas ferroviarias sin que su gálibo se lo impida. Los servicios de transporte en estas autopistas se definen de la siguiente manera:

El transporte mediante autopistas ferroviarias o *ferroutage* (del francés, *chemin de fer* “ferrocarril” + *route* “carretera” + *-age* “-aje”) son servicios de transporte ferroviario de mercancías sobre las líneas existentes de la red ferroviaria, que transportan camiones articulados o semirremolques utilizando vagones especializados. Son un segmento del transporte combinado ferrocarril – carretera adicional al de contenedores marítimos y cajas móviles. Estos servicios entran, especialmente, en competencia directa con el transporte de mercancías por carretera, en la medida en que su uso por los cargadores no requiere obligatoriamente de una adaptación específica de los camiones [1, p. 2].

Se trata en definitiva de utilizar la carretera para el transporte de mercancías del punto de origen a una terminal de transporte combinado desde el que serán transferidas a un tren que recorrerá la mayor parte del trayecto, antes de ser transferidas de nuevo a un camión que las lleve hasta el punto de destino.

Además de las razones medioambientales, este enlace puede resultar rentable desde el punto de vista económico para largas distancias (varios cientos de kilómetros) en las que el transporte ferroviario resulta competitivo, o en enlaces complicados y saturados, como puede ser atravesar determinados obstáculos [2, p. 74].

Este tipo de servicios de transporte puede ser de tres tipos [2, pp. 74 y 75]:

- ✓ Transporte combinado: Solamente se transfieren contenedores y cajas móviles entre el modo de transporte carretero y ferroviario.
- ✓ Transporte de semirremolques: Solamente se transfieren semirremolques, sin sus cabezas tractoras, entre ambos modos de transporte.
- ✓ Transporte acompañado de camiones: En este caso se transfiere el camión completo, que se monta sobre los vagones. Al transportar la cabina tractora, los conductores también viajan en el tren (en un coche – cama), ya que serán los encargados de descargar sus camiones y llevarlos de la estación de descarga a su destino final (transporte de última milla).

Esta última modalidad de transporte es la más desarrollada a día de hoy y, cuando se combina con la utilización de vagones de piso rebajado mediante el montaje de ruedas de diámetro reducido, se consigue una gran rapidez en las operaciones de carga y descarga, durando 1 minuto por camión, ya que basta una rampa para realizarlas [2, p. 76]. En la siguiente imagen se representa esta combinación:



Figura 2.1. Transporte acompañado con los vagones citados. Fuente: Recreación propia de [2, fig. 2].

La altura del plano de carga de los vagones más la altura de los camiones deberá ser tal que se superen las limitaciones de gálibo, las cuales deben ser estudiadas con el procedimiento que se va a describir a continuación. Para comenzar, se revisan los diferentes tipos de gálivos según la Unión Internacional de Ferrocarriles (UIC, por sus siglas en francés) y su adaptación al caso español:

Los gálivos se denominan mediante unas siglas cuyo significado es el siguiente:

a) Para los gálivos en líneas con ancho de vía estándar europeo o ibérico:

- ✓ G: Gálibo
- ✓ H: Histórico
- ✓ E: Español
- ✓ A: Gálibo envolvente del gálibo GA
- ✓ B: Gálibo envolvente del gálibo GB
- ✓ C: Gálibo envolvente del gálibo GC
- ✓ Las dos cifras indican el ancho de vía redondeado a decímetros.

Para los gálivos G1, GA, GB y GC por tratarse de gálivos interoperables europeos se omite la indicación del ancho de vía, al entenderse que solo se definen para el ancho estándar europeo.

b) Para los gálivos en líneas con ancho de vía métrico:

- ✓ G: Gálibo
- ✓ E: Español
- ✓ E: Eléctrico
- ✓ D: Diésel
- ✓ Las dos cifras indican el ancho redondeado a decímetros

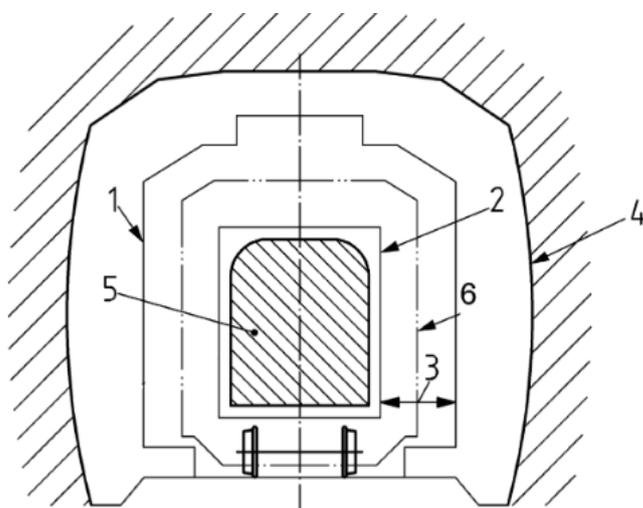
Tabla 2.1. Tipos de gálibo en función del ancho de vía. Fuente: [3, p. 8].

TIPOS DE GÁLIVO	ANCHO DE VÍA (mm)		
	1668	1435	1000
NUEVOS	GEA16	GA	GED10
	GEB16	GB	GEE10
	GEC16	GC	
HISTÓRICOS	GHE16	GEC14	
		GC14	

Para cada tipo de gálibo se define un contorno de referencia. A partir de este, y mediante la aplicación de unas reglas asociadas (expresiones matemáticas), se obtienen el gálibo del material rodante y el gálibo de implantación de obstáculos correspondientes a ese gálibo.

Además, en cada punto kilométrico de la línea, y para cada gálibo (GHE16, GEA16, GA, etc.), se definen unos gálibos límite y nominal de implantación de obstáculos, que son función de las características del trazado (radio, peralte, etc.) en ese punto. Comparativamente, el gálibo nominal es algo mayor que el límite, al incorporar márgenes para futuros incrementos de velocidad, paso de transportes excepcionales, etc.

Para evitar tener un gálibo distinto en cada punto de la línea, se define un gálibo uniforme, que es envolvente de los gálibos nominales, y que se obtiene para unas características de trazado suficientemente desfavorables, como para no ser superadas más que excepcionalmente en algún punto de la línea [3, pp. 7 – 9].



- (1) Gálibo de implantación de obstáculos.
- (2) Perfil constructivo máximo del material.
- (3) Suma de los movimientos del vehículo y de los fenómenos de interacción con la infraestructura.
- (4) Infraestructura.
- (5) Vehículo.
- (6) Contorno de referencia.

Figura 2.2. Gálibos considerados. Fuente: [3, p. 8].

Para determinar la altura máxima admisible de la carga, es decir, de los camiones, se consideran los contornos de referencia. La intersección de la altura de la carga con las partes altas de cada uno de los contornos de referencia es la que da la máxima altura admisible de la carga para cada tipo de gálibo. Las partes bajas habría que considerarlas aparte y no afectarían a la altura máxima admisible de la carga, sino a factores de diseño del vagón.

En la siguiente imagen se muestra cómo habría que realizar estas intersecciones para los gálibos GHE16, GEA16, GEB16, GEC16, GA, GB y GC, donde una letra mayor indica un gálibo mayor. Como todos ellos quedan muy juntos y apenas se distinguen, se muestra también una ampliación de la esquina superior derecha de la imagen donde se puede determinar qué contorno se corresponde con cada gálibo:

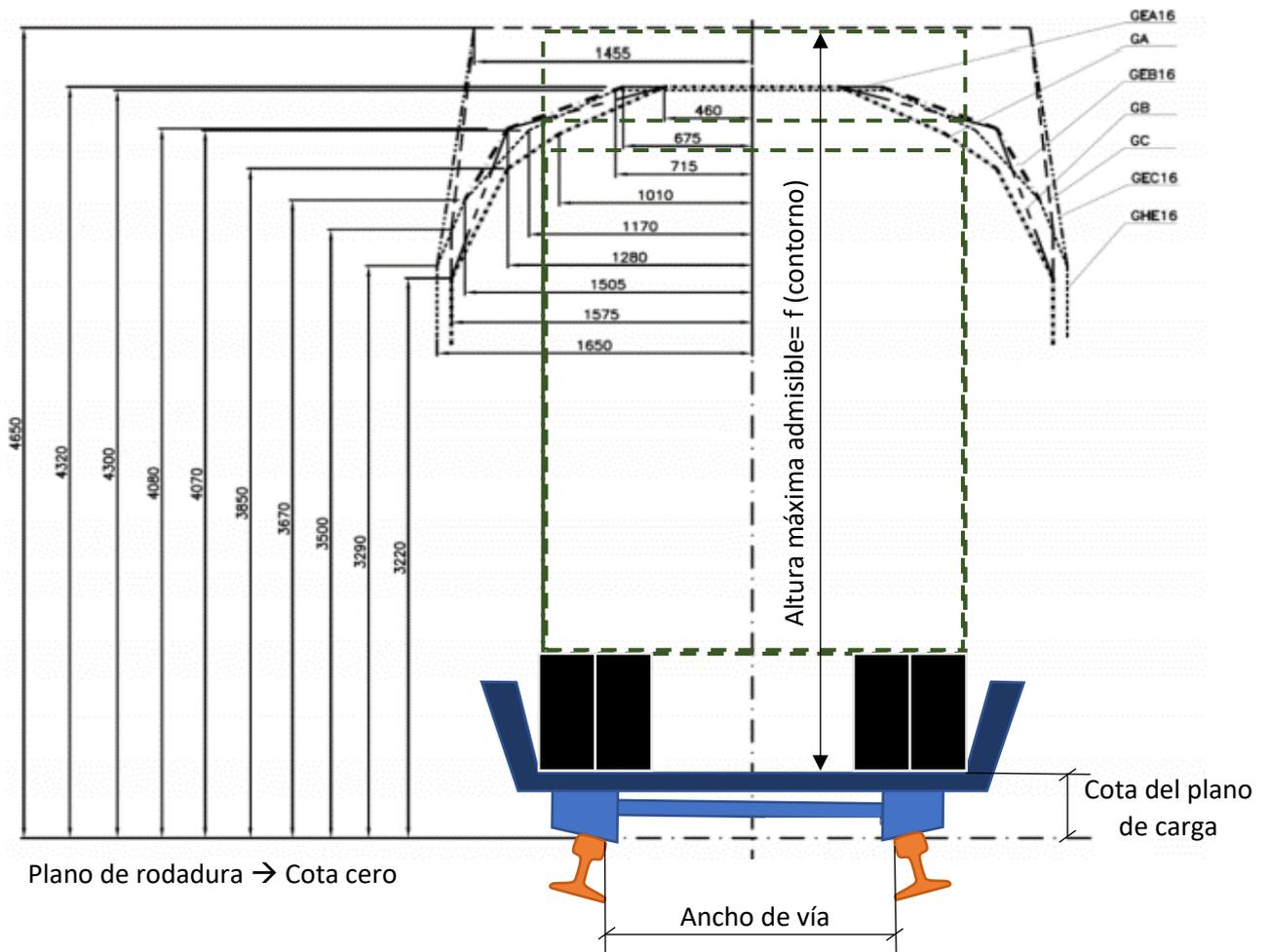


Figura 2.3. Partes altas de los contornos de referencia de los gálibos GHE16, GEA16, GEB16, GEC16, GA, GB y GC. Fuente: [3, p. 242].

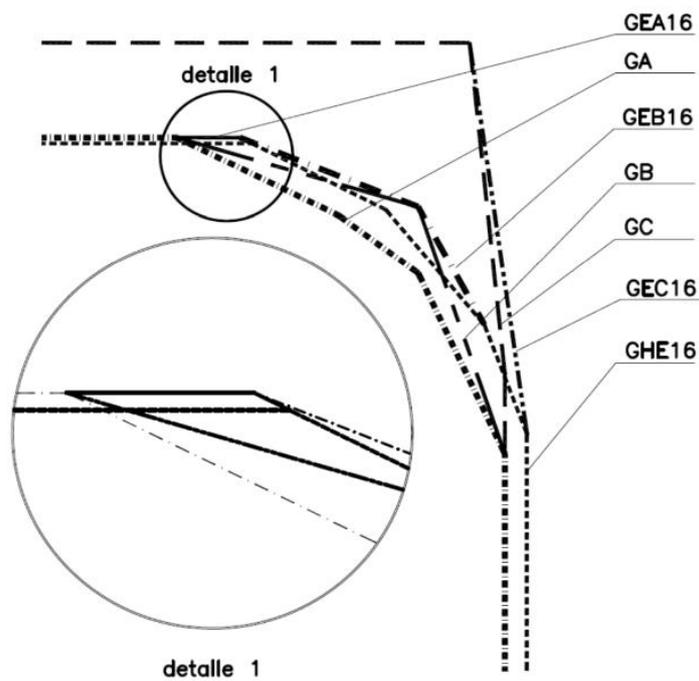


Figura 2.4. Ampliación de la esquina superior derecha de la figura 2.3. Fuente: [3, p. 242].

Por tanto, la reducción del diámetro de las ruedas permite rebajar el piso de los vagones (el plano de carga, en efecto) logra incrementar la altura máxima admisible de la carga. Ello permite realizar *ferroustage* con los camiones que satisfagan esta altura máxima admisible.

2.2. Perspectiva económica.

La banda de rodadura de una rueda de diámetro reducido habrá de rodar la misma distancia que la de una rueda de mayor diámetro en un mismo trayecto, pero como las dos bandas son diferentes, el número de revoluciones que cada una necesitará para hacer el mismo recorrido lineal no será el mismo.

La distancia lineal recorrida por una rueda, que se puede denotar L [m], se puede expresar como el producto del número de revoluciones n [ϕ] y de la longitud de la banda de rodadura (la circunferencia de rodadura) ℓ [m]:

$$L = n\ell \quad [Ec. 2.1]$$

A su vez, la circunferencia de rodadura se puede expresar en función del diámetro de rodadura D [m]:

$$\ell = \pi D \quad [Ec. 2.2]$$

Combinando ambas ecuaciones se llega a:

$$L = \pi n D \quad [Ec. 2.3]$$

Si se les asigna el subíndice 1 a las variables para la rueda reducida y el subíndice 2 para la rueda convencional y se calcula la ratio entre las dos expresiones obtenidas, se halla la siguiente relación:

$$\begin{cases} L_1 = \pi n_1 D_1 \\ L_2 = \pi n_2 D_2 \end{cases} \rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{n_1 D_1}{n_2 D_2} \quad [Ec. 2.4]$$

Cuando la rueda reducida y la convencional recorren un tramo recto del trazado de igual longitud ($L_1 = L_2$), se tiene esta relación:

$$1 = \frac{n_1 D_1}{n_2 D_2}$$

$$n_1 D_1 = n_2 D_2 \quad [Ec. 2.5]$$

Nota: Este análisis no es válido para un tramo curvo, donde habría que introducir más parámetros, y se está despreciando el ligero exceso o ligera insuficiencia de distancia recorrida consecuencia del deslizamiento.

Si el diámetro de la rueda convencional es, por ejemplo, el doble que el de la pequeña, lo que se tiene es lo siguiente:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1} = 2$$

Es decir, para la misma distancia lineal se tiene que una rueda pequeña gira el doble de veces más que una rueda tradicional. Esto implica para la rueda pequeña lo que sigue:

- ✓ Un recorrido angular, que será el producto de 2π [rad/revolución] por n_1 [n.º de revoluciones], del doble.
- ✓ El contacto rueda – carril, el cual es cíclico y se produce cada 360° o 2π [rad], se producirá el doble de veces.

Esto parece indicar, *a priori*, que la rueda pequeña experimentará un mayor desgaste. De ser así, esta mayor degradación del material exigirá un mayor mantenimiento, lo cual se hará patente en el mayor número de rectificadas o reperfilados de la rueda para homogeneizar su diámetro y dar inicio a un nuevo ciclo de degradación tras cada uno. Tras una serie de reperfilados se alcanzará el diámetro mínimo admisible y rueda deberá ser descartada.

Por otro lado, podría producirse un número superior de rechazos por agrietamiento, dado que la capacidad de amortiguamiento de las vibraciones de una rueda se reduce conforme disminuye su tamaño.

Como conclusión, desde el punto de vista de la economía, la utilización de ruedas más pequeñas supondrá, de confirmarse este supuesto mayor desgaste, la incursión en gastos más elevados.

2.3. Perspectiva técnica.

Desde el punto de vista de la técnica, existen múltiples factores que afectan a la vida útil de la rueda y que deben ser tenidos en cuenta en el análisis. Estos factores pueden deberse a la propia rueda, al vagón, a la superestructura ferroviaria o ser externos. Cítanse seguidamente:

1. Los factores debidos a la rueda son sus parámetros geométricos (diámetro, conicidad, anchura de la banda de rodadura y ángulo de contacto con el carril), sus parámetros de mecanizado (rugosidad superficial), su constitución material (constantes definitorias del material), su carga y su desgaste previo.
2. Los factores debidos al vagón pueden ser constructivos u operacionales. Los constructivos son su configuración (distribución de bogies y número de ejes por bogie), su suspensión y su sistema de frenado. Como factores operacionales, se citan la velocidad de circulación y la distribución de la carga en sus ejes (carga por eje).
3. Los factores debidos a la superestructura ferroviaria son el ancho de vía, el trazado de la vía (siendo la sinuosidad el parámetro más relevante), la calidad del trazado (en cuanto respecta

a la adecuación de los peraltes, las curvas de transición, etc.), el desgaste previo de los carriles, la contaminación de los mismos (con salitre, hojas, aceite, etc.) y la humedad sobre ellos, el tipo de carril (soldado o con juntas de dilatación), la flecha máxima de este, la constitución material del mismo (constantes definitorias del material) y el número de cambios de agujas.

4. Los factores externos son principalmente la temperatura y el viento y, en general, la climatología.

En el análisis se tendrán en cuenta los factores más influyentes de entre todos los citados, despreciándose los que menor impacto tengan en la vida útil de la rueda. Por el momento, ya se han fijado unas condiciones climatológicas concretas en el alcance del presente trabajo ([sección 1.2](#)) y se ha restringido el valor del ancho de vía en el propio alcance.

Por último, y con las miras puestas en la creación de autopistas ferroviarias entre España y Francia, es importante considerar la interoperabilidad técnica del vagón para que pueda realizar diversos recorridos nacionales o internacionales, para lo cual se requiere su adaptación a diversos gálibos y anchos de vía. Para lo primero, es importante calcular la altura máxima admisible de la carga en el gálibo más restrictivo, que puede ser francés (GA, GB o GC) o español (GHE16, GEA16, GEB16 o GEC16). Para lo segundo, se está realizando un fuerte impulso para la puesta en servicio de un moderno cambiador automático de ancho de vía para trenes de mercancías: el sistema OGI [4].

3. Descripción del proyecto.

En el presente proyecto se determina la vida útil de una rueda de ferrocarril de diámetro reducido, en función de los factores de operación propios de los vagones de mercancías. El proyecto se divide en estas fases a grandes rasgos:

1. Fase de formulación teórica.
2. Fase de planteamiento.
3. Fase de obtención e interpretación de resultados.
4. Fase de establecimiento de conclusiones.

En los siguientes apartados se describe en qué consiste cada una de estas fases.

3.1. Fase de formulación teórica.

Para comenzar, se parte de conceptos básicos, revisándose la rodadura de un sólido rígido ([sección I.1](#)) y en qué se diferencia esta de la rodadura de un sólido deformable ([I.2](#)).

Esta rodadura no es ideal y en ella se produce deslizamiento, cuyo estudio es crucial para la determinación de la vida útil de una rueda. Esta rueda permanecerá unida solidariamente a un eje, el cual, a su vez, se unirá a otra rueda en su extremo opuesto. La unión solidaria de estos tres elementos se conoce como juego de ruedas (esto permite distinguir entre el eje, que es una parte del juego de ruedas, y el propio juego de ruedas, siendo una distinción análoga a la inglesa *axle – wheelset*).

Esta unión solidaria es muy influyente en el deslizamiento, el cual puede ser de tipo adimensional, microdeslizamiento o pseudodeslizamiento. Lo que se propone en este proyecto es centrarse en el pseudodeslizamiento, ya que se puede obtener mediante un estudio cinemático de un juego de ruedas ([I.3](#)), cuyos grados de libertad dependen fuertemente de las características del trazado ferroviario, aunque también de factores geométricos del juego de ruedas y del bogie en que esté ([I.4](#)).

Por otro lado, está el aspecto dinámico: el estudio de las fuerzas que recaen sobre sendas ruedas de un juego en la dirección normal al área de contacto entre las ruedas y sus respectivos carriles. Estas fuerzas normales influyen en la magnitud del desgaste y dependen en gran medida de las cargas a las que se ven sometidas las ruedas y del trazado ferroviario ([I.5](#)).

También existen fenómenos de inestabilidad: el movimiento de lazo. El movimiento de lazo es un fenómeno de inestabilidad asociado a la rodadura de cuerpos troncocónicos como las ruedas que puede incrementar enormemente la magnitud del desgaste, llegando a provocar intensos daños en las ruedas y la vía, así como el eventual descarrilamiento del vehículo ferroviario. Tras un breve estudio se concluye que en el rango de velocidades y carga característicos del transporte de mercancías este fenómeno no aparece o, si aparece, será transitorio y de pronta extinción ([I.6](#)).

Conocer en qué regiones de la rueda y el carril se produce el contacto también es relevante, en tanto en cuanto las características del contacto y del desgaste variarán según la región en la cual haya lugar el contacto. Los factores del trazado y de la distancia entre las pestañas y los carriles (juego de vía) son los más influyentes a este respecto ([I.7](#)).

Todo lo anterior son conceptos que versan, en general, sobre la rodadura y son previos al estudio del contacto rueda – carril propiamente dicho. Se ha realizado un índice – resumen para poder encontrar fácilmente todos los conceptos ([sección 4.2](#)).

Lo primero que debe tenerse en cuenta sobre el estudio del contacto rueda – carril es que es puramente teórico y se descompone en dos problemas: normal y tangencial ([sección 4.1](#)).

Gracias a la (práctica) igualdad de los materiales de los cuerpos en contacto en el caso ferroviario es posible desacoplar ambos problemas, lo cual simplifica grandemente la complejidad del problema global ([4.3](#)). El problema normal se suele resolver por medio de la teoría de Hertz, debido a su poco gasto computacional y gran precisión ([4.4](#)).

Los resultados del problema normal (valores de presiones y deformaciones normales y las dimensiones del área de contacto, que es una elipse) se emplean en la resolución del problema tangencial, para cuya resolución existe una gran variedad de teorías (o métodos de resolución). Todas ellas correlacionan las fuerzas tangenciales con los pseudodeslizamientos y de entre ellas se presentan las más significativas en orden cronológico, dado que este orden está relacionado con su precisión.

Finalmente, se opta por el método de Polach, una mejora de la teoría lineal de Kalker que resulta ser el más moderno y el más preciso si se tiene en cuenta su simplicidad, ya que sus ecuaciones se pueden aplicar directamente al área de contacto (la elipse de Hertz) sin necesidad de discretizarla en elementos finitos ([4.5](#)). Este método tiene la ventaja adicional de que puede ejecutarse con un coeficiente de rozamiento constante o variable según las condiciones de la vía (húmeda o seca, contaminada o limpia).

Posteriormente, se aborda el estudio del desgaste. En el contacto se producen daños por múltiples causas, aunque en este trabajo únicamente se van a tratar dos tipos de daños: los daños debidos a la abrasión y la adhesión, conocidos como desgaste, y también los daños por fatiga de contacto rodante, si bien estos últimos se van a tratar exclusivamente de un modo predictivo ([5.1](#)).

Para calcular el desgaste existen una serie de modelos, de los cuales se presentan los más importantes. Tras cotejar sus ventajas e inconvenientes se opta por el modelo de transferencia de energía con las leyes de la Investigación Ferroviaria Británica y de la Universidad de Sheffield, basadas ambas en la estimación de la energía disipada por las fuerzas de fricción en el área de contacto y en su correlación con la tasa de desgaste ([5.2](#)).

Las tasas de desgaste de cada ley se pueden correlacionar con la profundidad que alcanza el desgaste en la rueda, que es un parámetro de suma relevancia a la hora de calcular la vida útil de la rueda ([5.3](#)), ya que se toma como referencia a la hora de eliminar el desgaste. Esta eliminación se lleva a cabo mediante el reperfilado de la rueda, que consiste en arrancarle una capa de material por debajo de la profundidad alcanzada por el desgaste ([5.4](#)).

Con el fin de estimar mejor con qué valor de profundidad realizar cada reperfilado, el cual también se utiliza para la eliminación de otros daños como las grietas, se utiliza el modelo del índice de fatiga. Este modelo se basa en el cálculo de un índice cuya comparación con 0 permite conocer si aparecerán grietas subsuperficiales en la rueda debido a la fatiga por contacto rodante o no ([5.5](#)).

Adicionalmente, se realizan varios desarrollos teóricos para completar la formulación teórica del problema. Estos desarrollos se resumen en cuatro secciones ([6.1](#), [6.2](#), [6.3](#) y [6.4](#)), si bien se llevan a cabo en los anexos dada su extensión:

- ✓ En primer lugar, se efectúa el ajuste polinómico de los coeficientes de Hertz ([sección II.1](#)) y de Kalker ([II.2](#)). Esos ajustes son debidamente justificados e implementados en el mismo *software* que el empleado para la resolución del problema y se revisan en la [sección II.3](#), donde se introducen ciertas mejoras.
- ✓ En segundo lugar, se lleva el estudio del contacto pestaña – carril ([III.5](#)), el cual presenta ciertas particularidades más allá de las propias características del contacto rueda – carril y se produce en ciertos subtramos del trazado, según los parámetros de estos.
- ✓ En último lugar, se desarrollan ciertas relaciones matemáticas entre los parámetros del trazado con el fin de simplificar las tablas ([V.5](#)), lo cual permite tabular únicamente los parámetros geométricos más característicos y obtener los demás a través de las fórmulas establecidas.

3.2. Fase de planteamiento.

Contando ya con toda la formulación teórica precisa para la resolución del problema, se realiza el planteamiento computacional ([sección 7.1](#)).

Para comenzar, se define el *software* empleado en la resolución del problema, que es el *Engineering Equation Solver* en su versión *Professional V9.457-3D* ([7.2](#)).

Tras esto, se establecen las hipótesis de cálculo del problema ([7.3](#)) y el diagrama de flujo que muestra los diferentes flujos de cálculo precisos para la resolución del problema ([7.4](#)).

Además, se establecen las variables necesarias para parametrizar el problema ([7.5](#)) y se reúnen todas las ecuaciones en un prontuario ([7.6](#)).

Una vez recogidas todas las ecuaciones, se plantea el caso de estudio ([8.1](#)). De partida, resulta de gran relevancia definir el objeto del caso ([8.2](#)).

Para poder edificar el caso, es preciso conocer los datos característicos del problema ([8.3](#)), para lo cual se requiere de tareas de recopilación de información. Estas tareas se llevan a cabo en los anexos dada su extensión:

- ✓ En primer lugar, se recopilan los datos de los diferentes perfiles de ruedas ([sección III.1](#)) y de carriles ([III.2](#)), llegando a seleccionar un perfil de rueda y otro de carril ([III.3](#)). Los perfiles seleccionados se ajustan mediante ajustes polinómicos o funciones definidas a trozos ([III.4](#)). Esto se complementa con el posicionamiento relativo de la rueda y el carril ([III.5](#)), puesto que la posición relativa de este binomio determina en buena medida los parámetros que, a su vez, determinan la forma de la elipse de Hertz. Esta posición relativa depende de multitud de parámetros de la vía, del juego de ruedas y del bogie, los cuales influyen en buena medida en el desgaste de las ruedas. Para obtener este desgaste resulta también fundamental caracterizar los materiales, por lo que se estudian y recopilan las propiedades específicas y genéricas de los grados de acero que se asignan a la rueda y al carril ([III.6](#)).

- ✓ Las ruedas estudiadas formarán parte del material rodante, es decir, de los vagones que transporten mercancías (IV.1). Se estudian tres tipos de vagones, cada uno con diferentes tipos de ruedas (contantes con una gran variabilidad de diámetros), bogies, dimensiones, limitaciones de carga, frenos, etc. Estos tipos son: tradicional (IV.2), Modalohr (IV.3) y ROLA (IV.4). Cabe resaltar, además, que cada uno de ellos llevará asociada una altura máxima admisible de la carga distinta.
- ✓ Este material rodante recorrerá un trazado fijo, cuyas características geométricas influirán en el desgaste de sus ruedas. De ahí la importancia de diseñar un trazado para los ensayos de desgaste, para lo cual se establecen, en primer lugar, los criterios de diseño (V.1). Con los criterios de diseño establecidos, se plantea el procedimiento de representación gráfica (V.2) y se procede a graficar simplificadaamente el alzado y la planta del trazado (V.3). En los croquis del alzado y de la planta se marcan los puntos singulares, es decir, aquellos puntos en los que los parámetros del trazado varían. Estos puntos singulares se utilizan para rellenar varias tablas que contienen la información paramétrica del trazado (V.4), las cuales se unifican con posterioridad de cara a su introducción en el programa EES (V.5).

Teniendo toda esta información, se termina de plantear el caso al establecer los rangos entre los cuales se moverán las variables en el análisis de sensibilidad y obtención de la vida útil de las ruedas (8.4).

Con el caso ya planteado se establecen diferentes escenarios de cálculo. Como se explica en la introducción (9.1), algunos satisfacen indirectamente el objeto del trabajo, mientras que otros lo satisfacen directamente. Todos ellos parten de unas mismas constantes, no obstante (9.2).

Aquellos que lo satisfacen indirectamente (9.3) se llevan a cabo en los anexos, pues son muy extensos:

- ✓ En el escenario I se verifica la necesidad de limitar la carga en las ruedas más pequeñas y al final se deduce teóricamente el motivo por el cual las ruedas de diámetro reducido no se pueden cargar tanto como las tradicionales (VI.1).
- ✓ En el escenario II se compara el desgaste sufrido por ruedas de diferentes diámetros calculado según la ley de desgaste la BRR y se interpreta la evolución del desgaste en función del diámetro de la rueda (VI.2).
- ✓ En el escenario III se repiten los cálculos, realizándose esta vez según la ley de la USFD, y los nuevos resultados se comparan con los del escenario previo. Esto permite observar las diferencias de comportamiento entre la ley de la BRR y la ley de la USFD, las cuales se justifican desde un punto de vista teórico (VI.3).
- ✓ En el escenario IV se efectúan comprobaciones de bloqueo y descarrilamiento. Esto es importante, pues deben evitarse estas situaciones que pueden producir daños catastróficos sobre las ruedas y sobre la mercancía, respectivamente (VI.4).
- ✓ En el escenario V se repiten las comprobaciones de descarrilamiento, pero con diferentes ángulos de contacto. Lo que se obtiene al final es el ángulo óptimo (el menor que permite el equilibrio de las fuerzas actuantes sobre la pestaña), el cual se utiliza en los escenarios posteriores (VI.5).

- ✓ Finalmente, en el escenario VI se lleva a cabo una búsqueda de los parámetros o factores que más influyen en el desgaste. Esto se consigue mediante un análisis de sensibilidad ([VI.6](#)).

Por último, se establecen los escenarios que satisfacen directamente el objeto del trabajo. El primero de ellos es el escenario VII, en el cual se plantea el cálculo de la vida útil de una rueda de 920 mm de diámetro ([9.4](#)). Lo mismo se plantea en los escenarios VIII y IX, aunque para una rueda de 680 mm ([9.5](#)) y para una rueda de 355 mm ([9.6](#)), respectivamente. El último escenario es el X, en el cual se plantea la obtención de la vida útil de las ruedas tras la alteración de algunos de los parámetros más influyentes ([9.7](#)).

3.3. Fase de obtención e interpretación de resultados.

Para cada escenario se obtienen los resultados gracias al programa desarrollado en el EES, los cuales se presentan en tres formatos: numérico, tabular y gráfico.

En el caso de los escenarios que satisfacen indirectamente el objeto del proyecto, estos resultados se muestran de forma ordenada después del planteamiento de cada escenario. Una vez insertos los resultados, estos se interpretan, lo cual se realiza inmediatamente debajo de los resultados para facilitar la consulta de los resultados mientras se lee su interpretación ([10.1](#)). Presentados de esta manera se pueden encontrar los resultados interpretados del escenario I ([VI.1](#)), los del escenario II ([VI.2](#)), los del escenario III ([VI.3](#)), los del escenario IV ([VI.4](#)), los del escenario V ([VI.5](#)) y los del escenario VI ([VI.6](#)).

Por el contrario, los resultados de los escenarios que satisfacen directamente el objeto del proyecto se muestran aparte, en un nuevo capítulo. La interpretación de estos resultados se muestra también debajo, pues ello facilita la consulta de los mismos mientras se lee su interpretación. Presentados de esta manera se pueden encontrar los resultados interpretados del escenario VII ([10.2](#)), del escenario VIII ([10.3](#)), del escenario IX ([10.4](#)) y del escenario X ([10.5](#)).

3.4. Fase de establecimiento de conclusiones.

Tras haber expuesto e interpretado los resultados de todos los escenarios, se establecen las conclusiones del problema. En ellas se compendian las conclusiones extraídas de cada escenario durante su interpretación y también las conclusiones globales, las cuales surgen de la comparación de todos los escenarios entre sí ([11.1](#)).

Finalmente, las líneas abiertas del problema, que son conclusiones desde el punto de vista del autor. En las líneas abiertas el autor esclarece en qué temas no ha profundizado lo suficiente, lo cual podría servir de precedente para futuras investigaciones en dichos temas ([11.2](#)).

4. Estudio teórico del contacto rueda – carril.

4.1. Introducción.

Tal como se explica en la [sección 1.2 del anexo I](#), en la rodadura de un sólido deformable (en este caso la rueda) sobre otro sólido deformable (el carril) se produce un contacto que no es puntual debido a las deformaciones que surgen como consecuencia del estado tensional local. Estas tensiones se reparten a lo largo y ancho de una determinada área de contacto, cuya determinación constituye el primer paso del estudio del contacto rueda – carril. Por ende, es un problema geométrico el que debe resolverse en primera instancia.

Tras la resolución de este primer problema se procede a estudiar qué sucede en la dirección normal al área de contacto (en cuanto a tensiones y deformaciones) y también qué sucede en la dirección tangencial (en cuanto a fuerzas, tensiones y deformaciones). Estos estudios se plantean como problemas: problema normal y problema tangencial, respectivamente.

Ambos problemas bien deben ser resueltos conjuntamente o bien pueden ser resueltos separadamente, lo cual dependerá de si están acoplados o no, que a su vez depende del cumplimiento de una serie de condiciones. Estas condiciones se estipularán durante el problema geométrico.

El objetivo de solventar los tres problemas (geométrico, normal y tangencial) es la obtención de resultados que podrán ser utilizados ulteriormente para el cálculo del desgaste de las ruedas.

4.2. Conceptos previos sobre el fenómeno de la rodadura.

Previamente a la lectura de este estudio teórico del contacto rueda – carril se recomienda encarecidamente la lectura del anexo I, que aborda cuanto es relativo al fenómeno de la rodadura.

El anexo I comienza con la teoría de la rodadura de un sólido rígido ([sección 1.1](#)) y con la teoría de la rodadura de un sólido deformable ([1.2](#)) y prosigue con la teoría del deslizamiento ([1.3](#)).

La teoría del deslizamiento es un concepto previo indispensable para el estudio del contacto rueda – carril, y aborda los siguientes puntos: Concepto de deslizamiento ([subsección 1.3.1](#)), terminología y ecuaciones básicas ([1.3.2](#)), establecimiento de los sistemas de referencia necesarios ([1.3.3](#)), pseudodeslizamiento longitudinal ([1.3.4](#)), pseudodeslizamiento transversal ([1.3.5](#)) y giro ([1.3.6](#)). Estos pseudodeslizamientos y el giro son adimensionales y se denotan v_x , v_y y φ ; y todos ellos se obtienen partiendo de un análisis cinemático de un juego de ruedas, es decir, un análisis de sus grados de libertad.

Posteriormente, se busca una relación entre los parámetros cinemáticos del juego y los parámetros que definen el trazado ferroviario ([sección 1.4](#)), lo cual es muy relevante cuando se parte de los segundos. En esta sección se aborda el descentramiento del juego en las curvas ([subsección 1.4.1](#)), la velocidad a la cual se produce este descentramiento ([1.4.2](#)), la obtención de valores promedio de estas dos variables en curvas de transición ([1.4.3](#)), el ángulo de lazo que aparece en las curvas al juntar dos o varios juegos en un bogie ([1.4.4](#)), la velocidad a la que varía este ángulo de lazo ([1.4.5](#)), la obtención

de valores promedio del promedio del seno del ángulo de lazo y de la velocidad con que varía (1.4.6), la obtención de un valor promedio para el ángulo de lazo (1.4.7), la conjunción de los efectos del descentramiento y del ángulo de lazo (1.4.8), el ángulo de desplazamiento longitudinal del área de contacto causado por el ángulo de lazo (1.4.9) y el ángulo de balanceo del juego que aparece cuando el juego traza una curva (1.4.10).

Una vez encontradas las relaciones pertinentes se explica cómo obtener la fuerza normal en función de las cargas y del trazado (sección 1.5). Esto es importante, en tanto en cuanto la fuerza normal es parámetro clave en el contacto rueda – carril y debe considerarse cómo le afectan las cargas (que tienen límites impuestos por la normativa) (subsección 1.5.1), así como las rampas y pendientes de los trazados ferroviarios (1.5.2) y la aceleración centrífuga en las curvas, que no afecta por igual a las dos ruedas de un juego (1.5.3) y cuya compensación parcial o total reduce las fuerzas normales sobre ellas (1.5.4). Finalmente, se conjuntan todos los efectos estudiados (1.5.5) y se descomponen las fuerzas normales obtenidas en una componente perpendicular y otra tangencial a cada área de contacto (1.5.6).

A continuación, se analiza qué afecciones podría causar el movimiento de lazo a un vehículo ferroviario de características semejantes a los vehículos objeto del problema (sección 1.6).

Para finalizar el anexo I, se describe en qué regiones de la rueda y el carril se puede producir su contacto (sección 1.7), punto que resulta de enorme relevancia porque las diferentes características de cada región harán que las características (de toda índole) del contacto rueda – carril sean distintas, resultando más o menos desfavorables desde el punto de vista del desgaste.

4.3. Introducción al problema geométrico.

4.3.1. Problema general de contacto.

En un problema general de contacto dos cuerpos de superficie arbitraria entran en contacto en una determinada área. Los cuerpos pueden presentar un movimiento relativo con respecto al otro en el área de contacto y la fricción puede aparecer como consecuencia de dicho movimiento. El tipo de contacto puede ser de dos tipos:

- ✓ No conforme: Ocurre cuando los dos cuerpos se encuentran en un solo punto o generatriz antes de aplicar carga sobre al menos uno de ellos o cuando, una vez aplicada la carga, el tamaño del área de contacto es pequeño en comparación con los tamaños característicos de los cuerpos.
- ✓ Conforme: Ocurre cuando los dos cuerpos se adaptan (geoméricamente) el uno al otro, produciéndose un área de contacto grande en comparación con los tamaños característicos de los cuerpos.

En el caso del contacto rueda – carril el contacto es no conforme en la mayoría de los casos, lo cual simplifica el problema geométrico. Esto es cierto en las regiones de contacto A y C, pero no es cierto

en la región B cuando tanto el perfil de la rueda como el del carril están muy desgastados debido al flujo plástico del material y se adaptan geoméricamente entre sí (véase la figura I.30 en la [sección I.7](#)). Cuando esto sucede, la anchura del área de contacto es comparable al radio de acuerdo de la pestaña con la banda de rodadura, con lo cual se trata de un contacto conforme. Sin embargo, si se sigue un mantenimiento adecuado no es probable alcanzar niveles de desgaste tan elevados, por lo que se puede suponer que el contacto siempre va a ser no conforme.

Por otro lado, el hecho de que ambos cuerpos (rueda y carril) cumplan la siguiente relación también simplifica enormemente el problema:

$$\frac{G_1}{1 - 2\nu_1} = \frac{G_2}{1 - 2\nu_2} \quad [Ec. 4.1]$$

donde G_1, G_2 [Pa] y ν_1 y ν_2 [ϕ] son el módulo de cizalla y el módulo de Poisson del primer y el segundo cuerpo, respectivamente.

Relación que la cumplen por ser ambos del mismo material, que es el acero. Esto implica que los esfuerzos tangenciales causan una deformación normal del mismo valor y opuesta en cada cuerpo. Lo mismo es cierto en lo que respecta al efecto de la tensión normal en las deformaciones tangenciales. Esto significa que en un contacto no conforme de dos cuerpos cuasi-idénticos (del mismo material o de materiales cuyas constantes satisfacen la ecuación 4.1) la solución del problema normal es independiente de las cargas tangenciales y, por tanto, el problema normal se puede abordar independientemente del tangencial [5, pp. 7 – 8 y 14].

4.3.2. Cuerpos cuasi-idénticos en contacto.

Antes de que dos cuerpos cuasi-idénticos cuyas superficies en la región de contacto son $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$ (funciones $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) sean cargados, su contacto es puntual. Este contacto se representa en la siguiente imagen, donde se fija el sistema de coordenadas dextrógiro $x_c y_c z_c$ con origen en el punto de contacto:

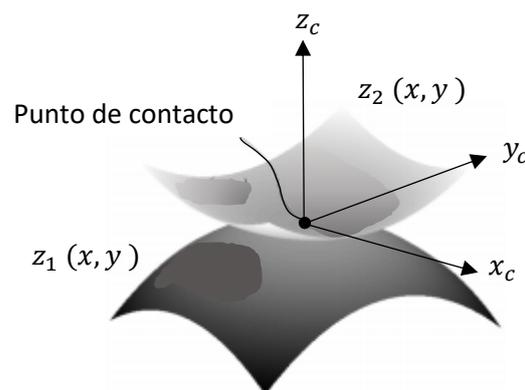


Figura 4.1. Punto de contacto de las superficies antes de ser cargadas. Fuente: Adaptación propia de [5, fig. 2.1 (a)].

Una vez estos dos cuerpos son cargados se presionan entre sí, pasando a exhibir un contacto no conforme en el cual aparece una interpenetración máxima δ_o [m]. Esta interpenetración se puede ver en esta imagen, junto con las distancias $h(x, y)$ [m], $z_1(x, y)$ [m] y $z_2(x, y)$ [m] y los desplazamientos normales de los cuerpos $u_{z_1}(x, y)$ y $u_{z_2}(x, y)$:

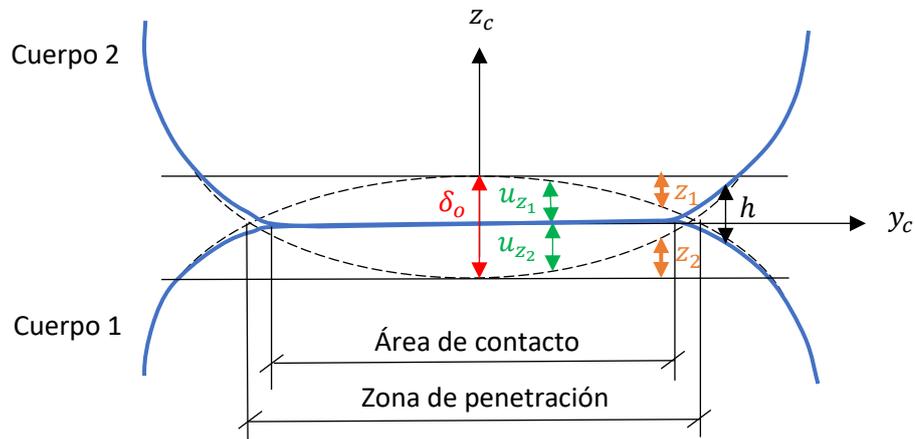


Figura 4.2. Compresión de un cuerpo contra el otro y variables de desplazamiento. Fuente: Recreación propia de [5, fig. 2.1 (b)].

En esta imagen se puede comprobar que se satisface esta igualdad:

$$h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y) + u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) - \delta_o \quad [Ec. 4.2]$$

que se puede simplificar a:

$$h(x, y) = z(x, y) + u_z(x, y) - \delta_o \quad [Ec. 4.3]$$

donde $z(x, y)$ [m] es la suma de $|z_1(x, y)|$ y $|z_2(x, y)|$ y se interpreta como la distancia entre los perfiles de las superficies (líneas intermitentes en la figura) y donde $u_z(x, y)$ [m] es la adición de $|u_{z_1}(x, y)|$ y $|u_{z_2}(x, y)|$ y se interpreta como el desplazamiento normal al área de contacto.

En cuanto al significado de $h(x, y)$, esta es una función de distancia que se emplea para hallar los límites del área de contacto. Gracias a esta función se pueden establecer dos condiciones (véase la figura 4.2 para mayor claridad):

$$\begin{cases} h(x, y) = 0 \rightarrow (x, y) \in D \\ h(x, y) > 0 \rightarrow (x, y) \notin D \end{cases}$$

donde D es el dominio del área de contacto. Nótese que fuera de este dominio, de esta área de contacto, existe una zona de penetración debido a la compresión del material adyacente del área de contacto, pero que no forma parte del contacto porque $h(x, y) \neq 0$ [5, p. 9].

4.4. Solución de Hertz al problema geométrico y normal.

Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894) estudió el problema de contacto entre superficies elásticas y con ello resolvió el problema normal en 1881. La teoría de Hertz se trata del primer análisis satisfactorio de las tensiones en el contacto de dos sólidos elásticos y resuelve el problema geométrico al mismo tiempo [6, p. 1], después de un primer desarrollo de Emil Wrinkler (1835 – 1888) en 1867 basado en muelles que relacionaban carga en un punto con deformación en dicho punto, aunque este método acabó siendo superado por el de Hertz porque su solución a los problemas dependía del valor de rigidez escogida para los muelles [5, p. 9 – 10].

4.4.1. Hipótesis.

La teoría de Hertz se basa en las siguientes hipótesis [6, p. 1], [5, pp. 10 – 11]:

1. Los cuerpos en contacto son homogéneos, isótropos y linealmente elásticos. Se supone que los desplazamientos son infinitesimales (mucho menores que las dimensiones características de los cuerpos).
2. Los cuerpos son suaves en la zona de contacto, es decir, sin presencia de rugosidad.
3. Cada cuerpo se puede modelar como un semiespacio elástico, lo cual requiere que las dimensiones del área de contacto sean pequeñas en relación con los radios de curvatura de los cuerpos. Según esto, el contacto ha de ser no conforme, lo cual implica una zona de contacto planar.
4. Las superficies de los cuerpos se pueden aproximar por funciones cuadráticas en la vecindad del punto de interpenetración máxima. Esto implica que la curvatura de los cuerpos en esta zona es constante (porque la curvatura de una función es la segunda derivada de la misma y al derivar una función cuadrática dos veces se obtienen constantes).
5. La distancia entre los perfiles indeformados de ambos cuerpos en la vecindad del punto de interpenetración máxima se puede aproximar por un paraboloides.
6. El contacto entre cuerpos se realiza sin rozamiento, motivo por el cual solo se puede transmitir una presión normal.

4.4.2. Parámetros geométricos de partida.

Ateniendo a la quinta hipótesis se tiene esta ecuación (función cuadrática $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tipo):

$$z(x, y) = C_1x^2 + C_2y^2 + C_3xy \quad [Ec. 4.4]$$

Mediante una elección adecuada de los ejes es posible anular el coeficiente C_3 , con lo cual:

$$z(x, y) = Ax^2 + By^2 \quad [Ec. 4.5]$$

donde se ha permutado C_1 por A y C_2 por B .

Derivando dos veces se obtiene la curvatura (que es la inversa del radio de la circunferencia osculatriz):

$$\left\{ \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = 2A = \frac{1}{R_{long}} \right. \quad [Ec. 4.6]$$

$$\left. \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = 2B = \frac{1}{R_{lat}} \right. \quad [Ec. 4.7]$$

donde R_{long} [m] es el radio de curvatura longitudinal combinado o equivalente (de ambos cuerpos) y R_{lat} [m] es el radio de curvatura lateral equivalente. Esto es así porque al derivar en el eje x_c se ha mantenido la coordenada y constante, motivo por el cual afecta la curvatura longitudinal al área de contacto, y al derivar en el eje y_c es la x la que se ha mantenido constante y entonces afecta la curvatura transversal o lateral.

A continuación, se suman las curvaturas de la rueda y del carril en la dirección longitudinal y en la lateral para así obtener las curvaturas equivalentes:

$$\left\{ \frac{1}{R_{long}} = \frac{1}{R_{y_1}} + \frac{1}{R_{y_2}} \right. \quad [Ec. 4.8]$$

$$\left. \frac{1}{R_{lat}} = \frac{1}{R_{x_1}} + \frac{1}{R_{x_2}} \right. \quad [Ec. 4.9]$$

siendo R_{x_1} y R_{y_1} [m] los radios del primer cuerpo en torno al eje x_c y al eje y_c , respectivamente; y del mismo modo R_{x_2} y R_{y_2} , con la diferencia de que estos pertenecen al segundo cuerpo.

Por tanto, las constantes A [m^{-1}] y B [m^{-1}], que se conocen como curvatura longitudinal y lateral relativa, respectivamente, se pueden obtener por medio de la combinación de la ecuación 4.6 con la 4.8 y la 4.7 con la 4.9, respectivamente:

$$\left\{ A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{y_1}} + \frac{1}{R_{y_2}} \right) \right. \quad [Ec. 4.10]$$

$$\left. B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{x_1}} + \frac{1}{R_{x_2}} \right) \right. \quad [Ec. 4.11]$$

Nótese que tanto A como B son medias aritméticas de la curvatura, bien alrededor del eje y_c o x_c [6, pp. 32 – 34 y 36 – 37], [5, pp. 9 – 11].

Estos radios se pueden apreciar en la figura que se muestra abajo:

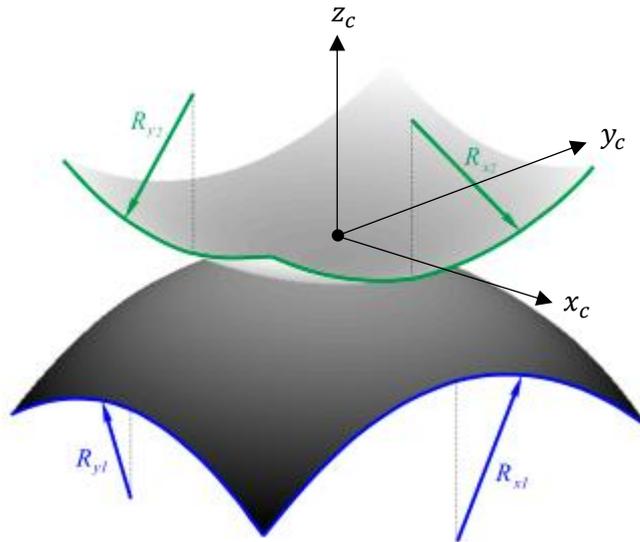


Figura 4.3. Radios de curvatura $R_{x_1}, R_{x_2}, R_{y_1}$ y R_{y_2} . Fuente: Modificación propia de [5, fig. 2.3 (a)].

En el caso de la rueda (cuerpo 2) y el carril (cuerpo 1) se tienen los siguientes radios:

- ✓ Radio longitudinal del carril R_{y_1} : Es el radio de curvatura longitudinal del carril. Este no debería describir ningún giro en torno del eje y_c (solamente en torno a z_c), ya que el plano de rodadura es el $x_c y_c$ y no debería curvarse. En la práctica sí existe esta curvatura, puesto que el carril tiene tolerancias de fabricación y montaje y flecha bajo la carga de la rueda. No obstante, las tolerancias son de valor aleatorio y pequeño (en general) y la flecha es muy variable (depende del paso entre traviesas, de la posición de la rueda, etc.). Por tanto, generalmente se asume que R_{y_1} tiende a infinito, despreciándose así esta curvatura:

$$\lim_{R_{y_1} \rightarrow \infty} \frac{1}{R_{y_1}} \rightarrow 0$$

- ✓ Radio longitudinal de la rueda R_{y_2} : Es el radio de curvatura de la rueda alrededor de su eje de revolución. Debido a la conicidad de la rueda se obtiene tal que así:

$$R_{y_2} = \frac{r}{\cos \gamma_0} \quad [Ec. 4.12]$$

donde r [m] puede hacer referencia a r_o [m], r_e [m] o r_i [m] (radio de la banda de rodadura nominal, radio externo o interno).

- ✓ Radio transversal del carril R_{x_1} : Es el radio de curvatura lateral de la cabeza del carril. Se puede medir en su sección.
- ✓ Radio transversal de la rueda R_{x_2} : Es el radio de curvatura lateral de la rueda. Se puede medir en su sección axial (seccionada por un plano axial).

En las imágenes inferiores se representa la medida o cálculo de estos radios [7, pp. 46 – 48]:

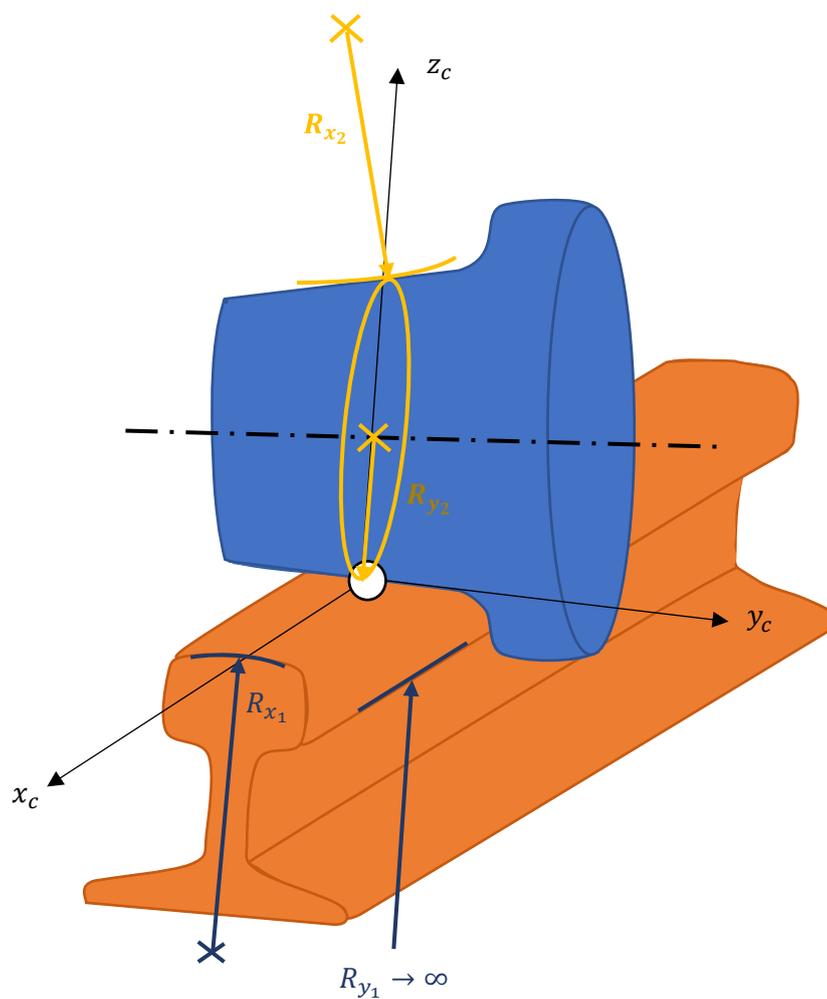


Figura 4.4. Representación gráfica de los radios. Fuente: Recreación propia de [7, fig. 4.4].

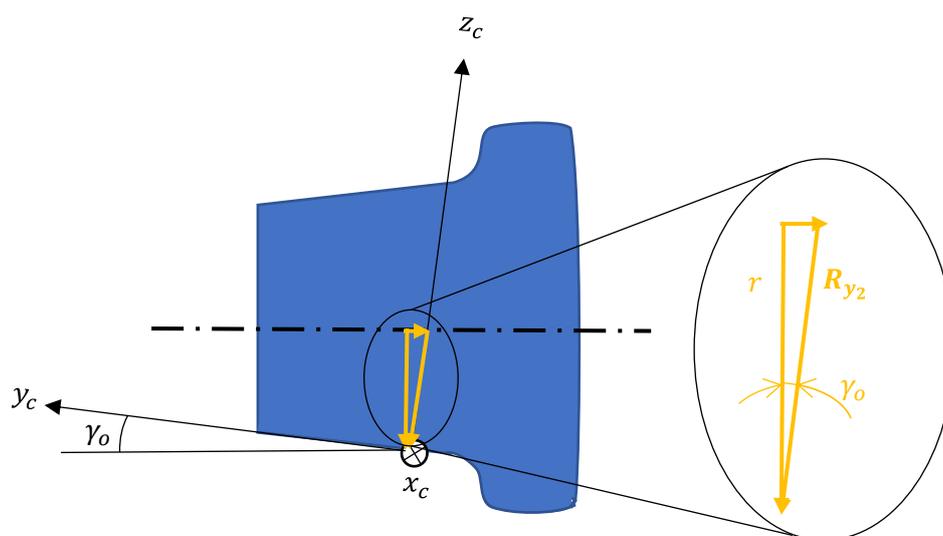


Figura 4.5. Cálculo de R_{y_2} . Fuente: Recreación propia de [7, fig. 4.5].

4.4.3. Elipse de Hertz.

Las superficies en la zona de contacto se describen con ecuaciones cuadráticas en virtud de la cuarta hipótesis. Una intersección entre superficies de perfil parabólico, o sea, paraboloides da como resultado una elipse, tal como se demuestra en esta intersección gráfica:

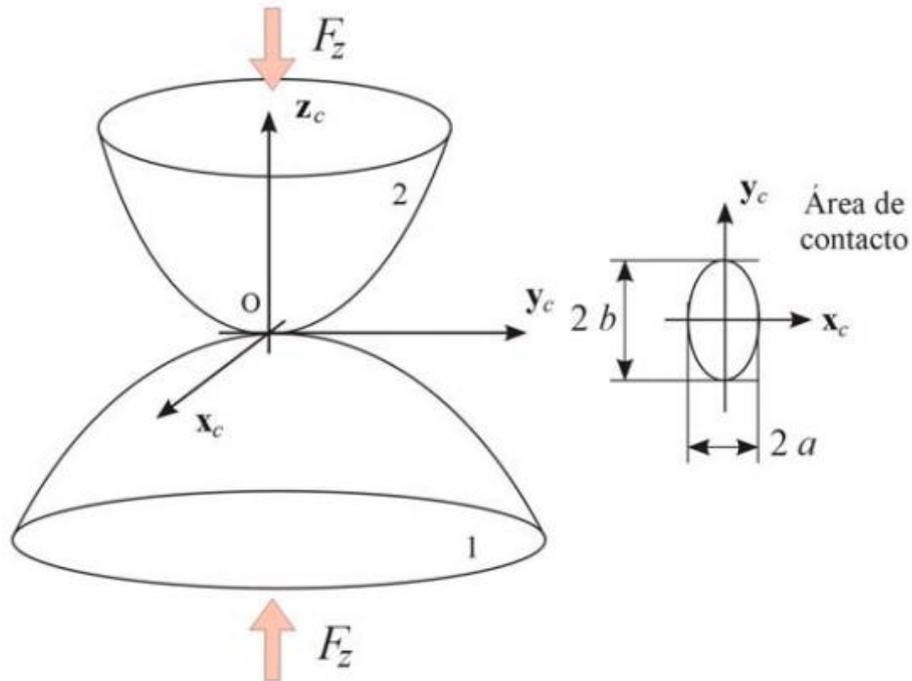


Figura 4.6. Intersección de paraboloides. Fuente: [6, p. 36].

Así pues, se tiene una elipse cuyos ejes son $2a$ y $2b$ y cuyos semiejes son a y b , siendo a el longitudinal y b el transversal. El área de esta elipse de Hertz será el área de contacto A_c [m²], y valdrá:

$$A_c = \pi ab \quad [Ec. 4.13]$$

Estos semiejes a y b despejan de las integrales elípticas de Hertz [8]. La solución a estas integrales está precalculada, rigiéndose por las expresiones de abajo:

$$a = m_H \left(\frac{3}{2} N \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{1}{A + B} \right)^{\frac{1}{3}} \quad [Ec. 4.14]$$

$$b = n_H \left(\frac{3}{2} N \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{1}{A + B} \right)^{\frac{1}{3}} \quad [Ec. 4.15]$$

para cuyo cálculo entran varios parámetros en juego: la constante de Hertz m_H [ϕ], la constante de Hertz n_H [ϕ], el coeficiente de Poisson del material ν [ϕ], el módulo elástico del material [Pa], la fuerza normal N [N], aparte de los previamente definidos A y B .

En el caso de que ambos materiales sean diferentes (pero cumpliendo la condición de cuasi-identidad, estipulada por la ecuación 4.1) se aplicará este promedio:

$$\frac{1 - \nu^2}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad [\text{Ec. 4.16}]$$

El cálculo de las constantes m_H y n_H no es inmediato, dado que depende de parámetros como el módulo de elipticidad de las integrales elípticas (véase [9]). Por esta razón por lo cual se suele recurrir a tablas precalculadas como esta:

Tabla 4.1. Tabla con los coeficientes de Hertz. Fuentes: [6, p. 38], [10].

θ°	0	5	10	30	60	90	120	150	170	175	180
$\lambda = A/B$	0	0.0019	0.0077	0.0717	0.3333	1	3.0	13.93	130.6	524.6	∞
n/m	0	0.0212	0.0470	0.1806	0.4826	1	2.0720	5.5380	21.26	47.20	∞
m	∞	11.238	6.612	2.731	1.486	1	0.7171	0.4931	0.311	0.2381	0
r	0	0.2969	0.4280	0.7263	0.9376	1	0.9376	0.7263	0.4280	0.2969	0

Para entrar en esta tabla es preciso calcular previamente el ángulo θ [°], que se obtiene en función de A y B por esta igualdad:

$$\cos\theta = \frac{|B - A|}{A + B} \quad [\text{Ec. 4.17}]$$

Si se grafican los parámetros, lo cual puede resultar de utilidad posteriormente si se busca ajustar las curvas por medio de polinomios, se tiene lo siguiente:

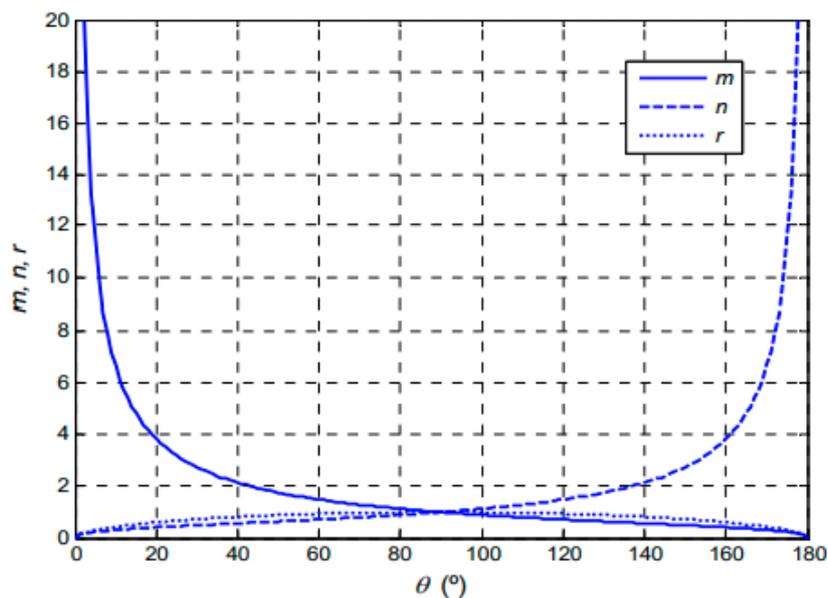


Figura 4.7. Graficación de m_H, n_H y r_H . Fuente: [6, p. 39].

Adviértase que r_H es simétrico respecto al eje vertical que atraviesa el eje de abscisas por $\theta = 90^\circ$ y que m_H y n_H exhiben una distribución complementaria respecto a este eje [6, pp. 36 – 39].

4.4.4. Distribución de presiones y desplazamientos normales.

Dentro del área de contacto, que es la elipse de Hertz recién descrita, la distribución de presiones $p_z(x, y)$ [Pa] es la que sigue:

$$p_z(x, y) = p_{z_o} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad [Ec. 4.18]$$

donde p_{z_o} [Pa] es la presión máxima, la cual aparece justo en el centro de la distribución (en el centro de la elipse). Cabe recalcar que, en realidad, $p_z(x, y) = -\sigma_z$ con $\sigma_z \leq 0$, siendo esta la tensión normal, la cual es siempre negativa (si no es nula) porque se trata de una tensión compresiva.

Integrando esta distribución de presiones es posible obtener la fuerza normal en la rueda F_z [N] (que es la fuerza de acción propiamente dicha, ya que N [N] es la reacción del carril a F_z):

$$F_z = \int_{-b}^b \int_{-\bar{a}(y)}^{\bar{a}(y)} p_{z_o} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dx dy \quad [Ec. 4.19]$$

siendo $\bar{a}(y) = a\sqrt{1 - (y/b)^2}$ [m].

El resultado de la integral es:

$$F_z = \frac{2}{3} \pi ab p_{z_o} \quad [Ec. 4.20]$$

Es decir, la fuerza normal es el área de la elipse (πab , ecuación 4.13) multiplicada por la presión media de la distribución (que es 2/3 de la presión máxima). De aquí se puede despejar p_{z_o} :

$$p_{z_o} = \frac{3F_z}{2\pi ab} \quad [Ec. 4.21]$$

para cuyo cálculo se utiliza más bien la reacción a F_z , o sea, N (como en las ecuaciones en las demás expresiones) [6, pp. 37 – 38].

La distribución de presiones es semielipsoidal y, además, hidrostática. De esta forma no se produce la plastificación o rotura del material cuando p_{z_o} supera su límite elástico o tensión de rotura, que es lo habitual [5, p. 170]. En la imagen inferior se representa la distribución de presiones semielipsoidal, indicándose la hidrostaticidad por medio de líneas de diferentes colores: el color rojo representa la máxima presión, el naranja una presión intermedia, el amarillo otra intermedia (pero de menor valor que la anterior) y el verde la mínima. Estas líneas surgen de las intersecciones de las superficies isóbaras con los planos $x_c z_c$ e $y_c z_c$, que son los que cortan la distribución y eliminan su cuarta parte. He aquí la distribución:

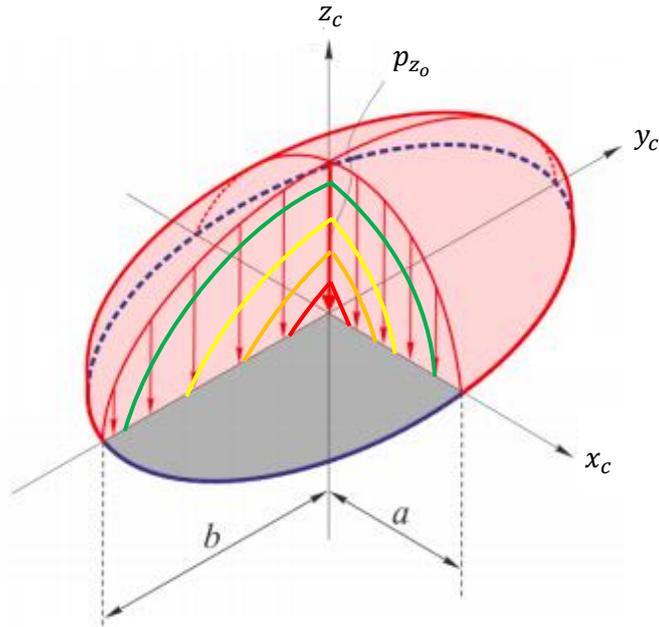


Figura 4.8. Representación de la distribución de presiones semielipsoidal. Fuente: Adaptación propia de [5, fig. 2.3 (b)].

En cuanto a la distribución de desplazamientos esta viene descrita por otra de las ecuaciones elípticas, en la cual el campo de desplazamientos se denota con la letra w (véase [8]). Normalmente se computa solamente el desplazamiento máximo, que es la interpenetración máxima entre las superficies de la rueda y del carril, antes denotada δ_o y que también se conoce como indentación máxima. Esta indentación viene dada por esta expresión:

$$\delta_o = r_H \left(\left(\frac{3}{2} N \frac{1 - \nu^2}{E} \right)^2 (A + B) \right)^{\frac{1}{3}} \quad [Ec. 4.22]$$

donde r_H es la tercera constante de Hertz, la cual aparece en tabulada en la tabla 4.1 y graficada en la gráfica 4.17. Su cálculo más elaborado se lleva a cabo en [9]. Nótese que esta expresión podría, al igual que 4.14 y 4.15, ser expresada de otro modo ahora que ya se conoce la relación entre p_{z_o} y $3N/2$, tal como a veces se efectúa [6, pp. 37 – 38].

Finalmente, cabe agregar que este parámetro resulta de especial relevancia en el cálculo del coeficiente de resistencia a la rodadura, el cual se demostró con anterioridad (ecuación I.6, en el [subcapítulo I.2](#)).

4.4.5. Resumen y otras teorías.

En resumen, se ha resuelto el problema geométrico junto con el normal gracias a la teoría de Hertz. Esta teoría es aceptada, otorga buenos resultados en el contacto rueda – carril porque las hipótesis se cumplen casi siempre y es la habitualmente empleada en los estudios del contacto rueda – carril.

Sin embargo, existen otras teorías similares a las de Hertz, que se citan a continuación [6, pp. 39 – 47]:

- ✓ Teoría de Kik – Piotrowski: Se trata de una teoría cuasi-herciana, también basada en la interpenetración virtual entre superficies. Esta teoría asume la distribución de presiones de Hertz en la dirección longitudinal, pero no en la transversal porque la curvatura no siempre es constante en esta dirección (sobre todo en la región B de contacto, donde se sitúa la pestaña de la rueda; véase el [subcapítulo 1.7](#)). Es interesante mencionar que en esta teoría se deprecia la forma real de los cuerpos y reemplazan por semiespacios elásticos cuando se calculan los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas, lo cual permite la utilización de las funciones de influencia de Boussinesq, también descritas en [5, pp. 15 – 17].
- ✓ Teoría de Ayasse – Chollet: Se trata de otra teoría cuasi-herciana, siendo una variante de la anterior.

También existen otros enfoques, como el enfoque rígido (contacto rígido), basado en un punto teórico de contacto y en la imposición de restricciones [6, pp. 16 – 18].

4.5. Problema tangencial.

4.5.1. Vías de resolución.

Una vez se conoce la elipse de contacto y la distribución de presiones normales, ambos obtenidos mediante el método de Hertz, aceptado y frecuentemente empleado a tal fin, es preciso determinar qué fuerzas, tensiones y deformaciones tangenciales aparecen en el contacto.

Es aquí donde entra en juego la fricción, el cual no se consideraba en la teoría de Hertz. Existen dos vías para la obtención de resultados [5, p. 27]:

- ✓ Vía analítica: Por esta vía se calculan las variables de forma global para toda el área de contacto. Se utilizan fórmulas analíticas que pueden implementarse en programas de resolución de ecuaciones de bajo coste computacional.
- ✓ Vía de elementos finitos: Por esta vía se calculan localmente los valores de las variables y después se suman para obtener los valores globales. Para ello, se divide el área de contacto en una gran cantidad de elementos finitos.

En esta sección se va a describir la vía analítica, que es la primera que se va a aplicar con el fin de obtener los valores que serán aplicados posteriormente al cálculo del desgaste de las ruedas. En esta vía abundan las teorías, por lo que la explicación se va a centrar en las mejor consideradas de acuerdo con los criterios de precisión y coste computacional.

4.5.2. Zonas de la elipse de Hertz y curva de tracción.

El área de la elipse de Hertz se divide en dos subáreas:

- ✓ Subárea de adhesión: En esta zona de la elipse la deformación es capaz de absorber los microdeslizamientos existentes entre la rueda y el carril y el deslizamiento resultante entre ambos cuerpos es nulo, produciéndose la adhesión entre ambos (véase la figura I.5, donde los puntos 1 – 1' y 2 – 2' se encuentran en adhesión).
- ✓ Subárea de deslizamiento: En esta zona de la elipse la deformación no es capaz de absorber los microdeslizamientos y existe un deslizamiento resultante entre ambos cuerpos (véase la figura I.5, donde los puntos 3 – 3' y 4 – 4' se encuentran en deslizamiento).

Los límites de estas subáreas evolucionan según los pseudodeslizamientos v_x , v_y y el giro φ , definidos todos en el [subcapítulo I.3](#). Abajo se detalla la evolución según el pseudodeslizamiento longitudinal v_x únicamente (v_y y φ se suponen nulos).

Cuando una rueda comienza a rodar sobre el carril, los puntos materiales de la rueda que ingresan en el área de contacto tienen inicialmente tracción nula en el borde anterior de la elipse. A medida que estos puntos viajan hacia el borde posterior de la elipse, la tensión de cizalla comienza a acumularse y causa una deformación elástica. Esta deformación contrarresta el movimiento relativo de la rueda respecto al carril. Por ende, el deslizamiento resultante entre los puntos de las diferentes superficies será cero y los puntos se adherirán los unos a los otros, lo cual hace que la subárea de adhesión sea adyacente al borde anterior de la elipse. Conforme la tensión de cizalla crece a lo largo de la subárea de adhesión, alcanza el límite de tracción. A este nivel de tensión la deformación ya no puede contrarrestar totalmente el movimiento relativo entre los puntos de las superficies opuestas y los puntos comienzan a deslizar.

El susodicho límite de tracción puede expresarse según la ley de Amontons – Coulomb:

$$\tau = \mu p_z \quad [4.23]$$

donde τ [Pa] es la tensión de cizalla, μ [ϕ] es el coeficiente de fricción y p_z [Pa] es la tensión normal (cuya distribución viene dada por la teoría de Hertz).

Gracias a esta ecuación se puede dividir la elipse en las subáreas definidas:

$$\begin{cases} \tau_x < \mu p_z, & s_x = 0 \text{ (región de adhesión)} \\ \tau_x = \mu p_z, & s_x = 0 \text{ (borde límite de tracción)} \\ \tau_x = \mu p_z, & s_x > 0 \text{ (región de deslizamiento)} \end{cases}$$

donde τ_x [Pa] es la tensión de cizalladura en el eje x_c , mientras que s_x [ϕ] es el deslizamiento adimensional en el eje x_c , emparentado con v_x mediante fórmulas analíticas que dependen de la teoría empleada y que se explicitarán más adelante (en caso de haber v_y , también aparecería s_y , lo cual también se hará explícito).

Es notable el hecho de que la tensión de cizalladura se opondrá al deslizamiento, dado que es una tensión debida a la fricción y, como tal, se opone al movimiento relativo entre superficies.

En la imagen inferior se ilustra la evolución de las zonas con v_x :

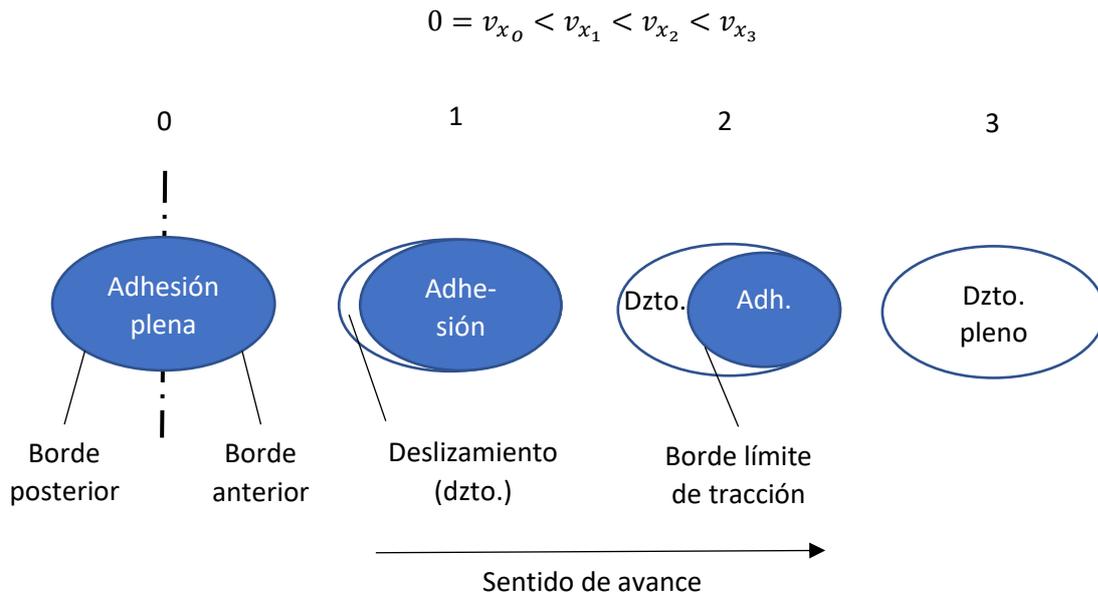


Figura 4.9. Evolución de las zonas según v_x creciente ($v_y = \varphi = 0$). Fuente: Recreación propia de [5, fig. 3.6].

Al integrar la distribución de tensión tangencial en la elipse en el área total se obtiene la fuerza longitudinal F_x [N], que es una fuerza de tracción debida al deslizamiento entre las superficies. La representación de F_x respecto a v_x constituye lo que se conoce como curva de tracción y se muestra abajo:

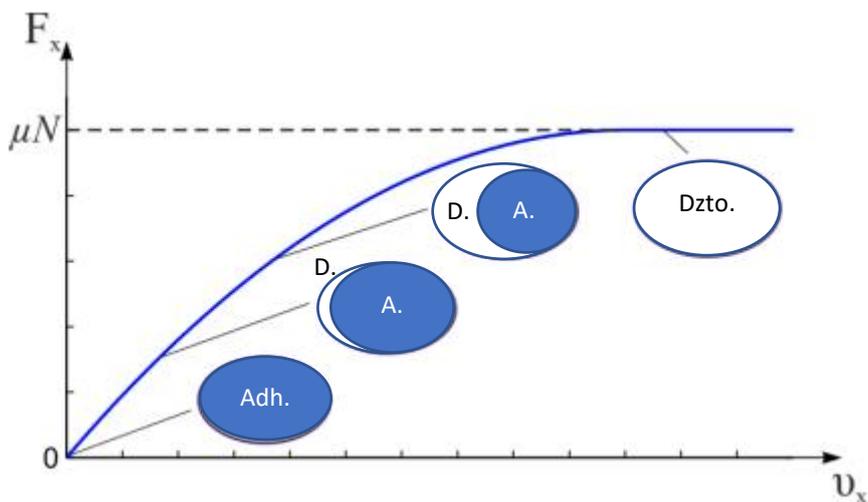


Figura 4.10. Representación de F_x respecto a v_x puro ($v_y = \varphi = 0$). Fuente: Modificación propia de [5, fig. 3.7].

Cuando v_y y φ no sean nulos aparecerá una fuerza transversal F_y [N] y un momento de giro o de espín M_z [N·m] [5, pp. 24 – 26].

La relación entre los primeros y los segundos depende de la teoría a la cual se recurra y se abordará más adelante junto con la relación $F_x - v_x$, ya que son de gran relevancia para la solución del problema tangencial.

4.5.3. Teoría de Carter.

Frederick William Carter (1870 – 1952) fue el primero que publicó una teoría sobre el contacto rodante basándose en los estudios de Reynolds en correas. Al ser el primero, merece una mención, a pesar de que estas ecuaciones no van a ser las finalmente empleadas para la solución del problema tangencial.

Carter acuñó el término pseudodeslizamiento como “la ratio de la de la distancia ganada por una superficie respecto a la otra dividida por la distancia recorrida”. Afirmó que la dimensión longitudinal de la elipse en los perfiles nuevos es en general más grande que la lateral, pero que, sin embargo, debido al desgaste, los perfiles se achataban para dar lugar a una tira de anchura uniforme. Asumió que los perfiles de la rueda y el carril se podían aproximar por dos cilindros de ejes paralelos. En consecuencia, el problema se reduce a uno tensión plana, o sea, bidimensional. Abajo se exponen brevemente sus ecuaciones.

Si solo se tiene en cuenta el pseudodeslizamiento longitudinal, en la zona de adhesión (considerada bidimensional) se tiene:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = v_x = cte. \quad [Ec. 4.24]$$

donde u_x [m] es el desplazamiento longitudinal.

En la zona de deslizamiento, la tensión tangencial alcanza el límite de tracción en el eje x_c :

$$\tau_x = \mu p_z(x) \quad [Ec. 4.25]$$

El sentido de τ_x debe ser tal que se oponga al deslizamiento en el mismo eje:

$$\frac{\tau_x}{|\tau_x|} = -\frac{s_x}{|s_x|} \quad [Ec. 4.26]$$

Carter supuso que la zona de adhesión limitaba con el borde anterior de la elipse de contacto. Para satisfacer el requisito establecido en la ecuación 4.24, Carter sustrajo una distribución elíptica de tracción del límite de tracción para obtener la distribución de tensión tangencial en el área de contacto, siendo la distribución resultante:

$$\tau_x = \tau'_x + \tau''_x \quad [Ec. 4.27]$$

Y a su vez:

$$\tau'_x = \mu p_z = \mu p_{z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad -a \leq x \leq a \quad [Ec. 4.28]$$

$$\tau''_x = -\frac{(a-d)}{a} \mu p_{z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x - (a-d)}{d}\right)^2}, \quad -a - 2d \leq x \leq a \quad [Ec. 4.29]$$

siendo a [m] y d [m] la semilongitud del área de contacto y la semilongitud de la zona de deslizamiento, respectivamente. Nótese que la distribución $p_z(x)$ no es la misma que la distribución elipsoidal de Hertz $p_z(x, y)$, que tenía una dependencia respecto al eje y_c . Esto obedece al hecho de que el contacto se está dando entre dos cilindros de ejes paralelos al eje y_c , por lo que la distribución no depende de la coordenada y .

En la siguiente figura se muestra la distribución recogida por estas ecuaciones:

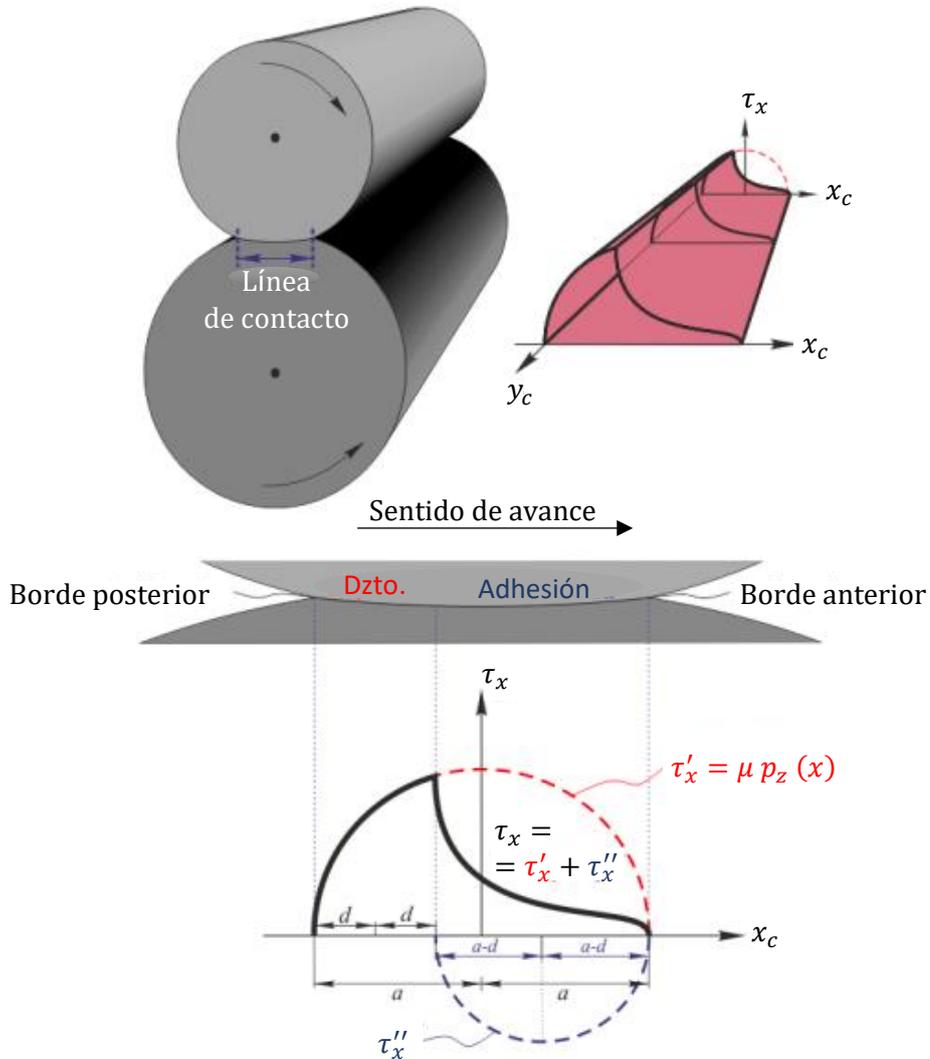


Figura 4.11. Distribución de la tensión tangencial según la teoría de Carter, basada en el contacto entre cilindros de ejes paralelos. Fuente: Adaptación propia de [5, fig. 4.1].

Por otro lado, la deformación en la zona de adhesión es:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{2(1 - \nu^2)}{aE} \mu p_{z_0} (a - d) \quad [\text{Ec. 4.30}]$$

que es constante.

Para poder relacionar pseudodeslizamiento longitudinal con fuerza longitudinal es preciso hallar una relación entre F_x y d primero. Para ello, se integra la ecuación 4.30 en el área de contacto y se llega a:

$$d = a \sqrt{1 - \frac{F_x}{\mu N}} \quad [Ec. 4.31]$$

Insertando las ecuaciones 4.24 y la 4.31 en la 4.30 se arriba a:

$$v_x = -\frac{\mu a}{R} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{F_x}{\mu N}} \right) \quad [Ec. 4.32]$$

donde la curvatura equivalente $1/R$ [m^{-1}] es la suma de la curvatura del cilindro de la rueda y del cilindro del carril, $1/R_w$ [m^{-1}] y $1/R_r$ [m^{-1}], respectivamente.

Esta ecuación, que relaciona F_x con v_x , puede escribirse de la siguiente guisa [5, pp. 27 – 30]:

$$\begin{cases} \frac{F_x}{\mu N} = -\left(2 + \frac{R}{\mu a} |v_x|\right) \frac{R v_x}{\mu a}, & \frac{R v_x}{\mu a} < 1 \\ \frac{F_x}{\mu N} = -\frac{|v_x|}{v_x}, & \frac{R v_x}{\mu a} \geq 1 \end{cases} \quad [Ec. 4.33]$$

$$\frac{R v_x}{\mu a} \geq 1 \quad [Ec. 4.34]$$

Esta función definida a trozos se corresponde gráficamente con la siguiente curva de tracción:

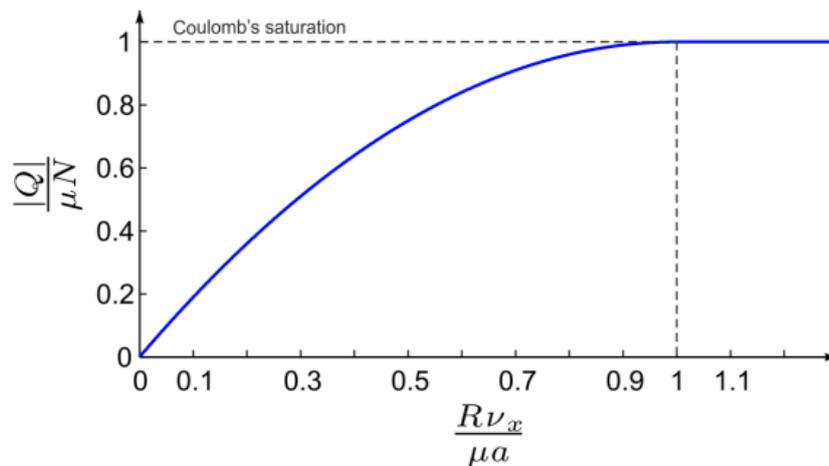


Figura 4.12. Curva de tracción de Carter. Nota: Se ha empleado la letra Q en vez de F_x . Fuente: [5, p. 30].

4.5.4. Teoría de Johnson y de Johnson – Vermeulen.

4.5.4.1. Teoría de Johnson.

Kenneth Langstreth Johnson (1925 – 2015) publicó la primera teoría de contacto para contactos circulares en 1958. En su teoría, la zona de adhesión tiene forma circular, tal como en la solución de Raymond David Mindlin (1906 – 1987) para un contacto circular. Johnson también asume que la zona de adhesión toca el borde anterior en un solo punto. No obstante, él mismo demostró que tal

hipótesis conduce a errores en parte de la zona de deslizamiento adyacente al borde anterior. En esta área, el deslizamiento sigue el mismo sentido que la tensión tangencial, lo cual contradice el hecho de que la tensión tangencial ha de oponerse al deslizamiento. Johnson también consideró el caso de pseudodeslizamientos decrecientemente pequeños y derivó relaciones lineales entre los mismos y las fuerzas asociadas a los mismos. Por otro lado, Johnson también consideró el efecto del giro en el contacto rodante circular y demostró que el giro provoca una fuerza de pseudodeslizamiento lateral, llegando a derivar una relación entre tal fuerza y el giro infinitesimal [5, pp. 30 – 31].

4.5.4.2. Teoría de Johnson – Vermeulen.

Más adelante, Johnson trabajó con Peter J. Vermeulen (1931 – 2004) y ambos extendieron la teoría de contactos circulares en pseudodeslizamiento puro (sin giro) a casos de contactos elípticos. Similarmente al trabajo previo de Johnson, la estrategia consiste en utilizar la solución para contactos deslizantes con microdeslizamiento, derivada por Herbert Deresiewick (1926 – 2008) para el contacto elíptico. La única diferencia estriba en que la zona de adhesión toca el borde anterior en un solo punto con el fin de reducir el área de error de un caso de contacto rodante. En la siguiente imagen se ilustra la forma de la zona de adhesión y su localización en la teoría de Johnson – Vermeulen. La zona sombreada es aquella en la cual no se satisface la ley de fricción [5, pp. 30 – 31]:

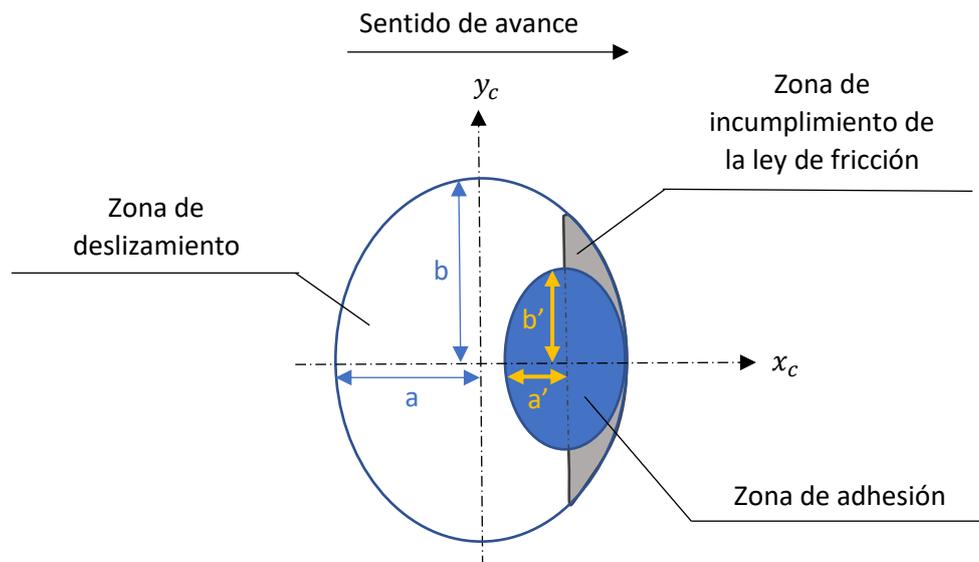


Figura 4.13. Zonas de adhesión y deslizamiento basadas en la teoría de Johnson y Vermeulen. En la zona sombreada el deslizamiento y la tensión tangencial tienen el mismo sentido. Fuente: Recreación propia de [5, fig. 4.3].

Las ecuaciones de Johnson – Vermeulen que relaciona F_x con v_x son las que siguen [7, p. 60]:

$$\begin{cases} \frac{F_x}{\mu N} = \frac{1}{v_x} \left[\left(1 - \frac{1}{3} |v_x| \right)^3 - 1 \right], & |v_x| < 3 & [Ec. 4.35] \\ \frac{F_x}{\mu N} = -\frac{|v_x|}{v_x}, & |v_x| \geq 3 & [Ec. 4.36] \end{cases}$$

Nota: La relación entre F_y con v_y puro es la misma. Si, en cambio, se tiene una combinación de v_x y v_y , hay que introducir su composición vectorial en las ecuaciones $\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right)$ y estas devuelven la composición vectorial de F_x y F_y (módulo del vector fuerza $|\vec{F}|$).

Por otro lado, el giro no afecta a estas ecuaciones, lo cual es una fuente de error significativa de la teoría de Johnson – Vermeulen [5, p. 53].

4.5.5. Teoría lineal de Kalker.

Joost Jacques Kalker (1933 – 2006) continuó estudiando el problema tangencial por la vereda abierta por Carter y transitada por ingenieros como Johnson y Vermeulen. Como ya se ha relatado, Johnson estableció una relación lineal entre fuerzas tangenciales y pseudodeslizamientos decrecientemente pequeños. En esta situación tan restrictiva es posible suponer que el área de contacto se corresponde completamente con la zona de adhesión, de ahí que esta suposición dé lugar a una teoría conocida como teoría de no deslizamiento. En esta teoría, la ley de fricción y el coeficiente de rozamiento son descartados. Kalker estudió este caso para encontrar la relación lineal pseudodeslizamientos – fuerzas tangenciales. Estimó que la distribución de tensión tangencial era la siguiente:

$$\tau(x, y) = P\left(\left(\frac{x}{a}\right)^m, \left(\frac{y}{b}\right)^n\right) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad [Ec. 4.37]$$

siendo $P\left(\left(\frac{x}{a}\right)^m, \left(\frac{y}{b}\right)^n\right)$ [Pa] una función polinómica de orden $m+n$, la cual multiplica a la función $p_z(x, y)$ de Hertz normalizada mediante su división por p_{z_0} . Kalker truncó esta función en $m + n = 5$ a la hora de calcular las fuerzas e impuso la condición de que la tensión se anulase en el borde anterior.

Por tanto, en esta teoría, los puntos de la rueda ingresan en el área de contacto al franquear el borde anterior y conforme avanzan hacia el borde posterior la tensión se va acumulando ilimitadamente. Las fuerzas y el momento de giro de la rueda se pueden calcular a través de la integración de $\tau(x, y)$ en el área de contacto, cuyo resultado es:

$$F_x = -C_{11} G c^2 v_x \quad [Ec. 4.38]$$

$$F_y = -C_{22} G c^2 v_y - C_{23} G c^3 \varphi \quad [Ec. 4.39]$$

$$M_z = -C_{23} G c^3 v_y - C_{33} G c^4 \varphi \quad [Ec. 4.40]$$

donde $c = \sqrt{ab}$ [m] es el tamaño efectivo del área de contacto, G [Pa] es el módulo de cizalla equivalente de los materiales en contacto y C_{ij} [ϕ] para $i, j = 1, 2, 3$ son los coeficientes de Kalker, según la denominación habitual. Estos coeficientes dependen únicamente del coeficiente de Poisson y de la ratio de los ejes de la elipse de Hertz a/b . El giro se considera positivo en las ecuaciones cuando es horario [5, pp. 32].

Cuando los materiales en contacto no son iguales (pero son cuasi-idénticos), G se calcula mediante esta fórmula:

$$G = 2 \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \quad [Ec. 4.41]$$

Este resultado puede utilizarse también para obtener el módulo de Poisson equivalente de ambos materiales, denotado ν y de interés para caracterizar el material equivalente:

$$\nu = \frac{G}{2} \left(\frac{\nu_1}{G_1} + \frac{\nu_2}{G_2} \right) \quad [Ec. 4.42]$$

Para la obtención del módulo elástico equivalente E no es necesario recurrir a otra ecuación, ya que puede aplicarse la ecuación 4.16, de la solución de Hertz [11, p. 8].

Respecto al cálculo de los coeficientes de Kalker, estos se pueden calcular de una manera puramente numérica o semianalíticamente. Lo segundo es más preciso y los resultados se pueden ver abajo, tabulados en función de los parámetros nombrados, con lo cual son susceptibles de ser tratados mediante funciones polinómicas fielmente ajustadas [12, p.26]:

Tabla 4.2. Coeficientes de Kalker en función de la ratio a/b y del módulo de Poisson equivalente ν . Fuente: [12, p. 26].

a/b	C_{11}		C_{22}		$C_{23} =$	$-C_{32}$	C_{33}	
	$\nu = 0$	0.5	$\nu = 0$	0.5	$\nu = 0$	0.5	$\nu = 0$	0.5
0.1	2.51	4.85	2.51	2.53	.334	.731	6.42	11.7
0.2	2.59	4.81	2.59	2.66	.483	.809	3.46	5.66
0.3	2.68	4.80	2.68	2.81	.607	.889	2.49	3.72
0.4	2.78	4.82	2.78	2.98	.720	.977	2.02	2.77
0.5	2.88	4.83	2.88	3.14	.827	1.07	1.74	2.22
0.6	2.98	4.91	2.98	3.31	.930	1.18	1.56	1.86
0.7	3.09	4.97	3.09	3.48	1.03	1.29	1.43	1.60
0.8	3.19	5.05	3.19	3.65	1.13	1.40	1.34	1.42
0.9	3.29	5.12	3.29	3.82	1.23	1.51	1.27	1.27
1.0	3.40	5.20	3.40	3.98	1.33	1.63	1.21	1.16
1/.9	3.51	5.30	3.51	4.16	1.44	1.77	1.16	1.06
1/.8	3.65	5.42	3.65	4.39	1.58	1.94	1.10	.954
1/.7	3.82	5.58	3.82	4.67	1.76	2.18	1.05	.852
1/.6	4.06	5.80	4.06	5.04	2.01	2.50	1.01	.751
1/.5	4.37	6.11	4.37	5.56	2.35	2.96	.958	.650
1/.4	4.84	6.57	4.84	6.31	2.88	3.70	.912	.549
1/.3	5.57	7.34	5.57	7.51	3.79	5.01	.868	.446
1/.2	6.96	8.82	6.96	9.79	5.72	7.89	.828	.341
1/.1	10.7	12.9	10.7	16.0	12.2	18.0	.795	.228

En cuanto a la curva de tracción de esta teoría lineal, Kalker retomó las ecuaciones de Carter y realizó una aproximación lineal de las mismas. Así, linealizó la ecuación 4.32 de Carter (teoría bidimensional) en el entorno del punto $v_x = 0$:

$$\lim_{v_x \rightarrow 0} \frac{\partial(F_x/\mu N)}{\partial v_x} = -\frac{2R}{\mu a} \quad [Ec. 4.43]$$

Por lo que la aproximación lineal realizada por Kalker de la curva de tracción de Carter es:

$$\frac{F_x}{\mu N} = -\frac{2R}{\mu a} v_x \quad [\text{Ec. 4.44}]$$

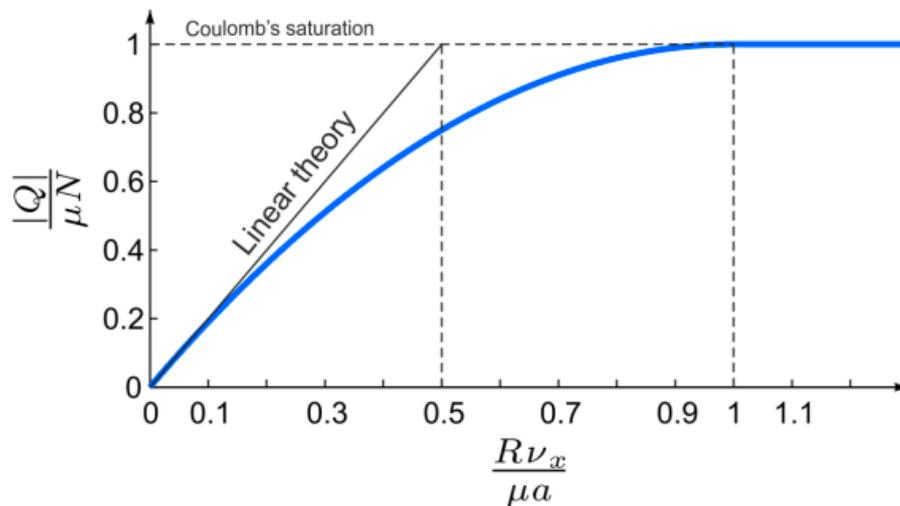


Figura 4.14. Línea de tracción de Kalker contra la curva de tracción de Carter. Nota: Se ha empleado la letra Q en vez de F_x . Fuente: [5, p. 33].

Esta teoría presenta varios problemas, que se enumeran a continuación:

1. La hipótesis de pseudodeslizamientos decrecientemente pequeños es muy restrictiva, cumpliéndose en pocas ocasiones reales.
2. La curva de tracción no tiene saturación y la ratio $F_x/\mu N$ supera el valor de 1 al sobrepasar el punto $v_x = 0,5$.
3. A partir de $v_x = 0,2$ se separa la línea recta de la curva con una holgura apreciable, por lo que a partir de este punto la aproximación lineal pierde cada vez mayor precisión.
4. No se puede aplicar directamente a un caso de v_y para obtener F_y como sí era posible en las ecuaciones de Johnson – Vermeulen, así como para composiciones de v_x y v_y que dan lugar a composiciones de F_x y F_y .
5. En esta aproximación lineal no se toma en consideración el efecto del giro.

Por ello, raramente suele aplicarse para el cálculo de las fuerzas tangenciales o del momento de giro [5, pp. 32 – 33].

4.5.6. Teoría lineal de Kalker con saturación.

Para mejorar la teoría lineal de Kalker se le añade saturación y por debajo de un determinado valor se emplea la composición de las fuerzas tangenciales obtenidas mediante la aplicación de las ecuaciones 4.39 y 4.40. La saturación puede ser lineal o cúbica.

4.5.6.1. Saturación lineal.

La lineal es más sencilla y se rige por estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, & \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2} < 1 & [Ec. 4.45] \\ |\vec{F}| = \mu N, & \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2} \geq 1 & [Ec. 4.46] \end{cases}$$

siendo \bar{v}_x y \bar{v}_y el pseudodeslizamientos longitudinal y transversal normalizados respecto al límite de tracción:

$$\bar{v}_x = \frac{-C_{11}Gc^2v_x}{\mu N} \quad [Ec. 4.47]$$

$$\bar{v}_y = \frac{-C_{22}Gc^2v_y - C_{23}Gc^3\varphi}{\mu N} \quad [Ec. 4.48]$$

Repárese en que los numeradores son sencillamente v_x y v_y despejados de las ecuaciones 4.38 y 4.39, correlativamente, que son las mismas empleadas para el cálculo de F_x y F_y .

Gráficamente se tiene la siguiente curva de tracción para un caso de v_x puro:

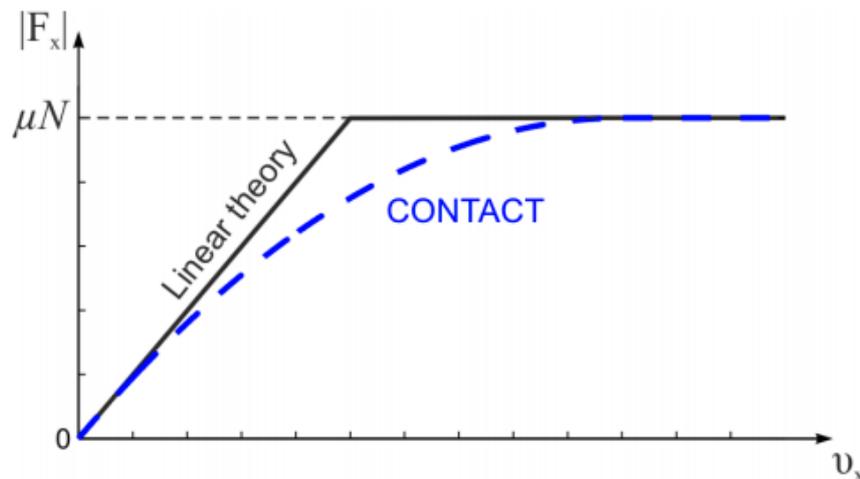


Figura 4.15. Curva de tracción de acuerdo con la teoría lineal de Kalker con saturación (líneas negras) y comparación con la curva calculada por el programa CONTACT de Kalker (línea azul). Fuente: [5, p. 52].

De esta gráfica se colige que la aproximación lineal con saturación aún no consigue resultados tan realistas como los que ofrecen programas computacionales como el programa CONTACT, desarrollado por Kalker en 1979 tras replantear su teoría lineal [5, pp. 51 – 52].

4.5.6.2. Saturación cúbica.

Con el objeto mejorar la aproximación lineal con saturación y aproximarse a la curva ofrecida por CONTACT, Shen *et alii* propusieron una ley de saturación cúbica, conocida como el método SHE. En este método las fuerzas tangenciales responden a estas fórmulas:

$$\begin{cases} |\vec{F}| = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2} \right)^3 \right] \mu N & \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2} < 1 \quad [\text{Ec. 4.49}] \\ |\vec{F}| = \mu N, & \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2} \geq 1 \quad [\text{Ec. 4.50}] \end{cases}$$

Fórmulas que semejan a las de Johnson – Vermeulen en las cuales aparecen las ecuaciones de Kalker implícitamente, dentro de \bar{v}_x y \bar{v}_y , términos que se elevan a $3/2$, por lo que las ecuaciones 4.38 y 4.39 cobran una mayor relevancia en esta ley cúbica y, por ende, sus limitaciones.

En la gráfica inferior se compara la curva de tracción obtenida mediante el método SHE para un caso de v_x puro con la curva de CONTACT:

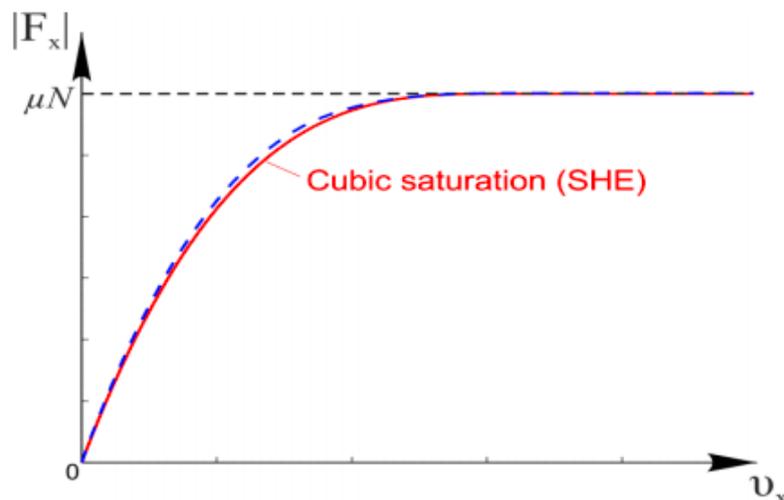


Figura 4.16. Curva de tracción obtenida por el método SHE (en color rojo) contra la curva calculada por CONTACT (en azul). Fuente: [5, p. 53].

Este método supera a los anteriormente expuestos, mas los resultados son insatisfactorios en casos de contacto como el de la pestaña de la rueda con la esquina del carril donde se esperan valores de giro elevados. De hecho, en un caso de giro puro ($v_x = v_y = 0$), la curva de CONTACT difiere bastante de la curva del método SHE y más aún de la línea de la teoría lineal (adaptada para el cálculo de F_y) a partir de un determinado umbral, tal como se demuestra en esta comparativa [5, pp. 53 – 54]:

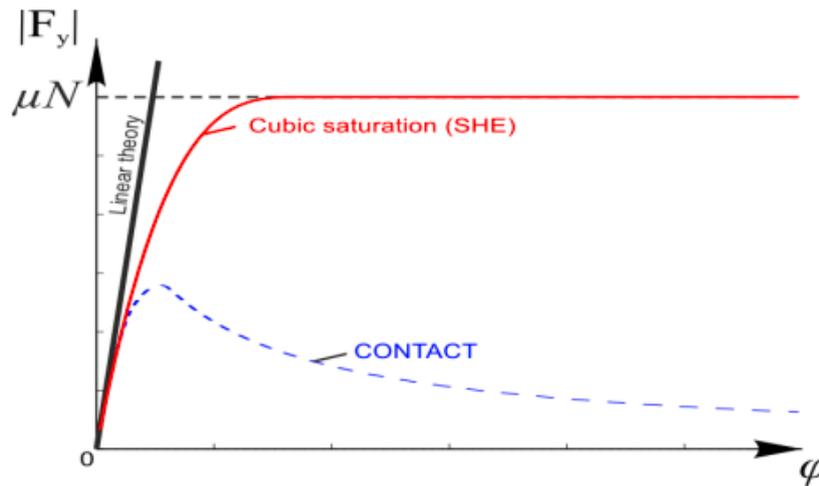


Figura 4.17. Comparativa de las curvas de tracción para un caso de giro puro. Apréciese que se emplea F_y en lugar de F_x porque $F_x \neq f(\varphi)$ según las relaciones de Kalker. Fuente: [5, p. 54].

4.5.7. Introducción al método de Polach.

Oldrich Polach, investigador actualmente en activo, presentó un método en el año 1999 para solventar el problema recién expuesto: los malos resultados de F_y a medida que el giro crece más allá de un determinado umbral, lo cual es usual en muchas curvas donde la pestaña de la rueda contacta con la esquina interior del carril (región de contacto B; véase el [subcapítulo 1.7](#)).

Al ser estas situaciones aquellas en las cuales se produce un gran desgaste, es importante estimar las fuerzas tangenciales con una mayor acribia, por lo que se va a optar por este método para la resolución del problema tangencial. En esta subsección se va a introducir el método, mientras que en la subsección consecutiva se detallará su formulación.

Polach basa su método en suponer una relación lineal entre el desplazamiento tangencial u [m] y la tensión tangencial τ [Pa] tal que así:

$$u = L\tau \quad [\text{Ec. 4.51}]$$

donde L [m/Pa] es el parámetro de flexibilidad. Esta ecuación puede aplicarse para ligar u_x y u_y con τ_x y τ_y , pero no para ligar u_z con p_z , ya que en esta última situación se obtendría un resultado menos preciso que el dado por la teoría de Hertz. Esta ecuación la utilizó también Kalker cuando simplificó su algoritmo del programa CONTACT a fin de reducir su elevado coste computacional.

El método de Polach sigue estos pasos:

1. Cálculo de las fuerzas tangenciales considerando que el giro es nulo.
2. Cálculo de las fuerzas tangenciales considerando giro puro.
3. Adición de las fuerzas tangenciales calculadas tanto en el caso sin giro cuanto en el caso con giro puro y limitación del resultado mediante el límite de tracción.

En el segundo paso, cuando se calculan las fuerzas considerando giro puro, el centro de rotación de este giro o espín se localiza en el eje longitudinal, puesto que la contribución del espín a la fuerza longitudinal en un área elíptica es nula. No obstante, la posición exacta de este centro es ignota *a priori*. Polach asume un semieje decrecientemente pequeño en el sentido de rodadura ($a \rightarrow 0$). Consecuentemente, el centro del espín se aproxima al centro de la elipse. Entonces es posible computar la contribución del giro a la fuerza lateral (fuerza tangencial transversal) y el resultado se extiende heurísticamente a los casos con mayores ratios a/b [5, pp. 53 – 54].

4.5.8. Formulación del método de Polach.

Una vez introducido este método que soluciona los problemas de los anteriores y que, subsiguientemente, es el método por el cual se va a optar para la resolución del problema tangencial, se procede a detallar su formulación completa.

Antes de comenzar es importante aclarar que Polach considera el espín o giro positivo cuando es horario, exactamente igual que su predecesor Kalker. Es algo que debe tenerse en cuenta a lo largo de toda la formulación del método.

4.5.8.1. Primer paso.

El método propuesto asume un área de contacto elíptica de semiejes a y b y la distribución de tensión normal de acuerdo con la teoría de Hertz. El valor máximo de tensión tangencial en un punto arbitrario es:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \mu p_z \quad [Ec. 4.52]$$

El coeficiente de fricción se supone constante en toda el área de contacto, por lo que no depende del punto escogido.

La solución asume un crecimiento lineal del movimiento relativo entre los cuerpos desde el punto anterior (A, punto arbitrario del borde anterior) hasta el punto posterior (C, punto arbitrario del borde posterior). Al comienzo las superficies en contacto se adhieren firmemente entre sí y no existe movimiento relativo entre ellas, ya que la deformación es capaz de absorberlo (zona de adhesión). La tensión tangencial actúa en contra de la deformación y su valor crece linealmente con la distancia desde el borde anterior. Cuando τ alcanza $\tau_{m\acute{a}x}$ de acuerdo con la ecuación 4.52, un movimiento relativo entre las superficies aparece. Esta subárea del área de contacto se llama zona de deslizamiento, en la cual la tensión tangencial actúa en contra del deslizamiento. En la figura inferior se muestran las zonas y el estado tensional en la línea A – B – C (B es un punto del borde límite de tracción, que es la frontera entre ambas zonas):

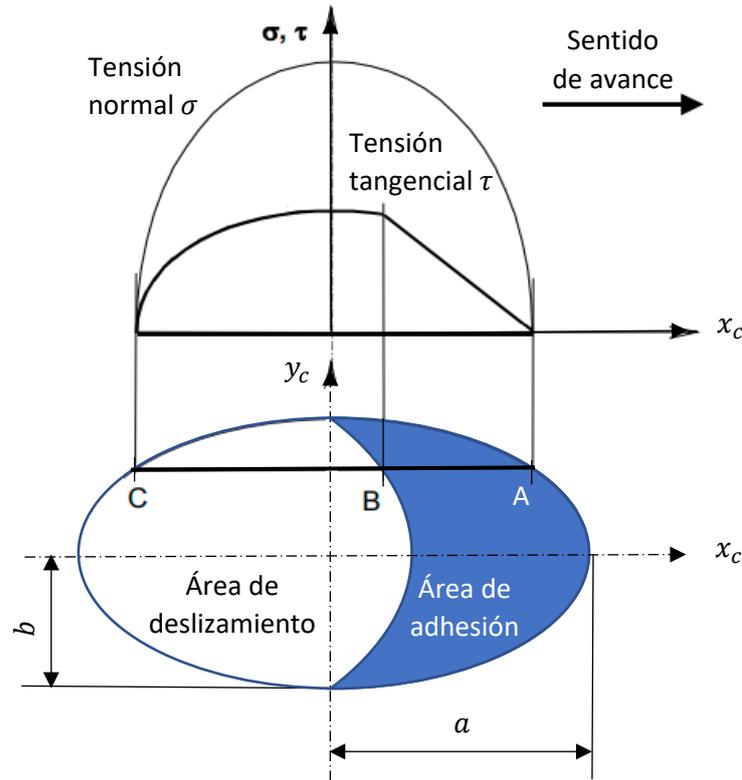


Figura 4.18. División de la elipse de Hertz en las dos zonas y estado tensional en la línea A – B – C. Fuente: Recreación propia de la imagen [13, fig. 1], salvo las curvas de tensión, que son las originales.

La fuerza tangencial se puede determinar por integración de τ en el dominio de contacto D :

$$F = \iint_D \tau \, dx dy \quad [Ec. 4.53]$$

F es el módulo del vector fuerza tangencial \vec{F} , el cual se puede descomponer en sus dos componentes, F_x y F_y , a través de los deslizamientos globales:

$$F_i = F \frac{s_i}{s}, \quad i = x, y \quad [Ec. 4.54]$$

donde s [ϕ] es el módulo del vector deslizamiento adimensional \vec{s} , cuyas componentes son s_x y s_y :

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \quad [Ec. 4.55]$$

Existe una relación lineal entre deslizamiento y pseudodeslizamiento, con lo cual es posible obtener una magnitud a partir de la otra siempre y cuando se conozca una de las dos. Esta relación se detallará más adelante.

Como ya se explicó, lo que se busca en primera instancia es obtener la fuerza tangencial sin giro. Para lograr esto, Polach adopta la solución de su colaborador L. Freibauer, que consiste en transformar la distribución elipsoidal de la tensión tangencial (elipsoidal porque es directamente proporcional a la distribución $p_z(x, y)$, la cual es elipsoidal según la solución de Hertz) en una distribución hemisférica valiéndose de estas fórmulas:

$$y^* = \frac{a}{b}y \quad [Ec. 4.56]$$

$$\tau^* = \frac{a}{\tau_{m\acute{a}x}}\tau \quad [Ec. 4.57]$$

donde y^* y τ^* es, correlativamente, la coordenada y transformada y la tensi3n tangencial transformada.

La tensi3n tangencial es proporcional al deslizamiento y a la distancia desde el borde anterior (v3ase la figura 4.18) a trav3s de una constante de proporcionalidad C [N/m³] la cual es un valor que toma en consideraci3n la elasticidad de los cuerpos en contacto (rigidez tangencial del contacto) y cuyo c3lculo se explicitar3 m3s adelante. El gradiente de tensi3n tangencial en la zona de adhesi3n se simboliza ε [ϕ] y adquiere esta expresi3n:

$$\varepsilon = \frac{2C\pi a^2 b}{3\mu N}s \quad [Ec. 4.58]$$

Entonces, la fuerza tangencial se obtiene introduciendo la distribuci3n hemisf3rica en la ecuaci3n 4.53:

$$F = \tau_{m\acute{a}x} \frac{b}{a^2} \iint_D \tau^* dx dy^* \quad [Ec. 4.59]$$

cuyo resultado es:

$$F = -\tau_{m\acute{a}x} \frac{b}{a^2} \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} + \arctan \varepsilon \right) \quad [Ec. 4.60]$$

El par3metro $\tau_{m\acute{a}x}$ puede calcularse multiplicando μ por el par3metro p_{z_o} de la teor3a de Hertz (v3ase su explicaci3n en el [subapartado 4.4.4](#)):

$$\tau_{m\acute{a}x} = \mu \frac{3}{2} \frac{N}{\pi ab} \quad [Ec. 4.61]$$

Combinando las ecuaciones 4.60 y 4.61 se llega a:

$$F = -\frac{2\mu N}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} + \arctan \varepsilon \right) \quad [Ec. 4.62]$$

De aqu3 se extrae F_y sin esp3n, gracias a la ecuaci3n 4.54 [13].

4.5.8.2. Segundo paso.

A continuaci3n, se realiza un desarrollo para obtener F_y con esp3n puro, que se denota $F_{y,S}$ (el sub3ndice 'S' hace referencia al giro o esp3n, *spin* en ingl3s). En esta situaci3n se tiene $F_x = 0$, ya que el centro de rotaci3n est3 ubicado en el eje longitudinal del 3rea de contacto, mas su posici3n depende del equilibrio de fuerzas y es desconocido *a priori*. Si el semieje longitudinal es lo demasiado peque1o ($a \rightarrow 0$), el centro de la rotaci3n del esp3n se aproxima al origen del sistema de coordenadas $x_c y_c z_c$. Utilizando la transformaci3n de la tensi3n tangencial en una distribuci3n hemisf3rica, la fuerza lateral (fuerza tangencial transversal) causada por giro puro es, tras realizar una integral igual a la mostrada en la ecuaci3n 4.59:

$$F_{y,s} = -\frac{3}{8}\pi \tau_{m\acute{a}x} ab \left[|\varepsilon| \left(\frac{\delta_p^3}{3} - \frac{\delta_p^2}{2} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{3} \sqrt{(1 - \delta_p^2)^3} \right] \quad [Ec. 4.63]$$

Si se introduce $\tau_{m\acute{a}x}$ (ecuaci3n 4.61):

$$F_{y,s} = -\frac{9}{16}\mu N K_M \quad [Ec. 4.64]$$

donde el coeficiente $K_M [\phi]$ equivale a:

$$K_M = |\varepsilon| \left(\frac{\delta_p^3}{3} - \frac{\delta_p^2}{2} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{3} \sqrt{(1 - \delta_p^2)^3} \quad [Ec. 4.65]$$

y el coeficiente auxiliar $\delta_p [\phi]$:

$$\delta_p = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 + 1} \quad [Ec. 4.66]$$

Pero el gradiente de tensi3n tangencial ε de la ecuaci3n 4.58 es dependiente del deslizamiento adimensional, que no puede ser el mismo que antes porque ahora se est3 teniendo en cuenta el esp3n. En principio habr3 que emplear:

$$s = \varphi a \quad [Ec. 4.67]$$

El problema es que esta soluci3n 3nicamente es v3lida cuando $a \rightarrow 0$. Kalker mostr3 que conforme la ratio a/b crece, el efecto del esp3n se mayor. Buscando una soluci3n r3pida para simulaciones de bajo coste computacional se encontr3 una correcci3n para $a > 0$. Para comenzar, se reemplaza s_y por $s_{y,c}$ [m] en la formulaci3n previa, de tal modo que:

$$s_c = \sqrt{s_x^2 + s_{y,c}^2} \quad [Ec. 4.68]$$

donde $s_c [\phi]$ es el m3dulo del vector deslizamiento corregido \vec{s}_c , cuyas componentes son s_x y $s_{y,c}$. Este 3ltimo se expresa de esta manera:

$$\begin{cases} s_{y,c} = s_y + \varphi a, & |s_y + \varphi a| > |s_y| \\ s_{y,c} = s_y, & |s_y + \varphi a| \leq |s_y| \end{cases} \quad [Ec. 4.69]$$

$$[Ec. 4.70]$$

Aparte de esta correcci3n, tambi3n se introduce una expresi3n exponencial que mayor el efecto del giro conforme la ratio a/b aumenta. Esta correcci3n se introduce en la ecuaci3n 4.63 junto con la ratio φ/s_c . As3, queda la siguiente expresi3n para $F_{y,s}$:

$$F_{y,s} = -\frac{9}{16}a \mu N K_M \left[1 + 6,3 \left(1 - e^{-\frac{a}{b}} \right) \right] \frac{\varphi}{s_c} \quad [Ec. 4.71]$$

siendo K_M exactamente la descrita por la ecuaci3n 4.65, pero el gradiente ε ya no es el mismo, habiendo de corregirlo con la exponencial y $s_{y,c}$:

$$\varepsilon_s = \frac{2 C \pi a^2 b}{3 \mu N} \frac{s_{y,c}}{1 + 6,3 \left(1 - e^{-\frac{a}{b}} \right)} \quad [Ec. 4.72]$$

donde la constante C , es decir, la rigidez del contacto tangencial según se definió en el primer paso, se puede obtener experimentalmente o partiendo de los coeficientes de Kalker [13].

4.5.8.3. Tercer paso.

Finalmente, la fuerza lateral (denotada $F_{y,c}$ con la C de corregida para diferenciarla de F_y) resulta de sumar F_y ($\varphi = 0$) y $F_{y,s}$ (φ puro):

$$F_{y,c} = F_y + F_{y,s} \quad [Ec. 4.73]$$

$F_{y,s}$ es en realidad el incremento de la fuerza lateral debido al espín, dado que se obtiene para φ puro y no influyen los pseudodeslizamientos, por lo que su resultado supone un incremento sobre F_y , obtenida para $\varphi = 0$, pero teniendo en cuenta los pseudodeslizamientos [13].

4.5.8.4. Relación entre pseudodeslizamientos y deslizamientos.

La relación entre los pseudodeslizamientos y los deslizamientos es la que sigue:

$$v_i = \frac{Gab C_{jj} s_i}{\mu N}, \quad i, j = x, 1; \quad i, j = y, 2 \quad [Ec. 4.74]$$

Recuérdese C_{11} es el coeficiente de Kalker para la dirección longitudinal, por lo que será el que se aplique para el pseudodeslizamiento longitudinal v_x ; mientras que C_{22} lo es para la transversal/lateral, por lo que se aplicará en el caso de v_y [13].

4.5.8.5. Derivación de la rigidez del contacto tangencial partiendo de los coeficientes de Kalker.

El valor de la rigidez del contacto C se deriva asumiendo que la parte lineal de las ecuaciones lineales de Kalker y la de las ecuaciones propuestas son idénticas. De acuerdo con la teoría propuesta, si el gradiente es cercano a 0 y no hay espín ($\varepsilon \rightarrow 0$):

$$F = -\frac{8}{3} a^2 b C s \quad [Ec. 4.75]$$

Y de acuerdo con la teoría lineal de Kalker (véase el [subapartado 4.5.5](#)):

$$F = -Gab C_{jj} s \quad [Ec. 4.76]$$

Equiparando ambas fórmulas se tiene:

$$C = \frac{3G}{8a} C_{jj} \quad [Ec. 4.77]$$

Debido a que $C_{11} \neq C_{22}$, C_{jj} se calculará de este modo:

$$C_{jj} = \sqrt{\left(C_{11} \frac{s_x}{s}\right)^2 + \left(C_{22} \frac{s_y}{s}\right)^2} \quad [Ec. 4.78]$$

Introduciendo C_{jj} en la ecuación de ε queda esta expresada en función de aquella:

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \frac{G\pi ab C_{jj}}{\mu N} s \quad [Ec. 4.79]$$

Por otro lado, la fuerza lateral causada por el giro puro es, para $\varepsilon_s \rightarrow 0$, según la teoría propuesta:

$$F_y = -\frac{1}{4} \pi a^3 b C_S \varphi \quad [Ec. 4.80]$$

donde se ha trocado C por C_S , que es la constante de rigidez para el caso de espín puro.

Según la teoría lineal de Kalker (recuérdese que Polach y Kalker hacen uso del mismo criterio de signos para el espín):

$$F_y = -G C_{23} \varphi \sqrt{(ab)^3} \quad [Ec. 4.81]$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones se obtiene la fórmula para el cómputo de C_S :

$$C_S = \frac{4}{\pi} \frac{G\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}} C_{23} \quad [Ec. 4.82]$$

Esta ecuación habrá que tenerla en cuenta para el cómputo de ε_s también. Introduciéndola en la expresión de ε_s se obtiene [13]:

$$\varepsilon_s = \frac{8}{3} \frac{Gb\sqrt{ab}}{\mu N} \frac{C_{23} s_{y,c}}{1 + 6,3 \left(1 - e^{-\frac{a}{b}}\right)} \quad [Ec. 4.83]$$

4.5.9. Método de Polach con coeficiente de rozamiento variable.

Hasta ahora se ha considerado un coeficiente de rozamiento constante en todas las teorías presentadas (normalmente se aplicaría 0,4 en condiciones secas sin contaminación y en torno a la mitad en condiciones húmedas sin contaminación). Esta hipótesis no se suele cumplir, ya que en un contacto real hay efectos térmicos que disminuyen el coeficiente de fricción.

Resulta que en un contacto real se produce un incremento de la temperatura conforme la velocidad de deslizamiento aumenta, dado que la fricción va en incremento y se disipa una mayor cantidad de energía en forma de calor. Este calor produce cambios en los materiales en contacto y el coeficiente de fricción se reduce en consecuencia [14], [6, pp. 195 – 257].

4.5.9.1. Consideración de los efectos térmicos.

Polach extendió su método en 2003, 4 años después de publicar su método, para poder tener en cuenta la variación del coeficiente de rozamiento con la velocidad de deslizamiento. Según él, la concordancia entre la teoría y las medidas experimentales es buena cuando no existe contaminación, pero empeora cuando existe contaminación en el contacto.

La relación entre el coeficiente de fricción y la velocidad de deslizamiento se puede expresar mediante una ecuación exponencial:

$$\mu = \mu_o[(1 - A)e^{-wB_f} + A_f] \quad [Ec. 4.84]$$

donde A_f [ϕ] y B_f [s/m] son constantes que se describirán luego de definir w [m/s], que es el módulo del vector velocidad de deslizamiento \vec{w} , cuyas componentes son w_x y w_y :

$$w_i = s_i V \quad i = x, y \quad [Ec. 4.85]$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \quad [Ec. 4.86]$$

En cuanto a las constantes A_f y B_f , la segunda es el coeficiente exponencial que ajusta la rapidez con la que μ decae a velocidad de deslizamiento creciente. Respecto a la primera, resulta ser la ratio entre el coeficiente de fricción a velocidad de deslizamiento infinita μ_∞ y el coeficiente de rozamiento máximo μ_o [14]:

$$A_f = \frac{\mu_\infty}{\mu_o} \quad [Ec. 4.87]$$

4.5.9.2. Consideración de la pendiente inicial de la curva.

Por otro lado, debe tomarse en consideración que la pendiente inicial de la curva de tracción no es la misma en condiciones secas que en húmedas, afectando también la contaminación. Esta diferencia en la pendiente inicial se puede ver en la siguiente gráfica para condiciones secas (curva superior) y húmedas (curva inferior), en principio sin contaminación:

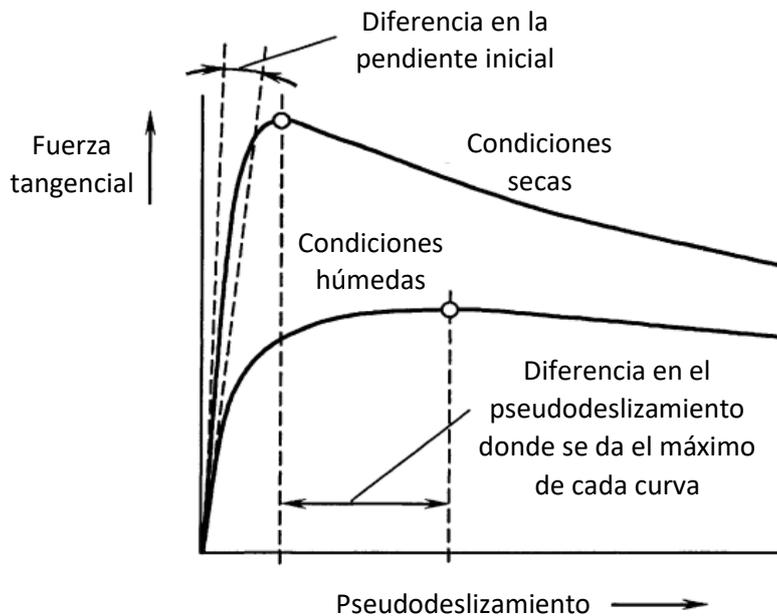


Figura 4.19. Diferencia en la pendiente inicial de la curva de tracción para condiciones secas y húmedas. Fuente: Traducción propia de [14, fig. 1].

Polach tuvo esto en cuenta en la extensión de su método e introdujo un coeficiente de reducción k' para reducir la pendiente inicial de la curva de tracción. Este coeficiente k' puede interpretarse como una reducción de los coeficientes de Kalker y Polach lo ajustó procurando que la teoría coincidiese con las medidas experimentales (otros autores reducen k' teóricamente, a través del efecto de la rugosidad de las superficies en contacto y de la capa interfacial de agua o contaminación, capa no introducida en el método extendido de Polach). Abajo se puede ver una curva de tracción experimental comparada con las curvas de tracción para $k' = 0,05; 0,2; 1$ (las cuales incorporan también la dependencia $\mu = f(w)$):

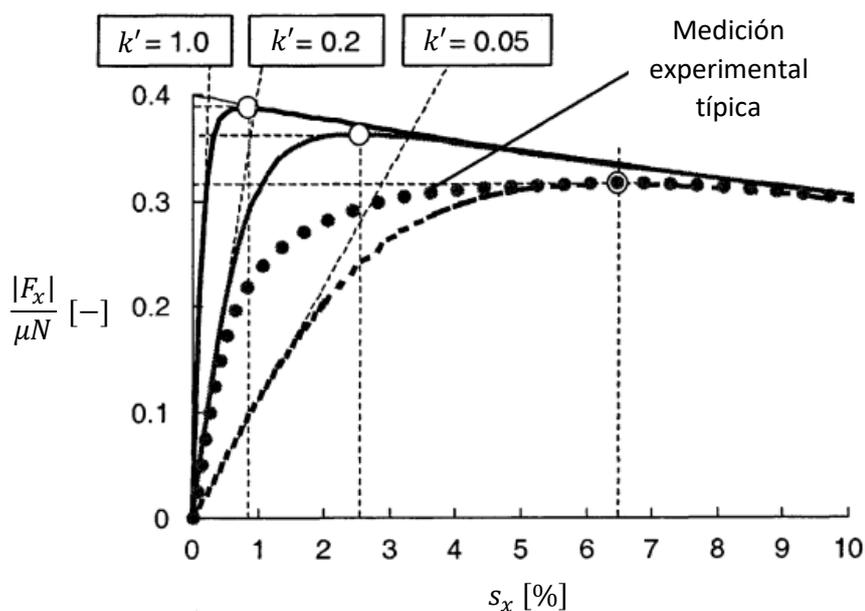


Figura 4.20. Comparación de una curva de tracción experimental con las curvas de tracción para diversos coeficientes de reducción. Fuente: Traducción propia de [14, fig. 3].

El modelo propuesto por Polach para la obtención de las fuerzas tangenciales en condiciones húmedas, contaminadas o secadas se puede explicar como una combinación de fricción seca y húmeda. Para valores pequeños de fuerza, la zona de adhesión cubre la mayor parte del área de contacto. Las condiciones son semejantes a las de fricción seca. Para valores de fuerza elevados, la zona de deslizamiento supone la mayor parte del área de contacto, con lo que se incrementa el efecto de la existencia de una capa interfacial de agua o contaminantes. Consecuentemente, la rigidez de la superficie anisótropa se decremanta y, como resultado de esto, la función fuerza tangencial – pseudodeslizamiento reduce su gradiente notablemente. Para modelar esta circunstancia, Polach empleó un coeficiente de reducción $k_A [\phi]$ para la zona de adhesión y otro $k_S [\phi]$ para la zona de deslizamiento. Esto es fácilmente incorporable al método de cálculo de las fuerzas tangenciales porque en la ecuación para obtener F con $\varphi = 0$ hay dos términos; el primero referido a la zona de adhesión y el segundo a la zona de deslizamiento. Retomando la ecuación 4.62 e insertando k_A y k_S donde corresponde:

$$F = -\frac{2\mu N}{\pi} \left(\frac{k_A \varepsilon}{1 + (k_A \varepsilon)^2} + \arctan(k_S \varepsilon) \right) \quad [Ec. 4.88]$$

Cabe agregar también que la pendiente inicial de la curva de tracción se relaciona con k_A y con k_S de esta forma:

$$k' = \frac{k_A + k_S}{2} \quad [Ec. 4.89]$$

Como colofón, la extensión del método de Polach mediante dos factores de reducción junto con la dependencia $\mu = f(w)$ permite un cálculo más fidedigno de las curvas de tracción para varias condiciones de contacto, las cuales se aproximan más a las curvas medidas experimentales que si se empleasen otros métodos [14].

4.5.9.3. Valores típicos para simulación.

Por último, Polach recopila en una tabla unos parámetros tipo k_A , k_S , μ_0 , A_f y B_f en condiciones secas y húmedas sin contaminación para su uso en simulación [14]:

Tabla 4.3. Parámetros tipo k_A , k_S , μ_0 , A_f y B_f en condiciones secas y húmedas sin contaminación. Fuente: Traducción propia de [14, tabla II].

Parámetro del modelo	Condiciones de contacto	
	Secas	Húmedas
k_A	1.00	0.30
k_S	0.40	0.10
μ_0	0.55	0.30
A_f	0.40	0.40
B_f (s/m)	0.60	0.20

Compárense estos valores de μ_0 con el valor constante 0,40, que es la cifra usada clásicamente en simulación [6, p. 259].

El efecto de la contaminación no se tiene en cuenta en estos parámetros, pero el método de Polach extendido abre las puertas a la consideración de la contaminación, que es posible si se hace uso de parámetros que concuerden con las medidas experimentales con la mayor exactitud posible.

Por último, cabe notar que en la tabla no aparece μ_∞ , aunque esto no es un problema porque está implícito en A_f . Así, si se toma la ecuación 4.87 y se despeja μ_∞ : El resultado es 0,22 en condiciones secas y 0,12 en condiciones húmedas, que son valores extremadamente bajos que probablemente no permitirían acelerar ni frenar la rueda (con las fuerzas o pares habituales) y esta se bloquearía.

5. Estudio teórico del desgaste.

5.1. Introducción.

El desgaste es el proceso que más afecta a la vida útil de la rueda, por lo que es vital caracterizarlo correctamente para que la vida útil calculada sea representativa de la realidad. El desgaste se debe a la abrasión y a la adhesión y existen diversos modelos para caracterizar estos tipos de desgaste, de los cuales se van a describir los más relevantes [5, p. 57].

Estos modelos se centran en el cálculo de una tasa de desgaste que normalmente expresa la superficie transversal o la cantidad de material perdido en función de otras variables. Lo más interesante es hallar la profundidad que alcanza el desgaste en la rueda cuando la tasa adquiere un determinado valor, asunto que se trata detalladamente.

Adicionalmente, se va a hablar sobre la eliminación del desgaste, que es un aspecto de relevancia para asegurar el correcto funcionamiento de la rueda y el alargamiento de su vida útil.

Finalmente, se combinarán los daños producto del desgaste con los daños producto de la fatiga, que es segunda causa de daño más importante tras el propio desgaste.

5.2. Desgaste por abrasión y adhesión.

5.2.1. Diferencias entre desgaste por abrasión y por adhesión.

El desgaste por abrasión se debe al movimiento relativo entre la superficie de la rueda y del carril y a la rugosidad de ambos cuerpos, lo cual provoca la fricción y esta, a su vez, el arranque de partículas del material de la rueda, pero también del carril (las ecuaciones se aplicarán a la primera).

En cambio, el desgaste por adhesión se debe a la deformación plástica y a las fuerzas cohesivas que aparecen entre ambas superficies (fuerzas de Van der Waals, electrostáticas o químicas), lo cual acaba produciendo una transferencia de material de una superficie a la otra (interesa la transferencia de la rueda al carril) [15, pp. 78 – 80].

5.2.2. Hipótesis.

Se plantean las siguientes hipótesis [6, pp. 77 – 78]:

1. Las ecuaciones se parametrizan para el desgaste por abrasión, debido al deslizamiento o a la fricción subsecuente. No se parametrizan para el desgaste por adhesión, por tres razones:
 - (a) La deformación plástica aparece, pero es muy difícil de modelizar sin el uso de técnicas de elementos finitos o similares, que tienen un coste computacional muy elevado.

(b) Es razonable asumir que la mayor contribución al desgaste de los perfiles sea el desgaste por abrasión.

(c) Cuando las herramientas de predicción se calibran con datos experimentales, ambos fenómenos se incluyen esencialmente en el modelo de desgaste.

2. Las distintas herramientas de predicción estudian el desgaste sobre el perfil de la rueda, donde el desgaste estimado en cada instante de tiempo se va acumulando sobre el perfil de la rueda.
3. Se asume que el desgaste es regular: se estudia la variación del perfil transversal y no la formación de patrones a lo largo de la dirección longitudinal (circunferencial). Por tanto, en el caso de la rueda, el desgaste que aparece en un determinado instante de tiempo y para una determinada posición, se distribuye a lo largo de la circunferencia completa de la rueda. Se trata de una hipótesis general en el estudio de la evolución de los perfiles, comúnmente asumida en los estudios de desgaste.
4. En cuanto a la presencia de contaminantes en la interfase de contacto, esta suele tomarse en consideración variando el valor del coeficiente de rozamiento (o de las constantes de la función de fricción, en el caso de utilizar coeficiente de rozamiento variable). Sin embargo, para obtener una buena estimación del desgaste es necesario disponer de la ley de desgaste correspondiente, obtenida con la presencia de dicho contaminante.

5.2.3. Modelo de Reye – Archand – Khrushchov.

El modelo de Reye – Archand – Khrushchov (RAK) es el más sencillo de todos y caracteriza el desgaste por abrasión que se da en la zona de deslizamiento del área de contacto. Este modelo se fundamenta en los estudios de Karl Theodor Reye (1838 – 1919), John Frederick Archand (1918 – 1989) y Mijail Mijailóvich Khrushchov (1890 – 1972) y su ecuación característica es la que sigue:

$$V_w = K_{RAK} \frac{s_d N}{H} \quad [Ec. 5.1]$$

donde V_w [m³] es el volumen de material perdido en la rueda debido al desgaste (w hace referencia a *wear*, desgaste en inglés) cuando ha deslizado una distancia s_d [m] bajo la acción de una carga N [N] (en realidad, la carga es F_z y N es la reacción normal ejercida por el carril). H [N/m²] es la dureza del material de la rueda K_{RAK} y es el coeficiente de desgaste.

El coeficiente de desgaste se puede determinar a través de ensayos de laboratorio y se suele presentar en un mapa de desgaste en función de la velocidad de deslizamiento y la presión de contacto. Este mapa de desgaste del Real Instituto de Tecnología de Estocolmo (KTH, por sus siglas en sueco) se muestra a continuación:

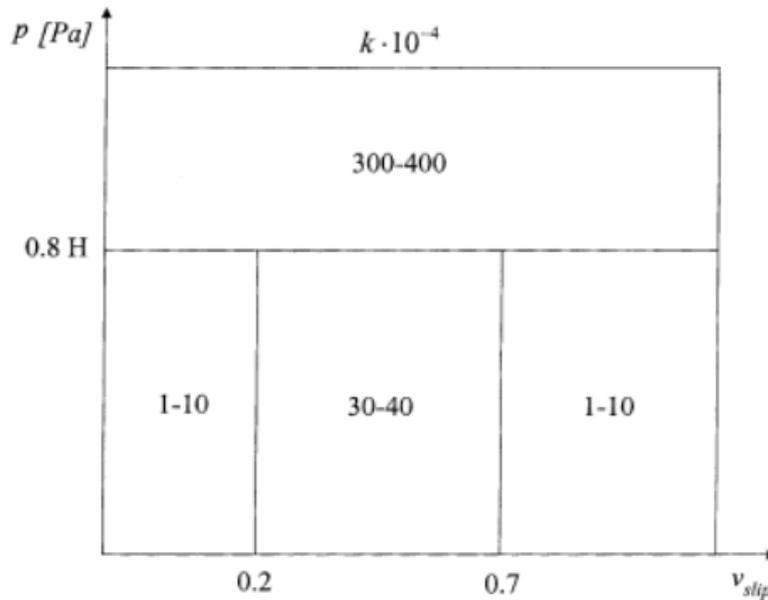


Figura 5.1. Mapa de desgaste del modelo de RAK para la toma del coeficiente K_{RAK} (k en el mapa) en condiciones secas, elaborado por el KTH. Fuente: [5, p. 59].

En vista de este mapa es evidente que el desgaste se puede caracterizar en tres regímenes distintos:

- ✓ Suave ($K_{RAK} = 1 - 10 \cdot 10^{-4}$).
- ✓ Severo ($K_{RAK} = 30 - 40 \cdot 10^{-4}$).
- ✓ Catastrófico ($K_{RAK} = 300 - 400 \cdot 10^{-4}$).

Del mapa también se desprende que existen saltos bruscos entre estos regímenes. Por consiguiente, el valor del coeficiente de desgaste es muy sensible a la estimación de la velocidad de deslizamiento y de la presión de contacto. Con un ligero error en la estimación de la presión el coeficiente puede variar en un factor de 400 (si se sobreestima la presión por encima de la frontera horizontal, fija en $0,8H$).

Por lo tanto, para usar este modelo de desgaste es necesario tener una estimación de alto grado de exactitud de la presión de contacto y de la velocidad de deslizamiento en la zona de deslizamiento, que es donde ocurre el desgaste de acuerdo con este modelo [5, pp. 58 – 59].

5.2.4. Modelos de transferencia de energía.

El modelo de RAK es limitado, en tanto que no es recomendable su aplicación en caso de carecer de una estimación de gran exactitud y, además, se centra en la zona de deslizamiento, así que no es global a toda el área de contacto. Allende esto, con los datos que se tienen tras resolver el problema de contacto no es inmediato aplicar la ecuación de RAK.

Para solventar estos inconvenientes se recurre a los modelos de transferencia de energía, los cuales tienen en cuenta la energía disipada por la fricción en el contacto rueda – carril y la relacionan con la tasa de desgaste de la rueda.

El modelo más ampliamente utilizado es aquel que, como indicador de la energía disipada, utiliza el índice $T\gamma$ [N], también llamado índice de desgaste, número de desgaste o factor de desgaste. Este modelo se aplica de forma global al área de contacto. Por tanto, el índice $T\gamma$ se define como el producto de las fuerzas tangenciales al desgaste por los correspondientes valores de pseudodeslizamientos (T representa las fuerzas tangenciales mientras que γ representa los pseudodeslizamientos, cuando se aplica a nivel global). Su expresión es:

$$T\gamma = |F_x v_x| + |F_y v_y| + |M_z \varphi| \quad [Ec. 5.2]$$

Para relacionar este índice de desgaste con la tasa de desgaste W_R (símbolo procedente del inglés *wear rate*) se recurre a las leyes de desgaste, las cuales utilizan diferentes unidades para expresar la tasa de desgaste. Las principales son las desarrolladas por la Investigación Ferroviaria Británica y por la Universidad de Sheffield [6, p. 83].

Abajo se explican estas dos leyes pertenecientes al modelo del índice de desgaste. Adicionalmente se presenta brevemente otro modelo de transferencia de energía a modo de alternativa, un modelo de aplicación menos frecuente que se llama modelo del flujo de energía. Este modelo fue desarrollado por Ivstán Zobory, quien desarrolló también una ley para correlacionar el flujo de energía con la tasa de desgaste.

Posteriormente se explica en varios pasos cómo obtener la profundidad que alcanza el desgaste en la rueda, lo cual es importante para estimar la necesidad y profundidad de los diversos reperfilados que se llevan a cabo a lo largo de la vida útil de la rueda.

Para finalizar, se sopesan las ventajas e inconvenientes de los modelos presentados (con sus leyes de desgaste) y se opta por uno de ellos y por una ley de desgaste para la realización de los cálculos de desgaste.

5.2.4.1. Modelo del índice de desgaste. Ley de desgaste de la Investigación Ferroviaria Británica.

Esta ley surgió como resultado de un trabajo pionero realizado por Investigación Ferroviaria Británica (BRR, por sus siglas en inglés) para comprender y modelizar el comportamiento del desgaste de la rueda y carril. Este trabajo expresa la tasa de desgaste W_R como la superficie transversal de material perdido en la rueda [mm²] por la distancia rodada [km] por dicha rueda. En esta ley se distinguen tres regímenes en función de las condiciones en las que aparece el desgaste, con distintas tasas de desgaste asociadas (véanse en la tabla 5.1):

- ✓ Régimen suave: Está asociado a las condiciones que se dan en el contacto de la banda de rodadura de la rueda con la corona del carril.
- ✓ Régimen de transición: Trátase de un régimen en el cual las condiciones están a medio camino entre las del régimen suave y las del severo.
- ✓ Régimen severo: Está asociado normalmente a las condiciones que se dan en el contacto de la pestaña de la rueda con la cara interna del carril.

Tabla 5.1. Relación entre el índice de desgaste $T\gamma$ y la tasa de desgaste W_R según la ley de desgaste de la BRR. El parámetro D [mm] hace referencia al diámetro nominal de la rueda. Fuente: [6, p. 83].

Régimen	$T\gamma$ (N)	Tasa de desgaste (W_R) (mm ² /km rodado)
Suave	$T\gamma < 100$	$0,25 T\gamma/D$
Transición	$100 \leq T\gamma < 200$	$25,0/D$
Severo	$200 \leq T\gamma$	$(1,19 T\gamma - 154)/D$

Los datos de esta ley fueron encontrados para aceros del tipo R8T en las ruedas y BS11 en los carriles en condiciones secas y sin contaminación [6, pp. 82 – 83].

5.2.4.2. Modelo del índice de desgaste. Ley de desgaste de la Universidad de Sheffield.

Por otro lado, en la Universidad de Sheffield (USFD, por sus siglas en inglés). La ley de desgaste de la USFD se basa en datos experimentales obtenidos en condiciones de laboratorio en una máquina de doble disco y expresa la tasa de desgaste W_R como el material perdido [μg] por la distancia rodada [m] por unidad de área de rodadura [mm²]. Para la estimación del desgaste se usa el índice de desgaste $T\gamma$ dividido por el área de contacto A_c (en mm²):

$$\frac{T\gamma}{A_c} = \frac{|F_x v_x| + |F_y v_y| + |M_z \varphi|}{A_c} \quad [Ec. 5.3]$$

Este índice se conoce como $T\gamma/A_c$ y se expresa en [N/mm²], si bien también es posible expresarlo en términos energéticos, como densidad volumétrica de energía [mJ/mm³]. Según los mecanismos de desgaste que aparecen en el contacto rueda – carril, se distinguen tres regímenes, con distintas tasas de desgaste asociadas (véanse en la tabla 5.2):

- ✓ Régimen suave: en este primer régimen la tasa de desgaste crece linealmente con la energía disipada. El mecanismo de desgaste que prevalece es la oxidación. La transición entre el régimen suave y el régimen severo está asociada al paso de un área con zona de adhesión y zona de deslizamiento a un área completa en deslizamiento.
- ✓ Régimen severo: en este régimen, la tasa de desgaste permanece constante. Esto es debido a que toda el área está en deslizamiento. El desgaste está controlado por la tensión tangencial que permanece saturada por el coeficiente de rozamiento. Las tensiones en el contacto producen un incremento de las tensiones cortantes en el material que se acumulan y producen rotura del material por delaminación (*ratcheting*). La transición entre el régimen severo y el régimen catastrófico está asociada al cambio de temperatura, que produce un deterioro de las propiedades mecánicas de los materiales. Por tanto, aumenta la tasa de desgaste.

- ✓ Régimen catastrófico: En este régimen la tasa de desgaste aumenta en gran medida, siendo proporcional al aumento de energía disipada. El mecanismo de desgaste que aparece es la delaminación severa.

Tabla 5.2. Relación entre el índice de desgaste $T\gamma$ y la tasa de desgaste W_R según la ley de desgaste de la USFD. Fuente: [6, p. 84].

Régimen	$T\gamma/A$ (N/mm ²)	Tasa de desgaste (W_R) ($\mu\text{g}/\text{m rodado}/\text{mm}^2$)
Suave (K_1)	$T\gamma/A \leq 10,4$	$5,3 T\gamma/A$
Severo (K_2)	$10,4 < T\gamma/A \leq 77,2$	55,0
Catastrófico (K_3)	$77,2 < T\gamma/A$	$55,0 + 61,9 (T\gamma/A - 77,2)$

Gráficamente:

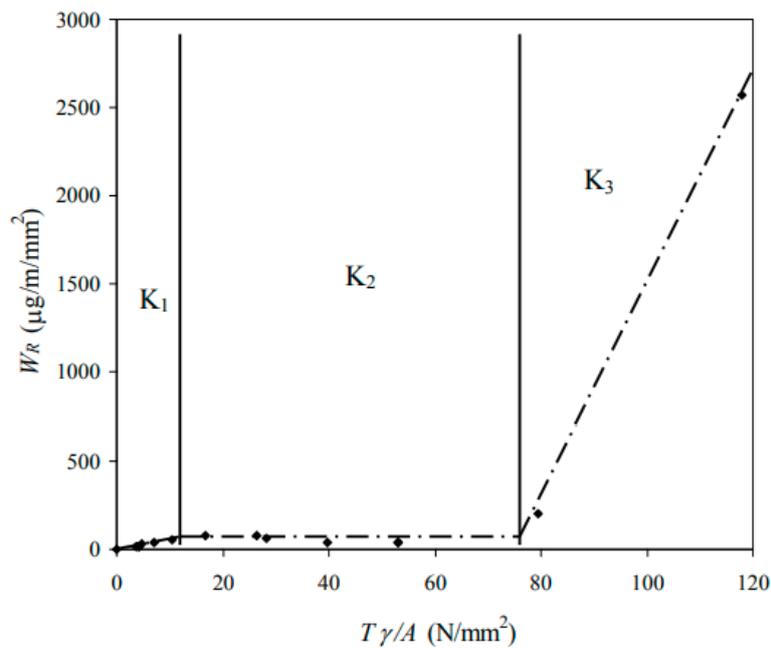


Figura 5.2. Ley de desgaste de la USFD representada gráficamente. Fuente: [6, p. 85].

Esta ley de desgaste se obtuvo para ruedas de acero R8T y carriles de acero 900A y es válida para contactos secos y limpios, puesto que se obtuvo en tales condiciones [6, pp. 83 – 85].

5.2.4.3. Modelo del flujo de energía. Modelo y ley de Zobory.

Existe otro modelo de transferencia de energía que es el de Ivstán Zobory, investigador actualmente en activo. Este método hace uso del concepto de densidad superficial del flujo de energía (potencia), un parámetro que se denota \dot{E} [W/m^2]. Se fija un umbral en $4 \cdot 10^{-6} \text{ W}/\text{m}^2$ que marca el límite entre dos regímenes, cada uno de los cuales tiene una constante de Zobory asociada K_{Zobory} [kg/J]:

- ✓ Régimen suave (bajo el umbral): En este régimen se pierden $7 \cdot 10^{-10}$ kg de material (0,7 μ g) por cada J de energía disipada.
- ✓ Régimen severo (sobre el umbral): En este régimen se pierden $21 \cdot 10^{-10}$ kg de material (2,1 μ g) por cada J de energía disipada.

La tasa de desgaste W_R se expresa en material perdido [kg] por unidad de tiempo [s] y superficie de rodadura [m^2] y es el producto de K_{Zoroby} y \dot{E} (ley de desgaste de Zobory):

$$W_R = K_{Zoroby} \dot{E} \quad [Ec. 5.4]$$

Por último, el parámetro \dot{E} se puede calcular globalmente de esta forma [16]:

$$\dot{E} = \frac{T\gamma}{A_c} V_{rr} \quad [Ec. 5.5]$$

donde $T\gamma/A_c$ es el índice de desgaste dividido por A_c , que es lo que se introduce en la ley de desgaste de la USFD. Puede expresarse en [N/m^2] según su definición, mas es más conveniente expresarlo en términos energéticos, es decir, [J/m^3]; mientras que la velocidad real de rodadura, denotada V_{rr} (la cual difiere de la velocidad del vehículo V [m/s] debido a la existencia de deslizamiento) se introduce en [m rodado/s].

5.2.5. Opción por un modelo y ley de desgaste para la realización de los cálculos.

Una vez presentados los modelos y leyes de desgaste, se procede a optar razonadamente por un modelo y una ley para la realización de los cálculos de desgaste.

En primer lugar, el modelo Reye – Archand – Khrushchov se descarta al no cumplirse los dos requisitos fundamentales: no se dispone de una estimación de alto grado de exactitud de la presión y de la velocidad de deslizamiento en la zona de deslizamiento.

En cuanto a los modelos de transferencia de energía, de partida se descarta el modelo (y ley de desgaste) de Zobory, dado que es un modelo pensado inicialmente para cálculos a nivel local dentro del área de contacto, no a nivel global, por lo que la fórmula 5.6 constituye una mera aproximación. Aparte, en la ley de desgaste solamente hay dos regímenes divididos por un umbral concreto, y la intensidad del desgaste se triplica al rebasar el umbral. Por tanto, aparece el mismo problema que en el modelo de RAK: saltos bruscos. Errores en la estimación de $T\gamma/A_c$ pueden dar lugar a un salto brusco en W_R , lo cual hace desaconsejable el empleo de este modelo (y ley de desgaste).

Respecto al modelo que emplea el índice $T\gamma$, se puede optar por la ley de la BRR o de la USFD. Han de ser comparadas sus ventajas y desventajas para poder decidir si decantarse por una o por otra:

- ✓ La ley de la BRR es ventajosa en tanto que parametriza la tasa de desgaste según el diámetro nominal de la rueda, lo cual permite apreciar mejor el efecto de este en el desgaste. Sin embargo, su principal inconveniente es que exhibe un salto brusco entre el régimen de transición y el severo: $W_R = 25/D$ [$mm^2/km - r.$] cuando $T\gamma \rightarrow 200^-$ y $W_R = 84/D$ [$mm^2/km - r.$] cuando $T\gamma = 200$.

- ✓ La ley de la USFD presenta una función definida a trozos $W_R = f(T\gamma/A_c)$ continua, siendo esta su principal ventaja. Como desventaja, el régimen de desgaste severo tiene una gran extensión, yendo desde $T\gamma/A_c = 10,4$ hasta $T\gamma/A_c = 77,2$ [N/mm²], lo cual podría impedir apreciar o interpretar el efecto que la modificación del diámetro acarrea en el desgaste.

En vista de estas ventajas e inconvenientes, no es fácil saber cuál de las dos leyes va a ofrecer mejores prestaciones y lo más conservador es emplear ambas y comparar sus resultados. Por tanto, finalmente se opta por emplear ambas leyes de desgaste.

5.3. Profundidad de desgaste.

El desgaste alcanza una determinada profundidad en la rueda que depende principalmente de la evolución de la tasa de desgaste, aunque también de otros parámetros. De cara al cálculo de la vida útil de la rueda resulta fundamental hallar la profundidad de desgaste por revolución y, en base a esta, la total o absoluta. En vista de esta fundamentalidad, esto es lo que se va a llevar a cabo detalladamente a continuación, tanto para la ley de desgaste de la BRR cuanto para la de la USFD.

5.3.1. Por revolución.

5.3.1.1. Partiendo de la tasa de desgaste de la ley de la BRR.

La tasa de desgaste de la BRR, la cual se puede simbolizar $W_{R,BRR}$, viene expresada en [mm²/km rodado]. Esta superficie de material perdido es transversal, es decir, se puede medir en verdadera magnitud en un corte de la rueda por un plano axial. Esta superficie, que se puede denotar S_{ax} [mm²], es un rectángulo y se obtiene como el producto de $2b$ (eje transversal de la elipse de contacto, expresado en [mm]) por la profundidad de desgaste según la ley de la BRR, denotada h_{BRR} [mm].

En la siguiente imagen se representa la semisección de la rueda (sin considerar las oquedades que la aligeran) junto con el rectángulo de material perdido, a cuyo margen se indica la relación matemática citada. Para que este rectángulo se aprecie mejor, se exageran sus dimensiones y, además, se realiza el rayado inverso del corte: en vez de rayar el material existente, se raya el material perdido:

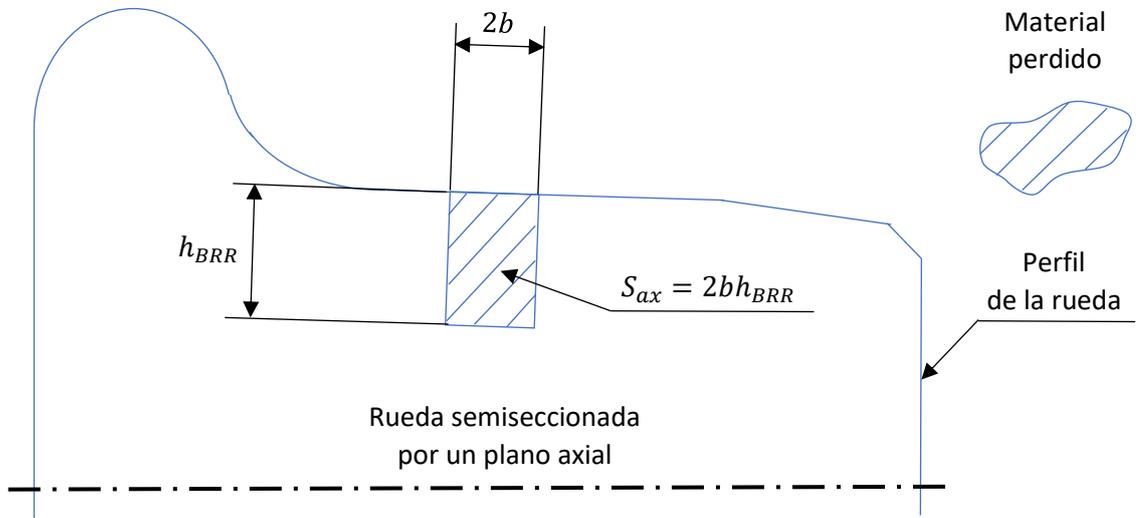


Figura 5.3. Superficie de material perdido que aparece en la tasa de desgaste de la ley de la BRR.
Fuente: Elaboración propia.

Si se desea hallar la profundidad de desgaste por revolución según la ley de la BRR, denotada h'_{BRR} [$\mu\text{m}/\text{rev.}$], partiendo de la $W_{R,BRR}$, lo que debe realizarse es normalizar la tasa y despejar h'_{BRR} de esta normalización. Para ello, la $W_{R,BRR}$ se divide por S_{ax} y se multiplica al mismo tiempo por la distancia que la rueda recorre en una revolución (πD [mm] si está rodando con el diámetro nominal) [16]. De esta forma se logra normalizar la tasa:

$$1[\phi] = W_{R,BRR} \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{km} - r.} \right] \cdot \frac{\pi D \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right] \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{km}}{\text{mm}} \right]}{2b [\text{mm}] \cdot h'_{BRR} \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right]} \quad [\text{Ec. 5.6}]$$

De aquí se despeja h'_{BRR} en [mm/rev.]:

$$h'_{BRR} \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right] = W_{R,BRR} \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{km} - r.} \right] \cdot \frac{\pi D \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right] \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{km}}{\text{mm}} \right]}{2b [\text{mm}]} \quad [\text{Ec. 5.7}]$$

Y un cambio de unidades posterior permite obtener h'_{BRR} en [$\mu\text{m}/\text{rev.}$]:

$$h'_{BRR} \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{rev.}} \right] = W_{R,BRR} \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{km} - r.} \right] \cdot \frac{\pi D \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right] \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{km}}{\text{mm}} \right]}{2b [\text{mm}]} \cdot 10^3 \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{mm}} \right]$$

$$h'_{BRR} \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{rev.}} \right] = W_{R,BRR} \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{km} - r.} \right] \cdot \frac{\pi D \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right] \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{km} \cdot \mu\text{m}}{\text{mm}^2} \right]}{2b [\text{mm}]} \quad [\text{Ec. 5.8}]$$

Por último, cabe reseñar que es posible desarrollar más esta ecuación y expresarlas directamente en función de $T\gamma$ [16].

No obstante, es viable expresarla así, desacoplada de la relación entre $T\gamma$ y $W_{R,BRR}$, dado que esto apenas incrementa el coste computacional.

5.3.1.2. Partiendo de la tasa de desgaste de la ley de la USFD.

A diferencia de la tasa de desgaste de la BRR, la tasa de desgaste de la USFD, la cual se puede simbolizar $W_{R,USFD}$, viene expresada en $[\mu\text{g}/(\text{m rodado} \cdot \text{mm}^2)]$. Este material perdido, de densidad ρ $[\mu\text{g}/\text{mm}^3]$, está contenido en un cilindro de volumen V_{cil} $[\text{mm}^3]$, siendo el producto de estas dos magnitudes la propia masa perdida m_{perd} $[\mu\text{g}]$. La base de este cilindro es la elipse de contacto, de área A_c $[\text{mm}^2]$ (la superficie basal que aparece en $W_{R,USFD}$); mientras que su altura es la profundidad de desgaste según la ley de la USFD, denotada h_{USFD} $[\text{mm}]$. El producto de estas dos magnitudes determina V_{cil} .

En la imagen inferior el cilindro elíptico en el interior de una rueda. Sus dimensiones se han exagerado para su mejor apreciación. Al margen del cilindro se muestran las relaciones matemáticas aludidas, insertándose también la ecuación de A_c (ecuación 4.3, en la [subsección 4.4.3](#)):

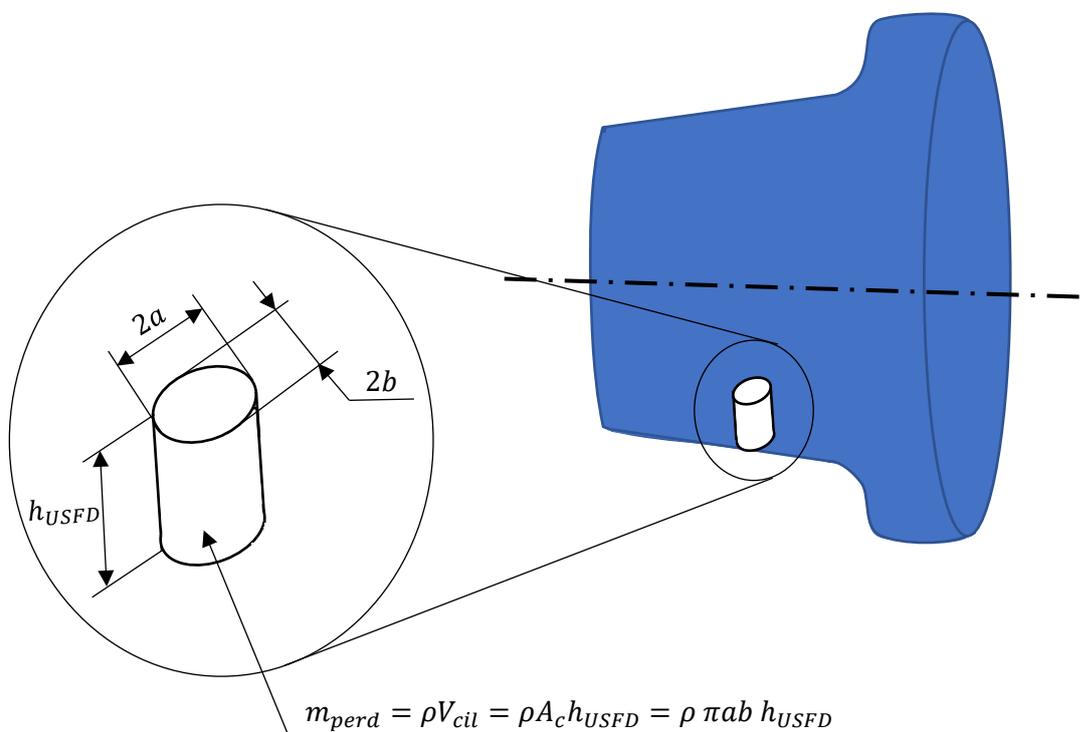


Figura 5.4. Masa de material perdido que aparece en la tasa de desgaste de la ley de la USFD. Fuente: Elaboración propia.

Si se desea hallar la profundidad de desgaste por revolución según la ley de la USFD, denotada h'_{USFD} [$\mu\text{m}/\text{rev.}$], partiendo de la $W_{R,USFD}$, se procede como en el caso de la BRR: se normaliza la tasa y se despeja h'_{USFD} de esta normalización. Para ello, la $W_{R,USFD}$ se divide por m_{perd} y se multiplica al mismo tiempo por la distancia que el desgaste avanza en cada contacto rueda – carril. Esta distancia es $2a$ [mm] y se aplica a la revolución completa, en vez de πD , ya que aquella es la distancia rodada que aparece en el denominador de la $W_{R,USFD}$ [16]. De esta forma se logra normalizar la tasa:

$$1[\phi] = W_{R,USFD} \left[\frac{\mu g}{\text{mm}^2 \cdot m - r.} \right] \cdot \frac{A_c [\text{mm}^2] \cdot 2a \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right]}{\rho \left[\frac{\mu g}{\text{mm}^3} \right] \cdot A_c [\text{mm}^2] \cdot h'_{USFD} \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right]} \quad [Ec. 5.9]$$

De aquí se despeja h'_{USFD} en [$\text{mm}/\text{rev.}$]:

$$h'_{USFD} \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right] = W_{R,USFD} \left[\frac{\mu g}{\text{mm}^2 \cdot m - r.} \right] \cdot \frac{2a \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right]}{\rho \left[\frac{\mu g}{\text{mm}^3} \right]} \quad [Ec. 5.10]$$

Y un cambio de unidades posterior permite obtener h'_{USFD} en [$\mu\text{m}/\text{rev.}$]:

$$h'_{USFD} \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{rev.}} \right] = W_{R,USFD} \left[\frac{\mu g}{\text{mm}^2 \cdot m - r.} \right] \cdot \frac{2a \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right]}{\rho \left[\frac{\mu g}{\text{mm}^3} \right]} \cdot 10^3 \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{mm}} \right] \quad [Ec. 5.11]$$

donde ρ tiene el mismo valor numérico en [$\mu\text{g}/\text{mm}^3$] que en [kg/m^3], puesto que son ratios equivalentes.

Por último, cabe reseñar que es posible desarrollar más esta ecuación y expresarla directamente en función de $T\gamma/A_c$ [16].

No obstante, es viable expresarla así, desacoplada de la relación entre $T\gamma/A_c$ y $W_{R,USFD}$, dado que esto apenas incrementa el coste computacional.

5.3.2. Total o absoluta.

Si se desea calcular la profundidad de desgaste total o absoluta para las leyes de la BRR, la USFD tras un número de revoluciones determinado que la rueda ha rotado realmente, designado n_{rr} [rev.], basta con hallar los productos respectivos de h'_{BRR} [$\mu\text{m}/\text{rev.}$] y h'_{USFD} [$\mu\text{m}/\text{rev.}$] con n_{rr} . De esta forma se obtienen H_{BRR} [μm] y H_{USFD} [μm]:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{BRR} [\mu\text{m}] = h'_{BRR} \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{rev.}} \right] \cdot n_{rr} [\text{rev.}] \\ H_{USFD} [\mu\text{m}] = h'_{USFD} \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{rev.}} \right] \cdot n_{rr} [\text{rev.}] \end{array} \right. \quad [Ec. 5.12]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{BRR} [\mu\text{m}] = h'_{BRR} \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{rev.}} \right] \cdot n_{rr} [\text{rev.}] \\ H_{USFD} [\mu\text{m}] = h'_{USFD} \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{rev.}} \right] \cdot n_{rr} [\text{rev.}] \end{array} \right. \quad [Ec. 5.13]$$

El número de vueltas que la rueda ha rotado realmente se obtiene como el cociente entre la longitud realmente rodada L_{rr} [m] y la longitud de la circunferencia generada por el radio real de rodadura r_{rr} [m], que coincide con el radio con el cual la rueda ha realizado tal recorrido:

$$n_{rr} = \frac{L_{rr}}{2\pi r_{rr}} \quad [Ec. 5.14]$$

Insertando la ecuación 5.8 en la 5.12 se obtiene:

$$H_{BRR} [\mu m] = W_{R,BRR} \left[\frac{mm^2}{km - r.} \right] \cdot \frac{\pi D \left[\frac{mm}{rev.} \right] \cdot 10^{-3} \left[\frac{km \cdot \mu m}{mm^2} \right]}{2b [mm]} \cdot \frac{L_{rr} [m]}{2\pi r_{rr} [m]} \quad [Ec. 5.15]$$

Esta expresión se puede simplificar si se reemplaza πD (longitud de la circunferencia nominal) por $2\pi r_{rr}$ (longitud de la circunferencia real de rodadura):

$$H_{BRR} [\mu m] = W_{R,BRR} \left[\frac{mm^2}{km - r.} \right] \cdot \frac{10^{-3} \left[\frac{km \cdot \mu m}{mm^2} \right] \cdot L_{rr} [m]}{2b [mm]} \quad [Ec. 5.16]$$

Por otro lado, insertando la ecuación 5.11 en la 5.13 se obtiene:

$$H_{USFD} [\mu m] = W_{R,USFD} \left[\frac{\mu g}{mm^2 \cdot m - r.} \right] \cdot \frac{2a \left[\frac{mm}{rev.} \right]}{\rho \left[\frac{\mu g}{mm^3} \right]} \cdot 10^3 \left[\frac{\mu m}{mm} \right] \cdot \frac{L_{rr} [m]}{2\pi r_{rr} [m]} \quad [Ec. 5.17]$$

Expresión que también se puede simplificar:

$$H_{USFD} [\mu m] = W_{R,USFD} \left[\frac{\mu g}{mm^2 \cdot m - r.} \right] \cdot \frac{a \left[\frac{mm}{rev.} \right] \cdot 10^3 \left[\frac{\mu m}{mm} \right] \cdot L_{rr} [m]}{\rho \left[\frac{\mu g}{mm^3} \right] \cdot \pi r_{rr} [m]} \quad [Ec. 5.18]$$

Algo relevante que debe considerarse es que, debido al deslizamiento, la longitud rodada por la rueda no coincidirá con la longitud del cada subtramo del trazado L [m]:

$$L_{rr} \neq L$$

La diferencia existente entre ambas se puede calcular a partir del pseudodeslizamiento longitudinal v_x , que puede definirse en función de longitudes, para lo cual simplemente hay que multiplicar la ecuación I.23 de la [parte I.3.2.6](#) (tomando también la ecuación I.12 de la [parte I.3.2.2](#) para reemplazar ΔV_x) por el tiempo t [s]:

$$v_x = \frac{\Delta V_x}{V} = \frac{V' - V}{V} = \frac{V_{rr} - V}{V}$$

$$v_x = \frac{(V_{rr} - V)t}{Vt} = \frac{L_{rr} - L}{L}$$

$$L_{rr} = L(1 + v_x) \quad [Ec. 5.19]$$

De esta forma, $L_{rr} > L$ cuando $v_x > 0$ y viceversa. Y, por supuesto, $L_{rr} = L$ cuando $v_x = 0$. Componiendo v_x con el pseudodeslizamiento transversal v_y es posible mejorar la precisión, ya que el deslizamiento transversal también afecta a la mayor o menor distancia recorrida:

$$L_{rr} = L \left(1 \pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) \quad [Ec. 5.20]$$

Al introducir la raíz cuadrada se pierde el signo y no se sabe si $L_{rr} > L$ o $L_{rr} < L$, por lo que debe introducirse el signo mediante un criterio de signos fidedigno:

$$\begin{cases} v_x \geq 0 \rightarrow \sqrt{v_x^2 + v_y^2} > 0 \\ v_x < 0 \rightarrow \sqrt{v_x^2 + v_y^2} < 0 \end{cases}$$

Como se puede apreciar, el signo de v_y (o su posible nulidad) no afecta en ningún caso, siendo el signo de v_x el determinante. Esto es debido a que v_y siempre añade distancia recorrida, independientemente de cause que la rueda se mueva hacia el interior o hacia el exterior de la vía.

5.4. Eliminación del desgaste.

En esta última sección se va a hablar sobre la eliminación del desgaste, que es un aspecto de relevancia para asegurar el correcto funcionamiento de la rueda y el alargamiento de su vida útil.

Según [17, pp. 112], el desgaste de la rueda depende de la dureza de su material y su profundidad se puede estimar entre 1,5 y 3 mm de media cada 100.000 km (en línea recta y para diámetros del orden de 1 m). Este desgaste ha ido en aumento en los últimos años debido al incremento de la velocidad de los trenes y de las cargas por eje. Esta tendencia al alza se ha contrarrestado parcialmente gracias al uso de aceros de mayor resistencia y la optimización de la lubricación, si bien a costa del aumento de la fatiga en la zona de rodadura.

La pérdida de material producida por el desgaste altera la geometría de la rueda y modifica la conicidad de la rueda, lo cual afecta a la dinámica y a los límites de estabilidad del vehículo ferroviario (esto se desarrollará seguidamente).

Para eliminar los efectos del desgaste, lo que se realiza es el perfilado o retorneado periódico de la rueda, que consiste en rectificar la rueda hasta restituir su perfil original, pero con un menor diámetro nominal [17, pp. 111 – 112].

En la siguiente imagen se muestra un caso exagerado de desgaste en el cual abarca toda la región A, la inmensa mayoría de la región B y una parte de la región C (véanse la clasificación de las regiones de contacto en el [subcapítulo I.7](#)). En cada región sucede lo siguiente:

- ✓ En la región A (banda de rodadura) se produce un acunamiento que modifica la conicidad de la banda de rodadura, aumentándola. Este aumento en la conicidad reduce la velocidad crítica superior e inferior del vehículo según las ecuaciones del [subcapítulo 1.6](#), lo cual puede causar la aparición prematura del movimiento de lazo.
- ✓ En la región B (pestaña) se produce un adelgazamiento y un aumento de la altura de la pestaña (o sea, distancia entre su base y su punta). Este desgaste es bastante agresivo por la pequeña magnitud de los radios de curvatura de la pestaña.
- ✓ En la región C (banda de protección) se pierde también material, lo cual provoca la aparición local de una falsa pestaña.

Este desgaste se puede eliminar si se reperfila la rueda en el torno con una profundidad de pasada (profundidad de reperfilado) superior a la profundidad de desgaste máxima:

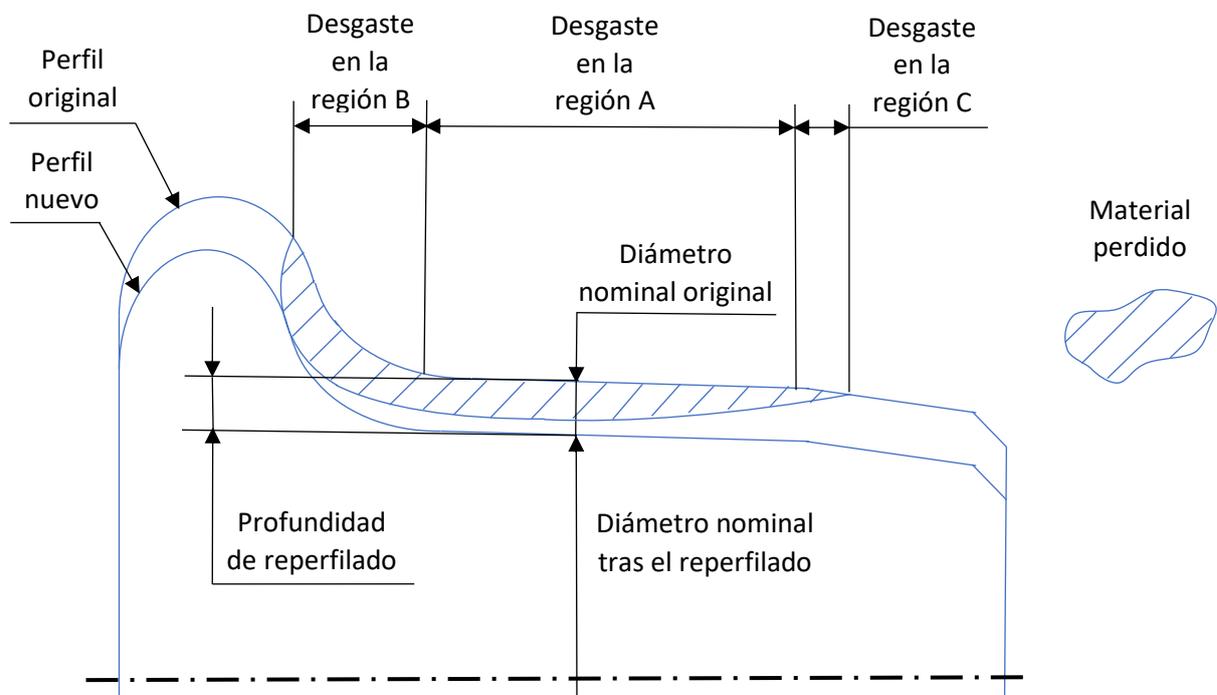


Figura 5.5. Reperfilado de una rueda que ha sufrido pérdida de material por desgaste. Fuente: Elaboración propia.

La periodicidad de este retorneado depende de múltiples factores, pero principalmente de dos factores:

- ✓ Profundidad del desgaste, si bien no hay un valor de profundidad umbral a partir del cual se hace necesario el reperfilado [17, p. 112].
- ✓ Presencia de otros daños en la rueda, que pueden ser muy variados: anomalías de servicio, fisuras (grietas) o alteraciones geométricas no ocasionadas por el desgaste [17, p. 99].

De entre todos estos daños, los más importantes son las grietas, que pueden ser superficiales o subsuperficiales (entre 3 y 10 mm bajo la superficie de rodadura), aunque también internas (iniciadas en las inclusiones de otros materiales en el acero de la rueda). Estas grietas suelen ser originadas por fatiga y se eliminan mediante el reperfilado siempre y cuando no sean críticas (las subsuperficiales o internas pueden llegar a ser críticas, lo cual obligaría a descartar la rueda) y sean insoslayables (las superficiales se pueden soslayar y dejar hasta la próxima inspección si no tienen un tamaño o profundidad destacable) [17, pp. 93 – 96]. Más adelante se abordará la posibilidad de aparición de la fatiga en la rueda.

En la imagen inferior se puede observar la vida útil de una rueda de metropolitano de 590 mm de diámetro original y 530 mm de diámetro final. La vida útil de esta rueda es de 120.000 km (llegaría a los 300.000 km si no tuviese que transmitir esfuerzos tractores) y se le han practicado 5 reperfilados, 1 cada 24.000 km rodados con el objeto de evitar que el desgaste y otros daños comprometiesen el sistema ferroviario [18]. La profundidad de cada reperfilado es muy variable, pues depende de los daños observados en cada inspección, pero la profundidad media es sencilla de calcular (ambas referidas a la pérdida de radio de la rueda, motivo por el cual se divide entre 2 en el cálculo inferior):

$$\text{Profundidad media} = \frac{590 - 530}{2 \cdot 5} = 6 \text{ mm}$$

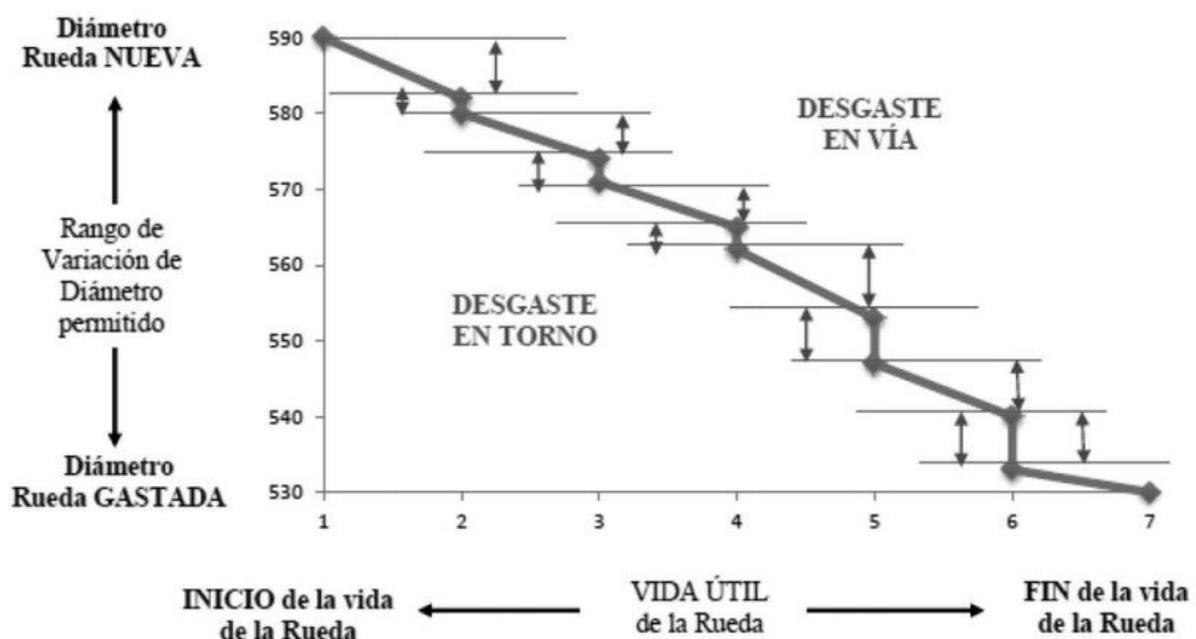


Figura 5.6. Reperfilados de una rueda de metropolitano a lo largo de su vida útil. Fuente: [18].

Por último, como datos adicionales para tener en cuenta, cabe decir que la periodicidad del retorneado es bastante baja en las ruedas de los trenes mercantes, pues habitualmente se permite que la pestaña adelgace bastante y gane bastante altura (unos 4 mm) [19, p. 39]. De esto se puede inferir que el retorneado se efectúa cuando la profundidad de desgaste ha alcanzado unos 4 mm.

5.5. Combinación del desgaste con los daños por fatiga.

5.5.1. Introducción y alcance del análisis de fatiga.

Hasta hace un par de décadas, el desgaste por abrasión – adhesión era el mecanismo de daño predominante en aplicaciones ferroviarias. Posteriormente, con el incremento de las cargas por eje, la fatiga de contacto rodante (RCF, por sus siglas en inglés) se ha convertido en un problema grave que puede comprometer la totalidad del sistema ferroviario.

En respuesta al problema planteado se han llevado a cabo muchos estudios para comprender este fenómeno. Para una predicción precisa de los daños producidos por la RCF es preciso partir de una estimación precisa de la distribución tensional dentro del área de contacto, así como de su forma exacta (que normalmente difiere ligeramente de la elipse de Hertz) [5, p. 57].

Dado que los daños provocados por la RCF suelen ser grietas superficiales o subsuperficiales que se pueden eliminar mediante el rectificado de la rueda siempre que no sean críticas o estén cerca de serlo y como en el supuesto de ser críticas se descartaría la rueda, no afectan a la vida útil en la misma medida que el desgaste abrasivo – adhesivo. Subsecuentemente, no se va a realizar un análisis completo de la RCF, sino que solamente se va a estimar su aparición según las condiciones de operación de cada momento. Esto contribuirá a estimar mejor la periodicidad de los reperfilados, que habrá de reducirse tras la observación de grietas insoslayables.

Nota: La RCF también pueden generar grietas internas si el material de la rueda presenta inclusiones de otros materiales, puesto que las inclusiones son los puntos de nucleación de estas grietas. La aparición de estas grietas se puede ignorar, dado que la presencia de inclusiones en las ruedas tiende a ser cada vez menor gracias a los nuevos procesos de fabricación [7, p. 75].

5.5.2. Modelo del índice de fatiga.

Para predecir la ocurrencia de la RCF es posible hacer uso de la teoría de *shakedown* (ciclos cerrados de histéresis elastoplástica debidos a la aplicación cíclica de la carga de la rueda sobre una determinada área de contacto, lo cual sucede cada 360 ° en estado estacionario). Esta teoría impone un límite de *shakedown* que depende de la máxima presión de contacto p_{z_0} [Pa] y de la tensión de cizalla a partir de la cual fluye el material $\tau_{lím}$ [Pa]. Este límite se denota $L_{RCF}[\phi]$ y es el expuesto a continuación:

$$L_{RCF} = \frac{\tau_{lím}}{p_{z_0}} \quad [Ec. 5.21]$$

Por otro lado, la fricción utilizada en el contacto rueda – carril se define como la ratio entre la fuerza tangencial (en módulo) y la fuerza normal. Simbolízase μ_u y matemáticamente se expresa tal que así:

$$\mu_u = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{N} \quad [Ec. 5.22]$$

Ekberg *et alii* definieron un índice de fatiga para considerar si se iniciarán grietas en la superficie de la rueda o no ($FI_{surf} [\phi]$), que se calcula mediante la comparación de μ_u con L_{RCF} . Así pues:

$$FI_{surf} = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{N} - \frac{\tau_{lím}}{p_{z_0}} \quad [Ec. 5.23]$$

En función del valor de FI_{surf} pueden darse tres situaciones:

- ✓ $FI_{surf} < 0 \rightarrow$ La RCF no es lo suficientemente fuerte para iniciar grietas en la superficie, ya que la fuerza tangencial es moderada (fricción utilizada moderada).
- ✓ $FI_{surf} = 0 \rightarrow$ Situación límite. No se inician grietas porque no se ha superado todavía el valor de $\tau_{lím}$ en el material.
- ✓ $FI_{surf} > 0 \rightarrow$ La RCF inicia grietas en la superficie, ya que la fuerza tangencial es elevada (fricción utilizada elevada).

Tomando la situación $FI_{surf} = 0$ es posible calcular la fuerza tangencial máxima admisible por el material sin que aparezcan grietas en la superficie. Para ello hay que introducir la expresión de p_{z_0} (véase el [subapartado 4.4.4](#)) en la ecuación 5.17 e igualarla a 0:

$$0 = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{N} - \frac{\tau_{lím}}{\frac{3}{2} \frac{N}{\pi ab}}$$

$$\frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{N} = \frac{F_{máx,RCF}}{N} = \frac{2}{3} \frac{\tau_{lím} \pi ab}{N}$$

$$F_{máx,RCF} = \frac{2}{3} \tau_{lím} \pi ab \quad [Ec. 5.24]$$

Esta fuerza puede compararse directamente con el módulo de la fuerza tangencial (sin ser necesario pasar por el cálculo de FI_{surf}) y, en función del resultado de la comparación, determinar la aparición de grietas ($F_{máx,RCF} > \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$) o su no aparición (inecuación con el signo invertido o ecuación) [5, p. 60].

6. Desarrollos teóricos adicionales.

6.1. Introducción.

En este capítulo se recogen los desarrollos teóricos adicionales necesarios para la resolución del problema de desgaste.

Para ello, se comienza por desarrollar unos procedimientos para el ajuste polinómico de los coeficientes de Hertz y de Kalker. Los ajustes se llevan a cabo con la ayuda del *software Engineering Equation Solver* (EES), cuyas características se describen ampliamente en la [subsección 7.2](#), ya que es el mismo que se va a emplear para la resolución del problema de desgaste.

Posteriormente, se estudia el contacto pestaña – carril, el cual presenta particularidades frente al contacto banda de rodadura – carril, puesto que en aquel interviene bastante más la cinemática del bogie al trazar una curva y los parámetros de dicho bogie. Aparte, es importante discriminar cuándo se produce un tipo de contacto u otro en función de los parámetros del trazado, principalmente.

Para finalizar, se desarrollan todas las relaciones entre parámetros del trazado útiles para la resolución del problema de desgaste.

Dada la complejidad y extensión de estas tareas, estas se desarrollan en los anexos en vez de en este capítulo, por lo que en este capítulo solamente se va a remitir a las mismas.

6.2. Ajustes polinómicos de coeficientes.

En el [anexo II](#) se ajustan los coeficientes de Hertz y de Kalker mediante polinomios. Abajo se describen estos ajustes, que se realizan en el programa EES.

En primer lugar, se ajustan los coeficientes de Hertz: m_H , n_H y r_H , los cuales se encuentran tabulados en función del ángulo θ y se pretende encontrar polinomios que correlacionen dichos coeficientes con θ mediante todos los procedimientos desarrollados en la [sección II.1](#). Se empieza por el m_H , el cual se intenta ajustar por medio del programa *Microsoft Excel*, mas resulta infructuoso y se debe recurrir a un ajuste polinómico con la ayuda del programa EES (véase el desarrollo completo en la [subsección II.1.1](#)). Tras este primer ajuste, se ajusta el coeficiente n_H , lo cual resulta muy sencillo porque la gráfica $n_H - \theta$ es simétrica a la gráfica $m_H - \theta$ (en la [II.1.2](#)) y, por otro lado, el coeficiente r_H , donde se utiliza una gran cantidad de puntos para que el ajuste sea lo suficientemente preciso, sobre todo en torno a $\theta = 90^\circ$ (en la [II.1.3](#)).

Una vez ajustados los coeficientes de Hertz, se procede a ajustar los de Kalker: C_{11} , C_{22} , C_{23} , C_{32} y C_{33} . Estos coeficientes se encuentran tabulados en función de la ratio a/b y de los valores de ν . Esta doble dependencia complica el proceso, que se divide en tres partes, exactamente como se muestra repetidamente en la [sección II.2](#): en una primera parte se obtiene la función $C_{ij} - \nu$ (siendo $i, j = 1,1; 2,2; 2,3; 3,2; 3,3$) para cada valor de a/b ; en una segunda se asigna el valor 0,285 a ν , obteniendo así un único valor de C_{ij} para cada valor de a/b ; y en una tercera se halla la función $C_{ij} -$

(a/b), la búsqueda desde el inicio. Los cálculos se presentan así: los del coeficiente C_{11} en la [subsección II.2.1](#), los del C_{22} en la [II.2.2](#), los del C_{23} en la [II.2.3](#), los del C_{32} en la [II.2.4](#) y los del C_{33} en la [II.2.5](#).

Todos los ajustes realizados se integran posteriormente en el programa de cálculo de desgaste (porque con ese cometido se han realizado) y se ponen a prueba, proceso que se resume en la [sección II.3](#). En la [subsección II.3.1](#) se revisan los de Hertz y en la [II.3.2](#) los de Kalker, realizándose los reajustes necesarios para corregir las vulnerabilidades encontradas.

6.3. Contacto pestaña – carril.

En el [anexo III](#) se realizan múltiples estudios sobre las ruedas y los carriles, siendo uno de los más importantes (si no el más importante) el posicionamiento relativo entre los perfiles de las ruedas y los de los carriles, el cual se efectúa a lo largo de la [sección III.5](#).

En la [subsección III.5.1](#) se estudia el posicionamiento relativo en una alineación recta del trazado y se verifica que, en ausencia de movimiento de lazo, no se produce el contacto de la pestaña con el carril. En cambio, cuando en la [III.5.2](#) se estudia el posicionamiento en una alineación curva, se descubre que existe un radio de curvatura del trazado umbral por debajo del cual se producirá el contacto de la pestaña de la rueda con el carril.

Este descubrimiento obliga al estudio teórico del contacto pestaña – carril en la [III.5.3](#), puesto que este contacto presenta ciertas particularidades frente al contacto banda de rodadura – carril. El análisis teórico se realiza mediante el método del centro de fricción, el cual conjuga la cinemática y la dinámica del bogie al trazar una curva. Este método presenta ciertas limitaciones, las cuales se señalan y se intentan salvar mediante varias propuestas en la [III.5.4](#). Esto no es suficiente, pues también es preciso estudiar qué fuerzas actúan sobre la pestaña para poder computar la reacción que el carril ejerce sobre ella, lo cual se realiza en la [III.5.5](#), donde (colateralmente) se habla sobre la condición de descarrilamiento.

6.4. Relaciones entre parámetros del trazado.

En el [anexo V](#) se efectúa el diseño de un trazado ferroviario basándose en datos reales. Esto es importante, dado que sus datos paramétricos se emplearán para el ensayo de ruedas de diferentes diámetros. Estos datos se presentan en el [apartado V.4](#), distribuidos en 19 tablas, una para cada uno de los 19 tramos en que se divide.

En el [apartado V.5](#) se efectúa la simplificación y unificación de estas tablas. Con el fin de no prolongar en demasía la tabla unificada que se pretende obtener, no se tabulan todos los parámetros y se decide expresar algunos en función de los tabulados gracias a ciertas relaciones matemáticas que se desarrollan en el [subapartado V.5.2](#).

7. Planteamiento computacional del problema.

7.1. Introducción.

En este capítulo se realiza el planteamiento computacional del problema de desgaste, para lo cual se requiere definir y resolver una serie de cuestiones que abarcan desde la elección del *software* de cálculo hasta el establecimiento de la última ecuación. Todo ello permitirá construir un programa que permita el cálculo del desgaste sufrido por las ruedas de un bogie en diferentes situaciones.

Este programa computacional se basará en correlaciones entre diferentes conjuntos paramétricos. Las correlaciones más importantes son:

1. Partiendo de los parámetros de la vía (R, J, ξ , etc.), los parámetros del bogie (e, ψ, y , etc.), los de las ruedas ($\gamma_0; r_1, r_2, \dots, r_{Z_w}$; etc.) y otros muchos parámetros se obtienen los pseudodeslizamientos de todas las ruedas de un bogie ($v_{x,i}, v_{y,i}, \varphi_i$, para $i = 1, \dots, Z_w$).
2. Una vez se tienen los pseudodeslizamientos se obtienen las fuerzas y momentos de fricción que se oponen a ellos ($F_{x,i}, F_{y,i}, M_{z,i}$, para $i = 1, \dots, Z_w$).
3. El producto de los pseudodeslizamientos por las fuerzas es la energía disipada, la cual se correlaciona con el desgaste mediante leyes experimentales.

Estas correlaciones se ilustran abajo, en las ruedas de un bogie de 4 ruedas que se encuentra trazando una curva:

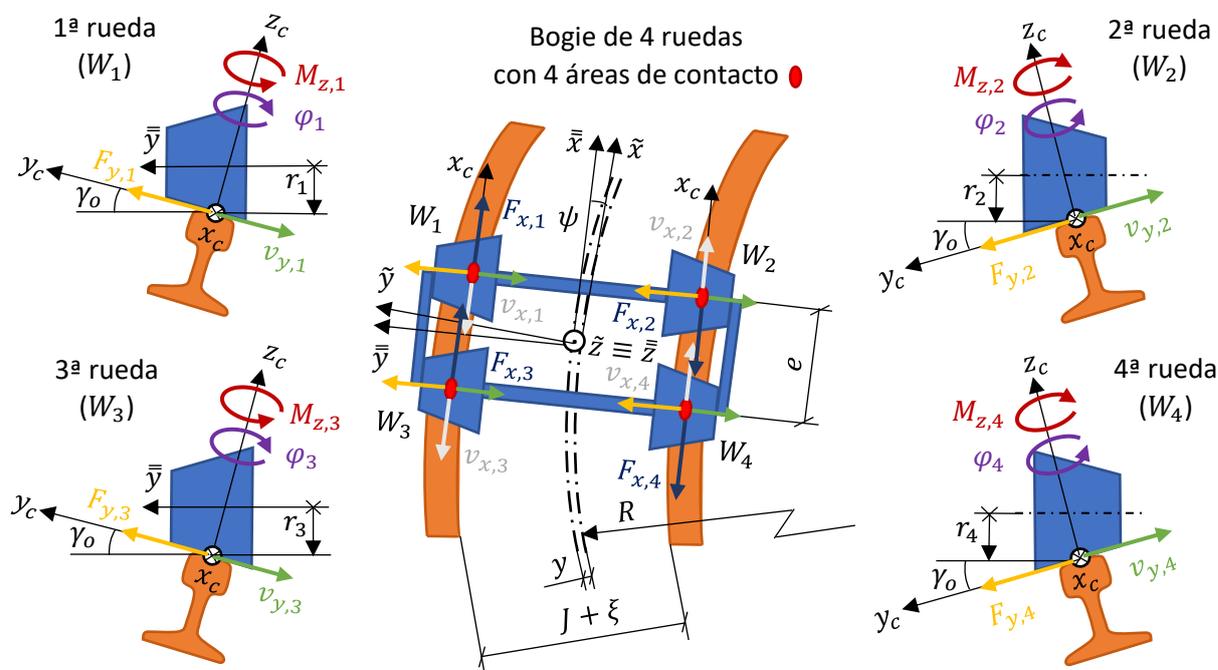


Figura 7.1. Representación gráfica de algunas de las correlaciones que posibilitan el cálculo del desgaste. Fuente: Elaboración propia.

En los siguientes subcapítulos se van a definir y resolver todo cuanto es necesario para implementar estas correlaciones en un programa y obtener el desgaste de las ruedas.

Para ello, se comienza describiendo el *software* utilizado. Seguidamente se enumeran las hipótesis de cálculo aplicadas al problema y, a continuación, se presenta el diagrama de flujo que recopila los diferentes flujos de cálculo necesarios para la resolución del problema. Tras el diagrama, se presenta una tabla de variables que muestra la información definitoria de todas y cada de las variables. Por último, se recogen en un prontuario la totalidad de las ecuaciones implicadas en la resolución del problema.

7.2. *Software* utilizado.

El *software* utilizado es el programa *Engineering Equation Solver* (EES) en su versión *Professional V9.457-3D*. Este programa es un solucionador de ecuaciones algebraicas, cuya resolución ejecuta mediante sucesivas iteraciones hasta alcanzar unos residuos sitios por debajo de una tolerancia prefijada.

Trátase de un programa desarrollado en 1992 por el profesor emérito Sanford A. Klein de la Universidad de Wisconsin – Madison. El programa incorpora una elevada cantidad de funciones matemáticas y termofísicas, motivo por el cual es ampliamente utilizado en el campo de la termodinámica.

Además de resolver ecuaciones algebraicas, el programa también es capaz de resolver ecuaciones diferenciales de valor inicial, así como otras muchas funciones, entre las que se incluyen: tabulación y graficación de resultados, estudios paramétricos e integración definida de funciones algebraicas. El lenguaje de programación que da soporte al programa es el lenguaje F-Chart y permite la programación de funciones y procedimientos [20, pp. 1 – 3].

7.3. Hipótesis de cálculo.

Las hipótesis de cálculo que se van a presentar son las propias del procedimiento seleccionado para calcular el desgaste en función de unos parámetros de entrada y de cómo se implementa este procedimiento en el EES. Muchas de estas hipótesis ya se han mencionado en los capítulos teóricos, pero se van a compilar todas ellas a continuación.

No se van a repetir las hipótesis teóricas, las cuales ya fueron abordadas extensamente en los capítulos teóricos y se enlazan a continuación mediante hipervínculos: [contacto no conforme](#), [cuasi-identidad material](#), [hipótesis de la teoría de Hertz](#), [bases de la teoría lineal de Kalker](#) y [del método de Polach](#), [hipótesis acerca del desgaste](#), [movimiento lazo](#), [fundamentos del método del centro de fricción](#) y [desplazamiento del área de contacto a lo largo de la pestaña \(cuasi – descarrilamiento\)](#).

Las hipótesis de cálculo son las que siguen:

1. El procedimiento se basa en cálculos globales para el área de contacto, sin discretizarla en elementos finitos.
2. El procedimiento es estacionario, es decir, no considera la variación de las variables con el tiempo. En las curvas de transición, donde las variaciones son notables, se calculan valores medios.
3. El procedimiento desprecia el desgaste del carril y tampoco tiene en cuenta el desgaste previo de la rueda (no actualiza los parámetros de contacto con el desgaste de su perfil).
4. El procedimiento se aplica sobre todas las ruedas de un bogie, para la cual guarda separadamente los parámetros de cada una en todo momento. Así, el procedimiento tiene en cuenta que las ruedas del primer juego del bogie son las que más desgaste sufren al contar con un mayor valor de descentramiento y de ángulo de ataque [6, p. 140].
5. El procedimiento separa el desgaste de las ruedas derechas de las izquierdas, ya que los pseudodeslizamientos no son los mismos (debido a los diferentes signos) y considera cuándo cada rueda es externa o interna a una curva.
6. El procedimiento se aplica sobre el bogie delantero o trasero de un vagón (que es un tipo de vehículo ferroviario), lo cual es posible siempre que ambos sean independientes (esto se cumple porque sus pivotes son independientes).
7. El procedimiento desprecia las fuerzas de tracción y compresión que unos vagones ejercen sobre otros a través de los enganches al trazar curvas, lo cual obedece a las holguras de dichos enganches. Véase la referencia de los anexos [5.A, p. 21 – 23] para más información.
8. El procedimiento puede considerar hasta 2 áreas de contacto en la misma rueda: una en la banda de rodadura y la otra en la pestaña. Mediante un parámetro se regulará qué porcentaje de la carga recae sobre cada área de contacto, pudiéndose anular el área de contacto de banda a voluntad. Para más información, véase la [parte III.5.5.4](#).
9. Se admite el método del centro de fricción para el cómputo de las fuerzas intervinientes en el contacto pestaña – carril. Al área de contacto generada se le aplican las mismas hipótesis que las que se aplican al área de contacto de la banda de rodadura.
10. Se admite la solución de Hertz para el problema geométrico y normal de contacto como válida, lo cual implica una distribución de presiones elipsoidal y un área de contacto elíptica.
11. Se admite el método de Polach como el más preciso para la resolución del problema tangencial de contacto. Este método se puede ejecutar con un coeficiente de rozamiento constante o uno variable.
12. Se admite el modelo de transferencia de energía con las leyes de la BRR y la USFD (cuyos resultados serán comparados) como el más preciso para el cómputo del desgaste por abrasión y adhesión.

13. Solamente se predice la aparición de la fatiga por contacto rodante, sin caracterizar los daños producidos.
14. Se admite el modelo del índice de fatiga como el más rápido para esta predicción.
15. El modelo de transferencia de energía empleado incluye el momento de giro o espín para mayor precisión, el cual se va a obtener mediante la teoría lineal de Kalker a pesar de sus errores para valores elevados de giro elevados, puesto que se presupone que el efecto global es el de incremento de precisión.
16. En las ecuaciones del método de Polach y las de Kalker se va a suponer que el giro es positivo cuando es horario, ya que debe coincidir con el criterio de signos aplicado en los pseudodeslizamientos. Ello obliga a cambiar el signo a ciertas ecuaciones, ya que tanto Polach como su predecesor Kalker aplicaban el criterio de signos opuesto.
17. Se estima que es una buena aproximación obtener los pseudodeslizamientos partiendo de un estudio cinemático del juego de ruedas y no partiendo de los deslizamientos adimensionales (estos incluyen derivadas parciales que se suelen aplicar en cálculos de elementos finitos).
18. En el estudio cinemático se desprecia el efecto de los muelles del bogie y de las barras antilazo.
19. En este estudio también se desprecia la deformación radial δ_o frente al radio de la rueda r_o , siendo esto lo habitual en este tipo de estudios debido a que $\delta_o \ll r_o$.
20. Como también se tiene $\Phi \ll \gamma_o$ (de hecho, $\Phi \ll \psi < \gamma_o$, a juzgar por los valores de la [subsección III.5.6](#), ambos calculados en la situación más desfavorable), el efecto de Φ en γ_o se puede despreciar.
21. En cambio, sí se considera el efecto de $\dot{\Phi}$ en el desgaste producido en las curvas de transición, ya que lo incrementa ligeramente.
22. Se considera que las ruedas de los vagones son arrastradas (montadas) en vez de motrices y que están equipadas con frenos, por lo que no aceleran o traccionan por adherencia, sino por arrastre, y, por tanto, $F_t = 0$. En cambio, la adherencia sí intervendrá en las frenadas.
23. Se considera que el vehículo ferroviario negocia las curvas (de transición o circulares) a velocidad constante, por lo que frena (caso de ser preciso) antes o después de entrar en ellas, por lo que $F_f = 0$ en el interior de una curva. Esto tiene una excepción cuando el vehículo se encuentra bajando por una pendiente, como se explica en la siguiente hipótesis.
24. Se asume que cuando el vehículo está bajando por una pendiente frena ligeramente para mantener la velocidad constante, puesto que las pendientes del trazado diseñado en el [anexo V](#) son pequeñas y en muchas de ellas es suficiente con que la locomotora reduzca el esfuerzo de tracción. Por tanto, en este caso sí se tendrá $F_f \neq 0$ en algunas curvas, pero a diferencia del caso anterior, ahora será necesario para mantener la velocidad constante en ellas y que las ecuaciones sean válidas.

25. Para fijar valores de frenada concretos puede asumirse que en una pendiente menor del 10 ‰ no se actúa sobre los frenos del vehículo, que en una pendiente entre el 10 y el 15 ‰ los frenos frenarán el 5 % de la fuerza aceleradora de cada juego y que a partir del 15 ‰ los frenos frenarán el 10 % de la fuerza aceleradora.
26. Se desprecian parámetros de la superestructura que modifican las condiciones de desgaste de las ruedas, tales como el alabeo, la flexión del carril y los pasos por juntas (frecuentes en puentes carentes de aparatos de dilatación de vía, aunque también pueden ser juntas para aislantes eléctricos). Véase la referencia de los anexos [2.A] más información.
27. Asimismo, no se consideran los impactos contra los corazones de los desvíos ni contra otros aparatos de vía [2.A].
28. Adicionalmente, se desprecia el efecto de las irregularidades de la vía (pérdidas de contacto o impactos) y de la insuficiencia/exceso de peralte en condiciones de bajo coeficiente de fricción estática (léanse las consecuencias en el [subapartado I.5.3](#)) [2.A].
29. No se considera la influencia de tolerancias de fabricación o de montaje de ningún elemento.
30. Al despreciarse la flexión del carril y las tolerancias de fabricación y montaje, es posible asumir que el radio de curvatura longitudinal del carril (R_{y_1}) tiende a infinito y, por ende, la curvatura asociada ($1/R_{y_1}$) tiende a cero y puede tomarse como tal.
31. No se considera el efecto de los frenos en el desgaste de las ruedas. De hecho, este desgaste es nulo si se utilizan discos de freno en lugar de zapatas, con la desventaja de que los discos no limpian la banda de rodadura de contaminantes (véase la referencia de los anexos [51.A]).
32. Se asume que las ruedas del vehículo no descarrilan ni se bloquean (aunque esto se verificará numéricamente). Así se evita el daño catastrófico llamado plano, conllevando a defectos como los desprendimientos o coqueas (también conocidas como *spalling*) [7, p. 96 y p. 97].
33. En la misma línea, se desprecia el desgaste por casi – descarrilamiento y todos los daños distintos del desgaste y de las grietas originadas por la fatiga de contacto rodante. Estos daños son múltiples y se puede apreciar una relación completa de los mismos en [17, p. 99].
34. Se desprecia la variación de las curvaturas de la rueda y del carril en las curvas de transición, puesto que, aunque la ubicación del contacto rueda – carril vaya variando a lo ancho de la rueda y del carril (y la curvatura de estos elementos en consecuencia), estas variaciones suelen ser pequeñas. Cuando las variaciones son grandes, en cambio, se procede a tomar directamente los valores más desfavorables (por ejemplo, las curvaturas del contacto pestaña – carril cuando se predice que en esa curva de transición se producirá este contacto).
35. Se desprecia la curvatura de los acuerdos verticales del trazado y se considera que la rasante varía repentinamente en el vértice de cada acuerdo.
36. En las curvas de transición de tipo parábola cuadrática se toma $R_{L/2} = 4R_{L|0}$ (véase [V.5.1.1](#)).

7.4. Diagrama de flujo.

En esta sección se presenta el diagrama de flujo que aúna y relaciona los diferentes flujos de cálculo necesarios para la resolución del problema, los cuales se representan mediante estos elementos:

- ✓ Rectángulos verdes: Indican la introducción de conjuntos de parámetros al programa.
- ✓ Rectángulos azules: Simbolizan un proceso de cálculo realizado con unas ecuaciones pertenecientes a una misma teoría o método. Por ello, a este tipo de rectángulo se le conoce también como bloque de cálculo. Dentro de cada uno se indica, en forma de hipervínculo, el subapartado en el cual se recogen dichas ecuaciones.
- ✓ Rectángulos azules de esquinas redondeadas: Son bloques de cálculo como los anteriores, pero con la particularidad de que se emplean cuando existen procesos alternativos. Dentro de cada uno se indica, en forma de hipervínculo, la parte en la cual se recogen las ecuaciones de cálculo.
- ✓ Flechas: Señalan el traslado de parámetros o resultados de un bloque a otro. Entre cada conjunto de bloques conectados por flechas se realizan distintas operaciones, por lo que cada flecha representa un flujo de cálculo distinto.
- ✓ Círculos naranjas con la cruz de San Andrés inscrita: Indican la confluencia de hasta 3 flujos para dar lugar a un nuevo flujo (operación *AND* según el álgebra *booleana*).
- ✓ Círculos naranjas con la cruz griega inscrita: Indican una alternativa que se le presenta a un flujo (operación *OR* en el álgebra *booleana*).
- ✓ Círculos amarillos: Simbolizan la bifurcación de un flujo en dos flujos idénticos.
- ✓ Círculos grises: Simbolizan la unión de un flujo portante de información con un flujo carente de información (porque se ha optado por una alternativa de entre dos alternativas).

Este diagrama no debe interpretarse como el algoritmo interno del EES, en tanto en cuanto este resuelve las ecuaciones según los bloques de ecuaciones (en donde se incluyen las asignaciones de los parámetros a los símbolos, las cuales son interpretadas como ecuaciones por el EES) que él considera, que pueden coincidir o no con los bloques de este diagrama.

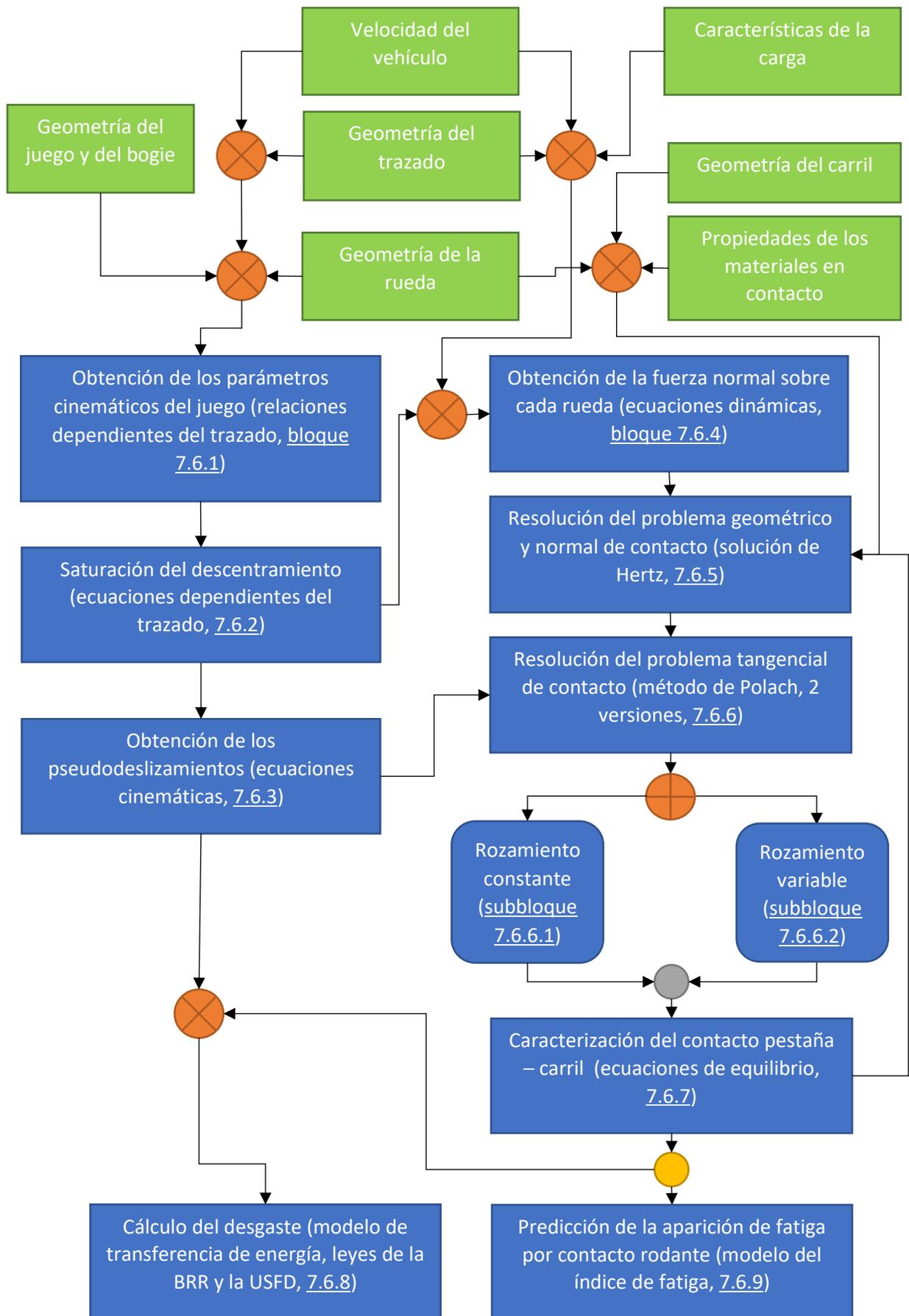


Figura 7.2. Diagrama de flujo con los flujos de cálculo conducentes a la solución del problema.

7.5. Tabla de variables.

A continuación, van a establecerse las variables empleadas en la resolución del problema. Para ello, se va a establecer un símbolo para cada, a redactar la definición de cada una y, finalmente, a mostrar la unidad en la que se expresa su magnitud en el Sistema Internacional de Unidades (SI).

Estas variables se muestran en orden alfabético y separadas en dos tablas en función de si el símbolo de la variable procede del alfabeto latino o del griego.

7.5.1. Variables de símbolo latino.

Tabla 7.1. Variables de símbolo latino.

Símbolo	Definición	Unidad (SI)
a	Semieje longitudinal de la elipse de Hertz	m
a_{lat}	Aceleración lateral experimentada por el vehículo	$m \cdot s^{-2}$
A	Curvatura longitudinal relativa	m^{-1}
A_c	Área de la elipse de Hertz	m^2
A_f	Ratio entre el coeficiente de fricción mínimo (velocidad de deslizamiento infinita) y el máximo (deslizamiento nulo)	\emptyset
b	Semieje transversal de la elipse de Hertz	m
$b_i b_e$	Distancia entre el centro de la vía y el radio de rodadura de la rueda (interna externa) a la curva	m
b_o	Distancia entre el centro de la vía y el radio de rodadura	m
B	Curvatura lateral relativa	m^{-1}
B_f	Constante exponencial de la ley de fricción	$s \cdot m^{-1}$
c	Tamaño efectivo del área de contacto	m
C	Rigidez tangencial del contacto	$N \cdot m^{-3}$

C_S	Rigidez tangencial del contacto en el caso de espín puro	$N \cdot m^{-3}$
$C_{11} C_{22} C_{33}$	Coeficiente de Kalker longitudinal transversal vertical	\emptyset
$C'_{11} C'_{22}$	Coeficiente de Kalker (longitudinal transversal) corregido según las componentes del deslizamiento adimensional	\emptyset
$C_{23} C_{32}$	Coeficientes de Kalker en el plano $y_c z_c$	\emptyset
d_1	Coeficiente de primer orden de la parábola cuadrática	m^{-2}
d_2	Coeficiente cuadrático de la parábola cuadrática	m^{-3}
D	Diámetro nominal de la rueda	m
e	Empate total de un bogie (medido entre su primer y su último juego)	m
e'	Empate parcial de un bogie (medido entre dos juegos cualesquiera)	m
E	Módulo elástico equivalente de los materiales en contacto	Pa
$E_1 E_2$	Módulo elástico del carril de la rueda	Pa
β_i	Flecha del carril interno a la curva	m
F	Módulo del vector de fuerza tangencial	N
F_f	Fuerza de frenado	N
F_t	Fuerza de tracción	N
$F_x F_y$	Fuerza tangencial longitudinal transversal	N
$F'_x F'_y$	Fuerza tangencial longitudinal transversal trasladada al sistema de referencia $\bar{u} \bar{v} \bar{w}$	N
$F_{y,C}$	Fuerza tangencial transversal (fuerza lateral) corregida con la contribución del espín	N
$F_{y,S}$	Incremento de la fuerza lateral debido al espín	N

$F_{m\acute{a}x,RCF}$	Fuerza tangencial máxima antes de que se produzca fatiga por contacto rodante (RCF)	N
FI_{surf}	índice de fatiga	\emptyset
g	Aceleración de la gravedad	$m \cdot s^{-2}$
G	Módulo de cizalla equivalente de los materiales en contacto	Pa
$G_1 G_2$	Módulo de cizalla del carril de la rueda	Pa
h_r	Peralte real del trazado	m
H_{BRR}	Profundidad de desgaste total en la rueda según la ley de la BRR	m
H_{CdG}	Altura del centro de gravedad de λ_{eje} sobre el plano de rodadura	m
H_{tara}	Altura del centro de gravedad de λ_{tara} sobre el plano de rodadura	m
H_u	Altura del centro de gravedad de λ_u sobre el plano de rodadura	m
H_{USFD}	Profundidad de desgaste total en la rueda según la ley de la USFD	m
i	Rampa o pendiente del trazado expresada en milésimas	‰
I_{\parallel}	Momento de inercia del juego de ruedas respecto de su eje de revolución	$kg \cdot m^2$
J	Ancho de vía	m
k	Semiconicidad de la rueda o inclinación	\emptyset
$k_A k_S$	Coficiente de reducción de la pendiente inicial de la curva de tracción en la zona de adhesión de deslizamiento	\emptyset
K_M	Coficiente auxiliar para el cómputo de $F_{y,S}$	N
L	Longitud de alineación curva (medida en el eje de la vía) o alineación recta del trazado	m
$L_e L_i$	Longitud del carril (externo interno) a la curva	m

L_{rr}	Longitud realmente rodada por la rueda	m
m_H	Coefficiente de Hertz longitudinal	\emptyset
M_z	Momento de giro o de espín	N · m
n_{dec}	Grado de la función deceleración – tiempo	\emptyset
n_{ejes}	Número de ejes del vehículo	\emptyset
n'_{ejes}	Número de ejes del bogie	\emptyset
n_H	Coefficiente de Hertz transversal	\emptyset
N	Fuerza de reacción del carril sobre la rueda en la dirección normal de contacto (fuerza normal)	N
$N_{br} N_p$	Reacción del carril sobre la rueda en la dirección normal al área de contacto de la (banda de rodadura pestaña) en una rueda que experimenta el contacto pestaña – carril	N
$N_e N_i$	Fuerza normal actuante sobre la rueda (externa interna) a la curva	N
$N_r N_t$	Componente de la fuerza normal en la dirección radial tangencial (la tangencial es perpendicular a la radial)	N
$N_{\perp} N_{\parallel}$	Componente de la fuerza normal actuante sobre la rueda (perpendicular tangencial) al área de contacto	N
o	Desfase existente entre el ancho de vía menos el juego de vía y la distancia desde el centro del radio nominal de la rueda derecha hasta su análogo en la rueda izquierda	m
o_p	Distancia horizontal entre el centro del área de contacto de la pestaña y el centro de la rueda	m
p_{z_o}	Máxima presión normal de contacto	Pa
$Q_i Q_f$	Punto métrico inicial final	m
r	Radio de rodadura genérico	m
$r_e r_i$	Radio de rodadura teórico de la rueda (externa interna) a la curva	m

$r_e^* r_i^*$	Radio de rodadura de la rueda (externa interna) a la curva que tiene en cuenta el desplazamiento inducido por el ángulo de lazo	m
r_o	Radio de rodadura nominal	m
r_p	Radio de la rueda medido hasta el área de contacto de la pestaña	m
r_{rr}	Radio de rodadura real	m
r_H	Coefficiente de Hertz vertical	∅
R	Radio de curvatura del trazado medido en el eje de la vía	m
R_o	Radio de curvatura en el punto de tangencia del eje al pasar de una curva circular a una transición	m
R_L	Ídem, aunque en este caso se pasa de una curva de transición a una circular	m
$R_{L/2}$	Radio de curvatura a la mitad de la longitud de una curva de transición de tipo parábola cuadrática	m
R_{x_1}	Radio transversal del carril	m
R_{x_2}	Radio transversal de la rueda	m
R_{y_1}	Radio longitudinal del carril	m
R_{y_2}	Radio longitudinal de la rueda	m
s	Módulo del vector de deslizamiento adimensional	∅
$s_x s_y$	Deslizamiento adimensional longitudinal transversal	∅
s_C	Módulo del vector de deslizamiento adimensional corregido con la contribución del giro	∅
$s_{y,C}$	Deslizamiento adimensional transversal corregido con la contribución del giro	∅
$T\gamma$	Índice de desgaste empleado en la ley de la BRR	N
$T\gamma/A_c$	Índice de desgaste empleado en la ley de la USFD	$N \cdot m^{-2}$

u_f	Coordenada en el eje \bar{u} del área de contacto de una rueda, en el sistema de referencia $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$	m
u_{fl}	Coordenada en el eje \bar{u} del exterior de una pestaña, en el sistema $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$	m
v_f	Coordenada en el eje \bar{v} del área de contacto de una rueda, en el sistema $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$	m
v_{fl}	Coordenada en el eje \bar{v} del exterior de una pestaña, en el sistema $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$	m
$v_x v_y$	Pseudodeslizamiento longitudinal transversal	\emptyset
V	Velocidad del vehículo	$m \cdot s^{-1}$
$V_f V_i$	Velocidad (final inicial) del vehículo	$m \cdot s^{-1}$
$w_x w_y$	Velocidad de deslizamiento longitudinal transversal	$m \cdot s^{-1}$
w_w	Anchura de la rueda	m
$W_{R,BRR}$	Tasa de desgaste de la ley de la BRR	$m^2 \cdot m^{-1}$
$W_{R,USFD}$	Tasa de desgaste de la ley de la USFD	$kg \cdot m^{-1} \cdot m^{-2}$
y	Descentramiento de un juego	m
y^*	Descentramiento total de un juego	m
y_{lim}	Holgura de la que dispone el primer juego del bogie cuando se desplaza hacia el exterior de la curva	m
$y_{lim,diag}$	Holgura de la que dispone el último juego del bogie cuando se desplaza hacia el interior de la curva partiendo de una posición centrada en la vía	m
\dot{y}	Velocidad de descentramiento de un juego	$m \cdot s^{-1}$
\dot{y}^*	Velocidad de descentramiento total de un juego	$m \cdot s^{-1}$
Z_w	Número de ruedas del bogie	\emptyset

7.5.2. Variables de símbolo griego.

Tabla 7.2. Variables de símbolo griego.

Símbolo	Definición	Unidad (SI)
α_{fn}	Fracción de la fuerza normal a la rueda que recae sobre el área de contacto de la pestaña	\emptyset
β_{rp}	Ángulo de rampa o pendiente	rad
γ_o	Ángulo de contacto de la rueda	rad
δ_o	Identación máxima entre los dos cuerpos en contacto	m
δ_p	Coefficiente auxiliar para la obtención del coeficiente K_M	\emptyset
ε	Gradiente de tensión tangencial en la zona de adhesión	\emptyset
ε_S	Gradiente de tensión tangencial en la zona de adhesión en el caso de espín puro	\emptyset
$\zeta_h \zeta_v$	Carga (horizontal vertical) sobre el área de contacto de la pestaña	N
η	Juego de vía	m
θ	Ángulo de Hertz	rad
ϑ_r	Ángulo de peralte real	rad
κ_p	Fracción de la fuerza aceleradora que frenan los frenos cuando el vehículo está bajando por una pendiente	\emptyset
λ_{eje}	Carga por eje	kg
λ_{tara}	Tara del vehículo	kg
λ_u	Carga útil remolcada por el vehículo	kg
μ	Coefficiente de rozamiento dinámico (o de adherencia)	\emptyset
μ_o	Coefficiente de rozamiento inicial o máximo (velocidad de deslizamiento nula)	\emptyset

ν	Módulo de Poisson equivalente de los materiales en contacto	\emptyset
$\nu_1 \nu_2$	Módulo de Poisson del carril de la rueda	\emptyset
ξ	Sobreancho (de la vía)	m
ρ	Densidad del material de la rueda	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
ς	Ángulo de desplazamiento longitudinal del área de contacto	rad
$\tau_{m\acute{a}x}$	Tensión tangencial máxima transmitida	Pa
$\tau_{l\acute{i}m}$	Tensión tangencial de fluencia del material de la rueda	Pa
Φ	Ángulo de balanceo	rad
$\dot{\Phi}$	Velocidad de variación del ángulo de balanceo (o velocidad de balanceo)	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
φ	Giro o espín (<i>spin</i>) (pseudodeslizamiento rotacional)	$\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$
ψ	Ángulo de lazo	rad
ψ_1	Ángulo de lazo que induce un descentramiento compensatorio de $y_{l\acute{i}m}$ en el último juego del bogie	rad
ψ_2	Ángulo de lazo que induce un desplazamiento compensatorio de $y_{l\acute{i}m,diag}$ en el último juego bogie	rad
$\dot{\psi}$	Velocidad de variación del ángulo de lazo	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
ω'	Velocidad angular de deslizamiento en frenadas por unidad de longitud	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

7.6. Prontuario de ecuaciones.

En este prontuario se va a presentar la totalidad de las ecuaciones programadas en el EES, agrupadas en virtud de su tema (por ejemplo, las ecuaciones desarrolladas por Hertz se agrupan bajo un título común).

Algunas de estas ecuaciones incluyen valores de tipo cadena o *string*, es decir determinadas palabras que se usan en programación para tener en cuenta la ocurrencia ciertos sucesos (por ejemplo, 'libre' es la cadena utilizada para considerar la ocurrencia del movimiento libre del bogie en una determinada curva).

Aparte, muchas de estas ecuaciones aceptan parámetros de entrada promediados o los devuelven (necesarios para obtener el desgaste en las curvas de transición). Con el objeto de simplificar la notación, el símbolo de valor promediado (el cual es: $\overline{\dots}$) únicamente se va a colocar en los casos en los cuales sea imprescindible para evitar ambigüedades.

En cuanto al origen de las ecuaciones, este es muy variado y se va a indicar para cada ecuación mediante el uso de hipervínculos colocados sobre el número de ecuación. Al clicar en cada uno de ellos se podrá ver la parte, sección o subsección del documento en la cual se ha desarrollado la ecuación referida, lo cual es útil para consultar los criterios de signos que han de aplicarse y averiguar cómo deben aplicarse las ecuaciones en caso de duda.

Cuando una ecuación carece de hipervínculo, esto responde a uno de estos motivos:

- ✓ La ecuación no aparece explícitamente en otra parte del documento, ya que está implícita en uno o varios textos.
- ✓ La ecuación se ha desarrollado *in situ*, por lo que no aparece explícita ni implícitamente en otra parte del documento.
- ✓ La ecuación forma parte de un mismo haz junto con otras ecuaciones (alineadas mediante un mismo corchete) y todas ellas proceden de un mismo sitio. En este caso, el hipervínculo se coloca en la primera del haz.

A continuación, preséntanse las fórmulas clasificadas según su tema y según su carácter principal o secundario: las principales proporcionan los resultados más relevantes de cada tema, mientras que las secundarias sirven para calcular resultados intermedios.

7.6.1. Relación entre los parámetros cinemáticos del juego y los del trazado.

7.6.1.1. Ecuaciones principales.

$$\text{Curva circular} \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{r_o b_o}{kR} \quad [\text{Ec. 7.1}] \\ \bar{y} = y \quad [\text{Ec. 7.2}] \\ \dot{\bar{y}} = 0 \quad [\text{Ec. 7.3}] \\ \psi = \pm \arcsen\left(\frac{e}{R}\right) \quad [\text{Ec. 7.4}] \\ \overline{\text{sen}\psi} = \pm \frac{e}{R} \quad [\text{Ec. 7.5}] \\ \dot{\bar{\psi}} = 0 \quad [\text{Ec. 7.6}] \\ \bar{\psi} = \psi \quad [\text{Ec. 7.7}] \\ \frac{\bar{1}}{R} = \frac{1}{R} \quad [\text{Ec. 7.8}] \end{array} \right.$$

$$\text{Clotoide} \left\{ \begin{array}{l} \bar{y} = \frac{r_o b_o}{2kR_L} \quad [\text{Ec. 7.9}] \\ \dot{\bar{y}} = \pm \frac{r_o b_o}{kR_{L|o}L} V \quad [\text{Ec. 7.10}] \\ \overline{\text{sen}\psi} = \pm \frac{e}{2R_{L|o}} \quad [\text{Ec. 7.11}] \\ \dot{\bar{\psi}} = \pm \frac{V}{L} \arcsen\left(\frac{e}{R_{L|o}}\right) \quad [\text{Ec. 7.12}] \\ \bar{\psi} = \pm \arcsen\left(\frac{e}{R_{L|o}}\right) \pm \frac{R_{L|o}}{e} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{e}{R_{L|o}}\right)^2} - \sqrt{1} \right) \quad [\text{Ec. 7.13}] \\ \frac{\bar{1}}{R} = \frac{1}{2R_{L|o}} \quad [\text{Ec. 7.14}] \end{array} \right.$$

$$\text{Parábola cuadrática} \left\{ \begin{array}{l} \bar{y} = \pm \frac{r_o b_o}{k} (d_1 V + d_2 LV) \quad [\text{Ec. 7.15}] \\ \overline{\text{sen}\psi} = \pm \left[\left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm e \left(d_1 \frac{L}{2} + d_2 \frac{L^2}{3} \right) \right] \quad [\text{Ec. 7.16}] \\ d_1 = \frac{1}{R_{L|o}L} + \frac{4}{L} \left(\frac{1}{R_{L/2}} - \frac{1}{2R_{L|o}} \right) \quad [\text{Ec. 7.17}] \\ d_2 = -\frac{4}{L^2} \left(\frac{1}{R_{L/2}} - \frac{1}{2R_{L|o}} \right) \quad [\text{Ec. 7.18}] \\ \bar{\psi} = \pm \frac{1}{L} \int_0^L \arcsen\left(\left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm e(d_1 x + d_2 x^2) \right) dx \quad [\text{Ec. 7.19}] \\ \frac{\bar{1}}{R} = \left\{ \frac{1}{R_o} \right\} \pm \left(d_1 \frac{L}{2} + d_2 \frac{L^2}{3} \right) \quad [\text{Ec. 7.20}] \\ R_{L/2} = 4R_{L|o} \quad [\text{Ec. 7.21}] \\ \bar{y}, \bar{\psi} \text{ como en la clotoide} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases}
\bar{y} = \pm \frac{r_o b_o}{k} \left(\left\{ \frac{1}{R_o} \right\} \pm \frac{1}{4R_{L|o}} \right) & \text{[Ec. 7.22]} \\
\overline{\text{sen}\psi} = \pm \left[\left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm \frac{e}{4R_{L|o}} \right] & \text{[Ec. 7.23]} \\
\bar{\psi} = \pm \frac{1}{L} \int_0^L \arcsen \left(\left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm \frac{e}{R_{L|o} L^3} x^3 \right) dx & \text{[Ec. 7.24]} \\
\frac{\bar{1}}{R} = \left\{ \frac{1}{R_o} \right\} \pm \frac{1}{4R_{L|o}} & \text{[Ec. 7.25]} \\
\bar{y}, \bar{\psi} \text{ como en la clotoide} &
\end{cases}$$

7.6.1.2. Ecuaciones auxiliares.

$$e = \sum_{i=1}^{i=n'_{ejes}-1} e_i \quad \text{[Ec. 7.26]}$$

$$r_o = \frac{D}{2} \quad \text{[Ec. 7.27]}$$

$$b_o = \frac{J - \eta + o}{2} \quad \text{[Ec. 7.28]}$$

$$L = Q_f - Q_i \quad \text{[Ec. 7.29]}$$

$$\begin{cases}
V = V_i, & V_i = V_f & \text{[Ec. 7.30]} \\
\bar{V} = \frac{V_i + V_f}{2}, & V_i \neq V_f & \text{[Ec. 7.31]}
\end{cases}$$

7.6.2. Saturación del descentramiento.

7.6.2.1. Ecuaciones principales.

$$\text{Bogie de 2 juegos} \rightarrow \begin{cases}
y^*(1^{er} \text{ juego}) = y + e \frac{\pi |\psi|}{360} & \text{[Ec. 7.32]} \\
y^*(2^{o} \text{ juego}) = y - e \frac{\pi |\psi|}{360} & \text{[Ec. 7.33]}
\end{cases}$$

$$\text{Bogie de 3 juegos} \rightarrow \begin{cases}
y^*(1^{er} \text{ juego}) = y + e \frac{\pi |\psi|}{360} & \text{[Ec. 7.34]} \\
y^*(2^{o} \text{ juego}) = y & \text{[Ec. 7.35]} \\
y^*(3^{er} \text{ juego}) = y - e \frac{\pi |\psi|}{360} & \text{[Ec. 7.36]}
\end{cases}$$

$$Bogie\ de\ 4\ juegos \rightarrow \begin{cases} y^*(1^{er}\ juego) = y + e \frac{\pi |\psi|}{360} & [Ec. 7.37] \\ y^*(2^o\ juego) = y + e \frac{\pi |\psi|}{1.080} & [Ec. 7.38] \\ y^*(3^{er}\ juego) = y - e \frac{\pi |\psi|}{1.080} & [Ec. 7.39] \\ y^*(4^o\ juego) = y - e \frac{\pi |\psi|}{360} & [Ec. 7.40] \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} y^*, & y^* < y_{lím} & [Ec. 7.41] \\ y_{lím}, & y^* \geq y_{lím} & [Ec. 7.42] \end{cases}$$

$$Aparición\ del\ contacto\ pestaña - carril\ (p.-c.) = \begin{cases} 'NO', & y^* < y_{lím} & [Ec. 7.43] \\ 'SÍ', & y^* \geq y_{lím} & [Ec. 7.44] \end{cases}$$

$$Tipo\ de\ movimiento\ del\ bogie\ si\ y^* \geq y_{lím} = \begin{cases} 'Libre', & \psi_1 \leq |\psi| & [Ec. 7.45] \\ 'Libre', & \begin{cases} \psi_1 > |\psi| \\ e \frac{\pi |\psi_2|}{360} < y_{lím,diag} \end{cases} & [Ec. 7.46] \\ 'Restricto', & \begin{cases} \psi_1 > |\psi| \\ e \frac{\pi |\psi_2|}{360} \geq y_{lím,diag} \end{cases} & [Ec. 7.47] \end{cases}$$

$$Correcciones\ si\ existe\ contacto\ p.-c. \rightarrow Circular \begin{cases} y_{corr} = y_{lím} & [Ec. 7.48] \\ \psi_{corr} = \pm(\psi_1 + \psi_2) & [Ec. 7.49] \\ y_{corr}^* \text{ se calcula con } y_{corr}, \psi_{corr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{y}_{corr} = \frac{y_{lím}}{2} & [Ec. 7.50] \\ \bar{y}_{corr} = \pm y_{lím} \frac{V}{L} & [Ec. 7.51] \\ \overline{sen\psi}_{corr} = \pm \frac{sen(\psi_1 + \psi_2)}{2} & [Ec. 7.52] \\ \bar{\psi}_{corr} = \pm \frac{V}{L} (\psi_1 + \psi_2) & [Ec. 7.53] \\ \bar{\psi}_{corr} = \pm(\psi_1 + \psi_2) \pm \frac{\left(\sqrt{(1 - sen(\psi_1 + \psi_2))^2 - \sqrt{1}} \right)}{sen(\psi_1 + \psi_2)} & [Ec. 7.54] \\ \bar{y}_{corr}^* \text{ se calcula con } \bar{y}_{corr}, \bar{\psi}_{corr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{y}_{corr} = \pm(d_1V + d_2LV) & [Ec. 7.55] \\ d_1 = \frac{y_{lím}}{L} + \frac{4}{L} \left(\frac{r_o b_o}{kR_{L/2}} - \frac{y_{lím}}{2} \right) & [Ec. 7.56] \\ d_2 = -\frac{4}{L^2} \left(\frac{r_o b_o}{kR_{L/2}} - \frac{y_{lím}}{2} \right) & [Ec. 7.57] \\ \frac{r_o b_o}{kR_{L/2}} \approx y_{lím} \rightarrow y_{lím} \text{ (aprox.)} \\ \bar{y}_{corr} \rightarrow \text{Parab. cuad.} \left\{ \begin{array}{l} \overline{\text{sen}\psi}_{corr} = \pm \left[\{\text{sen}(\ast)\} \pm R_{L|o} \text{sen}(\ast) \left(d_1 \frac{L}{2} + d_2 \frac{L^2}{3} \right) \right] & [Ec. 7.58] \\ \ast \psi_1 + \psi_2 \\ d_1, d_2 \text{ originales (ecs. 7.17 + 7.18) en la ec. 7.55} \\ \bar{y}_{corr}, \bar{\psi}_{corr} \text{ como en la clotoide} \\ \bar{\psi}_{corr} \text{ como en la clotoide (aprox.)} \\ \bar{y}_{corr}^* \text{ se calcula con } \bar{y}_{corr}, \bar{\psi}_{corr} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{y}_{corr} = \pm \left(\left\{ \frac{y_{lím}}{R_o} \right\} \pm \frac{y_{lím}}{4} \right) & [Ec. 7.59] \\ \overline{\text{sen}\psi}_{corr} = \pm \left[\{\text{sen}(\psi_1 + \psi_2)\} \pm \frac{\text{sen}(\psi_1 + \psi_2)}{4} \right] & [Ec. 7.60] \\ \bar{y}_{corr}, \bar{\psi}_{corr} \text{ como en la clotoide} \\ \bar{\psi}_{corr} \text{ como en la clotoide (aprox.)} \\ \bar{y}_{corr}^* \text{ se calcula con } \bar{y}_{corr}, \bar{\psi}_{corr} \end{cases}$$

7.6.2.2. Ecuaciones auxiliares.

$$\xi = \begin{cases} 0 \text{ mm, } 300 \text{ m} < R & [Ec. 7.61] \\ 5 \text{ mm, } 250 < R \leq 300 \text{ m} & [Ec. 7.62] \\ 10 \text{ mm, } 200 < R \leq 250 \text{ m} & [Ec. 7.63] \\ 15 \text{ mm, } 150 < R \leq 200 \text{ m} & [Ec. 7.64] \\ 20 \text{ mm, } 100 < R \leq 150 \text{ m} & [Ec. 7.65] \end{cases}$$

$$\text{En curvas de transición} \rightarrow \bar{\xi} = R_{L|o} \frac{1}{R} \xi \quad [Ec. 7.66]$$

$$y_{lím} = \frac{\eta}{2} + \xi + \frac{0,75}{1.000} \quad [Ec. 7.67]$$

$$\psi_1 = \frac{y_{lím}}{e} \frac{360}{\pi} \quad [Ec. 7.68]$$

$$\psi_2 = |\psi| - \psi_1 \quad [Ec. 7.69]$$

$$y_{lím,diag} = y_{lím} - \xi - f_i \quad [Ec. 7.70]$$

$$\text{Curva circular} \rightarrow f_i = \frac{e^2}{8(R - b_o) \cos^2 \psi} \quad [Ec. 7.71]$$

$$\text{Curva de transición} \rightarrow f_i = \frac{e^2}{8} \frac{1}{R} \frac{R_{L|o}}{(R_{L|o} - b_o) \cos^2 \psi} \quad [Ec. 7.72]$$

7.6.3. Pseudodeslizamientos.

7.6.3.1. Ecuaciones principales.

Nota I: Como $\dot{\psi}$ y $\dot{\Phi}$ se obtienen en [°/s], es necesario introducir el factor de conversión $\pi/180$ para convertir esta unidad en [rad/s].

Nota II: En las ecuaciones siguientes han de introducirse los términos corregidos siempre que se hayan efectuado correcciones en los mismos.

$$v_x = \frac{-\Delta r}{r_o} + \frac{-r_o \omega' \pm b_o \dot{\psi} \frac{\pi}{180}}{V} + v'_x \quad [\text{Ec. 7.73}]$$

$$v_y = \left(-\text{sen} \psi + \frac{\dot{y}}{V} - \frac{r_i \dot{\Phi} \frac{\pi}{180}}{V} \right) \text{cos} \gamma_o \quad [\text{Ec. 7.74}]$$

$$\varphi = \pm \frac{\text{sen} \gamma_o}{r_o} + \frac{\dot{\psi} \frac{\pi}{180} \text{cos} \gamma_o}{V} \quad [\text{Ec. 7.75}]$$

7.6.3.2. Ecuaciones auxiliares.

Nota I: La $\overline{\omega'}$ de la frenada en pendientes es aditiva a la de la frenada estándar y se le ha quitado el signo negativo porque en el programa se distingue entre valores de i negativos (pendientes) y valores de i positivos (rampas).

Nota II: En las ecuaciones 7.84 y 7.85 nunca debe introducirse y_{corr} (o \bar{y}_{corr} , más asiduamente), pues estos radios son los teóricos, por lo que deben llevar el descentramiento original y (sin sumarle el desplazamiento inducido por el ángulo de lazo ψ).

$$\Delta r = \begin{cases} r - r_o & [\text{Ec. 7.76}] \\ r - r_o & [\text{Ec. 7.77}] \end{cases}$$

$$r \rightarrow \begin{cases} r_e^* = r_o + ky^* & [\text{Ec. 7.78}] \\ r_i^* = r_o - ky^* & [\text{Ec. 7.79}] \end{cases}$$

$$\text{Sin contacto pestaña - carril} \rightarrow v'_x = 0 \quad [\text{Ec. 7.80}]$$

$$\text{Con contacto pestaña - carril} \rightarrow \begin{cases} v'_x = -\frac{\Delta r_{\text{úm}}}{r_o} & [\text{Ec. 7.81}] \\ \Delta r_{\text{úm}} = \begin{cases} r_e - r_e^* & [\text{Ec. 7.82}] \\ r_i - r_i^* & [\text{Ec. 7.83}] \end{cases} \\ r_e = r_o + ky & [\text{Ec. 7.84}] \\ r_i = r_o - ky & [\text{Ec. 7.85}] \end{cases}$$

$$\bar{\Phi} = \pm \frac{\frac{k}{b_o} |\bar{y}^*|}{1 + \left(\frac{k|\bar{y}^*|}{b_o}\right)^2} \quad [\text{Ec. 7.86}]$$

$$\text{Frenada estándar} \rightarrow \bar{\omega}' = \frac{V_f - V_i}{(n_{dec} + 2)r_o} \quad [\text{Ec. 7.87}]$$

$$\text{Frenada en pendientes} \rightarrow \bar{\omega}' = \kappa_p \frac{r_o \lambda_{eje} g \text{sen}(\beta_{rp})}{I_{\parallel} V} \quad [\text{Ec. 7.88}]$$

$$\begin{cases} \kappa_p = 0, & -10 < i \\ \kappa_p = 0,05, & -15 < i \leq -10 \\ \kappa_p = 0,10, & i \leq -15 \end{cases} \quad \begin{matrix} [\text{Ec. 7.89}] \\ [\text{Ec. 7.90}] \\ [\text{Ec. 7.91}] \end{matrix}$$

$$\beta_{rp} = \arctan\left(\frac{i}{1.000}\right) \quad [\text{Ec. 7.92}]$$

$$I_{\parallel} = \frac{61}{1.600} \rho \pi D^4 w_w \quad [\text{Ec. 7.93}]$$

7.6.4. Fuerza normal sobre cada rueda.

7.6.4.1. Ecuaciones principales.

Nota I: Al introducir el ángulo de contacto γ_o ya se tiene en cuenta si esa componente de fuerza normal se va a aplicar sobre la banda de rodadura (valor de γ_o pequeño) o sobre la pestaña (valor de γ_o bastante mayor).

Nota II: La componente de la fuerza normal perpendicular al área de contacto, denotada N_{\perp} , es la que debe emplearse al aplicar la teoría de Hertz y el método de Polach, pues es la componente responsable de la aparición del área de contacto.

$$\text{Alineación recta} \rightarrow N = \frac{1}{2} \lambda_{eje} g \cos \beta_{rp} \quad [\text{Ec. 7.94}]$$

$$\text{Alineación curva} \rightarrow N = \begin{cases} N_e = \frac{\lambda_{eje}}{2} \left(1 + \frac{y}{b_o}\right) g \cos \vartheta_r \cos \beta_{rp} + \frac{\lambda_{eje}}{2b_o} a_{lat} H_{CdG} \\ N_i = \frac{\lambda_{eje}}{2} \left(1 - \frac{y}{b_o}\right) g \cos \vartheta_r \cos \beta_{rp} - \frac{\lambda_{eje}}{2b_o} a_{lat} H_{CdG} \end{cases} \quad \begin{matrix} [\text{Ec. 7.95}] \\ [\text{Ec. 7.96}] \end{matrix}$$

$$\text{Con contacto p.-c.} \rightarrow N = \begin{cases} N_e = \lambda_{eje} \left(\frac{b_i + y}{b_i + b_e}\right) g \cos \vartheta_r \cos \beta_{rp} + \frac{\lambda_{eje}}{b_i + b_e} a_{lat} H_{CdG} \\ N_i = \lambda_{eje} \left(\frac{b_e - y}{b_i + b_e}\right) g \cos \vartheta_r \cos \beta_{rp} - \frac{\lambda_{eje}}{b_i + b_e} a_{lat} H_{CdG} \end{cases} \quad \begin{matrix} [\text{Ec. 7.97}] \\ [\text{Ec. 7.98}] \end{matrix}$$

$$\text{Componentes de } N \rightarrow \begin{cases} N_t = (N | N_{e|i}) \text{sen} \zeta & [\text{Ec. 7.99}] \\ N_r = (N | N_{e|i}) \text{cos} \zeta & [\text{Ec. 7.100}] \\ N_{\perp} = N_r \text{cos}(\gamma_o) & [\text{Ec. 7.101}] \\ N_{\parallel} = N_r \text{sen}(\gamma_o) & [\text{Ec. 7.102}] \end{cases}$$

7.6.4.2. Ecuaciones auxiliares.

$$\lambda_{eje} = \frac{\lambda_u + \lambda_{tara}}{n_{ejes}} \quad [\text{Ec. 7.103}]$$

$$H_{CdG} = \frac{\lambda_u H_u + \lambda_{tara} H_{tara}}{\lambda_u + \lambda_{tara}} \quad [\text{Ec. 7.104}]$$

$$a_{lat} = \frac{V^2}{R + y} - \frac{h_r}{b_i + b_e} g \text{cos} \beta_{rp} \quad [\text{Ec. 7.105}]$$

$$\vartheta_r = \text{arcsen} \left(\frac{h_r}{2b_o} \right) \quad [\text{Ec. 7.106}]$$

$$\left\{ \begin{aligned} b_e &= \frac{J - \eta + o}{2} + \xi - o_p & [\text{Ec. 7.107}] \\ b_i &= \frac{J - \eta + o}{2} & [\text{Ec. 7.108}] \end{aligned} \right.$$

$$\text{En una rueda } i \text{ (la cual sufre el contacto p.-c.)} \rightarrow o_p = |\nu_{f,i} - \nu_{fl,i}| \quad [\text{Ec. 7.109}]$$

$$\text{Para un \u00e1rea de contacto que no sea p.-c.} \rightarrow \zeta = \pm \text{arcsen} \left(\frac{b_o \pi \psi}{r 180} \right) \quad [\text{Ec. 7.110}]$$

$$\text{Para un \u00e1rea de contacto que s\u00ed sea p.-c.} \rightarrow \zeta = \pm \text{arcsen}(\tan(\gamma_o) \tan(\psi)) \quad [\text{Ec. 7.111}]$$

$$n_{ejes} = 2n'_{ejes} \quad [\text{Ec. 7.112}]$$

7.6.5. Soluci\u00f3n de Hertz.

7.6.5.1. Ecuaciones principales.

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{y_1}} + \frac{1}{R_{y_2}} \right) \quad [\text{Ec. 7.113}]$$

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{x_1}} + \frac{1}{R_{x_2}} \right) \quad [\text{Ec. 7.114}]$$

$$a = m_H \left(\frac{3}{2} N_{\perp} \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{1}{A + B} \right)^{\frac{1}{3}} \quad [\text{Ec. 7.115}]$$

$$b = n_H \left(\frac{3}{2} N_{\perp} \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{1}{A + B} \right)^{\frac{1}{3}} \quad [\text{Ec. 7.116}]$$

$$p_{z_o} = \frac{3N_{\perp}}{2\pi ab} \quad [\text{Ec. 7.117}]$$

$$\delta_o = r_H \left(\left(\frac{3}{2} N_{\perp} \frac{1-v^2}{E} \right)^2 (A+B) \right)^{\frac{1}{3}} \quad [\text{Ec. 7.118}]$$

$$A_c = \pi ab \quad [\text{Ec. 7.119}]$$

7.6.5.2. Ecuaciones auxiliares.

$$\frac{1}{R_{y_1}} = 0 \quad [\text{Ec. 7.120}]$$

$$R_{y_2} = \frac{(r|r_p)}{\cos\gamma_o} \quad [\text{Ec. 7.121}]$$

$$\frac{G_1}{1-2v_1} = \frac{G_2}{1-2v_2} \quad [\text{Ec. 7.122}]$$

$$\frac{1-v^2}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right) \quad [\text{Ec. 7.123}]$$

$$G = 2 \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \quad [\text{Ec. 7.124}]$$

$$v = \frac{G}{2} \left(\frac{v_1}{G_1} + \frac{v_2}{G_2} \right) \quad [\text{Ec. 7.125}]$$

$$\theta = \arccos \frac{|B-A|}{A+B} \quad [\text{Ec. 7.126}]$$

7.6.5.3. Ajustes polinómicos de los coeficientes de Hertz.

$$m_H = 19,98 - 2,316 \theta + 0,1328 \theta^2 - 4,176 \cdot 10^{-3} \theta^3 + 7,84 \cdot 10^{-5} \theta^4 - 9,186 \cdot 10^{-7} \theta^5 + 6,781 \cdot 10^{-9} \theta^6 - 3,067 \cdot 10^{-11} \theta^7 + 7,764 \cdot 10^{-14} \theta^8 - 8,425 \cdot 10^{-17} \theta^9 \quad [\text{Ec. 7.127}]$$

$$n_H = 19,98 - 2,316 (180 - \theta) + 0,1328 (180 - \theta)^2 - 4,176 \cdot 10^{-3} (180 - \theta)^3 + 7,84 \cdot 10^{-5} (180 - \theta)^4 - 9,186 \cdot 10^{-7} (180 - \theta)^5 + 6,781 \cdot 10^{-9} (180 - \theta)^6 - 3,067 \cdot 10^{-11} (180 - \theta)^7 + 7,764 \cdot 10^{-14} (180 - \theta)^8 - 8,425 \cdot 10^{-17} (180 - \theta)^9 \quad [\text{Ec. 7.128}]$$

$$r_H(0 < \theta \leq 90^\circ) = 9,02 \cdot 10^{-2} \theta - 8,081 \cdot 10^{-3} \theta^2 + 4,378 \cdot 10^{-4} \theta^3 - 1,123 \cdot 10^{-5} \theta^4 + 6,166 \cdot 10^{-8} \theta^5 + 3,149 \cdot 10^{-9} \theta^6 - 7,296 \cdot 10^{-11} \theta^7 + 6,214 \cdot 10^{-13} \theta^8 - 1,929 \cdot 10^{-15} \theta^9 \quad [\text{Ec. 7.129}]$$

$$r_H(90^\circ < \theta < 180^\circ) = 9,02 \cdot 10^{-2} (180 - \theta) - 8,081 \cdot 10^{-3} (180 - \theta)^2 + 4,378 \cdot 10^{-4} (180 - \theta)^3 - 1,123 \cdot 10^{-5} (180 - \theta)^4 + 6,166 \cdot 10^{-8} (180 - \theta)^5 + 3,149 \cdot 10^{-9} (180 - \theta)^6 - 7,296 \cdot 10^{-11} (180 - \theta)^7 + 6,214 \cdot 10^{-13} (180 - \theta)^8 - 1,929 \cdot 10^{-15} (180 - \theta)^9 \quad [\text{Ec. 7.130}]$$

7.6.6. Método de Polach.

7.6.6.1. Ecuaciones principales (rozamiento constante).

$$s_i = \frac{\mu N_\perp}{Gab C_{jj}} v_i, \quad i, j = x, 1; \quad i, j = y, 2 \quad [\text{Ec. 7.131}]$$

$$F = -\frac{2\mu N_\perp}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} + \arctan \varepsilon \right) \quad [\text{Ec. 7.132}]$$

$$F_i = F \frac{s_i}{s}, \quad i = x, y \quad [\text{Ec. 7.133}]$$

$$F_{y,s} = -\frac{9}{16} a \mu N_\perp K_M \left[1 + 6,3 \left(1 - e^{-\frac{a}{b}} \right) \right] \frac{(-\varphi)}{s_c} \quad [\text{Ec. 7.134}]$$

$$F_{y,c} = F_y + F_{y,s} \quad [\text{Ec. 7.135}]$$

7.6.6.2. Ecuaciones principales (rozamiento variable).

Nota: Al aplicar el método de Polach con rozamiento variable se reemplaza la ecuación 7.130 por la siguiente, y se añaden dos ecuaciones más para obtener el coeficiente de rozamiento en función de A_f, B_f, w y μ_o .

$$F = -\frac{2\mu N_\perp}{\pi} \left(\frac{k_A \varepsilon}{1 + (k_A \varepsilon)^2} + \arctan(k_S \varepsilon) \right) \quad [\text{Ec. 7.136}]$$

$$\mu = \mu_o \left[(1 - A_f) e^{-w B_f} + A_f \right] \quad [\text{Ec. 7.137}]$$

$$w_i = s_i V \quad i = x, y \quad [\text{Ec. 7.138}]$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \quad [\text{Ec. 7.139}]$$

7.6.6.3. Ecuaciones auxiliares (ambas versiones).

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \quad [\text{Ec. 7.140}]$$

$$s_c = \sqrt{s_x^2 + s_{y,c}^2} \quad [\text{Ec. 7.141}]$$

$$\begin{cases} s_{y,c} = s_y + (-\varphi)a, & |s_y + (-\varphi)a| > |s_y| \\ s_{y,c} = s_y, & |s_y + (-\varphi)a| \leq |s_y| \end{cases} \quad [\text{Ec. 7.142}]$$

$$|s_y + (-\varphi)a| \leq |s_y| \quad [\text{Ec. 7.143}]$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \mu \frac{3 N_{\perp}}{2 \pi a b} \quad [\text{Ec. 7.144}]$$

$$\varepsilon = \frac{2 C \pi a^2 b}{3 \mu N_{\perp}} s \quad [\text{Ec. 7.145}]$$

$$C = \frac{3 G}{8 a} C'_{jj} \quad [\text{Ec. 7.146}]$$

$$C'_{jj} = \sqrt{\left(C_{11} \frac{s_x}{s}\right)^2 + \left(C_{22} \frac{s_y}{s}\right)^2} \quad [\text{Ec. 7.147}]$$

$$K_M = |\varepsilon_S| \left(\frac{\delta_P^3}{3} - \frac{\delta_P^2}{2} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{3} \sqrt{(1 - \delta_P^2)^3} \quad [\text{Ec. 7.148}]$$

$$\delta_P = \frac{\varepsilon_S^2 - 1}{\varepsilon_S^2 + 1} \quad [\text{Ec. 7.149}]$$

$$\varepsilon_S = \frac{2 C_S \pi a^2 b}{3 \mu N_{\perp}} \frac{s_{y,c}}{1 + 6,3 \left(1 - e^{-\frac{a}{b}}\right)} \quad [\text{Ec. 7.150}]$$

$$C_S = \frac{4 G \sqrt{b}}{\pi \sqrt{a^3}} C_{23} \quad [\text{Ec. 7.151}]$$

7.6.6.4. Ajustes polinómicos de los coeficientes de Kalker.

$$C_{11} \left(0 \leq \frac{a}{b} \leq 1\right) = 0,652 + 76,252 \left(\frac{a}{b}\right) - 823,1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4,777 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 16,561 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + \\ + 35,998 \left(\frac{a}{b}\right)^5 - 49,461 \left(\frac{a}{b}\right)^6 + 41,690 \left(\frac{a}{b}\right)^7 - 19,663 \left(\frac{a}{b}\right)^8 + 3,971 \left(\frac{a}{b}\right)^9 \quad [\text{Ec. 7.152}]$$

$$C_{11} \left(1 < \frac{a}{b} < 2,50\right) = 28,3 - 112,5 \left(\frac{a}{b}\right) + 221,4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 242,9 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 164,3 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 70,67 \left(\frac{a}{b}\right)^5 + \\ + 19,17 \left(\frac{a}{b}\right)^6 - 3,131 \left(\frac{a}{b}\right)^7 + 2,759 \cdot 10^{-1} \left(\frac{a}{b}\right)^8 - 9,798 \cdot 10^{-3} \left(\frac{a}{b}\right)^9 \quad [\text{Ec. 7.153}]$$

$$C_{11} \left(\frac{a}{b} \geq 2,50\right) = 0,0027 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0,0601 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1,2212 \left(\frac{a}{b}\right) + 2,9707 \quad [\text{Ec. 7.154}]$$

$$C_{22} \left(0 \leq \frac{a}{b} \leq 1\right) = 2,81 - 10,432 \left(\frac{a}{b}\right) + 134,8 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 850,1 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 3,214 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 7,568 \left(\frac{a}{b}\right)^5 + \\ + 11,165 \left(\frac{a}{b}\right)^6 - 10,012 \left(\frac{a}{b}\right)^7 + 4,980 \left(\frac{a}{b}\right)^8 - 1,053 \left(\frac{a}{b}\right)^9 \quad [\text{Ec. 7.155}]$$

$$C_{22} \left(1 < \frac{a}{b} < 2,50\right) = 33,73 - 143,1 \left(\frac{a}{b}\right) + 283,952 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 311,5 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 209,5 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - \\ - 89,24 \left(\frac{a}{b}\right)^5 + 23,93 \left(\frac{a}{b}\right)^6 - 3,865 \left(\frac{a}{b}\right)^7 + 3,371 \cdot 10^{-1} \left(\frac{a}{b}\right)^8 - 1,187 \cdot 10^{-2} \left(\frac{a}{b}\right)^9 \quad [\text{Ec. 7.156}]$$

$$C_{22} \left(\frac{a}{b} \geq 2,50\right) = 0,0014 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0,0433 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1,3647 \left(\frac{a}{b}\right) + 2,4212 \quad [\text{Ec. 7.157}]$$

$$C_{23} \left(0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \right) = 0,991 - 16,295 \left(\frac{a}{b} \right) + 200,6 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 1.219 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 4.385 \left(\frac{a}{b} \right)^4 - 9.826 \left(\frac{a}{b} \right)^5 + 13.842 \left(\frac{a}{b} \right)^6 - 11.907 \left(\frac{a}{b} \right)^7 + 5.709 \left(\frac{a}{b} \right)^8 - 1.168 \left(\frac{a}{b} \right)^9 \quad [Ec. 7.158]$$

$$C_{23} \left(1 < \frac{a}{b} < 2,50 \right) = 49,27 - 229,2 \left(\frac{a}{b} \right) + 464,225 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 523,4 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 362,2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 - 158,6 \left(\frac{a}{b} \right)^5 + 43,67 \left(\frac{a}{b} \right)^6 - 7,218 \left(\frac{a}{b} \right)^7 + 6,419 \cdot 10^{-1} \left(\frac{a}{b} \right)^8 - 2,295 \cdot 10^{-2} \left(\frac{a}{b} \right)^9 \quad [Ec. 7.159]$$

$$C_{23} \left(\frac{a}{b} \geq 2,50 \right) = -0,0002 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 0,0377 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 1,1224 \left(\frac{a}{b} \right) + 0,2600 \quad [Ec. 7.160]$$

$$C_{32} = -C_{23} \quad [Ec. 7.161]$$

$$C_{33} \left(0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \right) = 23,43 - 253,989 \left(\frac{a}{b} \right) + 1.478 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 5.123 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 11.104 \left(\frac{a}{b} \right)^4 - 15.192 \left(\frac{a}{b} \right)^5 + 12.731 \left(\frac{a}{b} \right)^6 - 5.951 \left(\frac{a}{b} \right)^7 + 1.176 \left(\frac{a}{b} \right)^8 + 8,267 \left(\frac{a}{b} \right)^9 \quad [Ec. 7.162]$$

$$C_{33} \left(1 < \frac{a}{b} < 2,50 \right) = 65,65 - 292,2 \left(\frac{a}{b} \right) + 572,429 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 631,5 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 429,2 \left(\frac{a}{b} \right)^4 - 185,1 \left(\frac{a}{b} \right)^5 + 50,32 \left(\frac{a}{b} \right)^6 - 8,233 \left(\frac{a}{b} \right)^7 + 7,262 \cdot 10^{-1} \left(\frac{a}{b} \right)^8 - 2,581 \cdot 10^{-2} \left(\frac{a}{b} \right)^9 \quad [Ec. 7.163]$$

$$C_{33} \left(\frac{a}{b} \geq 2,50 \right) = -0,0002 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 0,0399 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 0,2751 \left(\frac{a}{b} \right) + 1,1900 \quad [Ec. 7.164]$$

7.6.7. Caracterización del contacto pestaña – carril.

7.6.7.1. Ecuaciones principales.

Nota I: Las ecuaciones principales de este bloque deben aplicarse de esta manera para que rindan resultados satisfactorios y precisos:

1. En primer lugar, lo que se realiza es repartir la carga entre las dos áreas de contacto que tiene la rueda (si el movimiento es libre) o las dos ruedas (si es restringido) que sufren el contacto pestaña – carril. Como en este punto se desconoce ζ_h , esta fuerza horizontal se toma nula.
2. En segundo lugar, se aplican las ecuaciones de la solución Hertz y del método de Polach a estas áreas de contacto para conocer cuáles son las fuerzas tangenciales que sobre ellas actúan.
3. Después de esto ya se tienen las fuerzas tangenciales a estas áreas de contacto y también a las áreas de contacto de las ruedas que no contactan con los carriles (calculadas previamente). Ya se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio: las correspondientes al movimiento libre o al movimiento restringido, según el caso.
4. Esto proporciona el valor de ζ_h ($\zeta_{h,1}$ o $\zeta_{h,2}$ y ζ_{h,z_w} , según el caso), por lo que se ya se puede repartir la carga de un modo más preciso.

5. Se vuelve al punto 1 de esta lista y se repite el proceso. Esto proporciona un primer valor de ζ_h a modo de primera aproximación.
6. Se vuelve al punto 1 y se realiza una iteración para obtener un valor de ζ_h próximo al real.
7. Con este valor de ζ_h se recalculan N_{br} y N_p y se reaplican las ecuaciones de la solución de Hertz y del método de Polach. De esta forma se obtienen unos valores de dimensiones de las áreas de contacto y de fuerzas tangenciales a las mismas fidedignos y lo suficientemente precisos para el cómputo del desgaste.

Nota II: Las ecuaciones 7.165 y 7.168 no son realmente necesarias para despejar $\zeta_{h,1}$ o $\zeta_{h,1}$ y ζ_{h,z_w} , pero se dejan por escrito porque forman parte de la teoría.

Nota III: De la ecuación 7.166 también se puede prescindir, dado que la única incógnita, que es $\zeta_{h,1}$, se puede despejar de la ecuación 7.167.

Nota IV: Las coordenadas $u_{fl,1}$ y $u_{fl,4}$ coinciden con las coordenadas $u_{f,1}$ y $u_{f,4}$ del área de contacto de la pestaña de la rueda 1 y de la rueda 4, respectivamente.

Nota V: En realidad, en una curva a izquierdas solo pueden contactar con los carriles las pestañas de las ruedas W_1 y W_4 , pero una curva a derechas no sucede lo mismo. En una curva a derechas son las pestañas de las ruedas W_2 y W_3 las que contactan con los carriles, por lo que en el programa habría que cambiar $u_{fl,1}$ por $u_{fl,2}$ y $u_{fl,4}$ por $u_{fl,3}$. Esto no se realiza porque son coordenadas coincidentes.

$$\text{En las ruedas que sufren el contacto p. -c.} \rightarrow \begin{cases} N_{br} = (1 - \alpha_{fn}) N_{\perp} & [\text{Ec. 7.165}] \\ N_p = \zeta_v \cos \gamma_o + \zeta_h \sen \gamma_o & [\text{Ec. 7.166}] \end{cases}$$

$$\text{Movto. libre} \rightarrow \begin{cases} (-F_t | + F_f) = - \sum_{i=1}^{i=Z_w+1} F'_{x,i} & [\text{Ec. 7.167}] \end{cases}$$

$$\text{Movto. libre} \rightarrow \begin{cases} \zeta_{h,1} = \sum_{i=1}^{i=Z_w+1} F'_{y,i} & [\text{Ec. 7.168}] \end{cases}$$

$$\text{Movto. libre} \rightarrow \begin{cases} \zeta_{h,1} u_{fl,1} = \sum_{i=1}^{i=Z_w+1} (F'_{y,i} u_{f,i}) + \sum_{i=1}^{i=Z_w+1} (F'_{x,i} v_{f,i}) & [\text{Ec. 7.169}] \end{cases}$$

$$\text{Movto. restricto} \rightarrow \begin{cases} (-F_t | + F_f) = - \sum_{i=1}^{i=Z_w+2} F'_{x,i} & [\text{Ec. 7.170}] \end{cases}$$

$$\text{Movto. restricto} \rightarrow \begin{cases} \zeta_{h,1} - \zeta_{h,z_w} = \sum_{i=1}^{i=Z_w+2} F'_{y,i} & [\text{Ec. 7.171}] \end{cases}$$

$$\text{Movto. restricto} \rightarrow \begin{cases} \zeta_{h,1} u_{fl,1} - \zeta_{h,z_w} u_{fl,4} = \sum_{i=1}^{i=Z_w+2} (F'_{y,i} u_{f,i}) + \sum_{i=1}^{i=Z_w+2} (F'_{x,i} v_{f,i}) & [\text{Ec. 7.172}] \end{cases}$$

7.6.7.2. Ecuaciones auxiliares.

$$\zeta_v = \alpha_{fn} \frac{N_{\perp}}{\cos \gamma_o \cos \zeta} \quad [\text{Ec. 7.173}]$$

$$F_t = 0 \quad [\text{Ec. 7.174}]$$

$$F'_{x,i} = F_{x,i} \quad [\text{Ec. 7.175}]$$

$$F'_{y,i} = F_{y,i} \cos \gamma_o \quad [\text{Ec. 7.176}]$$

$$F''_{y,i} = F_{y,i} \operatorname{sen} \gamma_o \quad [\text{Ec. 7.177}]$$

7.6.8. Modelo de transferencia de energía, leyes de la BRR y la USFD.

7.6.8.1. Ecuaciones principales.

$$T\gamma = |F_x v_x| + |F_y v_y| + |M_z \varphi| \quad [\text{Ec. 7.178}]$$

$$T\gamma/A_c = \frac{|F_x v_x| + |F_y v_y| + |M_z \varphi|}{A_c} \quad [\text{Ec. 7.179}]$$

$$W_{R,BRR} \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{km} - r.} \right] = \begin{cases} 0,25 \frac{T\gamma}{D}, & T\gamma < 100 \text{ N} \\ \frac{25}{D}, & 100 \leq T\gamma < 200 \text{ N} \\ \frac{1,19 T\gamma - 154}{D}, & T\gamma \geq 200 \text{ N} \end{cases} \quad [\text{Ec. 7.180}]$$

$$\left[\frac{\text{mm}^2}{\text{km} - r.} \right] = \frac{25}{D} \quad [\text{Ec. 7.181}]$$

$$\left[\frac{\text{mm}^2}{\text{km} - r.} \right] = \frac{1,19 T\gamma - 154}{D}, \quad T\gamma \geq 200 \text{ N} \quad [\text{Ec. 7.182}]$$

$$W_{R,USFD} \left[\frac{\mu g}{\text{mm}^2 \cdot \text{m} - r.} \right] = \begin{cases} 5,3 \frac{T\gamma}{A_c}, & \frac{T\gamma}{A_c} \leq 10,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ 55, & 10,4 < \frac{T\gamma}{A_c} \leq 77,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ 55 + 61,9 \left(\frac{T\gamma}{A_c} - 77,2 \right), & \frac{T\gamma}{A_c} > 77,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{cases} \quad [\text{Ec. 7.183}]$$

$$\left[\frac{\mu g}{\text{mm}^2 \cdot \text{m} - r.} \right] = 55, \quad 10,4 < \frac{T\gamma}{A_c} \leq 77,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad [\text{Ec. 7.184}]$$

$$\left[\frac{\mu g}{\text{mm}^2 \cdot \text{m} - r.} \right] = 55 + 61,9 \left(\frac{T\gamma}{A_c} - 77,2 \right), \quad \frac{T\gamma}{A_c} > 77,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad [\text{Ec. 7.185}]$$

$$H_{BRR} [\mu\text{m}] = W_{R,BRR} \left[\frac{\text{mm}^2}{\text{km} - r.} \right] \cdot \frac{10^{-3} \left[\frac{\text{km} \cdot \mu\text{m}}{\text{mm}^2} \right] \cdot L_{rr} [\text{m}]}{2b [\text{mm}]} \quad [\text{Ec. 7.186}]$$

$$H_{USFD} [\mu\text{m}] = W_{R,USFD} \left[\frac{\mu g}{\text{mm}^2 \cdot \text{m} - r.} \right] \cdot \frac{a \left[\frac{\text{mm}}{\text{rev.}} \right] \cdot 10^3 \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{mm}} \right] \cdot L_{rr} [\text{m}]}{\rho \left[\frac{\mu g}{\text{mm}^3} \right] \cdot \pi r_{rr} [\text{m}]} \quad [\text{Ec. 7.187}]$$

7.6.8.2. Ecuaciones auxiliares.

Nota: En una alineación recta el parámetro L se obtiene según la ecuación 7.29 (véase a la [parte 7.6.1.2](#) para encontrarla).

$$M_z = -C_{23}Gc^3v_y - C_{33}Gc^4(-\varphi) \quad [Ec. 7.188]$$

$$c = \sqrt{ab} \quad [Ec. 7.189]$$

$$L_{rr} = L \left(1 \pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) \quad [Ec. 7.190]$$

$$\text{Alineación curva} \rightarrow L = \begin{cases} L_i = (Q_f - Q_i) \left(1 - b_o \frac{\bar{1}}{R} \right) & [Ec. 7.191] \\ L_e = (Q_f - Q_i) \left(1 + b_o \frac{\bar{1}}{R} \right) & [Ec. 7.192] \end{cases}$$

$$r_{rr} = r \quad [Ec. 7.193]$$

7.6.9. Modelo del índice de fatiga.

7.6.9.1. Ecuaciones principales.

$$FI_{surf} = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{N} - \frac{\tau_{lim}}{p_{z_o}} \quad [Ec. 7.194]$$

$$\text{Agrietamiento} = \begin{cases} 'NO', & FI_{surf} \leq 0 & [Ec. 7.195] \\ 'SÍ', & FI_{surf} > 0 & [Ec. 7.196] \end{cases}$$

7.6.9.2. Ecuación auxiliar.

$$F_{m\acute{a}x,RCF} = \frac{2}{3} \tau_{lim} \pi ab \quad [Ec. 7.197]$$

8. Definición del caso de estudio.

8.1. Introducción.

La definición del caso de estudio consiste en establecer, en primer lugar, cuál es su objeto. Como este objeto se pretende alcanzar mediante un análisis de sensibilidad, entonces es preciso establecer exactamente qué parámetros se van a variar y entre cuáles rangos con el objeto de obtener los resultados deseados.

Para ello, es preciso conocer previamente cuáles son los datos característicos del problema, ya que ayudarán a establecer los rangos de variación de los parámetros. Estos datos característicos se recogen en los anexos dada su profusión, por lo que en este resumen solamente se va a remitir a tales datos.

8.2. Objeto del caso.

El objeto del caso consiste en obtener la vida útil de una rueda ferroviaria en función de su diámetro, carga y otros factores.

Para la consecución de este objetivo se realizará un análisis de sensibilidad sobre las ruedas de varios bogies distintos. En este análisis se variarán los factores o parámetros de mayor influencia en el desgaste, haciendo especial hincapié en el diámetro y la carga. Este análisis se dividirá en varios escenarios, cuyos resultados se mostrarán independientemente. La posterior interpretación de estos resultados permitirá desprender tendencias.

Una vez conocidas las tendencias, se planteará el cálculo de la vida útil de ruedas de diámetros dispares recorriendo el trazado en ambos sentidos y bajo diferentes condiciones de operación en cada cálculo.

8.3. Datos característicos del problema.

8.3.1. De las ruedas y los carriles.

En el [anexo III](#) se recopila información sobre las ruedas y los carriles, principalmente sus geometrías y los materiales que los componen. Aparte, se efectúa algo crucial como es el posicionamiento relativo de la rueda y el carril, lo cual determina múltiples parámetros que resultan de influencia en el desgaste de la rueda. A continuación, se va a especificar qué información contiene cada sección y subsección.

La [sección III.1](#) se dedica a las ruedas, que pueden tener tres perfiles diferentes según la normativa europea: 1/40 (en la [subsección III.1.1](#)), EPS (en la [III.1.2](#)) y S1002 (en la [III.1.3](#)). Se seleccionará uno de ellos para los cálculos.

La [sección III.2](#) se dedica a los carriles, que pueden tener 25 perfiles distintos según la normativa europea, si bien en la red española se utilizan 3 en la actualidad: RN 45 (en la [subsección III.2.1](#)), 54E1 (en la [III.2.2](#)) y 60E1 (en la [III.2.3](#)). En este caso, el perfil seleccionado será el mismo que se aplique posteriormente en el trazado.

Tras haber revisado los perfiles de ruedas y carriles definidos en la normativa y empleados en España, en la [sección III.3](#) se opta por una geometría de rueda (en la [subsección III.3.1](#)) y por el tipo de carril (en la [III.3.2](#)) tras un proceso de criba en el cual un criterio de peso es la desfavorabilidad al desgaste del elemento seleccionado. Los vencedores del proceso de criba son el perfil 1/40 para la rueda y el 60E1 para el carril.

Posteriormente, en la [sección III.4](#) se ajusta mediante ajustes polinómicos o funciones definidas a trozos tanto el perfil 1/40 (en la [sección III.4.1](#)) como el perfil 60E1 (en la [III.4.2](#)). De estos ajustes o funciones, que se grafican en el EES, se derivan los parámetros de influencia que determinan la forma de la elipse de contacto, según dicho contacto se produzca en una región u otra de cada perfil.

Una vez se tiene esto, ya se puede proceder al posicionamiento relativo de la rueda y el carril, el cual, como ya se ha expresado, resulta crucial. Esto se desarrolla con la ayuda del EES a lo largo de la [sección III.5](#), el cual se divide en seis subsecciones: la [III.5.1](#), en la cual se estudia qué parámetros determinan el posicionamiento relativo en una alineación recta del trazado, se determina la posición de contacto en la rueda izquierda y derecha de un juego de ruedas y se toman los parámetros de influencia que determinan la forma de la elipse de contacto; la [III.5.2](#), en la cual se procede del mismo modo y se descubre que existe un radio de curvatura del trazado umbral por debajo del cual se producirá el contacto de la pestaña de la rueda con el carril; las subsecciones [III.5.3](#), [III.5.4](#) y [III.5.5](#), en las cuales se estudia el contacto pestaña - carril desde el punto de vista teórico; y la [III.5.6](#), en la cual se determinan las posiciones de contacto en la rueda izquierda y derecha de un juego, centrándose en el contacto pestaña – carril que aparece en la rueda externa a la curva (la izquierda cuando la curva es dextrógrafa y viceversa).

Finalmente, la [sección III.6](#) se dedica a los materiales de la rueda (en la [subsección III.6.1](#)) y del carril (en la [III.6.2](#)), que pueden estar compuestos de múltiples grados de acero. Se selecciona uno de ellos para la rueda (el grado ER8) y otro para el carril (el grado R260) y se detallan sus propiedades, las cuales vienen estipuladas en su mayoría por la normativa europea en la materia, salvo cuando se trata de propiedades genéricas para cualquier grado de acero (como la densidad, por ejemplo).

8.3.2. Del material rodante.

En el [anexo IV](#) se revisan las características del material rodante comúnmente empleado en Europa atendiendo primordialmente al diámetro de las ruedas, pero también a otros factores que entran en juego en las ecuaciones, como el empuje interno de cada bogie. Este anexo se divide en varias secciones o subcapítulos:

En primer lugar, en el [subcapítulo IV.1](#) se habla sobre los tipos de vagones que permiten, a grandes rasgos, el transporte de mercancías tradicional, intermodal o combinado. Estos vagones son los tradicionales, los de tipo Modalohr y los de tipo ROLA. Las características de cada tipo se revisan en subcapítulos independientes.

El [subcapítulo IV.2](#) se dedica a los vagones tradicionales, es decir, aquellos ya se empleaban antes de la creación de las primeras autopistas ferroviarias y que se siguen utilizando fuera de ellas. Para ello, se escoge un vagón tradicional en un catálogo de vagones y, a continuación, se estudian las características de su plataforma (en el [subapartado IV.2.1](#)) y de sus bogies y ruedas (en el [IV.2.2](#)).

El [subcapítulo IV.3](#) se centra en los vagones de tipo Modalohr. El sistema Modalohr se emplea actualmente en las autopistas ferroviarias francesas para el transporte de semirremolques con o sin sus cabinas (véanse las rutas de transporte en el [subapartado IV.3.1](#)) y presenta unas diferencias características con respecto a los vagones tradicionales, las cuales se han abordado en el [subapartado IV.3.2](#). Tras hacer patentes estas diferencias, en el [subapartado IV.3.3](#) se estudia cuál es la altura máxima admisible de la carga si se emplean estos vagones en ancho ibérico o internacional, según la instrucción que establece los distintos contornos existentes para los gálibos.

El [subcapítulo IV.4](#) se enfoca en los vagones de tipo ROLA. Estos vagones son aquellos cuyas ruedas son de diámetro reducido, lo cual permite acercar bastante el piso del vagón al plano de rodadura y así poder cargar camiones completos. Actualmente se utilizan en las autopistas ferroviarias alpinas y en la autopista ferroviaria del Eurotúnel, las cuales cuentan con un gálibo reducido (véanse estas en el [subapartado IV.4.1](#)). Las características de la plataforma de un modelo concreto de vagón ROLA se estudian en el [subapartado IV.4.2](#); mientras que las de sus bogies y ruedas se exponen en el [subapartado IV.4.3](#), donde también se hace referencia a las características de algunos prototipos o modelos diferentes de vagones ROLA. Tras aportar este gran caudal de información, se calcula la altura máxima admisible de la carga en el [subapartado IV.4.4](#) por el mismo procedimiento que el aplicado con anterioridad a los vagones Modalohr.

Para finalizar, cabe agregar que las limitaciones impuestas por los vagones ROLA requieren de especial atención, siendo de capital significación la limitación de la carga por eje conforme disminuye el diámetro de las ruedas, puesto en evidencia en el [subapartado IV.4.3](#) y que se demostrará mediante un análisis de sensibilidad en los próximos capítulos.

8.3.3. Del trazado ferroviario.

En el [anexo V](#) se efectúa el diseño de un trazado ferroviario cuyos datos paramétricos se emplearán para el ensayo de ruedas de diferentes diámetros. Es decir, un trazado ferroviario de ensayo, que se diseña en base a datos reales. Esta tarea se ha dividido en varios apartados para con el fin de realizar el diseño secuencialmente, mas sin olvidar que todo el diseño está interrelacionado en el fondo.

Para comenzar, en el [apartado V.1](#) se han establecido los criterios de diseño, decidiendo en origen la orografía por la que discurriría el trazado: orografía montañosa, como la encontrada en los Alpes y en una parte significativa de España. Una vez se ha tomado esta decisión de gran calado, se revisa la normativa aplicable al trazado, redactada por ADIF (véase esta en el [subapartado V.1.1](#)). Seguidamente, se procede en el [subapartado V.1.2](#) al prefijado de los parámetros más característicos del trazado, que son: la rampa característica, el radio mínimo de curvatura y los tipos de curvas de transición utilizados.

Tras esto, se ha establecido en el [apartado V.2](#) cuál debe ser el procedimiento de representación gráfica del trazado atendiendo fundamentalmente a la normativa de ADIF en la materia. Debido al hecho de que un trazado dirige una vía de comunicación tridimensional, esta se podrá proyectar en tres planos proyectantes con el fin de obtener estas tres proyecciones: el alzado o perfil longitudinal

(descrito en el [subapartado V.2.1](#)), la planta (descrita en el [V.2.2](#)) y el perfil o sección transversal (descrita en el [V.2.3](#)).

Una vez se ha establecido el procedimiento de representación gráfica, en el [apartado V.3](#) se efectúa una representación simplificada del alzado y de la planta del trazado, el cual se divide en 19 tramos para su graficación. Cada tramo se croquiza en una figura independiente y en cada figura se marcan los puntos singulares, es decir, aquellos puntos en los que cambia la curvatura o inclinación de la vía.

En el [apartado V.4](#) se presentan todos los datos paramétricos del trazado distribuidos en 19 tablas, una por cada tramo. Estas tablas incluirán en sus filas la totalidad de los puntos marcados.

Por último, en el [apartado V.5](#) se explica cómo ha de ser el tratamiento computacional de estos datos, que consiste en simplificar y unificar las tablas mediante el procedimiento descrito en el [subapartado V.5.1](#) y en desarrollar nuevas ecuaciones para no necesitar tantas columnas en la nueva tabla, mostrándose estos desarrollos en el [subapartado V.5.2](#). Esto hecho, se presenta la tabla unificada, que es la finalmente introducida en el programa EES, en el [subapartado V.5.3](#).

8.4. Bogies tomados como referencia.

A lo largo del [anexo IV](#) se presentan diferentes tipos de bogies que se toman como datos característicos del problema, tal como se ha resumido en la [subsección 8.3.2](#).

Dada la importancia de estos bogies para el planteamiento del problema, sus datos se resumen a continuación, en una tabla. Los datos que se aportan son los que siguen:

- ✓ Modelo. Es el modelo del bogie.
- ✓ Estado: Es el estado que el bogie tiene en el mercado de material rodante. Puede ser comercial (CM) si ha penetrado en el mercado o un prototipo (PT) si aún no lo ha hecho.
- ✓ Número de ejes (n'_{ejes}): Es el número de ejes del bogie ($1/2$ de n_{ejes}), que suele incrementarse conforme disminuye el diámetro γ , en consecuencia, la carga por eje, como medida compensatoria para intentar mantener la capacidad de carga del bogie. Es adimensional.
- ✓ Empate (total) (e): Es la suma de las distancias entre los centros de cada par de ejes consecutivos (la suma de los empates parciales). Exprésase en [m].
- ✓ Diámetro nominal (D): Es el diámetro nominal de las ruedas del bogie (de nueva fábrica). Exprésase en [m].
- ✓ Diámetro mínimo operativo ($D_{mín}$): Es el diámetro mínimo (tras su disminución por efecto del desgaste y de los reperfilados) permitido para todas las ruedas del bogie. Exprésase en [m].
- ✓ Carga por eje (de diseño) (λ_{eje}): Es la carga por eje para la cual se han diseñado los ejes del bogie (por tanto, no debe superarse). Exprésase en [kg].

He aquí la tabla, donde los bogies se ordenan de mayor diámetro nominal de sus ruedas a menor diámetro nominal de sus ruedas:

Tabla 8.1. Características de los bogies tomados como referencia.

Modelo	Estado	n'_{ejes} [\emptyset]	e [m]	D [m]	$D_{mín}$ [m]	λ_{eje} [kg]
Y – 25 (estándar)	CM	2	1,800	0,920	0,840	22.500
Y – 25 (Modalohr)	CM	2	1,800	0,920	0,863	22.500
Y – 33	CM	2	2,000	0,840	0,783	18.000
Laas z-614 (a)	PT	2	1,800	0,750	0,680	17.000
Laas-z 614 (b)	PT	2	1,500	0,730	0,680	17.000
Saas-z 703	CM	2	1,800	0,680	0,630	16.000
Saas-z-706	PT	2	0,600	0,500	0,460	12.000
BA 741	PT	4	0,900 + 0,900 + +0,900	0,470	0,410	9.500
Bogie 691	PT	3	0,900 + +0,900	0,450	0,410	9.500
Saadkms690	CM	4	0,700 + 0,750 + +0,700	0,380	0,335	7.800
Graz Pauker 702	CM	4	1,000 + 0,700 + +1,000	0,355	0,335	5.000

8.5. Rangos de variación de los parámetros.

Los parámetros cuya variación se propone se clasifican en: de las ruedas y de su bogie, de la carga transportada y del trazado. Cabe señalar que en ciertos casos es más apropiado hablar de factores de operación, sobre todo cuando se hace alusión a factores logísticos como la carga por eje y la velocidad

de circulación, la cual se va a asociar a los límites de velocidad del trazado en este caso, pues estos límites son datos ya tabulados.

A continuación, se van a establecer los rangos de variación de estos parámetros o factores, basándose para ello en los datos característicos del problema, a los cuales ya se ha hecho referencia extensamente.

8.5.1. De las ruedas y de su bogie.

8.5.1.1. Diámetro nominal.

El diámetro nominal puede tomar valores muy distintos en el mercado de material rodante, tal como se plasma en la tabla superior. Así, el menor diámetro nominal se alcanza en el bogie comercial Graz Pauker 702, con un valor de 355 mm, mientras que el mayor es el de los vagones tradicionales, con 920 mm.

A la vista de este mínimo y de este máximo, se propone variar el diámetro en el siguiente intervalo: $D \in [355; 920]$ mm.

8.5.1.2. Profundidad máxima admisible del desgaste.

La profundidad máxima admisible del desgaste, que no debe confundirse con el diámetro mínimo operativo, es la máxima profundidad que se permite que se alcance en la rueda antes de su reperfilado. Tal como se estudió en el [subcapítulo 5.4](#), esta profundidad es muy variable, sobre todo teniendo en cuenta que suelen influir daños que difieren del propio desgaste. Eso provoca que sea difícil asignar valores absolutos a este parámetro, recurriéndose normalmente a valores promedio: 6 mm en el caso de una rueda de 590 mm de diámetro nominal, como se vio en dicho subcapítulo, y alrededor de 4 mm en el caso de ruedas de trenes mercantes.

En cuanto a los daños diferentes del propio desgaste, los principales son los daños por fatiga de contacto rodante (RCF por sus siglas en inglés). La aparición de estos daños en la rueda, que se suelen presentar en forma o subsuperficiales, obligaría a aumentar la periodicidad de reperfilado.

También intervienen aquí temas económicos: a mayor periodicidad de reperfilado, mayor gasto. Por ello, a veces las ruedas de los trenes mercantes llegan a operar con un elevado nivel de desgaste.

Por otro lado, desde el punto de vista teórico lo que interesa es que la cadencia del reperfilado sea elevada, pues el reperfilado actualiza el perfil y evita trabajar con perfiles muy desgastados en los cuales se ignora cuál es la conicidad efectiva, el ángulo de contacto, la posición de contacto, etc. De hecho, el programa informático trabaja siempre con la conicidad y el ángulo de contacto de un perfil nuevo, por lo que los cálculos serán más realistas cuanto más baja sea la profundidad máxima. Si se calculase la vida útil de la rueda con un valor de 6 mm, por ejemplo, los resultados obtenidos serían falsos, pues la conicidad y el ángulo reales estarían grandemente de aquellos de un perfil nuevo.

Por ende, va a asumirse un valor de 1 mm como valor teórico de la profundidad máxima admisible del desgaste, si bien podría admitirse también 2 mm. El rango sería: *Prof. máx. adm.* $\in [1; 2]$ mm.

8.5.1.3. Empate del bogie.

El empate del bogie también presenta grandes variaciones, aunque la evolución del empate no es proporcional a la del diámetro. Así, el menor empate lo tiene el bogie prototípico Saas-z-706, con un valor de 600 mm. Este valor es muy reducido y la pestaña de la rueda del primer eje casi interfiere con la pestaña de la rueda del segundo, ya que estas ruedas tienen radios nominales de 250 mm, valor que asciende a 228 mm en la punta de la pestaña (el doble de 228 mm es 556 mm, por lo que entre pestaña y pestaña solamente quedaría la diferencia entre 600 y 556 mm, que es 44 mm). Por otro lado, el mayor empate lo tiene el bogie comercial Graz Pauker 702, que alcanza los 2.700 mm.

Por ello, como máximo se alcanzará 2.700 mm y, como mínimo, la suma de $2r_o$ (o, lo que es lo mismo, D), 56 mm (lo que suma la pestaña) y 44 mm (el intersticio que se deja para que no interfieran las pestañas), adición que se multiplica por el factor $(n'_{ejes} - 1)$ Expresando esto en forma de intervalo: $e \in [(D+100) \cdot (n'_{ejes} - 1); 2.700]$.

8.5.2. De la carga transportada.

8.5.2.1. Carga por eje.

La carga por eje es, básicamente, la adición de la tara del vagón más la carga que este transporta dividida por el número de ejes del vagón. Esta tara puede ser muy variable y aún más posibilidades existen en el caso de la carga útil: un semirremolque, un camión articulado completo o cargas como bobinas, tubos, grano, automóviles, transformadores si el vagón es de tipo Schnabel, etc.

Al final, lo que importa de cara al cálculo del desgaste es la carga por eje, por lo que es este parámetro el que se va a variar en lugar de la tara del vagón o la carga útil. La máxima carga por eje está estrechamente ligada con el diámetro nominal de las ruedas del eje y es un valor que viene dado por el fabricante. Sin embargo, a diámetros grandes prevalece el límite de la infraestructura.

Al revisar el material rodante ofrecido en el mercado, se encuentra que la menor carga por eje se alcanza en el bogie Graz Pauker 702 (el bogie cuyas ruedas tienen 355 mm de diámetro), con un valor de 5 t/eje. Por otro lado, la mayor carga es la que permite la normativa en los mejores trazados (de categoría D4), que es 22,5 t/eje (véase la [subsección I.5.1](#)), siendo esta la carga para la que están diseñadas las ruedas de 920 mm. De esta categoría es el trazado de ensayo (véase la [sección V.1](#)).

La información anterior brinda máximos, mas no mínimos. Como mínimo en cada caso, y con la intención de considerar condiciones realistas de operación, debe asignarse la tara del vagón dividida entre el número de ejes del mismo, que es la carga que el vagón lleva en vacío (es decir, cuando su carga útil es nula).

En base a esta información, se proponen los siguientes rangos de carga por eje para cada caso:

- ✓ $\lambda_{eje} \in [\lambda_{tara}/n_{ejes}; 5]$ t/eje en el caso de la rueda de 355 mm.
- ✓ $\lambda_{eje} \in [\lambda_{tara}/n_{ejes}; \lambda_{eje,m\acute{a}x} (= f(D))]$ t/eje en el caso de una rueda de diámetro D .
- ✓ $\lambda_{eje} \in [\lambda_{tara}/n_{ejes}; 22,5]$ t/eje en el caso de la rueda de 920 mm.

8.5.2.2. Altura del centro de gravedad de la carga por eje.

La altura del centro de gravedad o cota del baricentro de la carga por eje es la media ponderada con la carga de la cota del baricentro de la tara y de la cota del baricentro de la carga útil. Consecuentemente, existen múltiples combinaciones, cada una de las cuales da una cota del baricentro de la carga por eje diferente.

Al final, lo que importa de cara al cálculo del desgaste es la cota del baricentro, por lo que es este el parámetro que se va a variar en lugar de la cota del baricentro de la tara o la de la carga útil.

Para este parámetro no se encuentra información sobresaliente en las referencias, aunque se puede calcular en base a ciertos datos presentes en las mismas. Por ejemplo, atendiendo al material rodante presentado en el [anexo IV](#):

- ✓ El vagón de piso alto Sggnss 80" tiene su plano de carga a 1.155 mm sobre el plano de rodadura y su tara es 21,5 t. Por la disposición de esta tara, puede asumirse que su baricentro se encuentra a 866 mm (75 % de 1.155) sobre el plano de rodadura. Este vagón puede transportar una carga útil de hasta 68,5 t, la cual puede alcanzar una altura de hasta 3.495 mm (4.650 – 1.155) por el gálibo GC o GEC16. Si esta carga está equidistribuida, entonces su baricentro caerá a la mitad de dicha altura: 1.748 mm o 2.903 mm sobre el plano de rodadura. Estos datos resultan en la siguiente cota del baricentro:

$$H_{CdG}^{p.a.} = \frac{2.903 \cdot 68,5 + 0,75 \cdot 1.155 \cdot 21,5}{68,5 + 21,5} = 2.416 \text{ mm}$$

- ✓ Un vagón de piso bajo Saadkms tiene su plano de carga a 316 mm sobre el plano de rodadura y su tara es 18,5 t. Por la disposición de esta tara, puede asumirse que su baricentro se encuentra a 158 mm (50 % de 316 mm) sobre el plano de rodadura. Este vagón puede transportar una carga útil de hasta 44 t, la cual puede alcanzar una altura de hasta 4.334 mm (4.650 – 316) por el gálibo GC o GEC16. Si esta carga está equidistribuida, entonces su baricentro caerá a la mitad de dicha altura: 2.167 mm o 2.483 mm sobre el plano de rodadura. Estos datos resultan en la siguiente cota del baricentro:

$$H_{CdG}^{p.b.} = \frac{2.483 \cdot 44 + 0,50 \cdot 316 \cdot 18,5}{44 + 18,5} = 1.795 \text{ mm}$$

Estos datos dan una idea de la cota del baricentro, pero son insuficientes *per se* para determinar un rango, ya que para ello requiere de un límite inferior y de otro superior. El límite inferior lo marca el vagón vacío y se obtiene al reaplicar las fórmulas con carga útil nula. El límite superior se puede hallar reaplicando las fórmulas suponiendo que la carga útil no está equidistribuida y que su baricentro se encuentra a 3/4 de su altura (2.621 mm para el vagón de piso alto y 3.250 mm para el de piso bajo, que se convierten en 3.416 y 3.566 mm sobre el plano de rodadura al adicionarles las respectivas alturas del plano de carga).

Dicho esto, el rango de variación propuesto para la altura del centro de gravedad es el que sigue:

- ✓ $H_{CdG}^{p.a.} \in [866; 2.807]$ mm en vagones de piso alto o tradicionales.
- ✓ $H_{CdG}^{p.b.} \in [158; 2.557]$ mm en vagones de piso bajo.

8.5.3. Del trazado ferroviario.

8.5.3.1. Límites de velocidad.

Para modificar la velocidad de circulación del vehículo, lo que se propone es modificar los límites de velocidad al inicio y al final de cada subtramo, que son datos que se pueden modificar en las tablas expuestas en el [subcapítulo V.4](#) o en la [subsección V.5.3](#) (las cuales recogen los límites de velocidad en un principio). Esta modificación de la velocidad del trazado puede realizarse de dos maneras distintas:

- ✓ Modificando en la misma medida la velocidad inicial y la final, para lo cual se les suma o resta el mismo delta de velocidad. De esta forma se mantiene el efecto de las frenadas, que depende fundamentalmente del salto entre la velocidad inicial y la final.
- ✓ Modificando de manera desigual la velocidad y la final, para la cual se les suma o resta deltas de velocidad desiguales. De esta forma se puede magnificar o atenuar el efecto de las frenadas. De todas formas, para alterar la severidad de las frenadas resulta más efectiva la modificación del grado de la deceleración n_{dec} (constante, lineal, parabólica, etc.).

Por otro lado, cabe considerar que, tal como se explicó en el [subcapítulo V.4](#), los límites de velocidad para los trenes mercantes, que son de tipo (N), son tales que impiden que la aceleración centrífuga no compensada supere los $0,65 \text{ m/s}^2$ en ningún punto del trazado. Por tanto, aumentar la velocidad del trazado producirá un incremento de esta aceleración, lo cual transferirá una mayor carga de las ruedas internas a las externas a las curvas e incrementará el desgaste de las últimas. Para evitar llegar a tener situaciones de desgaste en condiciones de velocidad irreales, es conveniente no incrementar demasiado los límites de velocidad.

Teniendo en cuenta esto último, los deltas máximos de velocidad propuestos son: -40 km/h y $+10 \text{ km/h}$. Es decir, los rangos serán: $[V_i - 40; V_i + 10] \text{ km/h}$ y $[V_f - 40; V_f + 10] \text{ km/h}$, donde V_i y V_f son las velocidades tabuladas y donde el delta aplicado a la velocidad inicial no tiene por qué coincidir con el aplicado a la velocidad final.

Estos deltas se aplicarían a todos los subtramos, aunque también se pueden modificar las velocidades en unos pocos subtramos de forma independiente. De hecho, esto es lo que se debe realizar en la estación de Milbello para programar una parada en la misma, pues en principio se supone que el tren no para y atraviesa la estación a 70 km/h , que es el límite de velocidad local. Esta parada se puede programar siguiendo las indicaciones escritas al pie de la tabla V.12 del [subcapítulo V.4](#).

Nota: Si al realizar la substracción de velocidad se obtuviere un número negativo, este número se saturará a 0 km/h (esto es realista porque no sucede en la mitad del trazado, sino a la entrada o salida de algunas estaciones).

8.5.3.2. Resto de los parámetros.

Por lo demás, cabe recalcar que los parámetros del trazado se mantienen fijos siempre y cuando el origen del tren esté en la estación Albarque y el destino en la estación de Zacarín.

Por el contrario, cuando su origen esté en la estación de Zacarín y su destino en la estación de Albarque, entonces habrá que alterar ciertos parámetros en la tabla finalmente introducida en el EES (la tabla V.20, en el [subapartado V.5.3](#)), a saber:

- ✓ El sentido de las curvas. Aquellas curvas que en el sentido Albarque – Zacarín eran a izquierdas serán ahora a derechas y viceversa.
- ✓ Los límites de velocidad inicial y final en cada subtramo. Al recorrer el tren el trazado en sentido inverso, lo que antes se definía como inicial será ahora final y viceversa. Por tanto, la variable V_i deberá ser permutada por V_f (sin enviar los valores de una columna a la otra).

8.5.4. Otros.

8.5.4.1. Coeficiente de rozamiento dinámico.

El coeficiente de rozamiento dinámico o coeficiente de adherencia es un parámetro fundamental en el contacto rueda – carril. A mayor valor de este coeficiente, una mayor cantidad de energía se disipará en el área de contacto, por lo que el desgaste también será mayor (en ello se fundamentan los modelos de desgaste basados en la transferencia de energía, los cuales se presentaron en la [subsección 5.2.4](#)).

A la hora de simular, el valor de este coeficiente se suele tomar 0,40 y se suele mantener constante a lo largo de toda la simulación [6, p. 259]. Empero, frecuentemente interesa disponer de valores del coeficiente de fricción diferentes o que varíen con determinadas condiciones. Por ello, se va a proponer una variación del coeficiente de fricción, para lo cual se toma como base el método de Polach con coeficiente de fricción variable (véase la [subsección 4.5.9](#) entera).

Según se explica en dicha subsección, Polach propone una ley exponencial por la cual el coeficiente de fricción varía con la velocidad de deslizamiento. Esta ley exponencial queda ajustada mediante los parámetros μ_o , A_f y B_f , los cuales dependen principalmente de si las condiciones de contacto son secas o húmedas. Pero esto no es suficiente para considerar la variabilidad del coeficiente de fricción, dado que también se hace necesario reajustar la pendiente de la curva fuerza – deslizamiento para que los resultados teóricos se asemejen a los experimentales. Esta modificación de la pendiente se efectúa mediante los parámetros k_A y k_S .

Dicho esto, lo que se propone es emplear estos parámetros para simular la variación del coeficiente de rozamiento. Los parámetros que se toman son los presentados en la tabla 4.3 (provenientes a su vez de un artículo de Polach), que vienen dados para condiciones húmedas y secas:

- ✓ Condiciones secas: $k_A = 1$, $k_S = 0,40$, $\mu_o = 0,55$, $A_f = 0,40$ y $B_f = 0,60$ [s/m].
- ✓ Condiciones húmedas: $k_A = 0,30$, $k_S = 0,10$, $\mu_o = 0,30$, $A_f = 0,40$ y $B_f = 0,20$ [s/m].

8.5.4.2. Reparto de la carga en el caso de contacto pestaña – carril.

Cuando la pestaña contacta con el carril, parte de la carga recae sobre la pestaña y parte sobre la banda de rodadura, por lo que aparecen dos áreas de contacto, una en cada una de las regiones mencionadas. El porcentaje de carga que recae sobre la pestaña se modula por medio del parámetro α_{fn} , el cual fue introducido en la [parte III.5.5.4](#).

A modo de resumen puede decirse que $\alpha_{fn} = 1$ implica que el contacto pestaña – carril es puro y que $\alpha_{fn} < 1$ implica que no lo es, pues parte de la carga recae también sobre la banda de rodadura.

En un análisis de sensibilidad resulta de interés variar este parámetro con el fin de observar su efecto en el desgaste de la rueda (sobre todo de la pestaña), motivo por el cual se va a proponer una variación del mismo.

Teniendo en cuenta que, por definición, $0 \leq \alpha_{fn} \leq 1$ y que $\alpha_{fn} < 0,50$ ya sería un reparto de cargas inusual (en general, $\alpha_{fn} \geq 0,50$ [39.A]), el rango de variación propuesto es el dado a continuación: $\alpha_{fn} \in [0,50; 1]$.

8.5.4.3. Ángulo de contacto en el caso de contacto pestaña – carril.

Cuando la pestaña contacta con el carril lo hace con un determinado ángulo respecto a este. Como se estudió en la [parte III.5.5.2](#), este ángulo no siempre es el mismo y va variando de tal forma que se asegure el equilibrio de fuerzas (con la obvia evitación del descarrilamiento) en cada instante.

El problema es que no hay una fórmula para calcular cuál será *a priori* este ángulo (a no ser que se considere la saturación del rozamiento, lo cual no es correcto por lo general), por lo que solamente se pueden establecer unos rangos, estimados sobre todo al aproximar la rueda y el carril y observar las posiciones donde podrían llegar a contactar. Esta aproximación y estas observaciones se pueden encontrar en la [parte III.5.6.3](#).

Atendiendo a la información de estas partes y considerando que de partida se considera $\gamma_o = 32^\circ$, el rango de variación propuesto para este parámetro es el que sigue (despreciando $\gamma_o > 70^\circ$, dado que se trata de una situación extrema próxima al descarrilamiento): $\gamma_o \in [32; 70]^\circ$.

Desafortunadamente, este parámetro no se puede variar sin modificar el radio de curvatura R_{x_2} , pues ambos están íntimamente ligados. De hecho, según la información expuesta en la [parte III.5.6.3](#), R_{x_2} ha de tomarse 36 mm entre 32° y 36° y 13 mm entre 36° y 70° .

Otro parámetro cuya influencia no puede desdeñarse es R_{y_2} , si bien su variación no es tan brusca como en el caso de R_{x_2} . Este parámetro resulta de la división de r_p (el radio de la pestaña) entre $\cos\gamma_o$ (véase este cálculo en la [parte 7.6.5.2](#)). A r_p no se le puede dar un valor fijo como a R_{x_2} , ya que su variación es mayor, pero sí se puede disponer un nuevo rango basándose en los límites del rango de γ_o arriba establecido: $r_p \in [r_o + 4,519; r_o + 13,557] \text{ mm}$.

Por último, cabe recordar que el radio de curvatura R_{x_1} se mantendrá constante independientemente del valor de γ_o , ya que es la esquina del carril la que siempre contacta con la pestaña (de ahí que siempre se parta de $R_{x_1} = 13 \text{ mm}$ en estas situaciones). Y con respecto a la semiconicidad o inclinación equivalente k , resulta que siempre se puede obtener como la tangente de γ_o .

9. Definición de los escenarios de cálculo.

9.1. Introducción.

En este capítulo se van a definir los diferentes escenarios de cálculo para el caso de estudio definido en el capítulo previo. Cabe destacar que existen dos clases de escenarios:

- ✓ Aquellos que satisfacen indirectamente el objeto del trabajo. Estos escenarios sirven para realizar verificaciones, comparaciones y comprobaciones. La interpretación de los resultados de este escenario resulta vital para el planteamiento de la siguiente clase de escenarios.
- ✓ Aquellos que satisfacen directamente el objeto del trabajo. Estos escenarios se centran en el cálculo de la vida útil de ruedas de diferentes diámetros bajo diferentes condiciones de operación.

Antes que nada, se fijan aquellos valores que se van a mantener constantes para todos los escenarios. Una vez se tiene esto, se definen los escenarios uno por uno, planteándose todos los detalles que hagan su resolución posible. Los resultados obtenidos se muestran ordenadamente en el [capítulo 10](#) junto con una interpretación de los mismos.

9.2. Fijación de valores constantes.

Los valores que se van a mantener constantes para todos los escenarios se muestran abajo tabulados. Para la correcta interpretación de la misma debe tenerse en cuenta que B. R. hace referencia a la banda de rodadura y B. R.' a la banda de rodadura de la rueda opuesta a aquella cuya pestaña contacta con el carril (estando ambas ruedas en el mismo eje). R_{x_2} se toma $5 \cdot 10^7$ cuando tiende a valer infinito según la teoría, valor que no admite el programa.

He aquí la tabla:

Tabla 9.1. Fijación de los valores constantes para todos los escenarios.

Variable	Valor (cte.)	Variable	Valor (cte.)	Variable	Valor (cte.)
E_1 [Pa]	$2,100 \cdot 10^{11}$	R_{x_1} (B.R.) [m]	$300 \cdot 10^{-3}$	ν_1 [Ø]	0,285
E_2 [Pa]	$2,100 \cdot 10^{11}$	R_{x_1} (B.R.') [m]	$80 \cdot 10^{-3}$	η [m]	0,007
g [m·s ⁻²]	9,810	R_{x_2} (B.R.) [m]	$5 \cdot 10^7$	ν_1 [Ø]	0,285
G_1 [Pa]	$81,712 \cdot 10^9$	R_{x_2} (B.R.') [m]	$5 \cdot 10^7$	ν_2 [Ø]	0,285
G_2 [Pa]	$81,712 \cdot 10^9$	o [m]	0,075	ρ [kg·m ⁻³]	7.850
J [m]	1,668	w_w [m]	0,140	τ_{lim} [Pa]	$3,120 \cdot 10^8$
k (B.R.) [Ø]	0,025	γ_o (B.R.) [º]	1,432		
k (B.R.') [Ø]	0,025	γ_o (B.R.') [º]	1,432		

9.3. Escenarios I – VI.

Los escenarios I, II, III, IV, V y VI satisfacen indirectamente el objeto del trabajo, pues en ellos no se calcula directamente la vida útil de la rueda bajo diferentes condiciones de operación. Estos escenarios se plantean en el [anexo VI](#) dada su extensión e impertinencia en la memoria, pues se trata de material auxiliar en lo que respecta al cumplimiento del objeto del proyecto. Estos escenarios se resumen en los párrafos inferiores:

1. En el escenario I se plantea verificar la necesidad de limitar la carga en las ruedas más pequeñas. Esto se realiza en la [subsección VI.1.1](#) en base a los [bogies tomados como referencia](#), en los cuales se observa claramente cómo los fabricantes reducen la carga por eje límite conforme disminuye el diámetro de las ruedas del bogie.
2. En el escenario II se plantea comparar el desgaste sufrido por ruedas de diferentes diámetros calculado según la ley de desgaste la BRR. Esto se realiza en la [subsección VI.2.1](#) e incluye todos los bogies tomados como referencia.
3. En el escenario III se plantea la repetición los cálculos, realizándose esta vez según la ley de la USFD. Esto se realiza en la [subsección VI.3.1](#).

4. En el escenario IV se plantean diferentes comprobaciones de bloqueo y descarrilamiento. Esto se desarrolla en la [subsección VI.4.1](#) y tiene su importancia, pues deben evitarse estas situaciones para que no se incumplan las hipótesis y los cálculos posteriores sean válidos.
5. En el escenario V se plantea la repetición de las comprobaciones de descarrilamiento, pero con diferentes ángulos de contacto. Esto se desarrolla en la [subsección VI.5.1](#) y es importante para hallar el ángulo óptimo de contacto (o un rango de variación de dicho ángulo).
6. Finalmente, en el escenario VI se plantea una búsqueda de los parámetros o factores que más influyen en el desgaste con un análisis de sensibilidad. Esto se efectúa en la [subsección VI.6.1](#).

Los resultados de estos escenarios se muestran también en el mismo anexo, pero se resumen en la [subsección 10.1](#).

9.4. Escenario VII. Cálculo de la vida útil de una rueda de 920 mm de diámetro.

En este primer escenario que satisface directamente el objeto del trabajo se plantea el cálculo de la vida útil de la rueda más grande de entre todas las estudiadas: la rueda de 920 mm de diámetro nominal, perteneciente al bogie Y – 25. Va a presumirse que trabaja a 1.235 MPa (en recta) para poder cotejar los resultados este escenario con los resultados de los demás (esto equivale a 18.784 kg/eje).

En primer lugar, lo que se realiza es fijar los parámetros o factores de entrada, los cuales son necesarios para ligar la vida útil que se pretende hallar a dichos parámetros o factores. Para ello, lo que se toman como referencia son los datos de entrada de los escenarios previos y las interpretaciones de los resultados de dichos escenarios, en las cuales se afinaron algunos parámetros. Helos aquí:

Tabla 9.2. Datos de entrada particulares del escenario VII.

Variable	Valor	Variable	Valor	Variable	Valor
D [m]	0,920	n_{ejes} [Ø]	4	$\gamma_o (P)$ [°]	51 – 70
e [m]	1,800	n_{dec} [Ø]	0	λ_{eje} [kg]	18.784
H_{tara} [m]*	0,512	r_p [m]	0,467 – 0,475	λ_{tara} [kg]*	20.000
H_{CdG} [m]*	1,573	$R_{x_1}(P)$ [m]	$13 \cdot 10^{-3}$	λ_u [kg]*	55.136
H_u [m]*	1,958	$R_{x_2}(P)$ [m]	$(13 20) \cdot 10^{-3}$	μ [Ø]	0,400
$k(P)$ [Ø]	1,235 – 2,747	α_{fn} [Ø]	0,75		

Donde los datos marcados con un asterisco son datos supuestos u obtenidos en base a datos supuestos. Así, se ha supuesto una tara de 20.000 kg (como en los escenarios previos), una carga útil máxima de 55.136 kg (porque 55.136 más 20.000 kg entre los 4 ejes del vagón dan como resultado los 18.784 kg de carga por eje), una altura del baricentro de la carga útil de 1,958 m (media aritmética de los valores homólogos utilizados en los cálculos de $H_{CdG}^{p.a.}$ y $H_{CdG}^{p.b.}$ en la [parte 8.5.2.2](#)), una altura de la tara de 0,512 m (otra media aritmética sobre los valores empleados en tales cálculos) y una altura del baricentro de la carga por eje de 1,573 m (este dato se obtiene introduciendo todos los anteriores en la fórmula de H_{CdG}).

De todas estas variables, las únicas cuyos valores no se introducen en el programa son λ_u y H_u . Estas variables se dejan libres, lo cual significa que el programa las calculará en función de las demás variables nombradas en el párrafo anterior.

Aparte, nótese que en las variables $k(P)$, r_p y $\gamma_o(P)$ se ha expresado un rango de valores y dos valores concretos en el caso de R_{x_2} . El porqué de esto se explicará más adelante.

Una vez fijados estos parámetros, lo que se fija es el sistema de referencia $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$ del bogie Y – 25 que se acaba de modificar. El origen de este sistema se fija como en la figura VI.3 del [planteamiento del escenario II](#) y se utiliza prácticamente la misma parametrización para llegar a obtener las coordenadas de todas las áreas de contacto. La única diferencia radica en que ahora se ha añadido el parámetro o_p , pues será necesario para obtener las coordenadas del área de contacto de la banda de rodadura en la misma rueda en la cual se dé el contacto rueda – carril:

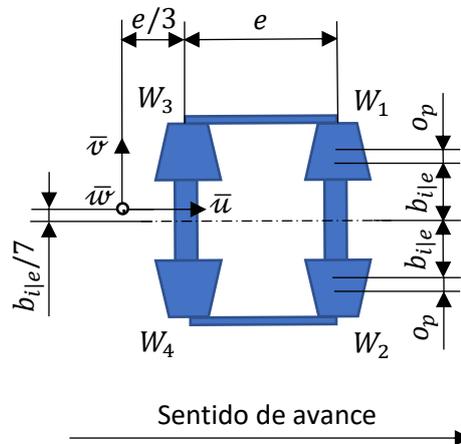


Figura 9.1. Fijación del sistema de referencia $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$ en el bogie Y – 25 modificado. Fuente: Elaboración propia.

Para la obtención de la vida útil se va a presumir que el vagón equipado con dos bogies Y – 25 forma parte de un convoy de mercancías que realiza las siguientes operaciones logísticas en bucle:

1. El tren parte de la estación de Albarque con rumbo a la estación de Zacarín.
2. El tren realiza una parada en la estación intermedia de Milbello (de la forma en que se indica al pie de la tabla V.12 del [subcapítulo V.4](#)). Esta parada es de carácter logístico, pues sirve para desenganchar un vagón o enganchar uno nuevo, dependiendo de la planificación logística.

3. El tren arriba a la estación de Zacarín. Allí se descargan los vagones y la locomotora, que hasta ahora había estado en la cabeza de la composición, se engancha ahora a la cola.
4. Los vagones se cargan con nueva mercancía en la estación de Zacarín y desde allí el convoy es despachado con destino en la estación de Albarque.
5. El convoy realiza una parada en la estación intermedia de Milbello, nuevamente de carácter logístico.
6. El convoy arriba a la estación de Albarque. Allí se descargan los vagones y la locomotora vuelve a engancharse al extremo opuesto del convoy.
7. Estas operaciones logísticas se realizan en bucle (vuélvase al punto 1).

De acuerdo con esto, cada vagón recorre los 37,636 km que separan Albarque de Zacarín en los dos sentidos o, lo que es lo mismo, 70,272 km por ciclo logístico. Entiéndase que al vagón no se le realiza una rotación de 180° en ninguna de las estaciones, sino que solamente se le invierte el sentido de su marcha al ser arrastrado por la locomotora en un sentido o en otro. Por ello, el juego de ruedas que antes encabezaba cualquiera de los dos bogies del vagón, se convertirá en el juego trasero del bogie cuando al vagón se le invierta el sentido de su marcha. Esto se representa en la imagen inferior:

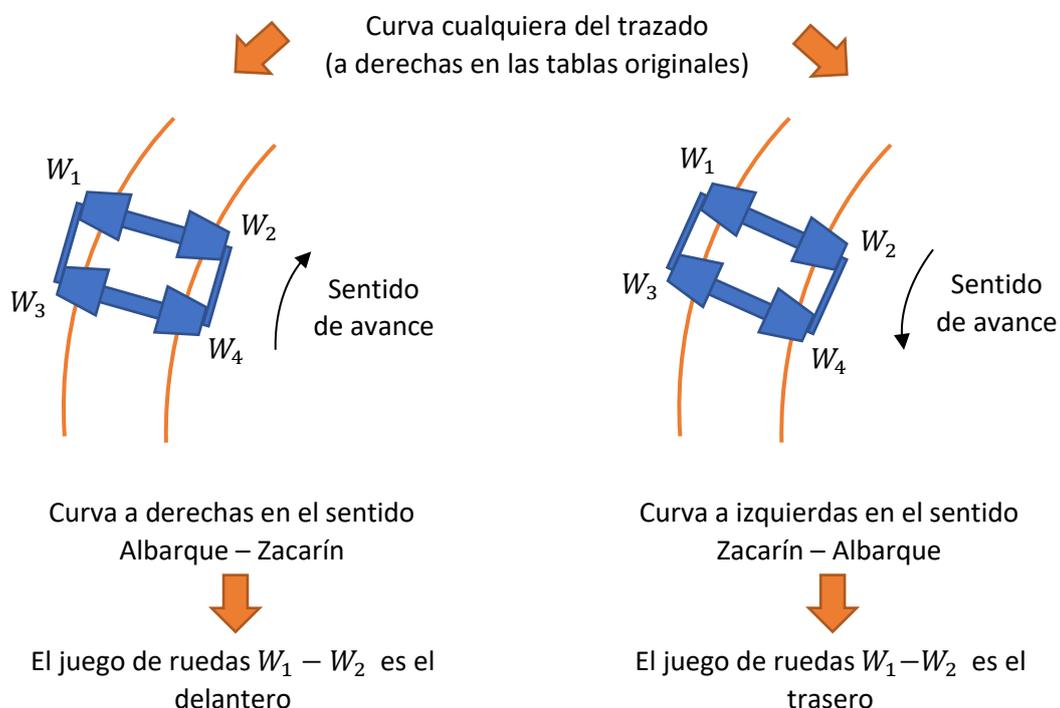


Figura 9.2. Posición de los juegos en el bogie según el sentido en el que este realice el recorrido. Fuente: Elaboración propia.

De esta imagen se puede inferir un par de ideas:

1. En el sentido Albarque – Zacarín el juego $W_1 - W_2$ será el delantero en todas las curvas; luego sus ruedas serán las que sufran los contactos pestaña – carril (W_1 en las curvas dextrógiras y W_2 en las levógiras). Por otro lado, si el movimiento es restringido en alguna curva, entonces las ruedas del juego $W_3 - W_4$ padecerán también las consecuencias del contacto pestaña – carril (W_4 en las curvas dextrógiras y W_3 en las levógiras).
2. En el sentido Zacarín – Albarque el juego $W_3 - W_4$ será el delantero en todas las curvas; luego sus ruedas serán las que sufran los contactos pestaña – carril (W_1 en las curvas dextrógiras y W_2 en las levógiras). Por otro lado, si el movimiento es restringido en alguna curva, entonces las ruedas del juego $W_1 - W_2$ padecerán también las consecuencias del contacto pestaña – carril (W_1 en las curvas dextrógiras y W_2 en las levógiras).

Todo esto se resume en lo siguiente: Si el movimiento es libre en todas las curvas, entonces las ruedas W_1 y W_2 serán las que padezcan las consecuencias del contacto pestaña – carril en el sentido Albarque – Zacarín; por el contrario, en el sentido Zacarín – Albarque estas mismas ruedas quedarán en la cola del bogie, por lo que no experimentarán el contacto pestaña – carril (el movimiento continuará siendo libre al circular en sentido inverso). De hecho, en el sentido Zacarín – Albarque serán las ruedas W_3 y W_4 las que más sufran.

Ante esto, y ante la predicción de que el movimiento será libre en todas las curvas (porque la ratio $e/R_{min} = 1,800/265 < 0,01$, por lo que no se cumple el criterio del 1 % explicado en el [análisis comparativo del escenario VI](#), que es el criterio que debería cumplirse para que el movimiento fuese restringido en las curvas más cerradas), cabe plantearse si el desgaste sufrido por las ruedas W_1 y W_2 será idéntico al sufrido por las ruedas W_3 y W_4 .

La respuesta a la cuestión indirectamente enunciada es que el desgaste será prácticamente idéntico porque el problema es prácticamente simétrico, con asimetrías muy pequeñas. Tomando como referencia la figura 9.2 y recordando el efecto de las frenadas en el desgaste se puede aseverar lo que sigue:

- ✓ La rueda W_1 sufrirá prácticamente el mismo desgaste en la curva representada que la rueda W_3 tras invertir el sentido.
- ✓ Lo mismo sucede para las ruedas W_2 y W_4 .
- ✓ Las asimetrías provienen de las frenadas ordinarias y de las frenadas para mantener la velocidad constante cuando el bogie está descendiendo por una pendiente (extraordinarias).
- ✓ Las ordinarias serán más severas en un sentido u en otro (cuando en un sentido sean aceleraciones, en el otro serán frenadas), pues algunas aceleraciones en un subtramo corto pasarán a ser frenadas en un subtramo corto (muy severas, con un elevado valor de $\bar{\omega}'$).
- ✓ Sin embargo, la severidad de las frenadas ordinarias (modulada con el parámetro n_{dec}) es despreciable, tal como se demostró en el [análisis comparativo del escenario VI](#).

Tomando en consideración lo antedicho, la asimetría causada por las frenadas ordinarias se desprecia. Así, si se considera únicamente la asimetría causada por las frenadas extraordinarias, resulta el sentido más desfavorable desde el punto de vista del desgaste será el Zacarín – Albarque, pues el tren tiene que frenar bastante al ir cuesta abajo (la estación de Albarque está a 650,0 m. s. n. m., una cota inferior a la de la estación de Zacarín, que se emplaza a 831,0 m. s. n. m.).

De ahí que los cálculos de desgaste según la distancia recorrida, los cuales conducirán a la vida útil de la rueda, se vayan a realizar para la rueda que más se desgasta en el sentido Zacarín – Albarque.

Si en el sentido Albarque – Zacarín predominan las curvas a izquierdas, pues la rueda que más se desgasta es la W_2 (eso se observa en los resultados de los escenarios II, III y VI), entonces en el sentido Zacarín – Albarque predominarán las curvas a derechas y la rueda que más se desgastará será la W_4 .

Si se reenumeran las ruedas del bogie para poder fijar el sistema $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$ como en la figura 9.1, entonces la rueda W_4 pasa a ser la W_1 , la W_3 pasa a ser la W_2 y al contrario para las demás ruedas.

Este desgaste no puede acumularse en una única posición de la pestaña de la rueda W_4 (renombrada como W_1), pues se formaría un “túnel de desgaste” en el cual no podría entrar el carril. Este desgaste ha de repartirse a lo largo de la pestaña, entre los ángulos de contacto 51° y 70° , ya que es en esta región donde las fuerzas sobre la pestaña están equilibradas y no se produce el descarrilamiento, tal como se concluyó en el [análisis comparativo del escenario V](#). Valores entre 70° y 80° también podrían darse, si bien son menos viables teniendo en consideración el tamaño de la esquina del carril en relación al tamaño de la pestaña. Tener esto en consideración da pie a la imagen inferior.

En la imagen inferior se han juntado los perfiles del carril y de la rueda para que encajen (en la realidad unos perfiles nuevos o apenas desgastados nunca encajarían así, sino que tendrían distintas posiciones relativas según los valores de Φ y ψ , del equilibrio de fuerzas y del desgaste previo) y se pueda ver a qué región afecta el contacto pestaña – carril con el fin de delimitarla y así poder tomar las medidas necesarias. He aquí la imagen, cuyas coordenadas se expresan en el sistema de referencia $X''_p Y''_p Z''_p$ (definido en la [parte III.5.6.1](#)):

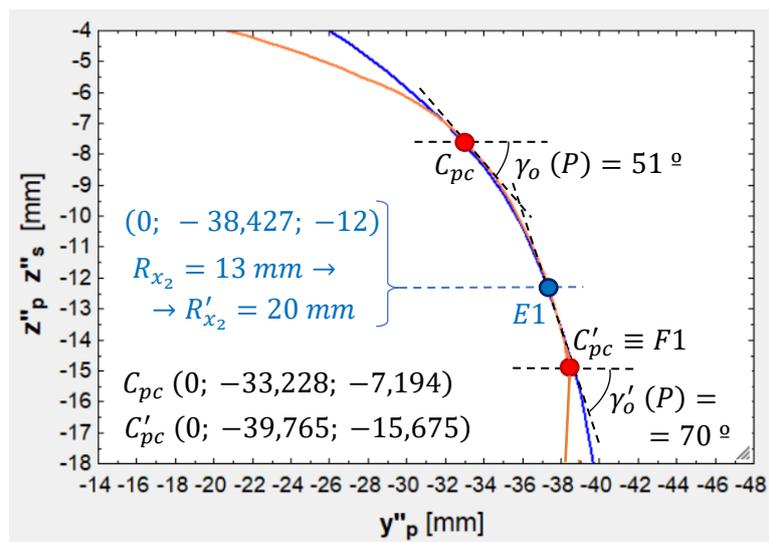


Figura 9.3. Reparto del desgaste a lo largo de la pestaña. Fuente: Elaboración propia.

En esta imagen se han marcado los siguientes puntos, los cuales se definen en orden descendente:

- ✓ El punto C_{pc} (donde pc hace referencia a pestaña – carril), que es donde se produce el contacto pestaña – carril con un ángulo de 51° . Este varía entre este punto y el próximo.
- ✓ El punto E1, que es un punto definido en la norma UNE-EN 13715:2007+A1 [29.A]) en el cual se produce la variación del valor de R_{x_2} , el cual pasa de 13 mm (R_{x_2} en la imagen) a 20 mm (R'_{x_2} en la figura). Entre este punto y el próximo se tiene un ángulo de 70° .
- ✓ El punto C'_{pc} , que es el punto en el que finaliza la región lineal (se llama así la región donde el ángulo se mantiene constante en 70°). La norma citada denota este punto con F1 [29.A].

Los puntos C_{pc} y C'_{pc} distan 11,154 mm entre sí (no en línea recta, sino avanzando por los arcos de la rueda o del carril), mientras que la distancia entre E1 y C'_{pc} es tan solo 4,507 mm de C'_{pc} (por ello, el contacto pestaña – carril se producirá más frecuentemente con R_{x_2} , que es un radio más desfavorable que R'_{x_2} . Por ende, el área de contacto (de anchura b , que está más de un orden de magnitud por debajo de 11,154 mm) se irá desplazando entre C_{pc} y C'_{pc} y la esquina del carril arrancará el material de la pestaña hasta que se alcance la profundidad máxima admisible del desgaste, tal que así:

1. El contacto pestaña – carril se producirá en el punto C_{pc} (con $\gamma_o (P) = 51^\circ$). Allí se perderá material con una anchura $2b$ y una profundidad H_{USFD} (porque los cálculos se efectuarán con la ley de la USFD, tal como se determinó en el [análisis comparativo del escenario III](#)).
2. Cuando $H_{USFD} \sim 0,3$ mm (valor alcanzado tras una vuelta), el carril ya no podrá acceder a la zona que ha perdido material y entonces el contacto se producirá con $\gamma_o (P) > 51^\circ$. Entonces se generará una afección a una nueva zona, la cual perderá material hasta $H_{USFD} \sim 0,3$ mm.
3. De este modo, se irán produciendo contactos sucesivos hasta el punto C'_{pc} ($\gamma'_o (P) = 70^\circ$).
4. Una vez haya sucedido esto, el desgaste se reiniciará en C_{pc} (retórnese al punto 1).

Para terminar de definir este escenario, falta por aclarar que los reperfilados se van a programar cuando la profundidad del desgaste en la pestaña haya alcanzado 1 mm, que es el valor teórico de la profundidad máxima admisible del desgaste (véase la [parte 8.5.1.2](#)). Empero, un valor tan ajustado no permite quitar grietas, así que se toma 1,5 mm (3 mm en D) como profundidad de pasada en el torno.

Cabe acotar que esta cifra implica que en cada retorneado se produce una disminución de 2 mm en el diámetro nominal (mas también afecta a r_p), cuyo valor inicial es 920 mm y cuyo valor final es 840 mm (863 mm si la misma rueda se instala en un vagón del sistema Modalohr). En otras palabras: el fin de la vida útil de la rueda se produce cuando su diámetro nominal llega a los 840 mm (863 mm en un vagón del sistema Modalohr) tras haber sufrido intensamente el desgaste por abrasión y adhesión.

Como resultado de este escenario se muestra la gráfica diámetro – kilometraje en la [sección 10.2](#). Estas gráficas son las habituales cuando se representa la duración de una rueda según el número de kilómetros que rueda (o sea, su vida útil). En este sentido, la gráfica que se toma como modelo es la figura 5.6 de la [sección 5.4](#).

9.5. Escenario VIII. Cálculo de la vida útil de una rueda de 680 mm de diámetro.

En este segundo escenario que satisface directamente el objeto del trabajo se pretende calcular la vida útil de una rueda de tamaño intermedia. Tal como se explicó durante el [planteamiento del escenario VI](#), la rueda de tamaño intermedio es la de 680 mm (240 mm menos que la rueda más grande y 325 mm más que la rueda más pequeña).

Esta rueda pertenece al bogie Saas-z 703, que es el mismo bogie que se simuló en el escenario VI. En dicho escenario se asignó la carga por eje límite estipulada por el fabricante: 16.000 kg. Empero, este valor se va a descartar en el presente escenario, pues el objetivo es realizar los cálculos en igualdad de condiciones con el escenario precedente a fin de poder cotejar los resultados. Ello fuerza a efectuar estas adaptaciones de los datos particulares de entrada:

- ✓ Para la carga por eje se utilizará el valor con el cual la rueda trabaja a 1.235 MPa (en recta). Esta tensión o presión se alcanza con 15.325 kg.
- ✓ Como, al igual que en el caso previo, $n_{ejes} = 4$ y $\lambda_{tara} = 20.000$ kg, el valor de λ_u obtenido es 41.300 kg.
- ✓ Dado que H_{tara} y H_u conservan sus valores (0,512 y 1,958 m, correlativamente), el valor de H_{cdG} obtenido tras aplicar la fórmula correspondiente es 1,486 m.
- ✓ Sin embargo, al hacer uso de esta cifra se perdería la igualdad de condiciones con respecto al escenario previo. Para mantenerla, lo que se realiza es aplicar la misma cifra que antes, que es 1,573 m, y fijar de nuevo $H_u = 0,512$ m. Como H_u queda libre, esta cota se recalculará en función de las otras dos (valdrá 2,087 m, precisamente).
- ✓ La última adaptación es la del rango de r_p . En esta rueda se tendrá un rango de r_p diferente, pues su radio nominal es menor: 0,347 – 0,355 m.

Los demás parámetros se mantienen constantes y, además, la parametrización de las coordenadas de las áreas de contacto en el sistema $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$ se puede aprovechar también en este escenario, ya que el bogie Saas -z 703 también es de 4 ruedas.

En cuanto al procedimiento que se va a aplicar en el actual escenario, este es idéntico al explicado en el escenario previo (manteniendo incluso 1 mm como profundidad máxima admisible del desgaste).

Como particularidad, resulta que esta rueda solamente se puede reperfilear hasta 630 mm, lo cual supone una pérdida de 50 mm de diámetro. En el escenario previo se tenía una pérdida máxima de 80 mm (de 920 a 840 mm), por lo que aquí surge una nueva desigualdad de condiciones. Para subsanar esto, lo que se realiza es utilizar 50 mm en principio, pero después se prolonga la gráfica hasta alcanzar una pérdida de 80 mm. De este modo se podrá comparar mejor la gráfica con la gráfica obtenida en el anterior escenario.

Una vez se ejecutado el procedimiento se obtiene la gráfica diámetro – kilometraje de rigor, la cual se expone en la [sección 10.3](#).

9.6. Escenario IX. Cálculo de la vida útil de una rueda de 355 mm de diámetro.

En este tercer escenario que satisface directamente el escenario del trabajo se pretende computar la vida útil de la rueda más pequeña: la rueda de 355 mm.

Esta rueda pertenece al bogie Graz Pauker 702, que es el mismo que se utilizó en los escenarios IV y V para la realización de las comprobaciones de bloqueo y descarrilamiento. Nuevamente, vuelve a ser primordial la equidad de condiciones, para lo cual se deben llevar a término estas adaptaciones:

- ✓ $\lambda_{eje} = 6.996$ kg. Gracias a esta carga las ruedas pueden trabajar a una presión de 1.235 MPa (en recta), tal como en los escenarios previos.
- ✓ λ_{tara} continúa en 20.000 kg, mas n_{ejes} cambia a 8. Ello hace que λ_u valga 35.968 kg.
- ✓ Para mantener el valor de H_{CdG} empleado con anterioridad (1,573 m), el valor de H_u se fija en 0,512 m. En función de los dos anteriores se calculará la cota H_u (que valdrá 2,163 m).
- ✓ La última adaptación es la del rango de r_p : 0,185 – 0,193 m.

Los demás parámetros se mantienen constantes y, pero, como el bogie Graz Pauker 702 es de 8 ruedas, ya no sirve la parametrización establecida para los bogies de 4 ruedas. Para salvar este inconveniente, se reformula la parametrización de las coordenadas de las áreas de contacto en el sistema $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$ inspirándose en lo realizado en el desarrollo plasmado en la figura VI.3 del [planteamiento del escenario II](#). La única diferencia radica en que ahora se ha añadido el parámetro o_p , pues será necesario para obtener las coordenadas del área de contacto de la banda de rodadura en la misma rueda en la cual se dé el contacto rueda – carril:

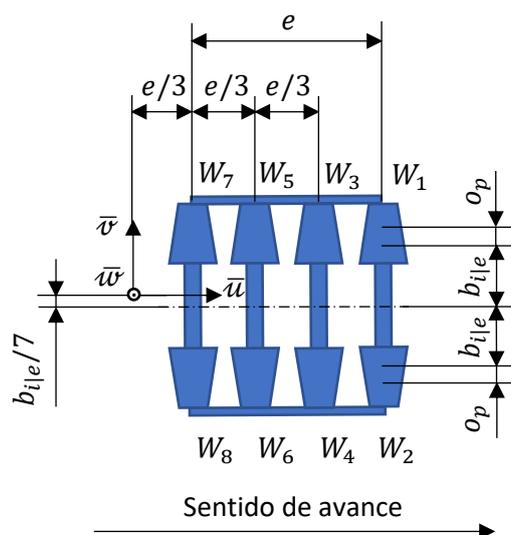


Figura 9.4. Fijación del sistema de referencia $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$ en el bogie Graz Pauker 702 modificado. Fuente: Elaboración propia.

En cuanto al procedimiento que se va a aplicar en el actual escenario, este es idéntico al explicado en el planteamiento del escenario VII (manteniendo incluso 1 mm como profundidad máxima admisible del desgaste).

Como particularidad, resulta que esta rueda solamente se puede reperfilear hasta 335 mm, lo cual supone una pérdida de 20 mm de diámetro. Este valor dista mucho de los 50 mm del escenario VIII y de los 80 mm del escenario IX; *ergo* aparece una nueva inequidad de condiciones. Para subsanar esto, lo que se realiza es utilizar 20 mm en principio, pero después se prolonga la gráfica hasta alcanzar una pérdida de 80 mm (pasando por 50 mm, obviamente). De este modo se podrá comparar mejor la gráfica con las gráficas obtenidas en los dos escenarios precedentes.

Una vez se ejecutado el procedimiento se obtiene la gráfica diámetro – kilometraje de rigor, la cual se expone en la [sección 10.4](#).

9.7. Escenario X. Análisis de sensibilidad.

En este último escenario se va a realizar un breve análisis de sensibilidad, en el cual se van a variar estos dos parámetros o factores, los cuales están entre los más influyentes, tal como se probó en el [análisis comparativo del escenario VI](#):

- ✓ Carga por eje. Es un parámetro o factor logístico muy influyente en el desgaste y que puede resultar muy variable según el uso que se le dé al vagón. Como se apuntó en la [parte 8.5.2.1](#), este factor puede variar entre la carga por eje proveniente solamente de la tara (o sea, cuando la carga útil es nula) y la carga por eje límite impuesta por el fabricante o la límite soportable por la infraestructura, que es 22,5 t/eje en el trazado de ensayo, pues su categoría es la D4 (véase la [sección V.1](#)).

Desde el punto de vista logístico – económico, es importante tener en cuenta que el transporte de vagones vacíos (con carga útil nula) debe evitarse por todos los medios y, por ende, lo mejor es fijar otro mínimo: la carga por eje proveniente de la tara más la mitad de la carga útil máxima (es decir, $\lambda_{eje} n_{ejes} = \lambda_{tara} + \lambda_{u,máx}/2$). Esto último significa que el vagón puede transportar siempre carga ligera equivalente a $\lambda_{u,máx}/2$ o transportar carga pesada en algunos trayectos y carga ligera en otros, siendo $\lambda_{u,máx}/2$ la carga útil equivalente a lo largo de la vida útil de sus ruedas.

Nótese que $\lambda_{u,máx}$ puede obtenerse según la carga límite impuesta por el fabricante y según n_{ejes} y λ_{tara} : $\lambda_{u,máx} = \lambda_{eje,lím} n_{ejes} - \lambda_{tara}$.

- ✓ Empate. Es un parámetro de diseño del bogie que condiciona en gran medida el desgaste. Su mínimo debe ser tal que se evite la interferencia de las ruedas (obtenible mediante la fórmula inserta en el rango de empate establecido en la [parte 8.5.1.3](#)) y su máximo debe ser 2,54 si se desea evitar el movimiento restringido del bogie en las curvas más cerradas (este valor proviene también del análisis comparativo del escenario VI).

Estos dos parámetros se van a variar en la rueda de 920 mm y en la rueda de 355 mm. Puesto que la rueda de 680 mm exhibe un comportamiento parejo al de la rueda de 920 mm (a este respecto, véanse las gráficas expuestas en las secciones [10.2](#) y [10.3](#)), por lo que no vale la pena practicar el análisis de sensibilidad sobre ella.

Los parámetros que no sean la carga por eje ni el empate se van a mantener constantes en todo momento, siéndoles asignado el valor que tenían en los escenarios VII – IX (véanse las secciones [9.4](#) y [9.6](#), las cuales resultan clarificadoras al respecto). Así, verbigracia, $\lambda_{tara} = 20.000$ kg en todos los casos.

Atendiendo a los mínimos y máximos de la carga por eje y del empate comentados, propónense estas alteraciones, cada una de las cuales da pie a un subescenario diferente:

Tabla 9.3. Establecimiento de los subescenarios del escenario X.

Subescenario	D [mm]	λ_{eje} [kg]	e [m]
a)	920	13.750	1,800
b)	920	22.500	1,800
c)	920	18.784	1,020
d)	920	18.784	2,540
e)	355	3.750	1,800
f)	355	5.000	1,800
g)	355	6.996	1,365
h)	355	6.996	2,540

El procedimiento de cálculo que se va a aplicar es exactamente el descrito en la [sección 9.4](#) y los resultados se van a presentar de un modo similar a los resultados de los escenarios VII – IX. Estos resultados se exponen en la [sección 10.5](#).

Finalmente, se aducen los motivos por los cuales no se propone la variación de los demás parámetros influyentes. Es importante justificar esto adecuadamente, pues este escenario es el último de los definidos en este trabajo y no deben quedar cabos sueltos:

- ✓ Ángulo de contacto. En verdad, este parámetro ya se varía al calcular la vida útil, pues la pestaña contacta con el carril con diferentes ángulos entre los puntos C_{pc} y C'_{pc} .
- ✓ Fracción de reparto de la carga entre las dos áreas de contacto de una rueda cuya sufridora del contacto pestaña – carril. Este parámetro puede adquirir valores en el rango 0,50 – 1, pero
- ✓ Coeficiente de adherencia. Trátase de un parámetro influyente, aunque moderadamente. En realidad, considerar $\mu = 0,40$ al computar la vida útil es lo más acertado, pues está a medio camino del coeficiente base en condiciones secas ($\mu_o = 0,55$) y del coeficiente base en condiciones húmedas ($\mu_o = 0,30$). A lo largo de su vida útil las ruedas rodarán unas veces bajo condiciones secas, mientras que otras veces lo harán bajo húmedas, por lo que considerar un valor promedio de 0,40 es lo más realista (para mayor realismo, esta cifra queda más cerca de 0,30 que de 0,55, lo cual es coherente con el hecho de que en los trazados montañosos es más frecuente la humedad que la sequedad). También debe considerarse que la variación de μ , de realizarse, iría aparejada de la alteración de los parámetros k_A y k_S (el porqué de esto se explica en la [parte 8.5.4.1](#)), si bien estos parámetros pierden influencia relativa frente a μ_o .
- ✓ Velocidad. La velocidad es también influyente, si bien tímidamente. A esto se suma el hecho de que los límites de velocidad del circuito ya son bajos *per se* (60 – 70 km/h, en general, y 85 km/h en los subtramos del trazado cuyos parámetros son más moderados) es muy poco probable que el tren realice el recorrido a 40 km/h por debajo (20 – 30 km/h, en general, y 45 km/h en los subtramos del trazado cuyos parámetros son más moderados). Aparte, como es obvio, el tren tampoco debería conculcar los reglamentos al circular a una velocidad superior.
- ✓ Baricentro de la carga por eje. En el [análisis comparativo del escenario VI](#) se comprobó que el efecto de este parámetro es bastante nimio, por lo que no merece la pena alterarlo en el presente análisis de sensibilidad.
- ✓ Grado de la función deceleración – tiempo. En el [análisis comparativo del escenario VI](#) no se pudo apreciar efecto ninguno al modificar este parámetro, por lo que no merece la pena alterarlo en el presente análisis de sensibilidad.

10. Resultados interpretados de los escenarios del problema.

10.1. Escenarios I – VI.

Los resultados de los escenarios I, II, III, IV, V y VI se muestran también en el [anexo VI](#), junto a su interpretación. En concreto, la interpretación se coloca debajo de los resultados para facilitar la consulta de estos mientras se lee la interpretación. Estas interpretaciones se resumen a continuación:

1. Los resultados del escenario I se muestran en la [subsección VI.1.2](#) y se interpretan en la [VI.1.3](#). Estos resultados evidencian que todas las ruedas trabajan a una tensión o presión similar (con una media de 1.235 MPa), por lo que probablemente los fabricantes hayan recurrido a las fórmulas de la solución de Hertz (o al método de los elementos finitos) a la hora de limitar la carga por eje. Al final se deduce teóricamente que el área de contacto disminuye conforme lo hace el diámetro y que ello obliga a reducir la carga por eje.
2. Los resultados del escenario II se muestran en la [subsección VI.2.2](#) y se interpretan en la [VI.2.3](#). De la interpretación de estos resultados se deduce que la evolución del desgaste con el diámetro no es la esperada (el desgaste disminuye conforme lo hace el diámetro al principio, aunque luego aumenta), lo cual se achaca a la formulación de la ley de la BRR. Siempre y cuando no se hayan cometido errores de planteamiento o hayan surgido otro tipo de errores, esto significa que la ley de la BRR no fue diseñada para contactos pestaña – carril.
3. Los resultados del escenario III se presentan en la [subsección VI.3.2](#) y se interpretan en la [VI.3.3](#). Los resultados del escenario previo se comparan con los de este nuevo escenario y entonces se descubre que la ley de la USFD brinda resultados coherentes con la tendencia esperada (el desgaste aumenta a medida que mengua el diámetro). Además, lo que se observa es que esta correlación se fortalece en la banda de rodadura, donde la variación del diámetro importa más que en la pestaña (en la cual es más relevante el radio transversal R_{x_2}). En asumiendo la ausencia de errores de planteamiento u otro tipo de errores, lo que realiza es descartar la ley de la BRR y se propone utilizar únicamente la ley de la USFD en los demás escenarios.
4. Los resultados del escenario IV se presentan en la [subsección VI.4.2](#) y se interpretan en la [VI.4.3](#). Al comparar las fuerzas tangenciales con su valor umbral se verifica la ausencia de bloqueo en todas las situaciones. No sucede lo mismo al comparar la suma de las fuerzas en el eje y_c con su valor umbral, lo cual es indicativo de la presencia de descarrilamiento en ciertas situaciones. Ello obliga a repetir las comprobaciones de descarrilamiento.
5. Los resultados del V se exponen en la [subsección VI.5.2](#) y se interpretan en la [VI.5.3](#). se repiten las comprobaciones de descarrilamiento, pero con diferentes ángulos de contacto. Lo que se obtiene al final es que se requiere de un ángulo mayor o igual que 51° para evitar el descarrilamiento.
6. Finalmente, los resultados del escenario VI se exponen en la [subsección VI.6.2](#) y se interpretan en la [VI.6.3](#). Al final se descubre que los parámetros más influyentes en el desgaste son (de mayor a menor influencia): el ángulo de contacto, el empate, la carga por eje y la fracción α_{fn} .

10.2. Escenario VII.

A continuación, se muestra la gráfica diámetro – kilometraje correspondiente al escenario VII. En ella se indica cuál es el fin de vida para una rueda de 920 mm usada en el sistema Modalohr y para una rueda de 920 mm estándar:

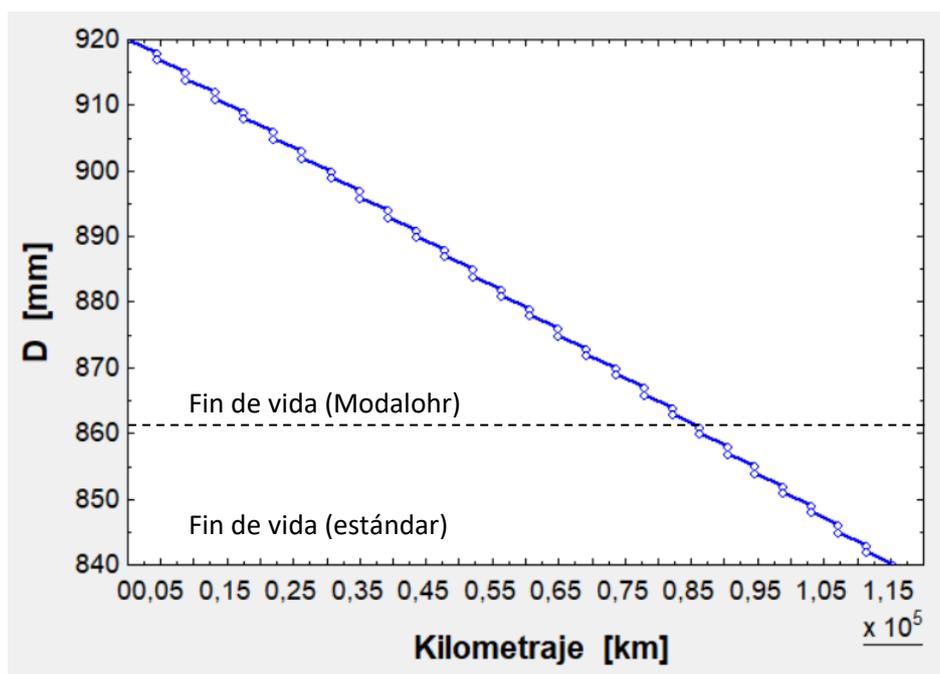


Figura 10.1. Gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 920 mm.

Como se puede ver, la rueda comienza con un diámetro nominal de 920 mm. Nada más pierden 2 mm de material en la pestaña (1 mm, que es la profundidad máxima admisible de desgaste, a cada lado), la rueda es enviada al taller para su retorneado. Este retorneado se produce entre 920 (que es el diámetro que seguirá teniendo la banda de rodadura, pues no se hará desgastado prácticamente nada) y 917 mm. Es decir, se eliminan 3 mm de material en total (1,5 mm, que es la profundidad de pasada, a cada lado). La rueda saldrá del taller con 917 mm de diámetro nominal y se desgastará hasta los 915 mm, por lo que se reperfilará de 917 a 914 mm, y así sucesivamente.

Nota: En realidad, no es totalmente preciso restar los 2 mm desgastados en la pestaña al diámetro original (valor nominal medido en el centro de la rueda, donde la conicidad es muy inferior a la conicidad equivalente de la pestaña). Esto es únicamente una licencia que se toma a la hora de efectuar la representación gráfica, puesto que así se simplifica (lo más exacto sería promediar r_p , duplicarlo para obtener un diámetro de pestaña promedio, y entonces restarle el producto de 2 mm y el coseno del ángulo de contacto promedio, ya que así se proyectan esos 2 mm en la misma dirección que $2\bar{r}_p$ y se pueden sustraer).

En resumen, la secuencia desgaste – retorneado es la que sigue:

1. Salida del taller con un diámetro nuevo.
2. Pérdida de 2 mm de material en la pestaña.
3. Vuelta al taller.
4. Retorneado entre el diámetro del punto 1 y un diámetro nuevo, que será 3 mm inferior.
5. Reinicio de la secuencia (retórnese al punto 1).

Estos ciclos finalizan cuando la rueda ha alcanzado un diámetro igual o ligeramente inferior a 840 mm (rueda estándar) u 863 mm (rueda utilizada en el sistema Modalohr).

Es reseñable el hecho de que la pestaña de la rueda sufre fatiga de contacto rodante en todos los ciclos graficados, lo cual responde al hecho de que las tensiones normales o presiones en el área de contacto de la pestaña son bastante elevadas, pues el área de contacto es mucho menor que el área de contacto de la pestaña. En concreto, estas presiones rondan los 4 – 5 GPa, dependiendo el valor concreto de radio de la curva (en las curvas de mayor radio desciende la presión, pues la fuerza normal es menor). Estas presiones no son problemáticas ni provocan la plastificación del material, puesto que la indentación ronda los 0,2 – 0,3 mm (mayor que todas las cifras presentadas en la tabla VI.1 de la [subsección VI.1.2](#), cuyo máximo es 0,1 mm, el cual aparece justamente en la rueda de 920 mm trabajante a una presión de 1,3 GPa). Una gran indentación como esta implica que la presión se distribuirá en un mayor número de capas, cada una de las cuales a una presión inferior a la de plastificación del material y, por ende, es viable que la presión alcance valores tan elevados (nótese que la relación 0,3 mm – 5 GPa no es directamente proporcional a 0,1 mm – 1,3 GPa, pues las ecuaciones de la solución de Hertz carecen de linealidad).

En cualquier caso, la fatiga de contacto rodante no provocará daños graves en la rueda, pues los ciclos son bastante cortos y no habrá tiempo suficiente para que las grietas profundicen en el material (lo cual obligaría al incremento de la profundidad de pasada en el torno) y tampoco para que alcancen la profundidad crítica (lo cual obligaría al descarte de la rueda). Por tanto, los efectos de la fatiga por contacto rodante pueden ignorarse (de hecho, es lo formalmente correcto, pues al reperfilear con una profundidad de pasada de 1,5 mm (3 mm en diámetro), superior al mm desgastado (2 mm), se está eliminando la capa de material que contiene las grietas subsuperficiales, las cuales, al ser poco profundas, no deberían superar 0,5 mm de profundidad (la diferencia entre 1,5 y 1 mm)).

En la siguiente tabla se recogen los datos de la gráfica, donde el diámetro original y los diámetros nuevos (tras la salida del taller) se destacan en **negrita**. Repárese en estos tres detalles:

1. Cuando la rueda estándar llega a los 840 mm ya no se puede reperfilear más (no se puede reperfilear de 842 a 839 mm porque la rueda no puede salir del taller con menos de 840 mm).
2. La rueda utilizada en el sistema Modalohr puede salir del taller recién retorneada con 863 mm. Entonces, la rueda se desgasta hasta los 861 mm y se retira del servicio (no se puede reperfilear de 863 a 860 mm porque no puede abandonar el taller con menos de 863 mm).
3. La diferencia de kilometraje entre 920 y 918 mm es de 4.404 km, que es superior a los 4.125 km existentes entre 842 y 840 mm. Esto confirma que el desgaste es mayor (o, equivalentemente, que avanza más rápido) cuanto menor es el diámetro.

He aquí la tabla:

Tabla 10.1. Datos de la gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 920 mm.

<i>D</i> [mm]	Kmtje. [km]						
920	0	899	30.721	878	60.751	857	90.531
918	4.404	897	35.018	876	65.036	855	94.704
917	4.404	896	35.018	875	65.036	854	94.704
915	8.790	894	39.306	873	69.320	852	98.878
914	8.790	893	39.306	872	69.320	851	98.878
912	13.176	891	43.594	870	73.604	849	103.052
911	13.176	890	43.594	869	73.604	848	103.052
909	17.562	888	47.882	867	77.889	846	107.226
908	17.562	887	47.882	866	77.889	845	107.226
906	21.949	885	52.170	864	82.173	843	111.351
905	21.949	884	52.170	863	82.173	842	111.351
903	26.335	882	56.457	861	86.357	840	115.476
902	26.335	881	56.457	860	86.357		
900	30.721	879	60.751	858	90.531		

Por consiguiente, la rueda de 920 mm estándar tiene una duración de 115.476 km, mientras que la utilizada en el sistema Modalohr dura 86.357 km, un 25,22 % menos. Esto puede parecer desfavorable, pero tiene su razón de ser: esto evita el desnivelado de los vagones dobles propios del sistema Modalohr, que utilizan ruedas de diámetros diferentes (véase la [subsección IV.3.2](#), donde se indica que estos vagones tienen ruedas de 920 mm en su centro y de 840 mm en sus extremos). Yendo más al detalle:

- ✓ Las ruedas de 840 mm, emplazadas en los extremos, se pueden reperfilar hasta los 783 mm, lo que supone una pérdida de 57 mm.
- ✓ Las ruedas de 920 mm, emplazadas en el centro, se pueden reperfilar hasta los 863 mm, lo que supone una pérdida de 57 mm, que coincide con la pérdida de las ruedas de los extremos.

Como corolario, puede agregarse que si estas ruedas de 920 mm se reperfilasen hasta los 840 mm, la pérdida ascendería a 80 mm (superando así la pérdida de 57 mm en los extremos) y las dos plataformas del vagón doble se inclinarían hacia el centro (lo cual es arriesgado al transportar semirremolques o cabinas tractoras, incluso estando amarradas y calzadas con calzos o cuñas).

10.3. Escenario VIII.

A continuación, se muestra la gráfica diámetro – kilometraje correspondiente al escenario VIII. En ella se indica cuál es el fin de vida real para una rueda de 680 mm (reperfilándola hasta su diámetro mínimo, que es 620 mm) y cuál sería el fin de vida si fuese posible reperfilarla hasta los 600 mm (lo que supondría una pérdida de 80 mm de diámetro, como en la rueda de 920 mm estándar):

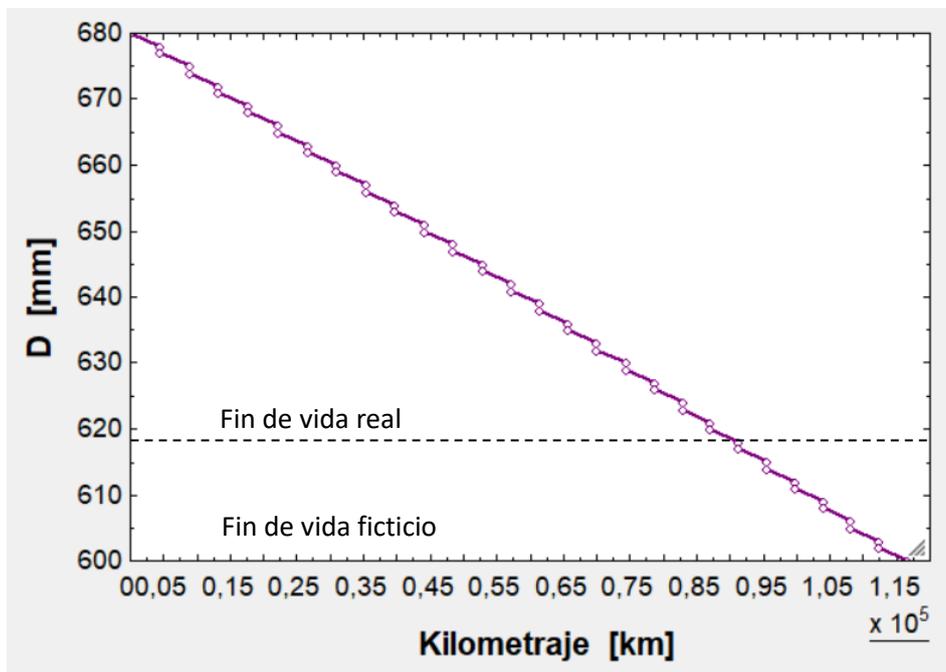


Figura 10.2. Gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 680 mm.

En este caso, la secuencia desgaste – reperfilado, los valores umbrales y los efectos de la fatiga por contacto rodante son los mismos que en el caso previo, por lo que la toda esta información no se va a reexplicar (léanse las explicaciones en la sección previa).

Abajo se adjunta la tabla generatriz de esta gráfica, donde el diámetro original y los diámetros nuevos se destacan en negrita. Repárese en estos tres detalles:

1. La rueda puede salir del taller recién retornada con 620 mm. Entonces, la rueda se desgasta hasta los 618 mm y se retira del servicio (no se puede reperfilarse de 620 a 617 mm porque no puede abandonar el taller con menos de 620 mm).
2. De manera ficticia, la rueda podría llegar a los 600 mm, que es valor que surge de deducir 80 mm de los 680 mm originales (de esta forma se tiene una pérdida de 80 mm, al igual que en la rueda de 920 mm estándar).
3. La diferencia de kilometraje entre 680 y 678 mm es de 4.449 km, que es superior a los 4.168 km existentes entre 602 y 600 mm. Esto confirma que el desgaste es mayor (o, equivalentemente, que avanza más rápido) cuanto menor es el diámetro.

He aquí la tabla, a partir de cuyos valores se extraerán ciertas conclusiones, sobre todo por comparación con los valores de la tabla de resultados correspondiente al escenario precedente:

Tabla 10.2. Datos de la gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 680 mm.

<i>D</i> [mm]	Kmtje. [km]						
680	0	659	31.021	638	61.477	617	91.368
678	4.449	657	35.391	636	65.775	615	95.597
677	4.449	656	35.391	635	65.775	614	95.597
675	8.887	654	39.761	633	70.073	612	99.826
674	8.887	653	39.761	632	70.073	611	99.826
672	13.325	651	44.130	630	74.371	609	104.055
671	13.325	650	44.130	629	74.371	608	104.055
669	17.763	648	48.500	627	78.669	606	108.224
668	17.763	647	48.500	626	78.669	605	108.224
666	22.201	645	52.870	624	82.910	603	112.392

665	22.201	644	52.870	623	82.910	602	112.392
663	26.639	642	57.179	621	87.139	600	116.560
662	26.639	641	57.179	620	87.139		
660	31.021	639	61.477	618	91.368		

Por consiguiente, el fin de vida real de esta rueda se produce cuando esta ha rodado 91.368 km. Esta distancia es un 20,88 % inferior a la vida de la rueda de 920 mm estándar (115.476 km) y un 5,80 % superior a la vida de la rueda de 920 mm empleada en el sistema Modalohr (86.357 km).

Estos valores serán ciertos siempre y cuando se cumpla la normativa interna que prohíbe que una rueda que al inicio de su vida sea de 680 mm abandone el taller con menos de 620 mm. Entre estos dos valores hay un salto de 60 mm, valor inferior a los 80 mm de la rueda de 920 mm estándar, lo cual se debe al hecho de que la fatiga (de todo tipo, incluyendo la inducida durante los retorneados) es más intensa cuanto menor es el diámetro (por eso los reperfilados son cada vez son más profundos en la figura 5.6 de la [sección 5.4](#)). Por ello, no conviene que este se reduzca tanto al reperfilado sucesivamente una rueda de menor diámetro original que 920 mm ($D \leq 920 \text{ mm} \rightarrow \Delta D \leq 80 \text{ mm}$).

Hasta ahí, ningún problema. El problema surge cuando se compara el kilometraje ficticio de la rueda de 680 mm, que es 116.560 km, con el kilometraje total de la rueda de 920 mm, que es 115.476 km. El hecho de que la rueda de 680 mm pudiera llegar a durar 1.084 km adicionales (un 0,94 % adicional) en las mismas condiciones de operación y tras los mismos ciclos de reperfilado incumple la conjetura que motivó este trabajo: “las ruedas de diámetro reducido deben de tener una vida más corta” (véanse algunos cálculos preliminares en la [sección 2.2](#), los cuales se utilizaron para apoyar la conjetura susodicha). Ello induce a plantearse un par de preguntas:

1. ¿Por qué la rueda de 680 mm duraría 1.084 km adicionales si se reperfilase exactamente como la rueda de 920 mm?
2. ¿Por qué a pesar de lo anterior se aprecia cómo los ciclos de desgaste se acortan conforme menor es el diámetro (léase la tercera observación realizada encima de la tabla 10.2)?

Para replicar al primer interrogante hay que tener en cuenta que esos 1.084 km adicionales (un 0,94 % adicional) proceden del alargamiento de todos los ciclos. Así, verbigracia, el primer ciclo dura 4.404 km en la rueda de 920 mm y 4.449 km en la rueda de 680 mm, lo cual equivale a un 1,02 % adicional (esta cifra excede el promedio de 0,94 %, lo cual implica que el alargamiento de otros ciclos habrá de ser inferior al 0,94 % para compensar dicho exceso).

Esta elongación de los ciclos se debe a la superposición de dos efectos, entre los cuales hay uno que predomina sobre el otro y lo sobrecompensa (o sea, primero lo anula y después sobresale). Estos efectos se describen seguidamente:

1. El efecto de la variación del diámetro. Este efecto incrementa la profundidad de desgaste en la pestaña, aunque muy levemente. Por ejemplo, en la rueda de 920 mm la profundidad de desgaste promedio oscila entre 0,3 y 0,4 mm tras un recorrido en el sentido Zacarín –

Albarque; mientras que en la rueda de 680 mm la profundidad de desgaste promedio también se encuentra en el mismo rango, si bien se ha visto incrementada en un 2 %. Adviértase que este porcentaje es pequeño en comparación con el obtenido si se utilizan los [resultados del escenario III](#): 6,81 % al subir de 0,279 mm (920 mm) a 0,298 mm (680 mm).

El motivo de esta diferencia es que en el [planteamiento escenario III](#) se había supuesto un ángulo de contacto pestaña – carril de 31° , ángulo que se sitúa en una región de contacto con $R_{x_2} = 36$ mm, valor que está un orden de magnitud por debajo del radio nominal de la rueda (o sea, $R_{x_2} \sim r_0/10$ o $R_{x_2} \sim D/20$). En cambio, en el presente escenario se ha utilizado un ángulo de contacto variable, entre 51° y 70° (véase la [sección 9.5](#)), situándose estos ángulos en una región de contacto con $R_{x_2} = 13$ mm y en otra región de contacto con $R_{x_2} = 20$ mm. Comparando estos dos valores con el diámetro, lo que se tiene es $\sim D/60$ y $\sim D/36$, correlativamente. Dado que ambos quebrados son inferiores al quebrado $\sim D/20$, es evidente que el diámetro D pierde influencia relativa respecto al radio R_{x_2} al incrementar el ángulo de contacto y cambiar de región de contacto.

Finalmente, cabe apostillar que la profundidad de desgaste aumenta al subir de 51° a 69° , pues el término del espín va en auge (esto es apreciable en los [resultados del escenario VI](#)), mas al saltar de 69° a 70° desciende ligeramente, pues es entonces cuando se produce la transición de 13 a 20 mm en el parámetro R_{x_2} (20 mm es un radio más favorable, con lo cual el área de contacto se agranda y disminuye la tensión normal o presión).

2. El efecto de la alteración de la carga por eje. Este efecto modifica ligeramente la anchura del área de contacto, que es $2b$. Por ejemplo, en la rueda de 920 mm el parámetro b oscila entre 0,4 y 0,5 mm; mientras que en la rueda de 680 mm el parámetro b también se encuentra en el mismo rango, si bien se ha visto decrementado en un 3 %.

Con un parámetro b más pequeño, es claro que será preciso que la rueda recorra una mayor distancia para que la pestaña se dañe desde el punto C_{pc} hasta el punto C'_{pc} y hasta la profundidad máxima admisible de desgaste (véanse ambos puntos en la figura 9.3, sita hacia el final de la [sección 9.4](#)). Es decir, la ratio $[\text{long. arco}(C_{pc} - C'_{pc})]/2b$ es menor en la rueda de 920 mm que en la de 680 mm, lo cual desemboca en un mayor recorrido por parte de esta.

Finalmente, cabe puntualizar que este efecto responde directamente a la disminución de la carga por eje, produciéndose la reducción de esta guisa: A menor fuerza normal, menor valor del parámetro b , tal como se puede deducir de las [fórmulas de la solución de Hertz](#).

De esto se desprende que el primer efecto decrementa el kilometraje en un 2 %, mientras que el segundo efecto lo incrementa en un 3 %, con lo cual el kilometraje sufre un incremento neto del 1 % (de ahí la sobrecompensación). Afinando el cálculo, lo que se obtiene es un incremento neto del 0,94 %, que es lo observado en la tabla.

Para finalizar, es muy importante reparar es que, cuando no se cambia de una rueda a la otra, la carga permanece constante, por lo que el segundo efecto es inactuante y únicamente actúa el primero. Por ello, la diferencia de kilometraje entre 920 y 918 mm es mayor que la existente entre 842 y 840 mm (un 6,76 % superior, concretamente) y, del mismo modo, la diferencia de kilometraje entre 680 y 678 mm es mayor que la existente entre 602 y 600 mm (un 6,74 % superior).

10.4. Escenario IX.

A continuación, se muestra la gráfica diámetro – kilometraje correspondiente al escenario IX. En ella se indica cuál es el fin de vida real para una rueda de 355 mm (reperfilándola hasta su diámetro mínimo, que es 335 mm) y cuál sería el fin de vida si fuese posible reperfilarse la misma rueda hasta los 275 mm (lo que supondría una pérdida de 80 mm de diámetro, como en la rueda de 920 mm estándar):

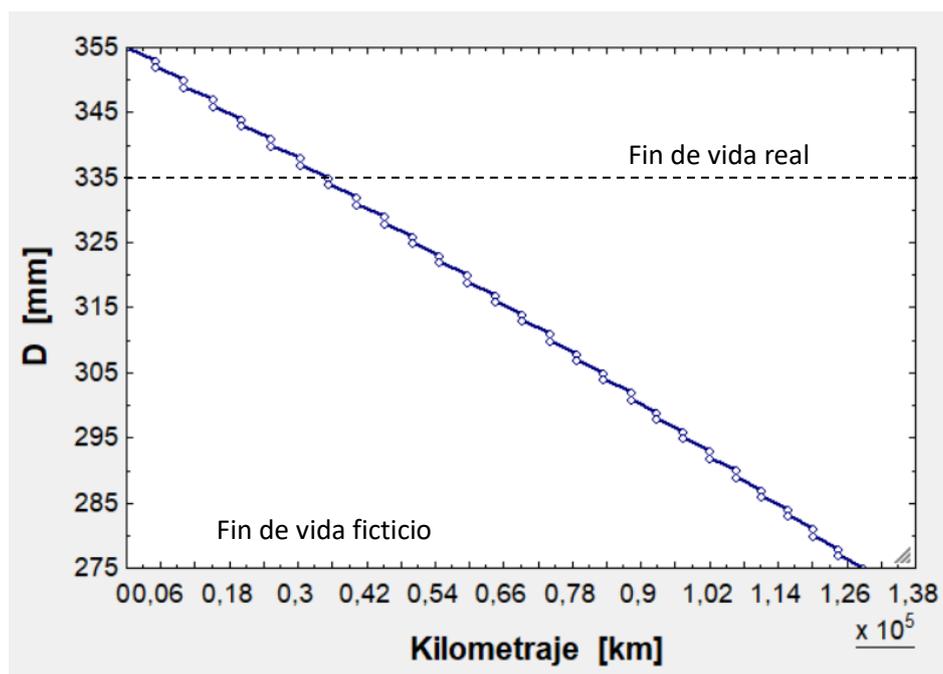


Figura 10.3. Gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 355 mm.

En este caso, la secuencia desgaste – reperfilado, los valores umbrales y los efectos de la fatiga por contacto rodante son los mismos que en el caso previo, por lo que toda esta información no se va a reexplicar (léanse las explicaciones en la [sección 10.2](#)).

Abajo se adjunta la tabla generatriz de esta gráfica, donde el diámetro original y los diámetros nuevos se destacan en **negrita**. Repárese en estos tres detalles:

1. La rueda puede salir del taller recién retorneada con 337 mm. Entonces, la rueda se desgasta hasta los 335 mm y se retira del servicio (no se puede reperfilarse de 337 a 334 mm porque no puede abandonar el taller con menos de 335 mm).
2. De manera ficticia, la rueda podría llegar a los 275 mm, que es valor que surge de deducir 80 mm de los 355 mm originales (de esta forma se tiene una pérdida de 80 mm, al igual que en la rueda de 920 mm estándar).
3. La diferencia de kilometraje entre 355 y 335 mm es de 5.084 km, que es superior a los 4.426 km existentes entre 277 y 275 mm. Esto confirma que el desgaste es mayor (o,

equivalentemente, que avanza más rápido) cuanto menor es el diámetro (en ausencia del segundo efecto explicado en el apartado previo).

He aquí la tabla, a partir de cuyos valores se extraerán ciertas conclusiones, sobre todo por comparación con los valores de las tablas de resultados correspondientes a los escenarios precedentes:

Tabla 10.3. Datos de la gráfica diámetro – kilometraje para la rueda de 355 mm.

<i>D</i> [mm]	Kmtje. [km]						
355	0	334	35.311	313	69.322	292	102.053
353	5.084	332	40.204	311	74.063	290	106.631
352	5.084	331	40.204	310	74.063	289	106.631
350	10.141	329	45.106	308	78.805	287	111.210
349	10.141	328	45.106	307	78.805	286	111.210
347	15.199	326	50.009	305	83.546	284	115.788
346	15.199	325	50.009	304	83.546	283	115.788
344	20.257	323	54.911	302	88.287	281	120.214
343	20.257	322	54.911	301	88.287	280	120.214
341	25.315	320	59.813	299	92.896	278	124.640
340	25.315	319	59.813	298	92.896	277	124.640
338	30.373	317	64.581	296	97.475	275	129.066
337	30.373	316	64.581	295	97.475		
335	35.311	314	69.322	293	102.053		

Por consiguiente, el fin de vida real de esta rueda se produce cuando esta ha rodado 35.311 km. Esta distancia es un 69,42 % inferior a la vida de la rueda de 920 mm estándar (115.476 km), un 33,72 % inferior a la vida de la rueda de 920 mm empleada en el sistema Modalohr (86.357 km) y un 59,11 % inferior a la de una rueda de 680 mm (86.357 km). Si, en cambio, se compara con la vida ficticia de la rueda de 680 mm, el resultado es una duración un 69,71 % inferior.

Estos valores serán ciertos siempre y cuando se cumpla la normativa interna que prohíbe que una rueda que al inicio de su vida sea de 355 mm abandone el taller con menos de 355 mm. El salto entre estos dos diámetros es tan solo de 20 mm, cifra que se queda pequeña frente a los 80 mm de la rueda de 920 mm estándar y frente a los 60 mm de la rueda de 680 mm. Esto se puede explicar también por la fatiga (de todo tipo, incluyendo la inducida durante los retorneados): esta es más intensa en una rueda de 355 mm que en una de mayor diámetro, lo cual fuerza a limitar el salto tan estrictamente.

Este valor tan restrictivo es el causante del mayor uso de la rueda de 380 mm en las autopistas ferroviarias utilizadas por el material rodante de tipo ROLA (para más información, véanse las subsecciones [IV.4.3](#) y [IV.4.4](#), teniendo también en consideración que la reducción del diámetro de 380 a 355 mm ocasionaría un incremento demasiado reducido de la altura máxima admisible de la carga). La rueda de 380 mm permite un mayor salto de diámetro, concretamente de 380 a 335 mm, totalizando 45 mm (más del doble de 20 mm). Como entre las ruedas de 380 y 355 mm apenas varía el diámetro y la carga, las duraciones de cada ciclo serán prácticamente iguales (unos 5.000 km), con lo cual se puede obtener la vida útil aproximada de la rueda de 380 mm por medio de un simple escalado:

$$\text{Vida útil (380 mm)} \cong 35.311 \cdot \frac{45}{20} = 79.451 \text{ km}$$

Por otro lado, el fin de vida ficticio de la rueda de 355 mm se produce cuando ha rodado 129.066 km. Este valor supera en un 11,77 % el de la rueda de 920 mm estándar (115.476 km) y en un 10,73 % el valor ficticio de la rueda de 680 mm (116.560 km).

Es decir, el salto ficticio que existe de la rueda de 920 mm estándar y la rueda de 680 mm, que es del 0,94 %, es muy inferior al existente entre la rueda de 680 y 355 mm, que es del 10,73 %. Esta más que decuplicación (undecuplicación, más precisamente) se debe a la gran reducción de la carga por eje, que pasa de 15.325 kg (680 mm) a 6.996 kg (355 mm). Esta significativa reducción, que no se tiene al pasar de 18.784 kg (920 mm) a 15.325 kg (680 mm), provoca una importante reducción del parámetro b (del 13,50 %) que sobrecompensa con diferencia el incremento de la profundidad de desgaste (del 2,77 %), por lo que el incremento neto es del 10,73 % (véase la explicación de los efectos contrapuestos en el apartado precedente).

Por último, apréciase que la diferencia de kilometraje entre 355 y 335 mm, que es 5.084 km, es un 14,87 % superior a la existente entre 277 y 275 mm, que es 4.426 km. Este aumento contrasta con el computado en los dos escenarios previos, que ronda el 6,70 %, lo cual se puede explicar según la alinealidad de las ecuaciones que intervienen en el primer efecto (sobre todo la fórmula que permite calcular el área de contacto (encuéntrese esta en el [bloque de ecuaciones de la solución de Hertz](#)), la cual influye en gran medida en la tasa de desgaste según la ley de la USFD, tal como se puede apreciar en el [bloque de ecuaciones correspondiente](#)).

10.5. Escenario X.

A continuación, se muestran las gráficas diámetro – kilometraje correspondientes a los subescenarios (a) –(d), que son los subescenarios asociados a la rueda de 920 mm:

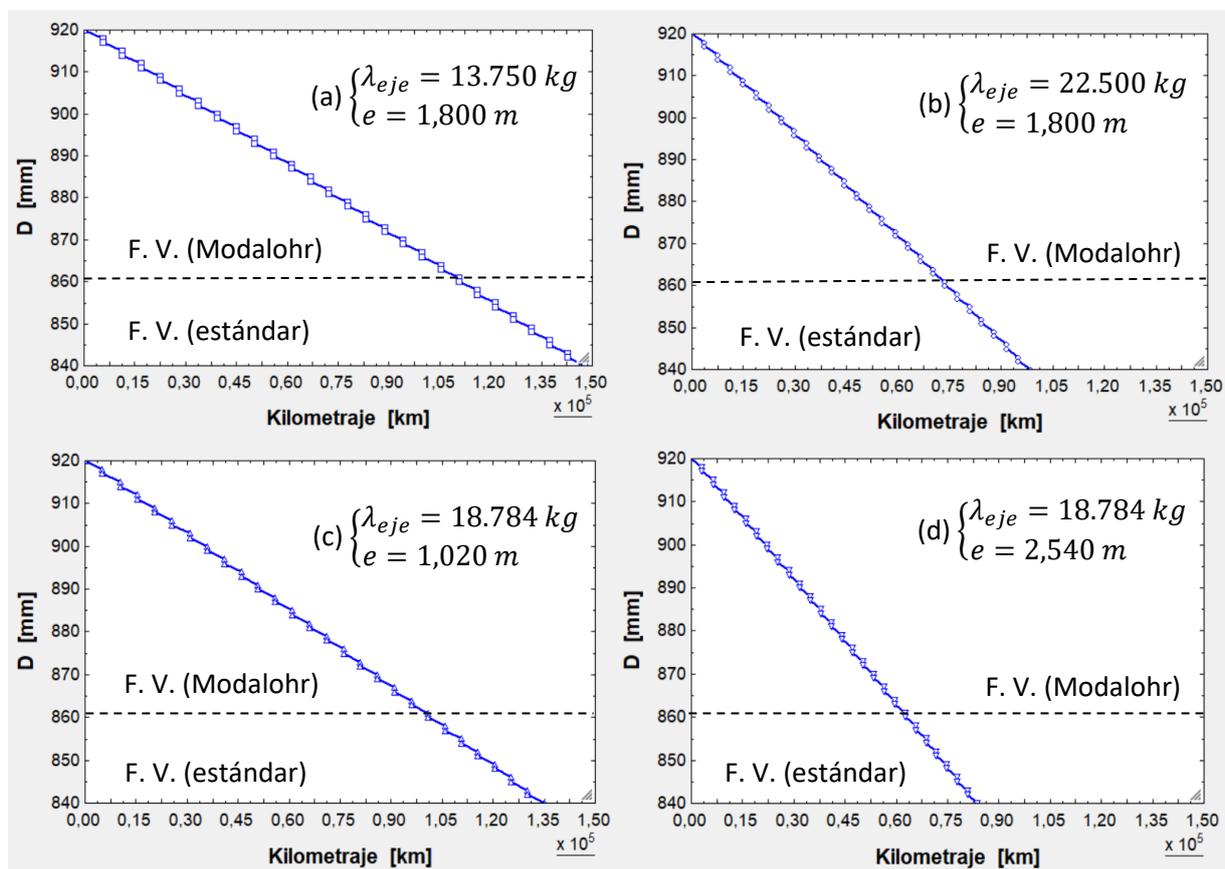


Figura 10.4. (a) – (d) Gráficas diámetro – kilometraje para la rueda de 920 mm tras haber variado su carga por eje y su empate. Nota: F. V. hace alusión al fin de vida de la rueda.

No se muestran las tablas generatrices de estas gráficas por economía y por falta de funcionalidad, puesto que en este caso lo más importante es el valor final de la vida útil para la rueda de 920 mm, tanto si esta es estándar como si es empleada en el sistema Modalohr. Estas cifras se van a comparar con las obtenidas en el escenario VII (véase la [sección 10.2](#), donde se muestra que la empleada en el sistema Modalohr dura 86.357 km, mientras que la estándar alcanza los 115.476 km):

- En este subescenario, el fin de vida de la rueda de 920 mm utilizada en el sistema Modalohr se produce a los 110.563 km, mientras que el de la rueda de 920 mm estándar se produce a los 147.844 km (+28,03 % de incremento en ambas ruedas).
- En este subescenario, el fin de vida de la rueda empleada en el sistema Modalohr se produce a los 73.622 km, mientras que el de la rueda estándar se produce a los 98.501 km (-14,70 % en ambas ruedas).

- c) En este subescenario, el fin de vida de la primera sucede a los 100.951 km, mientras que el de la segunda es a los 134.992 km (+16,90 %).
- d) En este subescenario, el fin de vida de la primera sucede a los 62.674 km, mientras que el de la segunda es a los 83.808 km (-27,42 %).

Apréciase que los incrementos son más pronunciados y los decrementos más moderados cuando se varía la carga por eje que cuando se varía el empuje. Esto es debido a la alineación (o sea, lo opuesto a la contraposición) de dos efectos muy parejos los explicados en la [sección 10.3](#). Así, al decrementar la carga no solo decrece la profundidad de desgaste, sino que también lo hace la anchura del área de contacto y, con lo cual, hace falta un mayor kilometraje para desgastar la pestaña entre los puntos C_{pc} y C'_{pc} hasta la profundidad de 1 mm. Justo lo contrario sucede al incrementar la carga, ya que es una alteración que provoca el crecimiento de ambas variables (como ambas crecen, sus efectos se alinean). En cambio, al variar el empuje únicamente se tiene el primero de los efectos.

Habiendo mostrado e interpretado las gráficas de los subescenarios (a) – (d), procédease a presentar las gráficas diámetro – kilometraje correspondientes a los subescenarios (e) – (h), que son los subescenarios asociados a la rueda de 355 mm:

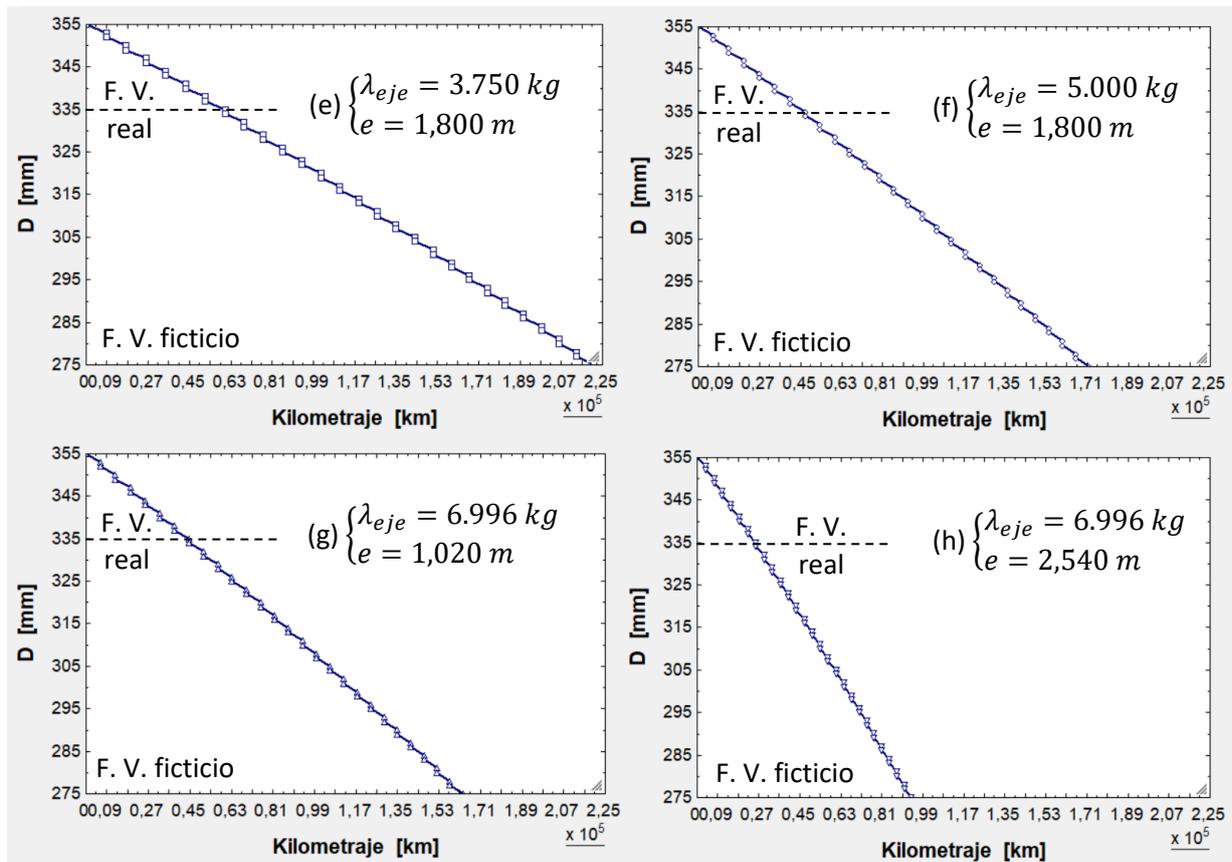


Figura 10.5. (e) – (h) Gráficas diámetro – kilometraje para la rueda de 355 mm tras haber variado su carga por eje y su empuje. Nota: F. V. hace alusión al fin de vida de la rueda.

Al igual que sucedía para los subescenarios (a) – (d), en este caso tampoco merece la pena mostrar las tablas generatrices de estas gráficas, por el mismo motivo. Análogamente, lo que se va a realizar es una comparación del valor obtenido para la vida útil, tanto si este es el valor real como si es el ficticio, con las cifras obtenidas en el escenario IX (véase la [sección 10.4](#), donde se muestra que la vida útil real es 35.311 km, mientras que la ficticia asciende a 129.066 km):

- e) En este subescenario, el fin de vida real de la rueda de 355 mm se produce a los 60.474 km, mientras que el fin de vida ficticio de la rueda de 355 mm se produce a los 221.042 km (+71,26 % de aumento en ambas situaciones).
- f) En este subescenario, el fin de vida real se produce a los 47.089 km, mientras que el fin de vida ficticio se produce a los 171.116 km (+32,58 % en ambas situaciones).
- g) En este subescenario, el fin de vida real se da a los 44.699 km, mientras que el ficticio se da a los 163.382 km (+26,59 %).
- h) En este subescenario, el fin de vida real se da a los 25.742 km, mientras que el ficticio se da a los 94.089 km (-27,10 %).

Aparte de la apreciación realizada tras observar los resultados de los subescenarios (a) – (d), cabe añadir que las variaciones procedentes de mudar la carga por eje son mucho más fuertes en los subescenarios (e) y (f) que en los subescenarios (a) y (b). Esto responde a la alinealidad de las ecuaciones que intervienen en el primer efecto (tal como se explica al final de la [sección 10.4](#), tomando como base las consecuencias de la alinealidad) e incluso en el segundo efecto (pues en este caso se está variando la carga, lo cual influye alinealmente en la anchura del área de contacto, que es $2b$, tal como se muestra en el mismo bloque de ecuaciones referido al término de la sección 10.4).

11. Conclusiones.

11.1. Conclusiones del problema.

En los próximos puntos se recogen las conclusiones del problema resuelto, las cuales proceden de la interpretación de los resultados de cada escenario y de la comparación entre los resultados de diferentes escenarios:

1. Es necesario limitar la carga por eje en las ruedas de diámetro reducido, pues su área de contacto con el carril es también reducida y la tensión o presión en el área de trabajo es proporcional a la ratio entre la carga por eje y dicha área. Esta reducción del área de contacto obedece a la disminución del radio longitudinal R_{y_2} , el cual es directamente proporcional al diámetro de la rueda. Con un menor valor de R_{y_2} se tiene una mayor curvatura longitudinal relativa A , lo cual reduce la intersección entre los paraboloides teóricos y, en consecuencia, el tamaño del área de contacto (el aumento de A disminuye el eje longitudinal de la elipse a).
2. Si no se ha cometido ningún error de planteamiento y si no ha surgido ningún otro tipo de error, entonces la ley desgaste de la BRR resulta inadecuada para el cómputo del desgaste sobre la pestaña (probablemente los experimentos que condujeron a la formulación de la ley no tuvieron en cuenta este tipo de contacto).
3. Si no se ha cometido ningún error de planteamiento y si no ha surgido ningún otro tipo de error, entonces la ley de desgaste de la USFD es la más apropiada para el cómputo del desgaste sobre la pestaña.
4. El desgaste sobre la pestaña es entre 100 y 1.000 mayor que el desgaste sobre la banda de rodadura. Esto se debe a que los radios transversales son muy reducidos en el caso del contacto pestaña – carril ($R_{x_1} = 13 - 36$ mm, $R_{x_2} = 36$ mm) frente al contacto banda – carril ($R_{x_1} = 80 - 300$ mm, $R_{x_2} \rightarrow \infty$) y ello aumenta la curvatura lateral relativa B , lo cual reduce la intersección entre los paraboloides teóricos y, en consecuencia, el tamaño del área de contacto (el incremento de B reduce el eje transversal de la elipse b). Por tanto, en esta área de contacto existe una gran concentración de tensiones.
5. El diámetro de la rueda es más influyente en el desgaste sobre la banda de rodadura que en el desgaste sobre la pestaña. Esto es debido a que el radio R_{y_2} (directamente proporcional al diámetro de la rueda) es el dominante, junto con el radio R_{x_1} (que es del mismo orden de magnitud), en la banda de rodadura ($R_{y_2} \sim R_{x_1}$ y $R_{y_1}, R_{x_2} \rightarrow \infty$). En la pestaña, en cambio, R_{y_2} no es el radio dominante, siendo dominado por los valores de R_{x_1} y R_{x_2} , que están en un orden de magnitud inferior ($R_{x_1} \sim R_{x_2} < R_{y_2}$ y $R_{y_1} \rightarrow \infty$). Recuérdese que tanto R_{x_1} y R_{x_2} se mantienen fijos independientemente del diámetro de la rueda.
6. Con el nivel de pseudodeslizamiento que tienen las ruedas ensayadas no se produce su bloqueo. Además, variar el coeficiente de adherencia no produciría el bloqueo para una situación dada, pues el nivel de deslizamiento sería el mismo y debe recordarse que, para un nivel dado, la ratio fuerza tangencial/fuerza máxima transmisible se mantiene fija.

7. Para un ángulo de contacto pestaña – carril de 31° se produce un desequilibrio en las fuerzas actuantes sobre la pestaña que eleva la rueda y modifica la posición de contacto. Según los cálculos realizados, es necesario que el ángulo de contacto pestaña – carril sea igual o rebasa los 51° para que el área de contacto se mantenga en una posición estable y no continúe aumentando el ángulo (lo cual podría producir un eventual descarrilamiento).
8. Los parámetros o factores que más influyen en el desgaste y, por ende, en la vida útil de la rueda son (de mayor a menor influencia): el ángulo de contacto, el empuje, la carga por eje, y la fracción de reparto de carga entre el área de contacto pestaña – carril y el área de contacto banda – carril. En menor medida influye el coeficiente de adherencia y (después) la velocidad; mientras que otros no influyen prácticamente nada, como es el caso del baricentro de la carga por eje. Finalmente, hay parámetros cuyo impacto es inapreciable, siendo el grado de la función deceleración – tiempo el máximo exponente de esta observación.
9. Según lo observado durante la búsqueda de los parámetros más influyentes, la transición entre el movimiento libre y el restringido se produce para ratios empuje/radio de la curva próximos a 0,01 (es decir, cuando el empuje se acerca o supera el 1 % del radio de la curva) y es un valor umbral en el cual no influye el diámetro de la rueda (esto se colige en vista de las ecuaciones).
10. La fatiga por contacto rodante se produce en todos los contactos pestaña – carril (salvo casos puntuales, como cuando la rueda más pequeña recorre una curva por debajo, pero muy próxima, al radio umbral, que en el caso de la rueda de 355 mm de diámetro se sitúa en 1.850 m) como consecuencia de la alta presión (4 – 5 GPa) en el área de contacto de la pestaña. Sin embargo, esta presión es absorbible por el material, pues la indentación es grande (0,2 – 0,3 mm) y entonces se pueden apilar múltiples capas de presión (superficies isóbaras), de forma análoga a la distribución de la presión hidrostática en un fluido.
11. Los efectos de la fatiga por contacto rodante se pueden paliar mediante una profundidad máxima admisible de desgaste reducida, que es lo que sucede en los escenarios VII – IX. En la realidad, el factor económico es el que prima, lo cual fuerza a encontrar el equilibrio entre el crecimiento de las grietas y la profundidad máxima admisible de desgaste.
12. Por causa de la fatiga por contacto rodante y de la fatiga inducida durante los retorneados, la normativa interna prohíbe eliminar más de 80 mm de diámetro en una rueda estándar de 920 mm de diámetro, más de 60 mm en el caso de una rueda de 680 mm y más de 20 mm en el caso de una rueda de 355 mm.
13. Como particularidad, a una rueda de 920 mm de diámetro utilizada en el sistema Modalohr no se le puede eliminar más de 57 mm de material. La razón de esto es que los vagones Modalohr emplean ruedas de 840 mm en sus extremos, a las cuales solamente se les puede eliminar 57 mm. Por tanto, las ruedas de 920 mm, instaladas en el centro del vagón doble, no se pueden reperfilear tras haber sobrepasado el umbral de los 57 mm, pues entonces ambas plataformas del vagón doble se desnivelarían o inclinarían hacia el centro y, con ello, la carga portada por las mismas.

14. La cifra correspondiente a las ruedas de 355 mm, que es 20 mm, es muy restrictiva, motivo por el cual las empresas logísticas suelen preferir utilizar ruedas de 380 mm en el material rodante de tipo ROLA, las cuales admiten un mayor número de ciclos de reperfilado (a estas ruedas se les pueden eliminar 45 mm, más del doble con respecto a las otras). Debe considerarse que este trueque provoca una pérdida de 25 mm de altura máxima admisible de la carga dentro de los túneles y bajo los pasos superiores, que es una cifra apenas significativa.
15. La vida útil de las ruedas ensayadas en los escenarios VII – IX es, para cada caso: 115.476 km (920 mm), 86.357 km (680 mm) y 35.311 km (355 mm). Además, según la aproximación realizada, también se tiene el dato de 79.451 km (380 mm). Porcentualmente, lo que se tiene es que la rueda de 680 mm tiene una vida útil un 25,22 % más corta que la de 920 mm, reducción que alcanza el 31,12 % en el caso de la rueda de 380 mm y el 69,42 % en el caso de la rueda de 355 mm. Las diferencias porcentuales existentes refuerzan las ventajas a de las ruedas de 380 mm sobre las de 355 mm y plantean ciertas dudas acerca de la utilidad de las ruedas de 680 mm, aunque su sustitución por las ruedas de 380 mm dependerá de la aplicación concreta del vagón que las fuere a alojar.
16. La diferencia de kilometraje entre reperfilados (el kilometraje de cada ciclo) ronda los 4.000 – 5.000 km. Si los vagones realizasen el recorrido Albarque – Zacarín y el recorrido Zacarín – Albarque en el mismo día (75,272 km diarios) durante todos los días del año, entonces el reperfilado debería practicarse con una periodicidad de unos 60 días (valor procedente de la aproximación $4.500/75$). A no ser que tanto Albarque como Zacarín fuesen importantes centros de logística intermodal; un recorrido diario de ida y vuelta es demasiado para una ruta de montaña, ya que las regiones montañosas no se caracterizan, en general, por una elevada densidad de población y, en consecuencia, la demanda de transporte es reducida en estas zonas. Así, si los vagones realizasen, genéricamente, n rutas de ida y vuelta a la semana, la periodicidad de los reperfilados habría de ser $60 \cdot (7/n)$.
17. Si todas las ruedas se reperfilasen a lo largo de los mismos ciclos (con la subsecuente eliminación de 80 mm de material en todos los casos), entonces la vida útil de las ruedas (la vida útil ficticia, pues eliminar 80 mm conculcaría la normativa interna de las empresas logísticas): 116.560 km (680 mm) y 129.066 km (355 mm). Estas cifras superan a la de una rueda de 920 mm estándar, que es de 115.476 km. Así que, porcentualmente, la rueda de 680 mm tiene una duración ficticia que es un 0,94 % superior, porcentaje que asciende al 11,77 % en el caso de la rueda de 355 mm. Estos incrementos, inesperados en un primer momento, obedecen a la contraposición de dos efectos: efecto del diámetro y efecto de la carga por eje. El segundo anula y sobrecompensa al primero y, de ahí, el origen de estos incrementos porcentuales.
18. Los resultados de los escenarios VII – IX se han obtenido para una tensión o presión de trabajo de 1.235 MPa en el área de contacto de la banda de rodadura cuando las ruedas circulan por alineaciones rectas, para cuya consecución se ha adaptado la carga por eje para cada rueda. En realidad, esta adaptación ya se realizó en el escenario I, escenario del cual se coligió que esta es la estrategia seguida por los fabricantes a la hora de limitar la carga por eje. No se han equiparado las presiones existentes en las pestañas, ya que las fuerzas normales sobre las pestañas son muy variables y generan presiones distintas según el radio de la curva donde se

produzca el contacto pestaña – carril, lo cual dificulta obtener las adaptaciones de la carga por eje desde el prisma del contacto pestaña – carril.

19. La carga es un factor logístico de gran influencia en el desgaste, pues de ella dependen las fuerzas que lo causan. Se ha observado que cuando la carga por eje de la rueda de 920 mm se incrementa de 18,874 t/eje a 22,5 t/eje (el límite impuesto por el fabricante, coincidente con el límite asignado al trazado de ensayo), lo que sucede es que su vida útil se acorta en un 14,70 %. Esta no es una gran reducción y el kilometraje sigue estando cercano a los 100.000 km (73.622 km en el caso de la rueda para el Modalohr y 98.501 km en el caso de la estándar). No obstante, en muchas ocasiones el vagón no irá cargado al máximo y, entonces, sus ruedas no soportarán 22,5 t/eje. Por ello, se ha considerado un caso de carga ligera o carga promedio de 13,75 t/eje. En esta situación, la vida útil de la rueda de 920 mm se prolonga un 28,03 % (110.563 km en el caso de la rueda para el Modalohr y 147.844 km en el caso de la rueda estándar).
20. Cuando la carga por eje de la rueda de 355 mm es de 5 t/eje (el límite impuesto por el fabricante) en lugar de los 6,996 t/eje teóricos, lo que sucede es que su vida útil se ve incrementada en un 32,58 % (pudiendo recorrer 47.089 km reales y, ficticiamente, podría llegar a los 171.116 km). Si se supone que el vagón transportará siempre carga ligera o que su carga promedio será 3,75 t/eje, entonces su vida útil se ve aumentada en un 71,26 % (60.474 km reales y 221.042 km ficticios).
21. Estas importantes variaciones, que son más fuertes en la rueda de 355 mm por la alinealidad, se deben a la alineación del efecto de la profundidad de desgaste y del efecto de la anchura del área de contacto. Si la carga aumenta, ambos crecen y entonces la vida útil se acorta. En cambio, si la carga mengua, ambos decrecen y la vida útil se prolonga en consecuencia.
22. El empate es un parámetro de diseño del bogie que afecta en gran medida a la profundidad de desgaste, pues la magnitud de varios términos de pseudodeslizamiento dependen de él. Se han observado estas variaciones en la vida útil de las ruedas al variar el empate entre un mínimo de 1,020 m (bogie Y – 25) o 1,365 m (bogie Graz Pauker 702) y un máximo de 2,54 m (este máximo evita que se produzca el movimiento restringido): +16,90 % cuando la rueda de 920 mm se asocia a su empate mínimo (100.951 km y 134.992 km, respectivamente); -27,42 % cuando la misma rueda se asocia al empate máximo fijado (62.674 km y 83.808 km); +26,59 % cuando la rueda de 355 mm se asocia a su empate mínimo (44.699 km y 163.382 km, respectivamente); y, finalmente, -27,10 % cuando la misma rueda se asocia a su empate máximo (25.742 km y 94.089 km).
23. Estas variaciones son más moderadas que las obtenidas al mudar la carga por eje, lo cual se debe a que en este caso solamente interviene el efecto de la profundidad de desgaste, pero no el de la anchura del área de contacto.
24. Los parámetros no variados en el análisis de sensibilidad tienen una influencia más comedida, tal como se probó en el escenario VI. Por tanto, en vez de variarlos se ha optado por asignarles valores promedio que aproximadamente representen el promedio de los valores adoptados por una rueda real a lo largo de su vida útil, por lo que no es preciso variarlos dada su fidelidad a la realidad.

11.2. Líneas abiertas del problema.

Las líneas abiertas del problema resuelto son también conclusiones, aunque desde el punto de vista del autor. A continuación, se listan las líneas abiertas que podrían servir de precedente para futuras investigaciones en dichos temas:

1. El replanteamiento computacional del problema para la aplicación del método de los elementos finitos, que permitiría considerar los deslizamientos elásticos (los cuales no se incluyen en los pseudodeslizamientos, ya que estos son deslizamientos rígidos) de una forma bastante precisa.
2. La consideración de los contactos conformes, también con elementos finitos. Los contactos conformes se producen cuando tanto la rueda y el carril están muy desgastados y sus superficies se adaptan entre sí. En estas circunstancias no se cumplen las hipótesis de Hertz, por lo que no se pueden las fórmulas de la solución de Hertz.
3. La consideración del desgaste del carril, que produciría cambios en el desgaste de la rueda, pues variarían las curvaturas del carril (favorablemente, en general) y las posiciones de contacto en recta y en curva.
4. La actualización de los parámetros de contacto nada más se produce el más mínimo desgaste en la rueda. Para ello habría que tratar de calcular o suponer basándose en datos experimentales cómo será la “pendiente de desgaste”. Es decir, cómo será la transición entre las regiones que cuenten con las máximas profundidades de desgaste y las regiones sin desgastar, puesto que de la forma matemática a la que se aproxime dicha transición haría que deducir los parámetros de contacto (semiconicidad, ángulo de contacto y radios de contacto).
5. La consideración del efecto de la rugosidad superficial de la rueda y del carril. Para ello se requeriría de un *software* potente, que caracterizase las superficies con una precisión micrométrica, si bien también se podría recurrir al método experimental. Esto podría realizarse solamente para perfiles recién mecanizados, que es cuando la rugosidad es mayor.
6. La consideración de un coeficiente de fricción distinto en la pestaña que en la banda rodadura, pues no tiene por qué ser el mismo. El efecto de esta variación sería similar al de asignar un coeficiente de fricción propio de condiciones húmedas o secas (salvando las distancias, pues en este último caso también se varía la pendiente de la curva fuerza – deslizamiento).
7. El estudio de la lubricación de la pestaña (reducción del coeficiente de fricción por medio del rociado de la pestaña con un lubricante) para la reducción del desgaste sobre la misma. Se trataría de hallar el valor óptimo del coeficiente de fricción, el cual minimizase el desgaste
8. El estudio del efecto de las zapatas de freno sobre la banda de rodadura. Las zapatas incrementarían el desgaste de la banda de rodadura, si bien el efecto sería contenido porque lo habitual es que se pierda más material en las propias zapatas (que se sustituyen periódicamente).

9. El estudio del crecimiento de las grietas superficiales o subsuperficiales predichas por el índice de fatiga. En especial, sería importante estimar cuándo aparece la grieta crítica, que es la que obliga a la retirada de servicio de la rueda afectada.
10. La optimización de la profundidad máxima admisible del desgaste tomando en cuenta la globalidad del asunto: una menor profundidad ocasionará un mayor coste para la empresa que realice el retorneado, pero permitirá eliminar el desgaste de forma que no varíe demasiado la conicidad (la conicidad influye en la velocidad crítica del vehículo, por encima de la cual es inestable) y también permitirá eliminar las grietas antes de que se tornen críticas; mientras que una mayor profundidad ocasionará un menor coste para la empresa, pero la rueda funcionará peor y las grietas podrían tornarse críticas. Por consiguiente, sería preciso hallar un punto de equilibrio entre todos los factores intervinientes.
11. La realización de un estudio más comprensivo sobre el efecto de la velocidad en el desgaste. Para ello, podría comenzarse por introducir una relación velocidad – coeficiente de rozamiento realista, la cual podría ser de tipo potencial y no exigiría la variación de la pendiente de la curva fuerza – deslizamiento. Empero, lo mejor sería recurrir al método de los elementos finitos, pues permitiría computar con exactitud las diferentes distorsiones elásticas que aparecerían a distintas velocidades.
12. El cálculo de cuánta carga soporta realmente el área de contacto de la banda de rodadura y el área de contacto de la pestaña en una rueda cuya pestaña contacta con el carril. Para ello, sería preciso dejar de lado el empleo de la fracción α_{fn} , que constituye una mera aproximación, y calcular las deformaciones, tensiones y fuerzas reales sobre cada área a través del método de los elementos finitos.
13. La inclusión de parámetros de la superestructura que modifican las condiciones de desgaste de las ruedas, tales como el alabeo, la flexión del carril y los pasos por juntas (de dilatación o aislantes eléctricas). Dependiendo de los valores concretos y de su repetitividad, estos parámetros pueden acortar en mayor o menor medida la vida útil de las ruedas.
14. La inclusión de los impactos en el cálculo de la vida útil, sobre todo aquellos que se producen contra los corazones de los desvíos y con otros aparatos de vía.
15. La inclusión de las irregularidades de la vía en el cómputo de la vida útil y de la insuficiencia/exceso de peralte en condiciones de bajo coeficiente de fricción estática.
16. La inclusión de otro tipo de daños en el cómputo de la vida útil como, por ejemplo, los planos, que pueden ser causantes de desprendimientos o coqueas (también conocidas como *spalling*). Los planos suelen aparecer cuando se bloquean las ruedas en frenadas severas.

12. Fuentes de información.

12.1. De la memoria.

- [1] Ministerio de Fomento; Ministère de l'Environnement, de l'Énergie et de la Mer. "Servicios de Autopista Ferroviaria (AF) en los ejes Atlántico y Mediterráneo. Convocatoria de manifestaciones de interés. Consulta a los fabricantes y diseñadores de material móvil", *Informe*, enero de 2018.
- [2] Jaro, L.; Folgueira, C. A. "Las Autopistas ferroviarias: ¿Una apuesta de futuro en líneas mixtas de alta velocidad?", *Revista de Alta Velocidad*, no. 2, pp. 73 – 96, mayo de 2012.
- [3] Ministerio de Fomento. "Orden FOM/1630/2015, de 14 de julio, por la que se aprueba la "Instrucción ferroviaria de gálibos"", *Boletín Oficial del Estado*, no. 185, ref. BOE-A-2015-8765, 2015.
- [4] Subdirección de innovación estratégica de ADIF. "Sistemas de ancho variable en trenes de mercancías", *Vía Libre*, pp. 26 – 36, marzo de 2021.
- [5] Sichani, M. S. "On Efficient Modelling of Wheel – Rail Contact in Vehicle Dynamics Simulation", *Tesis doctoral*, 2016.
- [6] Rovira, A. "Modelado del contacto rueda-carril para aplicaciones de simulación de vehículos ferroviarios y estimación del desgaste en el rango de baja frecuencia", *Tesis doctoral*, Universidad Politécnica de Valencia, 2012.
- [7] Ortega, E. "Simulación del contacto rueda – carril con Pro/ENGINEER", *Proyecto final de carrera*, Universidad Carlos III, mayo de 2012.
- [8] Greenwood, J. A. "Hertz theory and Carlson elliptic integrals", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 119, pp. 240 – 249, junio de 2018.
- [9] Cooper, D. H. "Tables of Hertzian Contact – Stress Coefficients", *Informe*, no. 387, del laboratorio de Ciencia Coordinada, agosto de 1968.
- [10] Hertz, H. R. "Über die Berührung fester elastische Körper" ("Sobre el contacto entre cuerpos elásticos"), *Journal für die reine und angewandte Mathematik. (Revista de las Matemáticas puras y aplicadas)*, no. 92, pp. 156–171, 1882.
- [11] Haque, I.; Law, E. H.; Cooperrider N. K. "Users' manual for program for calculation of Kalker's linear creep coefficients", *Informe*, no. FRA/ORD – 78/71, encargado por el Dpto. de Transporte de EE. UU., mayo de 1979.
- [12] Kalker, J. J. "Rolling contact phenomena - linear elasticity", *CISM International Centre for Mechanical Sciences – SpringerWienNewYork*, 2000.
- [13] Polach, O. "A Fast Wheel – Rail Forces Calculation Computer Code", *Vehicle System Dynamics*, vol. 33, sup. no. 1, pp. 728 – 739, enero del 2000.
- [14] Polach, O. "Creep forces in simulations of traction vehicles running on adhesion limit", *Wear*, vol. 258, no. 7 – 8, pp. 992 – 1000, marzo de 2005.

- [15] González – Cachón, S. “Comportamiento tribológico de aceros de carril microaleado y convencional C – Mn en condiciones de deslizamiento puro”, *Tesis doctoral*, Universidad de Oviedo, 2017.
- [16] Peng, B.; Iwnicki, S.; Shackleton, P.; Crosbee, D. “Comparison of wear models for simulation of railway wheel polygonalization”, *Wear*, vols. 436 – 437, octubre de 2019.
- [17] RENFE, Escuela Técnica para el Profesional de Mantenimiento. “Temario específico para las pruebas presenciales de la Especialidad Máquinas – Herramientas”, *Material de estudio*, 2020.
- [18] Alba, M. V. “Optimización de la Política de Reperfilado de Ruedas para el Citadis 302, en la explotación de Metro Liger Oeste”, *Revista Vía Libre Técnica*, no. 9, pp. 29 – 38, abril de 2015.
- [19] Empresa Sandvik Coromat. “Torneado ferroviario. Retorneado y torneado de ruedas nuevas”, *Guía de aplicación*, 2016.
- [20] Manual de usuario del programa *Engineering Equation Solver*, 2018.

12.2. De los anexos.

- [1.A] Tipler, P. A.; Mosca, G. “Física para la ciencia y la tecnología”, *Editorial Reverté S.A.*, Vol. 1, septiembre de 2014.
- [2.A] Larrodé, E. “Ferrocarriles y tracción eléctrica”, *Editorial Copy Center*, 2007.
- [3.A] <https://www.real-world-physics-problems.com/rolling-resistance.html>
- [4.A] Fissette, P. “Railway vehicle dynamics”, *Apuntes docentes*, Universidad Católica de Leuven, 2016.
- [5.A] Moody, J. C. “Critical Speed Analysis of Railcars and Wheelsets on Curved and Straight Track”, *Trabajo Fin de Grado*, Universidad de Bates, abril de 2014.
- [6.A] Oldknow, K. “Wheel – Rail Interaction Fundamentals”, *Curso*, empresa LBFoster, 2015.
- [7.A] <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/3382/40137-7.pdf>
- [8.A] Yassine, B. “Los trabajos topográficos en la ejecución de una vía de ferrocarril de alta velocidad”, *Trabajo Fin de Grado*, Universidad Politécnica de Valencia, septiembre de 2015.
- [9.A] <https://www.wolframalpha.com/>
- [10.A] Santamaría, J.; Vadillo, E. G.; Gómez, J. “Influence of creep forces on the risk of derailment of railway vehicles”, *Vehicle System Dynamics*, vol. 47, no. 6 pp. 721 – 752, junio de 2009.
- [11.A] ADIF. “Declaración sobre la red”, *Informe*, capítulo 3 sobre la descripción de las infraestructuras ferroviarias, 2016.
- [12.A] http://www.wikivia.org/wikivia/index.php?title=Acuerdos_verticales
- [13.A] <https://www.alacero.org/es/page/el-acero/caracteristicas-del-acero>

- [14.A] García (– Álvarez), A. “Cambio Automático de ancho de vía en los trenes de España”, *Monografía*, Fundación de los Ferrocarriles Españoles, 4ª edición, septiembre de 2010.
- [15.A] <https://ganandobarlovento.es/modelismo-naval-determinacion-del-centro-de-gravedad-de-un-modelo/>
- [16.A] http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/circular/din_circular.htm
- [17.A] Rincón, L. A. “Circulación en curva, esfuerzos y sollicitaciones verticales en el ferrocarril convencional”, *Trabajo Fin de Máster*, Universidad de Zaragoza, 2018.
- [18.A] Jiménez, P. “Ferrocarriles”, *Apuntes docentes*, Universidad Politécnica de Cartagena, 2016. Nota: Estos apuntes están basados en los apuntes docentes “Ferrocarriles: apuntes de clase edición 2009 - 2010” de José Manuel García Díaz de Villegas, exdocente de la Universidad de Cantabria.
- [19.A] ADIF. “Geometría de la vía. Parámetros geométricos”, *Norma Adif Vía 0-2-0.0*, 1ª Edición: septiembre de 2003.
- [20.A] ADIF. “Geometría de la vía. Determinación de las velocidades máximas admisibles por trazado. Ancho nominal 1.668 mm y velocidades hasta 220 km/h”, *Norma Adif Vía 0-2-3.0*, 1ª Edición: enero de 1988.
- [21.A] ADIF. “Calificación de la vía. Peralte, alabeo y estabilidad de traviesas”, *Norma Adif Vía 7-3-5.0*, 1ª Edición: marzo de 1983.
- [22.A] Ministerio de Fomento. “Reglamento de circulación ferroviaria. Criterios para su implantación en los Sistemas Generales de Seguridad (SGS)”, *Reglamento*, 1ª edición electrónica de julio de 2018, Centro de Publicaciones de la Secretaría General Técnica del Ministerio.
- [23.A] Andrews, H. I. “Railway Traction. The Principles of Mechanical and Electrical Railway Traction”, *Editorial Elsevier Amsterdam – Oxford – Nueva York – Tokio*, febrero de 1986.
- [24.A] https://es.qaz.wiki/wiki/Iberian-gauge_railways
- [25.A] <http://www.forotrenes.com/foro/viewtopic.php?f=9&t=7422>
- [26.A] <https://economipedia.com/definiciones/r-cuadrado-coeficiente-determinacion.html>
- [27.A] Bair, S.; Kozalás, M. “The Contribution of Roller Compliance to Elastohydrodynamic Traction”, *Tribology Transactions*, vol. 49, no. 2, pp. 218 – 224, enero de 2006.
- [28.A] Díaz de la Fuente, S. “Analysis and modeling of unsteady effects within the rail – wheel contact”, *Trabajo Fin de Máster*, Universidad de Tecnología de Graz, 2012.
- [29.A] AENOR. “Aplicaciones ferroviarias. Ejes montados y bogies. Ruedas. Perfil de rodadura”, *UNE-EN 13715:2007+A1*, septiembre de 2011.
- [30.A] AENOR. “Aplicaciones ferroviarias. Vía. Carriles. Parte 1: “Carriles Vignole de masa mayor o igual a 46 kg/m”, *UNE-EN 13674-1:2012+A1*, febrero de 2018.
- [31.A] <http://railsiferraduras.blogspot.com/2012/03/charles-blacker-vignoles-y-su-eponimo.html>
- [32.A] ADIF. “Montaje de vía. Instalación de la vía”, *Norma Adif Vía 7-1-3.1*, 1ª Edición: enero de 1995.
- [33.A] AENOR. “Aplicaciones ferroviarias. Vía. Carriles. Parte 1: Carriles Vignole de masa comprendida entre 27 kg/m y 46 kg/m, excluyendo 46 kg/m”, *UNE-EN 13674-4*, diciembre de 2019.

- [34.A] ADIF. “Carriles para vía general y aparatos”, *Especificación Técnica de ADIF 03.360.161.8*, 1ª edición: junio de 2017.
- [35.A] ADIF. “Calificación de la vía. Inclinación del carril”, *Norma Adif Vía 7-3-2.5*, 1ª Edición: agosto de 1992.
- [36.A] ADIF. “Geometría de la vía. Trazado de la vía en puntos singulares”, *Norma Adif Vía 0-2-2.1*, 1ª Edición: enero de 2003.
- [37.A] ADIF. “Calificación de la vía. Ancho de vía”, *Norma Adif Vía 7-3-2.5*, 1ª Edición: febrero de 1983.
- [38.A] Dukkipati, R. V. “Vehicle System Dynamics”, *Alpha Science International Ltd*, octubre del 2000.
- [39.A] Piotrowski, J.; Chollet, H. “Wheel–rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact”, *Vehicle System Dynamics*, vol. 43, no. 6 – 7, pp. 455 – 483, julio de 2005.
- [40.A] AENOR. “Aplicaciones ferroviarias. Ejes montados y bogies. Ruedas. Requisito de producto”, *UNE-EN 13262:2005+A2:2011*, noviembre de 2011.
- [41.A] <https://ingemecanica.com/tutorialsemanal/tutorialn100.html>
- [42.A] https://www.greenbrier-europe.com/fileadmin/user_upload/Produkte/2018_ENG_GBRX_Internet.pdf
- [43.A] <https://cafdigitaldesignsolutions.com/vagones/>
- [44.A] <https://static1.squarespace.com/static/5cd9ef13aadd3470c5296feb/t/5cf69e521425ac00019d56c4/1559666264286/KLW+pamphlet+2019.pdf>
- [45.A] <http://www.tedrail.com/Products>
- [46.A] https://lohr.fr/lohruploads/2016/03/2016-10_plaquette-railway-system_gb.pdf
- [47.A] Consejo Europeo. “Directiva 96/53”, *Diario Oficial de las Comunidades Europeas*, no. L 235/59, 25 de julio de 1996.
- [48.A] http://81.47.175.201/livingrail/index.php?option=com_content&view=article&id=715:trucks-on-trains&catid=36:interoperability&Itemid=127
- [49.A] <https://www.waggonbau-niesky.com/en/products/vehicles-for-intermodal-transportation/8-axle-low-bed-wagon-%C2%BBrolling-highway%C2%AB-saadkms/>
- [50.A] Documento técnico encontrado en la página anterior.
- [51.A] <http://www.ametsis.com/productos-y-servicios/equipos-de-freno-en-bogie/>
- [52.A] <http://www.kombibahn.de/drehgestell-bauart-690-rola.html>
- [53.A] http://www.drehgestelle.de/5/h_a_rola.html
- [54.A] <https://alfanje.wordpress.com/2019/04/06/espana-no-es-el-segundo-pais-mas-montanoso-de-europa/>
- [55.A] https://europa.eu/european-union/about-eu/countries_es

[56.A] Vera, C. “Proyecto Constructivo de una Línea Ferroviaria de Transporte de Mercancías y su Conexión a la Red Principal”, *Trabajo Fin de Grado*, Universidad de Sevilla, 2015.

[57.A] <http://www.trensim.com/foro/viewtopic.php?f=26&t=15156>

[58.A] ADIF. “Metodología para el diseño del trazado ferroviario”, *Norma Adif Plataforma 1-2-1.0*, 1ª Edición: enero de 2021.

[59.A] de San Dámaso, R. “La vía de tres carriles. Situación actual y perspectivas”, *Dirección General de Operaciones e Ingeniería – Dirección Ejecutiva de Operaciones e Ingeniería de Red de Alta Velocidad*, ADIF, 2011.

[60.A] Andrés, J. A. “Proyecto de construcción de la línea ferroviaria de alta velocidad Corredor Cantábrico – Mediterráneo, tramo Gallur – Mallén”, *Trabajo Fin de Grado*, Universidad de Zaragoza, febrero de 2018.

[61.A] ADIF. “Obras de tierra. Capas de asiento ferroviarias”, *Norma Adif Vía 2-1-0.1*, 1ª Edición: febrero de 1983.

Anexo I. Conceptos previos al estudio del contacto rueda – carril.

I.1. Rodadura de un sólido rígido.

La rodadura de un sólido rígido se compone de dos movimientos:

- ✓ Un movimiento de traslación a una velocidad lineal v [m/s].
- ✓ Un movimiento de rotación a una velocidad angular ω [rad/s].

Si la rodadura es ideal, es decir, sin deslizamiento, se satisface la siguiente relación:

$$v = r\omega \quad [Ec. I. 1]$$

donde r [m] es el radio del sólido rodante.

Al superponer ambos movimientos y satisfecha esta relación, resulta que la velocidad en el punto de contacto del sólido con el plano de rodadura (en el caso de una esfera o cuerpo similar) o de la generatriz de contacto (en el caso de un disco, cilindro o cuerpos similares) es nula. Este punto de contacto es conocido como centro instantáneo de rotación (CIR) y esta generatriz de contacto es conocida como eje instantáneo de rotación (EIR). En la siguiente figura se puede apreciar un diagrama donde se demuestra gráficamente la nulidad de la velocidad en el CIR o EIR:

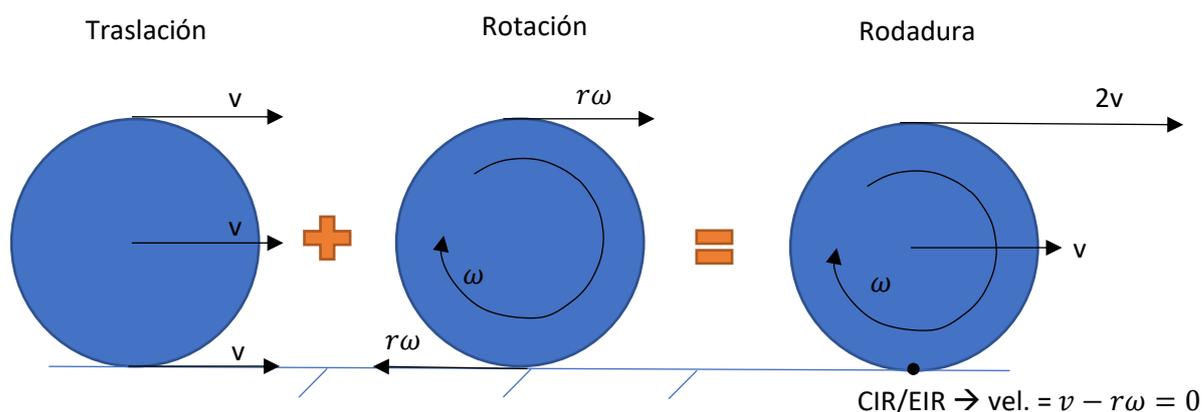


Figura I.1. Demostración de que la velocidad (vel.) en el CIR o EIR (este último perpendicular al plano de la figura) es nula tras la superposición de los movimientos. Fuente: Elaboración propia.

Para que esta rodadura sea posible, debe vencerse el rozamiento estático que aparece en el contacto cuerpo – plano como consecuencia del peso del cuerpo y que se opone al movimiento del cuerpo. Para iniciar y mantener debe aplicarse una fuerza F [N] en el sentido de avance, la cual deberá ser mayor (en el arranque) o igual (posteriormente) a la fuerza de rozamiento:

$$F \geq \mu_e N \quad [Ec. I. 2]$$

donde $\mu_e [\phi]$ es el coeficiente de rozamiento estático y N [N] es la fuerza normal que ejerce el plano sobre el cuerpo, que aparece como reacción al peso del cuerpo P [N].

Abajo se puede observar un balance de fuerzas y momentos tomados en torno al EIR, una vez se ha trasladado la fuerza de rozamiento al centro de gravedad del cuerpo:

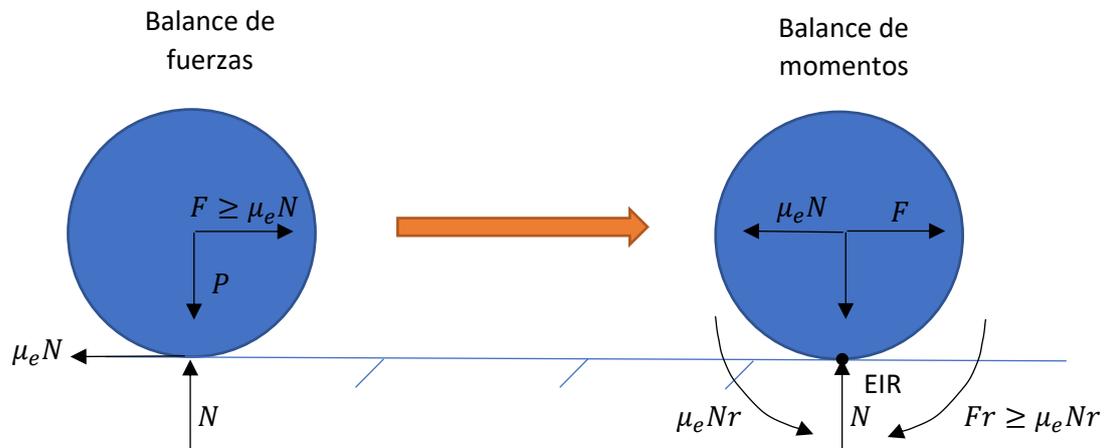


Figura I.2. Balance de fuerzas y de momentos alrededor del EIR (perpendicular al plano de la figura).
Fuente: Elaboración propia.

Por último, cabe resaltar las consecuencias de que la velocidad relativa entre el CIR/EIR y el plano (supuesto en reposo) sea nula: Por un lado, la fricción que aparece siempre será estática y nunca dinámica, ya que la dinámica aparece siempre que existe una velocidad relativa entre dos superficies. Por otro lado, el trabajo realizado por esta fuerza de rozamiento será nulo, ya que se trata de una fuerza aplicada en un punto instantáneamente estático, el cual no se desplaza. Visto desde el punto de vista de la potencia disipada, esta es nula porque se está aplicando una fuerza en un punto de velocidad cero, por lo que el producto fuerza – velocidad es cero como resultado [1.A, p. 310].

I.2. Rodadura de un sólido deformable.

En la realidad, todos los sólidos son deformables y la zona de contacto experimenta una deformación, por lo que ya no se circunscribe a un simple punto o generatriz de contacto, sino que es un área en la cual aparece una determinada distribución de tensiones y deformaciones. De hecho, si el contacto fuese puntual o lineal (a lo largo de una generatriz), la tensión en el contacto tendería a infinito, ya que el área de un punto o línea es nula, y no existe ningún material real que soporte una tensión infinita.

Debido a la deformación, el CIR se desplaza hacia la derecha o izquierda, según sea el sentido de avance. Es en este CIR desplazado (CIR real) donde aparece la reacción normal, la cual genera un momento de reacción respecto al CIR en la situación rígida (CIR teórico), momento que se opone a la rodadura y, por ende, es denominado resistencia a la rodadura. Esta resistencia a la rodadura se puede calcular tal que así:

$$M_{res} = Nl \quad [Ec. I.3]$$

donde M_{res} [N·m] es el momento resistente y l [m] es la distancia entre el CIR teórico y el real.

En la siguiente imagen se ilustra un balance de fuerzas y de momentos aplicado a este caso, teniendo en cuenta que los momentos han sido tomados entorno al CIR real una vez trasladadas las fuerzas al centro de masas del cuerpo:

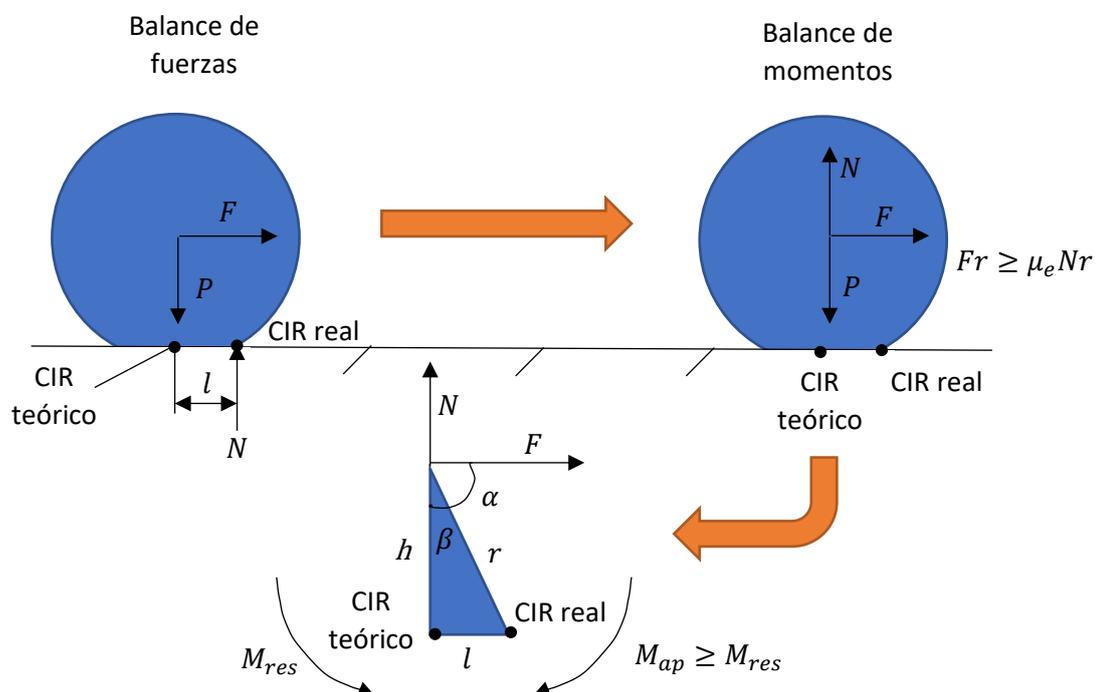


Figura I.3. Balance de fuerzas y de momentos alrededor del CIR. Se ha exagerado la deformación del cuerpo y se ha supuesto que el plano es infinitamente rígido. Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se desarrolla matemáticamente el balance de momentos teniendo en cuenta que M_{ap} [N·m] es el momento aplicado y que α, β [°] y h [m] son las dimensiones indicadas en la figura:

$$M_{ap} \geq M_{res}$$

$$Fr \operatorname{sen}(\alpha) \geq Nr \operatorname{sen}(\beta) = Nl$$

$$Fr \operatorname{sen}(90^\circ - \beta) \geq Nl$$

$$Fr [\operatorname{sen}(90^\circ) \cos(\beta) + \cos(90^\circ) \operatorname{sen}(\beta)] \geq Nl$$

$$Fr \cos\beta = Fh \geq Nl$$

$$F \geq \frac{Nl}{h} \quad [\text{Ec. I. 4}]$$

Mediante trigonometría es posible relacionar esta fuerza con la profundidad de compresión de la rueda, es decir, con la deformación radial máxima que experimenta, denotada δ [m]. Para ello, se hace uso del siguiente triángulo:

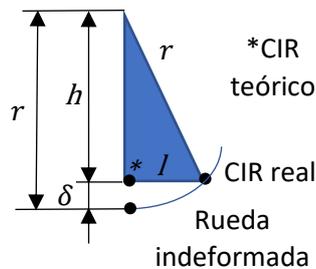


Figura I.4. Triángulo escaleno que relaciona las dimensiones de interés. Fuente: Elaboración propia.

Seguidamente se desarrolla la ratio l/h mediante la aplicación del teorema de Pitágoras y de las relaciones geométricas existentes y se expresa solamente en función de los parámetros δ y r :

$$\frac{l}{h} = \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r - \delta}$$

$$\frac{l}{h} = \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r - \delta} = \frac{\sqrt{r^2 - (r - \delta)^2}}{r - \delta}$$

$$\frac{l}{h} = \frac{\sqrt{r^2 - r^2 + 2r\delta - \delta^2}}{r - \delta} = \frac{\sqrt{2r\delta}}{r - \delta}$$

$$\frac{l}{h} = \sqrt{\frac{2r\delta - \delta^2}{(r - \delta)^2}} \quad [\text{Ec. I. 5}]$$

Esta ratio se suele denominar coeficiente de rodadura C_{rr} , dado que se trata de un parámetro adimensional que relaciona F con N . Como, en general, la deformación es ínfima y muy inferior al

valor del radio ($\delta \ll r$), se suele realizar la aproximación de abajo, cuyo resultado se conoce como fórmula de Dupuit:

$$C_{rr} = \sqrt{\frac{2r\delta - \delta^2}{(r - \delta)^2}} \cong \sqrt{\frac{2\delta}{r}}$$
$$C_{rr} \cong \sqrt{\frac{2\delta}{r}} \quad [Ec. I. 6]$$

Por tanto, como se ha explicado, se precisa aplicar un par para que la rueda bascule en torno al CIR real y pueda avanzar. Al tratarse de un punto de basculación, en el CIR real no aparece ningún rozamiento estático, por lo que no se aplica ninguna fuerza para vencer el rozamiento estático al ser inexistente.

En cuanto al trabajo realizado, en esta ocasión sí existe un trabajo no nulo, puesto que la fuerza aplicada realiza un desplazamiento desde el CIR teórico hasta el real (o el momento realiza un desplazamiento angular entre ambos puntos) para hacer la rodadura posible.

En cuanto a la deformación del plano de rodadura, es evidente que también estará presente. No obstante, la deformación de este no afecta a la demostración efectuada, puesto que lo importante es el parámetro δ , el cual depende también de la deformación del plano y cuyo cálculo se expone en la teoría de Hertz ([subsección 4.4.4](#)). Se trata de un parámetro que depende fuertemente de la naturaleza de los materiales puestos en contacto, principalmente de su rigidez. Su cálculo suele realizarse a título informativo, pero lo habitual es despreciarlo frente al radio en las ecuaciones, tal como se ha realizado al demostrar la fórmula de Dupuit y como se realizará de aquí en adelante. Además, tal como se verá, su valor está en el orden de magnitud de los micrómetros o decenas de ellos.

Para concluir, cabe resaltar que la realidad es más complicada, ya que el material sufre histéresis en los ciclos compresión – descompresión y libera energía en forma de calor. Además, aunque se satisfaga a nivel global la condición de no deslizamiento (que no se rebase el límite de adherencia, siendo este el máximo coeficiente de fricción dinámica a una determinada velocidad), aparecerán pequeños deslizamientos o microdeslizamientos debido a diversas causas, las cuales se detallarán más adelante. Como consecuencia de estos microdeslizamientos aparecerá fricción dinámica y se producirá la abrasión de los materiales en contacto [2.A], [3.A].

I.3. Deslizamiento.

I.3.1. Concepto de deslizamiento.

En un contacto real existe deslizamiento, lo cual significa que no todos los puntos del cuerpo tienen correspondencia exacta, medida según las verticales, con los puntos del plano. Esta falta de correspondencia se representa en la siguiente figura:

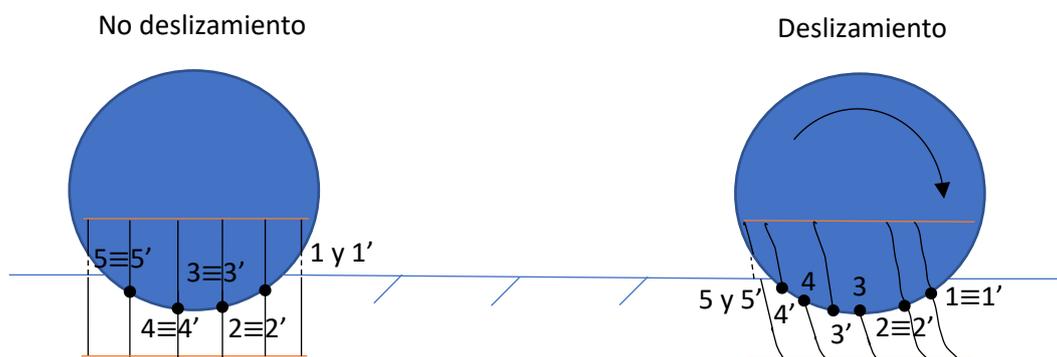


Figura I.5. Correspondencia o falta de ella entre los puntos en una situación de no deslizamiento y de deslizamiento. Los puntos con *prima* se refieren al cuerpo y los demás al plano. Además, se han exagerado las deformaciones para mayor claridad. Fuente: Elaboración propia.

En la imagen se comprueba que la correspondencia entre puntos del cuerpo (distinguidos con *prima*) y del plano es exacta en una situación de no deslizamiento. Esta situación no es común, sin embargo, y suele darse cuando el cuerpo está en reposo.

A medida que el cuerpo comienza a moverse aparecen desplazamientos horizontales (deformación elástica), en la dirección de avance. Estos desplazamientos pueden compensar el movimiento relativo entre cuerpos en un principio (cerca del CIR real, donde el movimiento relativo es pequeño) y entonces sigue dándose la correspondencia entre puntos, aunque no es vertical (puntos 1 – 1' y 2 – 2', donde se puede hablar de no deslizamiento o adhesión). Conforme este movimiento relativo se incrementa (lejos del CIR real), los desplazamientos horizontales no pueden compensarlo y entonces se produce una falta de correspondencia horizontal de los puntos, lo cual se conoce como microdeslizamiento horizontal (puntos 3 – 3' y 4 – 4'). Esta falta de correspondencia también se produce para los puntos que aún no han entrado en contacto (puntos 5 – 5').

Se ha ilustrado un deslizamiento en el sentido de avance del cuerpo. En el caso de un vehículo, el microdeslizamiento o deslizamiento puede manifestarse de estas maneras [5, p. 21 – 23].:

- ✓ Longitudinal (en la dirección de avance).
- ✓ Transversal (en la dirección ortogonal a la de avance, pero en el mismo plano).
- ✓ Rotacional (giro en torno al eje normal al plano).

1.3.2. Terminología y ecuaciones básicas del deslizamiento.

En el estudio del deslizamiento se manejan una serie de términos que no deben ser confundidos, por lo que deben ser definidos apropiadamente. Estos términos son: (micro)deslizamiento, velocidad de deslizamiento rígida, velocidad de deslizamiento elástica, velocidad de deslizamiento, deslizamiento adimensional y pseudodeslizamiento. Defínense todos ellos a continuación, junto con las ecuaciones básicas asociadas a los mismos:

1.3.2.1. Microdeslizamiento.

El microdeslizamiento o, simplemente, deslizamiento, es la falta de correspondencia entre los puntos de dos cuerpos en contacto debido a la existencia de un desplazamiento (movimiento) relativo entre ambos. Tomando como referencia la figura 1.5, el microdeslizamiento es lo que aparece entre los puntos 3 y 3', 4 y 4' y lo que aparecerá entre 5 y 5' nada más entren en contacto. Matemáticamente:

$$\Delta v.p. = v.p.' - v.p. \quad [Ec. I. 7]$$

donde $v.p.$ es la abreviatura de *vector de posición*, cuyas coordenadas se expresan en [m] y el superíndice *prima* hace referencia al vector de posición de los puntos de la rueda.

Aplicando esta ecuación al par de puntos 5 – 5' y al par 1 – 1', por ejemplo, se puede apreciar lo siguiente:

$$\begin{cases} \Delta v.p. (5 - 5') = v.p. (5') - v.p. (5) > 0 \\ \Delta v.p. (1 - 1') = v.p. (1') - v.p. (1) = 0 \end{cases}$$

En vista del resultado se confirma que entre los puntos 5 – 5' existe un microdeslizamiento debido a la variación del vector de posición entre 5 y 5' $\Delta v.p. (5 - 5')$; así como el hecho de que entre los puntos 1 y 1' no hay ningún deslizamiento, ya que el vector de posición de 1 coincide con el de 1', lo cual significa que los puntos 1 y 1' son puntos coincidentes, es decir, que están en adhesión.

Normalmente se utilizan las coordenadas lineales x, y y la coordenada angular ϖ para el cálculo de los microdeslizamientos, el cual se lleva a cabo mediante estas fórmulas:

$$\begin{cases} \Delta x = x' - x & [Ec. I. 8] \\ \Delta y = y' - y & [Ec. I. 9] \\ \Delta \varpi = \varpi' - \varpi & [Ec. I. 10] \end{cases}$$

donde las coordenadas lineales se expresan en [m] y las angulares en [rad], [5, p. 21].

1.3.2.2. Velocidad de deslizamiento rígida.

La velocidad de deslizamiento rígida entre dos cuerpos en contacto es la resta entre la velocidad absoluta de los puntos de un cuerpo y los puntos correlativos del otro cuerpo. Matemáticamente:

$$\Delta \mathcal{V} = \mathcal{V}' - \mathcal{V} \quad [Ec. I. 11]$$

donde las velocidades se expresan en [m/s] y el superíndice *prima* hace referencia a la rueda.

Aplicando esta ecuación al par de puntos 5 – 5' y al par 1 – 1', por ejemplo, se puede apreciar lo siguiente:

$$\begin{cases} \Delta V (5 - 5') = V (5') - V(5) > 0 \\ \Delta V (1 - 1') = V (1') - V(1) = 0 \end{cases}$$

En vista del resultado se confirma que entre los puntos 5 – 5' existe un microdeslizamiento a una velocidad $\Delta V (5 - 5')$; así como el hecho de que entre los puntos 1 y 1' no hay ningún deslizamiento, ya que la velocidad de deslizamiento es nula, lo cual hace que 1 y 1' sean puntos coincidentes, es decir, que estén en adhesión.

La velocidad de deslizamiento rígida puede ser longitudinal (en la dirección de avance del vehículo), transversal, transversal (en la dirección ortogonal a la de avance, pero en el mismo plano) o rotacional (giro en torno al eje normal al plano). Las ecuaciones son, para cada caso:

$$\begin{cases} \Delta V_x = V'_x - V_x & [Ec. I. 12] \\ \Delta V_y = V'_y - V_y & [Ec. I. 13] \\ \Delta \Phi = \Phi - \Phi & [Ec. I. 14] \end{cases}$$

donde ΔV_x [m/s] es la longitudinal, ΔV_y [m/s] es la transversal y $\Delta \Phi$ [rads] la rotacional [5, p. 22].

1.3.2.3. Velocidad de deslizamiento elástica.

Tal como se ha explicado en la introducción, existe unos desplazamientos elásticos que contrarrestan totalmente del deslizamiento de los puntos en adhesión y, parcialmente, el deslizamiento de los puntos en deslizamiento. Estos desplazamientos son los siguientes, en la dirección longitudinal y en la transversal, respectivamente:

$$\begin{cases} \Delta u_x = u'_x - u_x & [Ec. I. 15] \\ \Delta u_y = u'_y - u_y & [Ec. I. 16] \end{cases}$$

siendo todos ellos expresados en [m], [5, p. 22].

La velocidad de deslizamiento elástica se obtiene por el cálculo de la derivada material de estos desplazamientos, renombrados U_x y U_y a fin de evitar confusiones entre Δ y los operadores D de derivada material y ∂ de derivada parcial, respectivamente:

$$\begin{cases} \frac{DU_x}{Dt} = V \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial t} & [Ec. I. 17] \\ \frac{DU_y}{Dt} = V \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial t} & [Ec. I. 18] \end{cases}$$

donde V [m/s] es la velocidad absoluta del vehículo.

En los casos estacionarios (velocidad constante y tramo de vía de curvatura constante) se cumplirá $\partial(\cdot)/\partial t = 0$, así que estas ecuaciones se simplificarán en dichos casos [5, p. 22].

1.3.2.4. Velocidad de deslizamiento.

La velocidad de deslizamiento aúna la velocidad de deslizamiento rígida y la elástica e incorpora un término adicional debido al efecto que ejerce la rotación en la dirección longitudinal y en la transversal. Su expresión en las direcciones longitudinal y transversal es la que sigue:

$$\begin{cases} w_x = \Delta V_x + y\Phi - V \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial t} & [Ec. I. 19] \\ w_y = \Delta V_y - x\Phi - V \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial t} & [Ec. I. 20] \end{cases}$$

siendo todos los términos expresados en [m/s]. x e y son las coordenadas longitudinal y transversal del punto donde se desee calcular w_x y w_y [5, p. 22].

1.3.2.5. Deslizamiento adimensional.

El deslizamiento adimensional es la velocidad de deslizamiento adimensionalizada mediante la división de todos sus términos entre V :

$$\begin{cases} s_x = \frac{\Delta V_x}{V} + \frac{y\Phi}{V} - \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{V\partial t} & [Ec. I. 21] \\ s_y = \frac{\Delta V_y}{V} - \frac{x\Phi}{V} - \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{V\partial t} & [Ec. I. 22] \end{cases}$$

siendo todos los términos adimensionales [5, p. 22].

1.3.2.6. Pseudodeslizamiento.

El pseudodeslizamiento (*creepage* en inglés) es la velocidad de deslizamiento rígida adimensionalizada mediante la división de todos sus términos entre V :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\Delta V_x}{V} & [Ec. I. 23] \\ v_y = \frac{\Delta V_y}{V} & [Ec. I. 24] \\ \varphi = \frac{\Phi}{V} & [Ec. I. 25] \end{cases}$$

donde v_x [ϕ] es el pseudodeslizamiento longitudinal, v_y [ϕ] es el pseudodeslizamiento transversal y φ [rad/m] es el giro o espín (españolización del término inglés *spin*).

Cabe realizar varias observaciones acerca de estos pseudodeslizamientos:

1. No son deslizamientos propiamente dichos porque no toman en consideración la deformación elástica. De ahí que se denominen pseudodeslizamientos.
2. El giro o espín no es adimensional, ya que al dividir Φ [rad/s] entre V [m/s] queda [rad/m] como unidad residual. Esto posee una interpretación física: Ángulo deslizado por distancia

lineal avanzada. En verdad, podría adimensionalizarse a través de algunos parámetros, aunque su utilidad sería restringida.

3. Pueden obtenerse a través del estudio de la cinemática (grados de libertad) del conjunto formado por un eje y sus dos ruedas (lo que se denomina juego de ruedas).
4. Pueden relacionarse (aproximadamente) con el deslizamiento adimensional a través de funciones que incluyen los parámetros de elasticidad y dimensiones del área de contacto pertinentes. Es decir, las funciones $s_i = f(v_i)$ o, a la inversa, $v_i = f^{-1}(s_i)$, para $i = x, y$. Estas funciones dependen de la teoría elástica seleccionada.
5. Son divididos por la velocidad absoluta del vehículo V [m/s], la cual debería coincidir con el producto ωr en el caso de rodadura ideal (véase la ecuación I.1 del [subcapítulo I.1](#)). Aunque $V \neq \omega r$ por culpa del deslizamiento, en la práctica se divide entre ωr para adimensionalizar los pseudodeslizamientos. De esta forma, el producto de cada uno de ellos con ωr es una medida de la desviación existente con respecto a la velocidad de rodadura ideal.

En las siguientes subsecciones se van a parametrizar los pseudodeslizamientos de los tres tipos para un juego de ruedas, para lo cual hay que partir de los sistemas de referencia precisos. Nótese que un vehículo o convoy ferroviario posee, en teoría, un único grado de libertad al tratarse de un vehículo guiado. Empero, el movimiento de un juego es más complejo y puede moverse en la dirección de la vía férrea, en la dirección transversal o rotar en torno al eje normal a la superestructura [5, pp. 22 – 24].

I.3.3. Establecimiento de los sistemas de referencia.

Para proceder al estudio de los pseudodeslizamientos es importante fijar los sistemas de referencia previamente, que son cuatro:

- ✓ Sistema de referencia absoluto XYZ , dextrógiro, fijo y con origen en el plano de rodadura, anclado al comienzo de la vía y centrado en la misma.
- ✓ Sistema de referencia de la vía $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, dextrógiro, móvil a la velocidad del vehículo y con origen en el plano de rodadura y en la línea media de la vía, manteniéndose el eje \tilde{x} siempre tangente a esta línea.
- ✓ Sistema de referencia del eje $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, dextrógiro, móvil a la velocidad del eje y con origen en centro de gravedad del conjunto rígido formado por el eje y sus dos ruedas (es decir, del juego de ruedas).
- ✓ Sistema de referencia de la zona de contacto $x_c y_c z_c$, dextrógiro, móvil a la velocidad del área de contacto y con origen en el centro de dicha área. Este sistema puede emplazarse en la rueda izquierda o derecha, aunque en el cálculo de los pseudodeslizamientos se colocará en la izquierda para tratar que los ejes $x_c y_c z_c$ apunten hacia los mismos lados que los ejes correlativos de los sistemas $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ y XYZ .

Las transformaciones entre estos sistemas de referencia son las descritas a continuación:

- ✓ La transformación entre el sistema XYZ y el $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ depende de la geometría de la vía, principalmente del ángulo de peralte, del ángulo de curvatura, aunque también de las cotas del plano de rodadura. No se va a profundizar en esta transformación porque no es relevante para el cálculo de los pseudodeslizamientos.
- ✓ La transformación del sistema $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ al $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ se realiza mediante dos ángulos: ángulo de lazo (ψ) y ángulo de balanceo (Φ). El primero de ellos es de gran relevancia en el cálculo de los pseudodeslizamientos.
- ✓ La transformación del sistema $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ al $x_c y_c z_c$ se realiza mediante varios parámetros: radio de la banda rodadura nominal (r_o), distancia entre el centro de la vía y el centro del área de contacto nominal (b_o) y ángulo de contacto (γ_o). Los dos primeros son variables en función de la posición de equilibrio del juego, mientras que el último es constante y depende de la conicidad de la rueda.

En la siguiente figura se pueden observar todos los sistemas de referencia una vez ubicados y las transformaciones entre ellos que han sido descritas:

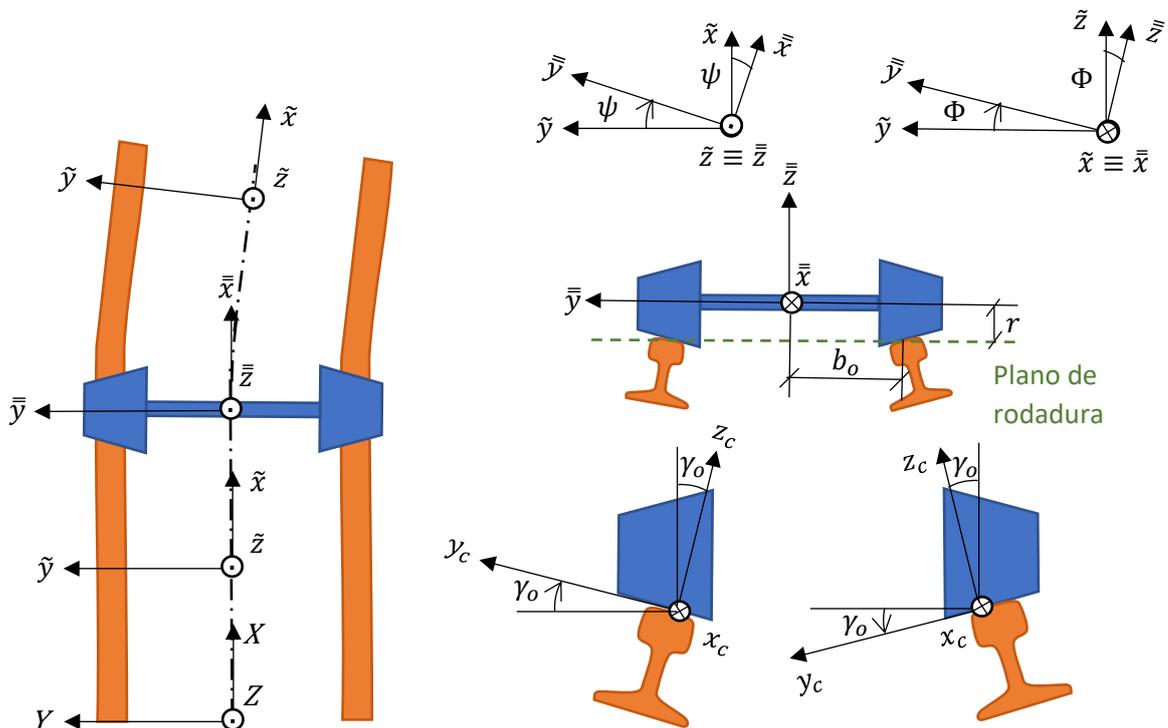


Figura I.6. Sistemas de referencia y transformaciones entre los mismos. Fuente: Elaboración propia.

Antes de la obtención de los pseudodeslizamientos es importante aclarar que el pseudodeslizamiento longitudinal aparecerá en x_c , el transversal en y_c y el rotacional lo hará en torno a z_c [6, pp. 19 – 23].

1.3.4. Pseudodeslizamiento longitudinal.

En esta subsección se va a obtener el pseudodeslizamiento longitudinal de una rueda ferroviaria.

Se parte de la velocidad relativa ΔV_x de los puntos de contacto (ecuación 1.12) en la dirección longitudinal del área de contacto rueda – carril (eje x_c). Si $\Delta V_x \neq 0$, entonces existe un movimiento relativo entre la rueda y el carril en el punto, lo cual implica la existencia de un deslizamiento en la dirección del eje x_c .

Dividiendo esta velocidad relativa entre la velocidad absoluta del vehículo ferroviario V [m/s] se obtiene el pseudodeslizamiento longitudinal (ecuación 1.23).

Este pseudodeslizamiento $v_x [\phi]$ aparece como consecuencia de diversas causas:

- ✓ Diferencia entre el radio de la banda de rodadura y el radio nominal de la rueda (genera ΔV_x^I).
- ✓ Aplicación de par a la rueda (genera ΔV_x^{II}).
- ✓ Cambio del ángulo de lazo (genera ΔV_x^{III}).

Abajo se analiza cada causa y posteriormente se suman los efectos provocados (ΔV_x^I , ΔV_x^{II} y ΔV_x^{III}).

1.3.4.1. Diferencia entre el radio de la banda de rodadura y el radio nominal de la rueda.

Las ruedas ferroviarias son troncocónicas, ya que la única manera de que un juego de ruedas rígido, carente de diferencial o barras de triangulación, tome una curva, es mediante la conicidad de las ruedas, que permitirá que el juego rígido adopte una nueva posición de equilibrio en las curvas. En esta nueva posición de equilibrio la rueda exterior a la curva deberá rodar con un mayor radio para así poder recorrer una mayor distancia que la rueda interior, que rodará con un radio menor.

La velocidad angular del juego ω [rad/s] se habrá mantenido constante en el proceso en ausencia de otros deslizamientos longitudinales ($\omega = V/r_o$, donde r_o se refiere al radio de la banda de rodadura en el equilibrio que se da en un tramo rectilíneo). Pero, al haber adoptado ambas ruedas un radio diferente, a saber; r_e para la rueda externa a la curva y r_i para la interna [m], las velocidades lineales en estos radios diferirán de V :

$$V_e = r_e \omega \quad [Ec. I. 26]$$

$$V_i = r_i \omega \quad [Ec. I. 27]$$

donde V_e es la velocidad de la rueda externa y V_i la de la rueda interna, ambas expresadas en [m/s].

Como $r_e > r_o$, la rueda externa rodará a una mayor velocidad que la del vehículo para poder recorrer una distancia mayor, el arco externo de la curva; produciéndose un deslizamiento longitudinal que se puede expresar de la siguiente guisa:

$$\Delta V_x^I = V - V_e = r_o \omega - r_e \omega$$

$$\Delta V_x^I = (r_o - r_e) \omega$$

$$\Delta V_x^I = -\Delta r \omega \quad [Ec. I. 28]$$

donde $\Delta r = r_e - r_o$, de ahí el signo negativo introducido.

En el caso de la rueda interna, $r_i < r_o$ y rotará a una menor velocidad que la del vehículo para poder recorrer una distancia menor, el arco interno de la curva; produciéndose un deslizamiento longitudinal que se puede expresar de la siguiente guisa:

$$\Delta V_x^I = (r_o - r_i)\omega = -\Delta r \omega$$

donde $\Delta r = r_i - r_o$, de ahí el signo negativo introducido. Esta expresión se puede unificar con la 1.28 al emplear Δr , por lo que no se requiere de dos expresiones independientes.

Nótese que $\Delta r > 0$ y $\Delta V_x^I < 0$ para la rueda externa y $\Delta r < 0$ y $\Delta V_x^I > 0$ para la interna, lo cual es indicativo de que el deslizamiento aparece en el sentido contrario al de avance en el caso de la rueda externa y en el sentido de avance en el caso de la interna [5, p. 24].

En la figura inferior se presenta el comportamiento de ambas ruedas en una curva y los deslizamientos generados en la nueva posición de equilibrio:

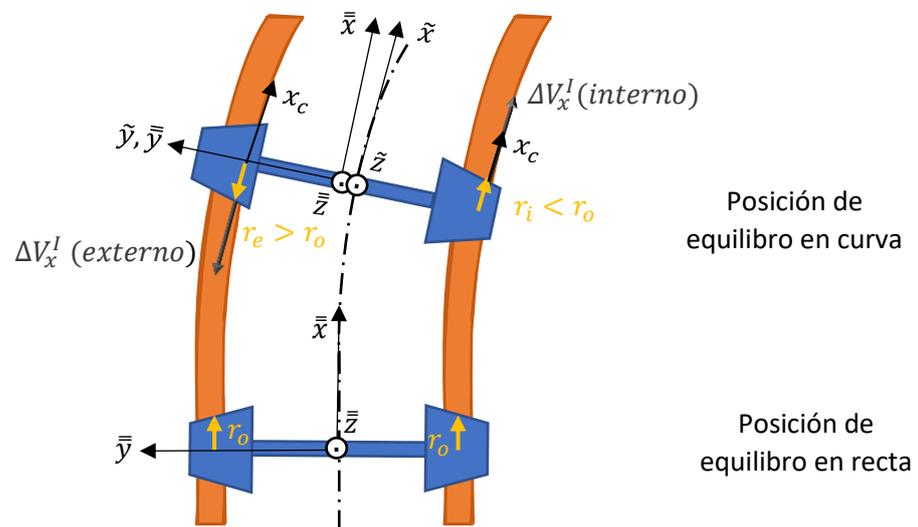


Figura 1.7. Posición de equilibrio de un juego de ruedas en recta y en curva y deslizamientos generados en la curva. Fuente: Elaboración propia.

1.3.4.2. Aplicación de esfuerzos a la rueda.

Al aplicar un par a la rueda aparecen fuerzas que permiten traccionar (fuerza o esfuerzo de tracción) o frenar la rueda (fuerza o esfuerzo de frenado). Este tipo de deslizamiento se puede comprender bien mediante la composición de los movimientos de traslación y rotación en una rueda ferroviaria:

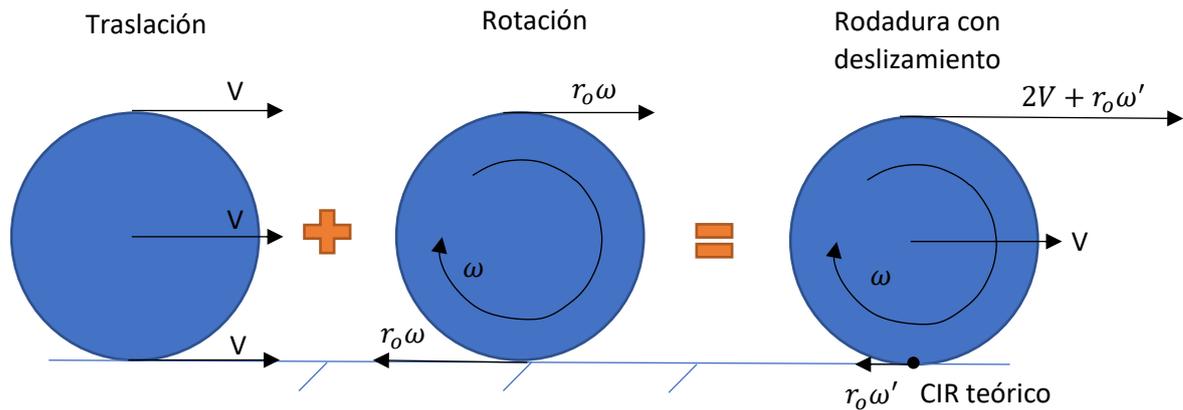


Figura 1.8. Composición de movimientos en el caso de rodadura con deslizamiento. Fuente: Elaboración propia.

Lo que sucede en esta composición es que ya no se cumple la condición de rodadura:

$$V \neq r_o \omega$$

Por tanto, ya no puede hablarse de CIR, sino de CIR teórico, puesto que ahora este es un punto en el cual existe una velocidad relativa con respecto al plano de rodadura (el carril en este caso). Esta velocidad relativa se produce porque la velocidad angular no es la que debería ser para producir un acoplamiento perfecto entre traslación y rotación, sino que es superior o inferior. Esta superioridad o inferioridad se expresa matemáticamente mediante la adición del término ω' [rad/s]:

$$\omega = \frac{V}{r_o} + \omega' \quad [\text{Ec. I. 29}]$$

Y la velocidad residual que queda en el CIR teórico es:

$$\begin{aligned} \Delta V_x^{II} &= V - r_o \omega \\ \Delta V_x^{II} &= V - r_o \left(\frac{V}{r_o} + \omega' \right) = -r_o \omega' \\ \Delta V_x^{II} &= -r_o \omega' \quad [\text{Ec. I. 30}] \end{aligned}$$

Nótese que cuando $\omega' > 0$, lo que se tiene es $\omega > V/r_o$ de acuerdo con la ecuación I.29 y $\Delta V_x^{II} < 0$ de acuerdo con la ecuación I.30 (es decir, el deslizamiento se produce en el sentido contrario al de avance). Esta es la consecuencia de la aplicación de un par tractor. En cambio, la aplicación de un par de frenado tiene el efecto contrario, teniéndose en dicho caso: $\omega' < 0$, $\omega < V/r_o$ y, por último, $\Delta V_x^{II} > 0$ (deslizamiento en el sentido de avance).

En la siguiente imagen se aprecian las consecuencias de aplicar un par de tracción M_t y otro de frenado M_f a una rueda:

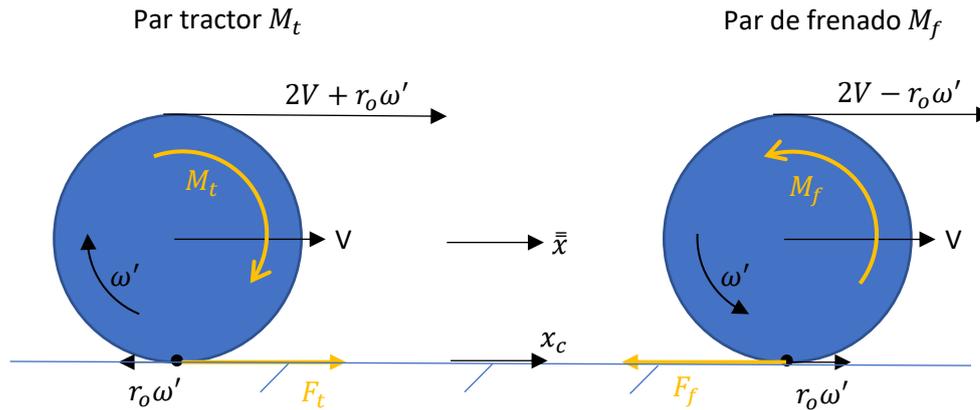


Figura I.9. Diagrama cinemático – dinámico que ilustra las consecuencias de la aplicación de un par acelerador y uno decelerador. Los vectores y variables cinemáticos se muestran en color negro, mientras que los dinámicos se muestran en amarillo. Fuente: Elaboración propia.

Tal como se observa en el esquema, aparece una fuerza de tracción F_t como consecuencia de la aplicación del par de tracción M_t y, del mismo modo, una fuerza de frenado F_f como consecuencia del par de frenado M_f .

Nótese que las fuerzas F_t y F_f se oponen al movimiento relativo en el CIR teórico, puesto que se trata de fuerzas de fricción (es decir, son proporcionales a la fuerza normal, siendo el coeficiente de fricción dinámica la constante de proporcionalidad; el cual deberá ser inferior al límite de adherencia en una situación de no deslizamiento).

Empero, lo importante es que F_t actúa en el mismo sentido que la velocidad global de la rueda, por lo que podrá acelerarla o mantener su velocidad constante, y que F_f actúa en el sentido contrario a la velocidad global, por lo que podrá decelerarla (en el carril aparecerán fuerzas de reacción de la misma magnitud, mas en sentido contrario).

Aquí es donde entrará en juego la presencia en la rueda del par resistente M_{res} (suma de, por un lado, la resistencia a la rodadura, dependiente del coeficiente C_{rr} demostrado en la [sección I.2](#); y de, por otro lado, las resistencias debidas a las rampas, las curvas o al rozamiento existente entre el eje y el rodamiento en el interior de la caja de grasa, principalmente). M_{res} estará asociada a F_{res} , cuya relación con F_t determinará si la rueda acelera ($F_t > F_{res}$), si mantiene su velocidad constante ($F_t = F_{res}$) o si frena naturalmente ($F_t < F_{res}$). La relación de F_{res} con F_f es más directa, en cambio, pues F_{res} siempre colaborará con F_f en la deceleración de la rueda.

De todas maneras, estas ecuaciones son genéricas para cualquier rueda, pero en la realidad hay que considerar si la rueda a la cual se le aplican es una rueda motriz o arrastrada. Si es una rueda motriz, en ella siempre aparecerá F_t , pero si es una rueda arrastrada, nunca aparecerá esfuerzo tractor ninguno y para vencer M_{res} se requerirá de una fuerza externa transmitida, en general, a través de un enganche, la cual se puede denotar F_{gancho} y generará M_{gancho} ($\geq M_{res}$, dependiendo de si desea acelerar la rueda o mantener su velocidad constante). En cambio, la presencia de F_f puede darse en cualquiera de los dos tipos de rueda, en función de si esta posee un equipo de frenada o no (en caso de no poseerlo, la rueda frenará por la acción de M_{res} y por el arrastre del resto del vehículo).

En trenes de mercancías, lo más habitual es que la locomotora se componga de ruedas motrices equipadas con frenos y que los vagones lo hagan de ruedas arrastradas equipadas con frenos, por lo que el estudio de ΔV_x^{II} en estas ruedas se centrará en la situación de frenada.

Por último, en cuanto al valor de ω' , este irá variando, teniéndose al principio el valor máximo (máximo deslizamiento) y al final el mínimo valor (mínimo deslizamiento). Debido a esto, lo mejor es obtener el valor promedio de ω' en cada caso a efectos de obtener el deslizamiento promedio generado durante el frenado de la rueda. Este promedio depende de cómo se produzca la evolución temporal de la deceleración angular. En el caso de ser constante, el promedio será el siguiente:

$$\begin{aligned}\overline{\omega'} &= \omega_f - \bar{\omega} = \omega_f - \left(\frac{\omega_f + \omega_i}{2}\right) \\ \overline{\omega'} &= \frac{\omega_f - \omega_i}{2} \quad [Ec. I. 31]\end{aligned}$$

donde ω_f y ω_i [rad/s] son la velocidad angular final e inicial de la rueda, respectivamente.

En la práctica es más conveniente expresar $\overline{\omega'}$ según la velocidad final del vehículo (después de la aceleración/frenada) y la inicial (antes de tal evento), denotadas V_f y V_i [m/s], respectivamente. Para ello, ω_f ha de reemplazarse por V_f/r_o y, del mismo modo, ω_i por V_i/r_o .

Por otro lado, debe considerarse que $\overline{\omega'}$ es un valor promedio aplicable a la frenada en su globalidad, pero no representa la diferencia de velocidad angular existente en la rueda en cada instante. Por ello, la ecuación debe dividirse por L [m], que es la longitud del tramo de vía en el cual se produce la frenada, ya que de esta forma la frenada es paulatina y se reparte equitativamente en todo el tramo (en el primer metro la rueda pasa de ω_i a $\omega_i + \overline{\omega'}$, en el segundo metro de $\omega_i + \overline{\omega'}$ a $\omega_i + 2\overline{\omega'}$ y así sucesivamente, hasta tener ω_f al completar el último metro). En realidad, esto altera las unidades de $\overline{\omega'}$, que pasan a ser [rad/(s·m)]. Esto último no afecta al cálculo de la velocidad de deslizamiento rígida ΔV_x^{II} , ya que simplemente se está obteniendo un valor aplicable a toda frenada; de ahí que el valor venga dado por unidad de longitud.

Tomando en consideración lo expresado en los dos párrafos previos, la ecuación que se obtiene es la que sigue:

$$\overline{\omega'} = \frac{V_f - V_i}{2r_o L} \quad [Ec. I. 32]$$

Sin embargo, la deceleración angular no siempre es constante, por lo que hay que tener en cuenta otras posibles evoluciones. Si es lineal, el valor de $\overline{\omega'}$ será inferior, adquiriendo esta expresión:

$$\overline{\omega'} = \frac{V_f - V_i}{3r_o L} \quad [Ec. I. 33]$$

Generalizando esta expresión para una deceleración de grado n_{dec} (si $n_{dec} = 2$ la aceleración es cuadrática, si $n_{dec} = 3$ es cúbica, y así sucesivamente):

$$\overline{\omega'} = \frac{V_f - V_i}{(n_{dec} + 2)r_o L} \quad [Ec. I. 34]$$

En conclusión, a través de estas expresiones es posible obtener $\overline{\omega'}$ para diferentes perfiles de deceleración y, multiplicando $\overline{\omega'}$ por r_o se obtiene una velocidad relativa ΔV_x^{II} promedio, un valor efectivo actuante en el tramo de frenada en el cual el vehículo pasa de circular a una velocidad V_i a una velocidad V_f [5, p. 21].

1.3.4.3. Cambio del ángulo de lazo.

Cuando cambia el ángulo de lazo ψ [rad] del juego con respecto a la vía se genera un movimiento relativo entre cada rueda del juego y su carril. Por el contrario, cuando el ángulo de lazo es constante no existe este movimiento relativo.

Este cambio se denota $\dot{\psi}$ [rad/s] y cuando aparece se produce un desalineamiento entre los ejes \tilde{x} (del sistema de referencia de la vía) y \bar{x} (del sistema del juego). Este desalineamiento puede tener dos orígenes:

- ✓ Movimiento de lazo: Se trata de un fenómeno de inestabilidad lateral del juego que no suele aparecer en las rectas, pero puede aparecer transitoriamente a la entrada y a la salida de las curvas. Esto se estudiará posteriormente (véase a la [sección I.6](#) de este anexo).
- ✓ Ángulo de ataque: Cuando un juego está unido rígidamente a otro a través de un bogie, el primer juego no es capaz de adaptarse a una curva como se describió en la figura I.7, sino que entra o sale de ella mediante un cierto ángulo (ángulo formado entre \tilde{x} y \bar{x}) denominado ángulo de ataque y denotado ψ porque en realidad es un ángulo de lazo no nulo que aparece en estos casos.

En la siguiente imagen se muestran los dos fenómenos y a partir de ella se deduce la ecuación correspondiente:

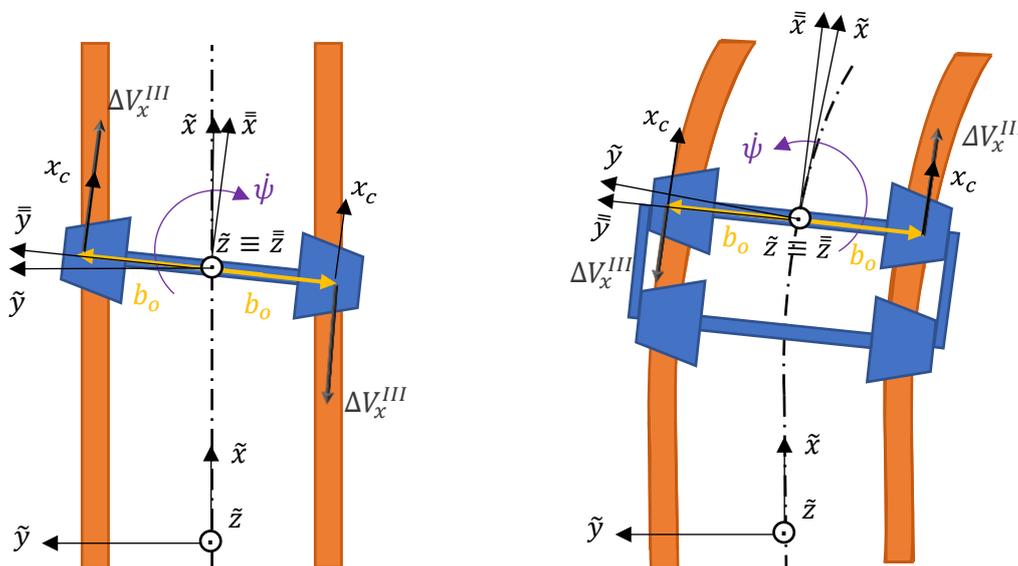


Figura I.10. Cambio del ángulo de lazo originado por el movimiento de lazo en un tramo rectilíneo (izquierda) y por el ángulo de ataque en una curva (derecha). Fuente: Elaboración propia.

Por tanto:

$$\Delta V_x^{III} = \pm b_o \dot{\psi} \quad [Ec. I. 35]$$

siendo b_o [m] la distancia entre el centro de la vía y el centro del área de contacto nominal y $\dot{\psi}$ [rad/s] la variación instantánea del ángulo de lazo ψ [rad] respecto al tiempo.

En cuanto al criterio de signos, de la figura se desprende que cuando $\dot{\psi}$ gira en sentido horario, en la rueda izquierda se tiene $\Delta V_x^{III} > 0$ (en el sentido del eje x_c) y en la derecha se tiene $\Delta V_x^{III} < 0$, y viceversa cuando $\dot{\psi}$ gira en sentido antihorario. Si se asume que en el giro horario $\dot{\psi} < 0$, entonces debe emplearse el signo positivo de la ecuación para la rueda derecha y el signo negativo para la izquierda [5, p. 24].

1.3.4.4. Suma de los efectos anteriores.

Sumando los efectos anteriores se llega a la velocidad de deslizamiento rígida longitudinal entre los puntos, que anteriormente se había introducido como ΔV_x :

$$\Delta V_x = V_x^I + V_x^{II} + V_x^{III}$$

$$\Delta V_x = -\Delta r \omega - r_o \omega' \pm b_o \dot{\psi} \quad [Ec. I. 36]$$

Recuérdanse los criterios de signo seguidos:

- ✓ $V_x^I > 0$, es decir, va en el sentido de avance, cuando $\Delta r < 0$; y viceversa.
- ✓ $V_x^{II} > 0$ cuando $\omega' < 0$, mientras que $V_x^{II} < 0$ cuando $\omega' > 0$. En la práctica, en el material remolcado equipado con frenos solo podrán existir las frenadas por adherencia ($V_x^{II} < 0$) y las aceleraciones y tracciones por enganche, mas no por adherencia ($V_x^{II} = 0$ en consecuencia).
- ✓ $V_x^{III} > 0$ en la rueda izquierda en los giros horarios ($\dot{\psi} < 0$) y $V_x^{III} < 0$ en esta rueda durante los giros antihorarios ($\dot{\psi} > 0$). Por tanto, a la rueda izquierda se le aplicará la ecuación I.35 con el signo negativo, mientras que a la rueda derecha se le aplicará con el positivo.

Finalmente, se divide por la velocidad del vehículo (la velocidad de rodadura ideal, es decir, el producto ωr_o) para obtener el pseudodeslizamiento correspondiente, que es más empleado en la práctica [5, pp. 19 – 24].

$$v_x = \frac{\Delta V_x}{V} = \frac{-\Delta r \omega - r_o \omega' \pm b_o \dot{\psi}}{V}$$

$$v_x = \frac{-\Delta r}{r_o} + \frac{-r_o \omega' \pm b_o \dot{\psi}}{V} \quad [Ec. I. 37]$$

1.3.5. Pseudodeslizamiento transversal.

El microdeslizamiento transversal se va a estudiar análogamente al longitudinal.

Se parte de la velocidad relativa ΔV_y de los puntos de contacto (ecuación I.13) en la dirección longitudinal del área de contacto rueda – carril (eje y_c). Si $\Delta V_y \neq 0$, entonces existe un movimiento

relativo entre la rueda y el carril en el punto, lo cual implica la existencia de un deslizamiento en la dirección del eje y_c .

Dividiendo esta velocidad relativa entre la velocidad absoluta del vehículo ferroviario V [m/s] se obtiene el microdeslizamiento transversal (ecuación I.24).

Este pseudodeslizamiento $v_y [\phi]$ aparece como consecuencia de diversas causas:

- ✓ Ángulo de lazo no nulo (genera ΔV_y^I).
- ✓ Adopción de una nueva posición de equilibrio por parte del juego (genera ΔV_y^{II}).
- ✓ Velocidad de balanceo no nula (genera ΔV_y^{III}).

Abajo se analiza cada causa y posteriormente se suman los efectos provocados (ΔV_y^I , ΔV_y^{II} y ΔV_y^{III}).

I.3.5.1. Ángulo de lazo no nulo.

Cuando el ángulo de lazo es nulo y de repente varía a un ritmo $\dot{\psi}$, acaba en un valor distinto del inicial. Con este valor de ψ el comportamiento de la rueda no será el normal, puesto que la velocidad circunferencial V_c [m/s] ($= r\omega$, donde r se puede referir a r_o , r_e o r_i) apunta en una dirección distinta a la dirección de la velocidad del juego/vehículo V . En concreto, V_c apunta en la dirección \bar{x} y es una componente de V , que apunta en la dirección \tilde{x} .

Como consecuencia, aparece un movimiento relativo transversal que se da a la velocidad axial o V_{ax} [m/s], la componente de V en la dirección \bar{y} . Esta componente será la encargada de evitar que el juego ruede hacia el interior de la vía por efecto de V_c y siga desplazándose a lo largo del eje de la vía a la velocidad V .

En la imagen inferior se puede apreciar este movimiento relativo:

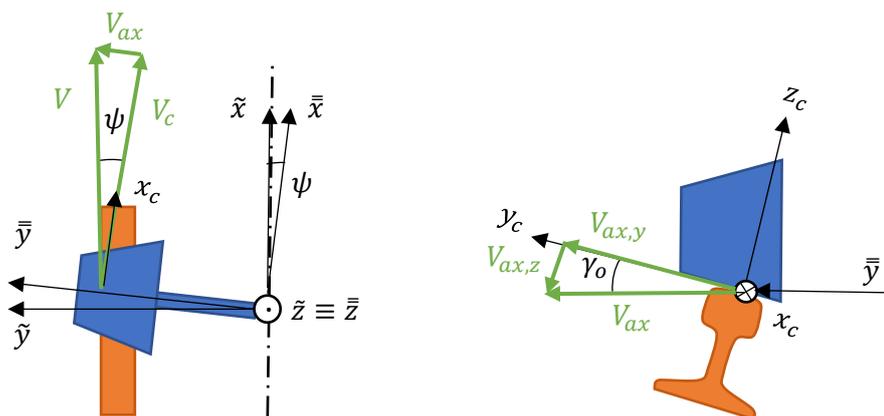


Figura I.11. Triángulo de velocidades $V - V_c - V_{ax}$ y descomposición de V_{ax} en el sistema $x_c y_c z_c$ del área de contacto. Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, el deslizamiento ΔV_y^I es simplemente $V_{ax,y}$ (componente en y_c de V_{ax}):

$$\Delta V_y^I = V_{ax,y} = V_{ax} \cos \gamma_0$$

$$\Delta V_y^I = V_{ax} \cos \gamma_o = -V \operatorname{sen} \psi \cos \gamma_o$$

$$\Delta V_y^I = -V \operatorname{sen} \psi \cos \gamma_o \quad [\text{Ec. I. 38}]$$

En cuanto al signo negativo introducido, hay que tener en cuenta que cuando $\psi < 0$ (rotación del eje \tilde{x} al eje \bar{x} en sentido horario, como sucede en la figura) se tiene $\operatorname{sen} \psi < 0$, lo cual resultaría en $\Delta V_y^I < 0$ de no realizarse ninguna corrección de signo. Como cuando ocurre este giro horario lo que se tiene en realidad es $\Delta V_y^I > 0$ tanto para la rueda izquierda (la mostrada en la figura) como para la derecha (mismo triángulo de velocidades), debe añadirse a la ecuación un signo negativo a modo de corrección.

Por otro lado, adviértase que la componente en z_c de V_{ax} , denotada $V_{ax,z}$ por la nomenclatura habitual, es la responsable de que la rueda se mueva en el eje z_c y pueda aumentar o disminuir su radio de rodadura durante el movimiento transversal (aumentar, en el caso de la figura) [5, p. 24].

1.3.5.2. Adopción de una nueva posición de equilibrio.

Cuando el juego adopta una nueva posición de equilibrio se desplaza transversalmente a la vía, produciéndose un desfase lateral entre el eje \tilde{x} y \bar{x} que se puede denotar por la letra y [m]. Este desplazamiento lateral se produce a una velocidad \dot{y} [m/s], tal como se puede apreciar en la posterior ilustración:

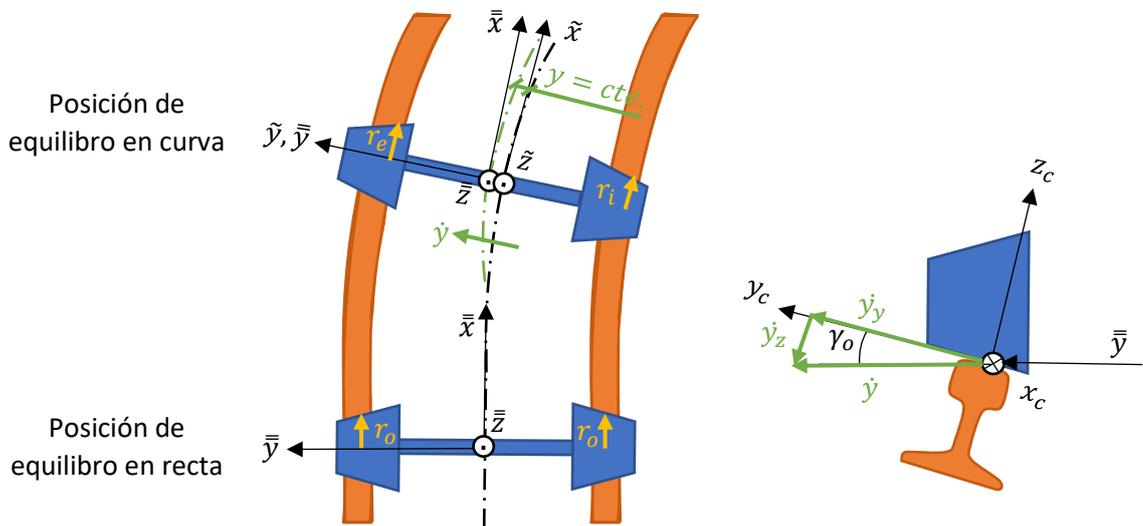


Figura I.12. Adopción de una nueva posición de equilibrio en curva y descomposición de \dot{y} en el sistema $x_c y_c z_c$ del área de contacto. Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, el deslizamiento ΔV_y^{II} es simplemente \dot{y}_y (componente en y_c de \dot{y}):

$$\Delta V_y^{II} = \dot{y}_y = \dot{y} \cos \gamma_o$$

$$\Delta V_y^{II} = \dot{y} \cos \gamma_o \quad [\text{Ec. I. 39}]$$

En cuanto al criterio de signos, hay que considerar que cuando $\dot{y} > 0$ (como se muestra en la figura, donde \dot{y} va en el sentido del eje \tilde{y}) se tiene $\Delta V_y^{II} > 0$ en ambas ruedas. En cambio, cuando $\dot{y} < 0$ lo que se tiene es $\Delta V_y^{II} < 0$ en ambas ruedas. Por tanto, no es preciso corregir la ecuación con ningún signo [5, p. 24].

Por otro lado, adviértase que la componente en z_c de \dot{y} , denotada \dot{y}_z por la nomenclatura habitual, es la responsable de que la rueda se mueva en el eje z_c y pueda aumentar o disminuir su radio de rodadura (aumentar, en el caso de la figura). Cuando $\dot{y} = 0$, se adoptan unos radios de rodadura en la curva que son constantes (r_e y r_i) y el desfase γ se torna constante. El valor de este desfase se obtendrá posteriormente en función de parámetros de la rueda y de la vía.

1.3.5.3. Velocidad de balanceo no nula.

Tal como se ha explicado en las partes previas, cuando el juego se descentra sus ruedas adoptan unos radios de rodadura distintos del original ($r_e > r_o$ en la rueda externa a la curva y $r_i < r_o$ en la rueda interna). La diferencia entre r_e y r_i provoca la inclinación del juego sobre los carriles, inclinación que se denomina balanceo y es un grado de libertad del juego simbolizado Φ [rad] en la [subsección 1.3.3](#). Este balanceo se produce a una velocidad $\dot{\Phi}$ [rad/s] en torno de la rueda interna a la curva y genera la velocidad de deslizamiento rígida ΔV_y^{III} .

En la región izquierda de la ilustración inferior se muestra un juego balanceado en un momento determinado (con un determinado descentramiento y); mientras que en su región derecha se muestra el efecto que tiene la variación temporal del balanceo (el parámetro $\dot{\Phi}$), variación que se produce como consecuencia de una variación del descentramiento (el parámetro \dot{y}). Este efecto es la generación de una velocidad lineal de deslizamiento rígida que va en la dirección del eje \bar{y} (eje que se representa por el exterior de la vía para su mejor apreciación) y que se va a simbolizar $\dot{\ell}_\Phi$ [m/s]:

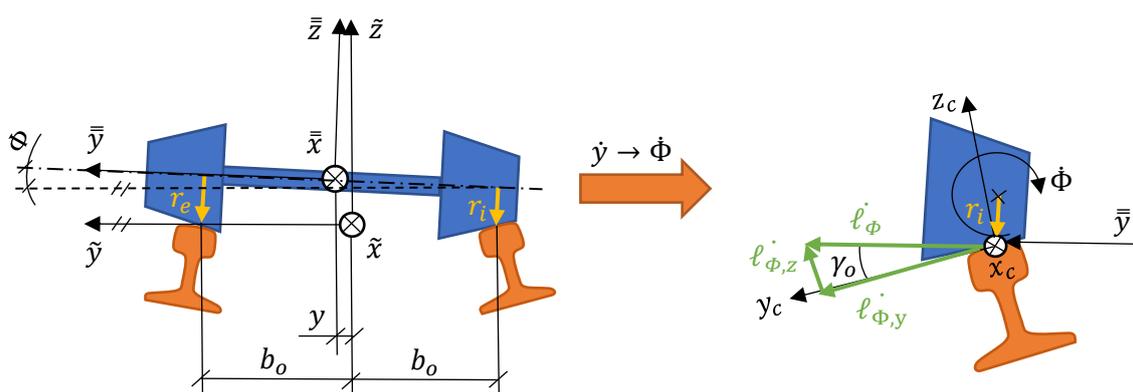


Figura I.13. Efecto de $\dot{\Phi}$, que es la causante de ΔV_y^{III} , y descomposición de ΔV_y^{III} en el sistema $x_c y_c z_c$ del área de contacto. Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, la velocidad de deslizamiento rígida ΔV_y^{III} es simplemente $\dot{\ell}_{\Phi,y}$ (la componente en y_c de $\dot{\ell}_{\Phi}$):

$$\begin{aligned}\Delta V_y^{III} &= \dot{\ell}_{\Phi,y} = \dot{\ell}_{\Phi} \cos \gamma_o \\ \Delta V_y^{III} &= \dot{\ell}_{\Phi} \cos \gamma_o = -r_i \dot{\Phi} \cos \gamma_o \\ \Delta V_y^{III} &= -r_i \dot{\Phi} \cos \gamma_o \quad [Ec. I. 40]\end{aligned}$$

Respecto al criterio de signos, hay que considerar que cuando $\dot{\Phi} < 0$ (como en la figura, ya que al realizar un giro de la paralela del eje \tilde{y} al eje \bar{y} el giro es horario), lo que se tiene es $\Delta V_y^{III} > 0$. Por tanto, debe añadirse un signo negativo a la ecuación a modo de corrección.

Por otro lado, adviértase que la componente en z_c de $\dot{\ell}_{\Phi}$, denotada $\dot{\ell}_{\Phi,z}$ por la nomenclatura habitual, es la responsable de que el juego ascienda en dicho eje al balancearse.

Asimismo, adviértase que esta velocidad de deslizamiento rígida es aplicable a ambas ruedas del juego, a pesar de que en él aparezca r_i . Esto es así porque ambas ruedas están unidas solidariamente a través del eje del juego, por lo que el efecto experimentado en una rueda repercute en la opuesta.

Por último, cabe decir que este término de deslizamiento es el menos importante de todos, pues es ignorado por la referencia [5, p. 24] y también por la [7, pp. 54 y 55]. Únicamente se tiene en cuenta en [4.A, pp. 2 y 8].

1.3.5.4. Suma de los efectos anteriores.

Finalmente, se suman los efectos ΔV_y^I , ΔV_y^{II} y ΔV_y^{III} para obtener ΔV_y :

$$\Delta V_y = -V \operatorname{sen} \psi \cos \gamma_o + \dot{y} \cos \gamma_o - r_i \dot{\Phi} \cos \gamma_o \quad [Ec. I. 41]$$

El pseudodeslizamiento transversal resulta de dividir ΔV_y entre la velocidad del vehículo (la de rodadura ideal) [5, pp. 19 – 24]:

$$\begin{aligned}v_y &= \frac{\Delta V_y}{V} = \frac{-V \operatorname{sen} \psi \cos \gamma_o + \dot{y} \cos \gamma_o - r_i \dot{\Phi} \cos \gamma_o}{V} \\ v_y &= \left(-\operatorname{sen} \psi + \frac{\dot{y} - r_i \dot{\Phi}}{V} \right) \cos \gamma_o \quad [Ec. I. 42]\end{aligned}$$

1.3.6. Giro.

El giro es una especie de pseudodeslizamiento rotacional conceptualmente diferente del longitudinal y el transversal. En este caso se trata de una rotación diferencial entre la rueda y el carril que se da en torno al eje z_c . Este tipo de pseudodeslizamiento es el cual también surge cuando una moneda erecta da vueltas sobre una mesa.

Se parte de la velocidad de rotación $\Delta\Phi$ relativa de los puntos de contacto (ecuación I.14) alrededor del eje normal al área de contacto rueda – carril (eje z_c). Si $\Delta\Phi \neq 0$, entonces existe un movimiento relativo entre la rueda y el carril en el punto, lo cual implica la existencia de un deslizamiento alrededor del eje z_c .

Dividiendo esta velocidad de rotación relativa entre la velocidad absoluta del vehículo ferroviario V [m/s] se obtiene el giro o espín (ecuación I.25).

Nótese que el giro no es adimensional, sino que tiene [rad/m] por unidad. Aparece como consecuencia de:

- ✓ Conicidad (genera $\Delta\Phi^I$).
- ✓ Cambio del ángulo de lazo (genera $\Delta\Phi^{II}$).

Nota: Estas velocidades de rotación relativas no debe confundirse bajo ningún concepto con el ángulo de balanceo Φ ni con la velocidad de balanceo $\dot{\Phi}$.

Abajo se analiza cada causa y posteriormente se suman los efectos provocados ($\Delta\Phi^I$ y $\Delta\Phi^{II}$).

I.3.6.1. Conicidad.

Por causa de la conicidad de la rueda aparece una componente de la velocidad angular alrededor del eje z_c (componente ω_z). Esta componente provoca, obviamente, una rotación indeseada alrededor del eje z_c , la cual está presente siempre que la rueda esté en movimiento ($\omega \neq 0 \rightarrow \omega_z \neq 0$).

En la ilustración inferior se puede ver la descomposición de ω en cada rueda del juego cuando está avanzando en línea recta. Para que se observe perfectamente la descomposición, se ha retirado el eje \bar{y} y se ha partido en dos tramos:

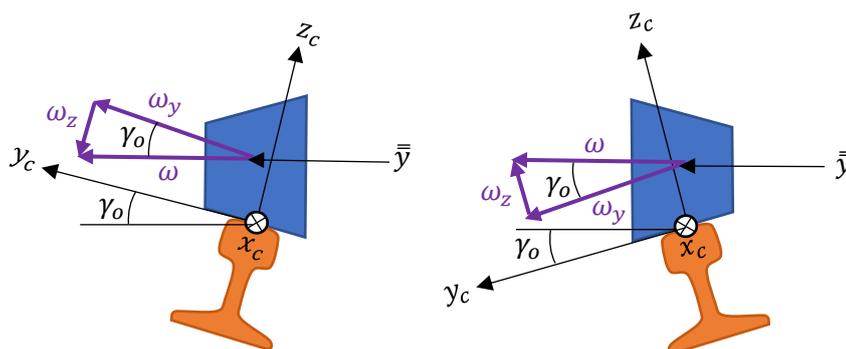


Figura I.14. Descomposición de ω en los ejes y_c y z_c , siendo ω_z la causante de $\Delta\Phi^I$. Fuente: Elaboración propia.

De aquí:

$$\Delta\Phi^I = \omega_z = \pm\omega \operatorname{sen}\gamma_o$$

$$\Delta\Phi^I = \pm\omega \operatorname{sen}\gamma_o \quad [\text{Ec. I. 43}]$$

Respecto al criterio de signos, en la rueda izquierda (mostrada en la figura) se tiene $\omega_z < 0$ (rotación horaria), mientras que para la derecha es al revés. Como $\omega > 0$ siempre y para ambas ruedas, se introduce el signo negativo en la ecuación para cuando esta se aplicare a la rueda izquierda [5, p. 24].

A modo de anotación, cabe decir que, dada la importancia de este efecto, en una referencia se le ha otorgado un nombre propio: giro de caída o de *camber* [7, p. 55]. Este nombre propio probablemente provenga del ámbito de la automoción, donde las ruedas son cilíndricas, pero experimentan un efecto similar al estar ligeramente inclinadas respecto de la vertical con el ángulo de caída o de *camber*.

1.3.6.2. Cambio del ángulo de lazo.

El cambio del ángulo de lazo $\dot{\psi}$, el cual ya ha sido previamente estudiado, genera una rotación indeseada alrededor del eje z_c por medio de su componente $\dot{\psi}_z$. La velocidad de esta rotación se obtiene también mediante descomposición en este caso.

Gráficamente, esto se realiza en cada rueda del juego, que se representa cuando está negociando una ligera curva (su ángulo de balanceo será pequeño y, por ello, no se dibuja el juego balanceado). Para que se observe mejor la descomposición, el eje \bar{z} se ha duplicado, por lo que se ha decidido retirar el eje del juego para evitar malas interpretaciones (el eje \bar{z} debería originarse en el centro del juego, donde se encuentra el origen del sistema de coordenadas $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$):

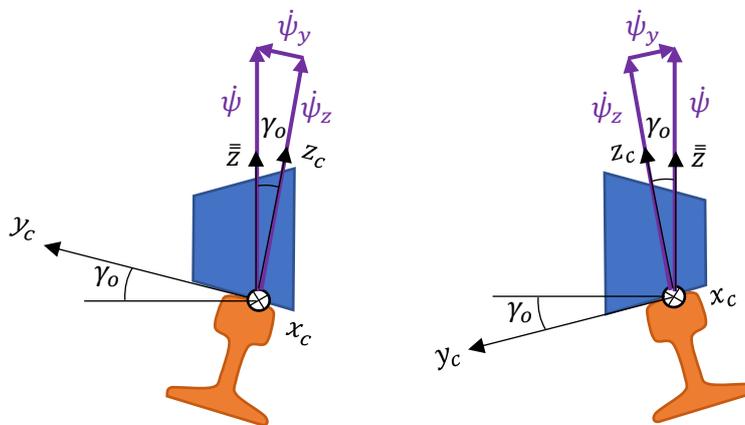


Figura I.15. Descomposición de $\dot{\psi}$ en los ejes los ejes y_c y z_c , siendo $\dot{\psi}_z$ la causante de $\Delta\Phi^{II}$. Fuente: Elaboración propia.

Matemáticamente:

$$\Delta\Phi^{II} = \dot{\psi}_z = \dot{\psi} \cos \gamma_o$$

$$\Delta\Phi^{II} = \dot{\psi} \cos \gamma_o \quad [\text{Ec. I. 44}]$$

Ecuación que no requiere ser corregida con ningún signo porque $\Delta\Phi^{II}$ llevará el mismo signo que $\dot{\psi}$ en ambas ruedas ($\dot{\psi} > 0$ y, por ende, $\Delta\Phi^{II} > 0$ en el caso de giro antihorario y al contrario) [5, p. 24].

1.3.6.3. Suma de los efectos anteriores.

Finalmente, se suman los efectos $\Delta\Phi^I$ y $\Delta\Phi^{II}$ para obtener $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi = \pm\omega \operatorname{sen}\gamma_o + \dot{\psi} \cos\gamma_o \quad [\text{Ec. I. 45}]$$

El espín o giro φ resulta de dividir $\Delta\phi$ entre la velocidad del vehículo (la de rodadura ideal):

$$\varphi = \frac{\Delta\phi}{V} = \frac{\pm\omega \operatorname{sen}\gamma_o + \dot{\psi} \cos\gamma_o}{V}$$
$$\varphi = \pm \frac{\operatorname{sen}\gamma_o}{r_o} + \frac{\dot{\psi} \cos\gamma_o}{V} \quad [\text{Ec. I. 46}]$$

Recuérdese la dimensionalidad de φ [rad/m] y el hecho de que su primer término depende exclusivamente de la geometría de la rueda, aplicándosele el signo negativo cuando se refiriere a la rueda izquierda. [5, pp. 19 – 24].

I.4. Relación entre los parámetros cinemáticos del juego y los del trazado ferroviario.

Los parámetros cinemáticos del juego son dependientes de los parámetros del trazado ferroviario que esté recorriendo. Es importante hallar una relación entre ambos para poder describir la cinemática del juego y así poder obtener los pseudodeslizamientos en cualquier trazado.

I.4.1. Descentramiento.

Como se mostró en la figura I.12, el juego adopta una nueva posición de equilibrio en las curvas y su centro de gravedad está desfasado en una coordenada y del eje de la vía, medida en el eje \tilde{y} . Esta coordenada y puede obtenerse por dos caminos distintos:

- ✓ Velocidad lineal: La velocidad lineal de cada rueda se calcula de dos formas distintas y después se igualan las expresiones.
- ✓ Teorema de Tales: Mediante la aplicación de semejanza de los triángulos conformados por los radios de la rueda interna a la curva y de la externa y los radios de curvatura de la vía hasta cada rueda.

Abajo se va a obtener el desfase y por los dos caminos, considerando la hipótesis de que el juego no está unido rígidamente a otro a través de un bogie, sino que está libre.

I.4.1.1. Cálculo por vía de la velocidad lineal.

La velocidad lineal V [m/s] de la rueda interna a la curva (subíndice i) y de la rueda externa (e) se rigen por estas expresiones basadas en la cinemática del movimiento circular uniforme:

$$\omega_c = \omega_{c,i} = \omega_{c,e}$$

$$V_i = R_i \omega_c$$

$$V_e = R_e \omega_c$$

$$V_m = R_m \omega_c, \quad m = i, e \quad [Ec. I. 47]$$

donde R_i [m] es el radio interno de la curva, R_e [m] es el externo y ω_c [rad/s] es la velocidad angular del giro que el vehículo ferroviario describe en la curva.

Por otro lado, la velocidad lineal también se puede calcular desde el punto de vista de la rodadura, para lo cual debe considerarse que la velocidad angular ω [rad/s] debe ser la misma en ambas ruedas al estar solidariamente conectadas a través de un eje:

$$\omega = \omega_i = \omega_e$$

$$V_i = r_i \omega$$

$$V_e = r_e \omega$$

$$V_m = r_m \omega, \quad m = i, e \quad [Ec. I. 48]$$

A continuación, se equipara la ecuación 1.47 con la 1.48 (para $m = i, e$) y se despeja ω de una de las dos equiparaciones para así relacionar ω con ω_c . La inserción de esta relación en la otra equiparación permite ligar la ratio r_i/r_e con la ratio R_i/R_e , que es lo que interesa en este caso:

$$\begin{cases} V_i = R_i \omega_c = r_i \omega \rightarrow \omega = \frac{R_i}{r_i} \omega_c \\ V_e = R_e \omega_c = r_e \omega \end{cases}$$

$$V_e = R_e \omega_c = r_e \left(\frac{R_i}{r_i} \omega_c \right)$$

$$\frac{R_e}{r_e} \omega_c = \frac{R_i}{r_i} \omega_c$$

$$\frac{r_i}{r_e} = \frac{R_i}{R_e} \quad [Ec. I. 49]$$

A esta relación se le pueden introducir los parámetros de semiconicidad $k [\phi]$ (también denominada inclinación); radio nominal, previamente definido como r_o [m]; distancia entre el centro de la vía y el centro del área de contacto nominal, parámetro que ya se había definido previamente como b_o [m]; el radio de la curva medido hasta la línea media de la curva R [m]; así como el desfase o descentramiento y [m], que es el parámetro que se busca despejar. Despejándolo se llega a la conocida ecuación de Redtenbacher:

$$\frac{r_i}{r_e} = \frac{r_o - ky}{r_o + ky} = \frac{R_i}{R_e} = \frac{R - b_o}{R + b_o}$$

$$\frac{r_o - ky}{r_o + ky} = \frac{R - b_o}{R + b_o}$$

$$(r_o - ky)(R + b_o) = (r_o + ky)(R - b_o)$$

$$r_o R + r_o b_o - kyR - kyb_o = r_o R - r_o b_o + kyR - kyb_o$$

$$2kyR = 2r_o b_o$$

$$y = \frac{r_o b_o}{kR} \quad [Ec. I. 50]$$

Matemáticamente, $y \rightarrow \infty$ conforme $R \rightarrow 0$, pero en la práctica no es así porque las pestañas evitan el descarrilamiento limitando el desfase o descentramiento y a un valor $y_{m\acute{a}x}$ que depende de la geometría de las ruedas [5.A, pp. 5 – 7].

Aparte de esto, según esta ecuación lo que se tiene es $y \rightarrow 0$ conforme $r_o \rightarrow 0$. Esto se puede comprender a partir de la siguiente constante, que se basa en el desarrollo de la ecuación 1.49:

$$\begin{cases} V_e = R_e \omega_c = r_e \omega \\ V = R \omega_c = r_o \omega \end{cases} \rightarrow (R_e - R) \omega_c = (r_e - r_o) \omega = cte.$$

donde $(R_e - R)$ y ω_c son constantes independientemente del valor de r_o (porque $\omega_c = V/R$).

Conforme r_o disminuye, ω debe aumentar para que V se mantenga constante y, como consecuencia, la diferencia $(r_e - r)$ ha de disminuir para que su producto con ω se mantenga constante. Como $(r_e - r) = ky$, de ahí viene el menor valor de y .

1.4.1.2. Cálculo por vía del Teorema de Tales.

En la siguiente figura se ilustran los triángulos conformados por los catetos r_i y R_i y por los catetos r_e y R_e , respectivamente:

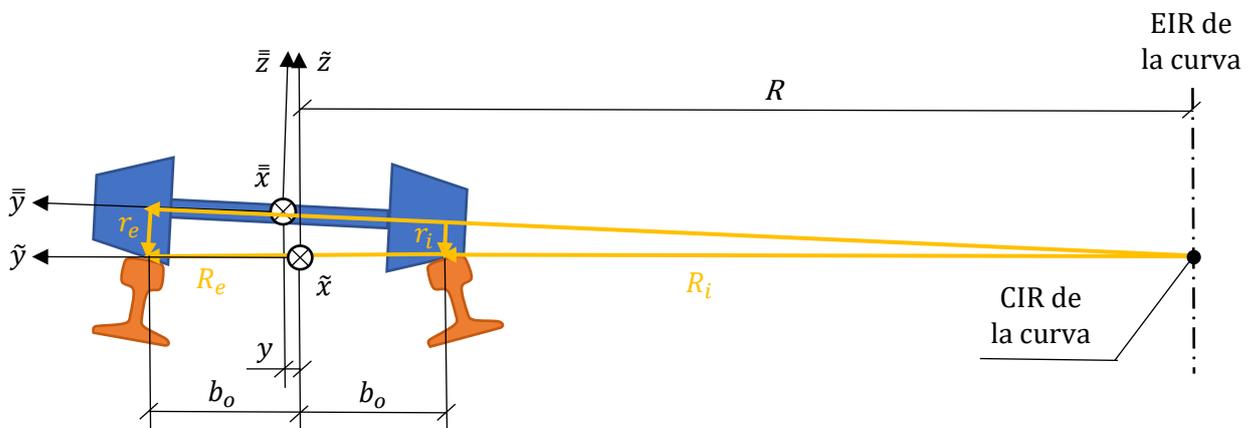


Figura I.16. Posición de equilibrio en una curva a la derecha. Fuente: Elaboración propia.

Como se puede apreciar en la ilustración, el triángulo cuyos catetos son R_i y r_i es semejante al triángulo cuyos catetos son R_e y r_e . Si se aplica el Teorema de Tales se obtiene:

$$\frac{r_e}{R_e} = \frac{r_i}{R_i}$$

Esta ecuación es la misma que la I.49. De la I.49 se deriva la I.50 introduciendo los parámetros indicados.

Nótese que cuando $R \rightarrow \infty$ (tramo de vía rectilíneo) se tiene $y = 0$ según la ecuación I.50, lo cual es coherente con el desarrollo realizado. En esta situación de equilibrio no aparecen triángulos, sino dos líneas paralelas; una en el plano de rodadura (a lo largo del eje \tilde{y}) y otra en el plano axial del juego (a lo largo del eje \bar{y}). Entre estas dos líneas paralelas se sitúa el radio de rodadura r_o y se cumple $r_o = r_i = r_e$ ([5.A, pp. 5 – 7], [6.A, pp. 31 – 32]).

Por último, cabe recordar que cuando en un bogie se encuentren dos ejes rígidamente unidos aparecerá un ángulo de ataque que habría que tener en cuenta en este equilibrio. Acúdase a la [subsección 1.4.8](#) para ver cómo se ha tratado este asunto.

I.4.2. Velocidad de descentramiento.

La velocidad \dot{y} a la que se produce el desfase o descentramiento (en adelante, descentramiento) y es la derivada temporal de este último, tal como los símbolos indican:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$
$$\dot{y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{r_0 b_0}{kR} \right) \quad [\text{Ec. I. 51}]$$

donde los términos r_0 , b_0 y k son constantes, siendo R el único que puede variar.

El radio medio del trazado R se suele expresar en función de la coordenada de avance x y puede ser constante o variable, en función del tipo de curva:

- ✓ Curva circular: Curva de radio constante. Su representación en el plano horizontal es un arco de circunferencia. Por tanto, en esta curva se cumple $R \neq f(x) \rightarrow R = cte.$
- ✓ Curva de transición o de radio variable: Curva que tiene por objeto evitar discontinuidades en la curvatura del trazado, es decir, hacen de enlace o transición entre los otros dos elementos básicos del trazado (tramos rectos y curvas circulares) o entre dos curvas circulares de distinto radio. De esta manera se evitan saltos bruscos en la aceleración centrífuga del vehículo ferroviario. Por tanto, en esta curva se cumple $R = f(x) \rightarrow R \neq cte.$

En la siguiente imagen se muestra una transición entre un tramo recto (también conocido como alineación recta), una curva circular y, para finalizar, otro tramo recto. El trazado de la vía se muestra en azul y se refiere a su línea media:

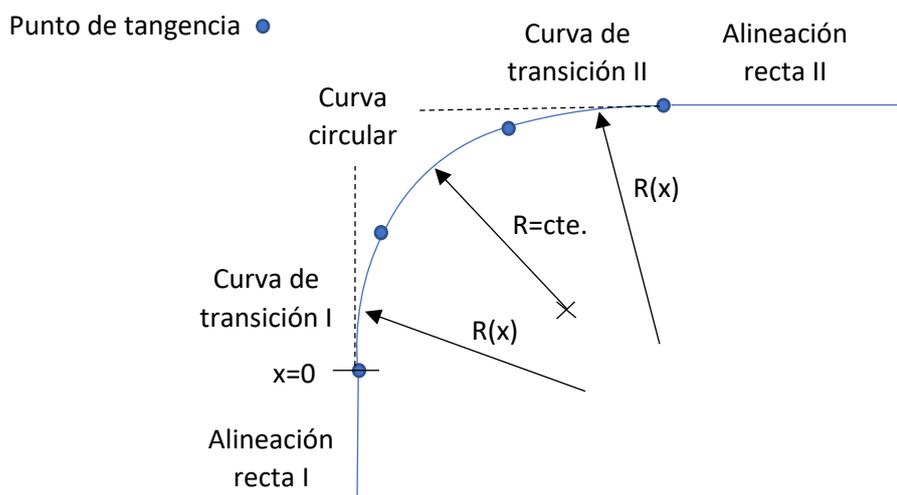


Figura I.17. Transición entre dos alineaciones rectas mediante dos curvas de transición y una circular intercalada. Fuente: Elaboración propia.

Una curva de transición puede enlazar también dos curvas circulares de distinto radio, pero esta solución es menos común que enlazar tramos rectos con curvas circulares. Esto sumado al hecho de que para un estudio teórico es suficiente considerar el caso de la figura, es la causa de que se vaya a descartar este uso secundario de las curvas de transición, por lo que no se va a abordar.

Volviendo a poner el foco en el descentramiento, resulta que como en las curvas circulares el radio se mantiene constante, su derivada es nula y la velocidad de descentramiento es nula en ellas. En cambio, en las curvas de transición el radio es variable según una determinada función $R(x)$ cuya derivada no es nula, siendo la velocidad de descentramiento dependiente de esta.

En cuanto al signo de \dot{y} , se asume $\dot{y} > 0$ cuando el descentramiento y se produce en el sentido del eje \tilde{y} , lo cual sucede a la entrada de curvas a la derecha (como la curva de transición I en la figura) o a la salida de curvas a la izquierda. Según este mismo criterio, a la salida de curvas a la derecha (como la curva de transición II en la figura) o la entrada de curvas a la izquierda lo que se tiene es $\dot{y} < 0$.

A continuación, va a calcularse la velocidad de descentramiento en las curvas de transición más usuales, que son la clotoide y las polinómicas (parábola cuadrática y cúbica), si bien existen otras como son la lemniscata de Bernoulli o los óvalos de Cassini [7.A].

1.4.2.1. Clotoide.

La clotoide es la curva de transición más utilizada dada su sencillez de replanteo en el terreno y dado que el incremento de aceleración centrífuga que en ella se produce es lineal con la distancia recorrida. Esto se demuestra a continuación, partiendo de la fórmula de la aceleración centrífuga a_c [m/s^2] en función de V (supuesta constante) y R (medido hasta la línea media de la vía y supuesto variable):

$$a_c = \frac{V^2}{R} \quad [Ec. I. 52]$$

Nota: La aceleración centrífuga es la reacción inercial a la aceleración centrípeta que tiende a descarrilar el vehículo y, por ello, es la que se suele emplear en las demostraciones. Esto no resta relevancia a la centrípeta, que es la que permite la modificación de la dirección del vector de velocidad.

Si esta aceleración centrífuga sigue una evolución lineal con la distancia recorrida x medida desde el inicio de la curva:

$$a_c = Cx \quad [Ec. I. 53]$$

donde C [$1/s^2$] es una constante de proporcionalidad.

Igualando las ecuaciones I.52 y I.53 y reorganizando términos se obtiene la ecuación característica de la clotoide:

$$\frac{V^2}{R} = Cx \rightarrow Rx = \frac{V^2}{C} = A^2$$

$$R = \frac{A^2}{x} \quad [Ec. I. 54]$$

donde se ha reemplazado el quebrado V^2/C por la constante A^2 [m^2], ya que es la que se suele utilizar en las clotoides.

Esta ecuación hay que ajustarla para las curvas de transición I y II de la figura I.17. En la curva I se tiene $R \rightarrow \infty$ en $x = 0$ y $R = R_L$ en $x = L$ (siendo L [m] la longitud total de la curva de transición en cuestión). Imponiendo estas dos condiciones de contorno a la ecuación I.54 es como se realiza el ajuste:

$$\begin{cases} R \rightarrow \infty, & x = 0 \\ R \rightarrow R_L, & x = L \end{cases} \rightarrow R = \frac{R_L L}{x} \quad [Ec. I. 55]$$

En la curva de transición II el ajuste es diferente, ya que se tienen las condiciones de contorno inversas y hay que añadir L al denominador para posibilitar el ajuste:

$$\begin{cases} R \rightarrow R_L = R_o, & x = 0 \\ R \rightarrow \infty, & x = L \end{cases} \rightarrow R = \frac{R_o L}{L - x} \quad [Ec. I. 56]$$

Componiendo estas dos funciones $R(x)$ en la función $y(R)$ (ecuación I.50) se obtiene la función $y(x)$ para la curva de transición I y la II, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{r_o b_o}{k R_L L} x \end{array} \right. \quad [Ec. I. 57]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{r_o b_o}{k R_o L} (L - x) \end{array} \right. \quad [Ec. I. 58]$$

Una vez se tienen estas dos ecuaciones, se introducen en I.51 con objeto de obtener la velocidad de descentramiento. Comenzando por la solución para la curva I:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{r_o b_o}{k R_L L} x \right) = \frac{r_o b_o}{k R_L L} \frac{dx}{dt}$$

$$\dot{y} = \frac{r_o b_o}{k R_L L} V \quad [Ec. I. 59]$$

Que como se ve, se trata de una velocidad constante siempre y cuando la velocidad absoluta vehicular también lo sea, tal como se había supuesto al inicio de la demostración.

En el caso de la curva de transición II se tiene [7.A]:

$$\dot{y} = - \frac{r_o b_o}{k R_o L} V \quad [Ec. I. 60]$$

1.4.2.2. Parábola cuadrática.

En las curvas polinómicas la función $R(x)$ es la que sigue:

$$\frac{1}{R(x)} = d_o + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \dots + d_n x^n \quad [Ec. I. 61]$$

donde $d_o, d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ [$m^{-(n+1)}$] son los coeficientes de la cadena de monomios que componen el polinomio.

De la familia de curvas polinómicas, la más empleada es la parábola de segundo grado o cuadrática y la parábola de tercer grado o cúbica. A continuación, se va a abordar la primera.

La ecuación de la parábola cuadrática se obtiene mediante el truncamiento de la ecuación general de la familia, la I.61, a partir del término de segundo grado. Por tanto:

$$\frac{1}{R} = d_0 + d_1x + d_2x^2 \quad [Ec. I. 62]$$

En este caso la aceleración centrífuga crece cuadráticamente, pues es directamente proporcional a $1/R$ en virtud de la ecuación I.52.

Si se ajusta la ecuación I.62 con las mismas condiciones de contorno que aquellas aplicadas a la clotoide, los resultados son, para la curva de transición I:

$$\frac{1}{R} = d_1x + d_2x^2 \quad [Ec. I. 63]$$

donde los coeficientes d_1 y d_2 no pueden determinarse sin una tercera condición. Hela aquí:

$$\{R \rightarrow R_{L/2}, \quad x = L/2 \rightarrow \begin{cases} d_1 = (R_L L)^{-1} + 4L^{-1} (R_{L/2}^{-1} - 0,5R_L^{-1}) & [Ec. I. 64] \\ d_2 = -4L^{-2} (R_{L/2}^{-1} - 0,5R_L^{-1}) & [Ec. I. 65] \end{cases}$$

coeficientes que se seguirán denotando d_1 y d_2 dada la longitud de sus expresiones.

Para la curva de transición II, en cambio, el mejor ajuste consiste en restar esta ecuación I.61 a la curvatura en $x = 0$ ($1/R_0$, siendo $R_0 = R_L$ en casos como el de la figura I.17):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} - d_1x - d_2x^2 \quad [Ec. I. 66]$$

siendo en este caso lo lógico reemplazar R_L por R_0 en las definiciones de los coeficientes d_1 y d_2 .

Insertando esta ecuación en la I.50 se obtiene el descentramiento en función de $R(x)$, es decir, la función $y(x)$, la cual se presenta abajo unificada para las curvas I y II:

$$y = \frac{r_0 b_0}{k \left(\frac{1}{\left\{ \frac{1}{R_0} \right\} \pm d_1x \pm d_2x^2} \right)} \quad [Ec. I. 67]$$

donde el término entre corchetes y el signo negativo es de aplicación únicamente para la curva II.

Derivado esta ecuación se obtiene la velocidad de descentramiento, tal como indica la ecuación I.51. La solución se presenta también unificada para las curvas I y II:

$$\dot{y} = \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{r_0 b_0}{k R_0} \right) \right\} \pm \frac{d}{dt} \left(\frac{r_0 b_0}{k} (d_1x + d_2x^2) \right) = \pm \frac{r_0 b_0}{k} \frac{d}{dt} (d_1x + d_2x^2)$$

$$\dot{y} = \pm \frac{r_0 b_0}{k} (d_1V + 2d_2xV) \quad [Ec. I. 68]$$

donde el signo positivo se aplica en la curva I y el negativo en la curva II.

En esta derivación se ha aplicado la regla de la cadena $(df(x)/dt = df(x)/dx \cdot dx/dt)$ y al final ha permanecido un factor x . Por tanto, la velocidad de descentramiento es variable en vez de constante como sí lo era en la clotoide [8.A, pp. 54 – 55].

1.4.2.3. Parábola cúbica.

Otra curva de la familia de curvas polinómicas es la cúbica. La ecuación de la parábola cúbica se conforma únicamente del término cúbico de la ecuación 1.57, que es la general de la familia de curvas polinómicas. Por tanto:

$$\frac{1}{R} = d_3 x^3 \quad [Ec. I. 69]$$

En este caso la aceleración centrífuga crece cúbicamente, pues es directamente proporcional a $1/R$ en virtud de la ecuación 1.52.

Si se ajusta la ecuación 1.69 con las mismas condiciones de contorno que aquellas aplicadas a la clotoide, los resultados son, para la curva de transición I:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_L L^3} x^3 \quad [Ec. I. 70]$$

En la curva II puede realizarse un ajuste mucho más sencillo, el cual consiste simplemente en restar la ecuación 1.70 a la curvatura en $x = 0$ ($1/R_o$, siendo $R_o = R_L$ en casos como el de la figura 1.17):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_o L^3} x^3 \quad [Ec. I. 71]$$

La función $y(x)$ obtenida es, procediendo como en los casos previos, para las curvas I y II:

$$y = \frac{r_o b_o}{k \left(\frac{1}{\left\{ \frac{1}{R_o} \right\} \pm \frac{1}{R_{L|o} L^3} x^3} \right)} \quad [Ec. I. 72]$$

donde el término entre corchetes, el signo negativo y R_L son de aplicación únicamente para la curva II, mientras que el signo positivo y R_o lo son para la curva I.

La derivada temporal de esta función es la velocidad de descentramiento para este caso:

$$\dot{y} = \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{r_o b_o}{k R_o} \right) \right\} \pm \frac{d}{dt} \left(\frac{r_o b_o}{k \frac{R_{L|o} L^3}{x^3}} \right) = \pm \frac{r_o b_o}{k R_{L|o} L^3} \frac{d}{dt} (x^3)$$

$$\dot{y} = \pm \frac{3 r_o b_o}{k R_{L|o} L^3} x^2 V \quad [Ec. I. 73]$$

donde el signo positivo y R_L se aplican en la curva I y el negativo y R_o en la curva II.

En este caso también se ha aplicado la regla de la cadena al derivar $(df(x)/dt = df(x)/dx \cdot dx/dt)$ y al final ha permanecido un factor x^2 . Por tanto, la velocidad de descentramiento es variable y varía más rápido que en el caso de la parábola cuadrática, ya que ahora aparece x^2 en vez de simplemente x [8.A, pp. 54 – 55].

1.4.3. Descentramiento y velocidad de descentramiento promedios.

En las curvas de transición se produce una variación continua del descentramiento y de la velocidad a la que este sucede. Para lidiar con esta variabilidad, lo mejor es recurrir a valores promedios aplicables a la longitud completa de la curva de transición. Estos valores promedio pueden determinarse con exactitud gracias a la integración.

De esta forma, se plantean dos integrales: una para el descentramiento promedio y otra para la velocidad de descentramiento promedio. Helas aquí:

$$\bar{y} = \frac{1}{x_f - x_o} \int_{x_o}^{x_f} y(x) dx \quad [Ec. I. 74]$$

$$\bar{\dot{y}} = \frac{1}{t_f - t_o} \int_{t_o}^{t_f} \dot{y}(t) dt \quad [Ec. I. 75]$$

donde x_f [m] es la coordenada final de la curva, que se alcanza en el tiempo final t_f [s], y x_o [m] es la coordenada inicial de la curva, a la cual se ingresa en el tiempo inicial t_o [s].

Para simplificar los resultados de las integrales es posible reemplazar $x_f - x_o$ y $t_f - t_o$ por estas equivalencias:

$$x_f - x_o = L \quad [Ec. I. 76]$$

$$t_f - t_o = \frac{L}{V} \quad [Ec. I. 77]$$

A continuación, se realizan estas integrales para los tres tipos de curva descritos.

1.4.3.1. Clotoide.

En este caso, \bar{y} se obtiene integrando las ecuaciones 1.57 e 1.58, cuya integración resulta inmediata, obteniéndose lo mismo en ambos casos:

$$\bar{y} = \frac{r_o b_o}{2kR_L} \quad [Ec. I. 78]$$

En cuanto a $\bar{\dot{y}}$, no es necesario integrar, ya que la velocidad de descentramiento es constante en una clotoide, como hacen patente las ecuaciones 1.59 e 1.60. Matemáticamente:

$$\bar{\dot{y}} = \pm \frac{r_o b_o}{kR_L |o} V \quad [Ec. I. 79]$$

donde se han unificado las ecuaciones I.59 e I.60, aplicándose el signo positivo y R_L a la curva de transición I y el negativo y R_o a la curva II.

1.4.3.2. Parábola cuadrática.

Comiézase por la integración de la ecuación unificada I.67, que es una integral de un polinomio y, por tanto, es de inmediata resolución:

$$\bar{y} = \frac{r_o b_o}{k} \left(\left\{ \frac{1}{R_o} \right\} \pm d_1 \frac{L}{2} \pm d_2 \frac{L^2}{3} \right) \quad [Ec. I. 80]$$

Para la obtención de \bar{y} se integra la ecuación I.68. Esta integral se expresa en función del tiempo reemplazando la variable x por el producto Vt (la constante V por la variable t , ya que el movimiento es uniformemente acelerado). El resultado es:

$$\bar{y} = \pm \frac{r_o b_o}{k} (d_1 V + d_2 LV) \quad [Ec. I. 81]$$

Recuérdese que en ambos casos se hay que aplicar $d_1 = (R_L L)^{-1} + 4L^{-1} (R_{L/2}^{-1} - 0,5R_L^{-1})$ y $d_2 = -4L^{-2} (R_{L/2}^{-1} - 0,5R_L^{-1})$. De hecho, la ecuación I.81 se puede simplificar bastante si se reemplazan estos coeficientes:

$$\bar{y} = \pm \frac{r_o b_o}{k R_{L|o} L} V \quad [Ec. I. 82]$$

Nótese que esta ecuación coincide con la I.79, lo cual obedece al hecho de que $V = cte.$ en la curva.

1.4.3.3. Parábola cúbica.

En primer lugar, se integra la ecuación unificada I.72, resultando en:

$$\bar{y} = \frac{r_o b_o}{k} \left(\left\{ \frac{1}{R_o} \right\} \pm \frac{1}{4R_{L|o}} \right) \quad [Ec. I. 83]$$

En segundo lugar, se integra la ecuación unificada I.73, previa sustitución de la variable x por el producto Vt para obtener una ecuación integral temporal. Esto resulta en:

$$\bar{y} = \pm \frac{r_o b_o}{k R_{L|o} L} V \quad [Ec. I. 84]$$

Nótese que esta ecuación coincide con la I.79 y la I.82, lo cual se debe a que $V = cte.$ en la curva.

I.4.4. Ángulo de lazo.

Tal como se mencionó en la subsección sobre el pseudodeslizamiento longitudinal, el ángulo de lazo puede tener origen en el movimiento de lazo o en el ángulo de ataque de un bogie en una curva. Como el movimiento de lazo no es tan común (esto se analizará posteriormente, en la [sección I.6](#)), es mejor enfocarse en el ángulo de ataque, el cual puede obtenerse mediante trigonometría. En la siguiente ilustración se muestra un bogie compuesto por dos juegos rígidamente unidos por medio de barras que los mantienen paralelos con un empate e [m] (si hubiese más de dos juegos, este parámetro se mediría entre el primero y el último) negociando una curva de radio variable $R(x)$ y se observa cómo en esta situación se genera indefectiblemente un ángulo de ataque ψ :

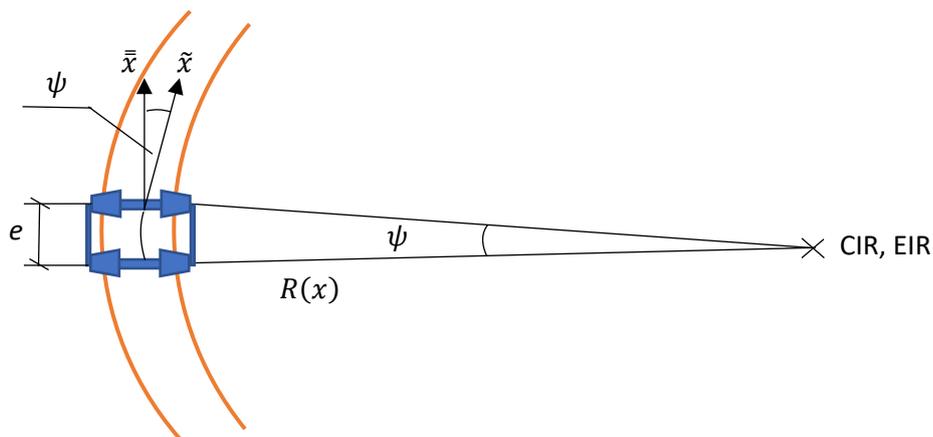


Figura I.18. Ángulo de ataque generado por un bogie de dos ejes al negociar una curva. Fuente: Elaboración propia.

Como $e \ll R$ en los trazados ferroviarios, es viable aplicar estas dos simplificaciones:

$$\begin{cases} e \cong \text{arco subtensor de } \psi \\ R(x) \cong R(x + \text{arco subtensor de } \psi) \end{cases}$$

Subsecuentemente, el área delimitada por el arco, por $R(x)$ y por $R(x + \text{arco})$ puede aproximarse mediante un triángulo acutángulo aproximado de catetos $R(x)$ y e donde no importa el punto de medida de la coordenada x (si bien siempre será más preciso tomarla a la mitad del bogie que en su lado de ataque o en el de cola) cuyo ángulo de apertura se puede despejar aplicando trigonometría:

$$\psi = \arcsen\left(\frac{e}{R}\right) \quad [\text{Ec. I.85}]$$

Esta expresión es, como se puede apreciar, muy sencilla y permite comprender fácilmente por qué el ángulo de ataque es mayor tanto menor es el radio de curvatura, es decir, tanto más cerrada es una curva.

En cuanto al signo de ψ , este se determina realizando una rotación desde el eje \tilde{x} hasta el eje \bar{x} y asignando $\psi > 0$ si la rotación es antihoraria (como sucede en la figura, que muestra una curva a la derecha) y $\psi < 0$ en el caso opuesto (curva a la izquierda) [6.A, pp. 21 – 23 y 44 – 46].

1.4.5. Velocidad de cambio del ángulo de lazo.

Una vez se tiene el ángulo de lazo, la velocidad con la cual cambia se obtiene por derivación:

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$$

$$\dot{\psi} = \frac{d}{dt} \arcsen\left(\frac{e}{R}\right) \quad [Ec. I. 86]$$

El signo de $\dot{\psi}$ no tiene por qué coincidir con el de ψ , dado que ahora se distingue entre más situaciones. Así, $\dot{\psi} > 0$ (rotación antihoraria) cuando el bogie ingresa en una curva a la derecha (como la curva de transición I en la figura 1.17) o abandona una curva a la izquierda, mientras que $\dot{\psi} < 0$ (rotación horaria) cuando el bogie abandona una curva a la derecha (como la curva de transición II en la figura 1.17) o ingresa en una curva a la izquierda.

El cálculo de esta velocidad depende de si la curva es circular o de transición, y dentro de las curvas de transición de si es una clotoide o polinómica. En el caso de curva circular se tiene radio constante, por lo que $dR(x)/dx = 0$, lo cual implica $\dot{\psi} = 0$. Cuando la curva es de radio variable sucede todo lo contrario, por lo que a continuación se va a hallar una expresión de $\dot{\psi}$ para la clotoide y para las curvas polinómicas cuyas ecuaciones se han ajustado previamente (parábola cuadrática y parábola cúbica).

1.4.5.1. Clotoide.

Componiendo la función $R(x)$ de la clotoide en la función $\psi(R)$ se obtiene esta evolución de ψ con respecto a x (función $\psi(x)$) para la curva de transición I y para la II, respectivamente (véase la [parte 1.4.2.1](#)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \arcsen\left(\frac{e}{R_L L} x\right) \quad [Ec. I. 87] \\ \psi = \arcsen\left(\frac{e}{R_o L} (L - x)\right) \quad [Ec. I. 88] \end{array} \right.$$

Derivando estas expresiones se llega a, para la curva I y la II:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} = \frac{\frac{e}{R_L L} V}{\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_L L} x\right)^2}} \quad [Ec. I. 89] \\ \dot{\psi} = \frac{-\frac{e}{R_o L} V}{\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_o L} (L - x)\right)^2}} \quad [Ec. I. 90] \end{array} \right.$$

En la derivación de este par de ecuaciones se ha aplicado la regla de la cadena $(df(x)/dt = df(x)/dx \cdot dx/dt)$ y al final ha permanecido un factor x en ambas. Por tanto, la velocidad de cambio del ángulo de lazo es variable en la clotoide, a diferencia de lo que sucedía con $\dot{\gamma}$ [6.A, pp. 44 – 46].

1.4.5.2. Parábola cuadrática.

En el caso de las curvas polinómicas se procede del mismo modo. Primero se halla la función $\psi(x)$ para la parábola cuadrática, unificando la solución para la curva I y para la II:

$$\psi = \arcsen\left(\left\{\frac{e}{R_o}\right\} \pm e(d_1x + d_2x^2)\right) \quad [Ec. I. 91]$$

siendo $d_1 = (R_{L|o}L)^{-1} + 4L^{-1}(R_{L/2}^{-1} - 0,5R_{L|o}^{-1})$ y $d_2 = -4L^{-2}(R_{L/2}^{-1} - 0,5R_{L|o}^{-1})$. El término entre corchetes, así como el signo negativo, aplican solamente a la curva II, donde además se hace uso de R_o en vez de R_L .

La derivada de esta función es [6.A, pp. 44 – 46]:

$$\dot{\psi} = \frac{\pm e(d_1V + 2d_2xV)}{\sqrt{1 - \left(\left\{\frac{e}{R_o}\right\} \pm e(d_1x + d_2x^2)\right)^2}} \quad [Ec. I. 92]$$

1.4.5.3. Parábola cúbica.

En cambio, la función $\psi(x)$ para la parábola cúbica es la que sigue, con una solución unificada para la curva I y para la II:

$$\psi = \arcsen\left(\left\{\frac{e}{R_o}\right\} \pm \frac{e}{R_{L|o}L^3}x^3\right) \quad [Ec. I. 93]$$

donde el término entre corchetes, R_o y el signo negativo aplican a la curva II, mientras que R_L y el signo positivo afectan a la curva I [6.A, pp. 44 – 46].

La derivada de esta función es [6.A, pp. 44 – 46]:

$$\dot{\psi} = \frac{\pm \frac{3e}{R_{L|o}L^3}x^2V}{\sqrt{1 - \left(\left\{\frac{e}{R_o}\right\} \pm \frac{e}{R_{L|o}L^3}x^3\right)^2}} \quad [Ec. I. 94]$$

1.4.6. Seno del ángulo de lazo y variación del ángulo de lazo promedios.

Tal como atestiguan las ecuaciones, tanto el ángulo de lazo como su variación temporal no son constantes en las curvas de transición. Por tanto, es conveniente hallar valores promedio aplicables a toda la curva con los cuales facilitar el trabajo.

En cuanto al promedio del ángulo de lazo, lo primero que debe considerarse es que en el cálculo del pseudodeslizamiento transversal v_y se aplica el seno del ángulo de lazo (véase la ecuación 1.42). Como ψ varía constantemente en las curvas de transición, el valor de este seno también lo hará, por lo que conviene hallar un valor promedio para facilitar el cómputo de v_y . Primero de todo, debe tenerse en cuenta esta desigualdad:

$$\overline{\text{sen}\psi} \neq \text{sen}\bar{\psi}$$

Esto es debido a la no linealidad de la función seno. Por tanto, es preferible hallar un promedio del seno de todos los ángulos de lazo antes que hallar el ángulo de lazo promedio $\bar{\psi}$, puesto que de esta manera se estará promediando directamente el primer término de v_y (es análogo a obtener $\overline{\Delta V_y^I}$ y dividirlo por V , considerada constante durante la negociación de la curva entera), ya que el factor $\cos\gamma_o$ puede interpretarse como una constante.

Para hallar este promedio va a recurrirse nuevamente a la integración:

$$\overline{\text{sen}\psi} = \frac{1}{x_f - x_o} \int_{x_o}^{x_f} \text{sen}(\psi(x)) dx \quad [\text{Ec. I. 95}]$$

En cuanto al promedio de la variación del ángulo de lazo, este se realiza recurriendo a la integración, planteándose una ecuación pareja a la 1.75 para el cómputo de $\bar{\dot{\psi}}$:

$$\bar{\dot{\psi}} = \frac{1}{t_f - t_o} \int_{t_o}^{t_f} \dot{\psi}(t) dt \quad [\text{Ec. I. 96}]$$

En ambos casos se pueden reemplazar las substracciones $x_f - x_o$ y $t_f - t_o$ por las ecuaciones 1.76 e 1.77 con el propósito de simplificar.

Seguidamente se realizan estas integrales para las funciones $\psi(x)$ y $\dot{\psi}(t)$ de la clotoide, de la parábola cuadrática y de la parábola cúbica.

1.4.6.1. Clotoide.

Para comenzar, intégrase el seno de la función $\psi(x)$ para la curva de transición I (ecuación 1.87):

$$\begin{aligned} \overline{\text{sen}\psi} &= \frac{1}{L-0} \int_0^L \text{sen}\left(\arcsen\frac{e}{R_L L} x\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{e}{R_L L} x dx \\ \overline{\text{sen}\psi} &= \frac{e}{2R_L} \quad [\text{Ec. I. 97}] \end{aligned}$$

Como se ve, el resultado es bastante simple, pero lógico al mismo tiempo si se tiene lo siguiente:

$$\begin{cases} \psi(x) \neq \mathfrak{C}x \text{ (relación no lineal, función arcoseno)} \\ \text{sen}(\psi(x)) = \mathfrak{C}x \text{ (relación lineal)} \end{cases}$$

Ténganse en cuenta que el factor más relevante aquí es la cancelación mutua de la función seno con la función arcoseno.

Por otro lado, para la curva de transición II (ecuación I.88) se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{\text{sen}\psi} &= \frac{1}{L-0} \int_0^L \text{sen} \left(\text{arcsen} \frac{e}{R_o L} (L-x) \right) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{e}{R_o L} (L-x) dx \\ \overline{\text{sen}\psi} &= \frac{e}{2R_o} \quad [\text{Ec. I. 98}] \end{aligned}$$

Nótese que estas dos últimas ecuaciones tienen signo positivo porque $\psi > 0$ en ambas curvas de transición, que son dextróginas. Si estas curvas fuesen levóginas, entonces $\psi < 0$ ($\overline{\text{sen}\psi} < 0$) y habría que agregarles un signo negativo a ambas fórmulas.

En cuanto a la variación promedio, se toman las ecuaciones I.89 e I.90 y se integran, previa sustitución de la variable x por el producto Vt para así obtener la función $\dot{\psi}(t)$. El resultado se presenta unificado:

$$\dot{\psi} = \pm \frac{V}{L} \text{arcsen} \left(\frac{e}{R_{L|o}} \right) \quad [\text{Ec. I. 99}]$$

donde el signo positivo y R_L afectan a la curva I, mientras que el negativo y R_o lo hacen a la curva II.

1.4.6.2. Parábola cuadrática.

En la parábola cuadrática se integra el seno de la ecuación I.91, como sigue:

$$\begin{aligned} \overline{\text{sen}\psi} &= \frac{1}{L} \int_0^L \left(\left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm e(d_1 x + d_2 x^2) \right) dx \\ \overline{\text{sen}\psi} &= \left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm e \left(d_1 \frac{L}{2} + d_2 \frac{L^2}{3} \right) \quad [\text{Ec. I. 100}] \end{aligned}$$

siendo $d_1 = (R_{L|o} L)^{-1} + 4L^{-1} (R_{L/2}^{-1} - 0,5R_{L|o}^{-1})$ y $d_2 = -4L^{-2} (R_{L/2}^{-1} - 0,5R_{L|o}^{-1})$. Esta ecuación difiere de las dos anteriores, por lo que no se puede unificar con ellas. Cabe observar que en esta fórmula siempre se tendrá $\overline{\text{sen}\psi} > 0$, lo cual es cierto para curvas dextróginas, mas no para levóginas. En el caso de curvas levóginas, $\psi < 0$ y $\overline{\text{sen}\psi} < 0$, por lo que deberá corregirse la ecuación con un signo negativo.

Por otro lado, el valor medio $\bar{\psi}$ se obtiene integrando la ecuación I.92 y reemplazando los valores de los coeficientes d_1 y d_2 . El resultado es el que sigue:

$$\bar{\psi} = \pm \frac{V}{L} \arcsen\left(\frac{e}{R_{L|o}}\right) \quad [Ec. I. 101]$$

Nótese que esta ecuación coincide con la I.99, lo cual obedece al hecho de que $V = cte.$ en la curva.

I.4.6.3. Parábola cúbica.

Finalmente, en la parábola cúbica se integra el seno de la ecuación I.93, como continúa:

$$\begin{aligned} \overline{\text{sen}\psi} &= \frac{1}{L} \int_0^L \left(\left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm \frac{e}{R_{L|o} L^3} x^3 \right) dx \\ \overline{\text{sen}\psi} &= \left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm \frac{e}{4R_{L|o}} \quad [Ec. I. 102] \end{aligned}$$

Cabe observar que en esta fórmula siempre se tendrá $\overline{\text{sen}\psi} > 0$, lo cual es cierto para curvas dextrógiras, mas no para levógiras. En el caso de curvas levógiras, $\psi < 0$ y $\overline{\text{sen}\psi} < 0$, por lo que deberá corregirse la ecuación con un signo negativo.

Esta ecuación resulta similar a las ecuaciones I.97, I.98 y I.100, pero, al no ser iguales, no se podrán unificar las cuatro. Lo que sí compartirán las cuatro será el criterio de signos que se ha mencionado en todos los casos.

Por otro lado, el valor medio $\bar{\psi}$ se obtiene integrando directamente la ecuación I.94, cuyo resultado es:

$$\bar{\psi} = \pm \frac{V}{L} \arcsen\left(\frac{e}{R_{L|o}}\right) \quad [Ec. I. 103]$$

Nótese que esta ecuación coincide con la I.99 y la I.101, lo cual obedece al hecho de que $V = cte.$ en la curva.

I.4.7. Ángulo de lazo promedio.

En el subapartado previo se ha promediado el seno del ángulo de lazo, pero no el ángulo de lazo directamente. El promedio del ángulo de lazo no es de aplicación en el cálculo de los pseudodeslizamientos, mas tiene otras aplicaciones. Por tanto, su cálculo es también relevante y se va a llevar a cabo en este subapartado.

Este cálculo se plantea de la misma manera que la ecuación I.95:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{x_f - x_o} \int_{x_o}^{x_f} (\psi(x)) dx \quad [Ec. I. 104]$$

Esta integral se va a resolver para la función $\psi(x)$ de la clotoide, de la parábola cuadrática y de la parábola cúbica.

1.4.7.1. Clotoide.

Para comenzar, intégrase la función $\psi(x)$ para la curva de transición I (ecuación I.87):

$$\bar{\psi} = \frac{1}{L-0} \int_0^L \arcsen\left(\frac{e}{R_L L} x\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \arcsen\left(\frac{e}{R_L L} x\right) dx$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{L} \int_0^L \arcsen\left(\frac{e}{R_L L} x\right) dx \quad [Ec. I.105]$$

Esta integral tiene la dificultad de que no es inmediata, por lo que debe buscarse un procedimiento analítico propicio para resolverla. El mejor de todos para este caso en particular es la integración por partes, por lo que es el que se va a aplicar.

La integración por partes es un método analítico de resolución de integrales basado en la derivada del producto de dos funciones independientes. Realizando la derivada de dos funciones independientes ($u(x)$ y $v(x)$, según la nomenclatura habitual), integrando los términos obtenidos y reorganizándolos se demuestra la fórmula característica de este método. Esta fórmula es necesaria para la aplicación del método, por lo que estas operaciones se realizan a continuación:

$$\frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) = \frac{d}{dx}u(x) \cdot v(x) + \frac{d}{dx}v(x) \cdot u(x)$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) \right] dx = \int \left[\frac{d}{dx}u(x) \cdot v(x) + \frac{d}{dx}v(x) \cdot u(x) \right] dx$$

$$u v = \int v du + \int u dv$$

$$\int u dv = u v - \int v du \quad [Ec. I.106]$$

Si la función $u(x)$ se asocia a la función arcoseno y la función diferenciada $dv(x)$ a la constante 1, es posible resolver la integral. La primera hay que diferenciarla (para obtener la función diferenciada $du(x)$) y la segunda integrarla (para obtener la función $v(x)$) Una vez se tienen los cuatro términos ($u(x)$, $du(x)$, $v(x)$ y $dv(x)$), estos se introducen en la ecuación I.105 y se resuelven las 2 integrales resultantes:

$$\begin{cases} u(x) = \arcsen\left(\frac{e}{R_L L} x\right) \xrightarrow{d/dx} du(x) = \frac{\frac{e}{R_L L}}{\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_L L} x\right)^2}} \\ dv(x) = 1 \xrightarrow{\int dx} v(x) = x \end{cases}$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{L} \int_0^L \arcsen\left(\frac{e}{R_L L} x\right) dx = \frac{1}{L} \left[x \arcsen\left(\frac{e}{R_L L} x\right) \right]_0^L - \frac{1}{L} \int_0^L x \frac{\frac{e}{R_L L}}{\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_L L} x\right)^2}} dx$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{L} \left[x \arcsen \left(\frac{e}{R_L L} x \right) \right]_0^L + \frac{R_L}{e} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_L L} x \right)^2} \right]_0^L dx$$

$$\bar{\psi} = \arcsen \left(\frac{e}{R_L} \right) + \frac{R_L}{e} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{e}{R_L}\right)^2} - \sqrt{1} \right)$$

$$\bar{\psi} = \pm \arcsen \left(\frac{e}{R_L} \right) \pm \frac{R_L}{e} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{e}{R_L}\right)^2} - \sqrt{1} \right) \quad [Ec. I. 107]$$

donde se ha introducido un doble signo para tener en cuenta que a veces este parámetro será positivo y otras veces negativo. Por coherencia, el criterio de signos adoptado será el mismo que el adoptado para el $\overline{sem\psi}$ y explicado a lo largo de la [subsección I.4.6](#).

Para finalizar, intégrase la función $\psi(x)$ para la curva de transición II (ecuación I.88):

$$\bar{\psi} = \frac{1}{L} \int_0^L \arcsen \left(\frac{e}{R_o L} (L - x) \right) dx \quad [Ec. I. 108]$$

En este caso, lo más razonable es realizar un cambio de variable para simplificar la integral y tener una integral como la asociada a la ecuación I.105. La nueva variable va a ser t y la ecuación de cambio de variable, que se plantea abajo, se aplica tanto al integrando cuanto a los límites de integración:

$$L - x = t \rightarrow -dx = dt \rightarrow dx = -dt$$

$$\bar{\psi} = -\frac{1}{L} \int_L^0 \arcsen \left(\frac{e}{R_o L} t \right) dx \quad [Ec. I. 109]$$

Esta integral se resuelve exactamente igual que aquella asociada a la ecuación I.105. Así, el resultado obtenido es el que sigue:

$$\bar{\psi} = -\frac{1}{L} \left[t \arcsen \left(\frac{e}{R_o L} t \right) \right]_L^0 + \frac{R_o}{e} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_o L} t \right)^2} \right]_L^0 dx$$

Finalmente, se reaplica la ecuación de cambio de variable para deshacer el cambio de variable (lo mismo en los límites de integración) y se obtiene:

$$\bar{\psi} = \arcsen \left(\frac{e}{R_o} \right) + \frac{R_o}{e} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{e}{R_o}\right)^2} - \sqrt{1} \right)$$

$$\bar{\psi} = \pm \arcsen \left(\frac{e}{R_o} \right) \pm \frac{R_o}{e} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{e}{R_o}\right)^2} - \sqrt{1} \right) \quad [Ec. I. 110]$$

Este resultado es idéntico al de la ecuación I.107, pero con R_o en lugar de R_L y en él también cabe utilizar el mismo criterio de signos que el aplicado al $\overline{sem\psi}$ a lo largo de la [subsección I.4.6](#).

1.4.7.2. Parábola cuadrática.

En la parábola cuadrática se integra la ecuación I.91, planteándose así la siguiente integral:

$$\bar{\psi} = \pm \frac{1}{L} \int_0^L \arcsen \left(\left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm e(d_1x + d_2x^2) \right) dx \quad [Ec. I. 111]$$

Para la resolución de esta integral se procede a aplicar el método de integración por partes, al igual que en las dos integrales previas. Llegase a este paso intermedio:

$$\bar{\psi} = \pm \frac{1}{L} \left[x \arcsen \left(\left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm e(d_1x + d_2x^2) \right) \right]_0^L - \frac{1}{L} \int_0^L x \frac{\pm e(d_1 + 2d_2x)}{\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_o} \pm e(d_1x + d_2x^2) \right)^2}} dx \quad [Ec. I. 112]$$

El problema de la segunda integral es que no se puede integrar de forma inmediata, como se puede comprobar en el *software* matemático en línea Wolfram Alpha. Según este *software*, la función primitiva de esta segunda integral es la función hipergeométrica, que es una función en números complejos [9.A].

Para evitar tratar con funciones en números complejos, recurrese a aproximaciones numéricas de bajo coste computacional. La que mejor relación coste computacional – precisión posee es la aproximación mediante trapecios, por lo que se opta por la misma.

1.4.7.3. Parábola cúbica.

Finalmente, en la parábola cúbica se integra la ecuación I.93, planteándose así la siguiente integral:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{L} \int_0^L \arcsen \left(\left\{ \frac{e}{R_o} \right\} \pm \frac{e}{R_{L|o} L^3} x^3 \right) dx \quad [Ec. I. 113]$$

Para la resolución de esta integral se aplica de nuevo el método de integración por partes y entonces vuelve a surgir el mismo problema, como se comprueba en Wolfram Alpha [9.A]: una integral cuya primitiva es la función hipergeométrica.

Nuevamente se decide recurrir a la integración mediante trapecios para sortear esta función.

1.4.8. Conjunción de los efectos del descentramiento y del ángulo de lazo.

Hasta ahora se ha estudiado el descentramiento y el ángulo de lazo (y sus respectivas variaciones temporales) de forma totalmente independiente. En la práctica, los efectos de estos dos parámetros se combinan y ambos determinan cómo el bogie traza las curvas.

En la siguiente figura se ilustra un bogie de 4 ruedas trazante de una curva de radio constante (por tanto, $\dot{\psi} = 0$ e $\dot{y} = 0$) con un ángulo de lazo ψ y un descentramiento y :

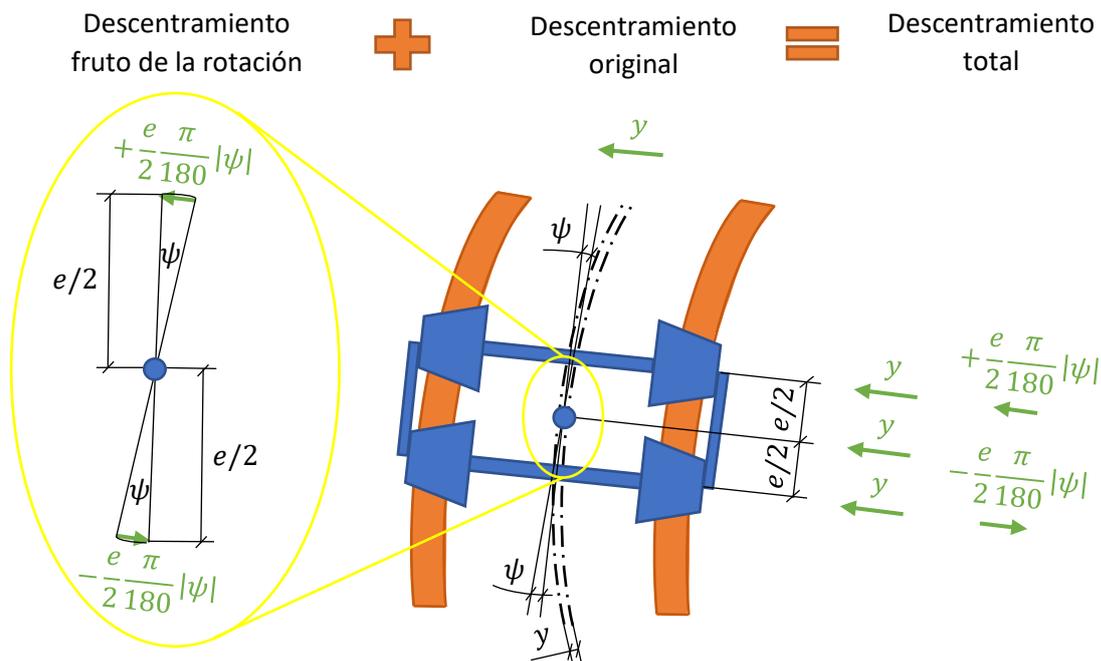


Figura I.20. Rotación de un bogie en torno del punto sobre el que pivota y consecuente modificación del descentramiento. Fuente: Elaboración propia.

Por consiguiente, el primer juego ve incrementado su descentramiento y el segundo juego decrementado tras la rotación. El descentramiento total, tras este incremento o decremento, se puede denotar y^* [m] para diferenciarlo del descentramiento original y se rige por estas dos expresiones:

$$y^* (1^{er} \text{ juego}) = y + e \frac{\pi |\psi|}{360} \quad [Ec. I. 114]$$

$$y^* (2^{o} \text{ juego}) = y - e \frac{\pi |\psi|}{360} \quad [Ec. I. 115]$$

Estas fórmulas permiten explicar lo observado en la figura I.19: el primer juego sufre un mayor descentramiento que el segundo, que permanece más centrado (percíbase que las elipses de contacto del segundo caen prácticamente en el centro de sus ruedas). O, visto de otro modo, puede afirmarse que la rotación tiende a contrarrestar el descentramiento original del segundo juego.

1.4.8.2. Velocidad de descentramiento total.

Si el descentramiento total y^* se deriva respecto al tiempo, entonces lo que se obtiene es la velocidad de descentramiento total. Esta derivada se realiza para el descentramiento total de cada juego:

$$\dot{y}^* (1^{er} \text{ juego}) = \dot{y} + e \frac{\pi |\dot{\psi}|}{360} \quad [Ec. I. 116]$$

$$\dot{y}^* (2^{o} \text{ juego}) = \dot{y} - e \frac{\pi |\dot{\psi}|}{360} \quad [Ec. I. 117]$$

Esta alteración de \dot{y} (el término original) ha de ser tenida en cuenta al computar el pseudodeslizamiento transversal, por lo que en el segundo término de la ecuación I.42 (el correspondiente a ΔV_y^H , término desarrollado en la [parte I.3.5.2](#)) debe introducirse \dot{y}^* en lugar de \dot{y} .

I.4.8.3. Afcción sobre los radios de rodadura.

Este mayor descentramiento que el original redonda en la rodadura con radios incorrectos, los cuales ya no serán los teóricos (r_e y r_i , como se demostró en el [subapartado I.4.1](#)). Los nuevos radios, que se pueden denotar r_e^* y r_i^* , serán, para el primer juego:

$$\begin{cases} r_e^*(1^{er} \text{ juego}) = r_o + ky^* = r_o + ky + ke \frac{\pi |\psi|}{360} \\ r_i^*(1^{er} \text{ juego}) = r_o - ky^* = r_o - ky - ke \frac{\pi |\psi|}{360} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^*(1^{er} \text{ juego}) = r_e + ke \frac{\pi |\psi|}{360} & [Ec. I. 118] \\ r_i^*(1^{er} \text{ juego}) = r_i - ke \frac{\pi |\psi|}{360} & [Ec. I. 119] \end{cases}$$

Y para el segundo juego:

$$\begin{cases} r_e^*(2^{o} \text{ juego}) = r_o + ky^* = r_o + ky - ke \frac{\pi |\psi|}{360} \\ r_i^*(2^{o} \text{ juego}) = r_o - ky^* = r_o - ky + ke \frac{\pi |\psi|}{360} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_e^*(2^{o} \text{ juego}) = r_e - ke \frac{\pi |\psi|}{360} & [Ec. I. 120] \\ r_i^*(2^{o} \text{ juego}) = r_i + ke \frac{\pi |\psi|}{360} & [Ec. I. 121] \end{cases}$$

En resumen, $r_e^* > r_e$ y $r_i^* < r_i$ en el primer juego y al contrario en el segundo. Esto produce un mayor pseudodeslizamiento longitudinal, ya que la diferencia entre la velocidad de la rueda externa a la curva V_e y la velocidad del vehículo V aumenta, como también lo hace la diferencia entre la velocidad de la rueda interna V_i y la velocidad del vehículo V .

Para tener en consideración este incremento en el pseudodeslizamiento longitudinal, en el primer término de la ecuación I.37 (el correspondiente a ΔV_x^I , término desarrollado en la [parte I.3.4.1](#)) debe introducirse r_e^* en vez de r_e o r_i^* en lugar de r_i , según se desee calcular este término para la rueda externa o la interna a la curva.

I.4.8.4. Observaciones.

Por último, cabe realizar tres observaciones sobre la validez de las expresiones recién desarrolladas:

1. En una curva de transición, lo correcto es hallar los valores promedio \bar{y}^* e \bar{y}^* mediante el empleo de valores promedio de las variables: \bar{y} e \bar{y} (obtenidos en la [subsección I.4.3](#)), $\bar{\psi}$ (obtenido en la [subsección I.4.6](#)) y $\bar{\dot{\psi}}$ (obtenido en la [subsección I.4.7](#)).
2. Las expresiones se han desarrollado para un bogie de 2 juegos, pero se pueden aplicar a bogies de distinto número de juegos tras agregar las fórmulas del descentramiento total para los nuevos juegos. Esto se va a realizar para un bogie de 3 juegos y otro de 4 juegos, ya que son los bogies más habituales después de los de 2 juegos.

En un bogie de 3 juegos, al juego central no le afecta la rotación, ya que el pivote del bogie se encuentra en el centro del juego central. Por causa de esto, su descentramiento total y la velocidad de descentramiento total (que sigue el mismo patrón que el primero) son:

$$y^* | \dot{y}^* (\text{juego central}) = y | \dot{y} \quad [\text{Ec. I. 122}]$$

En un bogie de 4 juegos, a los dos juegos centrales sí les afecta la rotación, siendo sus ecuaciones de descentramiento total las que siguen (siendo 1.080 el producto de 180° y de 6, ya que $e/6$ es la distancia perpendicular entre cada uno de estos juegos y el pivote):

$$y^* | \dot{y}^* (1^{\text{er}} \text{juego central}) = y | \dot{y} + e \frac{\pi |\psi| \dot{\psi}}{1.080} \quad [\text{Ec. I. 123}]$$

$$y^* | \dot{y}^* (2^{\text{o}} \text{juego central}) = y | \dot{y} - e \frac{\pi |\psi| \dot{\psi}}{1.080} \quad [\text{Ec. I. 124}]$$

3. Llega un momento en que el valor de y^* del primer juego se hace tan grande que la pestaña de la rueda externa a la curva contacta con el carril también externo. A partir de ese momento dejan de ser válidas las ecuaciones desarrolladas y deben desenvolverse nuevas un minucioso estudio del contacto pestaña – carril. Para este estudio se requiere de la introducción de nuevos parámetros y de numerosos conceptos teóricos, por lo que no se va a abordar en este subapartado ni en otro subapartado de este mismo anexo. Véase su estudio en el anexo III, concretamente en el [apartado III.5](#), sobre todo a partir del subapartado [III.5.2](#) y con la mayor intensidad en los subapartados [III.5.3](#), [III.5.4](#), [III.5.5](#) y [III.5.6](#).

I.4.9. Ángulo de desplazamiento longitudinal del área de contacto.

Aparte del incremento del descentramiento, otra consecuencia del ángulo de lazo es el desplazamiento longitudinal del área de contacto. Este desplazamiento, que se va a denotar ℓ_{ζ} [m], es transversal al descentramiento y provoca que el área de contacto original (con $\psi = 0$, en la vertical de la rueda) forme un ángulo con el área de contacto desplazada (con $\psi \neq 0$, en un radio no alineado con la vertical) en el plano radial de la rueda. Este ángulo se puede designar ζ [rad].

En la figura inferior se ilustra cómo se forma el ángulo de ζ en las dos ruedas de un juego. Estas ruedas están rodando con un radio genérico r (que podría ser r_o , r_e o r_i) y se puede observar cómo el ángulo ζ aparece a partir del desplazamiento ℓ_ζ , que a su vez tiene su origen en el ángulo de lazo ψ del juego.

Como este efecto se advierte mejor en una vía recta, se ha procedido a ilustrar una vía recta, a pesar de que $\psi = 0$ en las alineaciones rectas si no se toma en cuenta el movimiento de lazo. Asimismo, se ha procedido a dibujar las ruedas, cada una de ellas vista desde una perspectiva diferente para que el sentido de avance de ambas apunte hacia la derecha (desde el interior de la vía en el caso de la rueda izquierda y desde el exterior en el caso de la derecha):

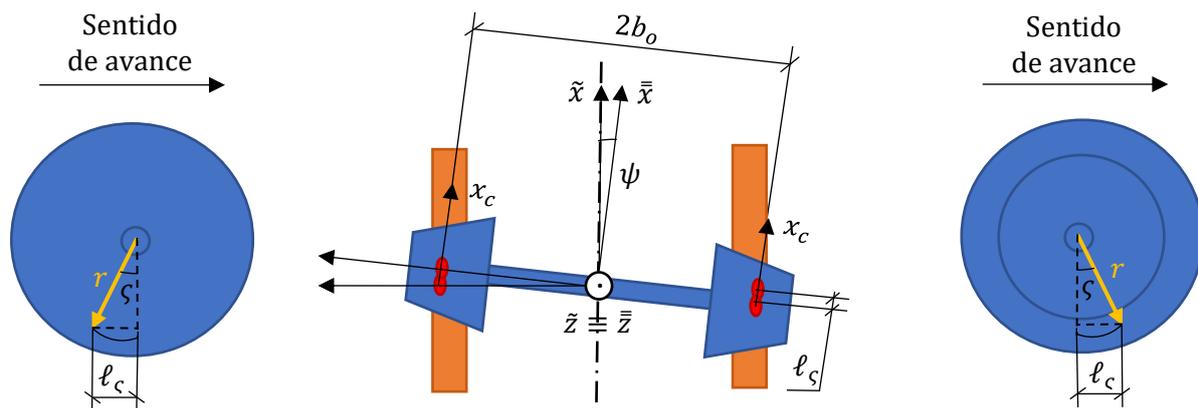


Figura I.21. Aparición del ángulo de desplazamiento longitudinal del área de contacto por causa del ángulo de lazo. Fuente: Elaboración propia.

De esta ilustración se deduce que, para $\psi < 0$ (negativo porque al girar de \tilde{x} a \bar{x} la rotación resulta ser horaria) el área de contacto se encuentra retrasada en la rueda izquierda (lo cual se deduce según el sentido de avance) y adelantada en la rueda derecha (ídem). Nótese que el área de contacto se encuentra en cada caso en la punta de la flecha del radio.

El hecho de que el área de contacto esté retrasada o adelantada se va a plasmar en el signo del ángulo ζ , el cual se va a calcular de modo genérico a continuación. Posteriormente, se realizará una observación acerca del cálculo para situaciones en las cuales el cálculo genérico se quede corto ([4.A, p. 4], [10.A]).

1.4.9.1. Cálculo genérico.

En esta parte se va a realizar un cálculo genérico del ángulo ζ en base a los parámetros de la figura, muchos de los cuales se van a relacionar mediante trigonometría.

Como paso inicial, lo que se obtiene es el desplazamiento longitudinal ℓ_ζ , para lo cual se realiza una aproximación del arco realmente girado por la cuerda de dicho arco:

$$\ell_\zeta = b_o \frac{\pi \psi}{180} \quad [Ec. I. 125]$$

Como se observa también en la figura (esta vez en su región derecha), el ángulo ζ puede obtenerse en base a los parámetros ℓ_ζ y r mediante simple trigonometría:

$$\zeta = \arcsen\left(\frac{\ell_\zeta}{r}\right) \quad [Ec. I.126]$$

Combinando ambas expresiones:

$$\zeta = \pm \arcsen\left(\frac{b_o \pi \psi}{r 180}\right) \quad [Ec. I.127]$$

En cuanto al doble signo introducido, debe tomarse uno u otro según la rueda donde se desee computar el ángulo. En concreto:

- ✓ El signo negativo si se desea calcular en la rueda derecha. De esta forma, cuando $\psi < 0$ (como en la figura), lo que se tendrá es $\zeta > 0$. Esto tiene sentido, pues al realizar en la figura una rotación de la vertical a la flecha del radio la rotación resulta ser antihoraria (de ahí el signo positivo de ζ).
- ✓ El signo positivo si se desea calcular en la rueda izquierda. De esta forma, cuando $\psi < 0$ (como en la figura), lo que se tendrá es $\zeta < 0$. Esto tiene sentido, pues al realizar en la figura una rotación de la vertical a la flecha del radio la rotación resulta ser horaria (de ahí el signo negativo de ζ).

1.4.9.2. Observaciones.

Cabe realizar un par de observaciones acerca del cálculo genérico:

1. En una curva de transición, lo correcto es hallar el valor promedio $\bar{\zeta}$ mediante el empleo del valor promedio $\bar{\psi}$ (obtenido en la [subsección 1.4.7](#)).
2. En algunas situaciones, es posible obtener mayor precisión mediante el uso de una fórmula distinta. Estas situaciones son las de contacto pestaña – carril, en las cuales es más recomendable recurrir a la fórmula presentada en la [parte III.5.5.3](#).

1.4.10. Balanceo y velocidad de balanceo.

El balanceo es un grado de libertad del juego que ya se introdujo en la [subsección 1.3.3](#) y en la parte [1.3.5.3](#) y la velocidad de balanceo es su derivada temporal. Sin embargo, hasta ahora no se han desarrollado expresiones para el cálculo de ambos parámetros, lo cual se va a llevar a cabo en la presente subsección.

En la siguiente figura se ilustra un juego trazante de una curva y que, como consecuencia de la diferencia entre los radios de rodadura de ambas ruedas, se balancea. En la figura se incluyen todos los parámetros que permiten el cálculo del ángulo:

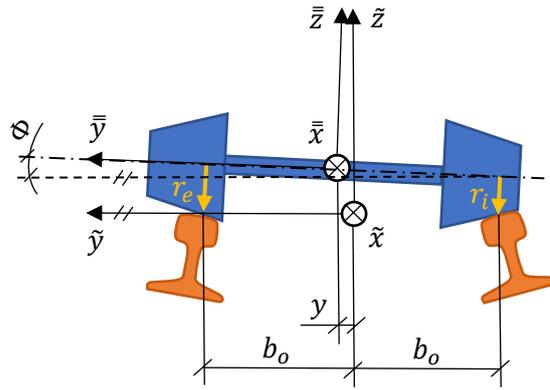


Figura I.22. Aparición del ángulo de balanceo en un juego trazante de una curva. Fuente: Elaboración propia.

En base a los parámetros de esta imagen se va a obtener una expresión para el ángulo de balanceo Φ [rad] y, partiendo de este, otra expresión para la velocidad de balanceo $\dot{\Phi}$ [rad/s].

I.4.10.1. Ángulo de balanceo.

Relacionando los parámetros de la imagen mediante simple trigonometría se obtiene una expresión para el ángulo de balanceo Φ :

$$\Phi = -\arctan\left(\frac{r_e - r_i}{2b_o}\right) \quad [Ec. I. 128]$$

En cuanto al signo negativo introducido, esto es debido a que el giro del eje \tilde{y} (o, en su defecto, la paralela a dicho eje) al eje \bar{y} es siempre horario al satisfacerse siempre la inequación $r_e > r_i$.

Esta ecuación puede desarrollarse para expresarla en función del producto ky^* (es decir, el producto de la semiconicidad o inclinación por el descentramiento total, cuyo cálculo consta en la [subsección I.4.8](#)), para lo cual se retoman algunas de las expresiones de la [subsección I.4.1](#):

$$\Phi = -\arctan\left(\frac{r_o + ky^* - (r_o - ky^*)}{2b_o}\right) = -\arctan\left(\frac{2ky^*}{2b_o}\right)$$

$$\Phi = -\arctan\left(\frac{ky^*}{b_o}\right) \quad [Ec. I. 129]$$

I.4.10.2. Velocidad de balanceo.

En cuanto a la velocidad de balanceo $\dot{\Phi}$, esta es la derivada temporal del balanceo. En derivando la expresión anterior se obtiene lo que sigue:

$$\dot{\Phi} = \pm \frac{\frac{k}{b_o} |\dot{y}^*|}{1 + \left(\frac{k|\dot{y}^*|}{b_o}\right)^2} \quad [Ec. I. 130]$$

donde y^* e \dot{y}^* se han introducido en valor absoluto con el fin de que sus signos no afecten al cómputo de $\dot{\Phi}$.

En cuanto al doble signo introducido, debe tomarse uno u otro según cómo sea la variación de $\dot{\Phi}$. En concreto:

- ✓ El signo negativo si $\dot{\Phi}$ va en ascenso (ingreso a una curva). En este caso, la rotación del eje \tilde{y} (o, en su defecto, la paralela a dicho eje) será horaria, con lo cual es coherente tener $\dot{\Phi} < 0$.
- ✓ El signo positivo si $\dot{\Phi}$ va en descenso (abandono de una curva). En este caso, la rotación descrita será antihoraria, con lo cual es coherente tener $\dot{\Phi} > 0$.

Este criterio de signos, el cual toma en cuenta el ascenso o el descenso de la variable, no es igual al adoptado para $\dot{\psi}$ en las subsecciones [1.4.5](#) y [1.4.6](#). El criterio que se ha adoptado para $\dot{\Phi}$ está pensado para tener $\Delta V_y^{III} > 0$ en los ingresos a las curvas y $\Delta V_y^{III} < 0$ en los abandonos de las curvas (acúdase a la [parte 1.3.5.3](#) para más información al respecto).

1.4.10.3. Observaciones.

Cabe realizar un par de observaciones acerca de estos dos parámetros:

1. En las curvas de transición deben obtenerse valores promedio de ambos parámetros: $\bar{\Phi}$ y $\bar{\dot{\Phi}}$. Para ello, en sus fórmulas han de insertarse \bar{y}^* e $\bar{\dot{y}}^*$ (obtenidos en la [subsección 1.4.8](#) y sobre todo en base a la primera observación realizada en la [parte 1.4.8.4](#)).
2. Estos parámetros son pocos importantes y su influencia no se suele considerar más allá de una mínima influencia en el pseudodeslizamiento lateral (tratada en la [parte 1.3.5.3](#)). Prueba de ello es que la mayor parte de las referencias los ignoran (por ejemplo, la [5] y la [7], donde se habla sobre los grados de libertad del juego). Sí se mencionan en la [6], aunque queda relativamente al margen frente a los demás grados de libertad. La referencia que más atención les presta es la [4.A].

1.5. Obtención de la fuerza normal en función de las cargas y del trazado.

La fuerza normal es, aparte de la velocidad y el deslizamiento, un factor determinante en el estudio del contacto rueda – carril, por lo que su correcto cálculo es imprescindible. Este cálculo se va a desarrollar en los próximos subapartados, para la cual van a considerarse las diferentes influencias presentes.

1.5.1. Cargas integrantes de la fuerza normal.

La fuerza normal N es, como ya se ha mencionado en ciertas ocasiones, la reacción que el carril ejerce sobre la rueda en la dirección normal al área de contacto en oposición a la fuerza de acción que la rueda ejerce sobre el carril en la misma dirección, pero en sentido opuesto, y que se puede denotar F_z . Esto se ve claramente al emplear los vectores en lugar de los módulos (en aplicación de la Tercera Ley de Newton):

$$\vec{N} = -\vec{F}_z \quad [Ec. I. 131]$$

Los módulos se expresan en [N] y cumplen lo siguiente:

$$N = F_z \quad [Ec. I. 132]$$

Esta fuerza F_z , normal al área de contacto (y, por tanto, en la dirección del eje z_c) y se restringe a una sola área de contacto (una rueda). La suma de la F_z de la rueda derecha de un juego de ruedas más la F_z de la rueda resulta en la F_z del eje, que se puede denotar F_z^{eje} . Matemáticamente:

$$F_z^{dcha.} + F_z^{izda.} = F_z^{eje} \quad [Ec. I. 133]$$

F_z^{eje} está integrada por:

- ✓ El peso de la carga útil por eje.
- ✓ El peso de la masa suspendida no útil por eje (el peso del bogie y de sus elementos recayente sobre cada eje y el peso del vagón recayente sobre cada eje).
- ✓ El peso de la masa no suspendida por eje (el peso propio del juego de ruedas más el peso de otras masas no suspendidas del bogie y de sus elementos recayente sobre cada eje).

La carga útil por eje, la masa suspendida no útil por eje y la masa no suspendida por eje suelen agruparse en un parámetro clave: la carga (total) por eje. Este parámetro se va a denotar λ_{eje} [kg].

Como esta carga está centrada en el eje (o se intenta que lo esté al cargar los vagones, existiendo en la práctica descentramientos de hasta 1 cm que se pueden despreciar [1, p. 36]), F_z será la mitad del peso debido a esta carga:

$$F_z = \frac{1}{2} \lambda_{eje} g \quad [Ec. I. 134]$$

siendo g [m/s^2] es la aceleración de la gravedad.

Combinando las ecuaciones I.132 e I.134 se llega a la expresión definitiva de N :

$$N = \frac{1}{2} \lambda_{eje} g \quad [Ec. I. 135]$$

Esta expresión solo es válida en tramos de vía rectos y sin desnivel, por lo que debe tenerse en cuenta cómo afecta el desnivel (rampas y pendientes) y las curvas (fuerza centrífuga), lo cual se va a desarrollar en los próximos subapartados.

Por último, en relación al valor de λ_{eje} , cabe explicar su cálculo. Este valor suele calcularse normalmente teniendo en cuenta las cargas a nivel del vagón y dividiéndolas por el número de ejes del mismo [1, p. 36]:

$$\lambda_{eje} = \frac{\lambda_u + \lambda_{tara}}{n_{ejes}} \quad [Ec. I. 136]$$

donde λ_u [kg] es la carga útil transportada por el vagón, λ_{tara} [kg] es la tara del vagón y n_{ejes} es su número de ejes.

Es importante destacar que λ_{eje} no puede tomar cualquier valor, ya que tiene un límite impuesto, o bien por el diámetro de las ruedas, o bien por la normativa ferroviaria. En el primer caso, el dato se extrae de los catálogos de material rodante. En el segundo caso, la normativa fija el límite en función de la categoría de la línea férrea, la cual depende de la capacidad portante de su plataforma y, más todavía, de la de sus puentes o viaductos (y de sus pertinentes coeficientes de amplificación dinámica de la carga). ADIF establece 9 categorías en la Red Ferroviaria de Interés General (RFIG): A, B1, B2, C2, C3, C4, D2, D3, D4. Para cada una de estas categorías (siendo D4 la más abundante) establece una carga máxima por eje y por metro, tal como se recoge en esta tabla [11.A, p. 50]:

Tabla I.1. Masa máxima en [t] por eje y por metro tolerada en las líneas férreas de la RFIG según su categoría. Fuente: [11.A, p. 50].

Categoría de las líneas	Masa Máxima	
	Por Eje	Por Metro
A	16,0 t	5,0 t
B1	18,0 t	5,0 t
B2	18,0 t	6,4 t
C2	20,0 t	6,4 t
C3	20,0 t	7,2 t
C4	20,0 t	8,0 t
D2	22,5 t	6,4 t
D3	22,5 t	7,2 t
D4	22,5 t	8,0 t

I.5.2. Efecto de las rampas y pendientes.

En los trazados ferroviarios se habla de rampas cuando la variación de la altura dividida entre la variación de la distancia horizontal recorrida es positiva. Es decir:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x_h} > 0$$

donde Δz [m] es la variación de la altura y Δx_h es la variación de la distancia horizontal recorrida.

En cambio, cuando este gradiente es negativo, entonces se habla de pendiente. Tanto las rampas y las pendientes afectan a la fuerza normal que el carril ejerce sobre la rueda, aunque no en gran medida, dado que las rampas y pendientes suelen ser reducidas en los trazados ferroviarios. A pesar de esto último, esta afección va a ser considerada dada la capital importancia de la fuerza normal en el contacto rueda – carril.

Para obtener cómo afectan las rampas y pendientes a la fuerza normal, se realiza un diagrama de fuerzas sobre una rueda (incluyendo solamente las fuerzas de interés):

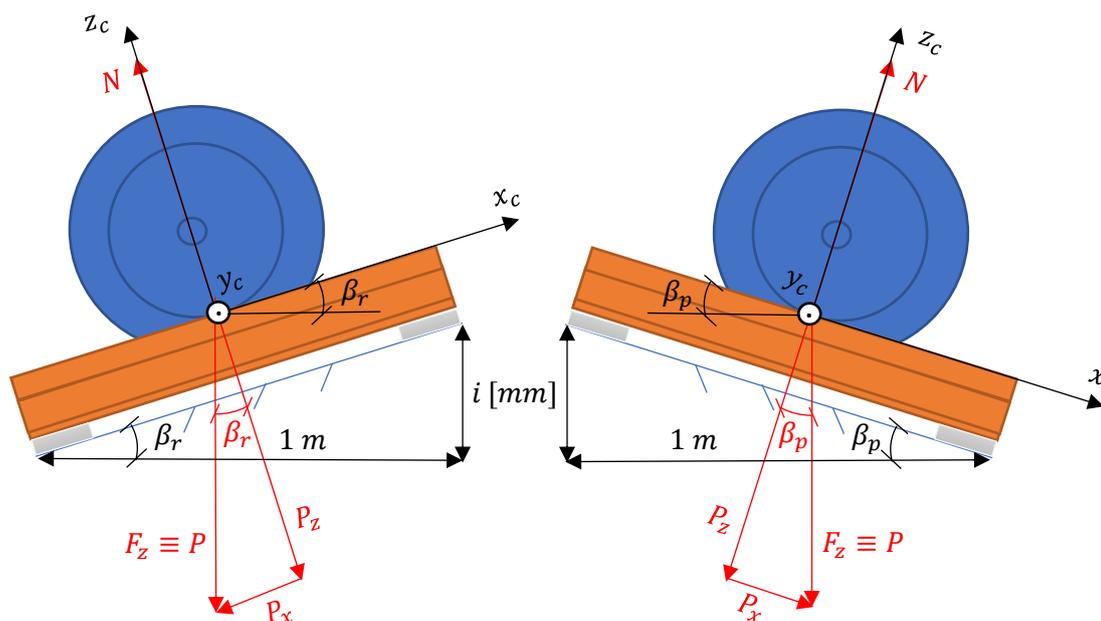


Figura I.23. Diagrama de las fuerzas de interés sobre una rueda en rampa (izquierda) y en pendiente (derecha). Fuente: Elaboración propia.

De este diagrama se desprende que ahora la fuerza F_z , renombrada P (de peso), se descompone en una componente en la dirección del eje x_c (P_x) y en una componente en la dirección del eje z_c (P_z), lo cual obedece al hecho de que ahora el eje x_c está inclinado respecto de la horizontal un ángulo β_r [°] en rampa y un ángulo β_p [°] en pendiente. Cada una de estas componentes produce un efecto distinto sobre la rueda, los cuales se van a abordar de manera independiente.

1.5.2.1. Efecto de la componente P_z .

La componente P_z es la que interesa para la obtención de N , dado que son fuerzas iguales en módulo y opuestas en sentido, pero dentro de la misma dirección (en la dirección del eje z_c).

P_z se relaciona con F_z de la siguiente manera:

$$P_z = P \cos(\beta_{r|p}) = F_z \cos(\beta_{r|p})$$

$$P_z = F_z \cos(\beta_{r|p}) \quad [Ec. I. 137]$$

donde $\beta_{r|p}$ indica la alternancia entre β_r (en rampa) y β_p (en pendiente), según sea el caso. Con el fin de eliminar esta alternancia y simplificar, estas dos variables se pueden combinar en una sola: β_{rp} .

Aplicando β_{rp} , la igualdad de N y P_z e insertando las ecuaciones I.132 e I.134 se llega a determinar N en una situación de rampa o pendiente:

$$N = P_z = F_z \cos \beta_{rp} = \left(\frac{1}{2} \lambda_{eje} g \right) \cos \beta_{rp}$$

$$N = \frac{1}{2} \lambda_{eje} g \cos \beta_{rp} \quad [Ec. I. 138]$$

Por último, en cuanto a β_{rp} cabe decir que las rampas o pendientes de los trazados ferroviarios no suelen expresarse en ° de inclinación con respecto a la horizontal. Lo normal es expresarlas en centésimas o milésimas, tal como se explica a continuación:

- ✓ Una centésima de rampa o pendiente significa que por cada metro avanzado en horizontal el vehículo ferroviario salva o baja un desnivel de 1 centímetro. Por tanto, la ratio es 1 cm/1 m o 1 cm/100 cm en las mismas unidades, cuyo cociente es 0,01. Este cociente indica que la rampa o pendiente es del 1 %, de lo que se deduce que 1 centésima = 1 %.
- ✓ Una centésima de rampa o pendiente significa que por cada metro avanzado en horizontal el vehículo salva o baja un desnivel de 1 milímetro. Por tanto, la ratio es 1 mm/1 m o 1 mm/1.000 mm en las mismas unidades, cuyo cociente es 0,001. Este cociente indica que la rampa o pendiente es del 1 ‰, de lo que se deduce que 1 milésima = 1 ‰. En general, en una rampa o pendiente de i milésimas se asciende o desciende un desnivel de i mm, siendo esto lo que se representa en la figura I.23.

Entre estas dos formas de la rampa o pendiente existe el siguiente factor de conversión: 1 centésima = 10 milésimas o, lo que es equivalente, 1 % = 10 ‰. Por otro lado, estas dos formas no tienen la misma frecuencia de utilización, puesto que lo tradicional es emplear las milésimas al proporcionar información sobre un determinado trazado.

Por tanto, resulta de interés relacionar β_{rp} con las milésimas al ser esta la información que suele proporcionarse. Esto puede realizarse gracias a la tangente, función trigonométrica que relaciona los dos catetos del triángulo formado por la plataforma inclinada (su hipotenusa), el desnivel (su cateto vertical) y la distancia avanzada en horizontal (su cateto horizontal). De esta forma, tiénesse lo siguiente (véase la figura I.23 para mayor claridad):

$$tg\beta_{rp} = \frac{Desnivel}{Distancia\ en\ horizontal} \quad [Ec. I. 139]$$

Introduciendo i [milésimas o mm/m] más un factor de conversión para pasar de mm/m a m/m (cociente adimensional, ya que el argumento de la función tangente ha de ser adimensional) y despejando β_{rp} se arriba a:

$$tg\beta_{rp} = \frac{Desnivel}{Distancia\ en\ horizontal} = i \left[\frac{mm}{m} \right] \cdot \frac{1 [m]}{1.000 [mm]}$$

$$\beta_{rp} = \arctan\left(\frac{i}{1.000}\right) \quad [Ec. I. 140]$$

El máximo valor de i de una línea férrea o de un tramo es determinante a la hora de calcular la máxima carga remolcable por una locomotora en dicha línea o tramo, incluso si se aplica a una pendiente, ya que al recorrerla en sentido contrario se torna en rampa. Valores de i por encima de 20 milésimas (o 20 ‰) ya se consideran elevados en el transporte de mercancías y limitan bastante la carga máxima remolcable por la locomotora, tanto por limitaciones de adherencia cuanto de potencia.

Finalmente, cabe agregar que los cambios de rasante (del valor de i) no se realizan repentinamente en un punto, sino que se realizan suavemente mediante acuerdos verticales. Un acuerdo vertical es una parábola cuadrática que sirve de transición suave entre dos rasantes, por lo que recuerda a una curva de transición en cierto modo. Sin embargo, los acuerdos se representan en el alzado del trazado y las curvas de transición en planta (es decir, son elementos perpendiculares) y los acuerdos suavizan el movimiento vertical del vehículo, mientras que las curvas suavizan el lateral. Los acuerdos verticales pueden ser cóncavos o convexos, en función de las rasantes que empalmen, y se trazan en torno a un vértice, que es el punto en el cual se produciría el cambio instantáneo de rasante de no existir acuerdo. Para más información, consúltese [12.A].

1.5.2.2. Efecto de la componente P_x .

La componente P_x genera resistencia al avance en la rampa, dado que se opone a la ascensión de la rueda; mientras que la misma componente facilita el movimiento descendente en la pendiente.

P_x se relaciona con F_z de la siguiente manera:

$$P_x = P \sen(\beta_{rp}) = F_z \sen(\beta_{rp})$$

$$P_x = F_z \sen(\beta_{rp}) \quad [Ec. I. 141]$$

Insertando la ecuación I.134 para reemplazar F_z se llega a:

$$P_x = \frac{1}{2} \lambda_{eje} g \sen(\beta_{rp}) \quad [Ec. I. 142]$$

Existen dos estrategias para paliar los efectos de esta fuerza:

- ✓ En rampa, la locomotora ha de aplicar un mayor esfuerzo tractor. Parte de ese esfuerzo se destina a contrarrestar la P_x de todas las ruedas.

- ✓ En pendiente, la locomotora ha de aplicar un menor esfuerzo tractor si la pendiente es reducida (valor de i pequeño). En las pendientes más pronunciadas, en cambio, debe cortarse el esfuerzo tractor y deben accionarse los frenos de la locomotora y de las ruedas de los vagones. En las pendientes intermedias, ambas medidas se adoptan.

A continuación, va a calcularse el valor de $\bar{\omega}'$ [rad/(s·m)] necesario para frenar la rueda (véase la [parte I.3.4.2](#)) y evitar que se acelere al descender una pendiente. En principio, se asume que el esfuerzo tractor aplicado por la locomotora (no por las ruedas de los vagones, que no están conectadas a ningún motor) se mantiene constante.

Esta fuerza produce el siguiente momento acelerador M_{ac} [N·m] cuando el juego descende una pendiente (cuyo ángulo es β_p , pero se mantiene el ángulo unificado β_{rp}):

$$M_{ac} = r_o(2P_x)$$

$$M_{ac} = r_o \lambda_{eje} g \operatorname{sen}(\beta_{rp}) \quad [Ec. I. 143]$$

donde se ha duplicado la fuerza P_x , ya que cada rueda del juego aporta P_x una vez.

Este momento acelerador provoca una aceleración angular α [rad/s²] sobre el juego de ruedas, la cual se puede obtener a través de la Segunda Ley de Newton aplicada a la rotación:

$$\alpha = \frac{M_{ac}}{I_{\parallel}}$$

$$\alpha = \frac{r_o \lambda_{eje} g \operatorname{sen}(\beta_{rp})}{I_{\parallel}} \quad [Ec. I. 144]$$

donde I_{\parallel} [kg·m²] es el momento de inercia del juego en torno a su eje de revolución. Su cálculo en base a los principales parámetros del juego (r_o , sobre todo) se explicitará tras obtener $\bar{\omega}'$.

Esta aceleración angular valdrá, si se expresa en función de la velocidad angular ω [rad/s] y del tiempo t [s]:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad [Ec. I. 145]$$

donde se ha igualado la derivada (la pendiente de la recta tangente a la curva $\omega(t)$) a un cociente de incrementos (la recta secante a la curva $\omega(t)$). Esto no es una aproximación, sino una igualdad estricta, dado que la aceleración generada de $2 P_x$ es uniforme al ser proveniente de la aceleración gravitatoria.

El incremento de tiempo en una pendiente de longitud L [m] que se descende a una velocidad constante V [m/s] es el que sigue:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{L/V} = \frac{\Delta\omega}{L} V$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{L} V \quad [Ec. I. 146]$$

De esta expresión se puede despejar $\Delta\omega/L$, que se corresponde con la $\bar{\omega}'$ que se desea obtener:

$$\bar{\omega}' = \frac{\Delta\omega}{L} = \frac{\alpha}{V}$$

$$\bar{\omega}' = \frac{\alpha}{V} \quad [Ec. I. 147]$$

Finalmente, esta ecuación se combina con la ecuación I.144 y se le aplica el signo negativo correspondiente a la frenada:

$$\bar{\omega}' = -\frac{r_o \lambda_{eje} g \operatorname{sen}(\beta_{rp})}{I_{\parallel} V} \quad [Ec. I. 148]$$

Es decir, el juego tenderá a acelerarse y la diferencia de velocidad angular existente respecto a la nominal (V/r_o) será $+\bar{\omega}'$. Esto implica que habrá que aplicar $-\bar{\omega}'$ para contrarrestar la aceleración del juego durante el descenso.

En realidad, la disminución del esfuerzo tractor será la estrategia preponderante durante el descenso, por lo que $\bar{\omega}'$ simplemente se adaptará para frenar una pequeña fracción de P_x (0,05 o 0,10, que es 5 o 10 % en tanto por unidad) Si esta fracción se denota $\kappa_p [\phi]$, lo que se obtiene al final es:

$$\bar{\omega}' = -\kappa_p \frac{r_o \lambda_{eje} g \operatorname{sen}(\beta_{rp})}{I_{\parallel} V} \quad [Ec. I. 149]$$

1.5.2.3. Cálculo del momento de inercia del juego en torno de su eje de revolución.

En esta última parte se va a abordar el cálculo del momento de inercia del juego en torno de su eje de revolución, simbolizada I_{\parallel} . Para ello, va a seguirse el procedimiento descrito en [5.A, pp. 80 y 81].

Este procedimiento parte de un juego de las dimensiones acotadas en la imagen inferior, cuyas ruedas son prácticamente troncocónicas (no lo son enteramente, pues sus pestañas son curvas), y aproxima las ruedas como cilindros para calcular su momento de inercia de manera inmediata. Es decir, el procedimiento desprecia la curvatura de las pestañas y asume que las ruedas cilíndricas tienen un momento de inercia prácticamente igual a la de las ruedas troncocónicas.

En la siguiente imagen se pueden ver la geometría y las dimensiones originales del juego (en las cuales el subíndice a hace referencia al eje (del inglés *axle*) y el subíndice w a la rueda (del inglés *wheel*)) y su geometría y dimensiones tras la aproximación de los troncos de cono por cilindros:

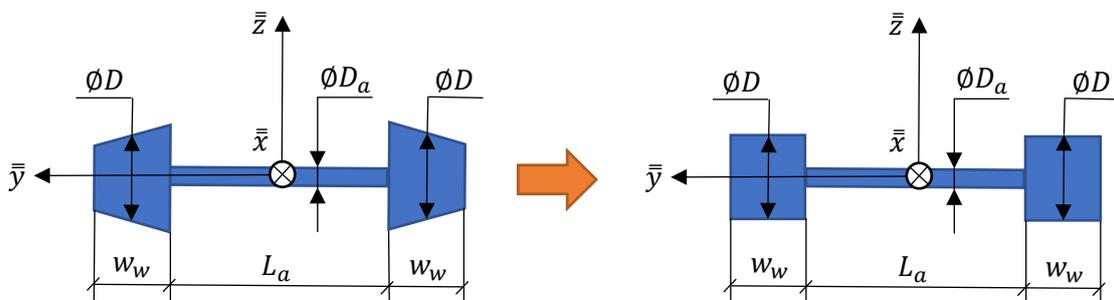


Figura I.24. Aproximación geométrica de las ruedas de un juego para agilizar el cálculo del momento de inercia I_{\parallel} . Fuente: Elaboración propia, con inspiración en [5.A, p. 80].

El momento de inercia I_{\parallel} se calcula como la suma de estos términos:

$$I_{\parallel} = 2I_w + I_a \quad [Ec. I. 150]$$

donde I_w [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$] es el momento de inercia de la rueda en torno a su eje de revolución (el eje \bar{y} en la figura) y I_a [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$] es el momento de inercia del eje en torno a su eje de revolución (el eje \bar{y}).

Estos dos momentos se pueden calcular inmediatamente, para lo cual se aplica en ambos casos la fórmula del momento de un cilindro alrededor de su eje de revolución (la mitad de su masa por su radio al cuadrado):

$$\begin{cases} I_w = \frac{1}{2} m_w r_w^2 & [Ec. I. 151] \\ I_a = \frac{1}{2} m_a r_a^2 & [Ec. I. 152] \end{cases}$$

donde m_w [kg] es la masa de la rueda, r_w [m] es el radio de la rueda, m_a [kg] la masa del eje y r_a [m] el radio del eje.

Las masas m_w y m_a conviene expresarlas como el producto de la densidad y el volumen de cada elemento y los radios r_w y r_a según los diámetros acotados en la figura. Las dos ecuaciones recién presentadas se modifican para satisfacer estas conveniencias:

$$\begin{cases} I_w = \frac{1}{2} m_w r_w^2 = \frac{1}{2} \kappa_m \rho \pi r_w^2 w_w r_w^2 = \frac{1}{2} \kappa_m \rho \pi r_w^4 w_w \\ I_a = \frac{1}{2} m_a r_a^2 = \frac{1}{2} \rho \pi r_a^2 L_a r_a^2 = \frac{1}{2} \rho \pi r_a^4 L_a \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_w = \frac{1}{2} \kappa_m \rho \pi \left(\frac{D}{2}\right)^4 w_w & [Ec. I. 153] \\ I_a = \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{D_a}{2}\right)^4 L_a & [Ec. I. 154] \end{cases}$$

Donde ρ [kg/m^3] es la densidad del material (acero para todos los elementos del juego), D [m] es el diámetro nominal de la rueda, w_w [m] es la anchura de la rueda, D_a [m] el diámetro del eje y L_a [m] es la longitud del eje. Además, como la rueda no es maciza (a diferencia del eje) y presenta numerosas oquedades que la aligeran, se ha añadido el coeficiente κ_m [Ø] para reducir su masa.

Una vez se han desarrollado estos términos, introdúcese en la ecuación I.150:

$$I_{\parallel} = 2 \left(\frac{1}{2} \kappa_m \rho \pi \left(\frac{D}{2}\right)^4 w_w \right) + \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{D_a}{2}\right)^4 L_a$$

$$I_{\parallel} = \frac{\rho \pi}{16} \left(\kappa_m D^4 w_w + \frac{1}{2} D_a^4 L_a \right) \quad [Ec. I. 155]$$

Es posible reducir esta ecuación a un solo término en haciendo uso de las ratios D_a/D y L_a/w_w , que se pueden considerar fijas independientemente del diámetro nominal de la rueda. Esto se puede llevar a término extrayendo $D^4 w_w$ como si fuese un factor común:

$$I_{\parallel} = \frac{\rho \pi}{16} D^4 w_w \left(\kappa_m + \frac{1}{2} \frac{D_a^4 L_a}{D^4 w_w} \right) \quad [Ec. I. 156]$$

Para sustituir estas ratios por fracciones numéricas y dar un valor al coeficiente de reducción de masas, se hace necesario recabar datos reales, comenzando por la densidad (que es 7.850 [kg/m³], la densidad del acero, para todos los elementos del juego [13.A]) y continuando por las dimensiones y las masas:

- ✓ Por un lado, una rueda estándar cuenta con un diámetro de 920 mm y una anchura de 140 mm y su masa vale 410 kg [5.A, p. 82]. Con estos datos es posible computar el coeficiente de reducción de su masa, que es la ratio entre la masa real y la masa máxima que podría tener una rueda cilíndrica (se sigue utilizando la aproximación cilíndrica en este caso) con las dimensiones especificadas:

$$\kappa_m = \frac{410 [kg]}{7.850 \left[\frac{kg}{m^3} \right] \left(\frac{\pi}{4} (0,920)^2 \cdot 0,140 \right) [m^3]} \cong \frac{561}{1.000}$$

- ✓ Por otro lado, un eje estándar (para conectar las ruedas estándar) cuenta con un diámetro de 280 mm y una longitud de 1.350 mm y su masa vale 180 kg [5.A, p. 82]. Como estos datos provienen de una publicación de Estados Unidos, resulta que esta longitud está dada para un juego diseñado para el ancho de vía internacional, no para el ibérico. En el ibérico esta longitud asciende a 1.596 mm [14.A, pp. 22 y 23], por lo que es este último el que se va a emplear.

Con estos datos reales se pueden obtener las ratios buscadas, las cuales se introducen en la ecuación I.156 suponiendo que son fijas para cualquier juego de ruedas en ancho ibérico. O sea, D_a siempre variará proporcionalmente a D y tanto L_a y w_w se mantendrán constantes al ser el ancho de vía siempre el mismo. La introducción de las ratios (junto con κ_m) en la citada ecuación resulta inmediata:

$$\begin{cases} \frac{D_a}{D} = \frac{280}{920} = \frac{7}{23} \\ \frac{L_a}{w_w} = \frac{1.596}{140} = \frac{57}{5} \end{cases}$$

$$I_{\parallel} = \frac{\rho\pi}{16} D^4 w_w \left(\frac{561}{1.000} + \frac{1}{2} \left(\frac{7}{23} \right)^4 \frac{57}{5} \right) \cong \frac{61}{1000} \frac{\rho\pi}{16} D^4 w_w$$

$$I_{\parallel} = \frac{61}{1.600} \rho\pi D^4 w_w \quad [Ec. I. 157]$$

Esta ecuación (porque se le ha retirado el símbolo de aproximación) es la que se ca a aplicar a cualquier juego apto para circular en ancho ibérico, sin importar cuál es el diámetro nominal de sus ruedas.

1.5.3. Efecto de la aceleración centrífuga en las curvas.

La aceleración centrífuga tiende a expulsar el vehículo ferroviario de las curvas, causando la aparición de fuerzas de fricción transversales que tratan de retenerlo en su posición de equilibrio en curva. Estas fuerzas de fricción pueden ser estáticas o dinámicas, dependiendo de si el vehículo recorre una curva circular o una de transición, como se especifica a continuación [1.A, pp. 141 – 146]:

- ✓ En una curva circular no existe un movimiento relativo entre las ruedas y los carriles en el eje y_c , ya que los juegos del vehículo permanecen en la posición de equilibrio en curva, descentrados una distancia y respecto del eje de la vía (véase la [subsección 1.4.1](#)). Esto implica ausencia de deslizamiento, por lo que las fuerzas de fricción que contrarrestan la fuerza centrífuga son estáticas y no producen desgaste ni disipación térmica.
- ✓ En una curva de transición, en cambio, sí existe un movimiento relativo entre las ruedas y los carriles en el eje y_c , ya que los juegos se desplazan hacia el exterior de la curva a una velocidad \dot{y} para alcanzar la posición de equilibrio correspondiente a cada radio, el cual varía continuamente (véase la [subsección 1.4.2](#)). Esto implica existencia de deslizamiento (y pseudodeslizamiento; recuérdese que en la ecuación de v_y aparece el término $(\dot{y}/V)\cos\gamma_0$, como se demuestra en la [subsección 1.3.5](#)), con lo cual las fuerzas de fricción que contrarrestan la fuerza centrífuga son dinámicas y producen desgaste y disipación térmico.

Estas fuerzas de fricción, independientemente de su carácter estático o dinámico, han de ser suficientes para retener el vehículo, ya que en caso de no poder contrarrestar una elevada aceleración centrífuga se genera un movimiento relativo entre el vehículo y los carriles hacia el exterior de la curva, hasta que llega el momento en que las pestañas de las ruedas externas a la curva entran en contacto con el carril externo. En este contacto las pestañas presionan el carril en su dirección transversal y aparece un movimiento relativo en su dirección longitudinal, generándose fuerzas de fricción dinámicas en dicha dirección que desgastan fuertemente las pestañas. Si la fuerza centrífuga sigue creciendo, las pestañas ya no pueden retener el vehículo y este descarrila volcándose hacia el exterior de la curva.

Sin embargo, estas situaciones en que las pestañas presionan el carril externo o de descarrilamiento son bastante infrecuentes, ya que en los trazados ferroviarios se limita la velocidad máxima en las curvas, la cual depende fundamentalmente del radio de las mismas. Para una misma velocidad, la aceleración centrífuga se reduce inversamente proporcional al radio de curvatura, de lo que se colige que elevando el radio es posible reducir la aceleración, permitiendo así una circulación más segura, sin que se den las susodichas situaciones adversas. Es esta la razón por la cual un trazado de alta velocidad exhibe generosos radios, los cuales rondan los 5.000 m, dado que permiten una gran reducción de la aceleración a una velocidad de circulación de 300 km/h, permitiendo una circulación segura en consecuencia.

A continuación, se va a calcular el efecto que tiene la aceleración centrífuga sobre las fuerzas normales, ya que esta aprieta las ruedas externas contra el carril externo y desaprieta las internas. Es decir, las fuerzas normales se ven alteradas y, debido a que las fuerzas normales influyen en gran medida en el desgaste de las ruedas, su correcta determinación es relevante.

Para ello, va a presentarse el diagrama de fuerzas en dos dimensiones de un juego que está trazando una curva (de transición o circular) y posteriormente se va a realizar el balance de fuerzas aplicando las ecuaciones de equilibrio. Las fuerzas diagramadas son las propias de un sistema de referencia no inercial, el sistema dextrógiro $x_{CdG}y_{CdG}z_{CdG}$, que se define *ad hoc* para dar solución al balance, cuyo centro se sitúa en el centro de gravedad (CdG) de la carga por eje y cuyos ejes siguen el sentido de los ejes del sistema de la vía $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$. Estas fuerzas se citan a continuación:

- ✓ Peso de la carga F_g , que actúa en el centro de gravedad (CdG) de la carga por eje, centro sito a una altura H_{CdG} [m] sobre el plano de rodadura.
- ✓ Fuerza centrífuga F_{cf} , que actúa en el centro de gravedad (CdG) de la carga por eje. Es la fuerza de inercia asociada a la fuerza centrípeta F_{cp} , de la misma magnitud y en la misma dirección que F_{cp} , pero en sentido opuesto y presente en un sistema de referencia inercial.
- ✓ Fuerza normal N_e , que actúa sobre la rueda externa, perpendicularmente al plano de rodadura.
- ✓ Fuerza normal N_i , que actúa sobre la rueda interna, perpendicularmente al plano de rodadura.
- ✓ Fuerza de rozamiento $F_{r,e}$, que actúa sobre la rueda externa, estando contenida en el plano de rodadura. Es directamente proporcional a N_e .
- ✓ Fuerza de rodamiento $F_{r,i}$, que actúa sobre la rueda interna, estando contenida en el plano de rodadura. Es directamente proporcional a N_i .

He aquí el diagrama:

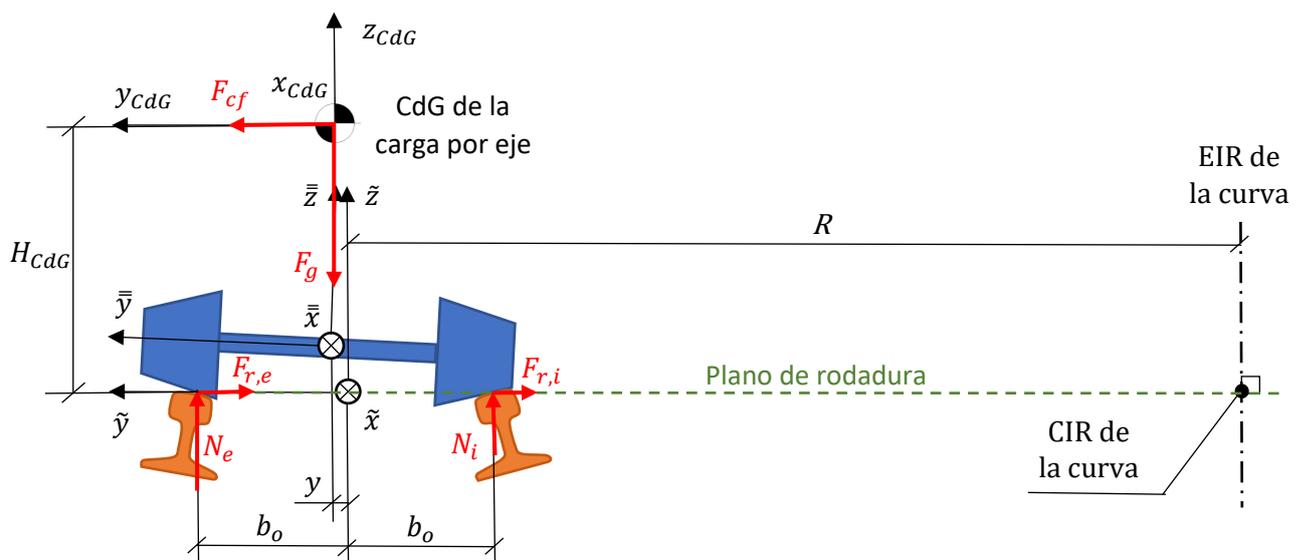


Figura I.25. Diagrama de las fuerzas que actúan sobre un juego en el recorrido de una curva. Fuente: Elaboración propia, salvo el símbolo del centro de gravedad, tomado de [15.A].

Abajo se aplican las ecuaciones de equilibrio en dos dimensiones, en el sistema $x_{CdG}y_{CdG}z_{CdG}$ [16.A]:

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow F_{cf} - F_{r,e} - F_{r,i} = 0 & [Ec. I. 158] \\ \sum F_z = 0 \rightarrow N_e + N_i - F_g = 0 & [Ec. I. 159] \\ \sum M_x = 0 \rightarrow 2N_e b_o - F_{cf} H_{CdG} - F_g (b_o + y) = 0 & [Ec. I. 160] \end{cases}$$

donde los momentos se han tomado respecto del punto de aplicación de N_i .

De la ecuación I.160 se despeja N_e :

$$N_e = \frac{F_g}{2} + \frac{1}{2b_o} (F_{cf} H_{CdG} + F_g y) \quad [Ec. I. 161]$$

Seguidamente se despeja N_i de la ecuación I.159:

$$N_i = \frac{F_g}{2} - \frac{1}{2b_o} (F_{cf} H_{CdG} + F_g y) \quad [Ec. I. 162]$$

Finalmente, se despeja la suma $F_{r,e} + F_{r,i}$ de la ecuación I.158:

$$F_{r,e} + F_{r,i} = F_{cf} \quad [Ec. I. 163]$$

Estas ecuaciones se pueden desarrollar más si se combinan con estas otras:

$$F_g = \lambda_{eje} g \quad [Ec. I. 164]$$

$$F_{cf} = \lambda_{eje} \frac{V^2}{R + y} \quad [Ec. I. 165]$$

$$F_{r,e} + F_{r,i} = \mu_e (N_e + N_i) \quad [Ec. I. 166]$$

donde μ_e es el coeficiente de fricción estático, de mayor entidad numérica que el dinámico que se emplea en el cálculo del desgaste.

Combinando el primer trinomio de ecuaciones con el segundo se obtienen estos resultados:

$$N_e = \frac{\lambda_{eje}}{2} g + \frac{\lambda_{eje}}{2b_o} \left(\frac{V^2}{R + y} H_{CdG} + g y \right) \quad [Ec. I. 167]$$

$$N_i = \frac{\lambda_{eje}}{2} g - \frac{\lambda_{eje}}{2b_o} \left(\frac{V^2}{R + y} H_{CdG} + g y \right) \quad [Ec. I. 168]$$

$$\mu_e (N_e + N_i) = \lambda_{eje} \frac{V^2}{R + y} \quad [Ec. I. 169]$$

Si bien esta última es más conveniente expresarla de esta guisa (combinada con la ecuación I.164):

$$\mu_e g = \frac{V^2}{R + y} \quad [Ec. I. 170]$$

El análisis de estas fórmulas es el subsiguiente [17.A]:

- ✓ N_e es el peso de la semicarga por eje, como en un tramo de curvatura nula, más dos términos que la aumentan: en primer lugar, un término que contrarresta el momento de vuelco producido por F_{cf} y, en segundo lugar, un término debido al descentramiento de la carga respecto del eje de la vía.
- ✓ N_i es el complementario de N_e , ya que ambos deben equiparar F_g . Por ello, los dos términos que incrementan N_e son los mismos que decrementan N_i .
- ✓ Las fuerzas de fricción son directamente proporcionales a la suma de las normales (es decir, F_g a través de la constante μ_e y deben contrarrestar F_{cf} . El hecho de no ser capaces de contrarrestarla puede responder a un valor de μ_e insuficiente (carriles mojados o contaminados, por ejemplo), si bien el principal culpable es que F_{cf} sea tan elevada, bien por haber ingresado en una curva a una velocidad excesiva, bien por ser el radio insuficiente.

Por último, se menciona el cálculo de H_{CdG} en función de λ_u (carga útil), λ_{tara} (tara) y sus respectivos centros de gravedad: H_u y H_{tara} , ambos en [m]:

$$H_{CdG} = \frac{\frac{1}{n_{ejes}} (\lambda_u H_u + \lambda_{tara} H_{tara})}{\frac{1}{n_{ejes}} (\lambda_u + \lambda_{tara})} \quad [Ec. I. 171]$$

Nótese que el número de ejes del vagón no influye en este cálculo tan sencillo, lo cual es cierto siempre y cuando la carga se encuentre equidistribuida a lo largo y alto de la longitud del vagón. De todas formas, si el centro de gravedad de λ_u fuese bajando y subiendo en la dirección vertical a lo largo del eje del vagón, siempre podría hallarse un valor promedio mediante integración (distribución continua) o suma (distribución discreta) e introducirse en esta fórmula.

1.5.4. Efecto de la compensación de la aceleración centrífuga mediante el peralte.

Tal como se ha explicado, la fuerza centrífuga incrementa la fuerza normal en las ruedas externas del vehículo, incrementándose así su desgaste; sucediendo lo opuesto en las ruedas internas a la curva. Adicionalmente, la fuerza centrífuga es incómoda para los viajeros y genera reacciones en los anclajes de las mercancías al vagón y, además, puede ser peligrosa bajo determinadas condiciones.

Como en la mayoría de las ocasiones no interesa ni reducir la velocidad (porque se quiere circular cada vez más velozmente) ni aumentar el radio (por restricciones económicas) para reducir la aceleración centrífuga, resulta que lo deseable es deshacerse de ella, lo cual es posible gracias al peraltado de la vía.

Peraltar la vía consiste en sobreelevar el carril exterior con respecto al interior a la curva con el fin de generar una componente del peso del vehículo que compense parcial o totalmente la fuerza debida a la aceleración centrífuga.

Para toda fuerza centrífuga existe un peralte que genera una componente del peso del vehículo de suficiente entidad para contrarrestarla totalmente: es el denominado peralte teórico.

1.5.4.1. Peralte teórico.

Para demostrar cuál es el peralte que compensa totalmente la fuerza centrífuga se procede tal como en el subapartado previo: primero se realiza un diagrama de fuerzas y, posteriormente, un balance de las mismas.

En la siguiente ilustración se representa un juego de ruedas trazando una curva peraltada con un peralte teórico h_t [m] y un ángulo de peralte teórico ϑ_t [rad] en el cual actúan las mismas fuerzas que en el caso de la curva sin peraltar, mostrada en la figura 1.25 (las fuerzas propias del sistema de referencia no inercial $x_{CdG}y_{CdG}z_{CdG}$). Apréciase cómo se inclina casi todo un ángulo ϑ_t respecto a esta figura: el plano de rodadura, el EIR, los ejes de los distintos sistemas de referencia (incluyendo el sistema $x_{CdG}y_{CdG}z_{CdG}$, definido en el subapartado previo), el juego, la mayor parte de las fuerzas, etc. Lo único que no se inclina es F_g , que permanece vertical, en la dirección y sentido de la aceleración gravitatoria. Por ello, F_g se puede descomponer en estas dos componentes:

- ✓ Una componente paralela al plano de rodadura, denotada F_{\parallel} (sin el cosubíndice g para mayor claridad). Esta componente es la encargada de contrapesar F_{cf} sin la intervención de F_r , que es la fuerza de rozamiento que resulta de adicionar $F_{r,e}$ y $F_{r,i}$. Por ende, $F_r = 0$.
- ✓ Una perpendicular al plano de rodadura, denotada F_{\perp} (sin el cosubíndice g para mayor claridad). Esta componente es contrapesada por la adición de N_e y N_i , ambas perpendiculares al plano de rodadura.

Estas componentes se presentan en la región derecha de la ilustración, donde se realiza la descomposición de F_g .

He aquí la ilustración con el diagrama de fuerzas completo:

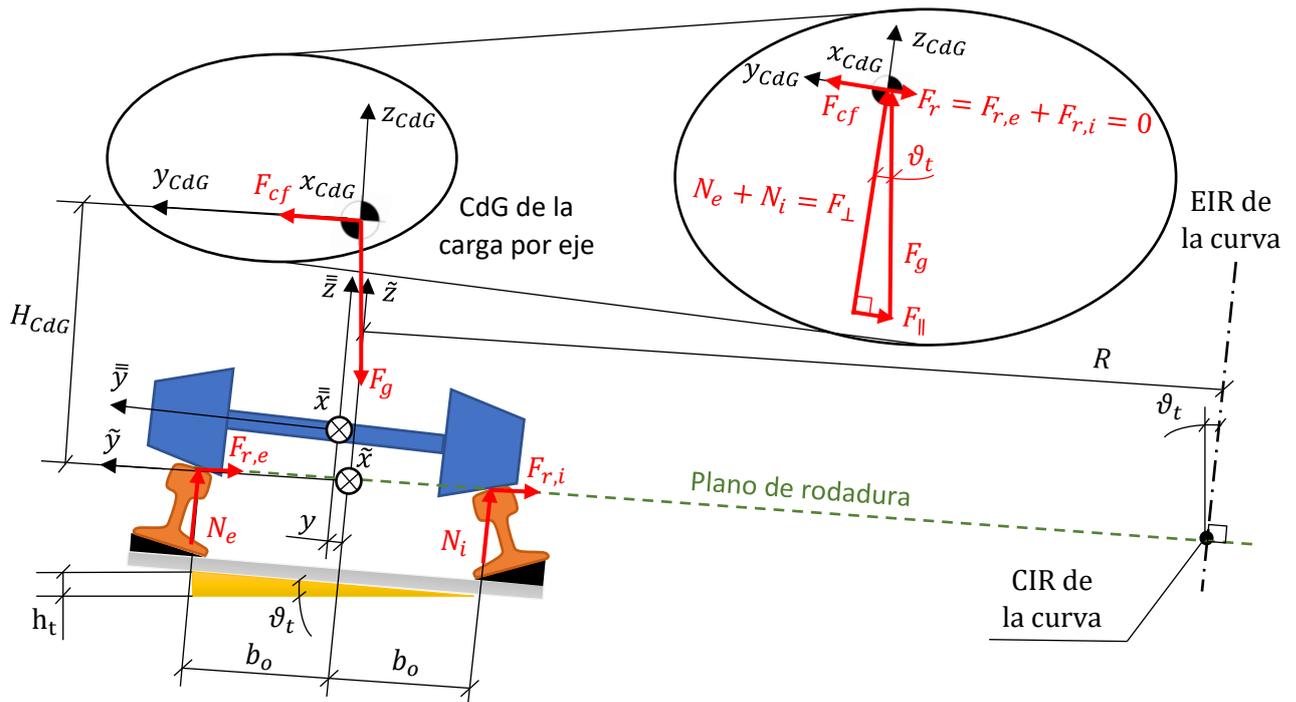


Figura I.26. Diagrama de las fuerzas que actúan sobre un juego en el recorrido de una curva peraltada. Fuente: Elaboración propia, salvo el símbolo del centro de gravedad, tomado de [15.A].

Realizando un balance de fuerzas en la dirección del plano de rodadura y considerando los sentidos del sistema $x_{CdG}y_{CdG}z_{CdG}$:

$$F_{cf} - F_r - F_{||} = 0 \quad [Ec. I. 172]$$

Como se ha explicado, lo que se pretende es compensar F_{cf} (en principio totalmente) con $F_{||}$, de forma que F_r haya de ser nula para que se satisfaga el balance. Matemáticamente:

$$F_{cf} - F_{||} = 0 = F_r$$

En adelante:

$$F_{cf} = F_{||} \quad [Ec. I. 173]$$

Seguidamente se desarrolla esta ecuación, para lo cual se recurre a la ecuación I.165 para reemplazar F_{cf} ; mientras que por otro lado se descompone F_g (para ello se recurre a la ecuación I.164) por medio del ángulo ϑ_t para obtener $F_{||}$ y así poder reemplazarla:

$$\lambda_{eje} \frac{V^2}{R + y} = \lambda_{eje} g \text{ sen} \vartheta_t$$

$$\frac{V^2}{R + y} = g \text{ sen} \vartheta_t \quad [Ec. I. 174]$$

Atendiendo a la figura I.26, este seno puede expresarse en función del cateto h_t (peralte) y la hipotenusa $2b_o$ (distancia entre los radios de rodadura). Tras realizar la sustitución se despeja h_t :

$$\frac{V^2}{R+y} = g \frac{h_t}{2b_o}$$

$$h_t = 2b_o \frac{V^2}{g(R+y)} \quad [Ec. I. 175]$$

De esta ecuación se desprende que el peralte no depende de la masa del vehículo (o la soportada por el eje más su masa propia en este caso), sino que depende principalmente de V y después de R y g . Esta ecuación puede simplificarse, ya que siempre se cumple $y \ll R$:

$$h_t \cong 2b_o \frac{V^2}{gR}$$

En adelante:

$$h_t = 2b_o \frac{V^2}{gR} \quad [Ec. I. 176]$$

Esta ecuación se expresa normalmente en función de V [km/h] y R [m] para lo cual es preciso llevar a cabo un cambio de unidades (V [m/s] \rightarrow V [km/h]) e introducir el valor de g ($9,81 \text{ m/s}^2$) y el de $2b_o$. En cuanto al valor de $2b_o$, este es normalmente el ancho de vía (por convenio medido entre las caras internas de los perfiles a 14 mm bajo el plano de rodadura [18.A, p. 9]) más una determinada distancia adicional. En el caso del ancho estándar (1.435 mm), esta distancia suele tomarse 65 mm [6, pp. 177 y 276], por lo que la misma puede aplicarse al ancho ibérico (1.668 mm). Aplicando todos estos cambios se arriba a:

$$h_t = (1.668 + 65) [mm] \cdot 10^{-3} \left[\frac{m}{mm} \right] \cdot \frac{\left(\frac{V [km/h]}{3,6 \left[\frac{km/h}{m/s} \right]} \right)^2}{9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right] \cdot R [m]}$$

$$h_t [m] = 1,363 \cdot 10^{-2} \left[\frac{m^2 h^2}{km^2} \right] \frac{(V [km/h])^2}{R [m]} \quad [Ec. I. 177]$$

Si se pasa a mm, se tiene:

$$h_t [mm] = 13,6 \left[\frac{mm h^2 m}{km^2} \right] \frac{(V [km/h])^2}{R [m]} \quad [Ec. I. 178]$$

Que es el denominado peralte teórico según las Normas Adif Vía (NAV) 0-2-0.0 (0200) [19.A] y 0 -2-3.0 (0230) [20.A], normas aplicables a vías de ancho ibérico hasta una velocidad de 220 km/h.

Dado que este peralte contrapesa totalmente la fuerza centrífuga, esta desaparece del sistema de ecuaciones para el cálculo de N_e y N_i (ecuaciones I.158 – I.160), en las cuales solamente permanece el efecto del descentramiento del juego. En estas ecuaciones se introduce también el factor $\cos\vartheta_t$, ya que ahora el plano de rodadura está inclinado un ángulo ϑ_t respecto de la horizontal. El resultado de despejar N_e y N_i es el siguiente:

$$N_e = \frac{\lambda_{eje}}{2} g \left(1 + \frac{y}{b_o} \right) \cos\vartheta_t \quad [Ec. I. 179]$$

$$N_i = \frac{\lambda_{eje}}{2} g \left(1 - \frac{y}{b_o}\right) \cos \vartheta_t \quad [Ec. I. 180]$$

donde ϑ_t se puede obtener por trigonometría:

$$\vartheta_t = \arcsen \left(\frac{h_t}{2b_o} \right) \quad [Ec. I. 181]$$

Por último, cabe hablar de la limitación del peralte por normativa. Las normas limitan el valor del peralte máximo, que es 160 mm en ancho ibérico, independientemente de la velocidad (valor que supone un ángulo $\vartheta_t = 5,30^\circ$ y una pendiente del 92,77 ‰ según las ecuaciones I.181 e I.140, correlativamente) [19.A]. Este valor se alcanza a 220 km/h para un radio de curvatura de 4.114 m, el cual es bastante generoso en un trazado inicialmente no diseñado para alta velocidad.

El motivo de esta limitación es impedir la existencia de peraltes muy elevados, ya que esto iría en detrimento de las circulaciones de trenes más lentos. Por ejemplo, si un peralte está diseñado para compensar la fuerza centrífuga a 300 km/h y por la misma línea circula un tren a 120 km/h, este tren verá su fuerza centrífuga sobrecompensada, ya que la componente del peso contenida en el plano de rodadura será muy superior a la fuerza centrífuga a 120 km/h. Esta sobrecompensación causará la inversión del sentido de las fuerzas de fricción estática, las cuales deberán ser de suficiente entidad para impedir el deslizamiento del tren hacia el interior de la curva, el posterior rozamiento de las pestañas de las ruedas interiores con el carril interior y el eventual descarrilamiento del tren. Aparte, otra consecuencia sobrecompensación será también un reparto de la carga entre las dos fuerzas normales contrario al explicado con anterioridad (se tendrá $N_i > N_e$ en lugar de $N_e > N_i$).

Esto último se puede demostrar matemáticamente, para lo cual se va a aplicar, en primer lugar, la ecuación I.178 con $R = 5.000 \text{ m}$ (a pesar de que esta fórmula es para ancho ibérico y en este tipo de ancho no se suele circular a 300 km/h, pero esto es solo a título ejemplar):

$$h_t (300 \text{ km/h}) = 13,6 \frac{300^2}{9,81 \cdot 5.000} = 244,80 \text{ mm}$$

$$h_t (120 \text{ km/h}) = 13,6 \frac{120^2}{9,81 \cdot 5.000} = 39,17 \text{ mm}$$

Como se ve, la diferencia de peralte teórico es enorme. En el tren a 300 km/h, su aceleración se ve totalmente compensada con el peralte de 244,80 mm, pero cuando el otro tren ingresa a la curva a 120 km/h y se encuentra con un peralte de 244,80 mm cuando solamente precisa de 39,17 mm para compensar su aceleración centrífuga, se encuentra con un enorme exceso de peralte que sobrecompensa su aceleración centrífuga e invierte su signo. En concreto, esta aceleración *centrífuga* sobrecompensada (realmente centrípeta en este caso, ya que trata de arrastrar el tren hacia el centro de la curva, aunque no debe confundirse con la aceleración centrípeta propia de un sistema de referencia inercial) que se puede denotar $a_{cp}|_{sc}$ [m/s²], irá en la dirección de y_{CdG} y en su sentido negativo y se puede obtener modificando la ecuación I.174 (añadiendo el término $a_{cp}|_{sc}$):

$$a_{cp}|_{sc} = \frac{V^2}{R + y} - g \frac{h_t}{2b_o} \quad [Ec. I. 182]$$

Introduciendo los valores numéricos correspondientes, la simplificación $y \ll R$, el factor de conversión 3,6 [(km/h)/(m/s)] y $2b_o$ en [mm], como h_t [mm], se obtiene lo siguiente:

$$a_{cp}|_{sc} = \frac{\left(\frac{120}{3,6}\right)^2}{5.000} - 9,81 \frac{244,80}{1.688 + 65} = -1,16 \frac{m}{s^2}$$

Aceleración elevada teniendo en cuenta que es lateral y que al ser multiplicada por λ_{eje} se genera una gran fuerza lateral que ha de ser contrapesada por las fuerzas de fricción estática invertidas (en el sentido positivo de y_{cdG} y contenidas en el plano de rodadura), las cuales podrían no ser capaces de contrapesarla, en especial en condiciones húmedas o de gran contaminación de los carriles, siendo posible el desencadenamiento de las susodichas situaciones adversas.

Es con fin de evitar estas situaciones que la norma fija el máximo peralte en 160 mm para ancho ibérico. Con este peralte máximo existiría una aceleración centrífuga sin compensar o no compensada en el tren a 300 km/h, la cual se puede denotar $a_{cf}|_{nc}$; mientras que al mismo tiempo existiría una aceleración sobrecompensada de menor valor en el tren a 120 km/h. Estas aceleraciones se obtienen abajo aplicando la ecuación I.182, válida también para el caso de $a_{cf}|_{nc}$:

$$a_{cf}|_{nc} = \frac{\left(\frac{300}{3,6}\right)^2}{5.000} - 9,81 \frac{160}{1.688 + 65} = 0,48 \frac{m}{s^2}$$

$$a_{cf}|_{sc} = \frac{\left(\frac{120}{3,6}\right)^2}{5.000} - 9,81 \frac{160}{1.688 + 65} = -0,68 \frac{m}{s^2}$$

Como se ve, los valores son similares en valor absoluto para ambos trenes, con lo cual se ve que las normas tratan de que los diferentes tipos de trenes experimenten aceleraciones laterales similares para que no se den casos extremos como el de $-1,16 m/s^2$.

Por este motivo, incluso si el peralte teórico calculado a una determinada velocidad es inferior a 160 mm, no se suele utilizar este valor en el trazado real, sino uno valor. El peralte real, denotado h_r en adelante, puede tomarse 2/3 del valor teórico a la máxima velocidad como regla heurística, tal como proponen algunas fuentes. Estas fuentes se justifican aduciendo que 2/3 de h_t permite un rango de velocidades adecuado y cumplir con la normativa al mismo tiempo [17.A]. Esto se cumple en el ejemplo anterior:

$$h_r = \frac{2}{3} (h_t(300 km/h)) = \frac{2}{3} \cdot 244,80 = 163,2 mm \sim 160 mm$$

Como se ve, al aplicar el factor 2/3 se obtiene 163,2 mm, un valor que prácticamente cumple con la normativa al ser próximo a 160 mm, aunque habría que eliminar el exceso de 3,2 mm. La diferencia entre 244,80 y 163,2 mm (limitado a 160 mm) es lo que se conoce como insuficiencia de peralte y va a ser abordada en la siguiente parte.

1.5.4.2. Insuficiencia de peralte.

Un tren que ingresa a una curva a una velocidad V precisaría de un peralte teórico h_t para ver totalmente compensada su aceleración centrífuga. Si el peralte real h_r es inferior a h_t (expresados en [mm] o [m]) para no ir en detrimento de las circulaciones más lentas, entonces existe una insuficiencia de peralte para el primer tren, la cual se suele denotar I [mm o m]:

$$I = h_t - h_r \quad [Ec. I. 183]$$

Esta insuficiencia de peralte causará una aceleración centrífuga sin compensar o no compensada $a_{cf|nc}$ obtenible por medio de una ecuación semejante a la I.182, pero en la cual aparece h_r (en [m] o [mm], coincidiendo con la dimensión de $2b_o$):

$$a_{cf|nc} = \frac{V^2}{R + y} - g \frac{h_r}{2b_o} \quad [Ec. I. 184]$$

Esta aceleración no compensada es la que se aplica al cálculo de N_e y N_i , donde sustituye a la aceleración propia de una curva plana, es decir, sin peraltar. Esta sustitución se lleva a cabo en el sistema de ecuaciones I.158 – I.160, donde también debe añadirse el término $\cos\vartheta_r$, siendo ϑ_r el ángulo del peralte real. El resultado es el que sigue:

$$N_e = \frac{\lambda_{eje}}{2} \left(1 + \frac{y}{b_o}\right) g \cos\vartheta_r + \frac{\lambda_{eje}}{2b_o} a_{cf|nc} H_{CdG} \quad [Ec. I. 185]$$

$$N_i = \frac{\lambda_{eje}}{2} \left(1 - \frac{y}{b_o}\right) g \cos\vartheta_r - \frac{\lambda_{eje}}{2b_o} a_{cf|nc} H_{CdG} \quad [Ec. I. 186]$$

Además, se modifica la ecuación I.181 para considerar el ángulo del peralte real, dependiente de h_r :

$$\vartheta_r = \arcsen \left(\frac{h_r}{2b_o} \right) \quad [Ec. I. 187]$$

Poseer una insuficiencia de peralte excesiva conlleva una $a_{cf|nc}$ excesiva, lo cual es inadmisibles. Según el ejemplo anterior, el tren a 120 km/h precisaba de $h_t = 39,17$ mm, mientras que el tren a 300 km/h precisaba de $h_t = 244,80$ mm, Si se cometiese el error de peraltar la curva a 39,17 mm, el tren rápido sufriría la siguiente insuficiencia de peralte y la subsecuente $a_{cf|nc}$, abajo computadas:

$$I = 244,80 - 39,17 = 205,63 \text{ mm}$$

$$a_{cf|nc} = \frac{\left(\frac{300}{3,6}\right)^2}{5.000} - 9,81 \frac{39,17}{1.668 + 65} = 1,17 \frac{m}{s^2}$$

Este valor resulta excesivo, y las normas limitan $a_{cf|nc}$ a $0,65 \text{ m/s}^2$ en las nuevas líneas o desdoblamientos [19.A]. En función de este valor se puede obtener la insuficiencia de peralte máxima admisible, para lo cual se combina la ecuación I.184 con la I.175 y la I.183:

$$a_{cf|nc} = \frac{gI}{2b_o} \quad [Ec. I. 188]$$

$$I = \frac{(1.668 + 65)}{9,81} 0,65 = 114,83 \cong 115 \text{ mm}$$

Este valor de 115 mm es el que prescribe la norma para las nuevas líneas [19.A]. También puede verse que se cumple tras aplicar el factor heurístico $2/3$ a 244,80 mm (aunque el peralte se limita después a 160 mm, lo cual hay que tener también en consideración):

$$244,80 - \frac{2}{3} \cdot 244,80 = \frac{1}{3} \cdot 244,80 = 81,60 \text{ mm} < 115 \text{ mm}$$

$$244,80 - 160 = 84,80 \text{ mm} < 115 \text{ mm}$$

Por tanto, compruébase que la regla heurística del 2/3 permite cumplir con el máximo valor de I consignado.

Lo contrario a la insuficiencia es el exceso, y es lo que se va a abordar a continuación.

1.5.4.3. Exceso de peralte.

El exceso de peralte consiste en todo lo contrario: Cuando el tren lento entra en la curva peraltada a 160 mm se topa con un exceso de peralte, ya que él solamente precisa de 39,17 mm para ver compensada su aceleración. Se denota E (en [mm] o [m], según la dimensión de h_r y h_t):

$$E = h_r - h_t \quad [Ec. I. 189]$$

Este exceso sobrecompensa la aceleración centrífuga, llegándose al valor de $a_{cp|sc} = -1,16 \text{ m/s}^2$, tal como se calculó previamente para este ferrocarril a través de la ecuación I.182. Este valor resulta inadmisibles para muchos trenes, por lo que normalmente se limita. Si se combinan las ecuaciones I.182 (previo trueque de h_t por h_r), I.175 e I.189 se puede obtener $a_{cp|sc}$ en función h_r , en primer lugar, y, en segundo lugar, relacionar $a_{cp|sc}$ con E , lo cual es importante para el estudio del límite:

$$a_{cp|sc} = \frac{V^2}{R + y} - g \frac{h_r}{2b_o} \quad [Ec. I. 190]$$

$$a_{cp|sc} = -\frac{gE}{2b_o} \quad [Ec. I. 191]$$

La NAV 0-2-0.0 [19.A] no define un valor único para $a_{cp|sc}$, sino que expresa el límite de E según el parámetro de transporte T [miles de toneladas – kilómetro brutas remolcadas (TKBR) por día y por vía], como se muestra a continuación:

Tabla I.2. Máximo exceso de peralte según el parámetro T [TKBR/día esperables en la vía para ser proyectada]. Fuente: [19.A].

MÁXIMO EXCESO DE PERALTE - H_e - (mm)	$T > 45$: 80	$T > 45$: 80	$T > 45$ VIAJEROS \leq 180 km/h: 80 MERCANCIAS: 80	$T > 45$ VIAJEROS \leq 180 km/h: 80 MERCANCIAS: 80	$H = H_e + 13,7 \cdot \frac{V_m^2}{R}$ $H_e = 116 - 0,58 \cdot T$ $T = \text{MILES DE TKBR/DÍA Y VÍA}$
	$25 < T \leq 45$: 90	$25 < T \leq 45$: 90	$25 < T \leq 45$ VIAJEROS \leq 180 km/h: 70 MERCANCIAS: 90	$25 < T \leq 45$ VIAJEROS \leq 180 km/h: 70 MERCANCIAS: 90	
	$10 < T \leq 25$: 100	$10 < T \leq 25$: 100	$10 < T \leq 25$ VIAJEROS \leq 180 km/h: 90 MERCANCIAS: 100	$10 < T \leq 25$ VIAJEROS \leq 180 km/h: 90 MERCANCIAS: 100	
	$T \leq 10$: 110	$T \leq 10$: 110	$T \leq 10$ VIAJEROS \leq 180 km/h: 90 MERCANCIAS: 110	$T \leq 10$ VIAJEROS \leq 180 km/h: 90 MERCANCIAS: 110	

En aplicando la ecuación I.191 puede obtenerse la $a_{cp|sc}$ de la que se está hablando en cada caso:

$$a_{cp|sc} = -\frac{9,81}{(1.668 + 65)} \cdot \begin{cases} 80 = -0,45 \text{ m/s}^2 \\ 90 = -0,51 \text{ m/s}^2 \\ 100 = -0,57 \text{ m/s}^2 \\ 110 = -0,62 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

El tren lento es de mercancías (circula a 120 km/h debido a su gran carga) y si se asume que $T = 10$ TKBR/día en la vía en cuestión, $E_{lím} = 110$ y $a_{cp}|_{sc} = -0,62 \text{ m/s}^2$ como límite. Si la vía está peraltada a 160 mm, $a_{cp}|_{sp} = -0,68 \text{ m/s}^2$, mayor en valor absoluto que $-0,62 \text{ m/s}^2$, por lo que no cumple el límite. Para cumplir el límite, la vía debería peraltarse a:

$$h_r = 39,17 + 110 = 149,17 \text{ mm} < 160 \text{ mm}$$

Lo cual iría en detrimento del tren rápido, que sufriría una insuficiencia de peralte de:

$$I = 244,80 - 149,17 = 95,63 \text{ mm} < 115 \text{ mm}$$

Pero que seguiría cumpliendo con el valor límite $I < 115 \text{ mm}$.

Si el tren lento, en cambio, es de carga pesada y $T = 45$ TKBR/día en la vía en cuestión, la vía debería peraltarse a:

$$h_r = 39,17 + 80 = 119,17 \text{ mm} < 160 \text{ mm}$$

Lo cual perjudicaría bastante más al tren rápido, que sufriría una insuficiencia de peralte de:

$$I = 244,80 - 119,17 = 125,63 \text{ mm} > 115 \text{ mm}$$

Valor que incumple la normativa, ya que $I > 115 \text{ mm}$. Esto se agravaría aún más si el tren lento circulase a 100 km/h en vez de a 120 km/h.

Con todo, hay que considerar que la normativa prevé excepciones de diseño, siempre y cuando se justifiquen y que además hay que tener en cuenta que estos valores son de diseño de nuevos trazados sin tener en cuenta el tipo de tren que circulará por dichos trazados. Algunos trenes soportan mayores valores de I (y de $a_{cf}|_{nc}$, por ende), dependiendo de su servicio (cercanías, media, larga distancia, etc.), el cual es determinante de sus exigencias de comodidad. El Reglamento de Circulación Ferroviaria de 2017 (RCF-17) define los siguientes tipos de trenes según $a_{cf}|_{nc}$ y la equivalencia de esta con I [22.A, p. 39]:

Tabla I.3. Tipos de tren en función de $a_{cf}|_{nc}$ e I . (N) hace referencia al tipo normal. Fuente: [22.A].

TIPOS DE TREN	ACELERACIÓN CENTRÍFUGA NO COMPENSADA (m/seg ²)	INSUFICIENCIA DE PERALTE	
		Ancho 1,435 (mm)	Ancho 1,668 (mm)
(N)	≤ 0,65	≤ 100	≤ 115
A	≤ 1	≤ 153	≤ 175
B	≤ 1,2	≤ 183	≤ 212
C	≤ 1,5	≤ 229	≤ 265
D	≤ 1,8	≤ 275	≤ 318

Por último, en cuanto a cómo resultan las normales en una situación de sobrecompensación por exceso de peralte, resulta que $N_e < N_i$, al contrario de que lo sucedía en el caso de insuficiencia de peralte, dado que al haber exceso de peralte se produce una inversión en el signo de la aceleración. Tomando las ecuaciones I.185 e I.186 y trocando $a_{cf}|_{nc}$ por $a_{cp}|_{sc}$ se obtienen las fórmulas para este caso:

$$N_e = \frac{\lambda_{eje}}{2} \left(1 + \frac{y}{b_o}\right) g \cos\vartheta_r + \frac{\lambda_{eje}}{2b_o} a_{cp}|_{sc} H_{CdG} \quad [Ec. I. 192]$$

$$N_i = \frac{\lambda_{eje}}{2} \left(1 - \frac{y}{b_o}\right) g \cos\vartheta_r - \frac{\lambda_{eje}}{2b_o} a_{cp}|_{sc} H_{CdG} \quad [Ec. I. 193]$$

donde ϑ_r se obtiene tal como indica la ecuación I.187.

I.5.4.4. Peralte promedio.

En una curva circular el peralte real es constante, ya que el radio de curvatura también lo es. Por el contrario, el peralte real varía continuamente en una curva de transición, al igual que el radio de la misma. En la práctica, debe cumplirse lo que sigue:

- ✓ En una curva de transición de tipo I (enlace de una recta con una curva circular posterior) el peralte debe variar entre 0 mm (valor al final de la recta) y el valor de h_r al comienzo de la curva circular.
- ✓ En una curva de transición de tipo II (enlace de una curva circular con una recta posterior) el peralte debe variar entre el valor de h_r al final de la curva circular y 0 mm (valor al inicio de la recta).

Estos dos tipos de curvas de transición se pueden visualizar en la figura I.17 del [subapartado I.4.2](#). Debajo de esta misma figura se aclaró que no se iban a considerar las curvas de transición que conectan dos curvas circulares de diferente radio, por lo que tampoco se va a computar su peralte promedio.

Como ya se ha dicho antes, el peralte real suele ser una fracción del teórico (siendo 2/3 la fracción proveniente de la regla heurística susodicha). Esto se puede expresar matemáticamente por medio de un coeficiente reductor ρ [ϕ], tal que así:

$$h_r = \rho h_t \quad [Ec. I. 194]$$

Si se reemplaza h_t por la ecuación I.178:

$$h_r = 13,6\rho \frac{V^2}{R} \quad [Ec. I. 195]$$

A partir de esta ecuación es posible obtener el peralte real promedio, para lo cual basta con integrar el peralte a lo largo de la longitud L [m] de la curva de transición a la que el peralte dé servicio:

$$\bar{h}_r = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} 13,6q \frac{V^2}{R} dx$$

$$\bar{h}_r = 13,6q \frac{V^2}{L} \int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{R} dx \quad [Ec. I. 196]$$

donde se ha asumido que V es constante con la longitud (con el radio, en el fondo), al igual que se realizó al computar \bar{y} en el [subapartado I.4.3](#).

Retirando las constantes, la integral resultante es la integral de la inversa del radio en función de la distancia recorrida, cuyo resultado dependerá del tipo de curva de transición a la que se aplique (porque cada tipo posee una función $R(x)$ o $1/R(x)$ diferente):

$$\frac{\bar{1}}{R} = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{R}(x) dx \quad [Ec. I. 197]$$

El resultado para cada tipo es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clotoide de tipo I: } \frac{\bar{1}}{R} = \frac{1}{2R_L} \quad [Ec. I. 198] \\ \text{Clotoide de tipo II: } \frac{\bar{1}}{R} = \frac{1}{2R_o} \quad [Ec. I. 199] \\ \text{Parábola cuadrática: } \frac{\bar{1}}{R} = \left\{ \frac{1}{R_o} \right\} \pm \left(d_1 \frac{L}{2} + d_2 \frac{L^2}{3} \right) \quad [Ec. I. 200] \\ \text{Parábola cúbica: } \frac{\bar{1}}{R} = \left\{ \frac{1}{R_o} \right\} \pm \frac{1}{4R_{L|o}} \quad [Ec. I. 201] \end{array} \right.$$

donde $d_1 = (R_{L|o}L)^{-1} + 4L^{-1} (R_{L/2}^{-1} - 0,5R_{L|o}^{-1})$ y $d_2 = -4L^{-2}(R_{L/2}^{-1} - 0,5R_{L|o}^{-1})$.

Por tanto, \bar{h}_r será el producto de las constantes $13,6q V^2$ y las ecuaciones I.198 – I.201, según el tipo de curva para la que se desee computar este promedio.

Por último, indícase la relación entre el h_r de una curva circular y el \bar{h}_r de su curva de transición anterior o posterior (fuere del tipo que fuere):

$$\frac{\bar{h}_r}{h_r} = \frac{13,6q V^2 \frac{\bar{1}}{R}}{13,6q \frac{V^2}{R}}$$

$$\frac{\bar{h}_r (\text{transición})}{h_r (\text{circular})} = \frac{\bar{1}}{R} \quad [Ec. I. 202]$$

donde se ha asumido la constancia y continuidad de V en las dos curvas.

Por ejemplo, en una clotoide (fuere de tipo I o II), esta ratio valdrá 1/2. Esto es coherente con el hecho de que la función $1/R(x)$ es lineal en una clotoide y, por tanto, la variación del peralte con la longitud (la función $h_r(x)$) también lo es.

1.5.4.5. Otros parámetros relacionados con el peralte.

Existen otros parámetros relacionados con el peralte, como la variación temporal de la insuficiencia de peralte, la variación temporal del peralte o el alabeo, pero que no son tan relevantes como el peralte ni influyen tan apenas en la obtención de las fuerzas normales. Estos son:

- ✓ Variación temporal de la insuficiencia de peralte: Según la NAV 0-2-3.0 [20.A]: “Para las curvas de transición con variación lineal de curvatura y rampa de peralte constante, en las que ΔI es la variación total de la insuficiencia de peralte, se cumplirá”:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} \left[\frac{mm}{s} \right] = \frac{\Delta I [mm] V \left[\frac{km}{h} \right]}{3,6 \left[\frac{km/h}{m/s} \right] L[m]} \quad [Ec. I. 203]$$

La normativa limita este valor a 75 mm/s. Sin embargo, no es un tema que afecte al cálculo de las fuerzas normales, sino más bien al diseño del trazado. En consecuencia, esta variación se va a obviar.

- ✓ Variación temporal del peralte: Según la NAV 0-2-3.0 [20.A]: “Para las curvas de transición con variación lineal de curvatura y rampa de peralte constante, en las que ΔD es la variación total del peralte, se cumplirá”:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} \left[\frac{mm}{s} \right] = \frac{\Delta D [mm] V \left[\frac{km}{h} \right]}{3,6 \left[\frac{km/h}{m/s} \right] L[m]} \quad [Ec. I. 204]$$

La normativa limita este valor a 50 mm/s. Sin embargo, no es un tema que afecte al cálculo de las fuerzas normales, sino más bien al diseño del trazado. En consecuencia, esta variación se va a obviar.

- ✓ Alabeo: Según la NAV 7-3-5.0 [21.A]: “El alabeo de la vía es la distancia del punto de la superficie de rodadura del carril de una vía, donde debía apoyar la cuarta rueda de un vehículo, al plano determinado por los tres puntos de apoyo de las otras ruedas en los carriles. Teóricamente sólo existen en las curvas de transición. En la práctica se determina por la diferencia de los peraltes de dos secciones de la vía, separados una distancia determinada.”

De esto se colige que en el alabeo se produce una pérdida de contacto entre la cuarta rueda (la que se queda fuera del plano de rodadura, definido por los tres puntos de las otras tres ruedas), lo cual implica la nulidad de la fuerza normal. El hecho de que la fuerza normal sea nula implica una ausencia de desgaste, que sucedería momentáneamente y, seguramente, cambiaría a otra rueda en otra sección de la vía. Sí es cierto que la fuerza normal debería crecer en las otras tres ruedas para poder hacer frente al peso que compensarían las cuatro ruedas en condiciones normales, con lo cual crecería su desgaste durante los alabeos. Con todo, debido a este carácter momentáneo y al probable cambio de una a otra rueda (las otras tres también irían alternando en consecuencia), el alabeo se va a obviar.

I.5.5. Conjunción de todos los efectos.

Finalmente, se conjuntan todos los efectos estudiados, ya que la presencia de curvas en un trazado no excluye la presencia simultánea de rampas o pendientes; a pesar de que ambas características juntas obligan a restringir bastante la velocidad, a no ser que el trazado sea nuevo y ambas sean leves.

En este caso, la inclinación del eje de la vía sobre la horizontal no afecta a F_{cf} , fuerza paralela al plano de rodadura. En cambio, sí afecta a F_g , ya que ahora se descompondrá en $F_g \cos\beta_{rp}$ y $F_g \sen\beta_{rp}$, siendo la segunda una resistencia o propiciadora del avance, según se dé en rampa o pendiente (véase el [subapartado I.5.2](#)). $F_g \cos\beta_{rp}$ es la componente del peso por eje perpendicular a la horizontal de la plataforma y es la que se introduce en el sistema de ecuaciones I.158 – I.160. En el sistema también se introduce el término $\cos\vartheta_r$ y, al igual que antes, la aceleración centrífuga no compensada, que se denota a_{lat} (de aceleración lateral) para unificar $a_{cf|nc}$ y $a_{cp|sc}$. Las fuerzas N_e y N_i despejadas son las que siguen:

$$N_e = \frac{\lambda_{eje}}{2} \left(1 + \frac{y}{b_o}\right) g \cos\vartheta_r \cos\beta_{rp} + \frac{\lambda_{eje}}{2b_o} a_{lat} H_{CdG} \quad [Ec. I. 205]$$

$$N_i = \frac{\lambda_{eje}}{2} \left(1 - \frac{y}{b_o}\right) g \cos\vartheta_r \cos\beta_{rp} - \frac{\lambda_{eje}}{2b_o} a_{lat} H_{CdG} \quad [Ec. I. 206]$$

En cuanto a a_{lat} , esta se obtiene mediante una modificación de la ecuación de $a_{cf|nc}$ o $a_{cp|sc}$ (ecuación I.184 o I.190), modificación que se realiza considerando, por un lado, la F_{cf} original (inafectada por el término $\cos\beta_{rp}$) y, por otro lado, la $F_{||}$ actualizada, que proviene de $F_g \cos\beta_{rp}$ en esta ocasión. La derivación de $F_{||}$ se realiza de manera similar a las ecuaciones I.173 – I.175, pero actualizándola con $F_g \cos\beta_{rp}$, ϑ_r y h_r (en vez de F_g , ϑ_t y h_t) y recordando que la compensación no es completa y que la parte de F_{cf} será contrarrestada por $F_r \neq 0$. El resultado es:

$$\lambda_{eje} a_{lat} = \lambda_{eje} \frac{V^2}{R + y} - (\lambda_{eje} g \cos\beta_{rp}) \sen\vartheta_t \rightarrow \lambda_{eje} a_{lat} = \lambda_{eje} \left(\frac{V^2}{R + y} - \frac{h_r}{2b_o} g \cos\beta_r \right)$$

$$a_{lat} = \frac{V^2}{R + y} - \frac{h_r}{2b_o} g \cos\beta_r \quad [Ec. I. 207]$$

Apréciase cómo la compensación efectuada es de menor valor, ya que el peso real efectivo es menor y compensa una menor cantidad de F_{cf} para el mismo valor de h_r . De aquí se desprende que habría que aumentar el valor de h_r en un factor $1/\cos\beta_{rp}$ (obteniendo así h'_r) para poder compensar la misma cantidad de F_{cf} que h_r en una situación de rampa o pendiente nula ($\cos\beta_{rp} = 1$). Matemáticamente:

$$h'_r(\cos\beta_{rp}) = \frac{h_r(\cos\beta_{rp} = 1)}{\cos\beta_{rp}} \quad [Ec. I. 208]$$

Esto se demuestra combinando esta ecuación con la I.207, ya que se obtiene la misma ecuación al final, la I.207 (misma a_{lat}).

$$a_{lat} = \frac{V^2}{R + y} - \frac{h'_r}{2b_o} g \cos\beta_r = \frac{V^2}{R + y} - \frac{h_r}{2b_o} g$$

Para zanjar este asunto, se modifica la ecuación I.207 para introducir h'_r , ya que así se ve mejor la necesidad de modificar h_r y diseñar con h'_r en los casos en que la vía se halle inclinada:

$$a_{lat} = \frac{V^2}{R + y} - \frac{h'_r}{2b_0} g \cos\beta_r \quad [Ec. I. 209]$$

Como colofón, cabe agregar que mediante estas ecuaciones es posible obtener N_e y N_i en cualquier curva peraltada, esté o no en rampa o pendiente (si no está, $\cos\beta_r = 1$). También se pueden aplicar a tramos rectos, estén o no en rampa o pendiente, recordando que en un tramo recto se tiene $R \rightarrow \infty$, $y = 0$ y $h_r = 0$ (aunque en estos casos puede ser preferible recurrir a las fórmulas desarrolladas en los [subapartados I.5.1](#) e [I.5.2](#), las cuales son más cortas).

I.5.6. Descomposición de la fuerza normal en el área de contacto.

Las fuerzas normales obtenidas en los subapartados previos (N para ambas ruedas en una alineación recta del trazado y N_e y N_i para la rueda externa e interna en una alineación curva) se refieren a las reacciones verticales que ejercen los carriles sobre las ruedas, pero no coinciden con las fuerzas perpendiculares a las áreas donde se produce el contacto rueda – carril. Esto tiene dos causas: por un lado, el ángulo de desplazamiento longitudinal del área de contacto y, por el otro lado, la conicidad.

El ángulo de desplazamiento longitudinal del área de contacto causa la descomposición de la fuerza normal en dos componentes [4.A, p. 4]:

- ✓ Una componente radial, que se va a denotar N_r . Esta componente es la principal, ya que va desde el carril hacia la rueda y su prolongación pasa por el centro de la rueda.
- ✓ Una componente tangencial al carril, que se va a denotar N_t . Esta componente no es tan importante como la anterior, pero se suele tener en cuenta en los balances de fuerzas asociados a los eventos de descarrilamiento porque puede facilitar o dificultar esta pérdida de contacto de la rueda con el carril [10.A].

La conicidad, por su parte, causa la descomposición de la componente radial de la fuerza normal (N_r) en otras dos componentes [23.A, pp. 334 – 345]:

- ✓ Una componente perpendicular al área de contacto, que se va a denotar N_{\perp} . Esta componente es la que causa la deformación de los cuerpos en contacto y la distribución de presiones semielipsoidal de Hertz. Por tanto, es la que se debe utilizar en las ecuaciones de Hertz, pero también en las Kalker.
- ✓ Una componente tangencial al área de contacto, que se va a denotar N_{\parallel} . Esta componente es la responsable de la tendencia que tiene un juego a regresar a su posición centrada cuando está descentrado, lo cual se conoce como rigidez gravitacional.

Todas estas descomposiciones se efectúan a través del ángulo de desplazamiento longitudinal ζ , así como del ángulo de contacto γ_o , como se muestra en la siguiente figura. La región izquierda de la figura es la que contiene la influencia de ζ , mientras que la región derecha contiene la influencia de γ_o :

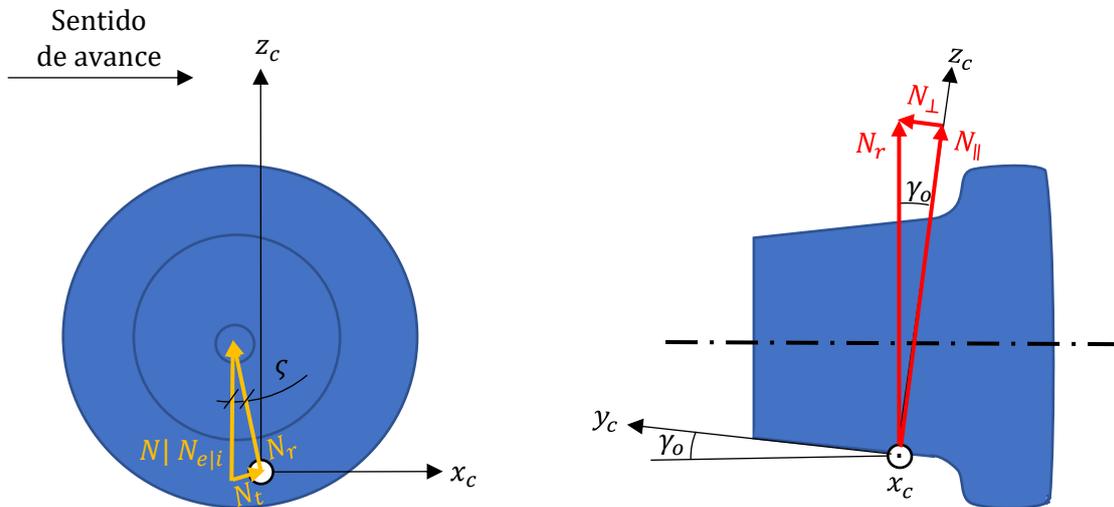


Figura I.27. Descomposición de la fuerza normal en el área de contacto. Fuente: Elaboración propia.

De aquí se deducen las ecuaciones para cada componente. Comenzando por N_r y N_t :

$$\begin{cases} N_r = (N | N_{e|i}) \cos \zeta & [Ec. I. 210] \\ N_t = (N | N_{e|i}) \sin \zeta & [Ec. I. 211] \end{cases}$$

Y prosiguiendo por N_{\perp} y N_{\parallel} :

$$\begin{cases} N_{\perp} = N_r \cos \gamma_o & [Ec. I. 212] \\ N_{\parallel} = N_r \sin \gamma_o & [Ec. I. 213] \end{cases}$$

Si en estas dos últimas se introduce la ecuación de N_r , lo que se tiene es:

$$\begin{cases} N_{\perp} = (N | N_{e|i}) \cos(\zeta) \cos(\gamma_o) & [Ec. I. 214] \\ N_{\parallel} = (N | N_{e|i}) \cos(\zeta) \sin(\gamma_o) & [Ec. I. 215] \end{cases}$$

Obviamente, N_{\perp} es la componente que más influirá en los resultados del problema de desgaste y, además, será la mayor en módulo, ya que tanto ζ cuanto γ_o suelen valer unos pocos grados y, entonces, $\cos(\zeta) \cos(\gamma_o) \sim 1$.

Por su parte, N_{\parallel} juega un papel relevante en el movimiento de lazo, un movimiento de inestabilidad de los juegos de un vehículo ferroviario que se va a explicar en la sección que viene a continuación.

1.6. Movimiento de lazo.

En un vehículo ferroviario se busca que los juegos (los ejes más las ruedas correspondientes) circulen centrados con respecto a los carriles durante el mayor tiempo posible. Si se producen descentramientos, lo esperable es un pronto retorno a la posición de equilibrio.

El movimiento de lazo supone la inestabilidad lateral de los juegos del vehículo, los cuales se desplazan transversalmente a la vía, alejándose del equilibrio, para luego intentar retornar al equilibrio en una suerte de rebote (debido a las fuerzas $N_{||}$), aunque no lo consiguen porque lo sobrepasan para llegar al otro extremo de la vía. Una vez en el otro extremo tratan de retornar al equilibrio, pero en vez de lograrlo se desplazan hasta el extremo opuesto, cerrando uno de los muchos ciclos que puede llegar a durar el movimiento de lazo. Se trata, pues, de un movimiento oscilatorio en el plano de la vía y transversal a la misma.

Este movimiento se produce como consecuencia de la interacción de las fuerzas de inercia con las de adherencia del vehículo. A baja velocidad no existe movimiento de lazo o es transitorio en caso de existir, puesto que las fuerzas de adherencia son bastante superiores a las de inercia. En cambio, conforme aumenta la velocidad las fuerzas de adherencia decrecen, mientras que las de inercia crecen. Al alcanzar una determinada velocidad, llamada velocidad crítica, el movimiento de lazo se torna en un fenómeno permanente, aunque a esta velocidad no se amplifica ni se amortigua. Es por encima de esta velocidad cuando el movimiento de lazo se amplifica y se convierte en verdaderamente peligroso para la estabilidad del vehículo si no se consigue reducir la velocidad.

Abajo se ilustra medio periodo del movimiento de lazo en un tramo de vía rectilíneo:

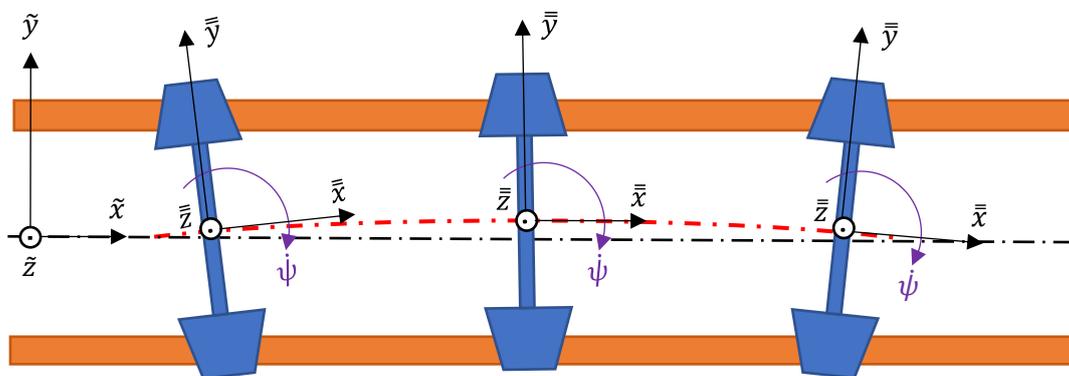


Figura 1.28. Semiperiodo del movimiento oscilatorio de lazo. La línea roja de tipo punto – trazo indica la posición del centro de gravedad del juego en cada instante. Fuente: Elaboración propia.

Para el cálculo de la velocidad crítica no existe una expresión precisa. Lo que se suele hacer es recurrir a aproximaciones para calcular un límite inferior (subestimación de la real) y uno superior (sobrestimación de la real).

El límite superior obedece a esta expresión, determinada partiendo de un balance de energía entre la energía cinética total del eje (traslacional más rotacional) y su energía potencial:

$$v_c^{sup} = \sqrt{\frac{P k_o r_o b_o^2}{k_w (I_{II} + 2mb_o^2)}} \quad [Ec. I. 216]$$

donde P [N] es el peso del eje y de la carga que soporta, I_{II} [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$] es el momento de inercia del juego respecto a su eje de revolución (véase su cálculo en la [parte I.5.2.3](#) o en [5.A, pp. 80 y 81]), r_o [m] es el radio nominal de las ruedas, m [kg] es la masa del juego de ruedas, k_o [ϕ] es su conicidad inicial, k_w [ϕ] es su conicidad tras el desgaste y b_o [m] es la distancia entre el centro de la vía y el centro del área de contacto nominal.

Mientras que el límite inferior responde a esta expresión, obtenida mediante un estudio cinemático del movimiento de lazo:

$$v_c^{inf} = \sqrt{\mu W \frac{r_o b_o^2}{I_{\perp} k \psi}} \quad [Ec. I. 217]$$

siendo μ [ϕ] el coeficiente de fricción acero – acero, I_{\perp} [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$] es el momento de inercia del juego respecto a un eje perpendicular centrado (véase su cálculo en [5.A, pp. 81 y 82]) y ψ [rad] es el ángulo de lazo, el cual es variable, pero que tiene un máximo dependiente de la geometría del juego:

$$\psi_{m\acute{a}x} = \arcsen\left(\frac{2y_{m\acute{a}x}}{r + ky_{m\acute{a}x}}\right) \quad [Ec. I. 218]$$

siendo $y_{m\acute{a}x}$ [m] el máximo desplazamiento lateral admisible del eje, limitado por las pestañas de las ruedas.

Los valores de estos límites dependen de una gran cantidad de factores, como puede apreciarse. Por tanto, no se va a realizar un cálculo minucioso de los límites, sino que simplemente se va a realizar una observación acerca de su orden de magnitud.

En la misma referencia donde se demuestran las ecuaciones [5.A, pp. 40 – 55] se citan los valores de los límites para un vagón de mercancías de tipo cerrado (*boxcar*) de 6 ejes (12 ruedas) de EE. UU.: Cuando el vagón está vacío, su peso es 120.000 lb o unos 54.400 kg (unos 9.000 kg/eje). En este caso el límite inferior vale 11 mph o 17,6 km/h y el superior es 178 mph o 284,8 km/h. [5.A, p. 70]:

Esto quiere decir que, si el vagón vacío va a circular a 120 km/h, es más probable que no sufra el movimiento de lazo que que lo sufra, dado que 120 km/h está más cerca del límite inferior (unos 100 km/h de diferencia) que del superior (más de 160 km/h de diferencia).

Si se aumenta la carga por eje se está siempre del lado de la seguridad, tal como se desprende de las ecuaciones arriba mostradas. Así, si se asume una carga por eje de 20.000 kg:

$$v_c^{sup} = 284,8 \sqrt{\frac{20.000}{9.000}} = 424,55 \frac{km}{h}$$

$$v_c^{inf} = 17,6 \sqrt{\frac{20.000}{9.000}} = 26,24 \frac{km}{h}$$

La diferencia entre 424,55 km/h y 100 km/h supera con creces a la diferencia entre 100 km/h y 26,24 km/h ($324,55 > 73,76$ km/h), con lo cual es muy poco probable que aparezca el movimiento de lazo

con estas cargas tan elevadas. Esto es coherente con el hecho de que las fuerzas de adherencia son bastante mayores que las de inercia cuando la carga por eje es tan elevada.

Explicado esto, no se va a considerar el papel que puede llegar a jugar el movimiento de lazo en el desgaste cuando el tren avanza en línea recta. Únicamente se va a considerar el movimiento de lazo que aparece naturalmente cuando el tren entra o sale de una curva y los ejes adoptan una nueva posición de equilibrio tras un periodo transitorio de inestabilidad.

I.7. Regiones de la rueda y el carril donde se puede producir su contacto.

La rueda puede contactar en varias áreas distribuidas a lo ancho de la cabeza del carril y de la rueda. Distínguense las regiones de contacto A, B y C a lo ancho de la cabeza y de la rueda, las cuales se delimitan en la imagen que se muestra a continuación:

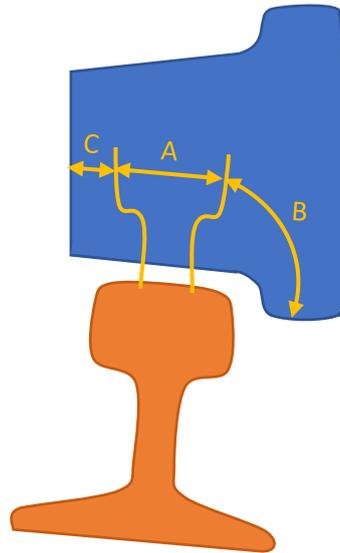


Figura I.29. Delimitación de las regiones de contacto A, B y C. Fuente: Elaboración propia.

Las características de cada región son:

- ✓ Región A: Se considera la banda de rodadura nominal de la rueda (donde está r_o). Esta zona de contacto es donde usualmente ocurre el contacto, que es cuando el vehículo ferroviario circula por vías rectas o por curvas de curvatura muy elevada.
- ✓ Región B: En ella contacta la pestaña de la rueda con la esquina interior de la cabeza del carril. Este contacto es muy frecuente en las curvas y se asocia en gran medida con el ángulo de ataque del primer juego de un bogie de dos ejes, siendo la pestaña de la rueda externa (a la curva) del primer juego la que más lo experimenta. Cuanto menor sea la curvatura, más frecuente y más agresivo (porque el ángulo de ataque es mayor) es este contacto en dicha rueda.

Como en esta región el contacto es mucho más pequeño que en la región A, produciéndose tensiones mucho mayores, lo cual acelera el desgaste. Debido a esto y a la posibilidad de que se produzca un flujo de material de la rueda y el carril, pueden aparecer contactos en dos puntos, llegando a producirse también contacto en la región A.

Este contacto es muy frecuente en curvas y se asocia en gran medida con el ángulo de ataque del primer juego de un bogie de dos ejes.

- ✓ Región C: En ella contacta el extremo exterior de la rueda con el extremo exterior del carril. No es usual que el contacto se produzca en esta zona, pero en dicho caso se generan tensiones indeseables que empeoran el desgaste de los componentes y que pueden ser causa de un manejo incorrecto del juego de ruedas [7, pp. 49 – 50].

En caso de que los perfiles de la rueda y el carril estén muy desgastados es muy posible que el contacto se dé mayoritariamente (incluso en tramos rectos) en la región B, lo cual resulta bastante desfavorable [5, p. 14]. En la siguiente imagen se puede apreciar este tipo de contacto, el cual se tratará de evitar mediante el reperfilado de las ruedas (proceso de rectificad) y de los carriles (proceso de esmerilado) [7, p. 14 y p. 76]:

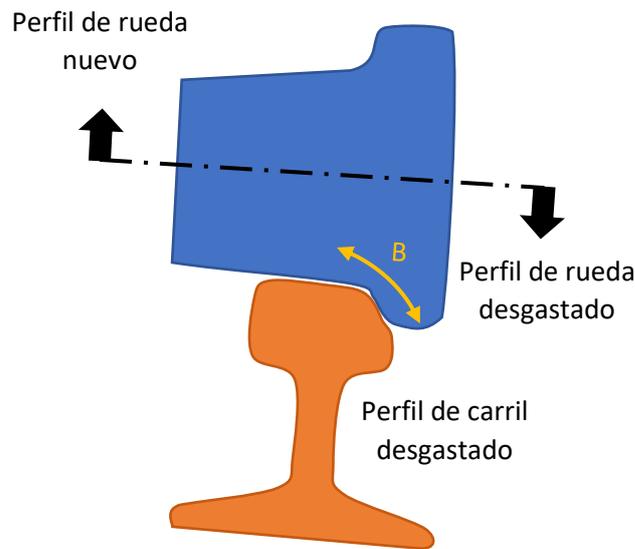


Figura I.30. Contacto en la región B debido a un excesivo desgaste del carril y de la rueda. Fuente: Elaboración propia.

Por último, hay que considerar que en esto también influye el juego de vía, que es la holgura existente entre las pestañas y los carriles [18.A, p. 28]. Este juego de vía viene determinado por las dimensiones del material rodante en relación con las del ancho de vía empleado, como a continuación se explica:

Si se utiliza material rodante concebido para un ancho de vía de 1.676 mm (ancho de vía de la India, Bangladés, Pakistán, Sri Lanka, Argentina, Chile y el metro de San Francisco; siendo denominado ancho indio) en ancho de vía ibérico, existirá compatibilidad, puesto que la diferencia es de tan solo 8 mm, por lo que la zona de contacto rueda – carril se desplazará 4 mm hacia la pestaña, acercándose al límite entre las regiones A y B o entrando en la región B (menor juego de vía). En tramos de vía rectos esto no es problemático, mas en tramos curvos sí lo es, dado que, en general, el desgaste será mayor en las curvas y será bastante más probable que se produzca el indeseable contacto pestaña – carril.

Por el contrario, emplear material rodante concebido para ancho ibérico en el ancho de 1.676 mm (ancho indio) será más favorable, ya que la zona de contacto se desplazará 4 mm en sentido opuesto a la pestaña, acercándose al límite entre las regiones A y C o entrando en la región C; si bien esto podría causar una mayor inestabilidad al circular a altas velocidades (debido a la existencia de un

mayor juego de vía, con lo que $y_{m\acute{a}x}$ aumenta e $\psi_{m\acute{a}x}$ también, en virtud de la ecuación I.218, lo cual causa la disminución de la v_c^{inf} del movimiento de lazo según la ecuación I.217) [24.A], [25.A]. De hecho, en España se decidió reducir el juego de vía en 1955 para elevar las velocidades, para lo cual se adoptó 1.668 mm como el ancho ibérico definitivo y se transformaron la mayoría de las líneas a este ancho [14.A, p. 22].

Anexo II. Ajustes polinómicos de coeficientes.

II.1. Coeficientes de Hertz.

II.1.1. Coeficiente m_H .

El coeficiente $m_H [\phi]$ de Hertz es aquel que se utiliza para el cálculo del semieje a [m] de la elipse de Hertz, semieje que es directamente proporcional a este coeficiente. m_H puede expresarse únicamente en función del ángulo θ [°], ángulo que a su vez depende de los coeficientes de curvatura A [m⁻¹] y B [m⁻¹]. Esto es, *grosso modo*, un resumen de lo explicado en la [subsección 4.4.3](#) acerca de la elipse de Hertz.

Lo que se va a buscar es, partiendo de datos tabulados, un ajuste polinómico $m_H - \theta$ de un grado n tal que permita una gran precisión, expresada esta en términos del coeficiente de determinación R^2 , coeficiente que deberá permanecer lo más próximo a la unidad que sea posible.

Este ajuste puede realizarse de dos formas distintas:

- ✓ En el programa *Microsoft Excel*, el cual permite la realización de regresiones lineales o polinómicas hasta un grado $n = 6$.
- ✓ En el programa EES, el cual puede realizar un ajuste de grado $n - 1$ mediante la resolución de un sistema n ecuaciones con n incógnitas (siendo las incógnitas los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ del polinomio).

Para comenzar, se tabulan los valores de m_H en función de los valores de θ , todos los cuales se toman de la tabla 4.1:

Tabla II.1. Valores de m_H en función de los valores de θ . Fuente: Tabla 4.1.

θ [°]	m_H [ϕ]
0	∞
5	11,238
10	6,612
30	2,731
60	1,486
90	1
120	0,717
150	0,493
170	0,311
175	0,238
180	0

En vista de estos valores, dos problemas se presentan:

- ✓ No es posible ajustar el punto $(0, \infty)$. Si se escogen valores muy elevados, concretamente más de 3 órdenes de magnitud por encima del siguiente punto $(5, 11,238)$ la curva polinómica adquiere un gran radio de curvatura en el tramo $(0, 5)$ y deja de pasar por los demás puntos.

- ✓ El punto (180, 0) dificulta el ajuste porque no es fácil lograr que la función se anule (tenga una raíz) en dicho punto.

Para solucionar estos problemas se toman dos medidas:

- ✓ Eliminación del tramo [0,5) del ajuste.
- ✓ Modificación del punto (180, 0) al punto (180, 0,001).

II.1.1.1. Ajuste en Microsoft Excel.

Tomadas estas medidas se procede al ajuste en *Microsoft Excel*, para lo cual se selecciona la opción “agregar línea de tendencia polinómica de grado 6”. El resultado es el que sigue:

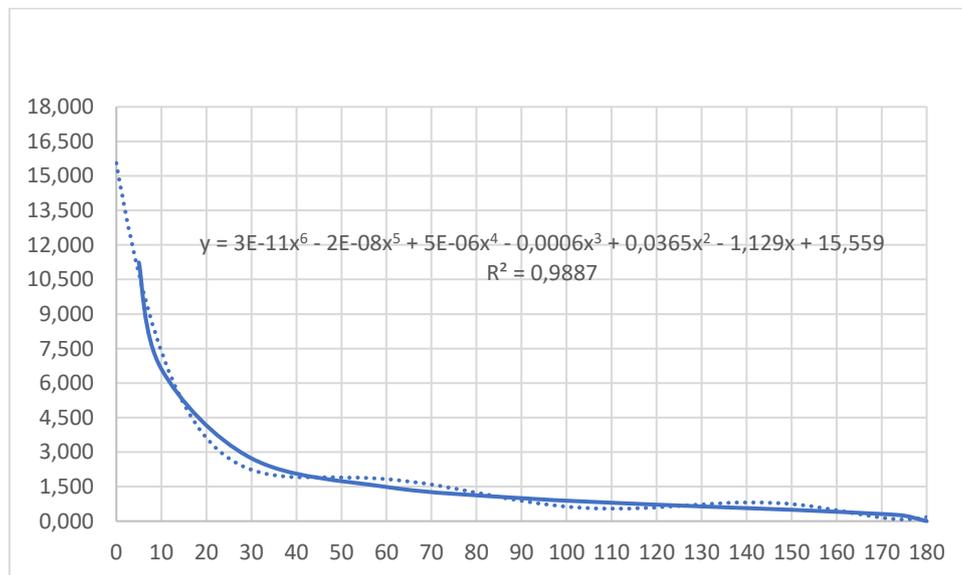


Figura II.1. Curva original de m_H suavizada (trazo grueso y continuo) y línea de tendencia (trazo fino y discontinuo).

Transcribiendo la ecuación para expresarla en términos de θ y m_H :

$$\theta = 3 \cdot 10^{-11} m_H^6 - 2 \cdot 10^{-8} m_H^5 + 5 \cdot 10^{-6} m_H^4 - 6 \cdot 10^{-4} m_H^3 + 3,65 \cdot 10^{-2} m_H^2 - 1,129 m_H + 15,559 \quad [Ec. II. 1]$$

A simple vista pareciera que el ajuste es bueno, ya que la línea de tendencia (la ajustada, representada finamente en color azul y a trazos) permanece próxima a la curva original (una curva interpolada y suavizada por Excel, representada gruesamente en color azul y continuamente). Además, el coeficiente de determinación R^2 toma el valor de 0,9887, que es muy próximo a la unidad.

No obstante, al cotejar los resultados del ajuste ($m_{H,aj}$, obtenidos mediante la ecuación II.1) con los valores originales de m_H es posible ver que la desviación es importante desde el principio. Abajo, los valores de esta comparación:

Tabla II.2. Cotejado de los valores originales de m_H con los ajustados.

θ [°]	m_H [ϕ]	$m_{H,aj}$ [ϕ]
0	∞	15,558
5	11,238	10,754
10	6,612	7,366
30	2,731	1,924
60	1,486	0,266
90	1	-1,907
120	0,717	-2,406
150	0,493	-3,323
170	0,311	-8,859
175	0,238	-11,307
180	0	-14,231

Como se puede apreciar, los errores son gigantescos y son crecientes con el valor de θ . Aunque esta imprecisión parezca contradecir el hecho de que $R^2 \approx 1$ implica un buen ajuste, esto no es así, ya que en este caso $R^2 \approx 1$ implica un buen ajuste si se tiene en cuenta la totalidad del dominio de la función $(-\infty, \infty)$; y en este caso lo que se tiene es una fracción del dominio muy pequeña: [5,180].

Para tratar de paliar esto, otros ajustes se probaron en Excel, como el logarítmico, exponencial y potencial. El primero arrojó un $R^2 = 0,919$, el segundo $R^2 = 0,622$ y el tercero $R^2 = 0,506$. Como los tres se alejan de la unidad, ninguno de los tres resultó satisfactorio.

II.1.1.2. Ajuste en el EES.

Como consecuencia del fracaso de los ajustes realizados en Excel, se recurrió al EES para la realización del ajuste. Para ello, en el EES se introdujo el siguiente sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas, a partir de los puntos de la tabla II.1 y habiendo efectuado las modificaciones explicitadas debajo de dicha tabla:

$$\begin{pmatrix} 11,238 \\ 6,612 \\ 2,731 \\ 1,486 \\ 1 \\ 0,747 \\ 0,493 \\ 0,311 \\ 0,238 \\ 0,001 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 5^0 \\ 10^0 \\ 30^0 \\ 60^0 \\ 90^0 \\ 120^0 \\ 150^0 \\ 170^0 \\ 175^0 \\ 180^0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 30 \\ 60 \\ 90 \\ 120 \\ 150 \\ 170 \\ 175 \\ 180 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5^2 \\ 10^2 \\ 30^2 \\ 60^2 \\ 90^2 \\ 120^2 \\ 150^2 \\ 170^2 \\ 175^2 \\ 180^2 \end{pmatrix} + \dots + c_9 \begin{pmatrix} 5^9 \\ 10^9 \\ 30^9 \\ 60^9 \\ 90^9 \\ 120^9 \\ 150^9 \\ 170^9 \\ 175^9 \\ 180^9 \end{pmatrix} \quad [Ec. II. 2]$$

donde c_0 [ϕ], c_1 [$1/\phi$], c_2 [$1/(\phi^2)$], ..., c_9 [$1/(\phi^9)$], es decir, los coeficientes de los monomios que componen el polinomio de grado 9, son las incógnitas de este sistema.

El EES resuelve este sistema y determina los valores de las 10 incógnitas. Con estos coeficientes se puede componer la ecuación polinómica buscada:

$$m_H = 19,98 - 2,316 \theta + 0,1328 \theta^2 - 4,176 \cdot 10^{-3} \theta^3 + 7,84 \cdot 10^{-5} \theta^4 - 9,186 \cdot 10^{-7} \theta^5 + 6,781 \cdot 10^{-9} \theta^6 - 3,067 \cdot 10^{-11} \theta^7 + 7,764 \cdot 10^{-14} \theta^8 - 8,425 \cdot 10^{-17} \theta^9 \quad [Ec. II.3]$$

El coeficiente de determinación de este modelo se puede calcular mediante la ecuación habitual [26.A]:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=0}^n (m_{H,aj} - \bar{m}_H)^2}{\sum_{i=0}^n (m_H - \bar{m}_H)^2} \quad [Ec. II.4]$$

En este caso, $m_{H,aj} = m_H$ porque es la condición que se ha impuesto en las 10 ecuaciones compuestas a partir de los 10 puntos correspondientes, por lo que $R^2 = 1$.

Por lo tanto, se ha obtenido un polinomio de grado 9 (10 coeficientes) que calcula los valores exactos de m_H para $\theta = 5, 10, 30, 60, 90, 120, 150, 170, 175$ y 180° , y entre estas abscisas ejecuta una interpolación polinómica de grado 9, por lo que el grado de exactitud de m_H es bastante elevado en el rango de trabajo.

En el EES también es posible graficar la curva, lo cual se realiza a continuación para así poder visualizarla:

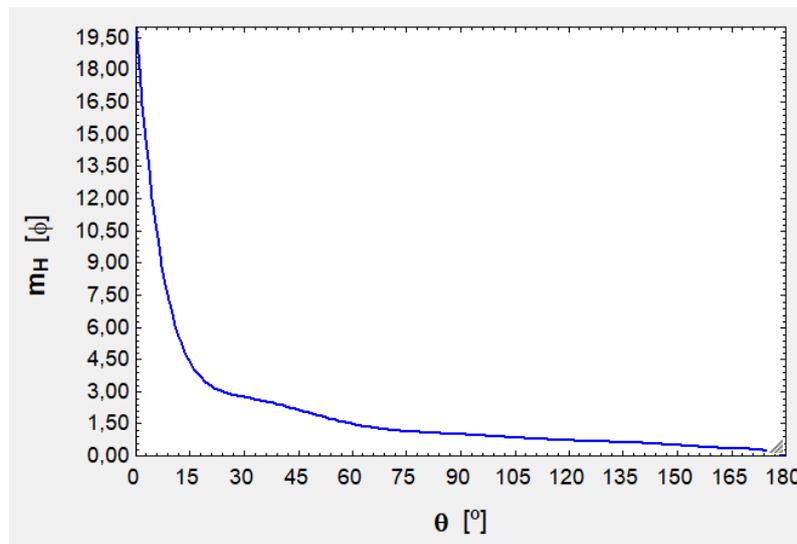


Figura II.2. Curva $m_H - \theta$ ajustada y representada en el EES.

En la gráfica se ha realizado la extrapolación para el tramo $[0,5)$. Como se ve, en $\theta = 0^\circ$ se tiene $m_H = 19,58$, valor bastante impreciso, en tanto que $19,58 \ll \infty$. Esto implica que, por debajo de 5° , el ajuste es pésimo (a no ser que $\theta \approx 5^\circ$ por debajo). Sin embargo, esto no acarrea ningún problema, ya que es altamente improbable obtener $\theta < 5^\circ$ al ser este un extremo de la gráfica.

Esta curva es semejante, a excepción del tramo $[0,5)$, a la curva de m_H presentada en la [subsección 4.4.3](#) acerca de la elipse de Hertz. Allí se muestra la figura 4.7, la cual se repite a continuación:

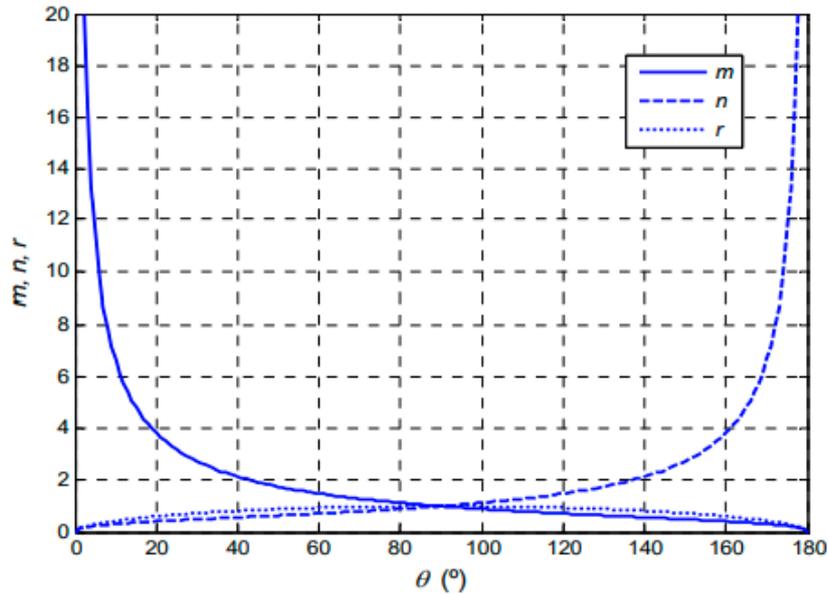


Figura II.3. Graficación de m_H junto con n_H y r_H . Repetición de la figura 4.7. Fuente: [6, p. 39].

Comparando visualmente ambas curvas se observa que la mayor divergencia se produce en el tramo (30,45], donde la gráfica fruto del ajuste se eleva un poco más que la real. También se aprecia cierta divergencia en el tramo (60,75], aunque menor en esta ocasión.

II.1.2. Coeficiente n_H .

Tal como se aprecia en la figura II.3, las curvas m_H y n_H son simétricas respecto de un eje vertical virtual que cortaría el eje de abscisas por $\theta = 90^\circ$. Es posible aprovechar esta simetría para inferir la curva de n_H a partir del ajuste realizado para m_H (ecuación II.3). Para ello, basta con realizar el siguiente cambio, el cual no es más que una alteración del origen de θ :

$$m_H(\theta) = n_H(180^\circ - \theta) \quad [Ec. II. 5]$$

Aplicando esto a la ecuación II.3, queda esto:

$$n_H = 19,98 - 2,316 (180 - \theta) + 0,1328 (180 - \theta)^2 - 4,176 \cdot 10^{-3} (180 - \theta)^3 + 7,84 \cdot 10^{-5} (180 - \theta)^4 - 9,186 \cdot 10^{-7} (180 - \theta)^5 + 6,781 \cdot 10^{-9} (180 - \theta)^6 - 3,067 \cdot 10^{-11} (180 - \theta)^7 + 7,764 \cdot 10^{-14} (180 - \theta)^8 - 8,425 \cdot 10^{-17} (180 - \theta)^9 \quad [Ec. II. 6]$$

En cuanto a la gráfica de este polinomio, coincide con la figura II.2, tras aplicarle un giro de 180° en torno al eje vertical virtual previamente citado. Si se representa en el EES se obtiene:

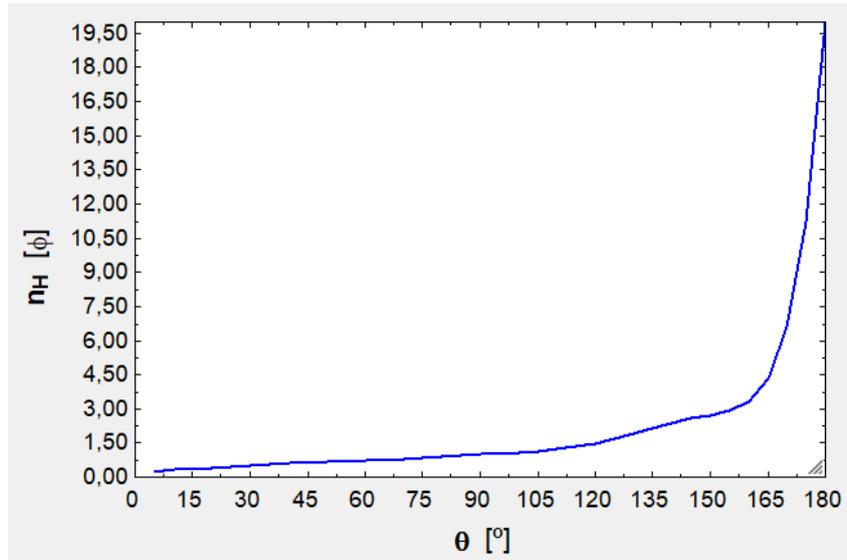


Figura II.4. Curva $n_H - \theta$ ajustada y representada en el EES.

En la gráfica se ha realizado la extrapolación para el tramo $(175,180]$. Como se ve, en $\theta = 180^\circ$ se tiene $m_H = 19,58$, valor bastante impreciso, en tanto que $19,58 \ll \infty$. Esto implica que, por encima de 175° , el ajuste es pésimo (a no ser que $\theta \approx 175^\circ$ por encima). Sin embargo, esto no acarrea ningún problema, ya que es altamente improbable obtener $\theta > 175^\circ$ al ser este un extremo de la gráfica.

Por otro lado, se trata de una curva cuyos defectos se presentan trasladados $(180^\circ - \theta)$ con respecto al caso previo. Es decir, ahora los defectos aparecen en los tramos $[135, 150)$ y $[105, 120)$, tal como se puede corroborar en la imagen.

II.1.3. Coeficiente r_H .

II.1.3.1. Ajuste por el cauce habitual.

Para el ajuste del coeficiente de Hertz r_H se procede exactamente igual que en el caso de m_H . Para comenzar, se tabulan los valores de r_H en función del ángulo θ . Estos valores se extraen nuevamente de la tabla 4.1:

Tabla II.3. Valores de r_H en función de los valores de θ . Fuente: Tabla 4.1.

θ [°]	r_H [ϕ]
0	0
5	0,2969
10	0,4280
30	0,7263
60	0,9376
90	1
120	0,9376
150	0,7263
170	0,4280
175	0,2969
180	0

En este caso también se utiliza 0,001 en vez de 0 con objeto de facilitar el ajuste y se plantea un sistema de ecuaciones análogo al de la ecuación II.2, pero con 11 ecuaciones (no se puede eliminar ninguna porque se busca un polinomio simétrico respecto al eje secante con el eje de abscisas en $\theta = 90^\circ$):

$$\begin{pmatrix} 0,001 \\ 0,2969 \\ 0,4280 \\ 0,7263 \\ 0,9376 \\ 1 \\ 0,9376 \\ 0,7263 \\ 0,4280 \\ 0,2969 \\ 0,001 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 0^0 \\ 5^0 \\ 10^0 \\ 30^0 \\ 60^0 \\ 90^0 \\ 120^0 \\ 150^0 \\ 170^0 \\ 175^0 \\ 180^0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0^1 \\ 5^1 \\ 10^1 \\ 30^1 \\ 60^1 \\ 90^1 \\ 120^1 \\ 150^1 \\ 170^1 \\ 175^1 \\ 180^1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0^2 \\ 5^2 \\ 10^2 \\ 30^2 \\ 60^2 \\ 90^2 \\ 120^2 \\ 150^2 \\ 170^2 \\ 175^2 \\ 180^2 \end{pmatrix} + \dots + c_{10} \begin{pmatrix} 0^{10} \\ 5^{10} \\ 10^{10} \\ 30^{10} \\ 60^{10} \\ 90^{10} \\ 120^{10} \\ 150^{10} \\ 170^{10} \\ 175^{10} \\ 180^{10} \end{pmatrix} \quad [Ec. II. 7]$$

donde c_0 [ϕ], c_1 [$1/^\circ$], c_2 [$1/(\text{°})^2$], ..., c_{10} [$1/(\text{°})^{10}$], es decir, los coeficientes de los monomios que componen el polinomio de grado 10, son las incógnitas de este sistema.

Este sistema puede simplificarse de la siguiente manera: En $\theta = 0^\circ$ se tiene $r_H = 0,001 \approx 0$, por lo que c_0 debe valer 0 para que esto se cumpla. Con esto se puede deducir una ecuación del sistema, si bien esto no reduce el grado del polinomio, el cual se mantiene en 10.

Por otro lado, la simetría genera incompatibilidades en el sistema: Resulta que las ecuaciones de la fila 2 ($\theta = 5^\circ$) y de la fila 9 ($\theta = 175^\circ$) tienen el primer miembro igual (0,2969), pero no así su segundo miembro, el cual difiere. Si se comparan ambas, se observa lo siguiente:

$$0,2969 = c_1 5^0 + c_2 5^2 + \dots + c_{10} 5^{10} \leftrightarrow 0,2969 = c_1 175^0 + c_2 175^2 + \dots + c_{10} 175^{10}$$

No es posible hallar unos coeficientes únicos c_1, c_2, \dots, c_{10} que satisfagan ambas ecuaciones al mismo tiempo (lo mismo sucede con las filas 3 y 8, la 4 y 7 y la 5 y 6). Para solucionar esto, se ajusta solamente el tramo $[0,90]$ y se halla el polinomio correspondiente, y después se halla el polinomio para el tramo $[90,180]$ valiéndose de la simetría, de modo que se asegure la continuidad entre tramos en $\theta = 90^\circ$.

Teniendo en cuenta todo cuanto se ha relatado, se resuelve este sistema en el EES:

$$\begin{pmatrix} 0,2969 \\ 0,4280 \\ 0,7263 \\ 0,9376 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5^1 \\ 10^1 \\ 30^1 \\ 60^1 \\ 90^1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5^2 \\ 10^2 \\ 30^2 \\ 60^2 \\ 90^2 \end{pmatrix} + \dots + c_5 \begin{pmatrix} 5^5 \\ 10^5 \\ 30^5 \\ 60^5 \\ 90^5 \end{pmatrix} \quad [Ec. II. 8]$$

Insertando los coeficientes obtenidos en una ecuación polinómica, esto es lo que se tiene:

$$r_H = 8,444 \cdot 10^{-2} \theta - 6,006 \cdot 10^{-3} \theta^2 + 2,146 \cdot 10^{-4} \theta^3 - 3,193 \cdot 10^{-6} \theta^4 + 1,611 \cdot 10^{-8} \theta^5 \quad [Ec. II. 9]$$

Mientras que, para el tramo [90,180], lo que se tiene es, aplicando la traslación por simetría:

$$r_H = 8,444 \cdot 10^{-2} (180 - \theta) - 6,006 \cdot 10^{-3} (180 - \theta)^2 + 2,146 \cdot 10^{-4} (180 - \theta)^3 - 3,193 \cdot 10^{-6} (180 - \theta)^4 + 1,611 \cdot 10^{-8} (180 - \theta)^5 \quad [Ec. II. 10]$$

La gráfica asociada a esta función (trozos $r_H(\theta) + r_H(180^\circ - \theta)$) es la que sigue:

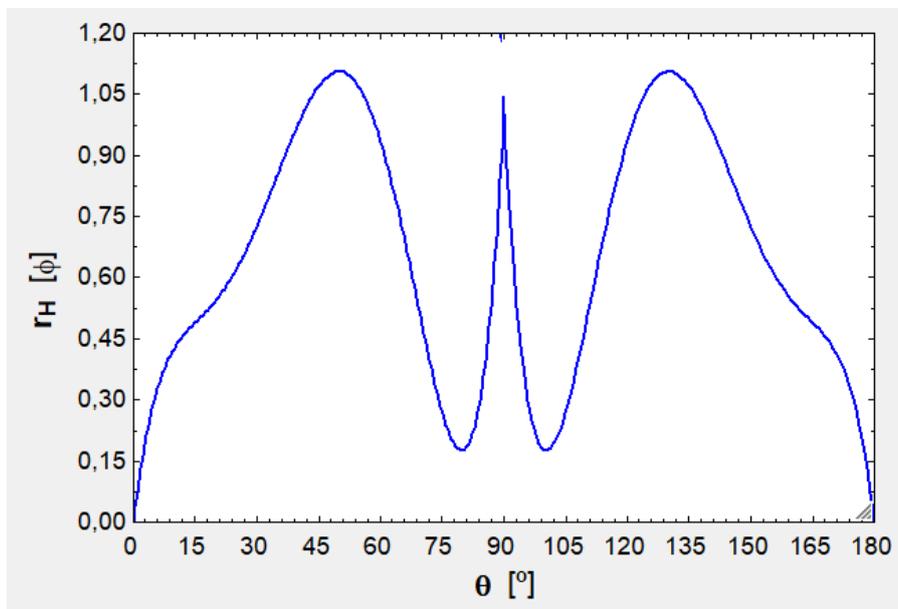


Figura II. 5. Ajuste de la relación $r_H - \theta$ realizado por el cauce habitual.

Esta curva no se corresponde con la función $r_H(\theta)$ real, que es la representada en la figura II.3, a pesar de que el coeficiente R^2 (ecuación II.4) sale 1 al calcularlo en los puntos introducidos en el sistema de ecuaciones (por la imposición $r_H = r_{H,aj}$). No obstante, entre las abscisas de cálculo los errores son apreciables, sobre todo en el punto medio (o cerca de él) entre cada par de abscisas (con la excepción de los extremos, donde hay una mejora sustancial debido a la cercanía entre 0, 5 y 10°).

Por lo tanto, se hace necesario un reajuste de la curva para aumentar precisión en los intervalos.

II.1.3.2. Primer reajuste.

Para reajustar la curva se van a tomar más puntos. Estos puntos no constan en la tabla 4.1, pero sí en la figura II.3/4.7. Estos puntos van a tomarse en $\theta = 45^\circ$ y en $\theta = 75^\circ$, que es donde la ecuación II.9 (y la II.10 a partir de 90°) falla más.

Al emplear la gráfica II.3 se obtiene $r_H \approx 0,8$ en $\theta = 45^\circ$ y $r_H \approx 0,96$ en $\theta = 75^\circ$. Estos puntos se añaden al sistema de ecuaciones II.8, buscando así un polinomio de grado 7:

$$\begin{pmatrix} 0,2969 \\ 0,4280 \\ 0,7263 \\ 0,8 \\ 0,9376 \\ 0,96 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5^1 \\ 10^1 \\ 30^1 \\ 45^1 \\ 60^1 \\ 75^1 \\ 90^1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5^2 \\ 10^2 \\ 30^2 \\ 45^2 \\ 60^2 \\ 75^2 \\ 90^2 \end{pmatrix} + \dots + c_7 \begin{pmatrix} 5^7 \\ 10^7 \\ 30^7 \\ 45^7 \\ 60^7 \\ 75^7 \\ 90^7 \end{pmatrix} \quad [Ec. II. 11]$$

El resultado es el que sigue:

$$r_H = 9,058 \cdot 10^{-2} \theta - 8,284 \cdot 10^{-3} \theta^2 + 4,786 \cdot 10^{-4} \theta^3 - 1,516 \cdot 10^{-5} \theta^4 + 2,582 \cdot 10^{-7} \theta^5 - 2,211 \cdot 10^{-9} \theta^6 + 7,448 \cdot 10^{-12} \theta^7 \quad [Ec. II. 12]$$

Mientras que, para el tramo $[90,180]$, lo que se tiene es, aplicando la traslación por simetría:

$$r_H = 9,058 \cdot 10^{-2} (180 - \theta) - 8,284 \cdot 10^{-3} (180 - \theta)^2 + 4,786 \cdot 10^{-4} (180 - \theta)^3 - 1,516 \cdot 10^{-5} (180 - \theta)^4 + 2,582 \cdot 10^{-7} (180 - \theta)^5 - 2,211 \cdot 10^{-9} (180 - \theta)^6 + 7,448 \cdot 10^{-12} (180 - \theta)^7 \quad [Ec. II. 13]$$

La gráfica asociada a esta función (trozos $r_H(\theta) + r_H(180^\circ - \theta)$) es la que sigue:

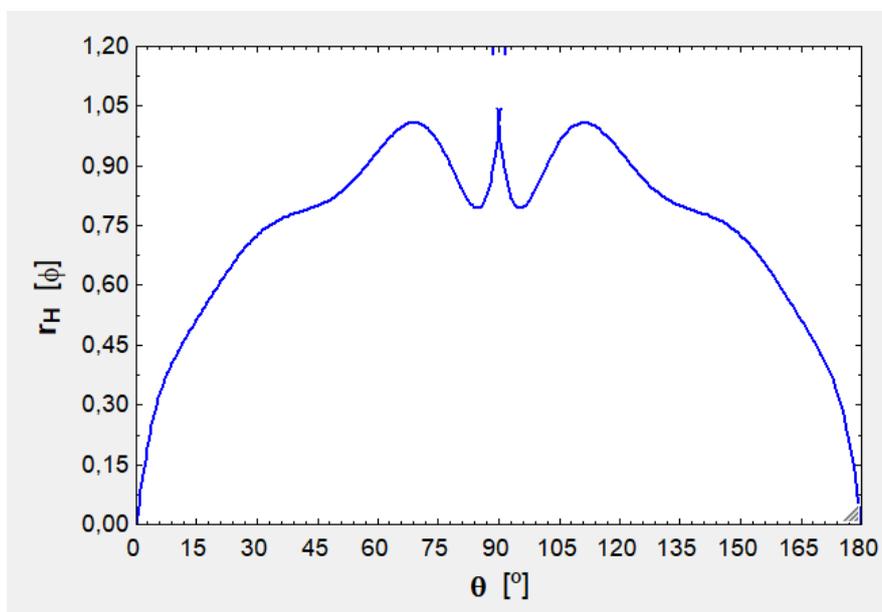


Figura II.6. Primer reajuste de la relación $r_H - \theta$.

Este reajuste es mucho mejor que el representado en la figura II.5, pero falla bastante en las proximidades de 90° y en las de 60° en menor medida, existiendo todavía cierto margen de mejora.

II.1.3.3 Segundo reajuste.

En este segundo reajuste se toman dos puntos más: En $\theta = 52,5^\circ$, donde $r_H \approx 0,86$ y en $\theta = 82,5^\circ$, donde $r_H \approx 0,98$. Ahora se busca obtener un polinomio de grado nono, al igual que en m_H y n_H :

$$\begin{pmatrix} 0,2969 \\ 0,4280 \\ 0,7263 \\ 0,8 \\ 0,86 \\ 0,9376 \\ 0,96 \\ 0,98 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5^1 \\ 10^1 \\ 30^1 \\ 45^1 \\ 52,5^1 \\ 60^1 \\ 75^1 \\ 82,5^1 \\ 90^1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5^2 \\ 10^2 \\ 30^2 \\ 45^2 \\ 52,5^2 \\ 60^2 \\ 75^2 \\ 82,5^2 \\ 90^2 \end{pmatrix} + \dots + c_9 \begin{pmatrix} 5^9 \\ 10^9 \\ 30^9 \\ 45^9 \\ 52,5^9 \\ 60^9 \\ 75^9 \\ 82,5^9 \\ 90^9 \end{pmatrix} \quad [Ec. II. 14]$$

El resultado es el que sigue:

$$r_H = 9,02 \cdot 10^{-2} \theta - 8,081 \cdot 10^{-3} \theta^2 + 4,378 \cdot 10^{-4} \theta^3 - 1,123 \cdot 10^{-5} \theta^4 + 6,166 \cdot 10^{-8} \theta^5 + 3,149 \cdot 10^{-9} \theta^6 - 7,296 \cdot 10^{-11} \theta^7 + 6,214 \cdot 10^{-13} \theta^8 - 1,929 \cdot 10^{-15} \theta^9 \quad [Ec. II. 15]$$

Mientras que, para el tramo $[90,180]$, lo que se tiene es, aplicando la traslación por simetría:

$$r_H = 9,02 \cdot 10^{-2} (180 - \theta) - 8,081 \cdot 10^{-3} (180 - \theta)^2 + 4,378 \cdot 10^{-4} (180 - \theta)^3 - 1,123 \cdot 10^{-5} (180 - \theta)^4 + 6,166 \cdot 10^{-8} (180 - \theta)^5 + 3,149 \cdot 10^{-9} (180 - \theta)^6 - 7,296 \cdot 10^{-11} (180 - \theta)^7 + 6,214 \cdot 10^{-13} (180 - \theta)^8 - 1,929 \cdot 10^{-15} (180 - \theta)^9 \quad [Ec. II. 16]$$

La gráfica asociada a esta función (trozos $r_H(\theta) + r_H(180^\circ - \theta)$) es la que sigue:

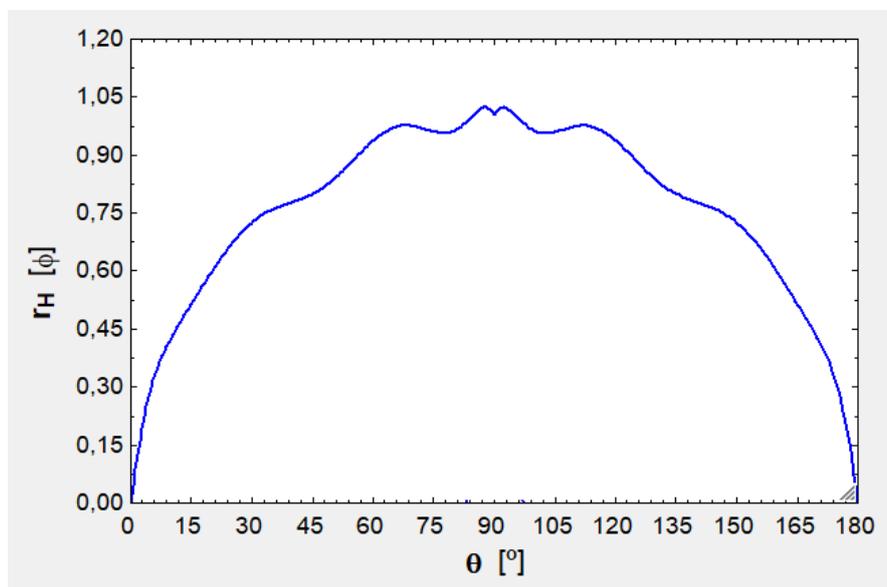


Figura II.7. Segundo reajuste de la relación $r_H - \theta$.

Conclúyese que este es el ajuste más preciso de todos y que las interpolaciones polinómicas en los intervalos no se desvían demasiado respecto de los valores reales (los de la figura II.3).

II.2. Coeficientes de Kalker.

En el caso de los coeficientes de Kalker se toma como referencia la siguiente tabla, la 4.2. En esta tabla se aprecia una doble dependencia: para con la ratio a/b , por un lado, y para con el módulo de Poisson ν por el otro lado (este es el módulo equivalente de los dos materiales en contacto). No obstante, en la tabla 4.2 solo se muestran los valores de los coeficientes para $\nu = 0$ y $\nu = 0,50$, obviando lo que sucede para módulos de Poisson intermedios y típicos del acero ($\nu \approx 0,30$).

Para solventar esto, se recurre a esta tabla, extraída de otra fuente:

Tabla II.4. Coeficientes de Kalker con la dependencia respecto al módulo de Poisson mejor apreciable.
Fuente: [27.A]

a/b	C₁₁			C₂₂			C₂₃		
	<u>$\sigma = 0$</u>	<u>0.25</u>	<u>0.5</u>	<u>$\sigma = 0$</u>	<u>0.25</u>	<u>0.5</u>	<u>$\sigma = 0$</u>	<u>0.25</u>	<u>0.5</u>
0.1	2.51	3.31	4.85	2.51	2.52	2.53	0.334	0.473	0.731
0.2	2.59	3.37	4.81	2.59	2.63	2.66	0.483	0.603	0.809
0.3	2.68	3.44	4.80	2.68	2.75	2.81	0.607	0.715	0.889
0.4	2.78	3.53	4.82	2.78	2.88	2.98	0.720	0.823	0.977
0.5	2.88	3.62	4.83	2.88	3.01	3.14	0.827	0.929	1.07
0.6	2.98	3.72	4.91	2.98	3.14	3.31	0.930	1.03	1.18
0.7	3.09	3.81	4.97	3.09	3.28	3.48	1.03	1.14	1.29
0.8	3.19	3.91	5.05	3.19	3.41	3.65	1.13	1.25	1.40
0.9	3.29	4.01	5.12	3.29	3.54	3.82	1.23	1.36	1.51
1.0	3.40	4.12	5.20	3.40	3.67	3.98	1.33	1.47	1.63
1.11	3.51	4.22	5.30	3.51	3.81	4.16	1.44	1.59	1.77
1.25	3.65	4.36	5.42	3.65	3.99	4.39	1.58	1.75	1.94
1.43	3.82	4.54	5.58	3.82	4.21	4.67	1.76	1.95	2.18
1.67	4.06	4.78	5.80	4.06	4.50	5.04	2.01	2.23	2.50
2.00	4.37	5.10	6.11	4.37	4.90	5.56	2.35	2.62	2.96
2.50	4.84	5.57	6.57	4.84	5.48	6.31	2.88	3.24	3.70
3.33	5.57	6.34	7.34	5.57	6.40	7.51	3.79	4.32	5.01
5.0	6.96	7.78	8.82	6.96	8.14	9.79	5.72	6.63	7.89
10	10.7	11.7	12.9	10.7	12.8	16.0	12.2	14.6	18.0

II.2.1. Coeficiente C_{11} .

En la tabla recién presentada se ve que, para cada coeficiente valor de la ratio a/b , existen 3 valores del coeficiente C_{11} diferentes, uno para $\nu = 0$, otro para $\nu = 0,25$ y el último para $\nu = 0,50$. Es necesario un ajuste en 3 pasos:

1. Ajuste $C_{11} - \nu$ para cada valor de a/b . En total, 19 ajustes.
2. Cálculo de un valor único de C_{11} para cada valor de a/b de acuerdo con el ν del acero.
3. Ajuste $C_{11} - (a/b)$ una vez obtenido los valores únicos de C_{11} .

A continuación, todos estos pasos se desarrollan exhaustivamente.

II.2.1.1. Ajuste $C_{11} - \nu$ para cada valor de a/b .

De la tabla II.4 se desprende que la evolución de C_{11} con ν es prácticamente lineal para cada valor de a/b , ya que $C_{11}(\nu = 0,25)$ es prácticamente la media aritmética de $C_{11}(\nu = 0)$ y $C_{11}(\nu = 0,50)$. Podría obviarse la reducida falta de linealidad, pero, en vez de obviarla, se va a tener en cuenta mediante la proposición de un ajuste parabólico.

Este ajuste parabólico se presenta a continuación para $a/b = 0,1$:

$$\begin{pmatrix} 2,51 \\ 3,31 \\ 4,85 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 0^0 \\ 0,25^0 \\ 0,50^0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0^1 \\ 0,25^1 \\ 0,50^1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0^2 \\ 0,25^2 \\ 0,50^2 \end{pmatrix} \quad [Ec. II. 17]$$

donde c_0 , c_1 y c_2 [ϕ] son los coeficientes parabólicos.

Lo mismo se plantea para las demás ratios a/b (0,2, 0,3, 0,4, ..., 1; más los valores informemente distribuidos hasta llegar a la ratio $a/b = 10$). En total, 19 ajustes. Estos ajustes se plantean en el EES a través de una tabla paramétrica, de modo que se obtengan los 57 coeficientes necesarios (19 ajustes por 3 coeficientes en cada uno de ellos).

Estos 57 coeficientes c_0 , c_1 y c_2 se muestran abajo tabulados para cada razón a/b (a_b):

Tabla II.5. Ajustes parabólicos $C_{11} - v$ para cada valor de a/b .

a_b	c_0	c_1	c_2
0,10	2,51	1,72	5,92
0,20	2,59	1,80	5,28
0,30	2,68	1,84	4,80
0,40	2,78	1,92	4,32
0,50	2,88	2,02	3,76
0,60	2,98	2,06	3,60
0,70	3,09	2,00	3,52
0,80	3,19	2,04	3,36
0,90	3,29	2,10	3,12
1,00	3,40	2,16	2,88
1,11	3,51	2,10	2,96
1,25	3,65	2,14	2,80
1,43	3,82	2,24	2,56
1,67	4,06	2,28	2,40
2,00	4,37	2,36	2,24
2,50	4,84	2,38	2,16
3,33	5,57	2,62	1,84
5,00	6,96	2,84	1,76
10,00	10,70	3,60	1,60

II.2.1.2. Cálculo de un valor único de C_{11} para cada valor de a/b de acuerdo con el v del acero.

Una vez se han efectuado los 19 ajustes, el siguiente paso consiste en obtener un valor de C_{11} en uno de ellos, valor que ha de ser acorde al v del acero. En algunas simulaciones se toma este valor como 0,27 [7, p. 117], mientras que en otras se toma como 0,30 [6, p. 355] (estos módulos son los equivalentes de los aceros del carril y de la rueda en cada caso). Debido a esta discrepancia de valores, va a optarse por un valor promedio:

$$v = \frac{0,27 + 0,30}{2} = 0,285$$

Seguidamente, se ejecuta en el EES esta operación en las 19 filas de la tabla:

$$C_{11} = c_0 + c_1v + c_2v^2 \quad [Ec. II. 18]$$

Abajo se muestra el valor resultante de C_{11} para cada razón a/b (a_b en la tabla):

Tabla II.6. Valor único de C_{11} para cada razón a/b .

a/b	C_{11}
0,10	3,48
0,20	3,53
0,30	3,59
0,40	3,68
0,50	3,76
0,60	3,86
0,70	3,95
0,80	4,04
0,90	4,14
1,00	4,25
1,11	4,35
1,25	4,49
1,43	4,67
1,67	4,90
2,00	5,22
2,50	5,69
3,33	6,47
5,00	7,91
10,00	11,86

II.2.1.3. Ajuste $C_{11} - (a/b)$ una vez obtenido los valores únicos de C_{11} .

Finalmente, se efectúa el ajuste $C_{11} - (a/b)$. Hay 19 puntos, por lo que podría plantearse un ajuste polinómico de grado 19. Como consecuencia de la dificultad de manejar un polinomio de tal grado, van a plantearse dos polinomios:

- ✓ Un primer polinomio de grado no no entre $a/b = 0,1$ y $a/b = 1$.
- ✓ Uno segundo de grado no no entre $a/b = 1$ y $a/b = 10$.

Apréciase la repetición de $a/b = 1$, necesaria para asegurar la continuidad de la función $C_{11} - (a/b)$ a trozos definida.

Los sistemas de ecuaciones planteados son:

$$\begin{pmatrix} 3,481 \\ 3,532 \\ 3,594 \\ 3,678 \\ 3,761 \\ 3,860 \\ 3,946 \\ 4,044 \\ 4,142 \\ 4,250 \end{pmatrix} = c_{01} \begin{pmatrix} 0,1^0 \\ 0,2^0 \\ 0,3^0 \\ 0,4^0 \\ 0,5^0 \\ 0,6^0 \\ 0,7^0 \\ 0,8^0 \\ 0,9^0 \\ 1,0^0 \end{pmatrix} + c_{11} \begin{pmatrix} 0,1^1 \\ 0,2^1 \\ 0,3^1 \\ 0,4^1 \\ 0,5^1 \\ 0,6^1 \\ 0,7^1 \\ 0,8^1 \\ 0,9^1 \\ 1,0^1 \end{pmatrix} + \dots + c_{91} \begin{pmatrix} 0,1^9 \\ 0,2^9 \\ 0,3^9 \\ 0,4^9 \\ 0,5^9 \\ 0,6^9 \\ 0,7^9 \\ 0,8^9 \\ 0,9^9 \\ 1,0^9 \end{pmatrix} \quad [Ec. II. 19]$$

$$\begin{pmatrix} 4,250 \\ 4,349 \\ 4,487 \\ 4,666 \\ 4,905 \\ 5,225 \\ 5,694 \\ 6,466 \\ 7,912 \\ 11,856 \end{pmatrix} = c_{02} \begin{pmatrix} 1,00^0 \\ 1,11^0 \\ 1,25^0 \\ 1,43^0 \\ 1,67^0 \\ 2,00^0 \\ 2,50^0 \\ 3,33^0 \\ 5,00^0 \\ 10,00^0 \end{pmatrix} + c_{12} \begin{pmatrix} 1,00^1 \\ 1,11^1 \\ 1,25^1 \\ 1,43^1 \\ 1,67^1 \\ 2,00^1 \\ 2,50^1 \\ 3,33^1 \\ 5,00^1 \\ 10,00^1 \end{pmatrix} + \dots + c_{92} \begin{pmatrix} 1,00^9 \\ 1,11^9 \\ 1,25^9 \\ 1,43^9 \\ 1,67^9 \\ 2,00^9 \\ 2,50^9 \\ 3,33^9 \\ 5,00^9 \\ 10,00^9 \end{pmatrix} \quad [Ec. II. 20]$$

De este ajuste resultan estos trozos de la función $C_{11} - (a/b)$:

$$C_{11} = 0,652 + 76,252 \left(\frac{a}{b}\right) - 823,1 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4.777 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 16.561 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 35.998 \left(\frac{a}{b}\right)^5 \pm \\ -49.461 \left(\frac{a}{b}\right)^6 + 41.690 \left(\frac{a}{b}\right)^7 - 19.663 \left(\frac{a}{b}\right)^8 + 3.971 \left(\frac{a}{b}\right)^9, 0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \quad [Ec. II. 21]$$

$$C_{11} = 28,3 - 112,5 \left(\frac{a}{b}\right) + 221,4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 242,9 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 164,3 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 70,67 \left(\frac{a}{b}\right)^5 + 19,17 \left(\frac{a}{b}\right)^6 - \\ -3,131 \left(\frac{a}{b}\right)^7 + 2,759 \cdot 10^{-1} \left(\frac{a}{b}\right)^8 - 9,798 \cdot 10^{-3} \left(\frac{a}{b}\right)^9, \frac{a}{b} \geq 1 \quad [Ec. II. 22]$$

Cuando $a/b \rightarrow 0$, $C_{11} \rightarrow 0,652$, valor bastante inferior a C_{11} en $a/b = 0,1$ (3,48). Por tanto, este ajuste fallará bastante cuando $a/b \cong 0$, aunque esto resulta irrelevante dada la alta improbabilidad de esta situación.

Para finalizar, se presenta la función $C_{11} - (a/b)$ tras haberla representado gráficamente en el EES:

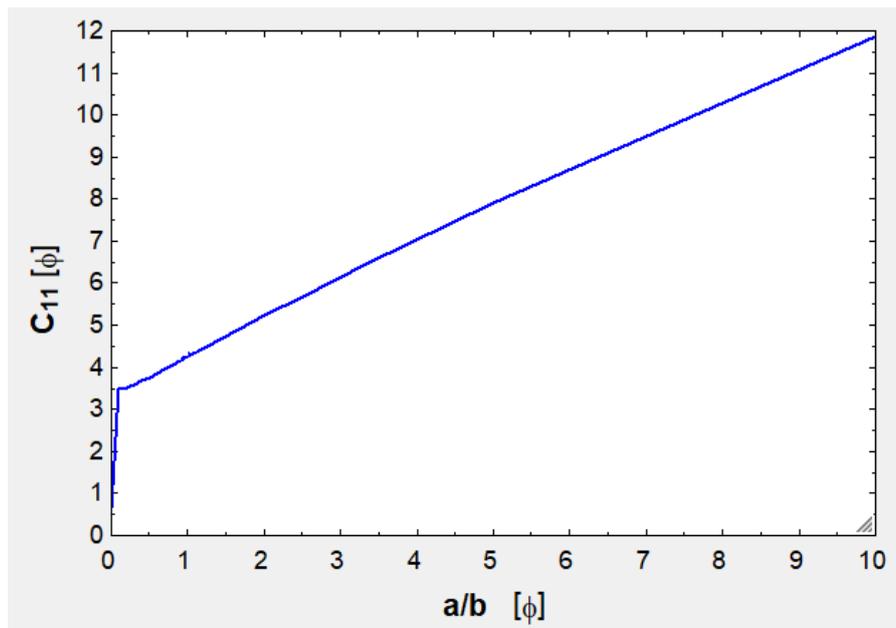


Figura II.8. Representación gráfica de la función $C_{11} - (a/b)$.

II.2.2. Coeficiente C_{22} .

El coeficiente C_{22} se va a ajustar de la misma manera que el C_{11} , siguiendo exactamente los mismos pasos. Por tanto, no se va a volver a describir el procedimiento, y simplemente se van a presentar los resultados de cada paso.

II.2.2.1. Resultados de los pasos 1 y 2.

Tabla II.7. Valor de C_{22} en $\nu = 0,285$ para cada uno de los 19 ajustes parabólicos $C_{22} - \nu$.

5	6	7	8	9
a_b	c_0	c_1	c_2	C_{22}
0,10	2,51	0,04	0,00	2,521
0,20	2,59	0,18	-0,08	2,635
0,30	2,68	0,30	-0,08	2,759
0,40	2,78	0,40	0,00	2,894
0,50	2,88	0,52	0,00	3,028
0,60	2,98	0,62	0,08	3,163
0,70	3,09	0,74	0,08	3,307
0,80	3,19	0,84	0,16	3,442
0,90	3,29	0,94	0,24	3,577
1,00	3,40	1,00	0,32	3,711
1,11	3,51	1,10	0,40	3,856
1,25	3,65	1,24	0,48	4,042
1,43	3,82	1,42	0,56	4,270
1,67	4,06	1,56	0,80	4,570
2,00	4,37	1,86	1,04	4,985
2,50	4,84	2,18	1,52	5,585
3,33	5,57	2,76	2,24	6,539
5,00	6,96	3,78	3,76	8,343
10,00	10,70	6,20	8,80	13,182

II.2.2.2. Resultados del paso 3.

$$C_{22} = 2,81 - 10,432 \left(\frac{a}{b}\right) + 134,8 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 850,1 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 3.214 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 7.568 \left(\frac{a}{b}\right)^5 + 11.165 \left(\frac{a}{b}\right)^6 - 10.012 \left(\frac{a}{b}\right)^7 + 4.980 \left(\frac{a}{b}\right)^8 - 1.053 \left(\frac{a}{b}\right)^9, 0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \quad [Ec. II. 23]$$

$$C_{22} = 33,73 - 143,1 \left(\frac{a}{b}\right) + 283,952 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 311,5 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 209,5 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 89,24 \left(\frac{a}{b}\right)^5 + 23,93 \left(\frac{a}{b}\right)^6 - 3,865 \left(\frac{a}{b}\right)^7 + 3,371 \cdot 10^{-1} \left(\frac{a}{b}\right)^8 - 1,187 \cdot 10^{-2} \left(\frac{a}{b}\right)^9, \frac{a}{b} \geq 1 \quad [Ec. II. 24]$$

Cuando $a/b \rightarrow 0$, $C_{22} \rightarrow 2,81$, valor superior a C_{22} en $a/b = 0,1$ (2,521), contrariándose así la tendencia ascendente de C_{22} con a/b . Por tanto, este ajuste fallará bastante cuando $a/b \cong 0$, aunque esto resulta irrelevante dada la alta improbabilidad de esta situación.

Esta tendencia ascendente se puede comprobar en la gráfica inferior:

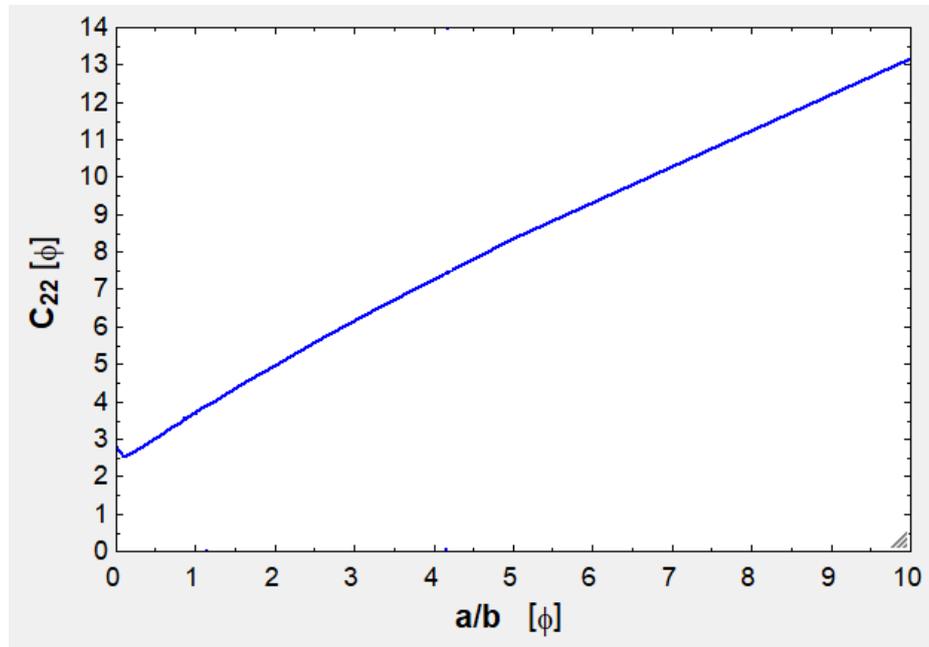


Figura II.9. Representación gráfica de la función $C_{22} - (a/b)$.

II.2.3. Coeficiente C_{23} .

El coeficiente C_{23} se va a ajustar de la misma manera que el C_{11} , siguiendo exactamente los mismos pasos. Por tanto, no se va a volver a describir el procedimiento, y simplemente se van a presentar los resultados de cada paso.

II.2.3.1. Resultados de los pasos 1 y 2.

Tabla II.8. Valor de C_{23} en $\nu = 0,285$ para cada uno de los 19 ajustes parabólicos $C_{23} - \nu$.

5	6	7	8	9
a_b	c_0	c_1	c_2	C_{23}
0,10	0,33	0,32	0,95	0,502
0,20	0,48	0,31	0,69	0,627
0,30	0,61	0,30	0,53	0,735
0,40	0,72	0,31	0,41	0,841
0,50	0,83	0,33	0,31	0,946
0,60	0,93	0,30	0,40	1,048
0,70	1,03	0,36	0,32	1,159
0,80	1,13	0,42	0,24	1,269
0,90	1,23	0,48	0,16	1,380
1,00	1,33	0,52	0,16	1,491
1,11	1,44	0,54	0,24	1,613
1,25	1,58	0,64	0,16	1,775
1,43	1,76	0,68	0,32	1,980
1,67	2,01	0,78	0,40	2,265
2,00	2,35	0,94	0,56	2,663
2,50	2,88	1,24	0,80	3,298
3,33	3,79	1,80	1,28	4,407
5,00	5,72	2,94	2,80	6,785
10,00	12,20	7,60	8,00	15,016

II.2.3.2. Resultados del paso 3.

$$C_{23} = 0,991 - 16,295 \left(\frac{a}{b}\right) + 200,6 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1.219 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 4.385 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 9.826 \left(\frac{a}{b}\right)^5 + 13.842 \left(\frac{a}{b}\right)^6 - 11.907 \left(\frac{a}{b}\right)^7 + 5.709 \left(\frac{a}{b}\right)^8 - 1.168 \left(\frac{a}{b}\right)^9, 0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \quad [Ec. II. 25]$$

$$C_{23} = 49,27 - 229,2 \left(\frac{a}{b}\right) + 464,225 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 523,4 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 362,2 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 158,6 \left(\frac{a}{b}\right)^5 + 43,67 \left(\frac{a}{b}\right)^6 - 7,218 \left(\frac{a}{b}\right)^7 + 6,419 \cdot 10^{-1} \left(\frac{a}{b}\right)^8 - 2,295 \cdot 10^{-2} \left(\frac{a}{b}\right)^9, \frac{a}{b} \geq 1 \quad [Ec. II. 26]$$

Cuando $a/b \rightarrow 0$, $C_{23} \rightarrow 0,991$, valor superior a C_{23} en $a/b = 0,1$ (0,502), contrariándose así la tendencia ascendente de C_{23} con a/b . Por tanto, este ajuste fallará bastante cuando $a/b \cong 0$, aunque esto resulta irrelevante dada la alta improbabilidad de esta situación.

Esta tendencia ascendente se puede comprobar en la gráfica inferior:

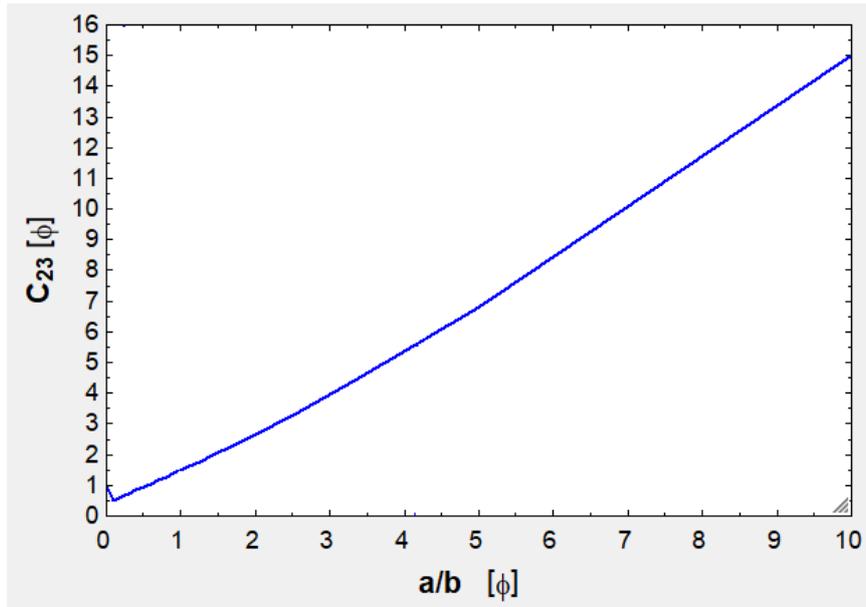


Figura II.10. Representación gráfica de la función $C_{23} - (a/b)$.

II.2.4. Coeficiente C_{32} .

El coeficiente C_{32} se puede obtener directamente a partir del C_{23} , sin cálculos adicionales, gracias a la relación que se indica en la tabla 4.2, que es la siguiente:

$$C_{32} = -C_{23} \quad [Ec. II. 27]$$

Sustituyendo C_{23} por sus dos expresiones:

$$C_{32} = -0,991 + 16,295 \left(\frac{a}{b}\right) - 200,6 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1.219 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 4.385 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 9.826 \left(\frac{a}{b}\right)^5 - 13.842 \left(\frac{a}{b}\right)^6 + 11.907 \left(\frac{a}{b}\right)^7 - 5.709 \left(\frac{a}{b}\right)^8 + 1.168 \left(\frac{a}{b}\right)^9, \quad 0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \quad [Ec. II. 28]$$

$$C_{32} = -49,27 + 229,2 \left(\frac{a}{b}\right) - 464,225 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 523,4 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 362,2 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 158,6 \left(\frac{a}{b}\right)^5 - 43,67 \left(\frac{a}{b}\right)^6 + 7,218 \left(\frac{a}{b}\right)^7 - 6,419 \cdot 10^{-1} \left(\frac{a}{b}\right)^8 + 2,295 \cdot 10^{-2} \left(\frac{a}{b}\right)^9, \quad \frac{a}{b} \geq 1 \quad [Ec. II. 29]$$

Cuando $a/b \rightarrow 0$, $C_{32} \rightarrow -0,991$, valor inferior a C_{32} en $a/b = 0,1$ (-0,502), contrariándose así la tendencia descendente de C_{23} con a/b . Por tanto, este ajuste fallará bastante cuando $a/b \cong 0$, aunque esto resulta irrelevante dada la alta improbabilidad de esta situación.

Esta tendencia descendente se puede comprobar en la gráfica inferior:

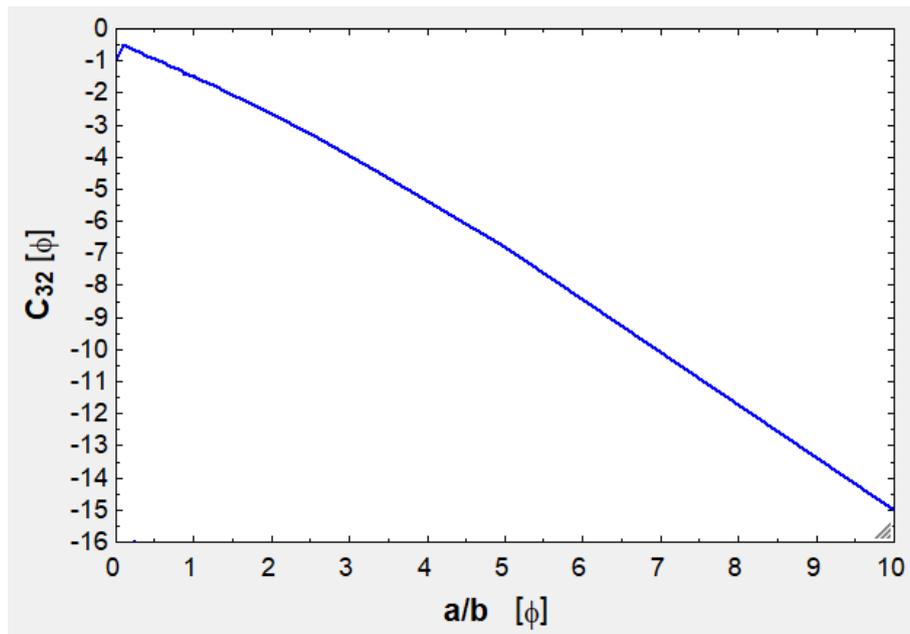


Figura II.11. Representación gráfica de la función $C_{32} - (a/b)$.

II.2.5. Coeficiente C_{33} .

Para el ajuste del coeficiente C_{33} , el último de los coeficientes de Kalker, va a seguirse el mismo procedimiento que en todos los casos previos salvo el caso particular de C_{32} . No obstante, existe un problema de partida. Este problema consiste en que este coeficiente no aparece en la tabla II.4, por lo que debe recurrirse a otra fuente para hallar la evolución de C_{33} con ν y en función de la ratio a/b .

En [28.A, p. 83] se ha hallado la evolución de todos los coeficientes con ν y en función de la razón a/b . Abajo se transcribe la evolución de C_{33} solamente:

Tabla II.9. Evolución de C_{33} con ν en función del cociente a/b .

$a/b [\Phi]$	C_{33}		
	$\nu = 0$	$\nu = 0,25$	$\nu = 0,50$
0,10	6,42	8,28	11,70
0,20	3,46	4,27	5,66
0,30	2,49	2,96	3,72
0,40	2,02	2,32	2,77
0,50	1,74	1,93	2,22
0,60	1,56	1,68	1,86
0,70	1,43	1,50	1,60
0,80	1,34	1,37	1,42
0,90	1,27	1,27	1,27
1,00	1,21	1,19	1,16
1,11	1,16	1,11	1,06
1,25	1,10	1,04	0,954
1,43	1,05	0,965	0,852
1,67	1,01	0,892	0,751
2,00	0,958	0,819	0,650
2,50	0,912	0,747	0,549
3,33	0,868	0,674	0,446
5,00	0,828	0,601	0,341
10,00	0,795	0,526	0,228

Teniendo estos datos de partida se puede proceder exactamente igual que en los ajustes de C_{11} , C_{22} y C_{23} . Los resultados se presentan seguidamente:

II.2.5.1. Resultados de los pasos 1 y 2.

Tabla II.10. Valor de C_{33} en $\nu = 0,285$ para cada uno de los 19 ajustes parabólicos $C_{33} - \nu$.

a_b	c_0	c_1	c_2	C_{33}
0,10	6,42	4,32	12,48	8,665
0,20	3,46	2,08	4,64	4,430
0,30	2,49	1,30	2,32	3,049
0,40	2,02	0,90	1,20	2,374
0,50	1,74	0,56	0,80	1,965
0,60	1,56	0,36	0,48	1,702
0,70	1,43	0,22	0,24	1,512
0,80	1,34	0,08	0,16	1,376
0,90	1,27	-0,00	0,00	1,270
1,00	1,21	-0,06	-0,08	1,186
1,11	1,16	-0,20	0,00	1,103
1,25	1,10	-0,19	-0,21	1,030
1,43	1,05	-0,28	-0,22	0,951
1,67	1,01	-0,43	-0,18	0,874
2,00	0,96	-0,50	-0,24	0,797
2,50	0,91	-0,59	-0,26	0,721
3,33	0,87	-0,71	-0,27	0,644
5,00	0,83	-0,84	-0,26	0,567
10,00	0,80	-1,02	-0,23	0,486

II.2.5.2. Resultados del paso 3.

$$C_{33} = 23,43 - 253,989 \left(\frac{a}{b}\right) + 1.478 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5.123 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 11.104 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 15.192 \left(\frac{a}{b}\right)^5 + 12.731 \left(\frac{a}{b}\right)^6 - 5.951 \left(\frac{a}{b}\right)^7 + 1.176 \left(\frac{a}{b}\right)^8 + 8,267 \left(\frac{a}{b}\right)^9, 0 \leq \frac{a}{b} \leq 1 \quad [Ec. II. 30]$$

$$C_{33} = 65,65 - 292,2 \left(\frac{a}{b}\right) + 572,429 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 631,5 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 429,2 \left(\frac{a}{b}\right)^4 - 185,1 \left(\frac{a}{b}\right)^5 + 50,32 \left(\frac{a}{b}\right)^6 - 8,233 \left(\frac{a}{b}\right)^7 + 7,262 \cdot 10^{-1} \left(\frac{a}{b}\right)^8 - 2,581 \cdot 10^{-2} \left(\frac{a}{b}\right)^9, \frac{a}{b} \geq 1 \quad [Ec. II. 31]$$

Cuando $a/b \rightarrow 0$, $C_{33} \rightarrow 23,43$, valor muy superior a C_{33} en $a/b = 0,1$ (8,665), contrariándose así la tendencia descendente de C_{23} con a/b . Por tanto, este ajuste fallará bastante cuando $a/b \cong 0$, aunque esto resulta irrelevante dada la alta improbabilidad de esta situación.

Para finalizar, se presenta la función $C_{33} - (a/b)$ tras haberla representado gráficamente en el EES:

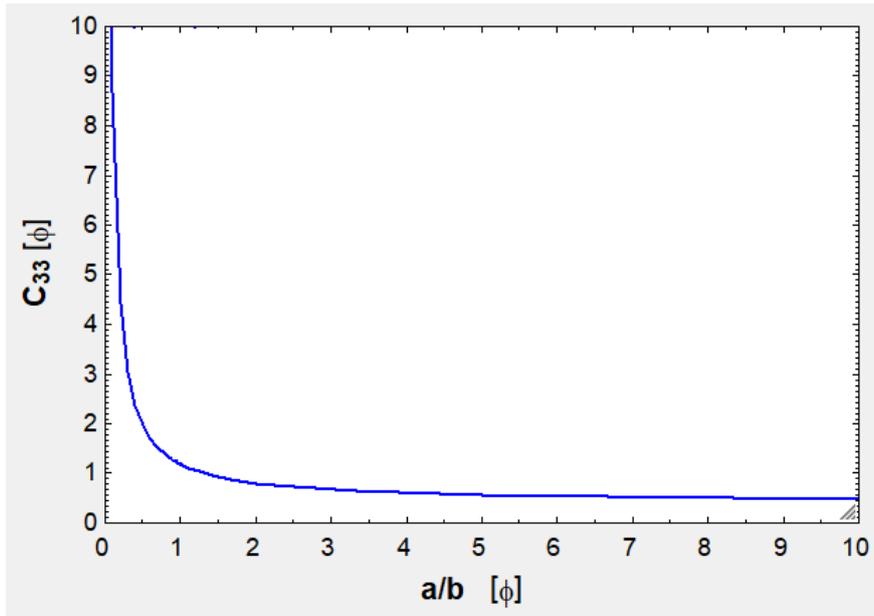


Figura II.12. Representación gráfica de la función $C_{33} - (a/b)$.

II.3. Comprobación de los ajustes de los coeficientes en condiciones de trabajo reales.

Todos los ajustes anteriores se han desarrollado desde un punto de vista teórico, sin tener en cuenta su comportamiento en condiciones de trabajo reales, entendiéndose como tales la recepción de parámetros de entrada (θ o la ratio a/b) y la petición de parámetros de salida (el grupo m_H, n_H, r_H o el grupo $C_{11}, C_{22}, C_{23}, C_{32}, C_{33}$) por parte del programa.

A continuación, van a comprobarse los ajustes realizados en condiciones de trabajos reales (recibiendo valores de θ y de a/b distintos de los arriba empleados para el desarrollo de los ajustes), tanto los ajustes de los coeficientes de Hertz como los de Kalker.

II.3.1. De los ajustes de los coeficientes de Hertz.

Para la comprobación de los ajustes de los coeficientes de Hertz debe incrementarse el valor de θ (que es el parámetro de entrada en los 3) paulatinamente y con un paso menor que los intervalos existentes entre los valores de θ empleados en los ajustes.

Puesto que estos valores son 5, 10, 30, 60, 90, 120, 150, 170, 175 y 180 °, y algunos de los intervalos entre dos valores consecutivos son demasiado elevados (hasta 30 °), lo que se propone es un paso homogéneo de 5 °.

Así pues, se obtienen los valores de m_H, n_H y r_H con un paso $\theta = 5$ °, lo cual permite ver si la evolución de las curvas entre los valores de ajuste es la correcta o no lo es. Abajo puede verse la tabla con todas las cifras, donde *run* se refiere a la ejecución de los cálculos para un determinado valor de θ :

Tabla II.11. Comprobación de los ajustes de los coeficientes de Hertz con un paso $\theta = 5^\circ$.

1..37	1 θ	2 m_H	3 n_H	4 r_H
Run 1	0	19,9765	0,0010	-35171,2552
Run 2	5	11,2380	0,2380	0,2969
Run 3	10	6,6120	0,3110	0,4280
Run 4	15	4,3531	0,3434	0,5155
Run 5	20	3,3494	0,3820	0,5976
Run 6	25	2,9321	0,4344	0,6716
Run 7	30	2,7310	0,4930	0,7263
Run 8	35	2,5667	0,5480	0,7587
Run 9	40	2,3737	0,5936	0,7781
Run 10	45	2,1471	0,6289	0,8000
Run 11	50	1,9076	0,6577	0,8361
Run 12	55	1,6807	0,6854	0,8864
Run 13	60	1,4860	0,7170	0,9376
Run 14	65	1,3328	0,7557	0,9706
Run 15	70	1,2208	0,8017	0,9742
Run 16	75	1,1424	0,8527	0,9600
Run 17	80	1,0867	0,9050	0,9626
Run 18	85	1,0422	0,9547	1,0053
Run 19	90	1,0000	1,0000	1,0000
Run 20	95	0,9547	1,0422	1,0053
Run 21	100	0,9050	1,0867	0,9626
Run 22	105	0,8527	1,1424	0,9600
Run 23	110	0,8017	1,2208	0,9742
Run 24	115	0,7557	1,3328	0,9706
Run 25	120	0,7170	1,4860	0,9376
Run 26	125	0,6854	1,6807	0,8864
Run 27	130	0,6577	1,9076	0,8361
Run 28	135	0,6289	2,1471	0,8000
Run 29	140	0,5936	2,3737	0,7781
Run 30	145	0,5480	2,5667	0,7587
Run 31	150	0,4930	2,7310	0,7263
Run 32	155	0,4344	2,9321	0,6716
Run 33	160	0,3820	3,3494	0,5976
Run 34	165	0,3434	4,3531	0,5155
Run 35	170	0,3110	6,6120	0,4280
Run 36	175	0,2380	11,2380	0,2969
Run 37	180	0,0010	19,9765	0,0000

De esta tabla se desprende que la evolución de las curvas es la apropiada, ya que entre los puntos de ajuste la variación es suave. En realidad, esta evolución responde a una interpolación polinómica de grado nono, puesto que los polinomios resultantes de los ajustes son de dicho grado.

Únicamente se encuentran anomalías en los extremos:

- ✓ En $\theta = 0^\circ$, m_H vale 19,9765 (debería ser un valor mucho mayor, tendiente a infinito), n_H vale 0,0010 (debería ser 0) y r_H -35.171,2552 (debería ser 0).
- ✓ En $\theta = 180^\circ$, m_H vale 0,0010 (debería ser 0) y n_H vale 19,9765 (debería ser un valor mucho mayor, tendiente a infinito).

Estas anomalías son poco importantes y se pueden despreciar, en tanto en cuanto estos valores extremos no se alcanzarán en ninguna área de contacto. Por lo tanto, los polinomios fruto de los ajustes se pueden dar por válidos y no se requiere de ningún reajuste.

II.3.2. De los ajustes de los coeficientes de Kalker.

Para la comprobación de los ajustes de los coeficientes de Kalker se adopta el mismo procedimiento: el incremento paulatino de una ratio a/b con un paso menor que los intervalos existentes entre los valores de a/b empleados en los ajustes.

Estos valores son 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1 y, a partir de la unidad (umbral donde los ajustes varían de forma), 1; 1,11; 1,25; 1,43; 1,67; 2; 2,2,5; 3,33; 5; 10. Dado que los intervalos son muy diferentes entre un conjunto de valores y el otro, lo más razonable es adoptar dos pasos distintos. Así, se adopta un paso para cada conjunto: $a/b = 0,05$ para recorrer el primer conjunto y $a/b = 0,25$ para avanzar por el segundo.

Así pues, se obtienen los valores de C_{11} , C_{22} , C_{23} , C_{32} y C_{33} con unos pasos $a/b = 0,05$ (para $a/b \leq 1$) y $a/b = 0,25$ (para $a/b \geq 1$) lo cual permite ver si la evolución de las curvas entre los valores de ajuste es la correcta o no lo es. Abajo se van a mostrar dos tablas con todas las cifras, una para $a/b \leq 1$ y la otra para $a/b \geq 1$ En ambas, *run* se refiere a la ejecución de los cálculos para un determinado valor de a/b .

Comenzando por la tabla para $a/b \geq 1$:

Tabla II.12. Comprobación de los ajustes de los coeficientes de Kalker con un paso $a/b (\leq 1) = 0,05$.

1.21	1 a_b	2 C_{11}	3 C_{22}	4 C_{23}	5 C_{32}	6 C_{33}
Run 1	0,00	0,652	2,810	0,991	-0,991	23,434
Run 2	0,05	2,911	2,537	0,550	-0,550	13,855
Run 3	0,10	3,481	2,521	0,502	-0,502	8,665
Run 4	0,15	3,543	2,574	0,560	-0,560	5,909
Run 5	0,20	3,532	2,635	0,627	-0,627	4,430
Run 6	0,25	3,551	2,696	0,684	-0,684	3,586
Run 7	0,30	3,594	2,759	0,735	-0,735	3,049
Run 8	0,35	3,639	2,826	0,787	-0,787	2,666
Run 9	0,40	3,678	2,894	0,841	-0,841	2,374
Run 10	0,45	3,717	2,962	0,894	-0,894	2,145
Run 11	0,50	3,761	3,028	0,946	-0,946	1,965
Run 12	0,55	3,810	3,094	0,996	-0,996	1,821
Run 13	0,60	3,860	3,163	1,048	-1,048	1,702
Run 14	0,65	3,905	3,235	1,102	-1,102	1,600
Run 15	0,70	3,946	3,307	1,159	-1,159	1,512
Run 16	0,75	3,990	3,377	1,215	-1,215	1,437
Run 17	0,80	4,044	3,442	1,269	-1,269	1,376
Run 18	0,85	4,101	3,506	1,322	-1,322	1,323
Run 19	0,90	4,142	3,577	1,380	-1,380	1,270
Run 20	0,95	4,158	3,658	1,447	-1,447	1,214
Run 21	1,00	4,250	3,711	1,491	-1,491	1,186

Compruébase que la evolución es suave y, por tanto, correcta. Entre los valores de ajuste la evolución se corresponde con la propia de una interpolación polinómica de grado nono, con lo cual no se requiere de ningún reajuste.

Una vez se tiene esto, se procede a mostrar la tabla para $a/b \geq 1$:

Tabla II.13. Comprobación de los ajustes de los coeficientes de Kalker con un paso $a/b (\geq 1) = 0,25$.

1..37	1 a_b	2 C_{11}	3 C_{22}	4 C_{23}	5 C_{32}	6 C_{33}
Run 1	1,00	4,250	3,711	1,491	-1,491	1,186
Run 2	1,25	4,487	4,042	1,775	-1,775	1,030
Run 3	1,50	4,736	4,357	2,061	-2,061	0,925
Run 4	1,75	4,984	4,671	2,363	-2,363	0,855
Run 5	2,00	5,225	4,985	2,663	-2,663	0,797
Run 6	2,25	5,452	5,284	2,951	-2,951	0,731
Run 7	2,50	5,694	5,585	3,298	-3,298	0,721
Run 8	2,75	5,993	5,935	3,806	-3,806	0,873
Run 9	3,00	6,328	6,323	4,405	-4,405	1,123
Run 10	3,25	6,506	6,562	4,595	-4,595	0,955
Run 11	3,50	6,097	6,191	3,290	-3,290	-0,774
Run 12	3,75	4,488	4,529	-1,015	1,015	-5,682
Run 13	4,00	1,168	0,972	-9,542	9,542	-15,114
Run 14	4,25	-3,684	-4,342	-21,774	21,774	-28,581
Run 15	4,50	-8,230	-9,427	-33,106	33,106	-41,198
Run 16	4,75	-7,596	-8,852	-31,500	31,500	-40,038
Run 17	5,00	7,912	8,343	6,785	-6,785	0,567
Run 18	5,25	54,908	61,129	122,224	-122,224	124,583
Run 19	5,50	159,208	179,197	377,454	-377,454	400,292
Run 20	5,75	358,051	405,623	862,529	-862,529	926,147
Run 21	6,00	701,921	799,095	1699,181	-1699,181	1835,578
Run 22	6,25	1255,521	1435,154	3043,021	-3043,021	3299,544
Run 23	6,50	2097,315	2405,782	5082,287	-5082,287	5525,303
Run 24	6,75	3316,909	3816,451	8031,405	-8031,405	8749,483
Run 25	7,00	5009,402	5779,615	12117,289	-12117,289	13223,133
Run 26	7,25	7265,649	8403,367	17555,886	-17555,886	19186,000
Run 27	7,50	10157,209	11773,809	24516,034	-24516,034	26826,754
Run 28	7,75	13714,544	15929,429	33067,263	-33067,263	36225,423
Run 29	8,00	17896,837	20825,509	43107,653	-43107,653	47273,691
Run 30	8,25	22551,566	26286,356	54267,342	-54267,342	59568,169
Run 31	8,50	27361,725	31942,819	65782,731	-65782,731	72271,079
Run 32	8,75	31778,358	37152,300	76335,812	-76335,812	83932,176
Run 33	9,00	34935,775	40898,100	83852,467	-83852,467	92264,997
Run 34	9,25	35546,575	41664,645	85252,893	-85252,893	93869,818
Run 35	9,50	31773,271	37284,765	76146,641	-76146,641	83894,921
Run 36	9,75	21073,052	24754,831	50464,037	-50464,037	55626,975
Run 37	10,00	11,856	13,182	15,016	-15,016	0,486

En este caso, la evolución es la correcta para $1 \leq a/b \leq 2,50$. Sin embargo, entre este valor y el siguiente punto de ajuste (5) y entre este y el último de la serie (10) aparecen anomalías que invalidan los ajustes. Concretamente:

- ✓ Después de 3,25 (comparando con 3,50 se aprecia), C_{11} , C_{22} y C_{23} comienzan a descender, contrariando su tendencia ascendente. Por el contrario, C_{33} comienza a ascender, cuando su tendencia debería ser a la baja.
- ✓ En 4,25 se alcanzan ya valores insostenibles: valores negativos en todos los coeficientes (cuando solo deberían ser negativos los valores de C_{32} , que ahora incluso son negativos) y con valores absolutos superiores a 8 e incluso a 30 o 40.
- ✓ Sin embargo, es entre 5 y 10 (sin incluir estos extremos, los cuales proporcionan los valores correctos) donde se produce el descalabro total, con valores que superan los 10.000 en valor absoluto.

En vista de este desastre, va a realizarse el reajuste de los coeficientes de Kalker para $a/b \geq 2,50$. Estas ratios son frecuentes en las áreas de contacto entre la pestaña de la rueda y el carril; de ahí la importancia de tener unos ajustes precisos en todo el rango de a/b .

II.3.2.1. Reajuste del coeficiente C_{11} para $a/b \geq 2,50$.

Para el reajuste del coeficiente C_{11} para $a/b \geq 2,50$ se recurre al *software Microsoft Excel*, ya que el uso del EES no ha conducido a un ajuste de calidad en la totalidad del rango de a/b .

En primer lugar, se representan gráficamente los 4 pares de puntos $C_{11} - (a/b)$ disponibles (en $a/b = 2,50; 3,33; 5; 10$), los cuales se obtienen de la tabla II.6. A esta representación gráfica se le agrega una línea de tendencia con el fin de obtener el ajuste polinómico con el mejor coeficiente de determinación posible:

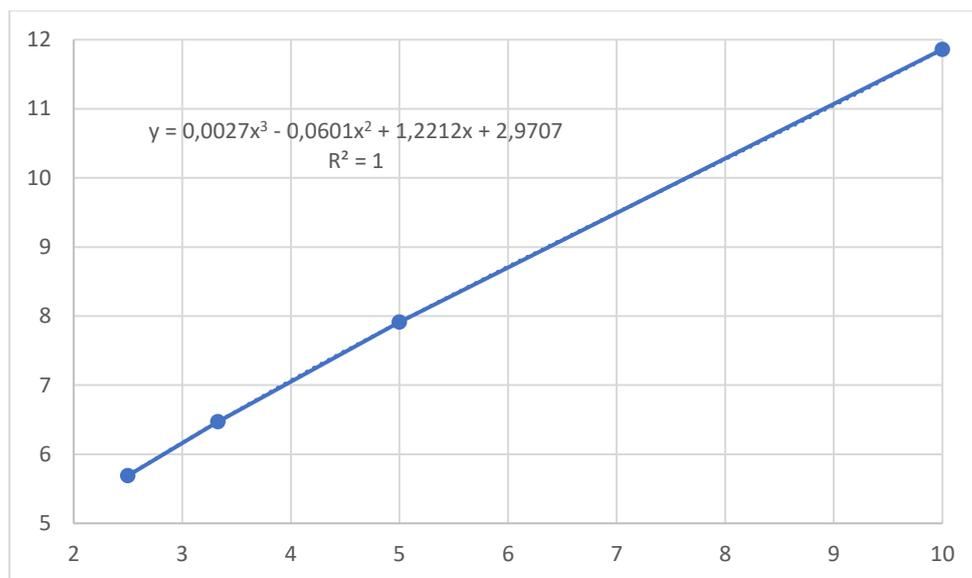


Figura II.13. Curva original de C_{11} (trazo grueso y continuo) y línea de tendencia (trazo fino y discontinuo).

Transcribiendo la ecuación para expresarla en términos de a/b y C_{11} :

$$C_{11} = 0,0027 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0,0601 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1,2212 \left(\frac{a}{b}\right) + 2,9707 \quad [\text{Ec. II. 32}]$$

Finalmente, se comprueba que los valores originales (C_{11}) coincidan con los calculados en base a esta ecuación ($C_{11,aj}$):

Tabla II.14. Cotejado de los valores originales de C_{11} con los ajustados.

a/b [°]	C_{11} [φ]	$C_{11,aj}$ [φ]
2,50	5,69	5,690
3,33	6,47	6,471
5	7,91	7,912
10	11,86	11,873

De la comprobación se deduce que el reajuste es prácticamente perfecto y que esta vez no es mentira que el coeficiente de determinación (R^2) sea 1 (en la [parte II.1.1.1](#) se tenía un valor de R^2 muy próximo a la unidad (0,9887), mas era un mero cálculo teórico que ignoraba que el ajuste era pésimo, incluso en los puntos de ajuste).

II.3.2.2. Reajuste del coeficiente C_{22} para $a/b \geq 2,50$.

En este caso se procede exactamente igual, comenzando por graficar los 4 pares de puntos C_{22} – (a/b) disponibles para $a/b \geq 2,50$, los cuales se pueden encontrar en la tabla II.7. Al igual que antes, a la curva se le agrega una línea de tendencia:

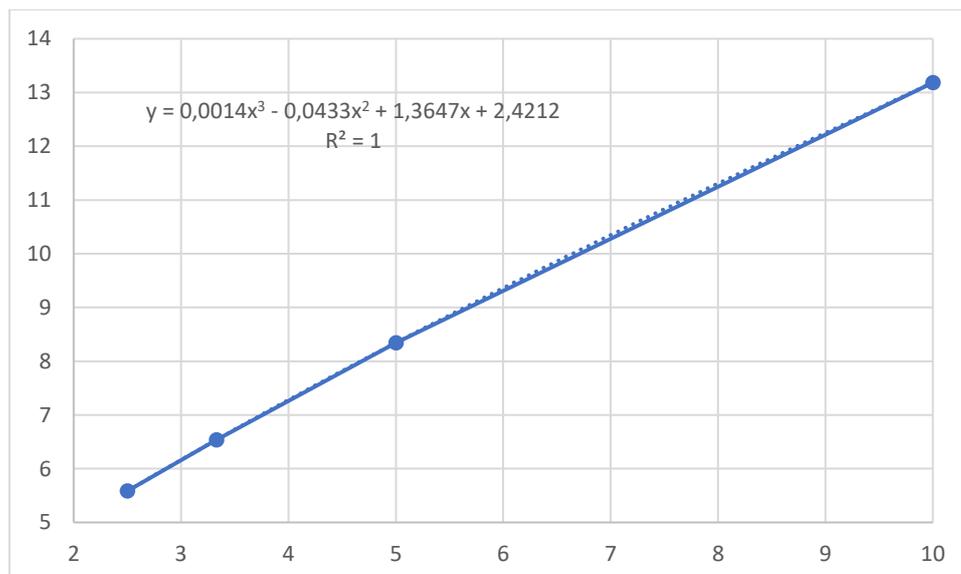


Figura II.14. Curva original de C_{22} (trazo grueso y continuo) y línea de tendencia (trazo fino y discontinuo).

Transcribiendo la ecuación para expresarla en términos de a/b y C_{22} :

$$C_{22} = 0,0014 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0,0433 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1,3647 \left(\frac{a}{b}\right) + 2,4212 \quad [\text{Ec. II. 33}]$$

Finalmente, se comprueba que los valores originales (C_{22}) coincidan con los calculados en base a esta ecuación ($C_{22,aj}$):

Tabla II.15. Cotejado de los valores originales de C_{22} con los ajustados.

a/b [°]	C_{22} [φ]	$C_{22,aj}$ [φ]
2,50	5,585	5,584
3,33	6,539	6,537
5	8,343	8,337
10	13,182	13,138

De la comprobación se deduce que el reajuste es prácticamente perfecto y que, al igual que en el reajuste previo, el valor de $R^2 (= 1)$ es certero.

II.3.2.3. Reajuste del coeficiente C_{23} para $a/b \geq 2,50$.

En este caso se procede exactamente igual, comenzando por graficar los 4 pares de puntos $C_{23} - (a/b)$ disponibles para $a/b \geq 2,50$, los cuales se pueden encontrar en la tabla II.8. Al igual que antes, a la curva se le agrega una línea de tendencia:

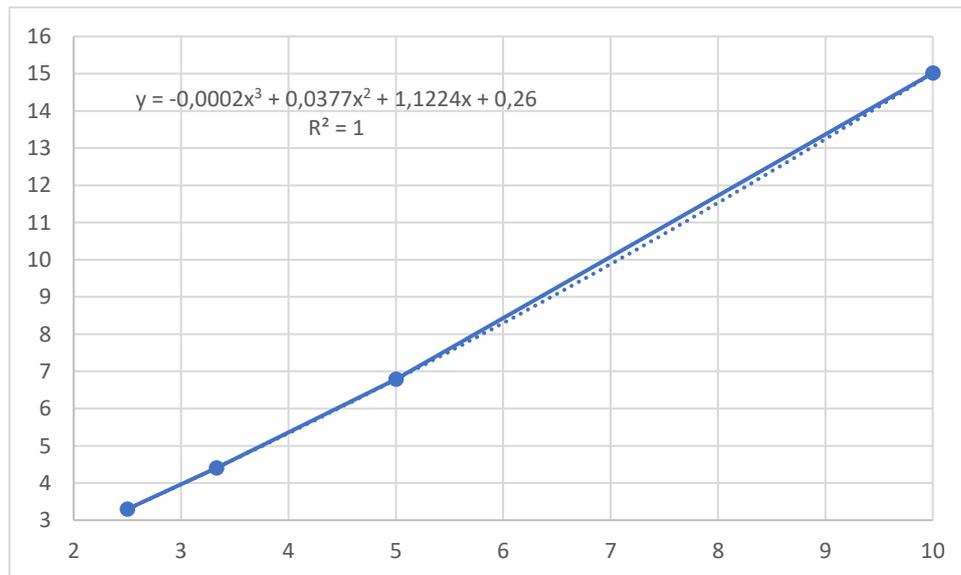


Figura II.15. Curva original de C_{23} (trazo grueso y continuo) y línea de tendencia (trazo fino y discontinuo).

Transcribiendo la ecuación para expresarla en términos de a/b y C_{23} :

$$C_{23} = -0,0002 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 0,0377 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1,1224 \left(\frac{a}{b}\right) + 0,2600 \quad [Ec. II. 34]$$

Finalmente, se comprueba que los valores originales (C_{23}) coincidan con los calculados en base a esta ecuación ($C_{23,aj}$):

Tabla II.16. Cotejado de los valores originales de C_{23} con los ajustados.

a/b [°]	C_{23} [φ]	$C_{23,aj}$ [φ]
2,50	3,298	3,299
3,33	4,407	4,408
5	6,785	6,790
10	15,016	15,054

De la comprobación se deduce que el reajuste es prácticamente perfecto y que, al igual que en los dos reajustes previos, el valor de $R^2 (= 1)$ es certero.

II.3.2.4. Reajuste del coeficiente C_{32} para $a/b \geq 2,50$.

Para el reajuste del coeficiente C_{32} simplemente hay que recurrir a la ecuación II.27. Mediante el uso de esta igualdad se llega tener lo que sigue:

$$C_{32} = -C_{23} = +0,0002 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0,0377 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1,1224 \left(\frac{a}{b}\right) - 0,2600$$

$$C_{32} = 0,0002 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0,0377 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1,1224 \left(\frac{a}{b}\right) - 0,2600 \quad [Ec. II. 35]$$

Como esta ecuación procede del reajuste con un valor de $R^2 (= 1)$ cuya validez ha sido confirmada, entonces esta ecuación también es un reajuste prácticamente perfecto, con el mismo valor de R^2 . Por ende, no es necesario crear una tabla para cotejar los valores originales (C_{32}) con los calculados en base a la ecuación deducida ($C_{32,aj}$).

Teniendo esto en consideración, simplemente se va a mostrar el resultado del reajuste en una gráfica, exactamente como se realizó en la figura II.11 tras ajustar C_{32} según C_{23} por primera vez. A la curva obtenida se le va a añadir una línea de tendencia para verificar que su ecuación sea idéntica a la II.35:

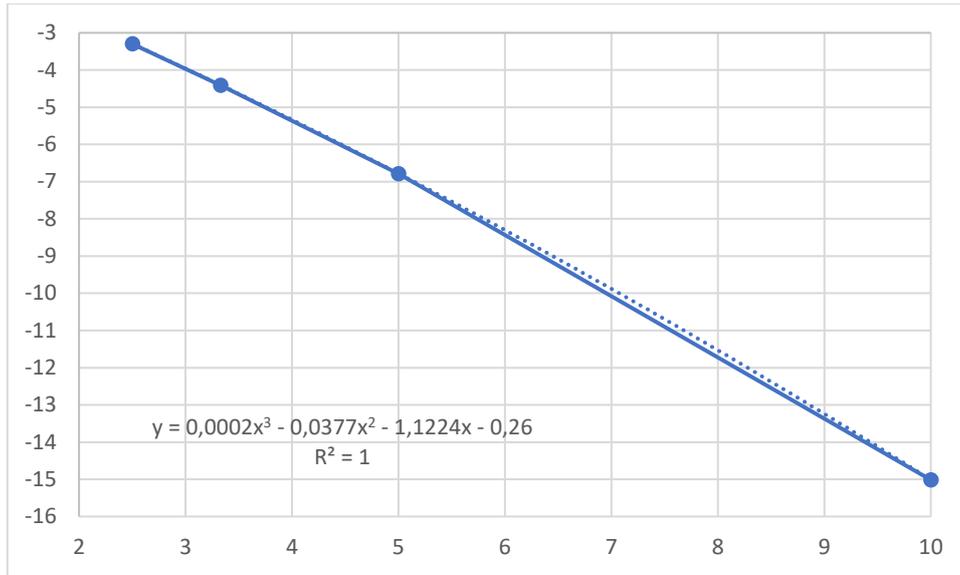


Figura II.16. Curva original de C_{32} (trazo grueso y continuo) y línea de tendencia (trazo fino y discontinuo).

Verifícase que la ecuación de la línea de tendencia es idéntica a la ecuación II.35.

II.3.2.5. Reajuste del coeficiente C_{33} para $a/b \geq 2,50$.

En este caso se procede exactamente igual, comenzando por graficar los 4 pares de puntos $C_{33} - (a/b)$ disponibles para $a/b \geq 2,50$, los cuales se pueden encontrar en la tabla II.10. Al igual que antes, a la curva se le agrega una línea de tendencia:

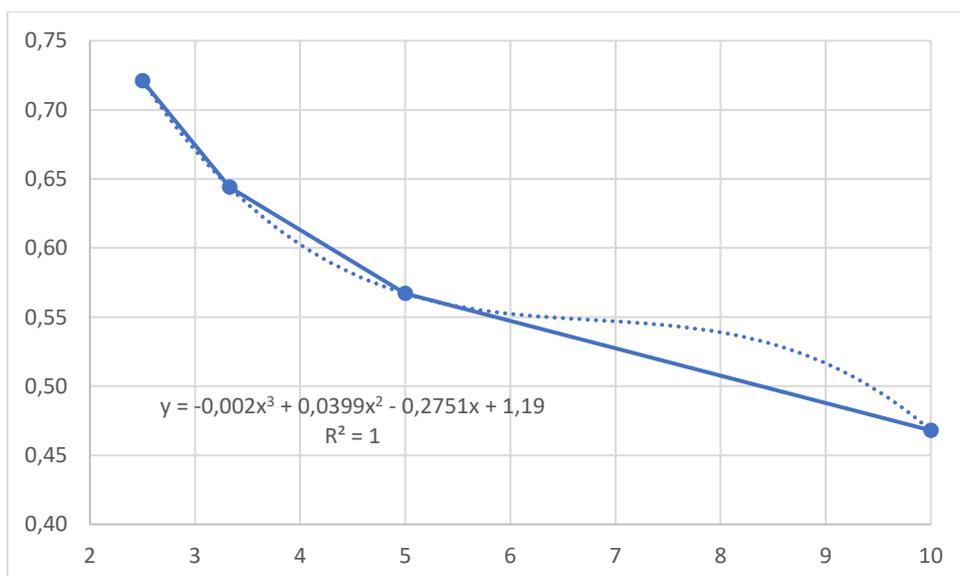


Figura II.17. Curva original de C_{33} (trazo grueso y continuo) y línea de tendencia (trazo fino y discontinuo).

Transcribiendo la ecuación para expresarla en términos de a/b y C_{33} :

$$C_{33} = -0,0002 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 0,0399 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 0,2751 \left(\frac{a}{b}\right) + 1,1900 \quad [Ec. II. 36]$$

Finalmente, se comprueba que los valores originales (C_{33}) coincidan con los calculados en base a esta ecuación ($C_{33,aj}$):

Tabla II.17. Cotejado de los valores originales de C_{33} con los ajustados.

a/b [°]	C_{33} [φ]	$C_{33,aj}$ [φ]
2,50	0,721	0,720
3,33	0,644	0,643
5	0,567	0,562
10	0,468	0,429

De la comprobación se deduce que el reajuste es prácticamente perfecto y que, al igual que en todos los reajustes previos, el valor de $R^2 (= 1)$ es certero. Aun así, cabe apreciar que la línea de tendencia se desvía en este reajuste mucho más que en los anteriores, lo cual desemboca en un último valor de C_{33} ligeramente impreciso ($C_{33} = 0,468$, mientras que $C_{33,aj} = 0,429$, que es un valor un 8,333 % inferior).

Anexo III. Geometrías y materiales de las ruedas y los carriles.

III.1. Tipos de perfiles de ruedas.

Los perfiles de las ruedas ferroviarias están normalizados de acuerdo con la norma de AENOR (Asociación Española de Normalización) armonizada UNE-EN (Una Norma Española – *European Norm*) cuyo código es 13715:2007+A1 [29.A].

En esta norma se definen las coordenadas de estos tres perfiles de rodadura y las coordenadas de sus pestañas, siendo las segundas coincidentes para los tres:

- ✓ Perfil 1/40.
- ✓ Perfil S 1002.
- ✓ Perfil EPS.

A continuación, va a mostrarse el aspecto que tiene cada uno, pero sin copiar o pegar ninguna imagen, tabla o texto, dado que las normas UNE son privadas y su contenido no puede ser directamente publicado, sin previa modificación o adaptación.

III.1.1. Perfil 1/40.

El perfil 1/40 exhibe, a grandes rasgos, el siguiente aspecto:

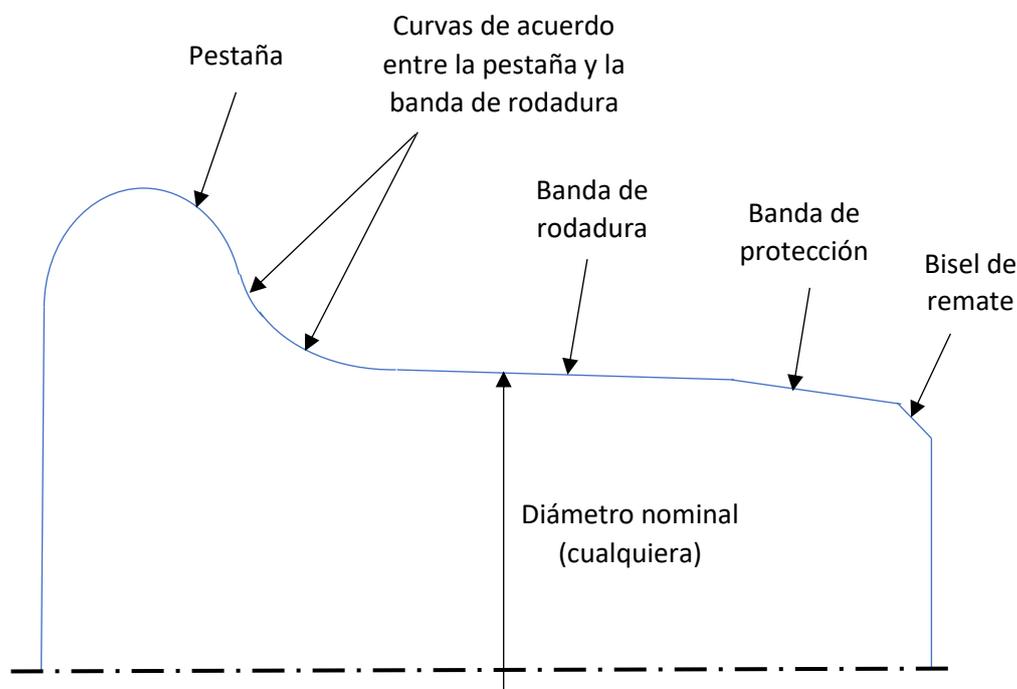


Figura III.1. Aspecto del perfil 1/40. Fuente: Adaptación propia de [29.A].

III.1.2. Perfil S 1002.

El perfil S 1002 es diferente, ya que presenta una única curva de acuerdo y la banda de rodadura ya no es un tronco de cono perfecto, por lo que esta vez se define con una gran profusión de coordenadas en vez de simplemente con la inclinación (semiconicidad) del tronco. Además, se busca que el salto entre la banda de rodadura y la banda de protección no sea tan grande, aunque la norma acepta que este salto sea como el existente en el perfil 1/40. Abajo puede verse la imagen de este perfil:

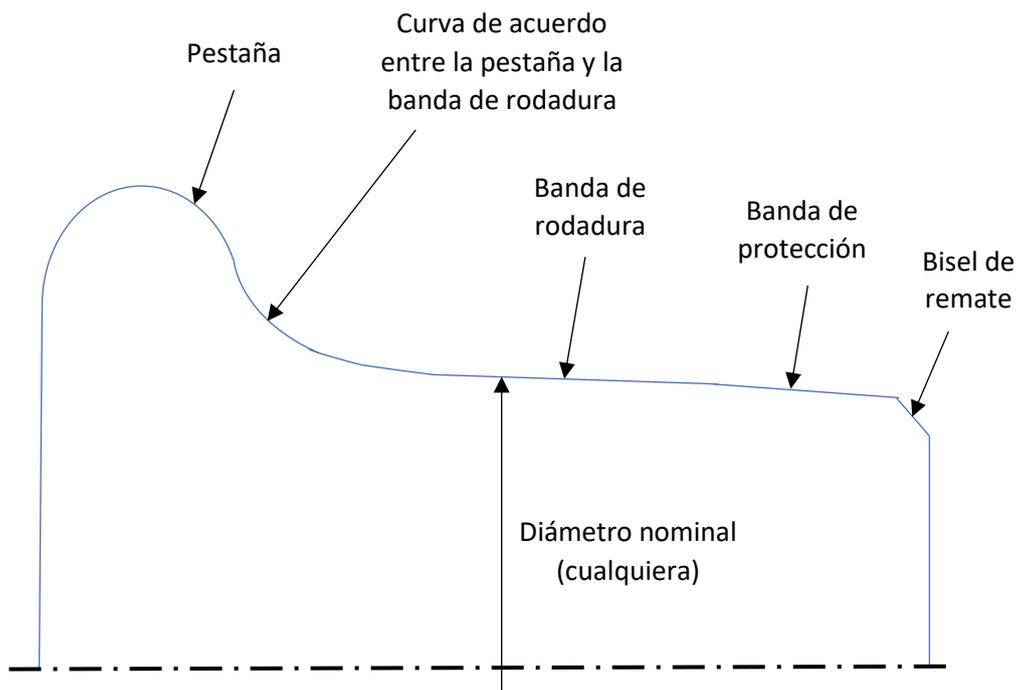


Figura III.2. Aspecto del perfil S 1002. Fuente: Adaptación propia de [29.A].

III.1.3. Perfil EPS.

El perfil EPS es, con diferencia, el más curvo de los tres. Esto es debido a que la banda de rodadura queda definida en este caso por dos amplias curvas. La primera de ellas empalma con la curva de acuerdo de la pestaña por la izquierda que, mientras que la segunda empalma con la banda de protección por la derecha, estando la inclinación de esta banda a medio camino entre la presente en el perfil 1/40 y la del S 1002, si bien la norma acepta que este parámetro sea igual en los tres perfiles. Abajo puede verse este perfil:

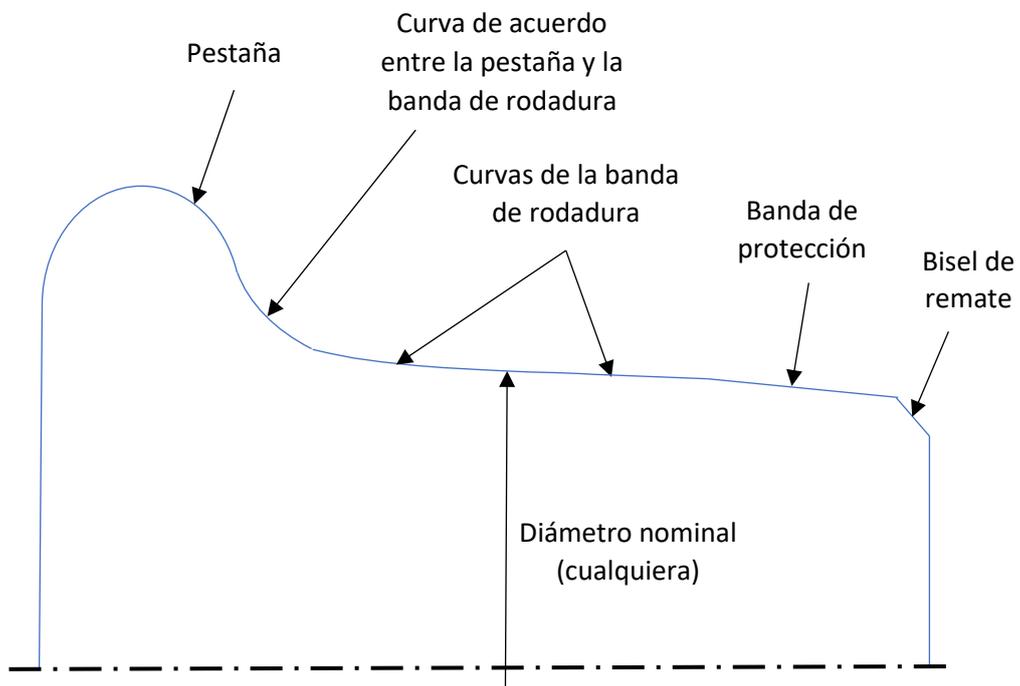


Figura III.3. Aspecto del perfil EPS. Fuente: Adaptación propia de [29.A].

III.2. Tipos de perfiles de carriles.

La norma UNE armonizada UNE-EN 13674 define en su parte 1 los perfiles de los tipos de carriles más utilizados en Europa en los trazados construidos o reformados en las últimas décadas. Estos tipos de carriles son todos de clase Vignole y poseen una masa mayor o igual a 46 kg/m, tal como consta en la antedicha parte 1 de la norma, cuyo código es 13674-1:2012+A1:2018 [30.A].

Los carriles Vignole deben su nombre al ingeniero ferroviario irlandés Charles Blacker Vignoles (1793 – 1875), quien en 1836 sugirió el uso en la línea férrea Londres – Croydon del antecesor de los carriles que se utilizan actualmente en las líneas de todo el mundo [31.A].

En el fondo, una viga de sección de tipo Vignole puede verse como una adaptación al campo ferroviario de una sección en 'I', que es la sección más resistente a flexión de las existentes. En la sección Vignole, el ala superior se denomina cabeza u hongo y tiene una forma estrecha y redondeada en comparación con la sección en 'I', apta para la rodadura de las ruedas de los trenes. En su extremo opuesto está el ala inferior, la cual se denomina patín, que tiene una mayor superficie que en el caso de la sección en 'I' con el fin de transmitir una menor presión a la traviesa a través de los elementos de anclaje (las sujeciones) entre el carril y la traviesa.

Explicados estos rudimentos, se van a tabular todos los tipos de carriles que establece la norma:

Tabla III.1. Tipos de carriles establecidos por la norma. Fuente: Adaptación propia de [30.A].

Número	Perfil	Perfil anterior
1	46E1	SBB I
2	46E2	U33
3	46E3	NP 46
4	46E4	46 UNI
5	49E1	DIN S49
6	49E2	S49 T
7	49E5	-
8	50E1	U50E
9	50E2	50EB – T
10	50E3	BV 50
11	50E4	UIC 50
12	50E5	50 UNI
13	50E6	U 50
14	52E1	52 RATP
15	54E1	UIC 54
16	54E2	UIC 54 E
17	54E3	DIN S54
18	54E4	-
19	54E5	54E1AHC
20	54E6	-
21	55E1	U55
22	56E1	BS 113lb BR Variant
23	60E1	UIC 60
24	60E2	-

Como se desprende de la tabla, en la nomenclatura actual de los perfiles se utilizan dos dígitos, la letra 'E' y un número. Los dos dígitos indican la masa del carril por unidad de longitud [kg/m], la letra 'E' probablemente haga referencia a "europeo" y el número es un discriminante entre los perfiles que tienen una misma masa lineal.

De entre todos estos carriles, en la red ferroviaria española se utilizan dos: 54E1 (UIC 54) y 60E1 (UIC 60). Lo que declara ADIF en la Norma ADIF Vía (NAV) 7-1-3.1 acerca de los carriles utilizados actualmente en la red es lo siguiente [32.A, p. 12]:

"En la actualidad, las vías de ADIF están armadas con los siguientes carriles:

- ✓ RN 45.
- ✓ UIC 54.
- ✓ UIC 60
- ✓ La red tiene a extinguir otros modelos de carriles de las antiguas compañías ferroviarias. Los principales son: 19,7 kg/m de Norte; 30 kg/m de Andaluces: 32,5kg/m de MZA; 32,5 kg/m de Norte: 40 kg/m de Andaluces: 42,5 kg/m de Norte y 45kg/m de MZA, Oeste y Santander Mediterráneo."

En el caso de vías de nueva construcción, la NAV 7-1-3.1 establece esto:

"En la construcción de líneas nuevas sólo se emplearán los siguientes materiales [32.A, p. 13]:

- ✓ UIC 54.
- ✓ UIC 60.
- ✓ Carriles regenerados de los modelos RN 45, UIC 54 y UIC 60."

Con respecto al carril RN 45, este no aparece en la parte 1 de la norma UNE-EN 13674 [30.A] porque su masa lineal es 45 kg/m, valor inferior a 46 kg/m. Sus características vienen dadas en parte 4 de la misma norma, que aborda los carriles Vignole de masa comprendida entre 27 kg/m y 46 kg/m, excluyendo 46 kg/m. El código de la parte 4 es 13674-4 y el carril se designa 45E3 en ella [33.A].

En los siguientes subapartados se van a definir las geometrías de los carriles RN 45, UIC 54 y UIC 60, los cuales vienen dados en la Especificación Técnica 03.360.161.8 de ADIF, sobre carriles (disponible en acceso abierto, al igual que las NAV, por lo que su contenido es copiable y pegable en este documento) [34.A].

III.2.1. Perfil RN 45.

El perfil RN 45 viene definido por estos datos:

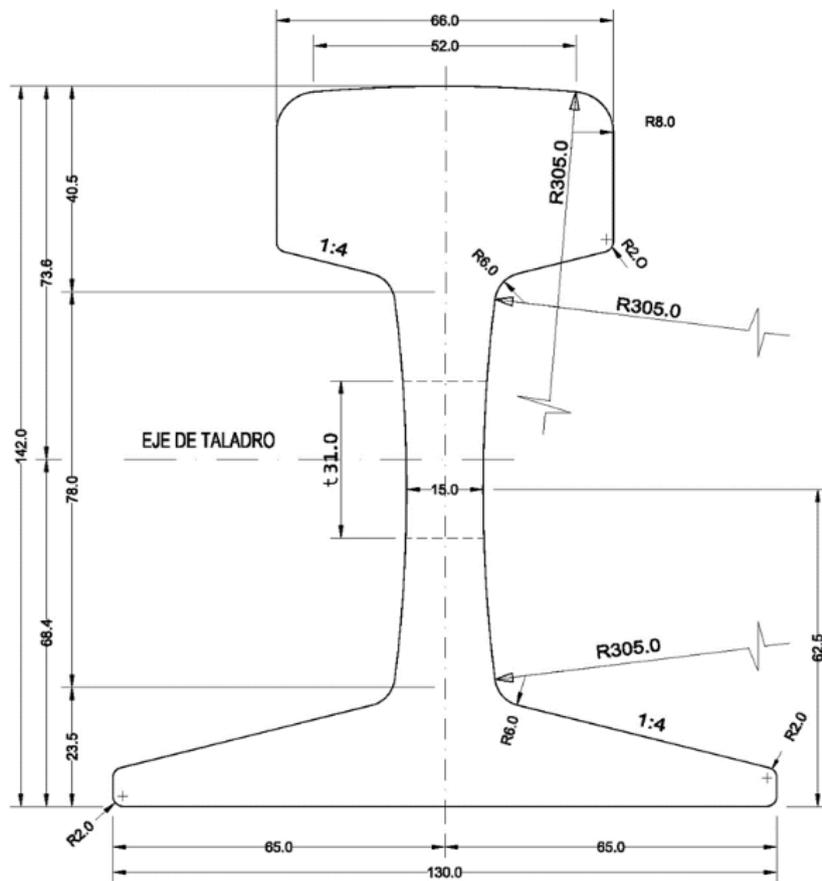


Figura III.4. Datos geométricos del perfil RN 45. Cotas en [mm]. Fuente: [34.A, anejo 1].

Sus propiedades se recogen en esta tabla:

Tabla III.2. Propiedades del carril RN 45. Fuente: [34.A, anejo 1].

Propiedad	Valor numérico	Unidad de medida
Área de la sección transversal	57,05	cm ²
Masa lineal	44,79	kg · m ⁻¹
Momento de inercia vertical (eje X – X)	1.456,25	cm ⁴
Módulo resistente de la cabeza	197,94	cm ³
Módulo resistente del patín	197,94	cm ³
Momento de inercia horizontal (eje Y – Y)	256,25	cm ⁴
Módulo resistente horizontal (eje Y – Y)	39,42	cm ³
Esbeltez	1,09	-
Equilibrio térmico	1,66	-

III.2.2. Perfil 54E1.

El perfil 54E1 (UIC 54) viene definido por estos datos:

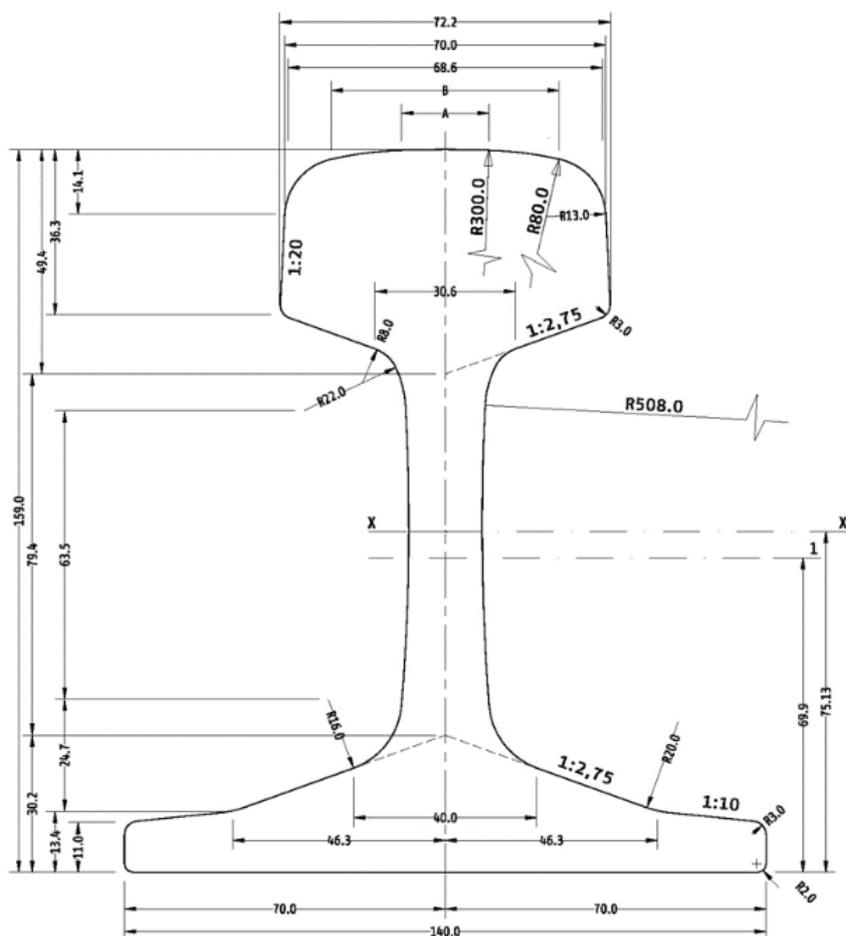


Figura III.5. Datos geométricos del perfil 54E1. Cotas en [mm]. Fuente: [34.A, anejo 1].

Sus propiedades se recogen en esta tabla, incluyendo las dimensiones A y B de la cabeza del perfil:

Tabla III.3. Propiedades del carril 54E1. Fuente: [34.A, anejo 1].

Propiedad	Valor numérico	Unidad de medida
Eje del marcado en relieve	1	-
Área de la sección transversal	69,77	cm ²
Masa lineal	54,77	kg · m ⁻¹
Momento de inercia vertical (eje X – X)	2.337,9	cm ⁴
Módulo resistente de la cabeza	278,7	cm ³
Módulo resistente del patín	311,2	cm ³
Momento de inercia horizontal (eje Y – Y)	419,2	cm ⁴
Módulo resistente horizontal (eje Y – Y)	59,9	cm ³
Dimensión indicativa A	20,024	mm
Dimensión indicativa B	49,727	mm

III.2.3. Perfil 60E1.

El perfil 60E1 (UIC 60) viene caracterizado de esta guisa:

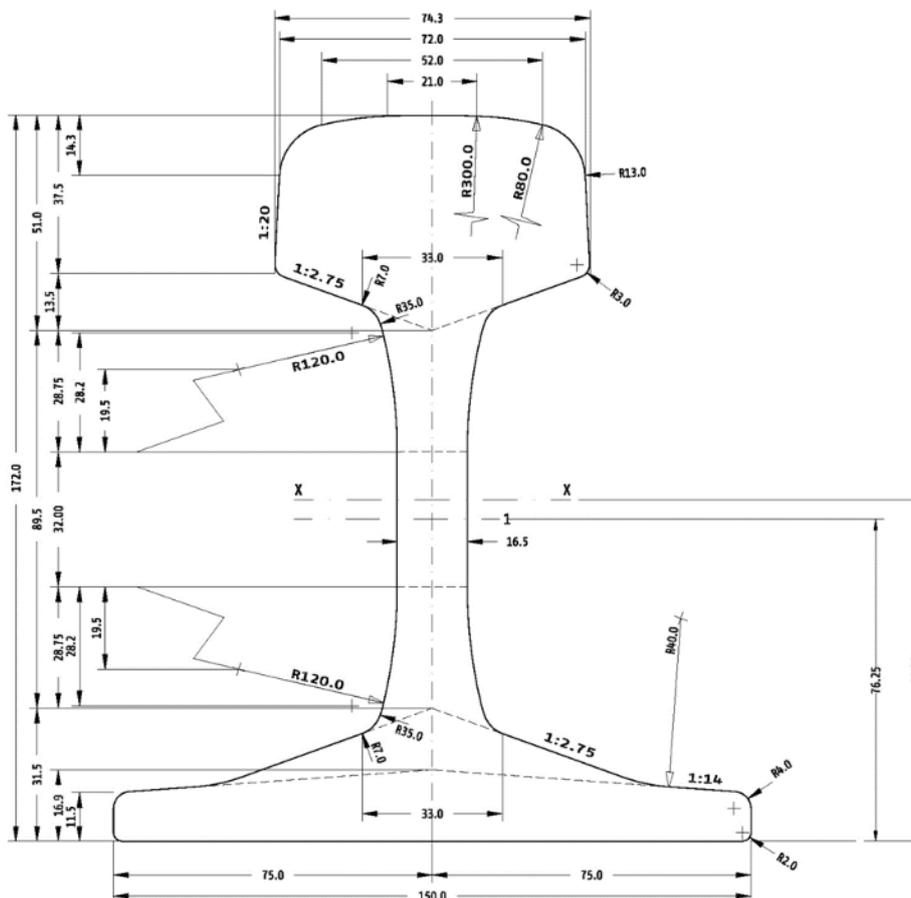


Figura III.6. Datos geométricos del perfil 60E1. Cotas en [mm]. Fuente: [34.A, anejo 1].

Sus propiedades se recogen en esta tabla, incluyendo las dimensiones A y B de la cabeza del perfil:

Tabla III.4. Propiedades del carril 60E1. Fuente: [34.A, anejo 1].

Propiedad	Valor numérico	Unidad de medida
Eje del marcado en relieve	1	-
Área de la sección transversal	76,70	cm ²
Masa lineal	60,21	kg · m ⁻¹
Momento de inercia vertical (eje X – X)	3.038,3	cm ⁴
Módulo resistente de la cabeza	333,6	cm ³
Módulo resistente del patín	375,5	cm ³
Momento de inercia horizontal (eje Y – Y)	512,3	cm ⁴
Módulo resistente horizontal (eje Y – Y)	68,3	cm ³
Dimensión indicativa A	20,456	mm
Dimensión indicativa B	52,053	mm

III.3. Selección de perfiles para la rueda y el carril.

III.3.1. Rueda.

Para la selección del perfil de las ruedas hay que tener en cuenta en cuál de ellos se puede aplicar mejor la teoría de Hertz, que exige un contacto no conforme. Esto depende básicamente de cómo se produzca la transición entre la banda de rodadura y la pestaña. Si la transición es suave será más difícil que se dé la conformidad, es decir, la adaptación geométrica entre el perfil de la rueda y el del carril. Esta transición se efectúa a través de dos curvas de acuerdo en el perfil 1/40, por lo que resulta más suave y es más improbable la aparición de contacto conforme, al menos cuando los perfiles de la rueda y del carril estén prácticamente nuevos y nada o poco desgastados (para más información, léase el [subapartado 4.3.1](#) y [la sección I.7](#)).

III.3.2. Carril.

El carril seleccionado será el mismo que se utilice en el trazado ficticio cuyos datos se aplicarán en la simulación. La tendencia actual es utilizar el carril 60E1 (UIC 60) en trazados con mucho tráfico de mercancías, puesto que es el más resistente a la flexión de entre los tres que se han mostrado. Así pues, el carril 60E1 es el seleccionado.

III.4. Construcción de los perfiles mediante funciones matemáticas.

III.4.1. Rueda.

Para construir el perfil 1/40, lo primero que hay que considerar es emplazar un sistema de referencia. En fabricación se suele utilizar el sistema de referencia dextrógiro XYZ , el cual se va a denotar $X_p Y_p Z_p$ en este caso. El origen de este sistema debe colocarse en la circunferencia de rodadura nominal, que es lo que dicta la norma UNE-EN 13715:2007+A1 [29.A].

Sin embargo, contraviniendo ligeramente la norma, no se va a emplazar el sistema utilizando los mismos sentidos de los ejes. Los sentidos de los ejes serán los mismos que los de los ejes x_c, y_c, z_c , sistema de referencia definido en la [subsección I.3.3](#), el cual se va moviendo junto con el área de contacto y, además, el eje y_c apunta en el sentido de \bar{y} en ambas ruedas.

En la siguiente imagen se observa la colocación del sistema $X_p Y_p Z_p$ en los perfiles de la rueda izquierda y de la derecha:

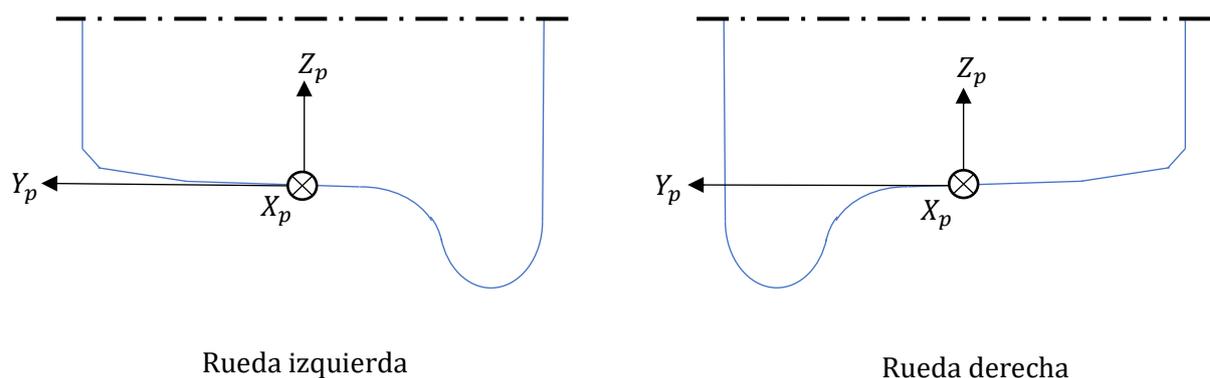


Figura III.7. Colocación del sistema de referencia $X_p Y_p Z_p$ en los perfiles de la rueda izquierda y de la derecha. Fuente: Elaboración propia.

Muchas dimensiones vienen parametrizadas en función del espesor de la pestaña y la altura de la pestaña. El espesor de la pestaña puede variar entre 28,5 y 32,5 mm, mientras que la altura lo puede hacer entre 28 y 32 mm. Para la altura se va a tomar 28 mm, que es la nominal; mientras que para el espesor se va a tomar 32,5 mm, que es la medida realizada en la misma figura de la norma en la que se midieron los 37,5 mm usados en el subapartado previo (figura B.1, en el anexo B de la norma). Adviértase que 32,5 y 37,5 mm suman los 70 mm que la norma fija como la distancia entre la circunferencia de rodadura nominal y la cara de la rueda interna a la vía.

Otro parámetro de influencia es la longitud de la llanta, que puede oscilar entre 135 mm y 140 mm. En este caso va a asumirse una longitud de 140 mm, dado que así quedan 70 mm entre la circunferencia de rodadura nominal y la cara interna a la vía y otros 70 mm entre dicha circunferencia y la cara externa a la vía.

Sabiendo esto, y con las coordenadas que constan en la norma [29.A], es posible construir el perfil. Esta construcción se va a realizar para la rueda derecha y el procedimiento consistirá en obtener una función matemática para cada tramo en los que se dividió el perfil en la figura III.1, que son:

- ✓ Banda de rodadura.
- ✓ Banda de protección.
- ✓ Bisel.
- ✓ Curvas de acuerdo entre la pestaña y la banda de rodadura.
- ✓ Pestaña.

Cada tramo va a ser abordado en una parte distinta, a continuación. Aparte de esto, en una quinta parte se explicarán los cambios que deben realizarse para obtener el perfil de la rueda izquierda y se mostrarán los dos perfiles representados en el programa EES, que es el programa descrito en la [sección 6.2](#).

III.4.1.1. Banda de rodadura.

La banda de rodadura viene definida por una recta de inclinación del 2,5 %. Esto equivale a 0,025 en tanto por unidad, que se corresponde con el cociente del quebrado 1/40. Esto explica por qué el perfil recibe la designación 1/40.

Esta recta (un segmento, en realidad) abarca desde el punto B1a hasta el C11a, según la norma. Las coordenadas de estos puntos son (0; -35; 0,875) y (0; 15,64; -0,391), respectivamente, según el sistema de coordenadas $X_p Y_p Z_p$ emplazado en la rueda derecha.

La ecuación de este tramo, que relaciona la coordenada y_p (coordenada en el eje Y_p) con la coordenada z_p (coordenada en el eje Z_p) es la que sigue:

$$z_p = -0,025y_p \quad [Ec. III. 1]$$

Con esta ecuación se comprueba si se obtienen las coordenadas de los puntos B1a o C11a. En caso de no obtenerse, habrá que efectuar un ajuste:

$$\begin{cases} B1a \rightarrow z_p = -0,025 \cdot (-35) = 0,875 \text{ mm} \\ C11a \rightarrow z_p = -0,025 \cdot (15,64) = -0,391 \text{ mm} \end{cases}$$

Esto es correcto, no requiriéndose de ningún ajuste en consecuencia.

Por último, hay que definir los parámetros k (inclinación o semiconicidad), γ_o (ángulo de contacto) y R_{x_2} (radio de curvatura transversal o lateral de la rueda, que se puede ver en la figura 4.4 de la [subsección 4.4.2](#)) de la banda de rodadura. Estos parámetros son [29.A]:

$$\begin{cases} k = 0,025 \\ \gamma_o = \arctan(0,025) = 1,432^\circ \\ R_{x_2} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{R_{x_2}} \rightarrow 0 \end{cases}$$

III.4.1.2. Banda de protección.

La banda de protección abarca entre el punto B1a y el A1. Sus coordenadas son (0; -35; 0,875) y (0; -65; 5,375) respectivamente. Entre estos dos puntos hay un segmento cuya inclinación nominal es del 15 % (0,15 en tanto por unidad), si bien la norma admite valores entre el 6,7 y el 15 %.

La función $z_p(y_p)$ es en este caso, teniendo en cuenta que el origen de coordenadas está a 0,875 mm por debajo de B1a y 35 mm a su izquierda:

$$z_p = 0,875 - 0,15(y_p + 35) \quad [Ec. III. 2]$$

Ahora se realiza también una comprobación de las coordenadas:

$$\begin{cases} B1a \rightarrow z_p = 0,875 - 0,15 \cdot (-35 + 35) = 0,875 \text{ mm} \\ A1 \rightarrow z_p = 0,875 - 0,15 \cdot (-65 + 35) = 5,375 \text{ mm} \end{cases}$$

Esto es correcto, no requiriéndose de ningún ajuste en consecuencia.

Pese a que es bastante improbable que el contacto rueda – carril se produzca en este tramo, en este caso también se definen los parámetros k y R_{x_2} [29.A]:

$$\begin{cases} k = 0,15 \\ \gamma_o = \arctan(0,15) = 8,531^\circ \\ R_{x_2} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{R_{x_2}} \rightarrow 0 \end{cases}$$

III.4.1.3. Bisel.

El bisel de 5 x 5 mm es el remate de la rueda. El segmento comienza en el punto A1 (0; -65; 5,375) y termina en el punto I (0; -70; 10,375). Como el bisel es 5 x 5 mm, su ángulo es 45 ° y su inclinación es del 100 % (1 en por unidad).

La función $z_p(y_p)$ es en este caso, teniendo en cuenta que el origen de coordenadas está 5,375 mm por debajo de A1 y 65 mm a su izquierda:

$$z_p = 5,375 - 1(y_p + 65) \quad [Ec. III. 3]$$

La comprobación de coordenadas es la que sigue:

$$\begin{cases} A1 \rightarrow z_p = 5,375 - 1 \cdot (-65 + 65) = 5,375 \text{ mm} \\ I \rightarrow z_p = 5,375 - 1 \cdot (-70 + 65) = 10,375 \text{ mm} \end{cases}$$

Lo cual es correcto.

Finalmente, no hace falta definir los parámetros k y R_{x_2} en este caso, puesto que el contacto rueda – carril nunca se va a producir en el bisel [29.A].

III.4.1.4. Curvas de acuerdo entre la pestaña y la banda de rodadura.

La norma define dos curvas de acuerdo entre la pestaña y la banda de rodadura, que son las que siguen:

- ✓ Una curva de radio 36 mm entre C11a (0; 15,64; -0,391) y D1a (0; 32,696; -5,180). El centro de este radio está en el punto Jm (0; 14,740; -36,380).
- ✓ Una curva de radio 13 mm entre D1a (0; 32,696; -5,180) y D1 (0; 35; -6,867). El centro de este radio está en el punto Dm (0; 26,211; -16,446).

Las funciones $z_p(y_p)$ se obtienen a partir de la ecuación genérica de la circunferencia, que es la mostrada a continuación, expresada según las variables habituales y según z_{centro} y y_{centro} , que son las coordenadas del centro de la circunferencia:

$$(z_p - z_{centro})^2 + (y_p - y_{centro})^2 = R_x^2 \quad [Ec. III. 4]$$

Sustituyendo z_{centro} , y_{centro} y R_x por los datos conocidos se obtienen estas dos funciones (en [mm]):

$$\begin{cases} (z_p + 36,380)^2 + (y_p - 14,740)^2 = 36^2 & [Ec. III. 5] \\ (z_p + 16,446)^2 + (y_p - 26,211)^2 = 13^2 & [Ec. III. 6] \end{cases}$$

En cuanto a los parámetros, el parámetro R_x es el propio radio de curvatura [29.A], pero este no es el caso de los parámetros k y γ_o , los cuales no se pueden definir directamente en tramos curvos, donde hay que realizar una equivalencia. Es el concepto de conicidad equivalente el que aquí debe aplicarse ([5.A, p. 62], [7, p. 14]), si bien en este caso es más correcto hablar de semiconicidad o inclinación equivalente. Esta inclinación equivalente podría definirse de este modo:

$$k = \left| \frac{\Delta z_p}{\Delta y_p} \right| \quad [Ec. III. 7]$$

En el caso de la curva de 36 mm, estos parámetros valen:

$$\begin{cases} k = \left| \frac{-5,180 - (-0,391)}{32,696 - 15,64} \right| = 0,074 \\ \gamma_o = \arctan(0,074) = 4,258^\circ \\ R_x = 36 \text{ mm} \end{cases}$$

Y para la curva de 13 mm:

$$\begin{cases} k = \left| \frac{-6,867 - (-5,180)}{35 - 32,696} \right| = 0,732 \\ \gamma_o = \arctan(0,732) = 36,212^\circ \\ R_x = 13 \text{ mm} \end{cases}$$

III.4.1.5. Pestaña.

La pestaña la define la norma en su anexo A mediante cinco curvas, que se pueden ver en su figura A.1 y que son las que siguen:

- ✓ Curva de radio 13 mm entre D1 (0; 35; -6,867) y E1 (0; 38,427; -12). El centro de este radio está en Dm (0; 26,211; -16,446).
- ✓ Curva de radio 20 mm entre E1 (0; 38,427; -12) y G1 (0; 49,663; -26,748). El centro de este radio está en Fm (0; 58,558; -8,835).
- ✓ Curva de radio 12 mm entre G1 (0; 49,663; -26,748) y S (0; 55; -28). El centro de este radio está en REm (0; 55; -16).
- ✓ Curva de radio 12 mm entre S (0; 55; -28) y H1 (0; 62,765; -25,149). El centro de este radio está en RIm (0; 55; -16).
- ✓ Curva de radio 20,5 mm entre H1 (0; 62,765; -25,149) y H2 (0; 70; -9,519). El centro de este radio está en Hm (0; 49,500; -9,519).

En vista de los datos, la primera curva puede unificarse con la segunda curva de acuerdo entre la pestaña y la banda de rodadura, ya que el radio y el centro son los mismos. Asimismo, las dos curvas de 12 mm de radio pueden unificarse también, ya que comparten radio, además de centro.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, las tres funciones resultantes son [29.A]:

$$\begin{cases} (-(z_p + 8,835))^2 + (y_p - 58,558)^2 = 20^2 & [Ec. III. 8] \\ (-(z_p + 16))^2 + (y_p - 55)^2 = 12^2 & [Ec. III. 9] \\ (-(z_p + 9,519))^2 + (y_p - 49,500)^2 = 20,5^2 & [Ec. III. 10] \end{cases}$$

Nota: En ecuaciones III.8, III.9 y III.10 se ha introducido un signo negativo porque el giro de estas tres curvas es dextrógiro en vez de levógiro, como era en las ecuaciones III.5 y III.6. Este signo quiere decir que hay que tomar la solución negativa de la raíz cuadrada una vez se ha despejado z_p ; en vez de la solución positiva, la cual solamente aplica a las ecuaciones III.5 y III.6.

En cuanto a los parámetros k, γ_o , estos no resultan de interés en este caso porque no se prevé un contacto en estas curvas. Y el parámetro R_x es simplemente el radio de cada curva.

III.4.1.6. Cambios necesarios para la obtención del perfil de la rueda izquierda.

El perfil de la rueda izquierda es exactamente igual al de la derecha, pero está en una posición invertida respecto del sistema de coordenadas $X_p Y_p Z_p$. Esto tiene varias implicaciones en las funciones obtenidas, como se va a explicar seguidamente.

Primero de todo, de la banda rodadura, entre la circunferencia de rodadura nominal y el punto B1a, queda con coordenadas positivas ($z_p, y_p > 0$); mientras que la otra parte de la banda, entre la circunferencia de rodadura nominal y el punto C11a, queda con coordenadas negativas ($z_p, y_p < 0$). Ello obliga a cambiar el signo negativo de la ecuación III.1 por uno positivo:

$$z_p = 0,025y_p \quad [Ec. III. 11]$$

Después, yendo a la banda de protección, se ve que las coordenadas son positivas ($z_p, y_p > 0$). Ello obliga a invertir algunos signos de la ecuación III.2:

$$z_p = 0,875 + 0,15(y_p - 35) \quad [Ec. III. 12]$$

Lo mismo sucede en el caso del bisel:

$$z_p = 5,375 + 1(y_p - 65) \quad [Ec. III. 13]$$

En las curvas de transición entre la pestaña y la banda de rodadura ahora se tienen coordenadas negativas ($z_p, y_p < 0$). Ello obliga a modificar los signos de y_{centro} en las funciones de estas curvas:

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_p + 36,380)^2 + (y_p + 14,740)^2 = 36^2 \quad [Ec. III. 14] \\ (z_p + 16,446)^2 + (y_p + 26,211)^2 = 13^2 \quad [Ec. III. 15] \end{array} \right.$$

Lo mismo sucede en el caso de la pestaña, que ahora está en una zona de coordenadas negativas, por lo que en las funciones solamente deben aparecer signos positivos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-(z_p + 8,835))^2 + (y_p + 58,558)^2 = 20^2 \quad [Ec. III. 16] \\ (-(z_p + 16))^2 + (y_p + 55)^2 = 12^2 \quad [Ec. III. 17] \\ (-(z_p + 9,519))^2 + (y_p + 49,500)^2 = 20,5^2 \quad [Ec. III. 18] \end{array} \right.$$

III.4.1.7. Representación de los perfiles en el programa EES.

El programa EES es capaz de representar las funciones obtenidas, para lo cual basta con un procedimiento de representación en el que se especifiquen las funciones y los límites de cada una y con una tabla en la cual se introduzcan las coordenadas y_p para las cuales se desea conocer los valores de z_p . Al final el programa representa los pares de puntos $y_p - z_p$, generándose así los perfiles.

Nota: Las ecuaciones de las curvas se introducen en forma explícita, ya que en los procedimientos del EES no se permite introducir ecuaciones en forma implícita. Al despejar z_p aparece una raíz cuadrada, de la cual se toma la solución positiva cuando el giro es levógiro (curvas de acuerdo) y la negativa cuando el giro es dextrógiro (curvas de la pestaña, exceptuando la primera curva de la pestaña, la cual se ha introducido unificada con la segunda curva de transición).

A continuación, se muestran las coordenadas del perfil de la rueda derecha y la representación obtenida del perfil por este procedimiento:

Tabla III.5. Coordenadas del perfil de la rueda derecha.

1.57	1	y_p [mm]	2	z_p [mm]			
Run 1		-70,00		10,375	Run 29	0,00	0,000
Run 2		-67,50		7,875	Run 30	2,50	-0,063
Run 3		-65,00		5,375	Run 31	5,00	-0,125
Run 4		-62,50		5,000	Run 32	7,50	-0,188
Run 5		-60,00		4,625	Run 33	10,00	-0,250
Run 6		-57,50		4,250	Run 34	12,50	-0,313
Run 7		-55,00		3,875	Run 35	15,00	-0,375
Run 8		-52,50		3,500	Run 36	17,50	-0,486
Run 9		-50,00		3,125	Run 37	20,00	-0,766
Run 10		-47,50		2,750	Run 38	22,50	-1,226
Run 11		-45,00		2,375	Run 39	25,00	-1,873
Run 12		-42,50		2,000	Run 40	27,50	-2,717
Run 13		-40,00		1,625	Run 41	30,00	-3,774
Run 14		-37,50		1,250	Run 42	32,50	-5,066
Run 15		-35,00		0,875	Run 43	35,00	-6,867
Run 16		-32,50		0,813	Run 44	37,50	-9,999
Run 17		-30,00		0,750	Run 45	40,00	-16,292
Run 18		-27,50		0,688	Run 46	42,50	-20,757
Run 19		-25,00		0,625	Run 47	45,00	-23,538
Run 20		-22,50		0,563	Run 48	47,50	-25,500
Run 21		-20,00		0,500	Run 49	50,00	-26,909
Run 22		-17,50		0,438	Run 50	52,50	-27,737
Run 23		-15,00		0,375	Run 51	55,00	-28,000
Run 24		-12,50		0,313	Run 52	57,50	-27,737
Run 25		-10,00		0,250	Run 53	60,00	-26,909
Run 26		-7,50		0,188	Run 54	62,50	-25,367
Run 27		-5,00		0,125	Run 55	65,00	-22,935
Run 28		-2,50		0,063	Run 56	67,50	-19,330
					Run 57	70,00	-9,519

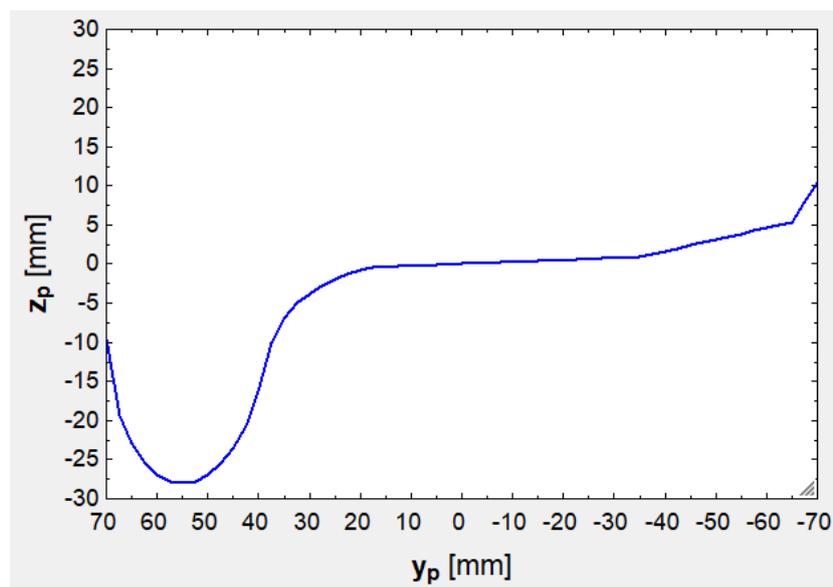


Figura III.8. Representación del perfil de la rueda derecha en el EES.

En el caso de la rueda izquierda, lo único que varía es el signo de z_p , que será negativo cuando y_p también lo sea (parte izquierda de la tabla) y positivo cuando y_p también lo sea (parte derecha de la tabla).

La representación gráfica del perfil izquierdo es la que sigue:

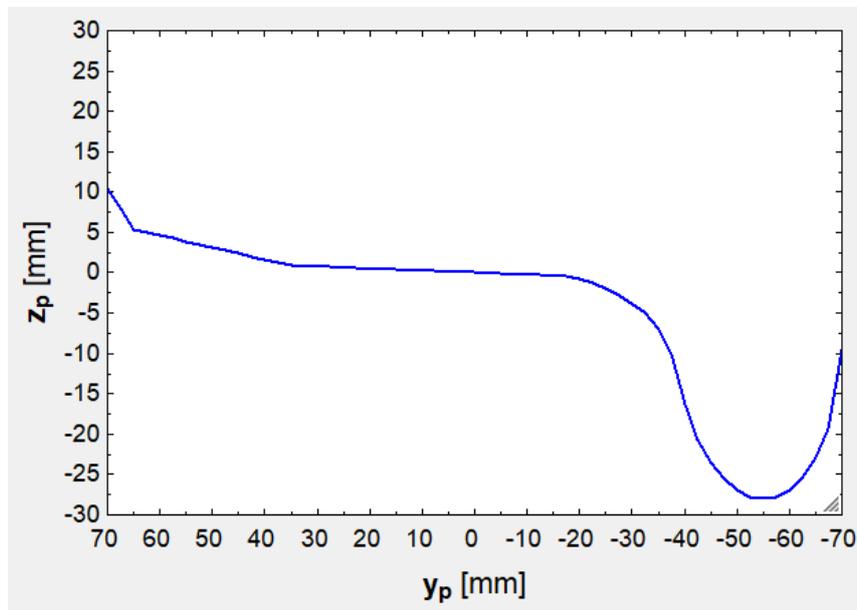


Figura III.9. Representación del perfil de la rueda izquierda en el EES.

III.4.2. Carril.

El perfil del carril también se va a construir mediante funciones matemáticas, dado que es preciso verificar su adaptación a la rueda para así hallar las características de las regiones en las cuales se produce la rodadura.

Como en el caso de la rueda, lo primero que se realiza es emplazar un sistema de referencia, que en este caso se va a denotar $X_s Y_s Z_s$, con la 's' de "superficie de rodadura". La norma UNE-EN 13674-1:2012+A1:2018 [30.A] no dicta la colocación de ningún sistema de coordenadas *per se*, sino que solamente coloca un eje X-X' y otro eje Y-Y' que intersecan en el centro del carril con el objeto de expresar los momentos de inercia respecto de esos ejes.

El sistema de coordenadas $X_s Y_s Z_s$ se coloca en el punto central y el más alto, ya que así se podrá aprovechar la simetría axial del perfil para su construcción. Una ventaja de la simetría es que ahora no hace falta distinguir entre carril derecho e izquierdo, lo cual simplifica el procedimiento.

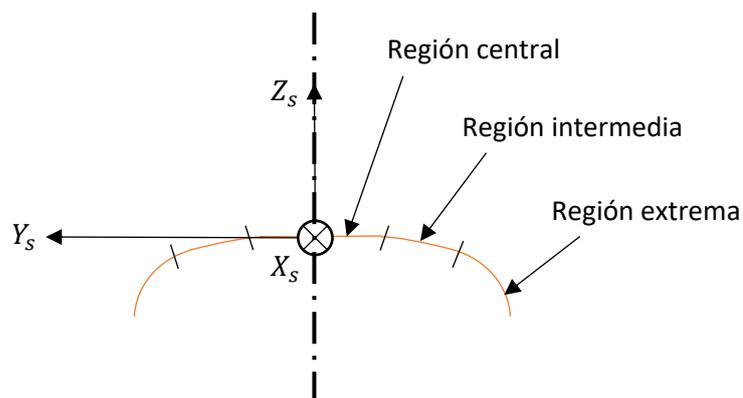


Figura III.10. Colocación del sistema de referencia $X_s Y_s Z_s$ en el perfil del carril. Fuente: Elaboración propia.

El perfil se ha dividido en estas regiones atendiendo a su curvatura:

- ✓ Una región central con radio de curvatura de 300 mm.
- ✓ 2 regiones intermedias con un radio de 80 mm.
- ✓ 2 regiones extremas con un radio de 13 mm.

A continuación, se va a ajustar cada región, tratando cada uno de estos tres epígrafes en una parte independiente y haciendo aprovechamiento de la simetría axial del perfil. Finalmente, en una cuarta parte, se representará el perfil en el programa EES.

Las coordenadas se van a extraer de la norma UNE-EN [30.A] y no de la ET 03.360.161.8 de ADIF [34.A], dado que la primera aporta información acerca de los puntos singulares

III.4.2.1. Región central.

La región central del carril se caracteriza por tener un radio de curvatura mucho mayor que los demás, de 300 mm. La norma no indica dónde está su centro, pero gracias a la simetría axial se deduce que está en el eje de simetría, a 300 mm por debajo del punto más elevado del carril, punto en el cual se ha emplazado el origen del sistema de coordenadas. Es decir, las coordenadas del centro A_m son (0; 0; -300).

Con esta información se puede plantear ya la función que describe esta circunferencia, para lo cual se toman como referencia las ecuaciones III.4 – III.10, excluyendo la III.7. La función se plantea en base a una coordenada z_s , en la dirección del eje Z_s , y una coordenada y_s , en la dirección del eje Y_s :

$$(z_s + 300)^2 + (y_s - 0)^2 = 300^2 \quad [Ec. III. 19]$$

El arco de circunferencia recorre la región central entre el punto A (0; 10,228; $z_s(A)$) y el punto B (0; -10,228; $z_s(B)$). Las coordenadas $z_s(A)$ y $z_s(B)$ se desconocen *a priori*, ya que la norma no las aclara, mas pueden calcularse a partir de la función recién definida y apoyándose en la simetría:

$$z_s(A) = z_s(B) = +\sqrt{300^2 - (\pm 10,228)^2} - 300 = -0,174 \text{ mm}$$

Finalmente, el parámetro R_{x_1} (radio de curvatura transversal o lateral del carril, que se puede ver en la figura 4.4. de la [subsección 4.4.2](#)), el cual resulta necesario para la resolución del problema de contacto, coincide sencillamente con 300 mm [30.A].

III.4.2.2. Regiones intermedias.

Hay dos regiones intermedias: una a la derecha con coordenadas negativas ($y_s, z_s < 0$) y otra a la izquierda con $y_s > 0$ y $z_s < 0$). Los detalles sobre sus arcos de circunferencia son:

- ✓ A la izquierda se tiene una curva de radio 80 mm entre el punto A (0; 10,228; -0,174) y el C, punto singular cuyas coordenadas da la norma (0; 26,027; -2,300). La norma no declara la ubicación del centro C_m (0; $y_s(C_m)$, $z_s(C_m)$).
- ✓ A la derecha se tiene una curva de radio 80 mm entre el punto B (0; -10,228; -0,174) y el D, punto singular cuyas coordenadas da la norma (0; -26,027; -2,300). La norma no declara la ubicación del centro B_m (0; $y_s(B_m)$, $z_s(B_m)$).

A la izquierda, la función que se tiene es:

$$(z_s - z_s(C_m))^2 + (y_s - y_s(C_m))^2 = 80^2 \quad [Ec. III. 20]$$

Las coordenadas $y_s(C_m)$ y $z_s(C_m)$ pueden hallarse mediante la resolución de este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (-0,174 - z_s(C_m))^2 + (10,228 - y_s(C_m))^2 = 80^2 & [Ec. III. 21] \\ (-2,300 - z_s(C_m))^2 + (26,027 - y_s(C_m))^2 = 80^2 & [Ec. III. 22] \end{cases}$$

El programa EES devuelve $y_s(C_m) = 7,513$ y $z_s(C_m) = -80,128$, ambas coordenadas en [mm]. Por tanto, C_m estará en (0; 7,513; -80,128). Así, la curva izquierda se regirá por esta ecuación:

$$(z_s + 80,128)^2 + (y_s - 7,513)^2 = 80^2 \quad [Ec. III. 23]$$

Aplicando la simetría es posible deducir que el centro B_m de la curva derecha estará en (0; -7,513; -80,130). Su función será:

$$(z_s + 80,128)^2 + (y_s + 7,513)^2 = 80^2 \quad [Ec. III. 24]$$

Finalmente, cabe señalar que el parámetro R_{x_1} coincide con 80 mm en ambos casos [30.A].

III.4.2.3. Regiones extremas.

Hay dos regiones extremas: una a la derecha con coordenadas negativas ($y_s, z_s < 0$) y otra a la izquierda con $y_s > 0$ y $z_s < 0$). Los detalles sobre sus arcos de circunferencia son:

- ✓ A la izquierda se tiene una curva de radio 13 mm entre el punto el C (0; 26,027; -2,300) y el E, punto singular cuyas coordenadas da la norma (0; 36; -14,300). La norma no declara la ubicación del centro E_m (0; $y_s(E_m)$, $z_s(E_m)$).
- ✓ A la derecha se tiene una curva de radio 13 mm entre el punto D (0; -26,027; -2,300), punto singular cuyas coordenadas da la norma (0; -36; -14,300). La norma no declara la ubicación del centro D_m (0; $y_s(D_m)$, $z_s(D_m)$).

A la izquierda, la función que se tiene es:

$$(z_s - z_s(E_m))^2 + (y_s - y_s(E_m))^2 = 13^2 \quad [Ec. III. 25]$$

Las coordenadas $y_s(E_m)$ y $z_s(E_m)$ pueden hallarse mediante la resolución de este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (-2,300 - z_s(E_m))^2 + (26,027 - y_s(E_m))^2 = 13^2 & [Ec. III. 26] \\ (-14,300 - z_s(E_m))^2 + (36 - y_s(E_m))^2 = 13^2 & [Ec. III. 27] \end{cases}$$

El programa EES devuelve $y_s(E_m) = 23,016$ y $z_s(E_m) = -14,947$, ambas coordenadas en [mm]. Por tanto, E_m estará en (0; 23,016; -14,947). Así, la curva izquierda se regirá por esta ecuación:

$$(z_s + 14,947)^2 + (y_s - 23,016)^2 = 13^2 \quad [Ec. III. 28]$$

Aplicando la simetría es posible deducir que el centro D_m de la curva derecha estará en (0; -23,016; -14,947). Su función será:

$$(z_s + 14,947)^2 + (y_s + 23,016)^2 = 13^2 \quad [Ec. III. 29]$$

Finalmente, cabe señalar que el parámetro R_{x_1} coincide con 13 mm en ambos casos [30.A].

III.4.2.4. Representación del perfil en el programa EES.

Para representar el perfil en el programa EES se define un procedimiento de representación que calcule las coordenadas z_s en función de las coordenadas y_s y represente los pares de puntos $y_s - z_s$.

A continuación, se muestran las coordenadas del perfil del carril y la representación obtenida del perfil por este procedimiento:

Tabla III.6. Coordenadas del perfil del carril.

1.49	1	y_s [mm]	2	z_s [mm]
Run 25		0,00		-0,000
Run 26		1,50		-0,004
Run 27		3,00		-0,015
Run 28		4,50		-0,034
Run 29		6,00		-0,060
Run 30		7,50		-0,094
Run 31		9,00		-0,135
Run 32		10,50		-0,184
Run 33		12,00		-0,254
Run 34		13,50		-0,352
Run 35		15,00		-0,479
Run 36		16,50		-0,634
Run 37		18,00		-0,818
Run 38		19,50		-1,031
Run 39		21,00		-1,273
Run 40		22,50		-1,544
Run 41		24,00		-1,845
Run 42		25,50		-2,176
Run 43		27,00		-2,573
Run 44		28,50		-3,160
Run 45		30,00		-3,982
Run 46		31,50		-5,097
Run 47		33,00		-6,621
Run 48		34,50		-8,855
Run 49		36,00		-14,302
Run 1		-36,00		-14,302
Run 2		-34,50		-8,855
Run 3		-33,00		-6,621
Run 4		-31,50		-5,097
Run 5		-30,00		-3,982
Run 6		-28,50		-3,160
Run 7		-27,00		-2,573
Run 8		-25,50		-2,176
Run 9		-24,00		-1,845
Run 10		-22,50		-1,544
Run 11		-21,00		-1,273
Run 12		-19,50		-1,031
Run 13		-18,00		-0,818
Run 14		-16,50		-0,634
Run 15		-15,00		-0,479
Run 16		-13,50		-0,352
Run 17		-12,00		-0,254
Run 18		-10,50		-0,184
Run 19		-9,00		-0,135
Run 20		-7,50		-0,094
Run 21		-6,00		-0,060
Run 22		-4,50		-0,034
Run 23		-3,00		-0,015

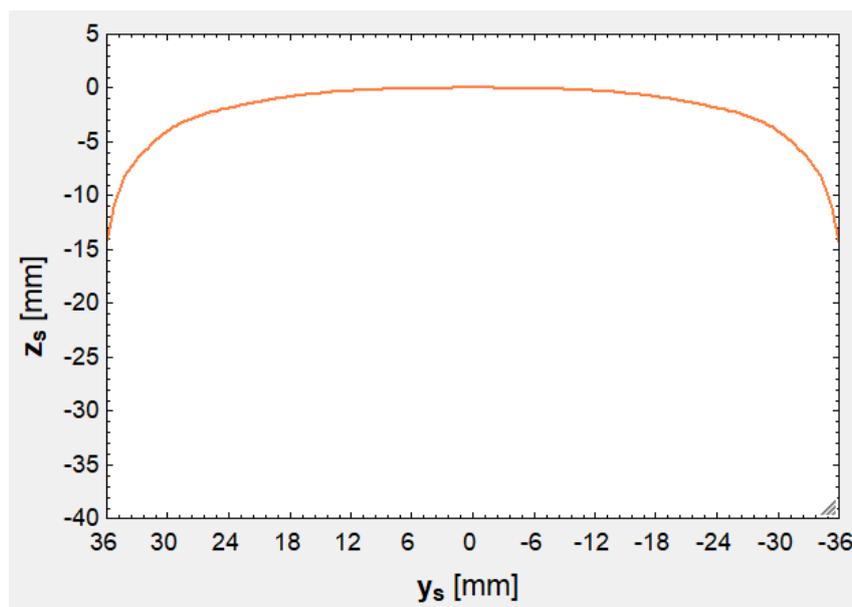


Figura III.11. Representación del perfil del carril en el EES.

III.5. Posicionamiento relativo de los perfiles.

Posicionar relativamente los perfiles de la rueda y del carril resulta de gran importancia para la correcta resolución del problema, dado que determina la posición en la que se produce el contacto rueda – carril y esto, a su vez, los parámetros de semiconicidad y curvatura en los cuales se produce dicho contacto. No es lo mismo realizar el posicionamiento en una alineación recta del trazado que en una curva, puesto que en curva hay que considerar parámetros de influencia adicionales.

III.5.1. En una alineación recta.

III.5.1.1. *Parámetros de influencia.*

Los parámetros que influyen en la posición del contacto rueda – carril cuando el juego de ruedas avanza por una alineación recta son:

- ✓ El ancho de vía, que es la distancia entre las caras internas o activas de los carriles medida a 14 mm bajo el plano de rodadura, tal como dispone la UIC [18.A, p. 9]. Para el ancho de vía va a tomarse un valor constante de 1.668 mm, correspondiente al ancho ibérico, que es el ancho de vía que se fijó en el alcance del análisis (véase la [sección 1.2](#)).
- ✓ El juego de vía, que es la diferencia entre el ancho de vía y la distancia entre las caras interiores de las pestañas, medida esta última a 10 mm bajo el plano de rodadura. El juego de vía permite la inscripcón en las curvas, disminuye el riesgo de descarrilamiento y evita muchos contactos entre la pestaña y el carril [18.A, p. 28]. El juego de vía en España es 7 mm en ancho ibérico [14.A, p. 23] y en la [sección 1.7](#) se explicó la influencia que tiene el juego de vía en el desgaste y cómo afecta usar material rodante concebido para un ancho de vía en otro ancho distinto.
- ✓ La inclinación o desplome de los carriles hacia el interior de la vía en una relación 1:20 (es decir, 5 % de pendiente) sobre la horizontal, como establece la Norma Adif Vía 7-3-2. De esta manera se reparten mejor las acciones de la rueda sobre el carril y se aleja la pestaña de la superficie lateral del carril [35.A].
- ✓ El diámetro de rodadura, que puede suponerse el nominal cuando el juego de ruedas circula por una alineación recta y el juego de ruedas no experimenta movimiento de lazo (véase la [sección 1.6](#) sobre el movimiento de lazo).
- ✓ La profundidad del desgaste en las ruedas y los carriles, que puede despreciarse si se asume que su mantenimiento es el adecuado.
- ✓ Las tolerancias de fabricación del juego de ruedas y de los carriles y las tolerancias de montaje de la vía, que pueden despreciarse en todos los casos.

En el siguiente esquema de posicionamiento del carril 60E1 y la rueda 1/40 se muestran todos los parámetros de influencia no despreciados:

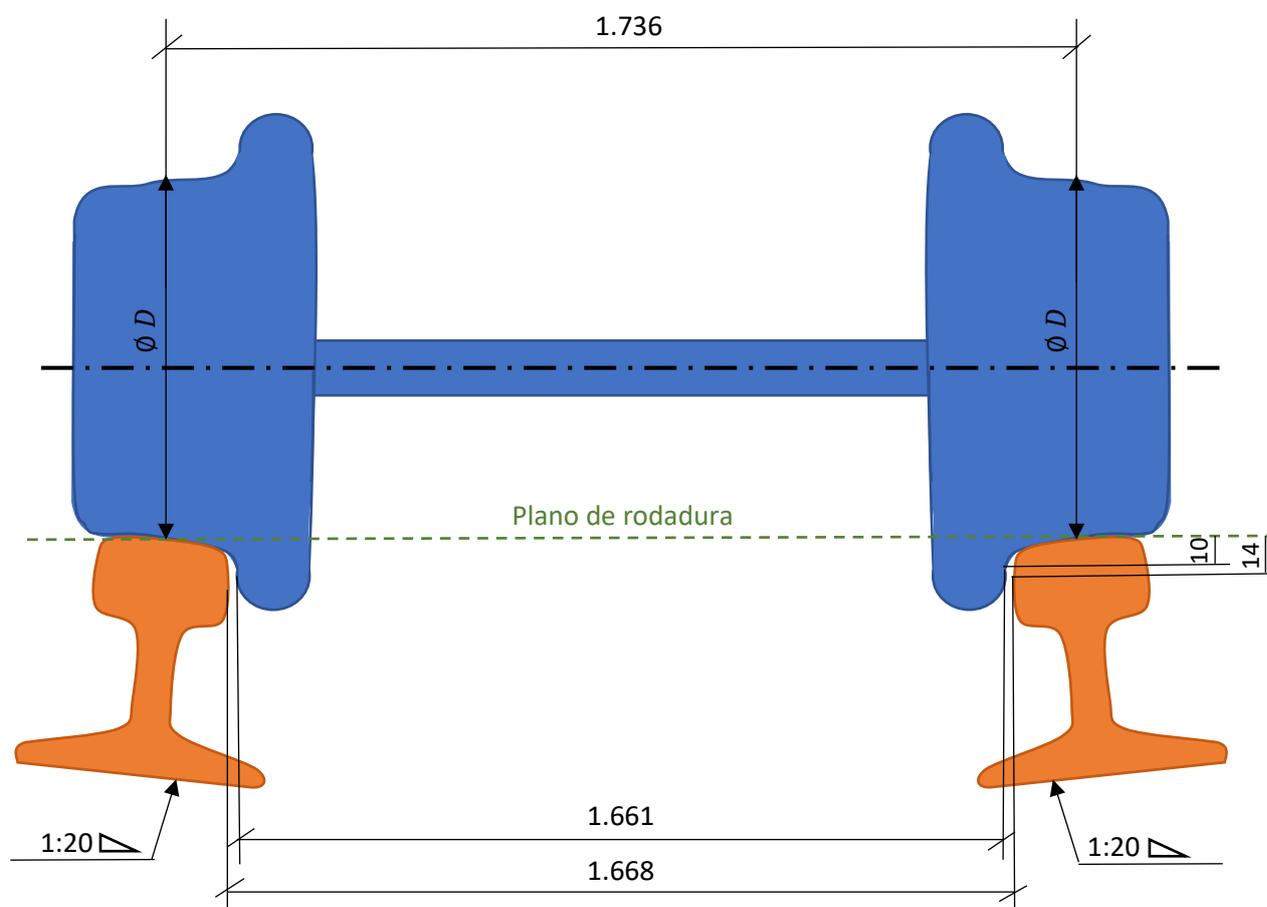


Figura III.12. Posicionamiento de un juego de ruedas de un diámetro nominal D cualquiera en una vía de ancho ibérico. Cotas en [mm]. Fuente: Elaboración propia.

La cota 1.736 mm es la distancia entre las circunferencias nominales de rodadura y es el doble de b_o , un parámetro recurrente a lo largo del [anexo I](#). Esta cota se puede parametrizar en función de la cota del ancho de vía, que se puede denotar J [mm; m] (del inglés *gauge*, pero no se usa la G porque se le ha dado otro uso); del juego de vía, que se puede denotar η [mm; m]; y del desfase existente entre la cota $2b_o$ ($= 1.736$ mm) y la cota $J - \eta$, que se puede denotar o [mm; m] (del inglés *offset*). Matemáticamente:

$$2b_o = J - \eta + o \quad [Ec. III. 30]$$

En el caso del perfil 1/40, se miden 37,50 mm entre la circunferencia de diámetro nominal y el punto situado 10 mm bajo el plano de rodadura. Esta distancia se mide tanto en la rueda izquierda como en la derecha, sumando así 75 mm en total. Estos 75 mm se corresponden con el parámetro o .

Por tanto, en la red ferroviaria española tradicional, que posee $J = 1.668$ mm y $\eta = 7$ mm, lo que se obtiene es $2b_o = 1.736$ mm al rodar con ruedas de perfil 1/40.

Esto no es igual en los perfiles S 1002 y EPS. En estos dos perfiles, lo que se mide es 32,50 mm en cada rueda, lo cual implica un desfase de 65 mm y $2b_o = 1.726$ tras aplicar la ecuación III.30.

Cabe recordar que al desarrollar la ecuación del peralte teórico en la [parte I.5.4.1](#) se supuso $2b_o = 1.733$ mm, dato que prácticamente coincide con los 1.736 mm obtenidos para el perfil 1/40. Si se corrige la ecuación entonces desarrollada, la I.175, con los 1.733 mm calculados, se tiene:

$$h_t = \frac{1.736}{1.733} \cdot 13,63 \frac{V^2}{R} \cong 13,7 \frac{V^2}{R}$$

$$h_t = 13,7 \frac{V^2}{R} \quad [Ec. III. 31]$$

donde las unidades introducidas han de ser las mismas que en la [parte I.5.4.1](#) para la obtención del peralte en [mm].

De esto se deduce que la fórmula del peralte depende mínimamente del perfil de las ruedas. Este es el motivo (si no se trata de una errata) por el cual aparece la constante 13,6 en la NAV 0-2-3.0 [20.A] y la constante 13,7 en la NAV 0-2-0.0 [19.A]. Recuérdese que estas constantes se expresan en $[mm \cdot m/(km/h)^2]$.

III.5.1.2. Colocación de los perfiles respecto de un mismo origen de coordenadas.

Para colocar los perfiles respecto de un mismo origen de coordenadas, origen constituido por el punto de la circunferencia de rodadura nominal que contacte con el carril (el punto central del área de contacto), es preciso determinar las coordenadas de dicho punto en el sistema de referencia del carril.

Es decir, lo que se busca es expresar las coordenadas del perfil y del carril respecto del origen del sistema de referencia $X_p Y_p Z_p$. Para ello, requiérese de estas dos fases de cambio de coordenadas:

- ✓ Rotación de las coordenadas del sistema $X_s Y_s Z_s$ un ángulo χ [°] (conocido *a priori*, ya que es el correspondiente a la inclinación 1:20) para expresarlas en el sistema $X'_s Y'_s Z'_s$.
- ✓ Translación de las coordenadas rotadas del sistema $X'_s Y'_s Z'_s$ (coincidente con el sistema $X_p Y_p Z_p$) en una distancia $\Delta y'_s$ en horizontal y $\Delta z'_s$ en vertical (ignotas *a priori*) para expresarlas en el sistema $X''_s Y''_s Z''_s$.

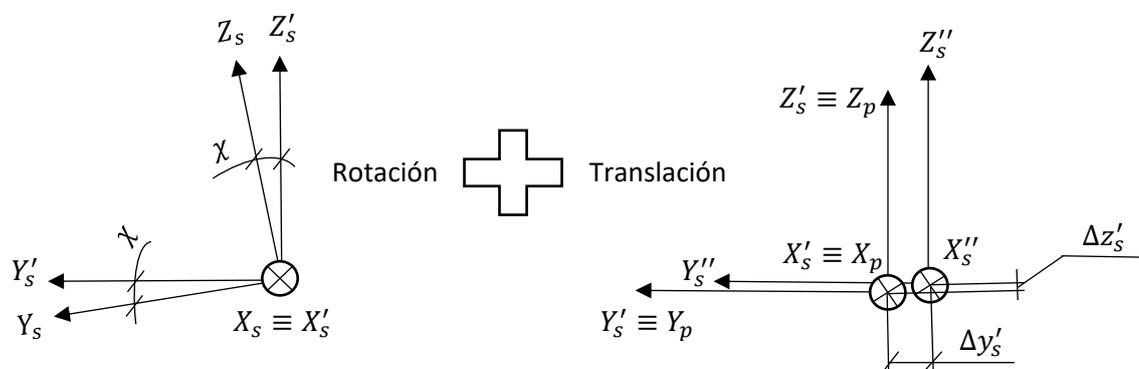


Figura III.13. Fases del cambio de coordenadas. Fuente: Elaboración propia.

Comiéntase por la rotación. De partida, se asume que la base del sistema de destino $X'_s Y'_s Z'_s$ es la base canónica, conformada por estos tres vectores:

$$\begin{cases} (1; 0; 0) \text{ en } X'_s \\ (0; 1; 0) \text{ en } Y'_s \\ (0; 0; 1) \text{ en } Z'_s \end{cases}$$

La base del sistema de partida $X_s Y_s Z_s$ está conformada por estos tres vectores respecto de la base canónica, los cuales incluyen el parámetro χ (el ángulo rotado):

$$\begin{cases} (1; 0; 0) \text{ en } X_s \\ (0; \cos\chi; -\text{sen}\chi) \text{ en } Y_s \\ (0; \text{sen}\chi; \cos\chi) \text{ en } Z_s \end{cases}$$

Para transformar las coordenadas de la base del sistema $X_s Y_s Z_s$ a la del sistema $X'_s Y'_s Z'_s$ es preciso obtener esta matriz de cambio de base en el espacio \mathbb{R}^3 , lo cual significa que las dimensiones de la matriz serán 3 filas y 3 columnas (3x3):

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad [\text{Ec. III. 32}]$$

Los componentes de esta matriz, denotados α_i, β_i e γ_i para $i = 1, 2, 3$, donde i representa el número de columna de la matriz; se pueden hallar resolviendo un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas. Este sistema es el abajo mostrado:

$$\begin{cases} (1; 0; 0) = \alpha_1 (1; 0; 0) + \beta_1 (0; 1; 0) + \gamma_1 (0; 0; 1) & [\text{Ec. III. 33}] \\ (0; \cos\chi; -\text{sen}\chi) = \alpha_2 (1; 0; 0) + \beta_2 (0; 1; 0) + \gamma_2 (0; 0; 1) & [\text{Ec. III. 34}] \\ (0; \text{sen}\chi; \cos\chi) = \alpha_3 (1; 0; 0) + \beta_3 (0; 1; 0) + \gamma_3 (0; 0; 1) & [\text{Ec. III. 35}] \end{cases}$$

Tras resolver este sistema e introducir las 9 soluciones en la matriz se llega a:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\chi & \text{sen}\chi \\ 0 & -\text{sen}\chi & \cos\chi \end{pmatrix} \quad [\text{Ec. III. 36}]$$

Reemplazando χ por su valor numérico ($\arctan(1/20)$, que equivale a $2,862^\circ$) y calculando los senos y cosenos se llega a esta matriz, cuyas componentes vienen expresadas como números reales adimensionales con una resolución de 3 cifras decimales:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,999 & 0,050 \\ 0 & -0,050 & 0,999 \end{pmatrix} \quad [\text{Ec. III. 37}]$$

Para rotar las coordenadas, la ecuación matricial que se aplicará es la abajo mostrada, que incluye las coordenadas de partida (x_s en el eje X_s , y_s en el Y_s y z_s en el Z_s) y aquellas de destino (x'_s en el eje X'_s , y'_s en el Y'_s y z'_s en el Z'_s):

$$(x'_s; y'_s; z'_s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,999 & 0,050 \\ 0 & -0,050 & 0,999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} \quad [Ec. III. 38]$$

Con esta ecuación matricial se soluciona la rotación de coordenadas. Después es necesaria la translación del sistema rotado $X'_s Y'_s Z'_s$ (coincidente con el $X_p Y_p Z_p$) al sistema $X''_s Y''_s Z''_s$. Esta translación es necesaria porque el punto de contacto pertenece a la circunferencia de diámetro nominal (origen del sistema $X_p Y_p Z_p$), pero no pertenece al punto central del carril, punto central en el cual debe colocarse el origen del sistema $X''_s Y''_s Z''_s$

Al ligero decalaje existente entre el punto de contacto y el punto central del carril se le ha asignado el símbolo $\Delta y'_s$ en el eje Y'_s y $\Delta z'_s$ en el Z'_s , como se muestra en la figura III.13. Sabiendo esto, se plantea la ecuación característica de la translación de coordenadas, la cual permite determinar las coordenadas trasladadas x''_s, y''_s y z''_s , las cuales van, respectivamente, en X''_s, Y''_s y Z''_s :

$$(x''_s; y''_s; z''_s) = (x'_s; y'_s; z'_s) + (0; \Delta y'_s; \Delta z'_s) = (x'_s; y'_s + \Delta y'_s; z'_s + \Delta z'_s)$$

$$(x''_s; y''_s; z''_s) = (x'_s; y'_s + \Delta y'_s; z'_s + \Delta z'_s) \quad [Ec. III. 39]$$

En la figura inferior se aprecia cómo el punto de contacto Co , su decalaje respecto al centro del carril, que es el punto Ce , y las distancias características necesarias para la determinación del decalaje (10 y 14 mm en perpendicular al plano de rodadura y 3,50 y 37,50 mm en paralelo):

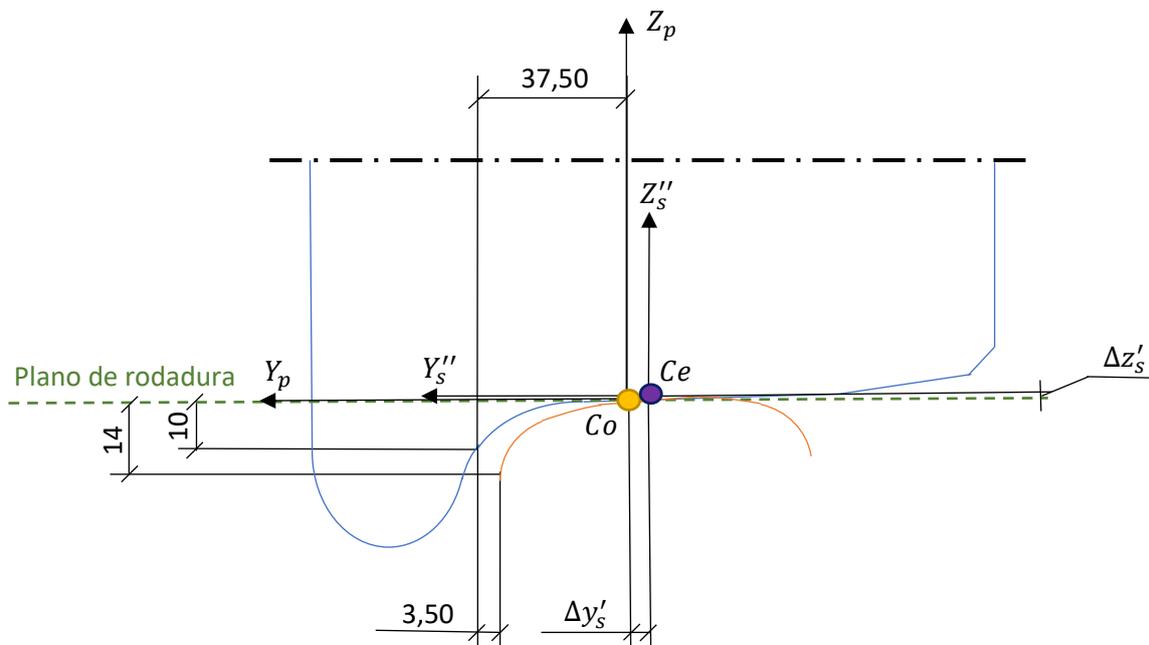


Figura III.14. Posicionamiento conjunto de los perfiles y cotas para ser determinadas. Fuente: Elaboración propia.

El decalaje puede calcularse gráficamente mediante la ayuda del EES, de forma que el carril quede posicionado con un juego de 3,50 mm y en el punto Co quede nivelada la cota del carril con la de la rueda. Para que ambas cosas se den simultáneamente, el decalaje ha de ser:

- ✓ -1 mm en horizontal ($\Delta y'_s$, siendo negativo porque va en el sentido negativo del eje Y'_s , que es coincidente con el Y_p).
- ✓ +0,06 mm en vertical ($\Delta z'_s$, siendo positivo porque va en el sentido positivo del eje Z'_s , que es coincidente con el Z_p).

El resultado del posicionamiento es el siguiente para la rueda y el carril derechos; todo realizado con el EES:

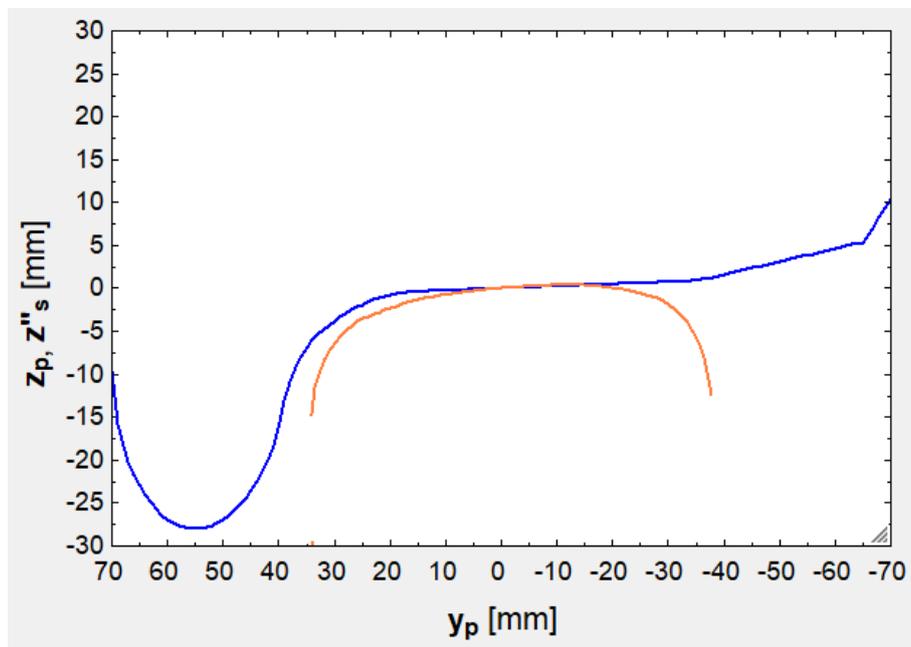


Figura III.15. Resultado del posicionamiento para la rueda y carril derechos.

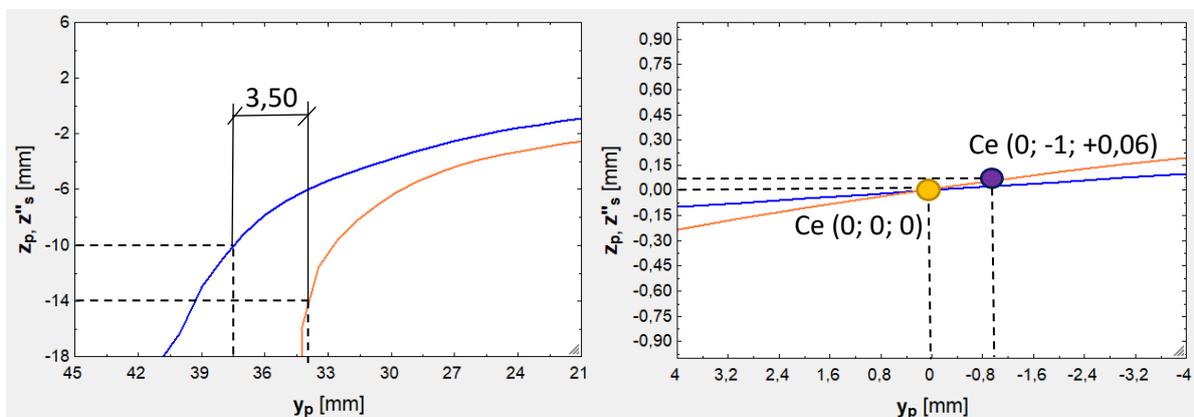


Figura III.16. Comprobación del juego de 3,50 mm y del nivelado en el punto Co.

Como se ve, parece haber una pequeña interpenetración entre el carril y la rueda a la derecha del origen y un desnivel a la izquierda. Sin embargo, esto no es relevante, ya que las distancias son del orden de centésimas de milímetro (es decir, decenas de micrómetro) y en la realidad intervendrán las tolerancias y la rugosidad, que eliminarán esta interpenetración y este desnivel y, en general, favorecerán el contacto rueda – carril en el área en torno al punto Co.

Por último, en el caso de la rueda y el carril izquierdos se tendrá lo siguiente; conseguido con el procedimiento desarrollado para la representación de la rueda izquierda (explicado en la [parte III.4.1.6](#)), invirtiendo el signo del ángulo de rotación del carril (que ahora será $-2,862^\circ$) y el signo del decalaje horizontal (que ahora será $+1$ mm), pero no el del vertical (que seguirá siendo $+0,06$ mm):

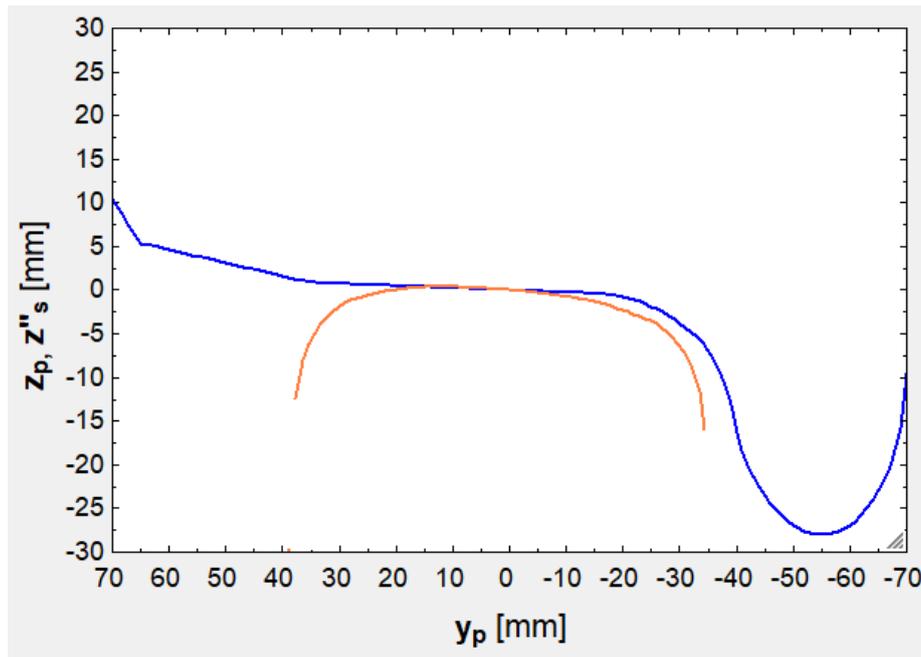


Figura III.17. Resultado del posicionamiento para la rueda y carril izquierdos.

III.5.1.3. Parámetros de semiconicidad y curvatura en la posición de contacto.

Una vez se ha determinado la posición de contacto, es posible saber cuáles serán los parámetros de semiconicidad y curvatura en la posición de contacto. Básicamente, el contacto se produce en estas regiones de la rueda y del carril:

- ✓ En la banda de rodadura de la rueda, cuyos parámetros se definieron en la [parte III.4.1.1](#).
- ✓ En la región central del carril, cuyos parámetros se definieron en la [parte III.4.2.1](#).

Los parámetros buscados de la rueda y del carril, definidos en sendas partes, se recopilan a continuación:

$$\begin{cases} k = 0,025 \\ \gamma_0 = \arctan(0,025) = 1,432^\circ \\ R_{x_2} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{R_{x_2}} \rightarrow 0 \\ R_{x_1} = 300 \text{ mm} \end{cases}$$

III.5.2. En una alineación curva.

III.5.2.1. Parámetros de influencia.

En una alineación curva, que puede ser una curva circular o de transición, los parámetros de influencia son los mismos que en una alineación recta más varios adicionales. Los adicionales son:

- ✓ El sobreebanco, que es, según la Norma Adif Vía 0-2-2.1 [36.A], la mayor anchura que se le da a la vía en curvas de radio reducido para facilitar la inscripción de los vehículos. No afecta a la distancia entre el eje de la vía y el carril interior a la curva, sino a la distancia entre el eje de la vía y el hilo (carril) exterior. Esto contribuye a estabilizar el vehículo, como se puede inferir a partir del análisis dinámico de la [subsección I.5.3.](#)

La Norma Adif Vía 7-3-2.0 [37.A] dispone estos valores de sobreebanco en función del radio de la curva. El sobreebanco, que no afecta al parámetro b_o , se va a designar ξ [mm; m]:

$$\xi = \begin{cases} 0 \text{ mm}, & 300 \text{ m} < R & [\text{Ec. III. 40}] \\ 5 \text{ mm}, & 250 < R \leq 300 \text{ m} & [\text{Ec. III. 41}] \\ 10 \text{ mm}, & 200 < R \leq 250 \text{ m} & [\text{Ec. III. 42}] \\ 15 \text{ mm}, & 150 < R \leq 200 \text{ m} & [\text{Ec. III. 43}] \\ 20 \text{ mm}, & 100 < R \leq 150 \text{ m} & [\text{Ec. III. 44}] \end{cases}$$

El ancho de vía con sobreebanco J' [mm; m] no afecta a la ecuación III.30 (la de b_o), pero valdrá:

$$J' = J + \xi \quad [\text{Ec. III. 45}]$$

- ✓ La flecha, que es un parámetro que permite caracterizar cuán cerrada es una curva y ayuda a determinar cómo se inscribirá el bogie en la misma. Según [36.A, p. 4], la flecha se define para una determinada cuerda: se toman dos puntos de un arco (el carril), se unen en línea recta (esta línea es la cuerda) y se mide la máxima distancia posible entre la cuerda y el arco, medida que se realiza perpendicularmente a la cuerda (esta medida es la flecha). Para evitar tener que realizar todas estas medidas, existen fórmulas directas que ligan la flecha f [m] con la cuerda C [m] y el radio de la curva:

$$f = R \left[1 - \cos \left(\arcsen \left(\frac{C}{2R} \right) \right) \right] \quad [\text{Ec. III. 46}]$$

Sin embargo, lo habitual es recurrir a la siguiente aproximación, la cual es bastante precisa y permite calcular un valor promedio directamente en el caso de las curvas de transición (pues, según esta expresión, \bar{f} es directamente proporcional a $\overline{1/R}$):

$$\bar{f} = \frac{C^2}{8R} \quad [\text{Ec. III. 47}]$$

- ✓ El descentramiento del juego de ruedas en las curvas, del cual se habló extensamente en la [subsección I.4.1](#), pero ahora se van a entrar en mayores detalles. Los radios de rodadura de la rueda externa e interna a la curva, que no se explicitaron entonces, son estos:

$$r_e = r_o + ky \quad [Ec. III. 48]$$

$$r_i = r_o - ky \quad [Ec. III. 49]$$

El descentramiento y tiene un límite, que es la suma del semijuego de vía y del sobreaño:

$$y_{\text{lim}} = \frac{\eta}{2} + \xi \quad [Ec. III. 50]$$

Este límite no se podrá rebasar, por lo que en curvas cerradas que requieran un gran descentramiento se producirá el contacto entre la esquina del carril y las curvas de acuerdo entre la pestaña y la banda de rodadura, situación en la cual se tendrá un r_e mayor que el predicho por la ecuación III.48. Esto se mostrará más adelante.

- ✓ El ángulo de lazo ψ , cuya influencia puede despreciarse, al menos en los casos en los cuales la pestaña no contacta con el carril [4.A, p. 4]. Para más información acerca de este grado de libertad, véase la [subsección I.4.4](#).
- ✓ El ángulo de desplazamiento longitudinal del área de contacto ζ , cuya influencia es limitada y puede despreciarse, al menos en los casos en los cuales la pestaña no contacta con el carril. [4.A, p. 4]. Para más información, véase la [subsección I.4.9](#).
- ✓ El balanceo del juego de ruedas Φ , que es ángulo pequeño, pero que puede llegar a influir en la posición de contacto. Para más información acerca de este grado de libertad, véase la [subsección I.4.10](#).

En el siguiente esquema de posicionamiento del carril 60E1 y la rueda 1/40 se muestran todos los parámetros de influencia citados (exceptuando la flecha de la curva y el ángulo ζ , ambos de los cuales no son sencillos de representar en la misma ilustración de manera clara y sin ambigüedad) y se asume que se está ante un caso donde $y \geq y_{\text{lim}}$:

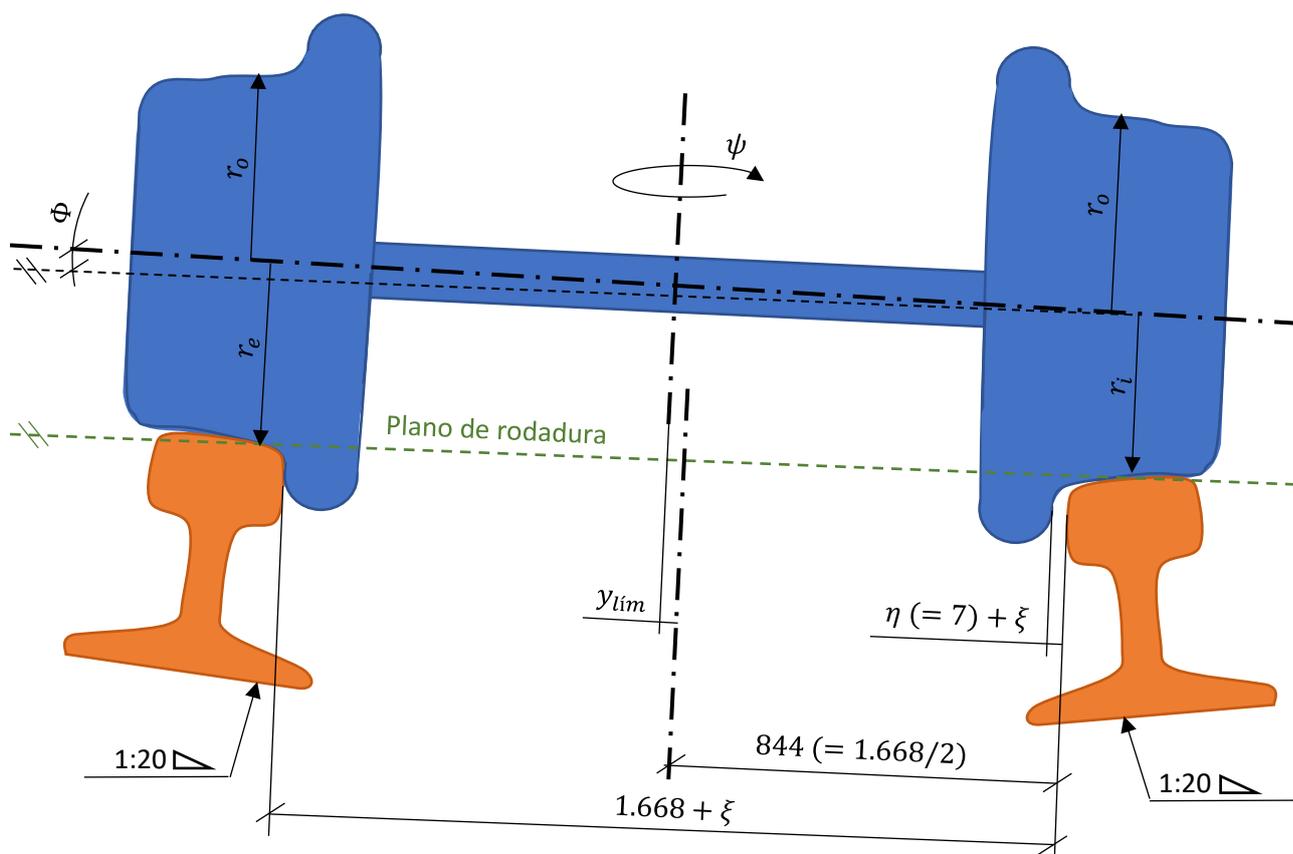


Figura III.18. Posicionamiento de un juego de ruedas de un radio nominal r_o cualquiera en una vía de ancho ibérico descriptora de una curva donde $y \geq y_{lim}$. Cotas en [mm]. Fuente: Elaboración propia.

Pese a la existencia de sobrancho, *a priori* parece factible pensar que las ruedas ruedan con el radio r_o justo a la entrada de una curva y que se descentran hasta r_e en el caso de la externa y hasta r_i en el caso de la interna, por lo que la cota $2b_o$ no variaría y seguiría siendo 1.736 mm para el perfil 1/40 (a pesar de ir de un valor J a otro J' , pero esto se anularía en el desfase). Lo que sí variaría notablemente en este supuesto sería la región del carril externo en la que se produciría el contacto, la cual se acercaría a la cara interna o activa del carril. Empero, esto no es cierto, ya que existe un parámetro bastante más importante que el sobrancho: el descentramiento máximo.

III.5.2.2. Descentramiento máximo.

En teoría, la ecuación I.50, demostrada en el [subapartado I.4.1](#) por dos vías distintas (velocidad lineal y teorema de Tales) da el descentramiento que debería producirse para asegurar una correcta inscripción del vehículo en curva y que cada rueda recorra la longitud que le corresponde por el trazado. Esta ecuación se muestra a continuación, pero con los valores de k y b_o del perfil 1/40 (en su banda de rodadura, suponiendo lo dicho en el párrafo precedente en los casos con $\xi \neq 0$ y expresados en [mm]):

$$y = \frac{868 r_o}{0,025 R} \quad [Ec. III. 51]$$

Como se ve, el descentramiento es proporcional a la ratio r_o/R . Para curvas mayores de 300 m de radio (cuando $\xi = 0$), el descentramiento límite y_{lim} valdrá $\eta/2$ (3,50 mm) en virtud de la ecuación III.50. Para curvas menores de 300 m se adicionará ξ , el que correspondiere al radio de la curva.

En realidad, habría que incluir también el efecto de ψ en el descentramiento, que da lugar un mayor descentramiento en el primer juego de un bogie (véase la [subsección I.4.8](#)). Sin embargo, este efecto se va a despreciar en primera aproximación.

A continuación, va a estudiarse cuándo se alcanza y_{lim} para diferentes valores de r_o y R . Esto se realiza en el EES, por el método tabular, y se grafican las curvas cuyos puntos se han computado en la tabla. Las curvas son estas:

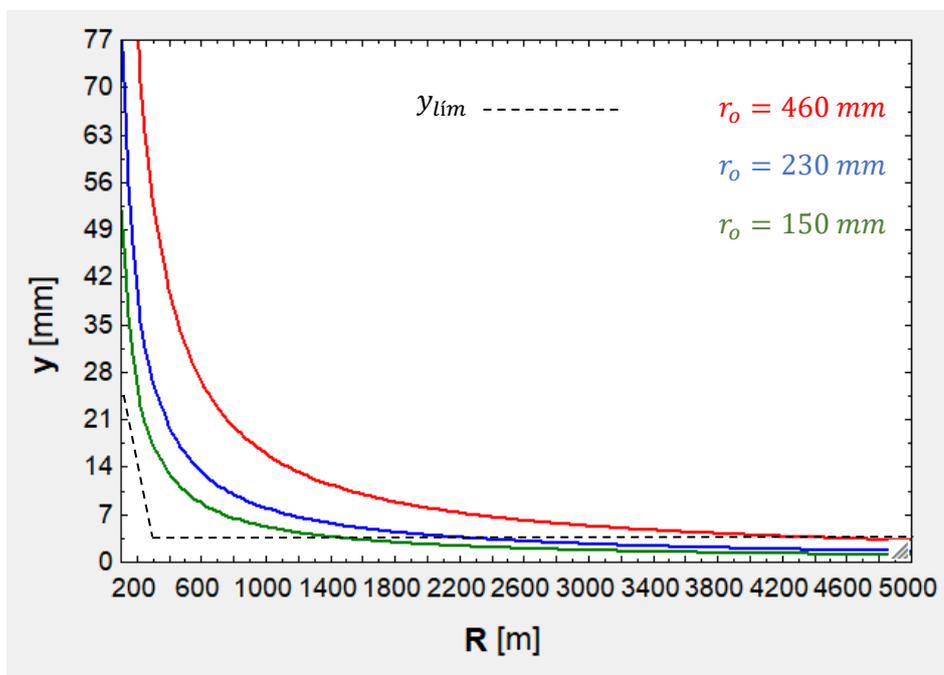


Figura III.19. Curvas de y para diferentes valores de r_o y R .

De estas curvas se desprende que y_{lim} se alcanza para valores de R relativamente grandes teniendo en cuenta que en las líneas de alta velocidad se suelen aplicar radios en el entorno de los 5.000 m. Los valores concretos calculados a través de la ecuación III.51 son:

- ✓ 4.563 m para $r_o = 0,46 \text{ m}$.
- ✓ 2.282 m para $r_o = 0,23 \text{ m}$.
- ✓ 1.488 m para $r_o = 0,15 \text{ m}$.

Por encima de estos radios umbrales todo funcionará acorde a la teoría. Por debajo, en cambio, ya no se cumplirán determinadas ecuaciones y habrá que modificarlas. En los siguientes subapartados se va a estudiar el contacto que sucede por encima del radio umbral ($y < y_{lim}$) y por debajo del radio

umbral o en el propio radio umbral ($y > y_{lim}$). De los mismos estudios se extraerán los parámetros de semiconicidad y curvatura inherentes a cada tipo de contacto.

III.5.2.3. Contacto por encima del radio umbral.

El contacto se va a estudiar en este caso para una rueda intermedia, con $r_o = 0,23 \text{ m}$, la cual está negociando una curva de $R = 3.000 \text{ m}$, valor mayor que los 2.282 m del umbral. En esta situación, el descentramiento valdrá, según la ecuación III.51:

$$y = \frac{868 \cdot 0,23}{0,025 \cdot 3.000} = 2,662 \text{ mm}$$

Los radios de rodadura de cada rueda serán, a través de las ecuaciones III.48 y III.49:

$$r_e = 230,067 \text{ mm}$$

$$r_i = 229,933 \text{ mm}$$

Y el ángulo de balanceo, a través de su ecuación:

$$\Phi = -\arctan\left(\frac{230,067 - 229,933}{1.736}\right) = -4,423 \cdot 10^{-3} \text{ [}^\circ\text{]}$$

Con esta información ya puede estudiarse este caso de contacto. Empiézase por la rueda interna a la curva, que se va a presumir la derecha. Las operaciones que hay que realizar para determinar el contacto son:

1. Rotación del carril un ángulo χ (ya hecho en el subapartado previo).
2. Aplicación del decalaje, tanto horizontal como vertical (ya hecho).
3. Desplazamiento del carril (o la rueda derecha) una distancia y hacia la derecha (en realidad se resta y a las coordenadas y_s'' o y_p porque se avanza en el sentido negativo del eje Y_s'' o Y_p). En la realidad se desplaza la rueda, pero para la representación gráfica es equivalente desplazar la rueda o el carril (mismo desplazamiento relativo).

Allende esto, habría que aplicar el balanceo girando la rueda derecha un ángulo Φ , pero esto no se va a realizar dada la pequeña magnitud del ángulo y considerando sobre todo que el centro de rotación del balanceo está en la propia rueda.

El resultado de esta secuencia de operaciones es el que sigue:

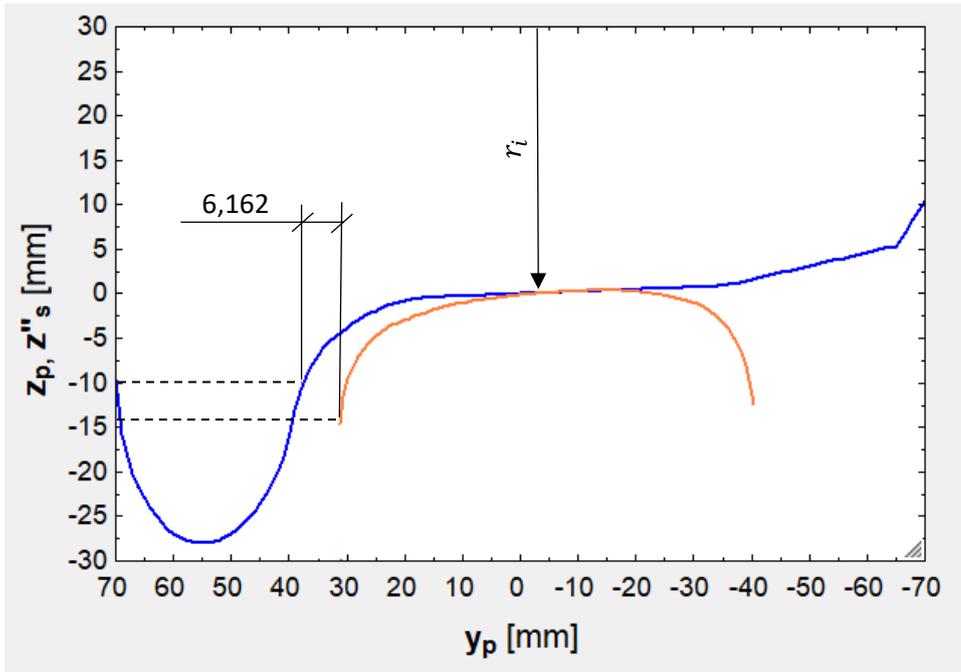


Figura III.20. Contacto por encima del radio umbral en la rueda derecha.

Este tipo de contacto se produce en la banda de rodadura y en la región central del carril, por lo que los parámetros de semiconicidad y curvatura son exactamente los mismos que en el subpartado previo, es decir, que en alineaciones rectas.

Por otro lado, en cuanto a la rueda izquierda, las operaciones que deberán seguirse serán:

1. Rotación del carril un ángulo $-\chi$ (ya hecho en el subpartado previo).
2. Aplicación del decalaje, tanto horizontal como vertical (ya hecho; recuérdese la inversión del signo en el horizontal).
3. Desplazamiento del carril (o la rueda izquierda) una distancia y hacia la derecha (en realidad se resta y a las coordenadas y_s'' o y_p porque se avanza en el sentido negativo del eje Y_s''' o Y_p). En la realidad se desplaza la rueda, pero para la representación gráfica es equivalente desplazar la rueda o el carril (mismo desplazamiento relativo).
4. Rotación de la rueda izquierda un ángulo Φ para considerar el balanceo.

Para el balanceo se aplica esta ecuación matricial, la cual gira las coordenadas para transformarlas del sistema original de la rueda, el $X_p Y_p Z_p$ al canónico $X'_p Y'_p Z'_p$:

$$\begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \text{sen } \Phi \\ 0 & -\text{sen } \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \quad [\text{Ec. III. 52}]$$

Todas estas operaciones son conducentes a esta representación:

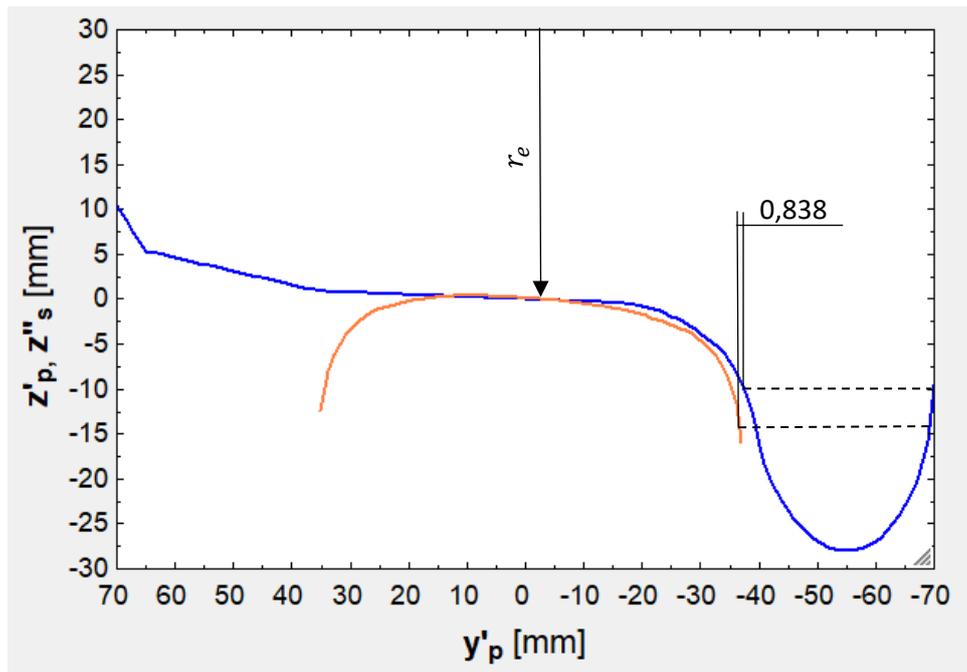


Figura III.21. Contacto por encima del radio umbral en la rueda izquierda.

Al igual que en el caso previo, el contacto se produce en la banda de rodadura y en la región central del carril, por lo que los parámetros de semiconicidad y curvatura son idénticos a aquellos del subapartado previo.

III.5.2.4. Contacto por debajo del radio umbral.

Este contacto es de naturaleza más compleja, ya que las ecuaciones básicas dejan de cumplirse. Va a comenzarse por lo más sencillo, que es la rueda interna a la curva (la derecha en este caso). En primer lugar, se tendrá esta inequidad:

$$r_i \neq r_o - k \left(\frac{r_o b_o}{kR} \right)$$

$$r_i \neq r_o \left(1 + \frac{b_o}{kR} \right)$$

En cambio, se cumplirá lo siguiente, puesto que y habrá quedado limitada a y_{lim} :

$$r_i = r_o - ky_{lim} \quad [Ec. III. 53]$$

Para realizar los cálculos se va a volver a tomar la rueda intermedia ($r_o = 0,23$ m) y $R = 1.500$ m, radio inferior al umbral presente en $R = 2.282$ m. Con estos valores (y presumiendo la constancia de b_o), y vale:

$$y = \frac{868 \cdot 0,23}{0,025 \cdot 3.000} = 5,324 \text{ mm}$$

Este valor de y no podrá darse, ya que el valor límite es inferior, en virtud de la ecuación III.50 y en ausencia de sobrecancho:

$$y_{lim} = \frac{7}{2} + 0 = 3,50 \text{ mm}$$

El valor de r_i será, con la ecuación III.53:

$$r_i = 230 - 0,025 \cdot 3,50 = 229,913 \text{ mm}$$

Respecto a Φ , este no va a ser computado todavía dada la ignorancia de r_e , para el cual es probable que no sea válida la ecuación III.48.

Con esta información ya se puede realizar la representación gráfica para la rueda derecha, para lo cual se siguen las mismas operaciones que en los casos precedentes, con la única diferencia de que ahora se resta y_{lim} a las coordenadas.

El resultado es el que sigue, donde se puede comprobar cómo se alcanza el valor de η entre la pestaña y la rueda, tal como se había predicho ya en la figura III.18:

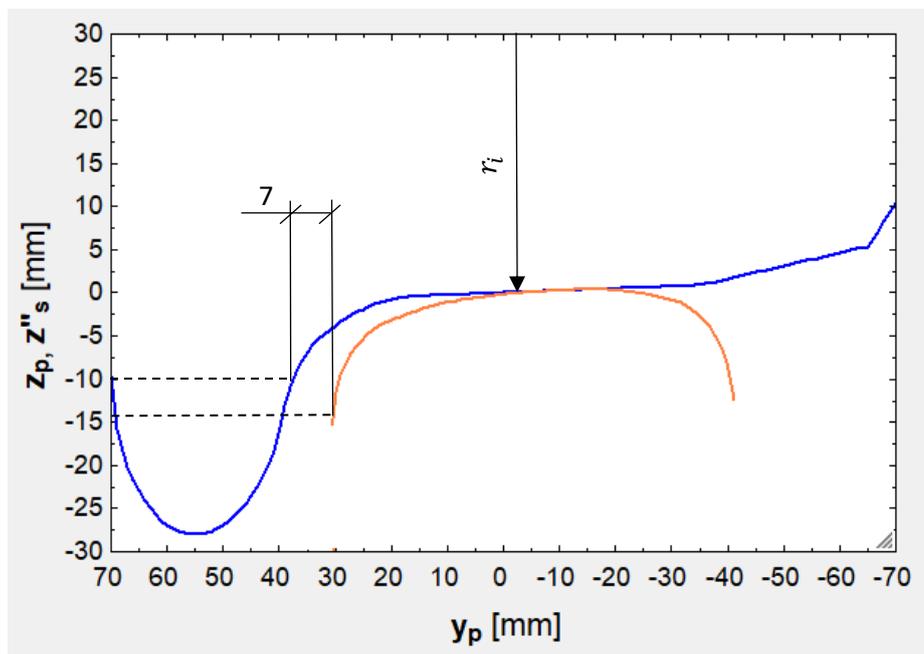


Figura III.22. Contacto por debajo del radio umbral en la rueda derecha.

Nuevamente se tiene un contacto en la banda de rodadura y en la región central del carril, por lo que los parámetros de contacto son los ya consabidos.

Yendo a la rueda izquierda, las operaciones que se aplican son las mismas, incluso la operación por la cual y_{lim} se resta a las coordenadas. Como no se conoce el r_e aún, no se ha podido calcular el balanceo. Con todo, el balanceo no afecta prácticamente nada al contacto (véase su escaso efecto en la figura III.21) y siempre podrá realizarse una corrección posterior para incluirlo.

El resultado obtenido es, sin incluir el balanceo:

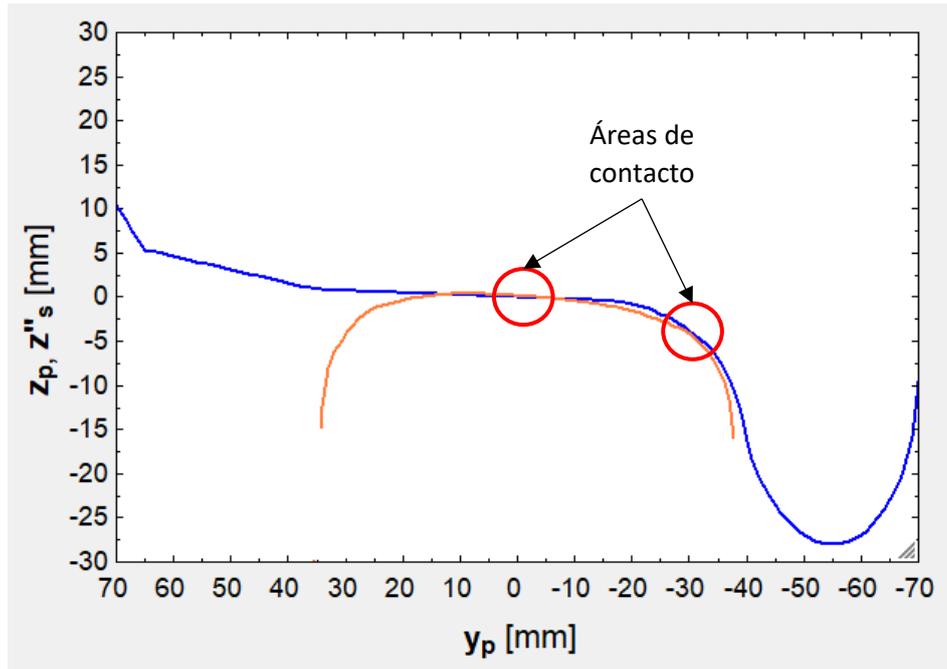


Figura III.23. Contacto por debajo del radio umbral en la rueda izquierda.

En este caso aparecen dos áreas de contacto, una de las cuales está en la pestaña o, más precisamente, en el arranque de la pestaña. Esta área de contacto introduce nuevas incógnitas al problema, por lo que debe ser estudiada detenidamente. En el próximo subapartado se va a estudiar qué sucede en esta área de contacto y en qué posición exacta se produce y cómo queda la otra área de contacto, la que se localiza en la banda de rodadura.

III.5.3. En una alineación curva con contacto pestaña – carril. Teoría I.

III.5.3.1. Fuerzas de contacto para ser determinadas.

Cuando el arranque de la pestaña contacta con el carril aparece un área de contacto cuyas dimensiones vienen determinadas por las fuerzas de contacto y por las curvaturas de la región de contacto. Estas fuerzas son:

- ✓ ζ_h [N], que es el empuje de la pestaña sobre el carril. Trátase de una acción horizontal, como se indica en el subíndice.
- ✓ ζ_v [N], que es la parte de la carga por eje soportada por la pestaña. Trátase de una acción vertical, como se indica en el subíndice.

La combinación de estas fuerzas da lugar a F_p [N] (donde p hace referencia a la pestaña), que es una fuerza que la pestaña ejerce sobre el carril y a la cual el carril se opone ejerciendo la fuerza de reacción N_p [N]. El cálculo de esta fuerza no es inmediato, pues no es la suma vectorial de ζ_h y ζ_v [23.A, p. 326]. Dada la complejidad de este cálculo, esta fuerza no se va a obtener aquí, sino en la [parte III.5.5.1](#).

Por otro lado, la parte de la carga por eje que no soporte la pestaña ni la otra rueda del juego la soportará la banda de rodadura. Esta parte se denota F_{br} [N] (donde br hace referencia a la banda de rodadura) y se complementará con ζ_v para soportar la parte de la carga del eje que recaiga sobre la propia rueda. La reacción que ofrece el carril para oponerse a esta fuerza es N_{br} [N]. Ello causará la aparición de un área de contacto en la banda de rodadura adicional al área de contacto sita en el arranque de la pestaña.

Si se tiene $F_{br} = 0$, entonces el contacto pestaña – carril es puro, mientras que si $F_{br} \neq 0$, entonces el contacto es mixto, que es lo habitual. Por tanto, debe cumplirse lo siguiente, ya que ambas áreas de contacto deben ser capaces de sustentar la rueda:

$$\frac{N_{br}}{\cos \gamma_{o,br}} + \zeta_v = N_e \quad [Ec. III. 54]$$

donde $\gamma_{o,br}$ es el ángulo de contacto de la banda de rodadura y N_e es la fuerza normal sobre la rueda externa a la curva, que en este caso es la izquierda porque la curva es a derechas. Si la curva fuese a izquierdas, sería la rueda derecha la externa a la curva y la que sufriría el contacto pestaña – carril. El valor de N_e es calculable mediante la ecuación I.205, que ya fue explicada en el [subapartado I.5.5](#).

Nótese que en esta ecuación no se ha incluido el $\cos \zeta$, pues se ha considerado $\cos \zeta \sim 1$ (véyase al [subapartado I.5.6](#) para ver el efecto de este ángulo, que es el de desplazamiento longitudinal del área de contacto).

Todas estas acciones se representan en el siguiente diagrama, sobre la propia figura III.23:

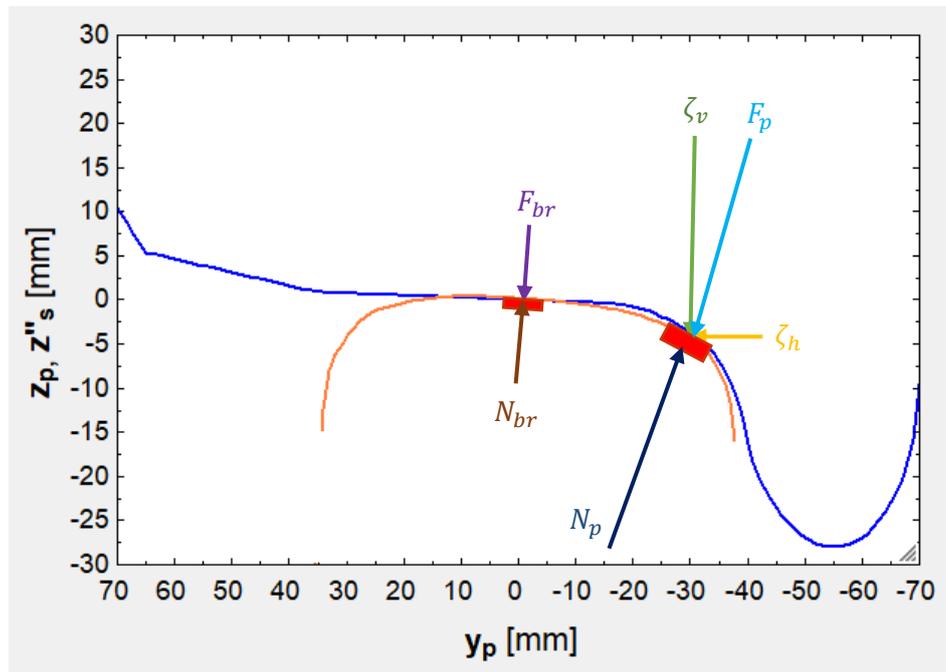


Figura III.24. Representación de las acciones sobre las áreas de contacto.

Resulta de gran importancia hallar el empuje de la pestaña sobre el carril, simbolizado con ζ_h , puesto que influye en la magnitud de la fuerza normal sobre la pestaña N_p , que es una fuerza de gran peso en el desgaste experimentado en el arranque de la pestaña.

III.5.3.2. Cálculo del empuje de la pestaña sobre el carril.

El empuje de la pestaña sobre el carril se puede hallar mediante el procedimiento basado en el centro de fricción, descrito en [23.A, pp. 313 – 328]. Este procedimiento se basa en la siguiente observación: Resulta que todo bogie que recorre una curva tiene un punto en el cual, si se montase una rueda, esta rodaría verdaderamente, es decir, sin movimiento relativo en las áreas de contacto. Este punto se denomina centro de fricción y su determinación permite calcular el empuje buscado.

Para comenzar, cabe comprender la diferencia entre el movimiento libre y el restringido del bogie:

- ✓ **Movimiento libre:** El bogie recorre la curva con un único contacto pestaña – carril. La pestaña presiona el carril para producir la rotación del bogie en torno a su eje vertical y así este pueda trazar la curva. Como oposición a esta rotación, aparecen fuerzas de fricción en las bandas de rodadura de las ruedas.
- ✓ **Movimiento restringido:** El bogie traza la curva con dos contactos pestaña – carril. Ambas pestañas presionan sendos carriles para provocar la rotación y, como en el caso anterior, aparecen fuerzas de fricción para oponerse a la rotación relativa del bogie.

Estos tipos de movimientos se representan gráficamente a continuación, donde se rodean en rojo los contactos pestaña – carril generados:

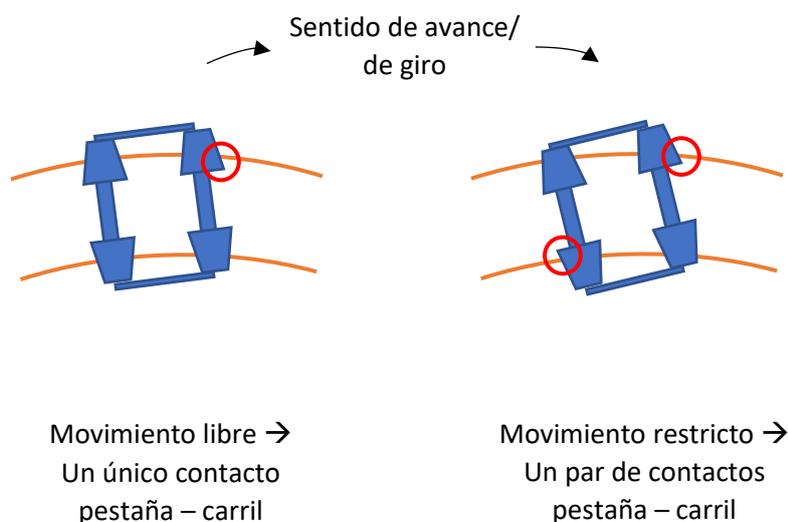


Figura III.25. Representación de los posibles movimientos de un bogie al trazar una curva. Fuente: Elaboración propia, con inspiración en [23.A, figs. 425 y 426].

La aparición de uno u otro movimiento dependerá principalmente de las fuerzas presentes en las áreas de contacto rueda – carril, siendo más frecuente el movimiento libre. Si el movimiento libre o restringido alcanza una magnitud muy grande, es posible que se produzca la rotura de la adherencia y bloqueo de las ruedas del bogie, si bien esto es poco probable y, en general, puede descartarse.

Para comprender mejor la cinemática y dinámica del bogie al trazar la curva, se va a elaborar un diagrama de cuatro partes para así poder ilustrar los puntos, sistemas de referencia, vectores de velocidad y fuerzas involucradas en el fenómeno:

- a) El bogie, en este caso de 4 ruedas denotadas W_1, W_2, W_3 y W_4 (del inglés *wheel*), se encuentra trazando una curva alrededor del CIR simbolizado O . En la intersección a 90° del radio de curvatura con el eje medio del bogie aparece el punto D , mientras que por encima de este punto y en la prolongación del radio aparece el punto C , que es el centro de fricción.

La posición de este eje medio se desconoce cuando el bogie está en movimiento libre, por lo que las coordenadas de D y, por tanto, de C , son ignotas en este caso. En cambio, cuando el bogie está en movimiento restringido sí se conocen las coordenadas de D , por lo que ya se conoce a priori la coordenada radial de C , pero no la circunferencial.

Por otro lado, al trazar los segmentos $\overline{CW_1}, \overline{CW_2}, \overline{CW_3}$ y $\overline{CW_4}$ (conocidos como diagonales) y multiplicarlos por la velocidad angular de rotación del bogie en torno a su eje vertical, designada ω_b , lo que se obtiene es la velocidad lineal de las ruedas (vectores negros gruesos) en esta rotación.

- b) Al multiplicar el segmento \overline{OC} por la velocidad angular de giro del bogie en torno al EIR, denotada ω_c [rad/s] (que no debe confundirse con la velocidad de rotación del eje medio del bogie, denotada ω_b [rad/s]), lo que se obtiene es la velocidad lineal del centro de fricción en la curva. Si se colocase una rueda en C , esta rodaría a la perfección, sin tipo de deslizamiento. Infelizmente, este no es cierto para las ruedas W_1, W_2, W_3 y W_4 , las cuales presentan deslizamiento, alejándose de la rodadura perfecta en consecuencia (mayor deslizamiento cuanto mayor distancia exista entre C y la rueda).

Si el producto de los factores \overline{OC} y ω_c se renombra como $\overline{O'C'}$ (vector de velocidad que será perpendicular al vector de posición o segmento \overline{OC} , dado que la velocidad lineal es normal al radio en un movimiento circular) y se dibujan los segmentos $\overline{C'W'_1}, \overline{C'W'_2}, \overline{C'W'_3}$ y $\overline{C'W'_4}$ (donde W_1, W_2, W_3 y W_4 se han renombrado como W'_1, W'_2, W'_3 y W'_4 con el fin de que la notación sea consistente), estos segmentos representarán en realidad los vectores de velocidad relativa de las ruedas (mayor deslizamiento en cada rueda cuanto mayor sea su velocidad relativa).

- c) Para fijar un sistema de referencia que permita estudiar las fuerzas, escógese aleatoriamente un punto O'' (intersección de un eje medio aleatorio y de un radio de curvatura aleatorio) en la vecindad de la posición más probable de C y fíjase un sistema de referencia en sus proximidades. Este sistema se define dextrógiro y se basa en tres ejes: un eje \bar{u} paralelo al eje medio supuesto y separado por una distancia v_f , un eje \bar{v} paralelo al radio supuesto y separado por una distancia u_f , y un eje \bar{w} normal a los anteriores según el criterio dextrógiro.
- d) Finalmente, muéstranse las fuerzas $\zeta_{h,1}$ (sobre la rueda W_1) y $\zeta_{h,4}$ (sobre la rueda W_4) junto con F_t y F_f (fuerzas de tracción y frenado, cuya explicación se puede encontrar en la [parte 1.3.4.2](#)), aunque representadas en sentido contrario (es decir, lo que se está representando realmente son las fuerzas de reacción de los carriles sobre las ruedas). Si el movimiento es

libre, aparecerán $\zeta_{h,1}$ y F_t o F_f ($\zeta_{h,4} = 0$ en movimiento libre). Por el contrario, si el movimiento es restringido, aparecerán $\zeta_{h,1}$ y $\zeta_{h,4}$ ($\neq 0$) y F_t o F_f .

Tras esta luenga explicación, el diagrama se muestra a continuación, con sus cuatro partes: (a), (b), (c) y (d), donde estas letras remiten a cada una de las explicaciones recién realizadas:

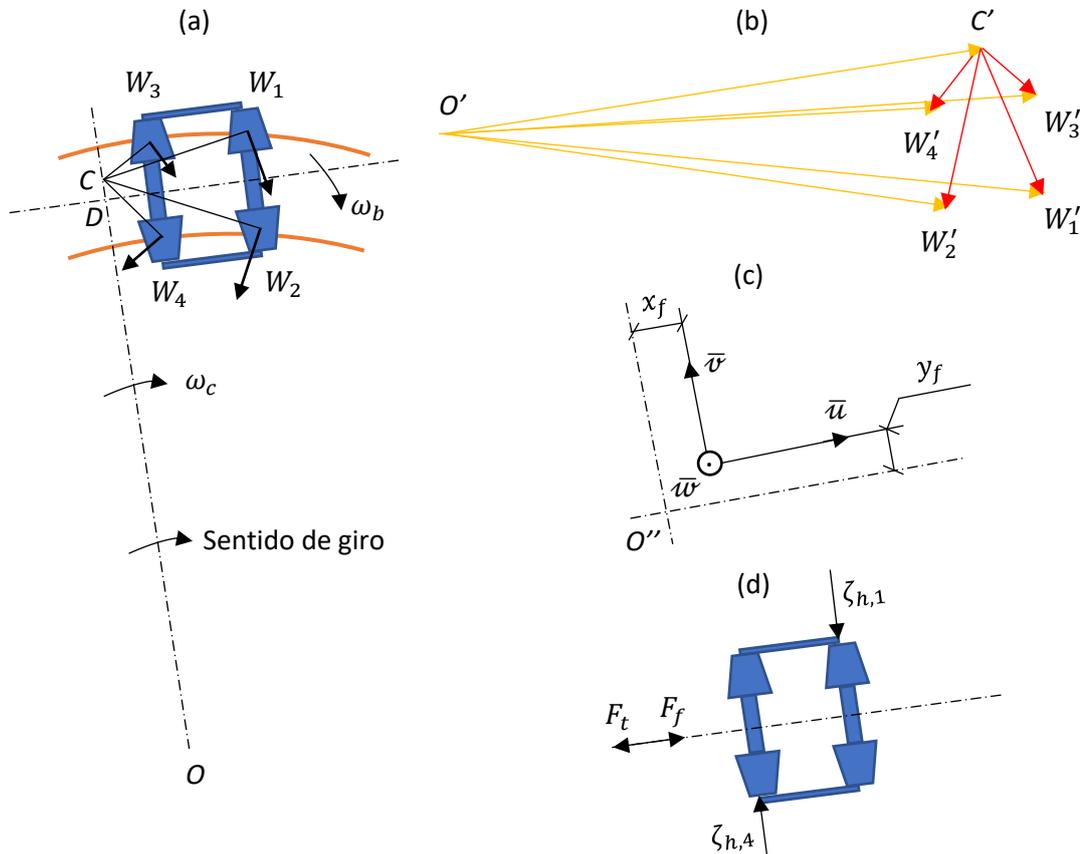


Figura III.26. (a) Trazado de una curva por parte de un bogie. (b) Vectores de velocidad. (c) Sistema de referencia $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$. (d) Fuerzas involucradas en el trazado de la curva. Fuente: Elaboración propia, con inspiración en [23.A, figs. 427 – 433].

Una vez comprendido esto, se da comienzo a la explicación de las ecuaciones que permiten despejar $\zeta_{h,1}$ y $\zeta_{h,4}$. Antes que nada, hay que tener claro el cálculo de la longitud de las diagonales (los segmentos $\overline{CW_i}$, para $i = 1, 2, 3$ y 4), que se efectúa en base a las coordenadas expresadas en el sistema $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$:

$$|\overline{CW_i}| = \sqrt{(v_{f,i} - y_f)^2 + (u_{f,i} - x_f)^2} \quad [Ec. III. 55]$$

donde $v_{f,i}$ es la coordenada medida en el eje \bar{v} de la rueda en el punto central de su área de contacto presente en su banda de rodadura (donde ocurre la fricción si no se considera la fricción en los contactos pestaña – carril; de ahí el uso de la letra f), mientras que $u_{f,i}$ es la coordenada medida en el eje \bar{u} de ese mismo punto. Al igual que para $\overline{CW_i}$, esto es válido para $i = 1, 2, 3$ y 4 .

Por otro lado, las fuerzas de fricción máximas disponibles en cada rueda serán:

$$F_{roz} = \mu N_{(i)} \quad [Ec. III. 56]$$

donde $i = 1, 2, 3$ y 4 . En teoría, $N_{(i)}$ adoptará diversos valores, en función de la rueda a la que haga referencia:

$$N_{(i)} = \begin{cases} N_e & i = 1 \text{ y } 3 \\ N_i & i = 2 \text{ y } 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} [Ec. III. 57] \\ [Ec. III. 58] \end{matrix}$$

donde N_e hace referencia a la fuerza normal sobre la rueda externa a la curva y N_i sobre la rueda interna a la curva. Los valores de N_e y N_i son calculables mediante las ecuaciones I.205 e I.206, que ya fueron explicadas en el [subapartado I.5.5](#).

Cabe recalcar que este método no incluye el ángulo γ_o para obtener N_{\perp} (véanse las ecuaciones I.214 e I.215 desarrolladas en el [subapartado I.5.6](#)), ya que se asume que las ruedas son cilíndricas, despreciando su conicidad (por tanto, $\gamma_o = 0 \rightarrow \cos \gamma_o = 1$ y $N_{\perp} = N_{(i)}$).

Aparte, el método considera $F_{br} = 0$ (contacto pestaña – carril puro), por lo que únicamente puede existir un área de contacto por rueda.

Conociendo todo esto y la longitud de las diagonales, es posible descomponer esta fuerza en los ejes \bar{u} (vector director unitario \hat{u}) y \bar{v} (vector director unitario \hat{v}). Así, en notación vectorial se tiene lo siguiente:

$$\vec{F}_{roz} = \begin{cases} -\mu N_{(i)} \frac{v_{f,i} - y_f}{\sqrt{(v_{f,i} - y_f)^2 + (u_{f,i} - x_f)^2}} \hat{u} & [Ec. III. 59] \\ \mu N_{(i)} \frac{u_{f,i} - x_f}{\sqrt{(v_{f,i} - y_f)^2 + (u_{f,i} - x_f)^2}} \hat{v} & [Ec. III. 60] \end{cases}$$

Con estos datos ya se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio en dos dimensiones en el sistema $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$ (las mismas que las aplicadas en la [subsección I.5.3](#), solo que en otro sistema). Los momentos se toman en torno del punto O'' (que no debe confundirse con el origen del sistema $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$). El resultado de la aplicación de las ecuaciones de equilibrio es el que sigue:

$$(-F_t | +F_f) = - \sum_{i=1}^{i=4} \left(\mu N_{(i)} \frac{v_{f,i} - y_f}{\sqrt{(v_{f,i} - y_f)^2 + (u_{f,i} - x_f)^2}} \right) \quad [Ec. III. 61]$$

$$\zeta_{h,1} - \zeta_{h,4} = \sum_{i=1}^{i=4} \left(\mu N_{(i)} \frac{u_{f,i} - x_f}{\sqrt{(v_{f,i} - y_f)^2 + (u_{f,i} - x_f)^2}} \right) \quad [Ec. III. 62]$$

$$\zeta_{h,1}u_{fl,1} - \zeta_{h,4}u_{fl,4} = \sum_{i=1}^{i=4} \left(\mu N_{(i)} \frac{(v_{f,i}-y_f)v_{f,i}}{\sqrt{(v_{f,i}-y_f)^2+(u_{f,i}-x_f)^2}} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=4} \left(\mu N_{(i)} \frac{(u_{f,i}-x_f)u_{f,i}}{\sqrt{(v_{f,i}-y_f)^2+(u_{f,i}-x_f)^2}} \right) \quad [Ec. III. 63]$$

donde $u_{fl,1}$ es la coordenada medida en el eje \bar{u} del punto central del área de contacto pestaña – carril de la rueda 1 (de hecho, *fl* proviene del inglés *flange*, haciendo de este modo referencia a la pestaña), mientras que $u_{fl,4}$ es lo mismo, pero trasladado a la rueda 4.

En cuanto a la resolución de la terna de ecuaciones, cuyas incógnitas son cuatro ($\zeta_{h,1}$, $\zeta_{h,4}$, x_f e y_f), hay que adoptar una estrategia de resolución para reducir las incógnitas a tres y así poder disponer de un sistema compatible determinado. Esta estrategia depende de que el movimiento sea libre o restringido:

- ✓ Si el movimiento es libre, entonces no se produce el contacto pestaña – carril en la rueda 4 y se asume $\zeta_{h,4} = 0$, por lo que esta es la incógnita eliminada.
- ✓ Si el movimiento es restringido, entonces se puede conocer la posición exacta del eje medio del bogie y, por tanto, del punto *D*. Ello determina la posición circunferencial del punto *C* (pero no la radial), que estará en la prolongación del segmento \overline{OD} . Por ello, no existirá un desfase entre el radio y el eje \bar{x} y entonces $x_f = 0$, por lo que esta es la incógnita eliminada.

Por último, cabe darse cuenta de que el método es extensible a un bogie de un número de ruedas Z_w . La extensión es sencilla, puesto que solamente hay que trocar $i = 4$ por $i = Z_w$ en los límites superiores de los sumatorios y $\zeta_{h,4}$ por ζ_{h,Z_w} (si se numeran las ruedas con la misma lógica que antes, entonces el segundo contacto pestaña – carril aparecerá en la rueda Z_w cuando el movimiento sea restringido).

III.5.3.3. Propuesta del autor para la mejora del método del centro de fricción.

El autor del libro que presenta el método del centro de fricción había considerado anteriormente que las ruedas están trabajando al borde de la rotura de la adherencia y el bloqueo. Esto es así porque iguala F_{roz} a $\mu N_{(i)}$, lo cual, según la ley de Amontons – Coulomb, solamente es cierto en el caso límite (lo normal es que $F_{roz} < \mu N_{(i)}$). Esta ley se explicó en la [subsección 4.5.2](#), pero a nivel microscópico (con tensiones tangenciales/cortantes y normales, estas últimas también conocidas como presiones).

Para eliminar esta consideración, que no siempre es cierta, lo que el autor propone es calcular la fuerza total sobre cada rueda a partir del pseudodeslizamiento total que aparece en cada rueda. Para ello, el autor comienza desarrollando el pseudodeslizamiento total de la rueda i (W_i , para $i = 1, 2, \dots, Z_w$) de la siguiente manera, donde considera el deslizamiento y la rodadura de la rueda entorno del EIR de la curva y no entorno del eje de dicha rueda (nótese que por eso toma ω_c en lugar de ω):

$$\text{Pseudodeslizamiento total } (W_i) = \frac{\text{Velocidad de deslizamiento}}{\text{Velocidad de rodadura}} = \frac{\overline{CW}_i \omega_c}{\overline{OC} \omega_c}$$

$$\text{Pseudodeslizamiento total } (W_i) = \frac{\overline{CW}_i}{\overline{OC}} = \frac{1}{R} \sqrt{(\nu_{f,i} - y_f)^2 + (u_{f,i} - x_f)^2}$$

$$\text{Pseudodeslizamiento total } (W_i) = \frac{1}{R} \sqrt{(\nu_{f,i} - y_f)^2 + (u_{f,i} - x_f)^2} \quad [\text{Ec. III. 64}]$$

donde el autor ha hecho uso los segmentos \overline{CW}_i y \overline{OC} de la figura III.26 (en la [parte III.5.3.2](#)) y las variables ω_c , $u_{f,i}$, $\nu_{f,i}$, x_f y y_f , algunas de las cuales se pueden ver en la misma figura.

Posteriormente, el autor relaciona el cálculo de la fuerza total sobre la rueda i (W_i , para $i = 1, 2, \dots, Z_w$) con su pseudodeslizamiento total a través de la constante indeterminada κ_f [Φ] y de la carga sobre la rueda (supuestamente aplicada en su totalidad sobre el área de contacto de la pestaña):

$$\text{Fuerza total } (W_i) = \frac{\kappa_f}{R} \sqrt{(\nu_{f,i} - y_f)^2 + (u_{f,i} - x_f)^2} N_{(i)} \quad [\text{Ec. III. 65}]$$

Reemplazando la fuerza de rozamiento de la ecuación III.56 por la fuerza total en cada rueda e introduciéndola en las ecuaciones III.61 – III.63, se llega a este trío de ecuaciones:

$$(-F_t | +F_f) = - \sum_{i=1}^{i=Z_w} \left(\frac{\kappa_f}{R} (\nu_{f,i} - y_f) N_{(i)} \right) \quad [\text{Ec. III. 66}]$$

$$\zeta_{h,1} - \zeta_{h,Z_w} = \sum_{i=1}^{i=Z_w} \left(\frac{\kappa_f}{R} (u_{f,i} - x_f) N_{(i)} \right) \quad [\text{Ec. III. 67}]$$

$$\zeta_{h,1} u_{fl,1} - \zeta_{h,Z} u_{fl,4} = \sum_{i=1}^{i=Z_w} \left(\frac{\kappa_f}{R} (u_{f,i} - x_f) N_{(i)} u_{f,i} \right) + \sum_{i=1}^{i=Z_w} \left(\frac{\kappa_f}{R} (\nu_{f,i} - y_f) N_{(i)} \nu_{f,i} \right) \quad [\text{Ec. III. 68}]$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve como el conformado por las ecuaciones III.61 – III.63, pero con la dificultad de que ahora hay una constante indeterminada, de la cual el autor solamente afirma que su valor debería ser adecuado o conveniente [23.A, pp. 322 y 323].

III.5.3.4. Precisión y limitaciones del método del centro de fricción mejorado.

El autor del libro que presenta el método del centro de fricción (tanto el básico cuanto el mejorado) afirma que su precisión depende de la exactitud de los valores físicos introducidos, en especial del valor del coeficiente de fricción. También afirma que el método realiza varias simplificaciones, como despreciar el efecto causado por la conicidad de las ruedas. Sin embargo, el autor acaba concluyendo que, si se hace uso de valores conservadores, las fórmulas proporcionan valores precisos para las

fuerzas de las pestañas sobre los carriles, particularmente en curvas muy cerradas, siendo ampliamente utilizadas en la investigación de los descarrilamientos (que ocurren muy frecuentemente en desvíos o apartaderos a bajas velocidades).

Seguidamente, el autor aclara que estas fórmulas se aplican en estado estacionario, es decir, cuando el vehículo se está moviendo a velocidad constante en una curva de radio constante (esto excluye a las curvas de transición) y que desprecia las irregularidades de la vía, las cuales pueden golpear la pestaña de cualquier rueda. Un caso especial de esto último es el acceso a una curva circular sin transición previa o una curva sin peralte, situaciones ambas que producen fuertes impactos sobre las pestañas de ciertas ruedas [23.A, pp. 325 y 326].

En vista de lo anterior, el empleo del método del centro de fricción mejorado parece adecuado dada su alta precisión. En resumen, el método presenta esta serie de limitaciones:

1. El principal escollo lo constituye la ignorancia de la constante κ_f , lo cual es más grave que la imprecisión en el valor de μ en el método básico. De todas formas, lo más seguro es que exista una relación entre μ y κ_f , relación que, de conocerse, acabaría con este escollo.
2. La exclusión de las curvas de transición del campo de aplicación del método, que restringe su utilidad en trazados sinuosos, en los cuales resulta fundamental variar el radio suavemente para evitar cambios bruscos de aceleración centrífuga e incluso fuertes golpes de las pestañas contra los carriles.
3. La falta de discernimiento entre áreas de contacto cuando hay más de una, cada una de las cuales con sus propias coordenadas.
4. La despreciación del efecto de la conicidad de las ruedas, que afecta a la precisión de la fuerza total sobre cada rueda (la sobreestima ligeramente).
5. El desconocimiento del pseudodeslizamiento generado por el hecho de rodar con un descentramiento insuficiente, lo cual afecta al cómputo de F_x y F_y y también al cómputo de desgaste.
6. El desconocimiento de cuándo el movimiento es libre o cuándo es restringido, lo cual determina la estrategia de resolución del sistema conformado por las ecuaciones III.66 – III.68. El autor del método simplemente afirma que, si el movimiento es libre, entonces las fuerzas F_t y F_f se pueden tomar nulas [23.A, p. 321]. O, si se le da la vuelta: el hecho de contar con $F_t = F_f = 0$ es condición necesaria, pero no suficiente, para que el movimiento sea libre.

Para vencer estas limitaciones e incrementar la precisión del método, es necesaria una mejora del mismo. Por ello, en la siguiente subsección se va a realizar una propuesta de mejora.

III.5.4. En una alineación curva con contacto pestaña – carril. Teoría II.

III.5.4.1. Propuesta propia para la mejora del método del centro de fricción.

Para vencer la práctica totalidad de los inconvenientes del método del centro de fricción mejorado y lograr así mejorar su precisión, lo que se propone es utilizar directamente las fuerzas longitudinales y transversales que aparecen en cada área de contacto ($F_{x,i}$ y $F_{y,i}$ en el área de contacto i), previamente obtenidas mediante el método de Polach (en el [subcapítulo 4.5](#)). Estas fuerzas evitan, por un lado, tener que calcular κ_f , mientras que por otro lado tienen en cuenta la variabilidad del radio en las curvas de transición y la conicidad de las ruedas.

A continuación, va a realizarse la modificación de las ecuaciones III.66 – III.68 para introducir las citadas fuerzas:

$$(-F_t | +F_f) = - \sum_{i=1}^{i=Z_w+2} F'_{x,i} \quad [Ec. III. 69]$$

$$\zeta_{h,1} - \zeta_{h,Z_w} = \sum_{i=1}^{i=Z_w+2} F'_{y,i} \quad [Ec. III. 70]$$

$$\zeta_{h,1} u_{fl,1} - \zeta_{h,Z_w} u_{fl,4} = \sum_{i=1}^{i=Z_w+2} (F'_{y,i} u_{f,i}) + \sum_{i=1}^{i=Z_w+2} (F'_{x,i} v_{f,i}) \quad [Ec. III. 71]$$

donde $u_{f,i}$ y $v_{f,i}$ son las coordenadas longitudinal y transversal, respectivamente, de los centros de las áreas (elipses) de contacto donde aparecen estas fuerzas. Aparte, los límites de los sumatorios se han ampliado hasta $Z_w + 2$ para incluir las dobles áreas de contacto en las ruedas W_1 y W_{Z_w} .

Nótese que en lugar de escribir $F_{x,i}$ y $F_{y,i}$ se ha escrito $F'_{x,i}$ y $F'_{y,i}$. Esto es así porque no se pueden introducir directamente $F_{x,i}$ y $F_{y,i}$ sin descomponerlas previamente en el sistema de coordenadas $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$. Esta descomposición se lleva a cabo en la imagen inferior:

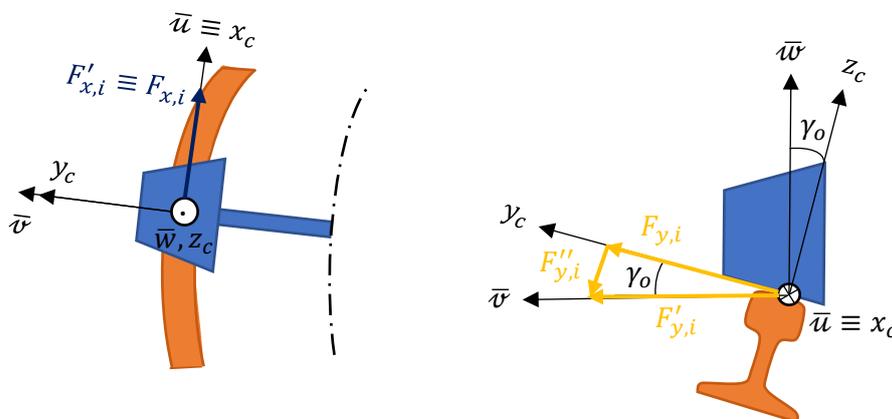


Figura III.27. Descomposición de las fuerzas F_x y F_y en el sistema de coordenadas $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$. Fuente: Elaboración propia.

Las ecuaciones que matematizan esta descomposición son:

$$F'_{x,i} = F_{x,i} \quad [Ec. III. 72]$$

$$F'_{y,i} = F_{y,i} \cos\gamma_o \quad [Ec. III. 73]$$

$$F''_{y,i} = F_{y,i} \operatorname{sen}\gamma_o \quad [Ec. III. 74]$$

De entre estas componentes, la única que no interesa es la última. Esto obedece a dos motivos: el primero es que esta componente $F''_{y,i}$ se encuentra en el eje \bar{w} , un eje en el cual no se realiza ningún balance de fuerzas; y el segundo es que esta componente generará un momento en torno del eje \bar{u} (el cual coincide con el eje x_c), momento que no intervendrá en el balance de momentos (ecuación III.68) por no estar alrededor del eje \bar{w} .

Por último, está claro que en el cálculo de F_x y F_y se tienen en cuenta los pseudodeslizamientos estudiados en el [subcapítulo I.3](#) (v_x , v_y y φ). No obstante, estos pseudodeslizamientos no toman en consideración cuál es el pseudodeslizamiento adicional que aparece cuando la rodadura se produce con un descentramiento insuficiente, el cual influirá no solo en F_x y F_y , sino también en el desgaste. Dada la mayor complejidad de este asunto, este se va a abordar detalladamente a continuación, en la siguiente parte.

III.5.4.2. Pseudodeslizamiento generado por la insuficiencia de descentramiento.

Rodar con un descentramiento insuficiente (inferior al teórico) es otra fuente de deslizamiento, ya que las ruedas no avanzan con el radio adaptado a la diferente distancia que ha de recorrer cada una de ellas. Este deslizamiento resulta ser análogo al que aparecería en un vehículo con diferencial si se le retirase el diferencial (con la diferencia de que el diferencial adapta las velocidades angulares de cada rueda en vez de los radios y de que el descentramiento no se puede eliminar por completo si las ruedas son troncocónicas en vez de cilíndricas).

Como cualquier deslizamiento, este también estará relacionado con un pseudodeslizamiento (véase la [parte I.3.2.6](#) para más información), el cual podrá integrarse en la teoría lineal de Kalker o del método de Polach (en el [subcapítulo 4.5](#)) para computar la fuerza resultante.

El desarrollador del método centro de fricción no explicita en su libro cuál es el pseudodeslizamiento adicional que aparece en las situaciones de descentramiento insuficiente y contacto pestaña – carril, sino que simplemente desarrolla el pseudodeslizamiento total de la rueda i , el cual es una composición de v_x , v_y y φ , tal como se apuntó en la [parte III.5.3.3](#).

Por ende, lo que se debe realizar es calcular el pseudodeslizamiento adicional debido a la inadecuación de los radios de las ruedas a las longitudes que cada una de ellas ha de recorrer.

En principio, las ruedas deberían rodar con los radios r_e (si la rueda es externa a la curva) y r_i (si es interna), que son los radios expresados por las ecuaciones III.48 y III.49 en la [parte III.5.2.1](#) (las cuales no consideran el descentramiento adicional debido al ángulo de lazo ψ).

Con estos radios, las velocidades alcanzadas en cada rueda serían, atendiendo a las expresiones implícitas en la [parte I.4.1.1](#) (y teniendo en cuenta que en una curva de radio variable habría que usar $\frac{1}{R}$):

$$\begin{cases} V_e = r_e \omega = \left(1 + \frac{b_o}{R}\right) V \\ V_i = r_i \omega = \left(1 - \frac{b_o}{R}\right) V \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_e = r_o \left(1 + \frac{b_o}{R}\right) \omega & [\text{Ec. III. 75}] \\ V_i = r_o \left(1 - \frac{b_o}{R}\right) \omega & [\text{Ec. III. 76}] \end{cases}$$

Sin embargo, no pueden realizar esta rodadura teórica al toparse con la limitación de descentramiento (y_{lim}). Al final, las ruedas acaban rodando con estos radios límite:

$$\begin{cases} r_{e,\text{lim}} = r_o + ky_{\text{lim}} & [\text{Ec. III. 77}] \\ r_{i,\text{lim}} = r_o - ky_{\text{lim}} & [\text{Ec. III. 78}] \end{cases}$$

Como $y > y_{\text{lim}}$, la rueda externa acabará rodando con un radio menor que el que le correspondería ($r_{e,\text{lim}} < r_e$), mientras que la interna lo hará con un radio mayor que el que le correspondería ($r_{i,\text{lim}} > r_i$). En consecuencia, la externa recorrerá una menor distancia que la que debería y al contrario en el caso de la interna.

Esta limitación en los radios de rodadura se traslada directamente a las velocidades, las cuales quedan limitadas a:

$$\begin{cases} V_{e,\text{lim}} = r_{e,\text{lim}} \omega & [\text{Ec. III. 79}] \\ V_{i,\text{lim}} = r_{i,\text{lim}} \omega & [\text{Ec. III. 80}] \end{cases}$$

Por ende:

$$\begin{cases} V_{e,\text{lim}} < V_e = r_o \left(1 + \frac{b_o}{R}\right) \omega \\ V_{i,\text{lim}} > V_i = r_o \left(1 - \frac{b_o}{R}\right) \omega \end{cases}$$

De ahí el pseudodeslizamiento, que se puede denotar $v'_{x,e}$ [\emptyset] sobre la rueda externa y $v'_{x,i}$ [\emptyset] sobre la interna. Para calcular estos dos pseudodeslizamientos se parte de los deslizamientos rígidos $V'_{x,e}$ [m/s] y $V'_{x,i}$ [m/s], puesto que, como en cualquier pseudodeslizamiento, se cumple lo siguiente (recuérdense los desarrollos del [subcapítulo I.3](#)):

$$\begin{cases} v'_{x,e} = \frac{V'_{x,e}}{V} & [\text{Ec. III. 81}] \\ v'_{x,i} = \frac{V'_{x,i}}{V} & [\text{Ec. III. 82}] \end{cases}$$

En la imagen inferior se demuestra gráficamente la procedencia de estos deslizamientos rígidos. En ella se tiene en cuenta la influencia de ψ , por lo que para comprenderla debe tenerse claro cómo es el triángulo de velocidades de una rueda (explicado en la [parte I.3.5.1](#)):

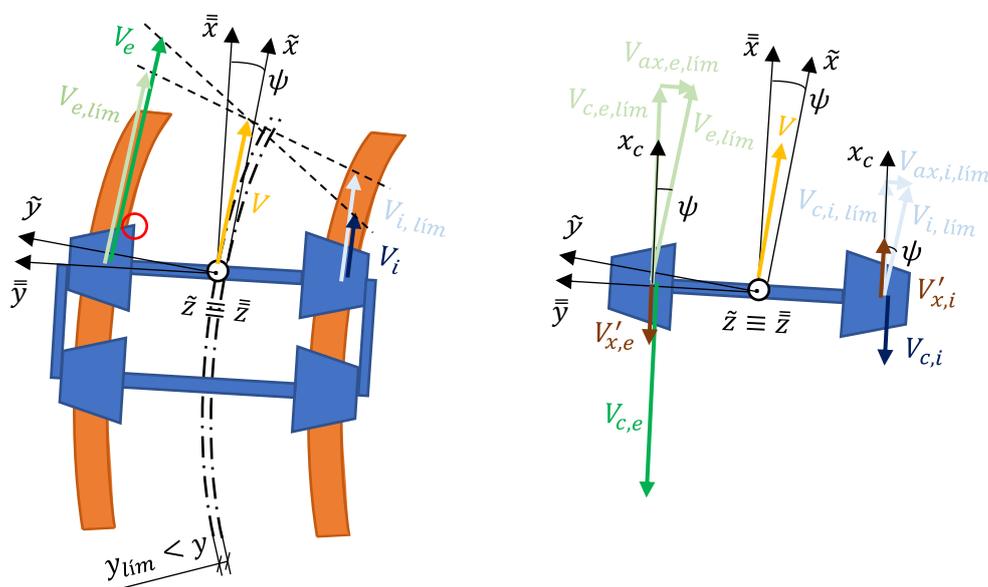


Figura III.28. Aparición de los deslizamientos rígidos $V'_{x,e}$ y $V'_{x,i}$ por la insuficiencia de descentramiento. Fuente: Elaboración propia.

De esta imagen se desprende que:

$$\begin{cases} V'_{x,e} = -(V_{c,e} - V_{c,e,lim}) & [Ec. III. 83] \\ V'_{x,i} = V_{c,i,lim} - V_{c,i} & [Ec. III. 84] \end{cases}$$

donde el subíndice c hace referencia a circunferencial y donde se ha añadido un signo negativo a $V'_{x,e}$ porque va en el sentido negativo del eje x_c .

Desarrollando estas ecuaciones en función de los radios de rodadura y las velocidades angulares (y el $\cos \psi$, necesario para obtener la componente de velocidad circunferencial o periférica):

$$\begin{cases} V'_{x,e} = -(r_e \omega - r_{e,lim} \omega) \cos \psi & [Ec. III. 85] \\ V'_{x,i} = (r_{i,lim} \omega - r_i \omega) \cos \psi & [Ec. III. 86] \end{cases}$$

Combinando estas dos ecuaciones con las ecuaciones III.81 y III.82 e introduciendo también la relación básica $V = r_o \omega$, la cual se multiplica por $\cos \psi$ para considerar únicamente su componente circunferencial, se llega a:

$$\begin{cases} v'_{x,e} = \frac{-(r_e \omega - r_{e,lím} \omega) \cos \psi}{V \cos \psi} = \frac{-(r_e - r_{e,lím})}{r_o} \\ v'_{x,i} = \frac{(r_{i,lím} \omega - r_i \omega) \cos \psi}{V \cos \psi} = \frac{r_{i,lím} - r_i}{r_o} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_{x,e} = -\frac{(r_e - r_{e,lím})}{r_o} & [Ec. III. 87] \\ v'_{x,i} = \frac{r_{i,lím} - r_i}{r_o} & [Ec. III. 88] \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones se pueden unificar en una sola, al igual que se realizó en la [parte I.3.4.1](#) al obtener un término de pseudodeslizamiento longitudinal similar:

$$v'_x = -\frac{\Delta r_{lím}}{r_o} \quad [Ec. III. 89]$$

Siempre y cuando se tengan claros los valores de $\Delta r_{lím}$:

$$\begin{cases} \Delta r_{lím} = r_e - r_{e,lím} & [Ec. III. 90] \\ \Delta r_{lím} = r_i - r_{i,lím} & [Ec. III. 91] \end{cases}$$

Finalmente, es importante aclarar que el radio de rodadura del arranque de la pestaña, donde se producirá el contacto pestaña – carril, no influye en absoluto, ni siquiera en los casos en que el área de contacto de la pestaña asume la totalidad de la carga de la rueda. Es decir, aunque la banda de rodadura quede descargada y no se produzca el contacto en ella, el radio r_e ($r_{e,lím}$ en este caso) se situará en la misma. Esto es debido a que no tendría sentido que r_e pasase de la banda a la pestaña, por dos motivos:

- ✓ La diferencia entre r_e ($r_{e,lím}$) y r_i ($r_{i,lím}$) debe mantenerse en el valor $2ky_{lím}$, ya que las ruedas están solidariamente unidas al eje y el desplazamiento lateral es el mismo para todo el juego.
- ✓ Si r_e aumentase repentinamente al producirse la transferencia de la carga de la banda a la pestaña, entonces la rueda externa rodaría con un radio excesivo, aumentando en gran medida su velocidad periférica, invirtiéndose el signo del pseudodeslizamiento y alterándose la cinemática del juego y del bogie.

III.5.4.3. Determinación del tipo del movimiento del bogie.

El método de fricción original no aclara cuándo el movimiento es libre y cuándo es restricto. Simplemente hace ciertos apuntes como el ya comentado en la [parte III.5.3.4](#), que es un apunte sobre dinámica. También llega a apuntar que podría suponerse cualquiera de los dos y realizar

comprobaciones sobre la posición del centro de fricción una vez obtenidas sus coordenadas, mediante la comparación de las coordenadas obtenidas con las coordenadas que limitan ciertos cuadrantes [23.A, p.324].

Desafortunadamente, la implementación computacional de un método probabilístico sería muy imprecisa, puesto que habría que suponer porcentajes. Por ejemplo, si se cumpliera $F_t = F_f = 0$, entonces podría suponerse un 90 % de probabilidades de que el movimiento fuese libre.

Adicionalmente, la implementación de un método de comprobaciones no sería totalmente eficaz debido a la existencia de solapamientos y ambigüedades, a no ser que se incrementase enormemente el coste computacional mediante una serie de iteraciones.

Expuesto esto, queda claro que lo mejor es proponer otra manera de determinar el tipo de movimiento del bogie. Para ello, va a suponerse que lo primero que se produce es el movimiento libre (cuando $y > y_{lim}$) y que después se produce el restringido si se supera un segundo valor umbral, el cual se va a designar $y_{lim,diag}$ [m] (donde *diag* se refiere a diagonal, ya que en el movimiento restringido las ruedas cuyas pestañas tocan los carriles se sitúan en la misma diagonal).

Según esta suposición, lo que se tiene es esta secuencia (en la realidad podría no ser exactamente así):

1. El bogie se descentra y la pestaña de la rueda externa del primer juego roza con el carril (movimiento libre).
2. Entonces, y queda limitado a y_{lim} en ambos juegos.
3. Tras esto, el segundo juego rota respecto al centro geométrico (pivote) del bogie tratando de compensar su descentramiento (y_{lim}). El ángulo de lazo que lo compensa se puede denotar ψ_1 .
4. Si $\psi_1 < |\psi|$, resulta que este descentramiento se sobrecompensa (pues el bogie seguirá girando hasta alcanzar ψ). La diferencia entre ψ_1 y ψ se puede denotar ψ_2 y puede ser tan grande para provocar que la sobrecompensación rebase una cierta holgura ($y_{lim,diag}$). Entonces la pestaña de la rueda interna del último juego roza con el carril (movimiento restringido).

Todo esto se va a matematizar. Primeramente, se obtiene ψ_1 :

$$y_{lim} - e \frac{\pi |\psi_1|}{360} = 0 \rightarrow \psi_1 = \frac{y_{lim}}{e} \frac{360}{\pi}$$

$$\psi_1 = \frac{y_{lim}}{e} \frac{360}{\pi} \quad [Ec. III. 92]$$

Si $\psi_1 > \psi$, entonces se puede descartar el movimiento restringido. Pero, si $\psi_1 < \psi$, entonces la diferencia entre ambos parámetros (ψ_2) puede inducir la aparición de movimiento restringido. Ello sucederá si:

$$-e \frac{\pi |\psi_2|}{360} \geq -y_{lim,diag}$$

donde:

$$\psi_2 = |\psi| - \psi_1 \quad [Ec. III. 93]$$

En el caso límite:

$$-e \frac{\pi|\psi_2|}{360} = -y_{lim,diag} \quad [Ec. III. 94]$$

Esta holgura se puede calcular teniendo en cuenta qué espacio libre le queda a un juego centrado si se mueve hacia el interior de la curva. En principio podría pensarse que es y_{lim} , mas no lo es. Esto obedece a dos motivos:

1. La vía no es simétrica y el sobrancho solamente se gana en el hilo (carril) externo, por lo que esta holgura no está disponible entre el eje de la vía y el hilo interno. Por ello, el parámetro ξ deberá deducirse de y_{lim} .
2. La vía es curva y el hilo interno se curva hacia su interior, dejando menos espacio para el movimiento del último juego del bogie. Esta curvatura del hilo interno hacia el interior de la vía se puede caracterizar mediante la flecha de dicho carril, que se va a simbolizar f_i [m]. Por ello, el parámetro f_i también deberá deducirse de y_{lim} .

En resumen:

$$y_{lim,diag} = y_{lim} - \xi - f_i \quad [Ec. III. 95]$$

En la siguiente imagen se puede ver cómo afecta f_i y también en base a qué parámetros calcularlo:

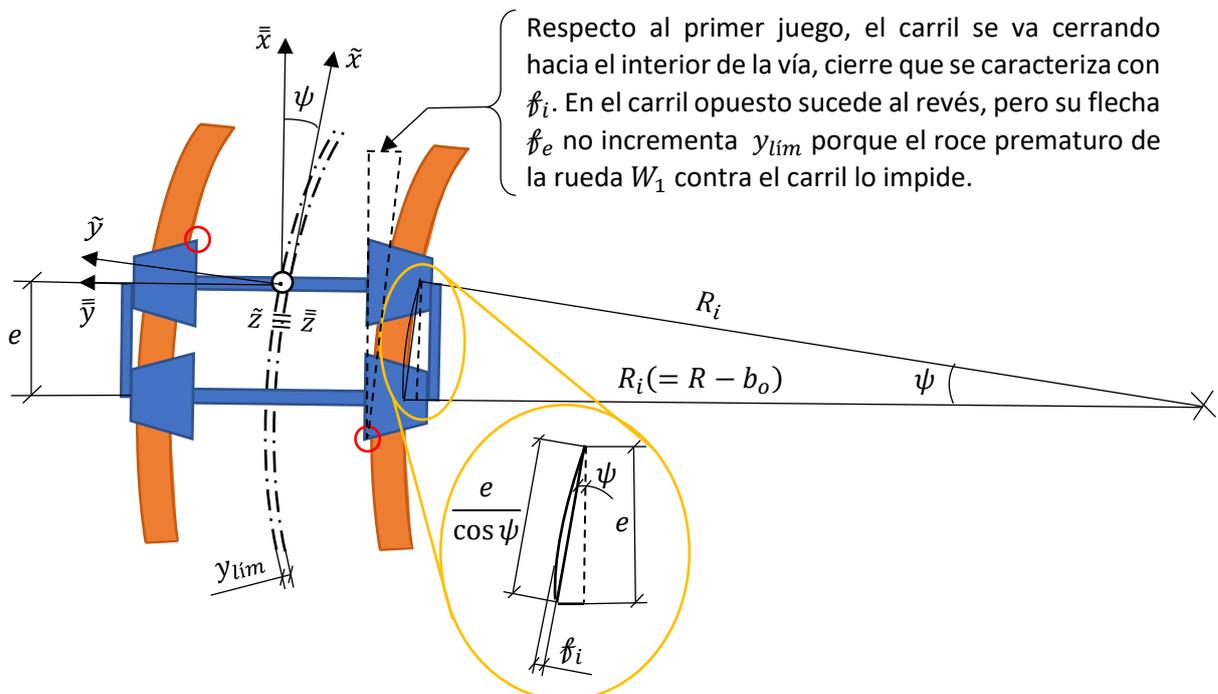


Figura III.29. Influencia en el tipo de movimiento del bogie y cálculo de la flecha del carril interno a la curva. Fuente: Elaboración propia.

De esta imagen se infiere que la cuerda en base a la cual se calcula la flecha es $e / \cos \psi$. Si se introduce esta cuerda en la ecuación III.47 a la par que con el radio interno R_i (equivalente a $R - b_o$) se tiene:

$$f_i = \frac{e^2}{8(R - b_o) \cos^2 \psi} \quad [Ec. III. 96]$$

En el caso de una curva de radio variable debe introducirse $\overline{1/R}$ para promediar la flecha (la flecha varía constantemente en una curva de transición, de forma inversa al radio). Como inconveniente, $\overline{1/R}$ no puede insertarse directamente en la ecuación superior, dado que en ella aparece la substracción $R - b_o$. Este inconveniente se puede salvar por medio de este apañó:

$$f_i = \frac{e^2 \overline{1}}{8 R (R_{L|o} - b_o) \cos^2 \psi} \quad [Ec. III. 97]$$

Finalmente, cabe destacar que la implementación computacional de estas sencillas fórmulas permite conocer *a priori* si el movimiento del bogie es libre o restringido en la curva (fuere circular o de radio variable)

III.5.4.4. Carencias de la mejora propuesta.

Con toda la información que se ha presentado ya prácticamente se puede implementar computacionalmente el método propuesto. Sin embargo, para que el método sea implementable es necesario determinar también esta información:

1. Cuál es la reacción del carril sobre la pestaña. Es decir, el parámetro N_p , el cual se introdujo en la [parte III.5.3.1](#).
2. Cuándo esta fuerza provocaría el movimiento del área de contacto o, en una situación extrema, el descarrilamiento.
3. Cuáles son los parámetros de contacto (curvatura y semiconicidad) en el área de contacto de la pestaña.
4. Qué relación existe entre N_p y N_{br} , siendo N_{br} la reacción del carril sobre la rueda en su área de contacto de la banda de rodadura. Este parámetro también se introdujo en la [parte III.5.3.1](#).

Todas estas cuestiones se van a abordar con el nivel de detalle adecuado (el que proporcione una mejor relación coste computacional – precisión) en la próxima subsección.

III.5.5. En una alineación curva con contacto pestaña – carril. Teoría III.

III.5.5.1. Cálculo de la reacción del carril sobre la pestaña N_p .

Como se afirmó en la [parte III.5.3.1](#), donde se introdujo el parámetro N_p , este no es la suma vectorial de las fuerzas ζ_h y ζ_v . Ello obliga a realizar un exhaustivo balance de fuerzas y a descomponer ζ_h y ζ_v en la dirección de N_p .

Este balance se va a realizar en base al diagrama de fuerzas sobre el área de contacto de la pestaña, el cual no incluye (todavía) el efecto del ángulo de desplazamiento longitudinal ζ . Este diagrama se realiza sobre una ampliación de la figura III.24, en el cual se representa lo siguiente:

- ✓ La línea horizontal y la línea de contacto, las cuales intersecan con un ángulo (de contacto) $\gamma_{0,p}$ (donde la letra p alude a la pestaña).
- ✓ Las fuerzas ζ_h y ζ_v , cada una de las cuales con dos componentes: una perpendicular a la línea de contacto, marcada con el símbolo \perp en su subíndice; y una tangencial o paralela a la línea de contacto, marcada con el símbolo \parallel en su subíndice.
- ✓ La fuerza de fricción que intenta rechazar el contacto pestaña – carril. Esta fuerza será el coeficiente de rozamiento estático $\mu_e [\emptyset]$ multiplicado por reacción N_p y por la fracción κ_e , que es la fracción entre el rozamiento empleado y el máximo rozamiento estático disponible.

He aquí el diagrama de fuerzas recién explicada:

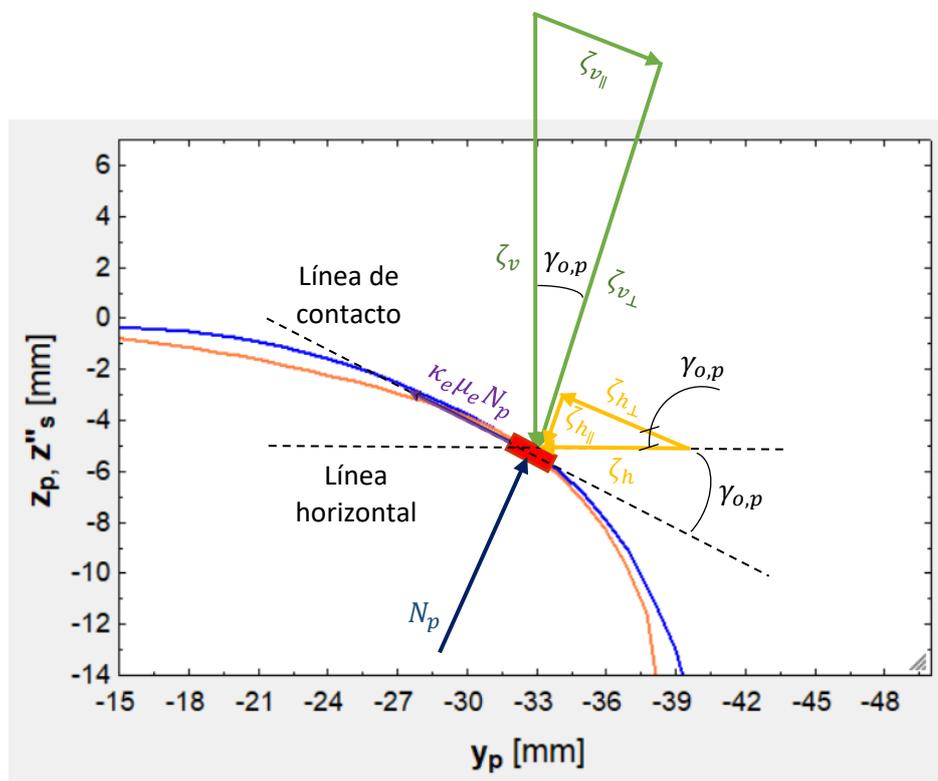


Figura III.30. Diagrama de fuerzas sobre el área de contacto de la pestaña.

Realizando un balance de fuerzas en la dirección perpendicular a la línea de contacto es posible hallar la reacción N_p :

$$N_p = \zeta_{v_{\perp}} + \zeta_{h_{\perp}} \quad [Ec. III. 98]$$

Desarrollando esta expresión en función de $\gamma_{o,p}$:

$$N_p = \zeta_v \cos \gamma_{o,p} + \zeta_h \sen \gamma_{o,p} \quad [Ec. III. 99]$$

Por otro lado, en la dirección tangencial o paralela se tienen estas sumas (que no ecuaciones, por el momento), en las cuales se considera positiva la dirección tangencial descendente:

$$\begin{aligned} & \zeta_{v_{\parallel}} - \zeta_{h_{\parallel}} - \kappa_e \mu_e N_p \\ & \zeta_v \sen \gamma_{o,p} - \zeta_h \cos \gamma_{o,p} - \kappa_e \mu_e N_p \end{aligned}$$

Si esta suma es negativa, entonces habrá una fuerza neta hacia arriba que desplazará la pestaña hacia arriba (entonces el rozamiento pasará a ser dinámico e infligirá un ligero desgaste en la pestaña). Este desplazamiento provocará un desplazamiento del área de contacto y podría llegar a producir el descarrilamiento, situación límite que se abordará en la siguiente parte.

En resumen:

$$\begin{cases} \zeta_v \sen \gamma_{o,p} - \zeta_h \cos \gamma_{o,p} - \kappa_e \mu_e N_p \geq 0 \rightarrow \text{La rueda no se desliza} \\ \zeta_v \sen \gamma_{o,p} - \zeta_h \cos \gamma_{o,p} - \kappa_e \mu_e N_p < 0 \rightarrow \text{La rueda se desliza} \end{cases}$$

El caso límite entre estas dos situaciones es:

$$\kappa_e \mu_e N_p = \zeta_v \sen \gamma_{o,p} - \zeta_h \cos \gamma_{o,p} \quad [Ec. III. 100]$$

Combinando esta ecuación con la anterior y desarrollando la combinación se obtiene una relación interesante:

$$\begin{aligned} \kappa_e \mu_e (\zeta_v \cos \gamma_{o,p} + \zeta_h \sen \gamma_{o,p}) &= \zeta_v \sen \gamma_{o,p} - \zeta_h \cos \gamma_{o,p} \\ \zeta_v (\kappa_e \mu_e \cos \gamma_{o,p} - \sen \gamma_{o,p}) &= \zeta_h (-\cos \gamma_{o,p} - \kappa_e \mu_e \sen \gamma_{o,p}) \\ \zeta_v (\kappa_e \mu_e - \tan \gamma_{o,p}) &= \zeta_h (-1 - \kappa_e \mu_e \tan \gamma_{o,p}) \\ \frac{\zeta_h}{\zeta_v} &= \frac{\kappa_e \mu_e - \tan \gamma_{o,p}}{-1 - \kappa_e \mu_e \tan \gamma_{o,p}} \\ \frac{\zeta_h}{\zeta_v} &= \frac{\tan \gamma_{o,p} - \kappa_e \mu_e}{1 + \kappa_e \mu_e \tan \gamma_{o,p}} \quad [Ec. III. 101] \end{aligned}$$

Esta relación entre las fuerzas ζ_h y ζ_v es la relación que debe darse para que el rozamiento sea estático y no haya desgaste (es decir, para que no haya movimiento relativo entre la rueda y el carril en la dirección tangencial). Cabe señalar que en realidad sí lo habrá, ya que en la dirección tangencial hay pseudodeslizamiento (v_y) y una fuerza de fricción que se opone al mismo (F_y), aunque no se han incluido en este análisis básico ([23.A, pp. 326 y 327], [10.A]).

En la próxima parte se va a continuar con el análisis de esta ratio, la cual es clave en los eventos de descarrilamiento.

III.5.5.2. Desplazamiento del área de contacto y condición de descarrilamiento.

En realidad, cuando $\kappa_e = 1$ la fuerza de rozamiento $\kappa_e \mu_e N_p$ estará saturada (será igual al máximo, que es $\mu_e N_p$ según la ley de Amontons – Coulomb). Entonces, el rozamiento pasará a ser dinámico (μN_p , por tanto) y habrá un desplazamiento relativo entre la rueda y el carril en la dirección tangencial (adicional al asociado al pseudodeslizamiento v_y).

Teniendo esto en cuenta, procédese a reescribir la ratio ζ_h/ζ_v :

$$\frac{\zeta_h}{\zeta_v} = \frac{\tan \gamma_{o,p} - \mu}{1 + \mu \tan \gamma_{o,p}} \quad [Ec. III. 102]$$

Esta ratio, que se conoce como fórmula de Nadal, debe interpretarse como: “aquella que, para un valor determinado de μ y $\gamma_{o,p}$, provocará el desplazamiento de la rueda sobre el (relativo al) carril”.

Este desplazamiento de la rueda tendrá una componente horizontal (hacia el exterior de la curva) y otra vertical (hacia arriba), en la dirección tangencial (dado que se tendrá $\mu N_p > \zeta_{v\parallel} - \zeta_{v\perp}$ en un primer momento). La consecuencia de este desplazamiento será la modificación de la posición del área de contacto, la cual descenderá por la pestaña de la rueda.

Esta modificación de la posición del área de contacto se representa de modo esquemático a continuación (sin variar la posición de la rueda, ya que para ello habría que rotarla en torno de la esquina del carril, lo cual no merece la pena para lo que se pretende demostrar). Es importante comprender la variación del ángulo de contacto y la consecuente variación de las componentes de las fuerzas

- ✓ Primeramente, el ángulo de contacto pasará de $\gamma_{o,p}$ a $\gamma'_{o,p} > \gamma_{o,p}$.
- ✓ Esto causará el aumento de aquellas componentes que vayan con el seno se incrementen y el decremento de aquellas que vayan con el coseno (nótese que las fuerzas ζ_h y ζ_v se desplazan y no varían tan apenas en módulo).
- ✓ Cuando se satisfaga $\zeta_v \sin \gamma_{o,p} - \zeta_h \cos \gamma_{o,p} - \mu N_p \geq 0$, entonces la rueda quedará fija y cesará de ascender. Del mismo modo, el área de contacto quedará fija y no descenderá más por la pestaña ([23.A, pp. 326 y 327], [10.A]).

He aquí la representación esquemática:

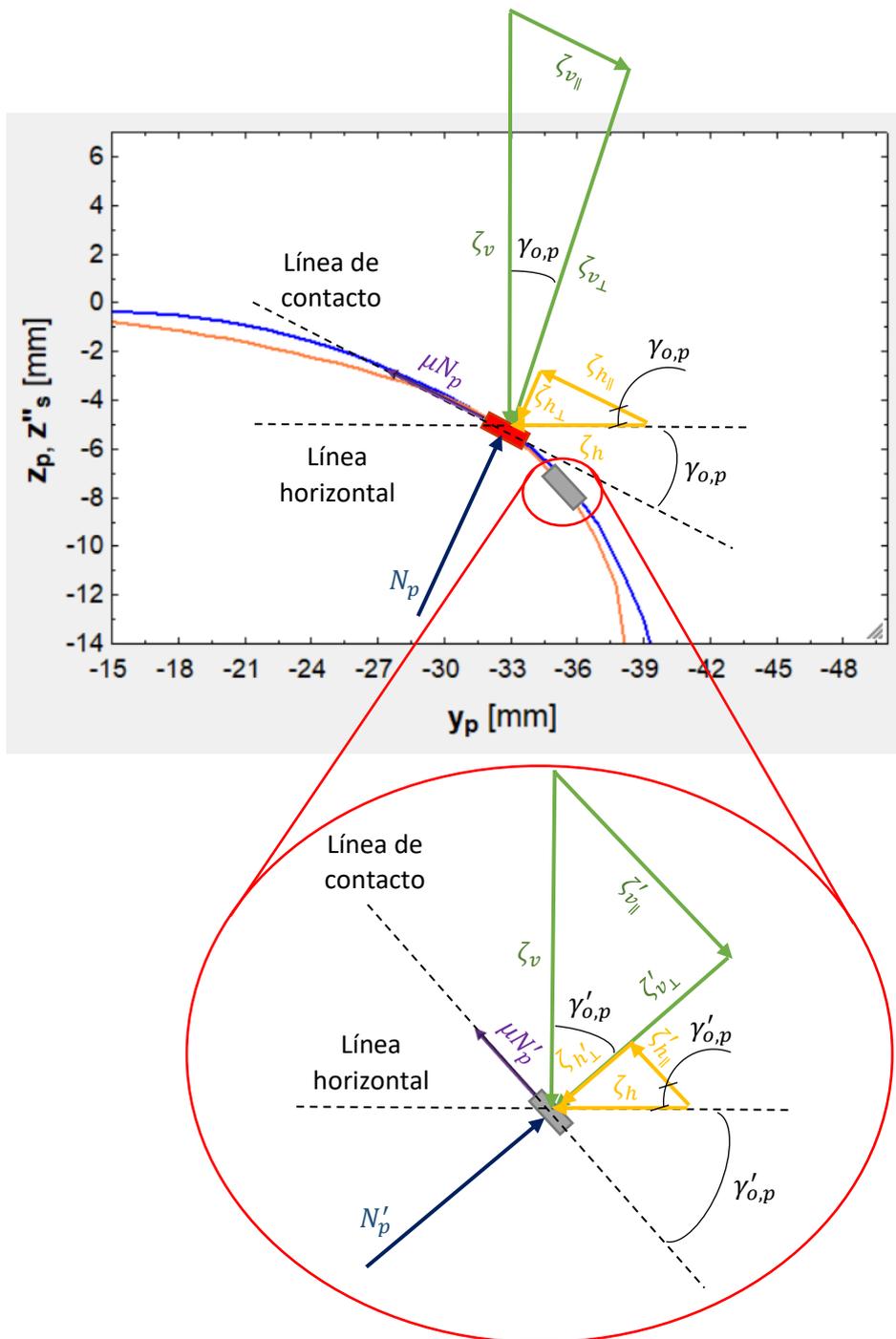


Figura III.31 Modificación de la posición del área de contacto a lo largo de la pestaña.

En el fondo, lo que sucede es que la rueda se va desplazando y, consecuentemente, la posición de contacto, hasta que se alcanza una posición de equilibrio. Esta posición persistirá durante el resto del recorrido de una curva circular, no siendo así en una curva de transición. Esto es así debido a la variabilidad de ζ_h en una curva de transición (incluso de ζ_v si se va transfiriendo carga de la pestaña a la banda de rodadura a la pestaña o a la inversa).

No existe un método analítico directo para calcular cuál será la $\gamma'_{0,p}$ que asegure el equilibrio en cada curva (equilibrio asimismo dependiente de los valores de ζ_h y ζ_v). A pesar de la inexistencia de un

método analítico como el citado, lo cierto es que con la ratio ζ_h/ζ_v y un valor dado de μ sí puede calcularse el valor de $\gamma'_{o,p}$ en una situación en la que se utilice la máxima fricción disponible.

Sin embargo, esto no será demasiado útil, pues en la realidad nunca se utilizará la fricción máxima disponible en este menester. En la realidad parte de la fricción irá destinada a oponerse a los pseudodeslizamientos (no solo v_y , sino también v_x y φ) y es posible que otra parte quede sin uso. Aparte, en la realidad habría que incluir las fuerzas F_x, F_y para un cálculo fino (y también la componente de N_p con el seno del ángulo ζ , ángulo que todavía no se ha considerado).

De todas formas, puede afirmarse, *grosso modo*, que $\gamma'_{o,p}$ oscilará entre 45° y 80° (lo cual no obsta para que pueda ser algo inferior) y que, a partir de 80° se producirá el descarrilamiento. Además, también cabe considerar que la mayor parte de la pestaña tiene un ángulo de 70° [10.A], por lo que el contacto se producirá habitualmente en dicha región [10.A].

Por último, cabe comentar que en los instantes previos al descarrilamiento (inducido por una ratio ζ_h/ζ_v cercana a la unidad) se habrá alcanzado ya un ángulo demasiado elevado, pero hay un factor extra que entra en juego a la hora del descarrilamiento que también hay que considerar: el tiempo de actuación de la fuerza ζ_h . Este factor es también relevante, ya que se puede tener una ratio ζ_h/ζ_v menor que 1 que provoque el descarrilamiento si ζ_h actúa durante un tiempo lo suficientemente largo y viceversa.

De hecho, en el Grupo de los Ferrocarriles Japoneses (que se suele conocer por su nombre en inglés, que es *Japan Railways Group*, o simplemente por las siglas JR) se admite (o se admitía cuando se publicó el libro tomado como referencia) una ratio ζ_h/ζ_v de 0,8 durante 0,05 s, de 2 durante 0,02 s y de 4 durante 0,01 s [23.A, p. 327].

III.5.5.3. Inclusión del ángulo ζ y anotaciones sobre los parámetros de contacto.

El ángulo de desplazamiento longitudinal de la posición de la posición de contacto se puede obtener, de manera genérica, tal como se expuso en el [subapartado I.4.9](#). Sin embargo, cuando se produce el contacto pestaña – carril esas fórmulas pierden validez, pues no toman en cuenta la especial geometría de la pestaña. Una fórmula que sí tiene en cuenta la especial geometría de la pestaña es la que sigue, la cual incluye el ángulo de contacto $\gamma_{o,p}$ [10.A]:

$$\zeta = \pm \arcsen(\tan(\gamma_{o,p}) \tan(\psi)) \quad [Ec. III. 103]$$

donde el doble signo introducido ha de responder al criterio de signos fijado en el subapartado I.4.9.

Este ángulo afecta ligeramente al balance de fuerzas. Para conocer estas afecciones, las cuales se explicitan a continuación, la referencia consultada es [38.A, pp. 228 – 230]:

- ✓ La fuerza ζ_v se inclina y es su componente radial ($\zeta_{v,r}$) la que actúa sobre la pestaña ($\zeta_v \cos \zeta$). Su otra componente, que estaría en la cuerda entre el área de contacto original y la desplazada ($\zeta_{v,c}$, que equivale a $\zeta_v \sen \zeta$) puede llegar a favorecer el descarrilamiento, lo cual depende principalmente de su sentido (si va hacia arriba, entonces lo favorece).
- ✓ Lo anterior afecta a la magnitud de N_p y, por consiguiente, a la de la fuerza de fricción máxima μN_p .

Teniendo en cuenta esto, lo que se realiza es un desarrollo similar al realizado en la [parte III.5.5.1](#), pero introduciendo $\zeta_{v,r}$ y ζ y permutando $\kappa_e \mu_e$ por μ . De esta forma se demuestra la fórmula de Wagner, que no es más que una corrección de la fórmula de Nadal:

$$\begin{aligned} \mu(\zeta_v \cos \gamma_{o,p} + \zeta_h \operatorname{sen} \gamma_{o,p}) &= \frac{\zeta_{v,r}}{\cos \zeta} \operatorname{sen} \gamma_{o,p} - \zeta_h \cos \gamma_{o,p} \\ \zeta_{v,r} \left(\mu \cos \gamma_{o,p} - \frac{\operatorname{sen} \gamma_{o,p}}{\cos \zeta} \right) &= \zeta_h (-\cos \gamma_{o,p} - \mu \operatorname{sen} \gamma_{o,p}) \\ \zeta_{v,r} \left(\mu - \frac{\tan \gamma_{o,p}}{\cos \zeta} \right) &= \zeta_h (-1 - \mu \tan \gamma_{o,p}) \\ \frac{\zeta_h}{\zeta_{v,r}} &= \frac{\mu - \frac{\tan \gamma_{o,p}}{\cos \zeta}}{-1 - \mu \tan \gamma_{o,p}} \\ \frac{\zeta_h}{\zeta_{v,r}} &= \frac{\tan \gamma_{o,p} - \mu \cos \zeta}{(1 + \mu \tan \gamma_{o,p}) \cos \zeta} \quad [\text{Ec. III. 104}] \end{aligned}$$

En realidad, existen otras correcciones para la fórmula de Nadal aparte de la fórmula de Wagner. Por ejemplo, la fórmula de Johansen o la del Grupo de los Ferrocarriles Japoneses (empresa introducida en la parte anterior), ambas desarrolladas en [38.A, pp. 230 – 233]. Sin embargo, para un análisis básico de descarrilamiento, es suficiente con las fórmulas de Nadal y Wagner.

En cuanto a los parámetros de contacto, su obtención no es inmediata, por lo que no se va a realizar aquí, sino en el próximo subapartado (tras disertar sobre la relación entre las fuerzas normales de cada área de contacto). A modo de anotación previa, puede repetirse que cabe esperar valores de $\gamma_{o,p}$ mucho mayores que los encontrados en la banda de rodadura (1,432 ° en la banda) y que la semiconicidad equivalente se puede calcular como la arcotangente de $\gamma_{o,p}$.

III.5.5.4. Relación entre las fuerzas normales de cada área de contacto.

Para rematar este subapartado, se va a estudiar cuál es la relación entre las fuerzas normales de cada área de contacto, lo cual es verdaderamente importante a la hora de obtener numéricamente el desgaste que el material sufrirá en cada una de las áreas.

Para ello, existen varias aproximaciones. Una de ellas es la de Sauvage, cuyo coste computacional es bajo, por lo que se va a presentar a continuación [39.A].

En primer lugar, se calcula la interpenetración virtual entre perfiles o indentación total entre el perfil de la rueda y el del carril. Para ello, se aplica la fórmula 4.23 (váyase al [subapartado 4.4.4](#) para verla) con la suma vectorial de N_p y N_{br} (\vec{N}_p y \vec{N}_{br} si se consideran sus direcciones) y con valores promedio de curvatura relativa (A y B) y de la constante r_H para ambas áreas de contacto. De esta forma, se obtiene la indentación total δ_o . Matemáticamente:

$$\delta_o = \bar{r}_H \left(\left(\frac{3}{2} |\vec{N}_{br} + \vec{N}_p| \frac{1-v^2}{E} \right)^2 (\bar{A} + \bar{B}) \right)^{\frac{1}{3}} \quad [Ec. III. 105]$$

Esta indentación total se divide vectorialmente en:

- ✓ La indentación que se produce en el área de contacto de la banda de rodadura, que se puede denotar δ_{br} .
- ✓ La indentación que se produce en el área de contacto de la pestaña, que se puede denotar δ_p .

$$\vec{\delta}_o = \vec{\delta}_{br} + \vec{\delta}_p \quad [Ec. III. 106]$$

A partir de la indentación que se produce en cada área se puede calcular la fuerza normal a cada área por medio de la misma ecuación 4.23, en la cual habrá que introducir los parámetros de curvatura y la constante r_H asociada a cada área de contacto (a los que se añade el subíndice br si hacen referencia a la banda de rodadura y p si hacen referencia a la pestaña). Matemáticamente:

$$\delta_{br} = r_{H,br} \left(\left(\frac{3}{2} N_{br} \frac{1-v^2}{E} \right)^2 (A_{br} + B_{br}) \right)^{\frac{1}{3}} \quad [Ec. III. 107]$$

$$\delta_p = r_{H,p} \left(\left(\frac{3}{2} N_p \frac{1-v^2}{E} \right)^2 (A_p + B_p) \right)^{\frac{1}{3}} \quad [Ec. III. 108]$$

De aquí se pueden despejar N_p y N_{br} , que es lo que se buscaba.

El principal problema de este método es que es heurístico si no se dispone de una herramienta computacional o gráfica que permita hallar la relación entre δ_o , δ_{br} y δ_p . Es decir, se suele suponer que δ_{br} es una fracción de δ_o y que δ_p es otra fracción de δ_o (fracciones que no necesariamente deben sumar 1, puesto que la suma entre indentaciones es vectorial en lugar de aritmética).

Por ello, es preferible simplificar este método y asumir una relación entre N_p y N_{br} en base a la ecuación III.54 (véase esta en la [parte III.5.3.1](#) y téngase en cuenta que se ha realizado la aproximación $\cos\zeta \sim 1$). Si se divide esta ecuación entre N_e y se introduce la ratio $\alpha_{fn} [\phi]$, definida como la ratio entre ζ_v y N_e :

$$\begin{cases} \frac{N_{br}}{N_e \cos \gamma_{o,br}} + \frac{\zeta_v}{N_e} = \frac{N_e}{N_e} \\ \alpha_{fn} = \frac{\zeta_v}{N_e} \end{cases}$$

$$\frac{N_{br}}{N_e \cos \gamma_{o,br}} + \alpha_{fn} = 1 \quad [Ec. III. 109]$$

Esta ratio α_{fn} oscilará habitualmente entre 0,5 y 1, tal como aparece en los repartos de carga de [39.A, figs. 4 y 5]. De esta forma se puede distinguir entre:

- ✓ Contacto pestaña – carril puro, cuando $\alpha_{fn} = 1$ y la totalidad de N_e caiga sobre el arranque de la pestaña.
- ✓ Ambos contactos, cuando $0,5 \leq \alpha_{fn} < 1$ y N_e se reparta entre la pestaña ($\alpha_{fn}N_e$) y la banda de rodadura ($(1 - \alpha_{fn})N_e \cos\gamma_{o,br}$).

Generalizando esto se tienen estas dos expresiones:

$$\begin{cases} \zeta_v = \alpha_{fn}N_e & [Ec. III. 110] \\ N_{br} = (1 - \alpha_{fn})N_e \cos\gamma_{o,br} & [Ec. III. 111] \end{cases}$$

III.5.6. En una alineación curva con contacto pestaña – carril. Práctica.

III.5.6.1. Consideración del balanceo y del ángulo de lazo.

Para la determinación de la posición exacta de las áreas de contacto es preciso considerar cómo afecta el balanceo y el ángulo de lazo.

Primeramente, para considerar el balanceo se puede recurrir a la ecuación matricial III.52, la cual se puede ver en la parte III.5.2.3. En esta ecuación simplemente habrá que modificar el valor de Φ , el cual ahora dependerá de $r_{e,lím}$, $r_{i,lím}$ y b_o , parámetros que se introducirán tal como en la ecuación III.49 de la parte III.5.2.1). Los dos primeros, $r_{e,lím}$ y $r_{i,lím}$, vienen dados por las ecuaciones III.77 y III.78 (desarrolladas ambas en la parte III.5.4.2) y proporcionan los siguientes resultados para una rueda de $r_o = 230$ mm y $k = 0,025$ (recuérdese que $y_{lím} = 3,50$ mm cuando $\xi = 0$, según se expresó en la parte III.5.2.2):

$$\begin{cases} r_{e,lím} = 230 + 0,025 \cdot 3,50 = 230,088 \text{ mm} \\ r_{i,lím} = 230 - 0,025 \cdot 3,50 = 229,913 \text{ mm} \end{cases}$$

Como el desplazamiento lateral del juego de ruedas es el mismo en ambas ruedas (3,50 mm), b_o no varía y su dupla conserva su valor (1.736 mm). En base a este conjunto de datos se aplica la ecuación III.49 y se obtiene el ángulo que habrá que introducir en la ecuación matricial III.49 y que se aplicará a solamente a la rueda externa a la curva, que es la izquierda en el caso de que la curva sea dextrógira (como la curva de la figura III.18, que se puede ver debajo de la ecuación III.49):

$$\Phi = -\arctan\left(\frac{230,088 - 229,913}{1,736}\right) = -5,776 \cdot 10^{-3} [^\circ]$$

Posteriormente, se procede al cálculo del ángulo de lazo, para lo cual habrá que asumir cuidadosamente unas condiciones que sean lo suficientemente desfavorables. Estas condiciones se

materializarán en valores de empuje del bogie y radio de curvatura (parámetros e y R , correlativamente). Por ejemplo:

- ✓ $e = 2.700$ mm (léase el [subapartado IV.4.3](#), hacia cuyo final se indica que el bogie con mayor empuje es el bogie comercial Graz Pauker 702, el cual posee este gran empuje total (siendo la suma de los empujes parciales $1.000 + 700 + 1.000$ mm).
- ✓ $R = 200$ m (léase la [parte V.1.2.2](#) para comprender el porqué de esta elección).

El ángulo de lazo se obtiene en función de estos dos parámetros, en aplicando la ecuación I.85, la cual fue presentada en el [subapartado I.4.4](#):

$$\psi = \arcsen\left(\frac{2.700 \cdot 10^{-3} [m]}{200 [m]}\right) = 0,774 [^\circ]$$

Como se ve, este ángulo resulta ser unas 100 veces más grande que el de balanceo γ , además, es positivo, lo cual sucede a la entrada de curvas dextróginas (como la presentada en la figura I.18 del [subapartado I.4.4](#), que es la que se usó para deducir gráficamente esta fórmula) o, en el caso opuesto, es decir, a la salida de curvas levóginas.

Para incluir el efecto del ángulo de lazo en el perfil de la rueda, se plantea esta transformación de coordenadas, la cual parte del sistema de coordenadas $X'_p Y'_p Z'_p$ (recuérdese que las coordenadas de este sistema las devuelve la ecuación matricial III.52 tras introducir el ángulo de balanceo) y desemboca en el sistema $X''_p Y''_p Z''_p$:

$$\begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{pmatrix} x''_p \\ y''_p \\ z''_p \end{pmatrix}$$

Básicamente, la rotación debida al ángulo de lazo se produce en torno del eje z'_p , por lo que este eje quedará invariable ($z'_p \equiv z''_p$), variando los otros dos. La matriz de cambio de coordenadas se puede calcular por medio del procedimiento algebraico por el cual se obtuvo la matriz \underline{M} en la [parte III.5.1.2](#), quedando esta transformación lineal al final:

$$(x''_p; y''_p; z''_p) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{pmatrix} \quad [\text{Ec. III. 112}]$$

En resumen, las transformaciones lineales aplicadas son:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{pmatrix} x''_p \\ y''_p \\ z''_p \end{pmatrix}$$

Si se desea, se puede optar por aplicar una única transformación (una única matriz de cambio de base), la cual efectuaría esta transformación:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi, \psi} \begin{pmatrix} x_p'' \\ y_p'' \\ z_p'' \end{pmatrix}$$

Para ello, basta con combinar las ecuaciones III.52 y III.112:

$$\begin{aligned} (x_p''; y_p''; z_p'') &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \operatorname{sen} \Phi \\ 0 & -\operatorname{sen} \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \\ (x_p''; y_p''; z_p'') &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi \cos \Phi & -\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \Phi \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi \cos \Phi & \cos \psi \operatorname{sen} \Phi \\ 0 & -\operatorname{sen} \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \quad [\text{Ec. III. 113}] \end{aligned}$$

III.5.6.2. Posición exacta del área de contacto banda de rodadura – carril y parámetros de contacto.

Una vez se cuenta con esta información, se introduce en el programa EES para así poder posicionar la rueda izquierda realísticamente y obtener las posiciones de las dos áreas de contacto y los parámetros de contacto en dichas áreas, que son la semiconicidad y el ángulo de contacto de la rueda y los radios de curvatura de la rueda y del carril. Los dos contactos que se producen en la rueda izquierda son el contacto banda de rodadura – carril y el contacto pestaña – carril (o arranque de la pestaña – carril, más propiamente dicho) y se pueden observar en la siguiente gráfica:

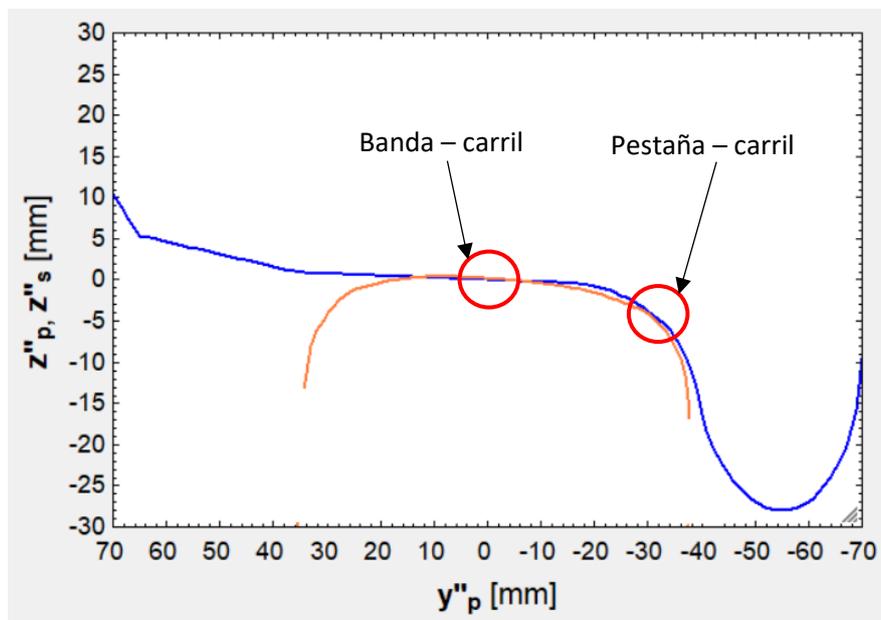


Figura III.32. Doble contacto de la rueda izquierda con el carril: banda de rodadura – carril por un lado y pestaña – carril por el otro.

Esta imagen es básicamente la misma que la III.23 (véase esta al final de la [parte III.5.2.4](#)), de lo que se deduce que la inclusión del ángulo de lazo no modifica prácticamente nada la posición de la rueda en relación el carril y, por ende, no modifica tan apenas las posiciones de las áreas de contacto. Esto va en contra de las afirmaciones de la referencia [4.A, p. 4] y puede obedecer al hecho de que el ángulo de lazo es, a pesar de haberlo calculado en las peores condiciones, demasiado pequeño. De hecho, en estas afirmaciones se aporta la cifra de 1 [rad] como un ángulo de lazo significativo y no despreciable, cifra que está muy por encima del ángulo de lazo computado: 0,774 °, que equivale a 0,014 [rad], en torno a 1 % de la cifra señalada por la referencia.

En conclusión, el ángulo de lazo es demasiado pequeño al trazar las curvas más cerradas del trazado con un bogie de gran empate, por lo que su efecto en las posiciones de contacto es despreciable. Probablemente cobraría una mayor relevancia en una situación de movimiento de lazo, el cual es infrecuente en vagones mercantes, tal como se explicó en la [sección I.6](#), siendo este el motivo por el que no se va a considerar.

A continuación, se va a obtener gráficamente la extensión aproximada del área de contacto banda de rodadura – carril:

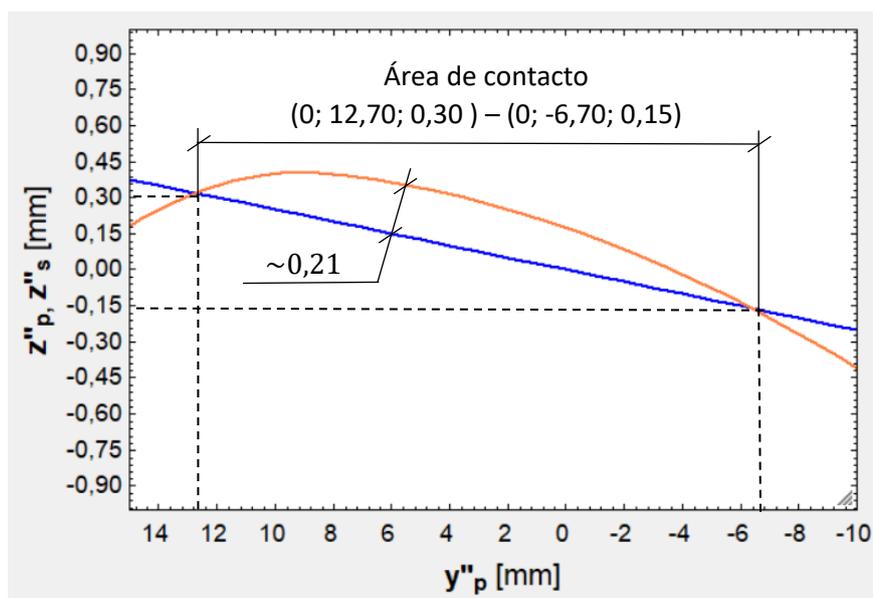


Figura III.33. Extensión del área de contacto banda de rodadura – carril generada en la rueda izquierda.

Esta extensión es aproximada, ya que no considera las tolerancias de fabricación o montaje del carril y tampoco considera la carga de la rueda, la cual aumentaría la interpenetración o indentación entre los cuerpos. Esta indentación suele estar en el orden de magnitud de los micrómetros o decenas de ellos, tal como se mencionó en el [apartado I.2](#), es decir, valores entre 10 y 100 veces inferiores a los 0,21 mm (=210 μm) obtenidos.

Esto evidencia las limitaciones de este método gráfico, que es simplista, pero útil para estimar dónde caerá el área de contacto y tomar los parámetros de contacto de cada cuerpo.

Así, el área cae aproximadamente entre los puntos (0; 12,70; 0,30) y (0; -6,70; 0,15) si se ordenan de mayor a menor (en el sentido que tiene el eje y_p'' en la figura), por lo que entonces se deben tomar estos parámetros:

- ✓ Los de la banda de rodadura de la rueda: $y_p'' \in [-35; 15,64]$ en la banda de rodadura, por lo que abarca el intervalo señalado.
- ✓ Los de la región central del carril: $y_p'' \in [-10,228; 10,228]$ en esta región, por lo que abarca casi toda el área de contacto, excluyendo el breve intervalo $[10,228; 12,700]$ que caería en la región intermedia izquierda, pero que se puede despreciar por su escasa extensión.

Estos parámetros son los que siguen:

$$\begin{cases} k = 0,025 \\ \gamma_o = \arctan(0,025) = 1,432^\circ \\ R_{x_2} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{R_{x_2}} \rightarrow 0 \\ R_{x_1} = 300 \text{ mm} \end{cases}$$

III.5.6.3. Posición exacta del área de contacto pestaña – carril y parámetros de contacto.

Por otro lado, está el área de contacto pestaña – carril; aunque, como se muestra abajo, no se llega a producir el contacto con los parámetros introducidos, que son los mismos que se obtuvieron en la [parte III.5.1.2](#) para la rueda izquierda (decalaje horizontal de +1 mm y decalaje vertical de +0,06 mm), aparte, por supuesto, del semijuego de vía (3,50 mm con $\xi = 0$).

En concreto, no se puede medir ninguna indentación, por lo que no se produce el contacto en la zona de mayor acercamiento, que solamente se puede catalogar como área de contacto potencial. De hecho, existe una distancia apreciable entre la pestaña (o su arranque) y el carril en su zona más próxima, que resulta ser 0,75 mm, como se comprueba por vía del método gráfico:

Esta área discurre aproximadamente entre los puntos (0; -30,28; -4,13) y (0; -32,40; -5,02) si se ordenan de mayor a menor (en el sentido que tiene el eje y_p'' en la figura), por lo que entonces se deben tomar estos parámetros:

- ✓ Los del arranque de la pestaña de la rueda: $y_p'' \in [-15,640; -32,696]$ en el arranque de la pestaña, por lo que comprende el intervalo señalado. Este arranque se compone de dos curvas de acuerdo entre la banda de rodadura y la pestaña propiamente dicha, una primera curva de 36 mm de radio y una segunda de 13 mm (véase la [parte III.4.1.4](#) para mayor claridad). La que debe tomarse es la primera, la de 36 mm.
- ✓ Los de la región extrema derecha del carril: $y_p'' \in [-26,027; -36]$ en esta región, por lo que comprende toda el área de contacto. El radio de esta región es 13 mm, que no debe confundirse con los 13 mm de la segunda curva de acuerdo de la rueda, la cual no interviene en el contacto pestaña – carril.

Estos parámetros son los que siguen:

$$\begin{cases} k = 0,074 \\ \gamma_o = 4,258^\circ \\ R_{x_2} = 36 \text{ mm} \\ R_{x_1} = 13 \text{ mm} \end{cases}$$

Sin embargo, esto no es preciso, puesto que estos parámetros son genéricos (valores promedio) de una superficie mucho mayor que la de contacto. Por tanto, lo que se realiza en la práctica es medir el ángulo de contacto sobre la gráfica y hallar k mediante la tangente de dicho ángulo:

$$\begin{cases} \gamma_o = 32^\circ \\ k = \tan(32^\circ) = 0,625 \\ R_{x_2} = 36 \text{ mm} \\ R_{x_1} = 13 \text{ mm} \end{cases}$$

Este ángulo es un poco bajo, si bien puede ser admisible en primera aproximación. En la realidad, este ángulo tenderá a aumentar y los parámetros variarán de esta manera, según la geometría de la pestaña:

- ✓ Por debajo de 36° , nada cambiaría (excepto k , que se obtendría como la tangente de γ_o).
- ✓ Entre 36° y 70° se tendría $R_{x_2} = 13 \text{ mm}$. R_{x_1} seguiría siendo el mismo y k se obtendría como la tangente de γ_o .
- ✓ A partir de $\gamma_o = 70^\circ$, lo que se tomaría es $R_{x_2} = 20 \text{ mm}$. R_{x_1} seguiría siendo el mismo y k se obtendría como la tangente de γ_o .

Por último, cabe añadir que lo anterior implica que, en la práctica, $y_{lim} > 3,50$ mm, adquiriendo y_{lim} , de hecho, el valor 4,25 mm en la práctica. Ello obliga a modificar la ecuación III.50 de la [parte III.5.2.1](#):

$$y_{lim} = \frac{\eta}{2} + \xi + \frac{0,75 [mm]}{\left\{1.000 \left[\frac{mm}{m}\right]\right\}} \quad [Ec. III. 114]$$

Esto es positivo, puesto que significa que el juego puede descentrarse más de lo previsto por la teoría, por lo que el radio umbral disminuirá y los contactos pestaña – carril serán menos asiduos.

Por otro lado, esto conlleva a que ahora el contacto banda rodadura – carril se habrá desplazado 0,75 mm hacia la izquierda, estando ahora en el intervalo (0; 11,95; 0,30) – (0; -7,45; 0,15). Sin embargo, esto es irrelevante, ya que los parámetros de contacto serán los mismos. De hecho, es incluso beneficioso, en tanto en cuanto el área de contacto se habrá centrado más en el carril: $y_p'' \in [-10,228; 10,228]$ en la región central del carril, por lo que abarca casi toda el área de contacto, excluyendo el intervalo [10,228; 11,950], el cual es ahora más breve que antes. Por tanto, la aplicación del radio de curvatura de la región central ($R_{x_1} = 300$ mm) será más precisa que antes.

III.5.6.4. Posición exacta del área de contacto y parámetros de contacto en la rueda derecha.

A continuación, se va a replicar el proceso para la rueda derecha. En primer lugar, debe recordarse que en esta rueda no influye el balanceo, por lo que en la matriz de la ecuación III.52 o en la matriz global del cambio de coordenadas, en la III.113, se inserta $\Phi = 0$.

Por otro lado, ya que ahora se cuenta con un valor de y_{lim} más realista, va a aplicarse este directamente. O sea, $y_{lim} = 4,25$ mm.

La representación obtenida es la que sigue:

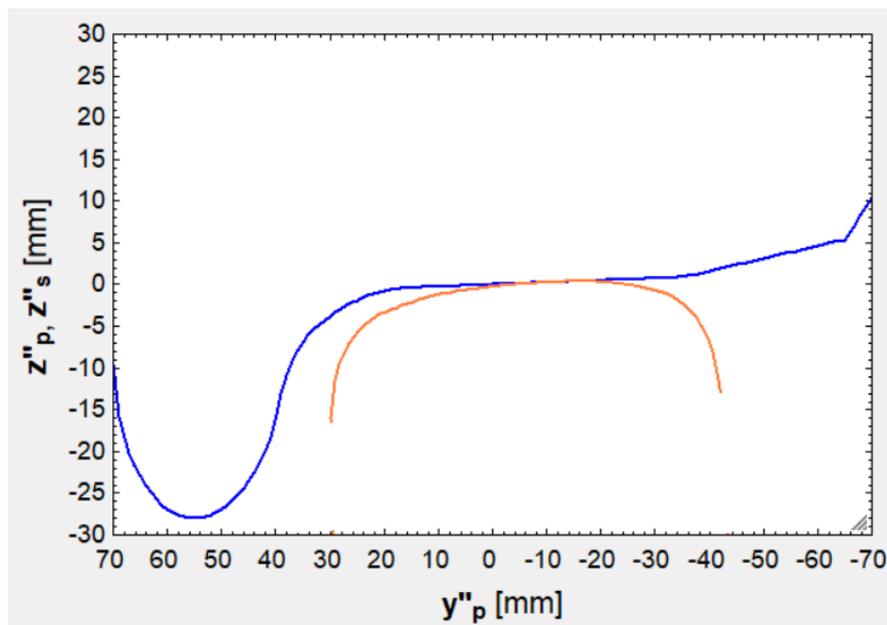


Figura III.36. Contacto en la rueda derecha cuando en la rueda izquierda se produce el contacto pestaña – carril.

Como se puede apreciar, el contacto que se produce en la rueda derecha es idéntico al que se produce en la figura III.22 (véase esta hacia el final de la [parte III.5.2.4](#)), puesto que la inclusión del ángulo de lazo resulta despreciable en este caso, tal como se predecía en base a los datos presentados en la referencia [4.A, p. 4].

El área de contacto generada en este caso posee esta extensión, aproximadamente:

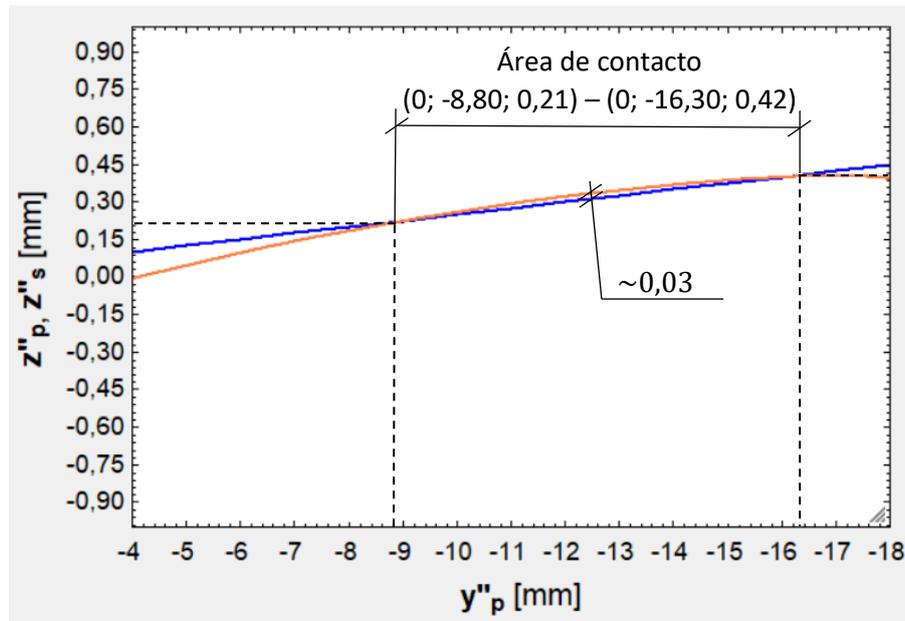


Figura III.37. Extensión del área de contacto generada en la rueda derecha.

Nuevamente, la indentación obtenida (0,03 mm o 30 μm) es muy superior a la real, en un factor entre 10 y 100 en este caso, lo cual vuelve a poner de manifiesto las limitaciones de este método gráfico.

Independientemente de esto, el área discurre aproximadamente entre los puntos (0; -8,80; 0,21) y (0; -16,40; 0,42) si se ordenan otra vez de mayor a menor, por lo que entonces se deben tomar estos parámetros:

- ✓ Los de la banda de rodadura de la rueda: $y''_p \in [-35; 15,64]$ en la banda de rodadura, por lo que abarca el intervalo señalado.
- ✓ Los de la región intermedia derecha del carril: $y''_p \in [-26,027; -10,228]$ en esta región, por lo que abarca casi toda el área de contacto, excluyendo el breve intervalo $[-10,228; -8,800]$ que caería en la región central, pero que se puede despreciar por su escasa extensión.

Estos parámetros son los que siguen:

$$\begin{cases} k = 0,025 \\ \gamma_o = \arctan(0,025) = 1,432^\circ \\ R_{x_2} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{R_{x_2}} \rightarrow 0 \\ R_{x_1} = 80 \text{ mm} \end{cases}$$

III.6. Materiales de la rueda y del carril.

III.6.1. Rueda.

Los materiales para la rueda son los consignados por la norma UNE-EN 13262:2005+A2:2011 [40.A]. En esta norma se fijan las propiedades de estos grados de acero:

- ✓ ER6.
- ✓ ER7.
- ✓ ER8.
- ✓ ER9.

Empero, el grado de acero ER9 no es aplicable para las necesidades de interoperabilidad de los vagones de mercancías, según se establece en el objeto y campo de aplicación de la norma. Atendiendo a la importancia de la interoperabilidad técnica, explicada en la [sección 2.3](#), este grado se va a obviar en adelante.

Adicionalmente, en una nota del objeto y campo de aplicación se enuncia que el grado ER6 normalmente no se ajusta a las necesidades de los vagones de mercancías a tenor de sus altos valores de carga por eje.

Descartados el ER6 y el ER9, únicamente quedan el ER7 y el ER8. Como este último es más resistente y, en principio, se pretende utilizar valores de carga por eje elevados, el grado ER8 es el elegido.

Las propiedades mecánicas que se le exigen al grado ER8 son diferentes para la llanta y para el velo de la rueda, ya que la llanta es la parte externa de una rueda y la que sufre las elevadas tensiones que se producen en su contacto con el carril, mientras que el velo es la parte interna y su misión es estructural (transmisión de la semicarga por eje a la llanta), pero no sufre tensiones tan elevadas ni se desgasta. Por ello, al velo se le exige una tensión de rotura inferior (valor que resulta de la aplicación de una reducción determinada a la tensión de rotura de llanta), pero una mayor ductilidad (un mayor alargamiento), tal como se puede constatar en la siguiente tabla:

Tabla III.7. Propiedades mecánicas exigidas al grado ER8. Fuente: [40.A].

Llanta			Velo	
Límite elástico [MPa]	Tensión de rotura (mínima/máxima) [MPa]	Máximo alargamiento [%]	Reducción de la tensión de rotura [MPa]	Máximo alargamiento [%]
≥ 540	860/980	≥ 13	≥ 120	≥ 16

Los porcentajes máximos de los elementos del grado ER8 (los aleantes y elementos residuales del acero) son:

Tabla III.8. Porcentajes máximos de los elementos del grado ER8. Los símbolos de los elementos químicos son los que constan en la tabla periódica. Fuente: [40.A].

Contenido máximo en %										
C	Si	Mn	P	S	Cr	Cu	Mo	Ni	V	Cr+Mo+Ni
0,56	0,40	0,80	0,020	0,015	0,30	0,30	0,08	0,30	0,06	0,50

Como el porcentaje de carbono es inferior al 0,77 % (punto eutectoide del acero), este acero es hipoeutectoide, lo cual es coherente con su cometido, ya que un acero hipereutectoide sería frágil y se alargaría menos, por lo que sería menos adecuado para la rodadura.

Otros valores mínimos de propiedades con que debe contar este acero son:

Tabla III.9. Valores mínimos de dureza y resiliencia del grado ER8. Fuente: [40.A].

Valores mínimos			
Dureza Brinell (categoría 1)	Dureza Brinell (categoría 2)	Resiliencia a +20 °C (entalla en 'U') [J]	Resiliencia a -20 °C (entalla en 'V') [J]
245	245	12	5

Cuando la norma habla de categoría 1 se refiere a velocidades inferiores a 200 km/h (caso de los trenes de mercancías) y lo contrario con la categoría 2.

La norma también habla de otras propiedades como la fatiga, exigiendo un delta de tensión mínimo de 450 MPa durante 10^7 ciclos, pero solamente al velo tras su mecanizado (315 MPa antes del mecanizado, en estado bruto de laminación). Sobre la tenacidad a la fractura, exige valores mínimos a los grados ER6 ($100 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$) y ER7 ($80 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$) cuando se utilizaren en ruedas frenadas con zapatas, pero el valor mínimo de la tenacidad para el grado ER8 lo deja a la elección por mutuo acuerdo entre el cliente y el suministrador de ruedas.

A grandes rasgos se han revisado las propiedades del acero ER8. Falta la densidad, el módulo elástico o de Young, el módulo de cizalla, el coeficiente de Poisson y la tensión de cizalladura o tensión cortante en el límite elástico (o, simplemente, tensión tangencial de fluencia), que se justifican seguidamente.

En primer lugar, para la densidad ρ [kg/m^3] puede tomarse el valor habitual del acero, que es $7.850 \text{ kg}/\text{m}^3$ [41.A].

En segundo lugar, para el módulo elástico o de Young E [Pa] del acero, también puede tomarse el valor usual del acero, que es 210.000 MPa [41.A].

En tercer lugar, el coeficiente de Poisson ν [\emptyset] puede variar entre 0,27 y 0,30, como ya se explicó en la [sección II.2](#). Como los coeficientes de Kalker se ajustaron en esa sección para un coeficiente de Poisson promedio, de 0,285, este es el valor que se va a utilizar para caracterizar el material. Recuérdese que, en realidad, 0,285 un coeficiente de Poisson equivalente del acero de la rueda y del acero del carril, equivalencia obtenible por varias opciones, siendo una de ellas utilizar 0,285 en ambos aceros y la que se va a implementar.

A partir de estos dos datos se puede obtener el módulo de cizalla G [Pa] gracias a esta relación [41.A]:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad [Ec. III. 115]$$

Introduciendo los datos:

$$G = \frac{210.000}{2(1 + 0,285)} \cong 81.712 \text{ MPa}$$

Por último, la tensión cortante en el límite elástico, que se va a denotar τ_{lim} [Pa] puede hallarse por el método de Von Mises. La tensión de Von Mises $\sigma_{V.M.}$ [Pa] es:

$$\sigma_{V.M.} = \sqrt{\sigma_N^2 + 3\tau^2} \quad [Ec. III. 116]$$

donde τ [Pa] es la tensión cortante o tangencial (no en el límite elástico todavía) y σ_N [Pa] es la tensión normal, que es la que el método de Von Mises supone nula (el material trabaja puramente a cortante). Anulando σ_N y despejando τ_{lim} , se tiene:

$$\sigma_{V.M.} = \sqrt{0^2 + 3\tau^2} \rightarrow \tau = \frac{\sigma_{V.M.}}{\sqrt{3}}$$

$$\tau = \frac{\sigma_{V.M.}}{\sqrt{3}} \quad [Ec. III. 117]$$

El último paso del método de Von Mises consiste en reemplazar $\sigma_{V.M.}$ por σ_y , es decir, la tensión normal en el límite de fluencia (o, simplemente, límite elástico del material) para así obtener la tensión tangencial en dicho límite de fluencia, denotada τ_{lim} :

$$\tau_{\text{lim}} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad [Ec. III. 118]$$

Introduciendo $\sigma_y = 540$ MPa, que es el límite elástico mínimo con el cual ha de contar el acero ER8 de acuerdo con la tabla III.7:

$$\tau_{\text{lim}} = \frac{540}{\sqrt{3}} \cong 312 \text{ MPa}$$

Finalmente, se compilan todos estos datos en una tabla:

Tabla III.10. Propiedades del acero ER8 no consignadas en la norma. Fuente: Elaboración propia.

Propiedades del acero ER8 no consignadas en la norma				
Densidad [kg/m ³]	Módulo elástico [MPa]	Módulo de cizalla [MPa]	Coficiente de Poisson [Ø]	Tensión cortante en el límite elástico [MPa]
7.850	210.000	81.712	0,285	≥ 312

III.6.2. Carril.

Los grados de acero que se pueden utilizar para los carriles de masa lineal mayor o igual que 46 kg/m son los que siguen, según la parte 1 de la norma UNE-EN 13674 [30.A]:

- ✓ R200.
- ✓ R220.
- ✓ R260.
- ✓ R260Mn.
- ✓ R320Cr.
- ✓ R350HT.
- ✓ R350LHT.
- ✓ R370CrHT.
- ✓ R400HT.

Estos aceros son los mismos para los carriles cuya masa lineal es mayor que 27 kg/m y menor que 46 kg/m con la salvedad del R260Mn, que desaparecería de la lista [33.A]. Es decir, el carril RN45 no podría fabricarse con este acero.

El acero más similar al ER8 de la rueda es el R260, al cual se le exige una tensión de rotura mínima de 880 MPa y un alargamiento mínimo del 10 %. Por ello, este es el que se va a elegir, ya que así se asegura que soportará las sollicitaciones mecánicas que le transmita la rueda.

El acero de grado R260 es un acero no aleado (es de tipo carbono – manganeso) y sin tratamiento térmico. Su número de referencia es 1.0623 y su dureza Brinell (medida con una indentación de una bola de tungsteno, por lo que se abrevia HBW, de *Hardness Brinell Wolfram*) debe estar en el rango 260 – 300 en la superficie de rodadura del carril.

Los porcentajes de los elementos del grado R260 se dan en las siguientes tablas: la primera de ella da los porcentajes máximos de los elementos tanto para el metal líquido (la colada de metal fundido) como para el sólido, mientras que la segunda tabla se centra en los elementos residuales, que proporciona en masa y para el metal sólido. Los símbolos de los elementos químicos son los que constan en la tabla periódica.

Tabla III.11. Porcentajes máximos de los elementos del grado R260, tanto para el metal líquido como el sólido. Fuente: [30.A].

Estado	Contenido en %								
	C	Si	Mn	P máx.	S máx.	Cr máx.	Al máx.	V máx.	Ni máx.
Líquido	0,62	0,15	0,70	0,025	0,025	0,15	0,004	0,03	0,009
	a 0,80	a 0,58	a 1,20						
Sólido	0,60	0,13	0,65	0,030	0,030	0,15	0,004	0,03	0,010
	a 0,82	a 0,60	a 1,25						

Tabla III.12. Porcentajes máximos de elementos residuales del grado R260 en masa. Fuente: [30.A].

Contenido máximo en %								
Mo	Ni	Cu	Sn	Sb	Ti	Nb	Cu + 10 Sn	Cr+Mo+Ni+Cu+V
0,02	0,10	0,15	0,030	0,020	0,025	0,01	0,35	0,35

Como se ve, el acero puede llegar a superar el punto eutectoide (0,77 % de carbono) y, además, tiene siempre más carbono que el acero ER8, cuyo contenido máximo en carbono es del 0,56 %. Es, por tanto, más frágil y más duro que el ER8.

Adicionalmente, la norma establece que el contenido máximo de oxígeno e hidrógeno, tanto en la colada cuanto en el metal una vez ha solidificado, ha de ser de 20 y 2,5 partes por millón, correlativamente.

Por lo demás, la norma impone valores mínimos de tenacidad a la fractura ($26 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$ en medidas individuales y $29 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$ en el promedio de estas medidas), que son valores del orden de 2 a 3 veces inferiores a los de las ruedas (véanse los valores de las ruedas en el subapartado previo), lo cual puede explicarse por el hecho que una fisura es más crítica desde el punto de vista de la seguridad ferroviaria en una rueda que en el carril. En relación a esto, la norma restringe la velocidad de propagación de grietas por fatiga a 17 o 55 m dividido por la energía absorbida por unidad de superficie, según el factor de intensidad de las tensiones sea $10 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$ o $13,5 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$, respectivamente.

Nuevamente, la norma no establece ningún valor de E , G , ν , τ_{lim} (γ , en este caso, tampoco de σ_y , que es el valor que permite el cálculo de τ_{lim} gracias al método de Von Mises). Para asegurar la cuasi-identidad del acero R260 y el ER8 y así poder separar el problema normal del tangencial (véase la [subsección 4.3.2](#), donde se aborda esta cuestión), al acero R260 se le van a aplicar los mismos valores, que son los tabulados en la tabla III.10: 210.000 MPa, 81.712 MPa, 0,285, $\geq 312 \text{ MPa}$. En el caso del límite elástico, este sería $\geq 540 \text{ MPa}$, al igual que en el caso del acero ER8, para así poder trasponer el valor de τ_{lim} al acero R260.

Esto no exactamente así el caso de ρ , ya que la norma no establece un valor *per se*, pero en una nota declara que el valor utilizado para los cálculos de masa lineal es exactamente $7,85 \text{ kg/dm}^3$ (7.850 kg/m^3), con lo cual es válido utilizar este dato para el acero R260.

Por último, cabe remarcar que esto es también coherente con el ajuste de los coeficientes de Kalker, donde se utilizó un coeficiente de Poisson equivalente del acero de la rueda y del acero del carril de 0,285. Para obtener este valor, una opción es asignar 0,285 a ambos aceros, siendo la opción que se ha tomado, como se explica en el subapartado previo.

Anexo IV. Características del material rodante.

IV.1. Tipos de vagones.

A grandes rasgos, existen dos tipos de vagones: los tradicionales y los de piso bajo. Los tradicionales (de piso alto) son los que se llevan empleando desde antes de la creación de las autopistas ferroviarias, mientras que los de piso bajo fueron concebidos para su empleo en este tipo de infraestructuras.

En los vagones de piso bajo se rebaja el plano de carga a fin de incrementar la altura máxima admisible de la carga en los túneles y puentes o viaductos sobre la vía. Este rebaje puede efectuarse de más de una manera, siendo las dos siguientes las más desarrolladas:

- ✓ Manteniendo los bogies y las ruedas de los vagones tradicionales y rebajando el tramo de la estructura que queda entre ambos bogies. Esta solución dificulta el transporte de camiones articulados completos, ya que la cabina no cabe en el mismo vagón que su semirremolque, por lo que, si se desea transportarla, esta debe montarse en un vagón aparte (junto con la cabina de otro camión). En cualquier caso, la separación de la cabina de su semirremolque dificulta y ralentiza las operaciones de carga y descarga, que se realizan mediante la rotación de la plataforma de los vagones a razón de 0,045 camiones por minuto (lo que supone 22 min/camión). Esta solución se conoce bajo el nombre de Modalohr y se aplica actualmente en las autopistas ferroviarias francesas [AAFF_2, pp. 77 – 78 y 85].
- ✓ Mediante el montaje de ruedas de diámetro reducido. Esta solución resulta más ventajosa que la anterior, ya que cabe un camión articulado en cada vagón, lo cual acelera las operaciones de carga y descarga hasta una razón de 1 camión por minuto. La plataforma de estos vagones no es giratoria, por lo que la carga y descarga debe realizarse a través de una rampa que salva el desnivel existente entre la plataforma del último vagón y la vía (véase en la figura 2.1, [sección 2.1](#)), vía que en ese tramo será estuchada (embebida en hormigón) para permitir la circulación de camiones. Esta solución se conoce bajo el nombre de ROLA y se aplica actualmente en las autopistas ferroviarias de la región alpina [2, pp. 76 – 77, 85 y 91].

En las siguientes secciones se van a revisar las características técnicas de los vagones tradicionales, de los Modalohr y de los ROLA, centrándose en su plataforma (estructura resistente del vagón), sus bogies y sobre todo sus ruedas.

En el caso de los Modalohr y los ROLA también se listarán los lugares en los cuales se utilizan en la actualidad y la altura máxima admisible de carga que pueden transportar, la cual va en función de los gálibos de los trazados.

IV.2. Vagones de piso alto o tradicionales.

Vagones tradicionales o de piso alto, los hay de muchos tipos. Se ha buscado uno de ellos a modo de ejemplo, del cual se mostrarán los datos de su plataforma y de sus bogies y ruedas.

IV.2.1. Plataforma.

He aquí el vagón de piso alto de 4 ejes, modelo Sggnss 80" y fabricado por la empresa Greenbrier, que se muestra con su reflejo a continuación:



Figura IV.1. Vagón de piso alto o tradicional, modelo Sggnss 80", con su reflejo. Fuente: [42.A, p. 16].

Las dimensiones de este vagón son las que constan en el siguiente plano (nótese el diámetro de la rueda, que es 920 mm):

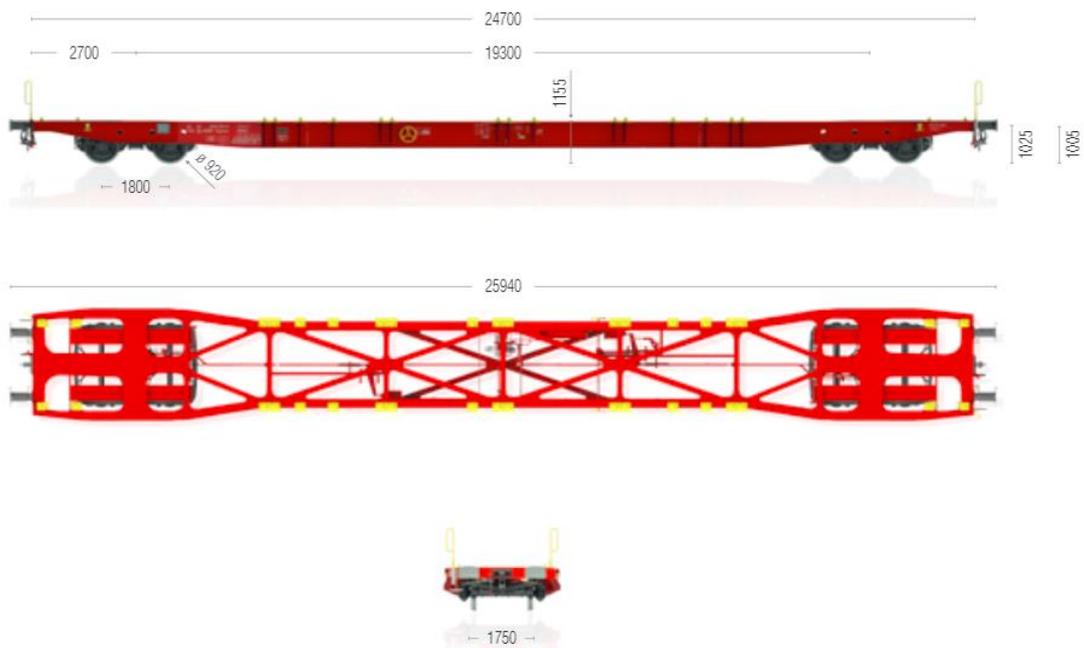


Figura IV.2. Dimensiones del vagón de piso alto o tradicional seleccionado. Fuente: [42.A, p. 17].

IV.2.2. Bogies y ruedas.

Este vagón utiliza dos bogies de dos ejes cada uno, siendo estos bogies los clásicos Y – 25 en su modalidad Lss, donde la letra *L* significa que cada eje es capaz de soportar hasta 22,5 t de carga a 120 km/h (incluyendo su peso propio) y las letras *ss* indican que el régimen de freno es proporcional a la carga (esto implica que el vagón podrá soportar 90 t, incluyendo su tara, que vale 21,5 t). El empuje de este bogie es 1.800 mm [42.A, p. 17] y [43.A].

Las ruedas que incorpora son las BA 004 u otras compatibles con esta clase de bogie. El diámetro nominal de la banda de rodadura de estas ruedas es 920 mm (recién salidas de fábrica) y se pueden rectificar o reperfilear hasta los 840 mm para homogeneizar su diámetro tras el desgaste e iniciar un nuevo ciclo de desgaste. Esto se suele denotar de forma conjunta, de esta guisa: 920/840 mm; y supone una pérdida de 40 mm a cada extremo del diámetro [44.A, p. 14].

Abajo se muestra un bogie Y – 25, uno de sus dos juegos de ruedas y la semisección de una de las ruedas por su plano axial. En la propia figura se indican los elementos más importantes de cada representación:

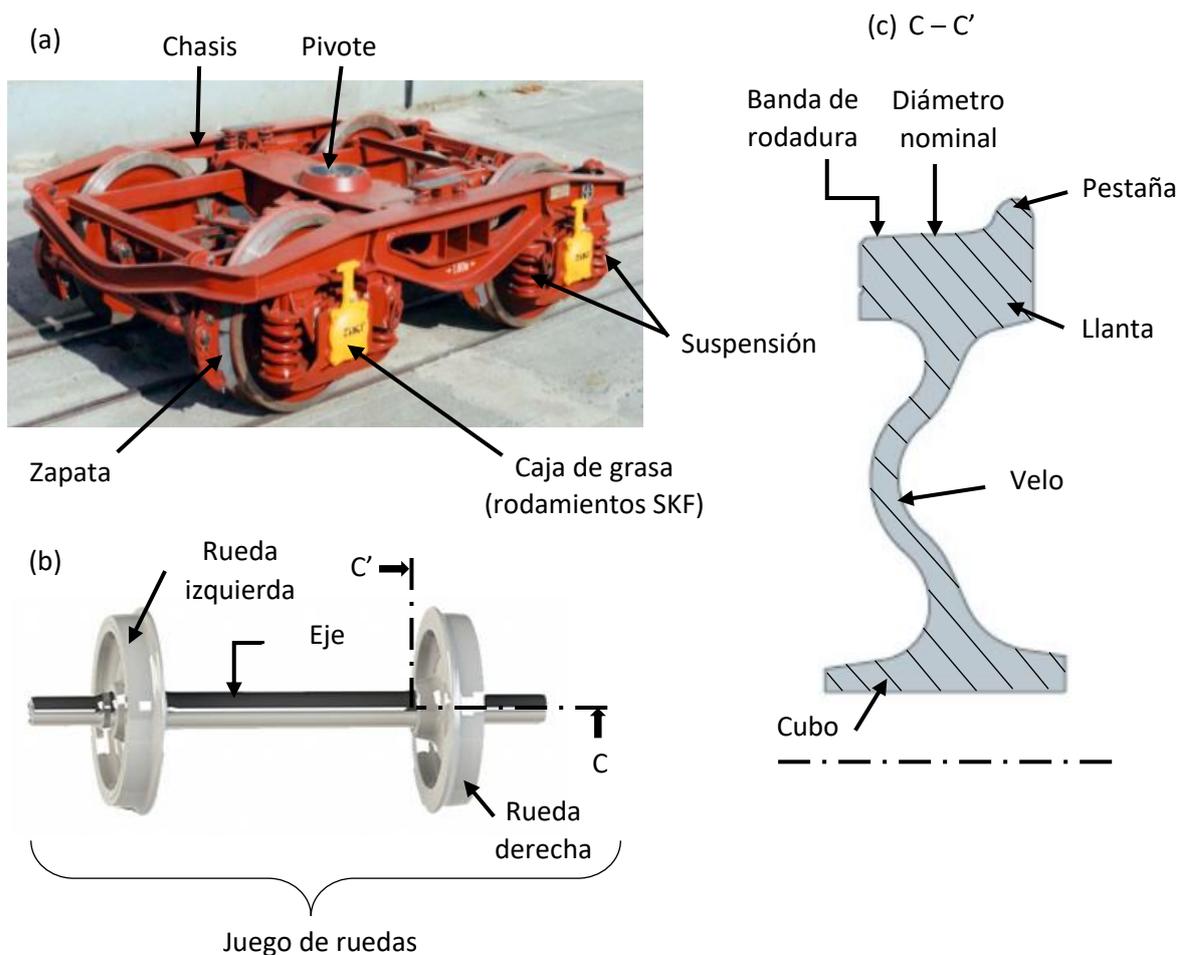


Figura IV.3. (a) Bogie Y – 25 Lss. Fuente: [43.A]. (b) Juego de ruedas. Fuente: [45.A]. (c) Semisección de una de las ruedas por su plano axial. Fuente: [44.A, p. 14].

IV.3. Vagones de piso bajo Modalohr.

IV.3.1. Autopistas ferroviarias donde están en uso.

Una pequeña parte de las autopistas ferroviarias que se han abierto hasta la fecha utilizan la solución de Modalohr, ideada por el fabricante francés de vagones Modalohr, filial de la empresa Lohr. Esta solución o sistema es el que se ha implantado en las autopistas ferroviarias francesas, las cuales se listan a continuación, ordenadas según su longitud y representadas en el mapa inferior, en trazo continuo [1, p. 21], [2, p. 79].

1. Calais – Le Boulou (cercano a Perpiñán), 1.500 km.
2. Bettembourg – Perpiñán, 1.050 km.
3. París – Sète, 815 km.
4. Aiton – Orbassano, 175 km.

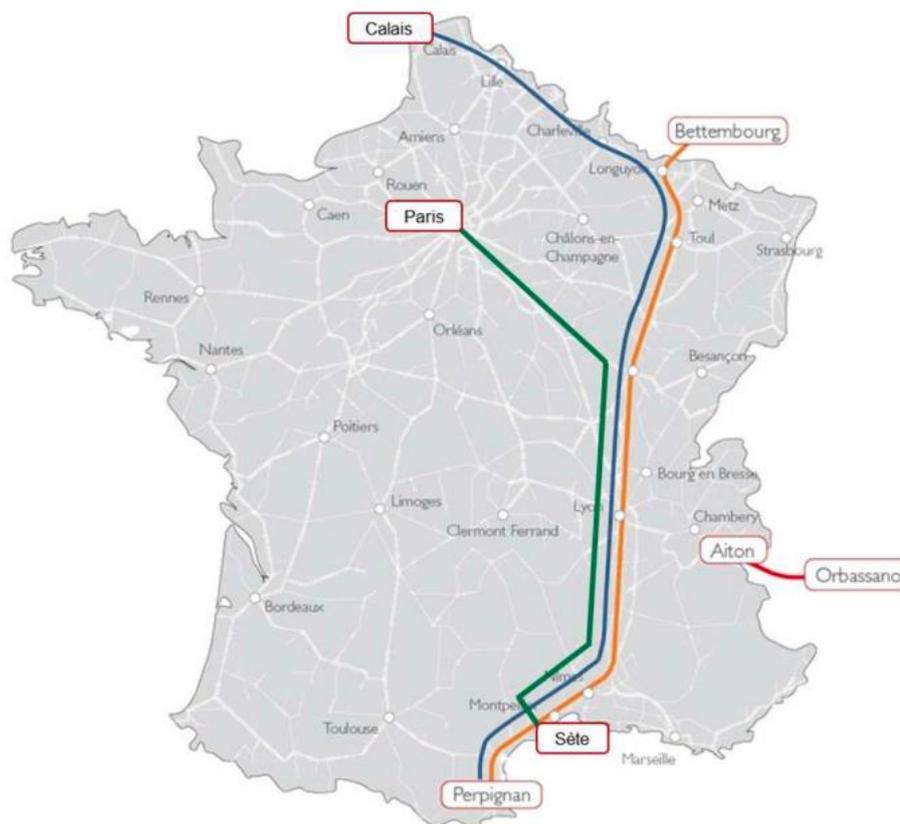
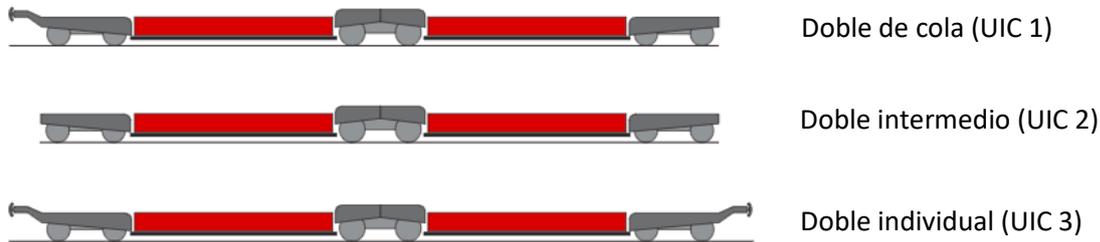


Figura IV.4. Autopistas ferroviarias francesas actuales (em trazo continuo) y futuras (em trazo discontinuo). Fuente: [1, p. 398 o 37 del dossier de Lohr].

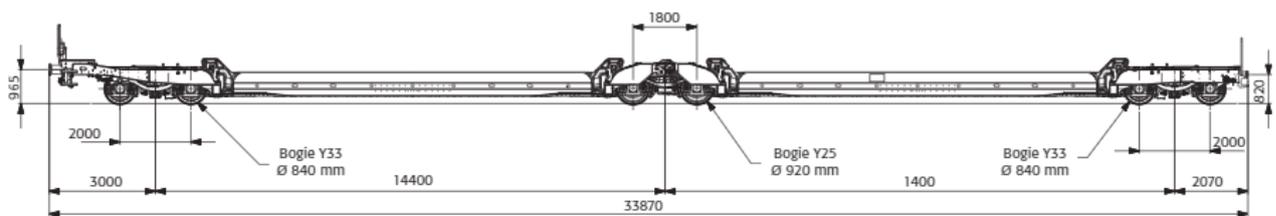
IV.3.2. Diferencias entre los vagones Modalohr y los tradicionales.

Los vagones Modalohr pueden ser de tres tipos, como se muestra en esta imagen:



IV.5. Tipos de vagones Modalohr. Fuente: [46.A].

En la siguiente imagen se muestran las dimensiones del vagón doble de cola, el UIC 1 (nótese los diámetros de sus ruedas, de 920 mm en algunos casos y 840 mm en otros):



IV.6. Dimensiones del vagón doble de cola (UIC 1). Fuente: [46.A].

La primera diferencia respecto al vagón tradicional es que este vagón es doble, ya que el bogie central conecta dos pisos de carga diferentes. Debido a la inclusión de este bogie central, el vagón ya no tiene 4 ejes como el tradicional, sino 6.

Por otro lado, la longitud de este vagón es enorme: 33,87 m. Sin embargo, el bogie central impide transportar un camión articulado completo, cuya cabina habría que poner en uno de los pisos separada de su semirremolque, el cual iría en el otro piso. La tara del vagón es de 41,7 t y la carga útil que puede soportar es 75,3 t. Es, aproximadamente, el doble de la tara de un vagón tradicional, pero la carga útil es solo unas 5 t superior, lo cual se debe a los bogies y ruedas utilizadas.

El bogie central es un Y – 25, exactamente como el del vagón tradicional. No obstante, el diámetro mínimo de sus ruedas se limita a 863 mm, valor que difiere de los 840 mm del tradicional. Permite una carga de 22,5 t por eje a 120 km/h. Utiliza zapatas como equipo de freno, como en el tradicional.

Los bogies de los extremos son bastante distintos, del tipo Y – 33. Sus ruedas son de 840 mm si son nuevas y 783 mm como mínimo. Permite 18 t por eje a 120 km/h y utiliza zapatas como equipo de freno, como en el tradicional. El empate de este bogie es 2.000 mm, 200 mm más que en el Y – 25.

Otro dato significativo es que el plano de carga de estos vagones es 225 mm sobre el plano de rodadura, que es menos de 1/5 de la altura del plano de carga del tradicional (1.155 mm).

En cuanto a los vagones UIC 2 y UIC 3, estos apenas se diferencian de los UIC 1. Su longitud, tara y carga útil soportable son, respectivamente: 32,94 y 34,80 m, 40,7 y 42,7 t y, por último, 76,3 y 77,3 t [46.A], [1, p. 372 u 11 del dossier de Lohr].

Abajo se puede observar cómo es la rotación de la plataforma de estos vagones (de medio vagón, puesto que son dobles), cuyo recorrido angular ronda los 30° para unirse a la plataforma metálica por la cual las cabezas tractoras empujan los semirremolques, antes de desengancharse de ellos:



IV.7. Maniobras de carga de una cisterna en un vagón Modalohr. Fuentes: [2, p. 85] y [1, p. 369 u 8 del dossier de Lohr].

Una vez las cabezas tractoras han depositado su semirremolque en el camión correspondiente, estas se quedan en la estación (transporte no acompañado) o se cargan en otro vagón, de dos en dos. En la imagen inferior se muestra medio vagón con dos cabezas encima, con la segunda cabeza apilada sobre el bogie de cola:



IV.8. Cabezas tractoras en medio vagón Modalohr de cola. Fuente: [1, p. 371 u 10 del dossier de Lohr].

IV.3.3. Altura máxima admisible de la carga.

La altura máxima admisible de la carga se realiza por el procedimiento descrito en la [sección 2.1](#), donde se abordó el problema de las limitaciones de gálibo desde una perspectiva operacional. A la hora de realizar las intersecciones de la carga con las partes altas de los contornos de referencia, operación que se muestra en la figura 2.2 de dicha sección, el parámetro fundamental es la altura del plano de carga sobre el plano de rodadura, que en el caso de los vagones Modalohr es 225 mm.

Los contornos de referencia seleccionados son los empleados en Francia, que son los correspondientes al ancho de vía internacional (1.435 mm) y que fueron definidos por la UIC: GA, GB y GC. También se seleccionan los contornos de referencia correspondientes al ancho ibérico (1.668 mm), ya que así se puede estudiar la aplicabilidad de estos vagones al caso español.

Para realizar las intersecciones evitando la imprecisión del método gráfico, lo mejor es recurrir a los contornos tabulados según sus coordenadas (cota en función del semiancho, como en la figura 2.2, pero con muchas más coordenadas), que se pueden hallar en [3, pp. 283 – 287]. Los resultados de las intersecciones son los tabulados a continuación:

Tabla IV.1. Altura máxima admisible según el tipo de gálibo para el vagón Modalohr. Fuente: Elaboración propia.

Altura máxima admisible según el tipo de gálibo [mm]	Ancho de vía de 1.435 mm (Francia)	Ancho de vía de 1.668 mm (España)
GA	3.640	-
GB	3.860	-
GC	4.425	-
GHE16	-	3.737
GEA16	-	3.737
GEB16	-	3.853
GEC16	-	4.425

En conclusión, el gálibo más restrictivo es el GA, que solamente permite transportar camiones de 3,640 m de altura. Es una altura baja en comparación con la altura máxima de los camiones, que es 4 m según la Directiva 96/53 del Consejo Europeo [47.A], por lo que solamente podrán atravesar este gálibo los camiones de menor tamaño. Los gálivos GB, GHE16, GEA16 y GEB16 permiten camiones intermedios y los GC y GEC16 los más grandes, incluso con una generosa holgura de 0,425 m [2, p. 88].

IV.4. Vagones de piso bajo ROLA.

IV.4.1. Autopistas ferroviarias donde están en uso.

Una parte importante de las autopistas ferroviarias que se han abierto hasta la fecha utilizan las ruedas de diámetro reducido. La primera de ellas se inauguró el 11 de junio de 2001 y conectó las ciudades de Friburgo y Novara [48.A]. He aquí las autopistas abiertas hasta la fecha que han implantado esta solución, ordenadas según su longitud y representadas en el mapa inferior [2, p. 79]:

1. Wels – Szeged, 634 km.
2. Trento – Ratisbona, 464 km.
3. Friburgo – Novara, 414 km.
4. Salzburgo – Trieste, 380 km.
5. Wels – Marburgo, 323 km.
6. Basilea – Lugano, 290 km.
7. Wörgl – Trento, 237 km.
8. Salzburgo – Villach, 190 km.
9. Wörgl – Brennero, 91 km.

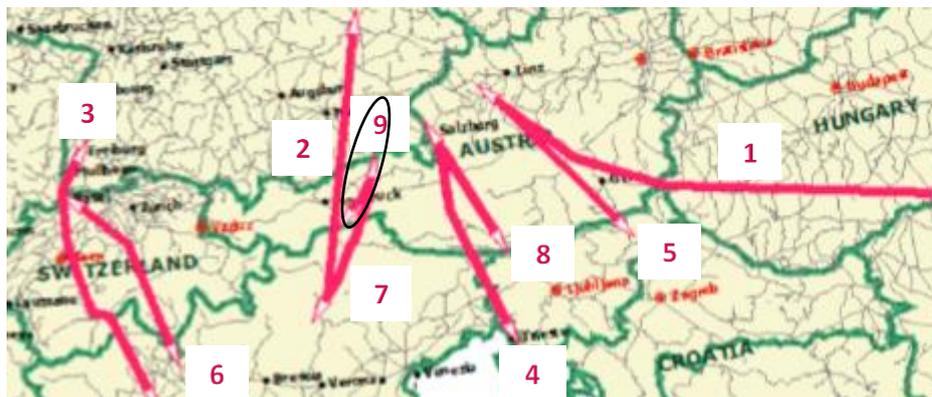


Figura IV.9. Autopistas ferroviarias que han adoptado el sistema ROLA. Se ha rodeado la novena ruta para su mejor distinción. Fuente: [2, p. 75].

Con el afán de precisión, cabe decir que estos vagones se emplean también fuera de la región alpina, concretamente en el servicio Transmancha, que recorre los 50 km del Eurotúnel, que es la distancia que separa las ciudades de Coquelles (Francia) y Folkestone (Reino Unido) [1, p. 21], [2, p. 75].

La mayor parte de estas ciudades son germanófonas y como autopista ferroviaria se traduce al alemán como *Rollende Landstraße*, se utiliza el acrónimo ROLA para la solución que consiste en la utilización de ruedas de diámetro reducido. Este acrónimo se suele aplicar como adjetivo para calificar los vagones o sus elementos, frecuentemente sus ruedas [2, pp. 75 – 76].

IV.4.2. Plataforma.

Aunque existen varios modelos de vagón ROLA, uno típico es el vagón de piso bajo de 8 ejes, modelo Saadkms y fabricado por la empresa ELH Waggonbau Niesky GmbH, que se muestra cargado y renderizado a continuación:



Figura IV.10. Vagón ROLA, modelo Saadkms: (a) cargado con un camión. Fuente: [50.A]; (b) renderizado. Fuente: [49.A].

Las dimensiones de este vagón son las que constan en el siguiente plano (nótese el diámetro de la rueda, que es 380 mm):

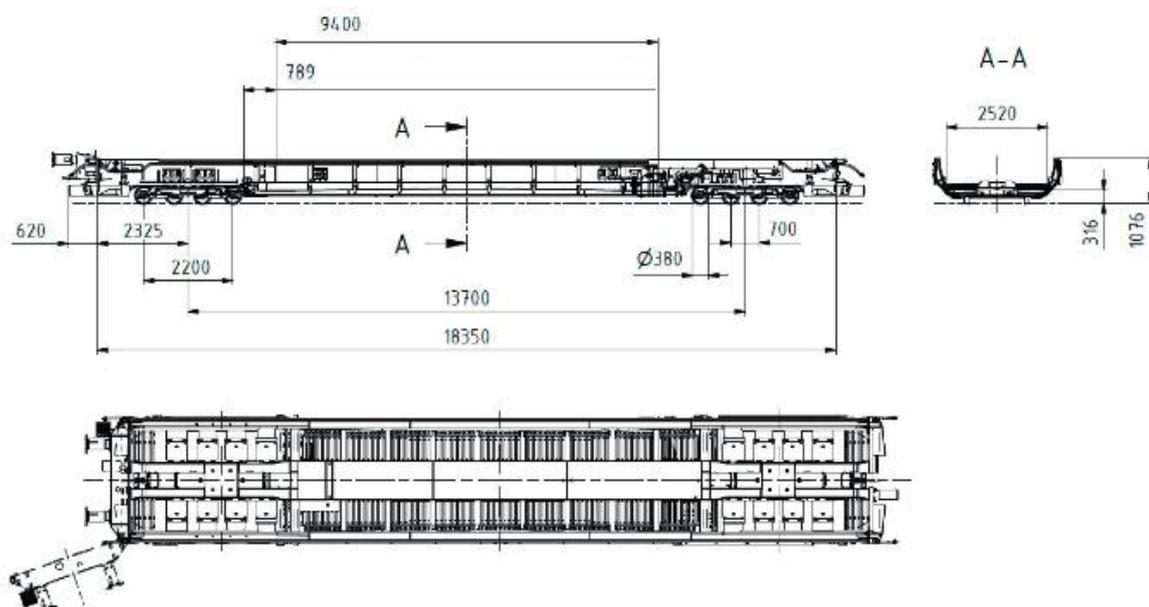


Figura IV.11. Dimensiones del vagón ROLA seleccionado. Fuente: [50.A].

IV.4.3. Bogies y ruedas.

Los vagones ROLA del modelo presentado en la figura IV.11 rebajan el plano de carga a 316 mm mediante la reducción del diámetro nominal de las ruedas hasta 380 mm. Esto contrasta con las ruedas de 920 mm de los vagones tradicionales y del bogie central de los Modalohr y con los 840 mm de los bogies extremos de los Modalohr.

Esta drástica reducción del diámetro plantea un problema: el área de contacto entre el área y el carril será más pequeña. Es posible vislumbrar esto intuitivamente: Conforme se vaya reduciendo el diámetro, la longitud de la banda de rodadura (la circunferencia de rodadura) decrecerá, por lo que también lo hará, proporcionalmente, la porción que tenga que contactar con el carril. En el caso límite, cuando el diámetro fuese nulo, la rueda sería un punto y el contacto sería puntual, y el área de un punto es nula. El caso es que esto plantea, a su vez, un problema de resistencia de materiales.

Al cargar un área cada vez más pequeña con la misma carga, las tensiones irán creciendo, hasta provocar la plastificación del material en el área de contacto y la propagación de grietas fatales. Entonces, la solución es reducir la carga por eje a 7,5 – 8 t (a 100 km/h, no a 120 km/h como antes), lo cual plantea otro problema: el logístico.

Al reducir la carga por eje, disminuye sensiblemente la capacidad del vagón. Para incrementar la carga del vagón y lograr que el vagón ROLA sea competitivo con el de piso alto, lo que se efectúa es la duplicación del número de ejes por bogie. Así, como cada vagón tiene dos bogies y cada uno 4 ejes, el vagón tendrá 8 ejes, el doble que el de piso alto. El producto de 8 ejes por 7,8 t resulta ser 62,5 t, y si se deduce la tara del vagón, que son 18,5 t, sobran 44 t que se pueden utilizar para transportar el camión. Este tonelaje de carga útil coincide con la masa máxima autorizada por la Directiva 96/53/CE [47.A], lo cual prueba que el vagón se diseñó en base a esto y que no precisa alcanzar las 68,5 t de carga útil de los tradicionales para transportar camiones.

Sobre el bogie ROLA de 4 ejes cabe destacar que uno de los modelos es el Saadkms690, que sus empates son 700, 750 y 700 mm y que las ruedas solo se pueden reperfilar hasta un diámetro de 335 mm. Es decir, es posible eliminar 22,5 mm a cada extremo del diámetro, un valor de casi la mitad del que permitían las ruedas BA 004. En contraposición, un punto positivo que reduce el desgaste de las ruedas es el empleo de discos de freno en vez de zapatas (aunque esto tiene un efecto negativo por otro lado, ya que las zapatas limpian la banda de rodadura y aumentan la adherencia [51.A]) [52.A]. He aquí una imagen del bogie descrito:

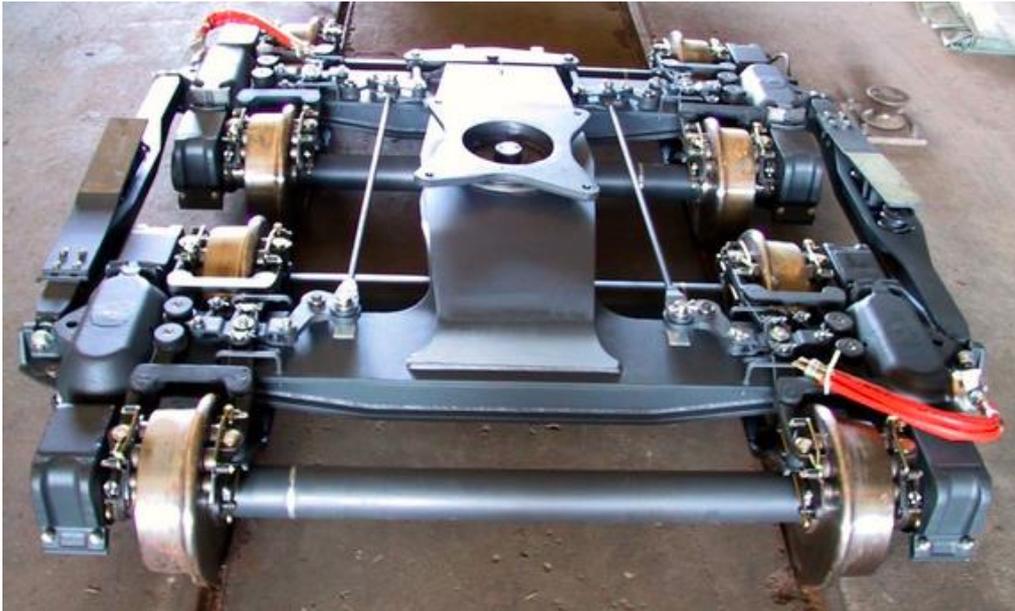


Figura IV.12 Bogie Saadkms690 equipado con ruedas ROLA. Fuente: [52.A].

Por último, cabe resaltar que, si bien estos bogies con estas mismas ruedas son los más utilizados en las autopistas ferroviarias, se han realizado numerosos prototipos de ruedas ROLA en las últimas décadas. Seguidamente se van a enumerar algunos de ellos, proporcionándose estos parámetros: Nombre del bogie, número de ejes en el bogie, valores de empate (n valores para un bogie de $n+1$ ejes), diámetro nominal de una rueda nueva, el diámetro mínimo admisible tras todos los ciclos de rectificado y la carga por eje admisible. Helos aquí, ordenados en orden descendente de diámetro nominal:

- ✓ Laas-z-614 (a), 2, 1.800 mm, 750 mm, 680 mm y 17 t/eje
- ✓ Laas-z 614 (b), 2, 1.500 mm, 730 mm, 680 mm y 17 t/eje.
- ✓ Saas-z-706, 2, 600 mm, 500 mm, 460 mm y 12 t/eje.
- ✓ BA 741, 4, 900/900/900 mm, 470 mm, 410 mm y 9,5 t/eje.
- ✓ Bogie 691, 3, 900/900 mm, 450 mm, 410 mm y 9,5 t/eje.

Algunos de los bogies que llegaron a comercializarse son los siguientes:

- ✓ Saas-z 703, 2, 1.800 mm, 680 mm, 630 mm y 16 t/eje.
- ✓ Saadkms690, que es el explicado anteriormente.
- ✓ Graz Pauker 702, 4, 1.000/700/1.000 mm, 355, 335 mm y 5 t/eje.

En la misma página web que expone todos estos datos también se menciona el motivo de la limitación de la carga (menor área de contacto, tal como se ha explicado) y se menciona un aspecto de interés, relativo a la interacción de las ruedas con la superestructura ferroviaria: es posible que las ruedas con diámetros menores de 840 mm den problemas en los desvíos, también denominados cambios de agujas (porque una rueda de diámetro reducido podría “atascarse” en la laguna del desvío, que es una zona en la que la rueda queda en voladizo y simplemente es guiada por la otra rueda del juego, que es retenida por medio de un contracarril) [53.A].

IV.4.4. Altura máxima admisible de la carga.

La altura máxima admisible de la carga se realiza por el procedimiento descrito en la [sección 2.1](#), ya aplicado en el caso de los vagones Modalohr. El parámetro fundamental es la altura del plano de carga sobre el plano de rodadura, que en el caso del vagón ROLA seleccionado es 316 mm (véase esta cota en la figura IV.11).

Los contornos seleccionados son los de la región alpina (los mismos que en Francia, ya que el ancho de vía es el mismo en todos estos países) y los españoles. Para realizar las intersecciones evitando la imprecisión del método gráfico, nuevamente se recurre a los contornos tabulados según sus coordenadas, [3, pp. 283 – 287]. Los resultados de las intersecciones son los tabulados a continuación:

Tabla IV.2. Altura máxima admisible según el tipo de gálibo para el vagón ROLA. Fuente: Elaboración propia.

Altura máxima admisible según el tipo de gálibo [mm]	Ancho de vía de 1.435 mm (región alpina)	Ancho de vía de 1.668 mm (España)
GA	3.549	-
GB	3.769	-
GC	4.334	-
GHE16	-	3.646
GEA16	-	3.646
GEB16	-	3.762
GEC16	-	4.334

De esta tabla se desprende que el gálibo más restrictivo es el GA, que solamente permite transportar camiones de 3,549 m de altura. Es una altura baja en comparación con la altura máxima de los camiones, que es 4 m según la Directiva 96/53 del Consejo Europeo [47.A], por lo que solamente podrán atravesar este gálibo los camiones de menor tamaño. Los gálivos GB, GHE16, GEA16 y GEB16 permiten camiones intermedios y los GC y GEC16 los más grandes, incluso con una generosa holgura de 0,334 m [2, p. 88].

También hay que considerar la anchura de los camiones, que puede ser 2,55 m como máximo según la misma directiva y 2,60 m en casos excepcionales [47.A]. El vagón ROLA seleccionado solamente puede albergar camiones de 2,52 m como máximo, según la correspondiente cota en el plano (figura IV.11).

Por otro lado, otro factor que entra en juego en estos vagones es la longitud de la carga. Como se aprecia en la figura IV.10, la parte de la plataforma sita entre bogies está más rebajada que la que asienta sobre los mismos. La parte más baja es la que está a 316 mm sobre el plano de rodadura y tiene una longitud de 9,40 m según el plano (figura IV.11), mientras que el resto de la plataforma está a una mayor altura, existiendo una zona de transición de 789 mm entre la parte más baja y cada extremo, zona de transición que asegura una pendiente reducida para no entorpecer el desplazamiento de los camiones sobre el vagón.

Esta zona más alta está a 510 mm sobre el plano de rodadura, según medidas realizadas en el plano y según [52.A]. Por tanto, si el camión mide más de 11,60 m (la suma de 9,40 + 0,789 + 0,789 + 0,31 + 0,31, donde 0,31 es, aproximadamente, la distancia entre los ejes extremos del camión y sus confines de longitud), tendrá que apoyar sus ruedas en los extremos y, por tanto, ya no podrá tener la altura máxima que se indica en la tabla IV.2.

La nueva altura máxima admisible de la carga será la altura con 316 mm más la diferencia entre 316 y 510 mm (que es -194 mm). Los resultados se muestran en esta tabla:

Tabla IV.3. Altura máxima admisible según el tipo de gálibo para el vagón ROLA con camiones de más de 11,60 m. Fuente: Elaboración propia.

Altura máxima admisible según el tipo de gálibo [mm]	Ancho de vía de 1.435 mm (región alpina)	Ancho de vía de 1.668 mm (España)
GA	3.355	-
GB	3.575	-
GC	4.140	-
GHE16	-	3.452
GEA16	-	3.452
GEB16	-	3.568
GEC16	-	4.140

Medidas que resultan desfavorables en general, particularmente por debajo del gálibo GB en el caso alpino y del GEB16 en el caso español. Estos resultados podrían mejorarse parcialmente con vagones ROLA que tienen toda su plataforma a 465 mm, sin ninguna rampa o resalto, que son los vagones estudiados en [2]. Además, su anchura también es mayor, pudiendo llegar a los 2,60 m como máximo que permite la directiva europea [2, p. 86].

Anexo V. Diseño del trazado ferroviario de ensayo.

V.1. Criterios de diseño.

Diseñar un correcto trazado ferroviario es fundamental para la obtención de resultados de calidad. Por ello, el trazado que se diseñe deberá ajustarse a la realidad, para lo cual sus parámetros deberán escogerse en base a criterios técnicos tales como los expuestos en la normativa aplicable. Además, otro aspecto importante es el prefijado de los parámetros más característicos desde el primer momento.

En líneas generales, el trazado diseñado habrá de representar la orografía (entendida como grado de montañsidad) de España, la cual es en muchas regiones próxima a aquella de los países europeos en los cuales se utilizan los vagones con ruedas de diámetro reducido (detallados en el [subapartado IV.4.1](#)).

Para determinar cuán montañoso es un país o territorio, se hace uso de la altitud o elevación media. Atendiendo a este indicador, los países más montañosos de Europa son los que siguen [54.A]:

1. Liechtenstein (2.774 m).
2. Andorra (1.996 m).
3. Armenia (1.792 m).
4. Georgia (1.432 m).
5. Suiza (1.350 m).
6. Turquía (1.132 m).
7. Montenegro (1.086 m).
8. Austria (910 m).
9. Albania (708 m).
10. España (660 m).

Si se eliminan aquellos países europeos que no conforman la Unión Europea, entonces la lista se reduce a [55.A]:

1. Austria (910 m).
2. España (660 m).

Por lo tanto, España es el segundo país de la Unión Europea con mayor altitud media. Esto es muy importante, ya que permite deducir que las líneas férreas tendrán rampas de mayor magnitud, radios de menor curvatura y dispondrán de un mayor número de túneles que aquellas líneas construidas en países menos montañosos.

Dicho esto, lo que se va a buscar es el diseño de una línea férrea de montaña ibérica (esto es, en ancho ibérico) de tráfico mixto (esto es, transporte de mercancías y de viajeros), de vía única (lo más común en las líneas de montaña) y de velocidad convencional (porque la línea es de ancho ibérico y las líneas de alta velocidad se suelen proyectar en ancho internacional o, en su defecto, en un ancho ibérico “provisional”, es decir, con traviesas polivalentes para su futuro cambio a ancho internacional).

Por último, cabe especificar que el diseño se va a centrar en el trazado y no se van a tener en cuenta aspectos presupuestarios, planificatorios, de obras de fábrica o de instalaciones como la eléctrica, la señalización o las canalizaciones de drenaje. Asimismo, no se van a tener en cuenta aspectos materiales, con una única excepción: los carriles tendrán como perfil el 60E1, que es el que se seleccionó en la [subsección III.3.2](#), y estarán compuestos del grado de acero R260, el cual se escogió en la [subsección III.6.2](#), donde se expusieron sus propiedades. Dado que este es el carril más resistente, es coherente asignar la máxima resistencia también a la plataforma y los viaductos del trazado, por lo que el este será clasificado por ADIF como un trazado de categoría D4 (esto implica que soportará 8 t/m y 22,5 t por cada juego de ruedas que sobre él ruede (22,5 t/eje), tal como se desprende de la tabla I.5.1 de la [subsección I.5.1](#)).

V.1.1. Normativa aplicable y referencias.

La normativa aplicable a la hora de diseñar un trazado en España es la de ADIF, la cual dispone de un amplio corpus de normas técnicas públicamente disponibles. En concreto, son las Normas Adif Vía (NAV) las que marcan las pautas para una correcta proyección de una nueva línea férrea o la reforma de una línea preexistente.

Varias NAV ya han sido presentadas en los anexos previos como referencias de una parte de la información allí expuesta. Estas normas son, en orden numérico:

1. NAV 0-2-0.0 [19.A].
2. NAV 0-2-2.1 [36.A].
3. NAV 0-2-3.0 [20.A].
4. NAV 7-3.1.1 [32.A].
5. NAV 7-3-2.0 [37.A].
6. NAV 7.3-2.5 [35.A].
7. NAV 7.3-5.0 [21.A].

De ellas, probablemente la más ventajosa sea la primera, la cual contiene en formato tabular las fórmulas que se aplican en el cálculo de los parámetros geométricos de la vía (los parámetros del trazado). Pero, por supuesto, se ha recurrido a todas para la realización del diseño.

Por otro lado, conviene tomar al menos un proyecto ferroviario a modo de referencia, puesto que esto ayuda bastante a la hora de realizar un diseño. En este caso, se ha recurrido al proyecto constructivo completo de un ramal ferroviario que conecta la vía existente Almería – Moreda con el complejo industrial de fabricación de clínker existente en el valle del Zabalí, en Granada [56.A].

V.1.2. Prefijado de los parámetros más característicos.

V.1.2.1. Rampa característica.

La rampa característica de un trazado es la mayor rampa de un trazado, la cual puede presentarse en cualquiera de los dos sentidos de la marcha. En este caso, al ser la línea ibérica y de montaña y al no

preverse la circulación a alta velocidad, la rampa característica admisible no tiene por qué adquirir un valor demasiado restrictivo. Pero, por otra parte, desde el punto logístico lo que interesa es fomentar el transporte de mercancías, la intermodalidad y las autopistas ferroviarias en general, para lo cual se precisa de rampas características que no limiten excesivamente la capacidad de la línea. Tras sopesar estos argumentos se puede concluir que es razonable adoptar un valor límite de 20 milésimas, ya que por encima de 20 milésimas la rampa comienza a ser considerada dura y la capacidad de carga se reduce bastante [57.A].

Para comprender mejor esto, se aporta un ejemplo numérico: Según se indica en la misma referencia [57.A], una locomotora eléctrica de unos 4.200 CV puede remolcar unas 200 t en una rampa de 40 milésimas. 200 t es un valor verdaderamente bajo para una locomotora tan potente, dado que 2 vagones convencionales cargados al máximo suponen una masa total de 180 t, incluyendo la tara (compruébense estos datos en el [subapartado IV.2.2](#)), por lo que esta locomotora no podría remolcar más de 2 vagones en esta situación.

V.1.2.2. Radio mínimo de curvatura.

En cuanto al radio mínimo de curvatura, este debe ser tal que permita la inscripción de los vagones en curva. En general, la mayor parte de los vagones convencionales puede inscribirse en radios mínimos de 75 m cuando están aislados, tal como consta en catálogos como los del fabricante GreenBrier. Un ejemplo de esto es el vagón Sggnss 80' [42.A, p. 16], el cual ya fue estudiado en el [apartado IV.2](#). Los más cortos pueden llegar a los 35 m, constituyendo el vagón cisterna Zags 53 m³ [42.A, p. 30] un ejemplo de estos.

Sin embargo, un vagón nunca va a circular aislado, sino que formará un convoy junto con otros vagones. Esto eleva el radio mínimo necesario para su inscripción, que alcanza 150 m para el vagón Sggnss 80' [42.A, p. 16] y lo mismo para el Laadrs [42.A, p. 91]. Debido a esto, el radio mínimo de curvatura del trazado se va a fijar en 200 m.

V.1.2.3. Tipo de curvas de transición.

Por último, en cuanto al tipo de curvas de transición, lo normal en España es utilizar clotoides o parábolas cúbicas, tal como consta en la NAV 0-2-2.1 [36.A]. Empero, parece que otras NAV recomiendan la utilización exclusiva de clotoides. Tal es el caso de la NAV 0-2-0.0, que únicamente expone las fórmulas de la clotoide [19.A].

Por otro lado, a nivel teórico se han estudiado tres tipos de curvas de transición: la clotoide (en la [parte I.4.2.1](#)), la parábola cuadrática (en la [parte I.4.2.2](#)) y la parábola cúbica (en la [parte I.4.2.3](#)). Como se ha invertido tiempo en modelar matemáticamente las tres, todas ellas van a ser empleadas en el diseño del trazado, si bien la clotoide será la preponderante.

Otro factor que debe ser sopesado es si merece la pena o no enlazar curvas circulares de distinto radio mediante curvas de transición. Esta disquisición ya se planteó al inicio del [subapartado I.4.2](#), y la resolución fue que se advertía innecesario, por dos motivos: no es una solución tan común como el abundante empleo de curvas de transición para enlazar alineaciones rectas con alineaciones curvas y, por otra parte, no aporta mucho a un estudio teórico.

V.2. Procedimiento de representación gráfica.

La representación gráfica de un trazado se realiza proyectando sus tres dimensiones en 3 planos de proyección distintos, según los criterios del sistema de representación europeo, basado en el sistema diédrico directo. Las tres proyecciones obtenidas por medio de este procedimiento tienen nombre propio, y son: alzado (ubicado en la esquina superior izquierda de un plano), planta (ubicado debajo del alzado) y perfil (generalmente el izquierdo, que se coloca a la derecha del alzado).

La ejecución de estas proyecciones o vistas se explica en las primeras páginas de la Norma Adif Plataforma (NAP) 1-2-1.0 [58.A]. En este documento y, en el ámbito ferroviario en general, al alzado también se le denomina perfil longitudinal, así que lo que antes se denominaba simplemente perfil, ahora será perfil transversal o, más comúnmente, sección transversal. Estas vistas suelen ocupar bastante espacio, por lo que lo común es ubicar cada una en un plano o subplano independiente). En las siguientes subsecciones se van a abordar estas vistas.

V.2.1. Alzado o perfil longitudinal.

El alzado o perfil longitudinal es la vista que representa el trazado a lo largo de su longitud, mostrando también su cota sobre el nivel del mar. La NAP 1-2-1.0 aporta esta descripción de la vista [58.A]:

“En el perfil longitudinal se definen las cotas de los distintos puntos kilométricos del eje de trazado, que corresponden al hilo bajo de la vía. El perfil longitudinal se define mediante los dos siguientes tipos de rasante:

- ✓ Rasante uniforme, en la que la inclinación es constante.
- ✓ Acuerdo vertical, en el que se realiza progresivamente un cambio de inclinación mediante una parábola de segundo grado de eje vertical.”

Para más información acerca de los acuerdos verticales, consúltese la [subsección I.5.2](#); sobre todo su párrafo final, donde se explica más detalladamente qué son los acuerdos verticales (trazados en las inmediaciones de un vértice a fin de suavizarlo) y se propone consultar la referencia [12.A] para la obtención de más información.

V.2.2. Planta.

La planta es la vista que representa el trazado a lo largo de su anchura y longitud, cual si el trazado se estuviese observando desde el aire. Normalmente, no se grafican los carriles (o hilos) y las traviesas, sino que sencillamente se grafica el eje de la vía. La NAP 1-2-1.0 aporta esta descripción de la vista [58.A]:

“El eje de trazado en planta se compondrá de la adecuada sucesión de las siguientes alineaciones:

- ✓ Recta.
- ✓ Curva circular. Alineación de curvatura constante.
- ✓ Curva de transición de curvatura variable (lineal con su desarrollo), que enlaza una alineación recta con una curva circular, o bien dos curvas circulares de diferente radio y el mismo signo. Tiene las siguientes funciones:
 - i. Permitir que, en las entradas y salidas de las curvas de radio constante, la variación de la fuerza centrífuga y de la transición del peralte se produzcan de una manera gradual, segura y cómoda para el viajero.
 - ii. Eliminar impactos bruscos y las discontinuidades en el trazado. En los proyectos de trazados ferroviarios se utilizará como curva de transición la clotoide.”

V.2.3. Sección o perfil transversal.

El perfil transversal (perpendicular al perfil longitudinal) o sección transversal es la vista

“La posición del eje de trazado en la sección transversal está condicionada por el número de vías, el ancho de vía, el entreeje (en el caso de vía doble) y el peralte. Para la definición del eje del trazado se adoptará el siguiente criterio:

- ✓ Vía única. En planta, la posición del eje de trazado coincide con el eje de vía. En alzado, la cota del eje de trazado corresponde a la cota del hilo bajo.
- ✓ Vía doble. El eje que definirá el trazado será, generalmente, común para las dos vías. En planta, el eje de trazado coincidirá con el eje intermedio de las dos vías. En alzado, la cota del eje de trazado corresponde, con carácter general, a la cota del hilo bajo de ambas vías (hay casos en los que la cota del hilo bajo de ambas vías no coincide, es el caso de algunos túneles con vía en placa).

En entornos particulares donde no sea posible o conveniente definir la vía doble con un único eje (por ejemplo, en estaciones, entreeje variable o en rasantes de vías diferentes), se definirán los ejes de trazado de cada vía.

- ✓ Vías de apartado: En las vías de apartado de estaciones o apartaderos deberá definirse siempre el eje en planta de cada una de las vías.
- ✓ Vías multicarril: Para la definición del trazado se trabajará como si la vía fuera de ancho único, con el mayor de los anchos admitidos.”

Cabe señalar que el entreeje es la distancia entre los ejes de dos vías férreas que comparten una plataforma, que las vías de apartado se conocen comúnmente bajo el nombre de apartaderos (nombre que aparece reflejado, por ejemplo, en la NAV 0-2-0.0 [19.A]) y que las vías multicarril son

aquellas que incluyen más de dos carriles, siendo el ejemplo más característico las vías con tercer carril.

Como curiosidad, indícase que estas vías incluyen un tercer carril de circulación para permitir la rodadura de trenes en ancho ibérico (sobre los dos hilos externos) y en ancho internacional (sobre uno de los hilos externos y el hilo interno a la vía). Para más información, véase la referencia [59.A], donde se apunta el descentramiento de la carga respecto al eje de la vía (al circular en ancho internacional) y el mayor desgaste del carril común a ambos anchos como los principales problemas del tercer carril; recomendándose la implementación de esta solución técnica solamente para tráfico medio – bajos.

De todas maneras, el perfil o sección transversal de la vía no se va a graficar en este caso, ya que sus parámetros no influyen (o su influencia se ha desdeñado) en la resolución del problema de desgaste. Si se desea ver una sección, véanse las secciones del ramal ferroviario tomado como referencia [56.A, pp. 500 – 569] o la sección de la línea de alta velocidad Corredor Cantábrico – Mediterráneo en su tramo Gallur – Mallén [60.A]. Los espesores de las diferentes capas de asiento de la vía y los materiales que las integran se definen en la NAV 2-1-0.1 [61.A].

V.3. Representación simplificada del alzado y de la planta.

En esta sección se va a llevar a cabo la representación simplificada del alzado y de la planta del trazado propuesto. Las características de esta representación simplificada son las que siguen:

1. El alzado se representa en color naranja, haciendo así referencia al carril o hilo que se observa cuando la vía se observa de perfil (recuérdese que el alzado no es más que el perfil longitudinal de la vía). La elección de este color sigue el modelo de la figura I.23 (en la [subsección I.5.2](#)).
2. La planta se grafica en color azul, haciendo así referencia al eje de la vía. La elección de este color sigue el modelo de la figura I.17 (en la [subsección I.4.2](#)).
3. No se muestra la preceptiva guitarra en el alzado con el fin de simplificar (la guitarra indica las diferentes cotas de la vía de un modo que recuerda a las cuerdas del instrumento que originó su nombre).
4. No se indica ninguna propiedad del trazado ni en el alzado ni en la planta. En la realidad, se suelen indicar parámetros tales como puntos kilométricos, cotas, longitudes y radios de curvatura, entre otros.
5. Los acuerdos verticales, los cuales deberían aparecer en el alzado, se ignoran. Esto se fundamenta en el hecho de que su influencia en la resolución del problema es despreciable y, además, se requeriría de una gran escala para apreciarlos correctamente.
6. Las curvas no se muestran como son exactamente, sino que únicamente se dibuja su recta secante (hacia el norte del plano si la curva es a izquierdas y hacia el sur si la es a derechas).
7. Las representaciones no están sujetas a ninguna escala específica. Es decir, son más bien croquis en vez de planos.
8. Dada la elevada extensión del trazado, este se divide en 19 tramos, cada uno con su propio croquis. Estos croquis se organizan en 19 figuras consecutivas (figuras V.1 – V.19). El orden de las figuras es tal que los hitos kilométricos van de menor a mayor.
9. Se numeran los puntos del trazado en los cuales cambia algún parámetro cuya influencia en el problema no se ha despreciado (vértices, donde cambia la inclinación o rasante, y cambios de curvatura producidos fuera de las curvas de transición, principalmente) o donde hay alguna estación. La nomenclatura de cada punto singular es $N.M$, donde N es el número de figura (entre 1 y 19) y M el número de punto. Estos puntos se incluirán posteriormente, en la [sección V.4](#), en varias tablas que contendrán la información paramétrica (geométrica) del trazado.
10. La presencia de una estación o de un apartadero se indica doblemente dada su importancia: tanto en el alzado cuanto en la planta.

En cuanto al trazado, trátase de un trazado de casi 40 km cuyas características más significativas son las fijadas en la [sección V.1](#) y que queda servido por medio de estas estaciones de pueblos ficticios:

- ✓ Estación de Albarque, al inicio de la línea.
- ✓ Estación de Milbello, a la mitad de la línea.
- ✓ Estación de Zacarín, al final de la línea.

Una vez expuestas las características de las representaciones y el resumen del trazado propuesto, se procede a mostrar el resultado de su graficación (todo ello de elaboración propia, lo cual no se indica en los pies de las gráficas con el afán de no ser repetitivo):

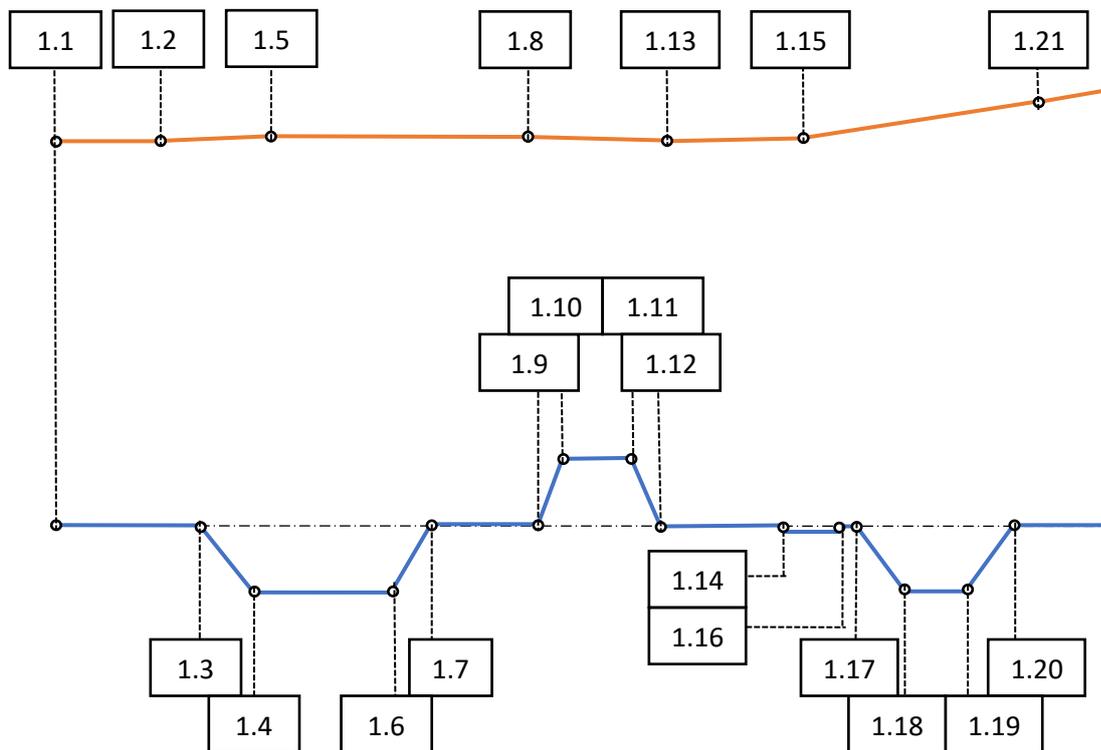


Figura V.1. Alzado y planta del tramo I. Datos geométricos en la tabla V.1.

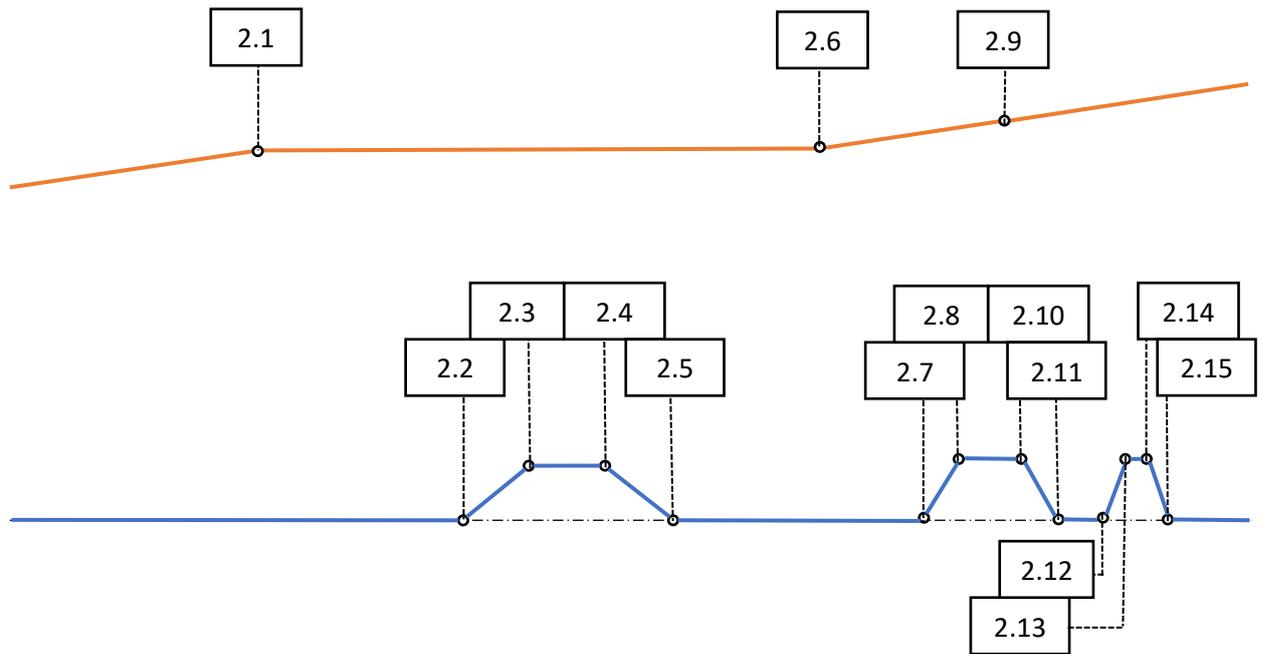


Figura V.2. Alzado y planta del tramo II. Datos geométricos en la tabla V.2.

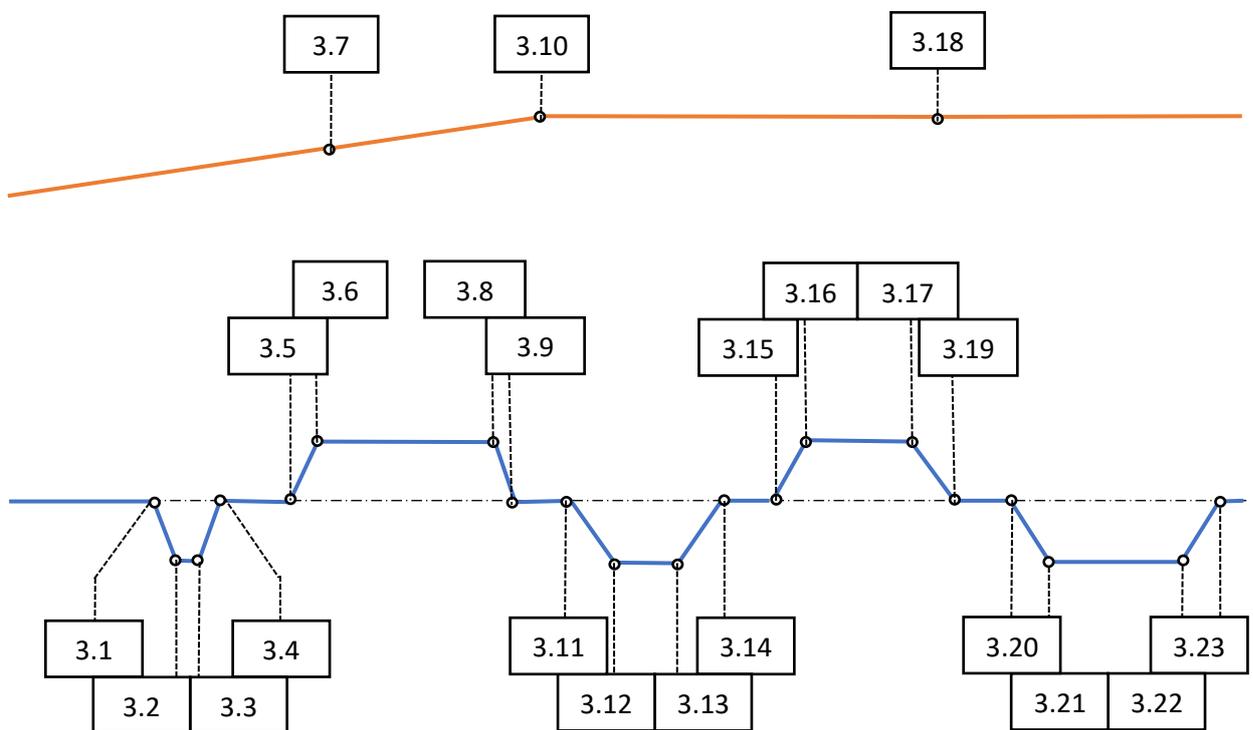


Figura V.3. Alzado y planta del tramo III. Datos geométricos en la tabla V.3.

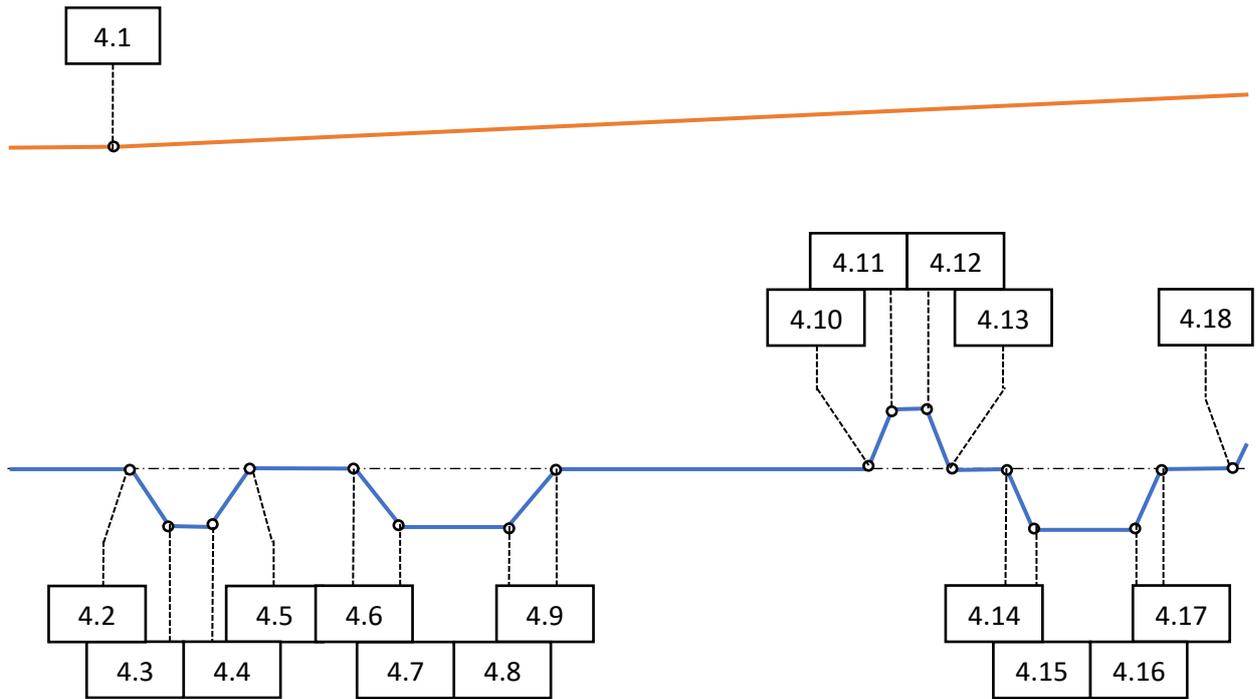


Figura V.4. Alzado y planta del tramo IV. Datos geométricos en la tabla V.4.

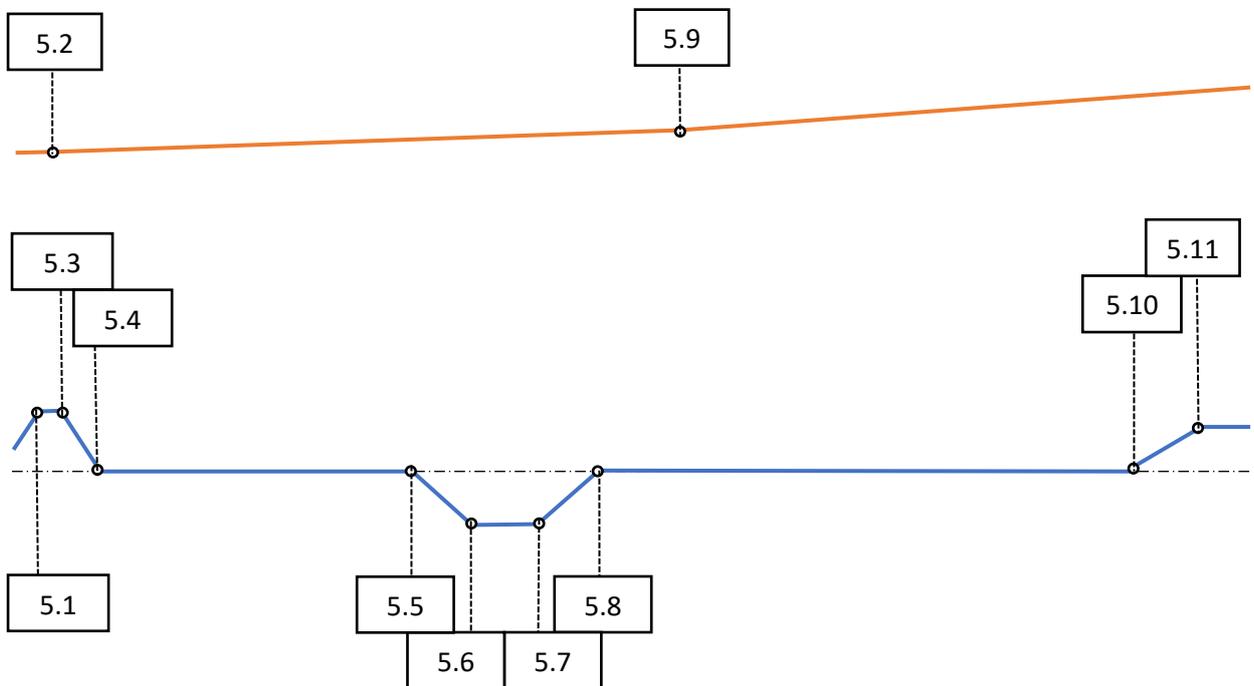


Figura V.5. Alzado y planta del tramo V. Datos geométricos en la tabla V.5.

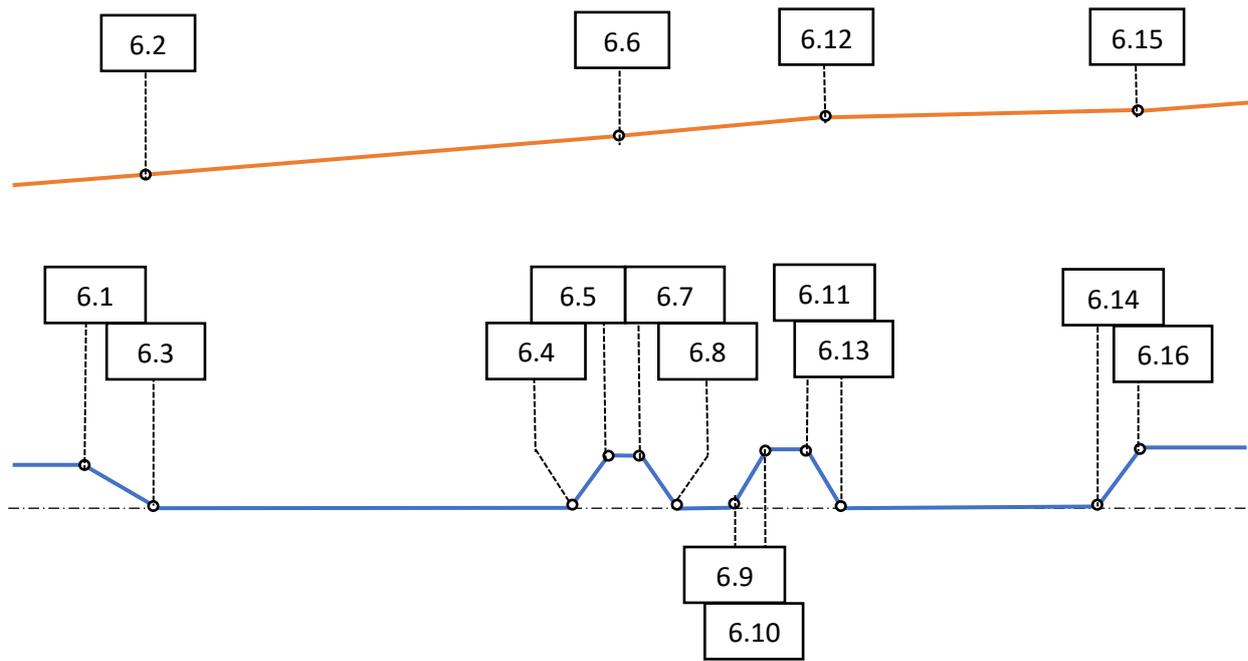


Figura V.6. Alzado y planta del tramo VI. Datos geométricos en la tabla V.6.

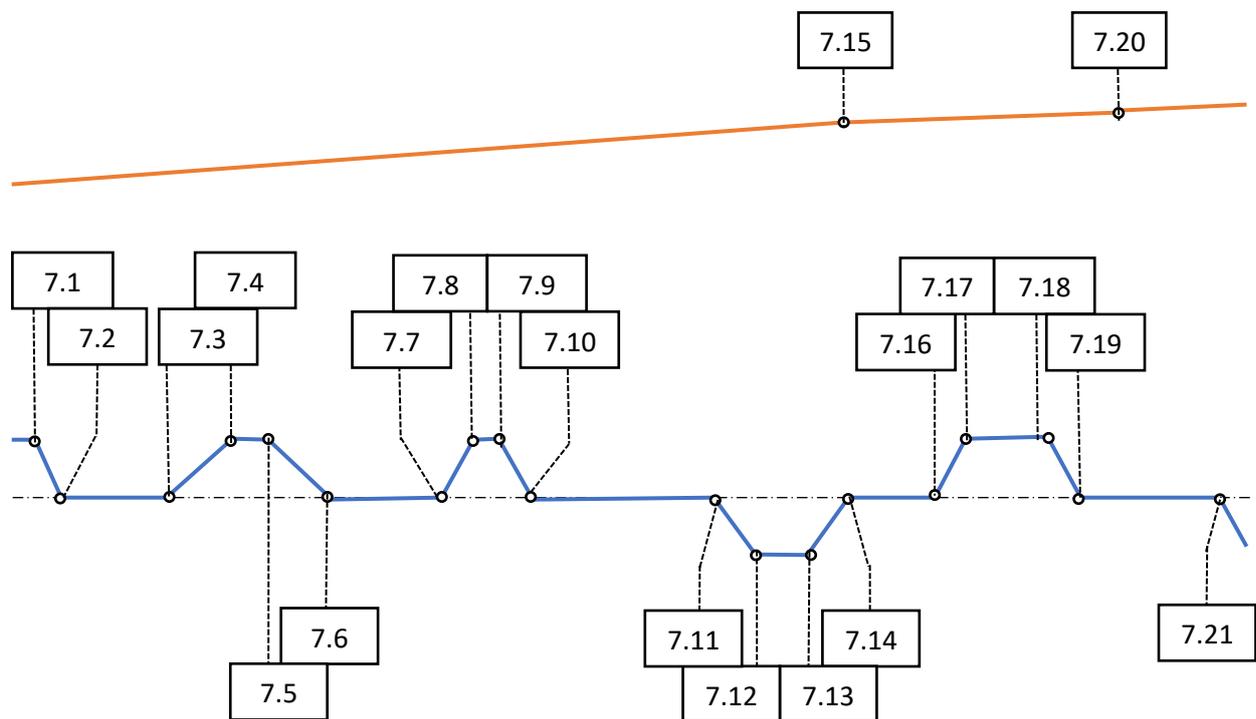


Figura V.7. Alzado y planta del tramo VII. Datos geométricos en la tabla V.7.

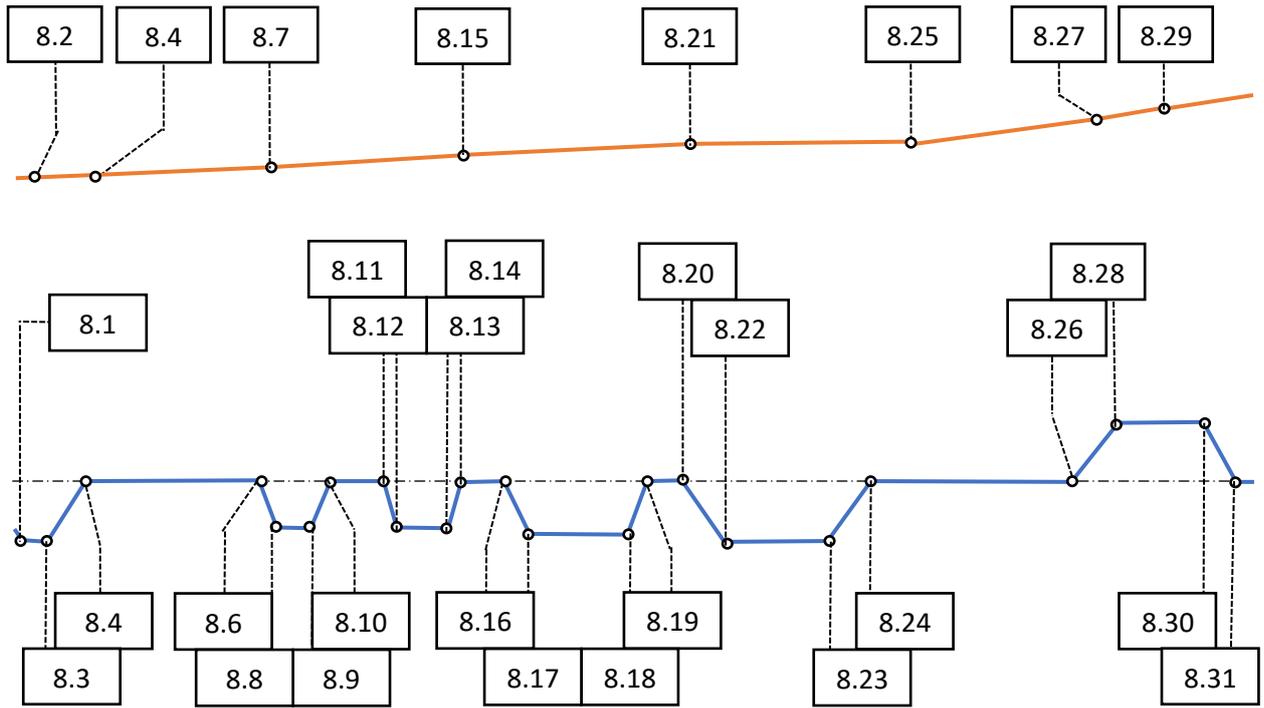


Figura V.8. Alzado y planta del tramo VIII. Datos geométricos en la tabla V.8.

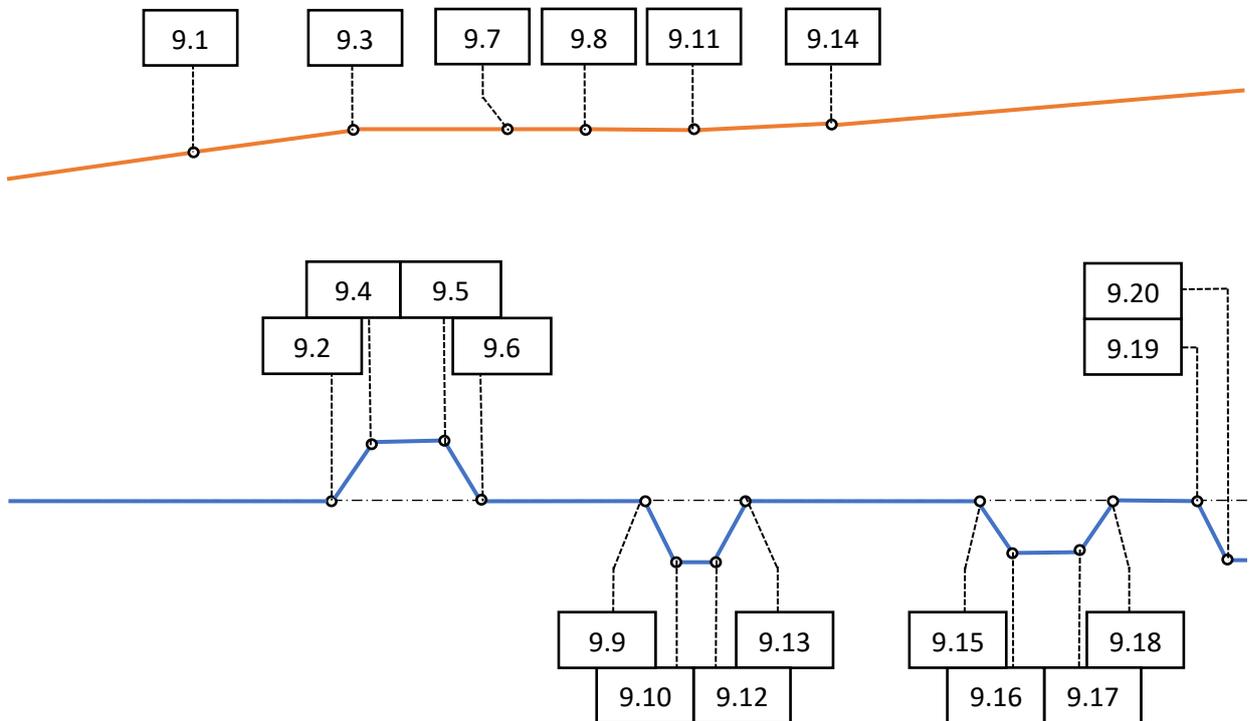


Figura V.9. Alzado y planta del tramo IX. Datos geométricos en la tabla V.9.

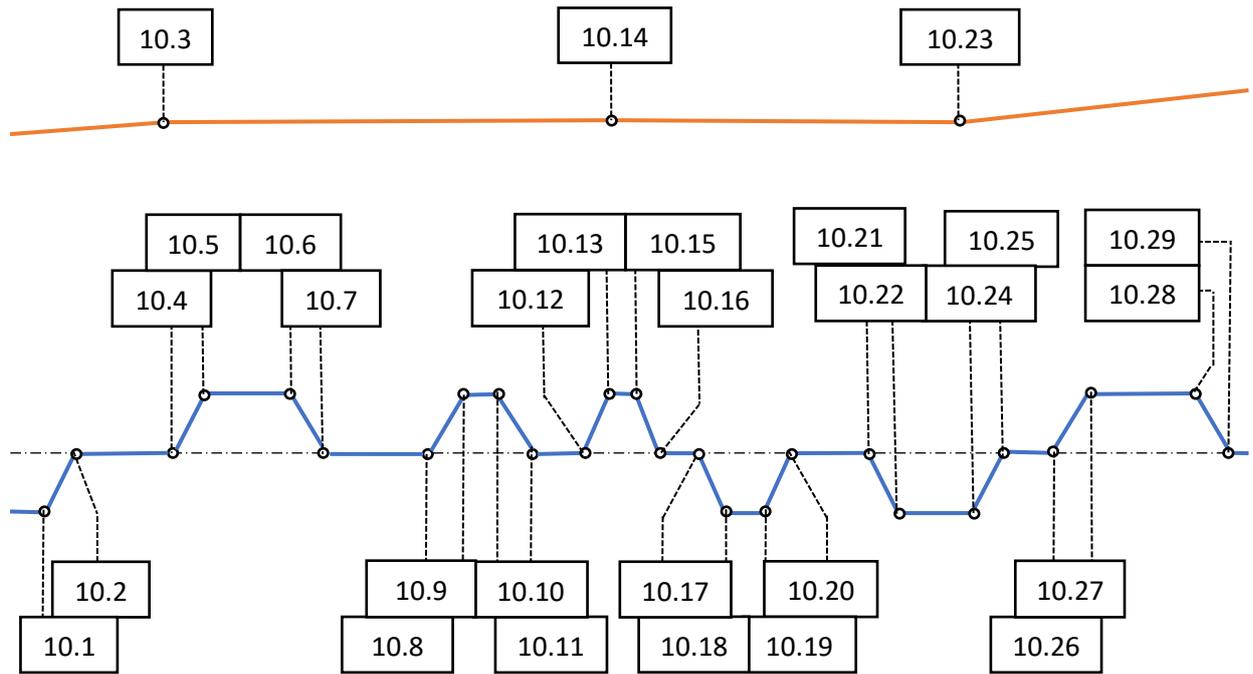


Figura V.10. Alzado y planta del tramo X. Datos geométricos en la tabla V.10.

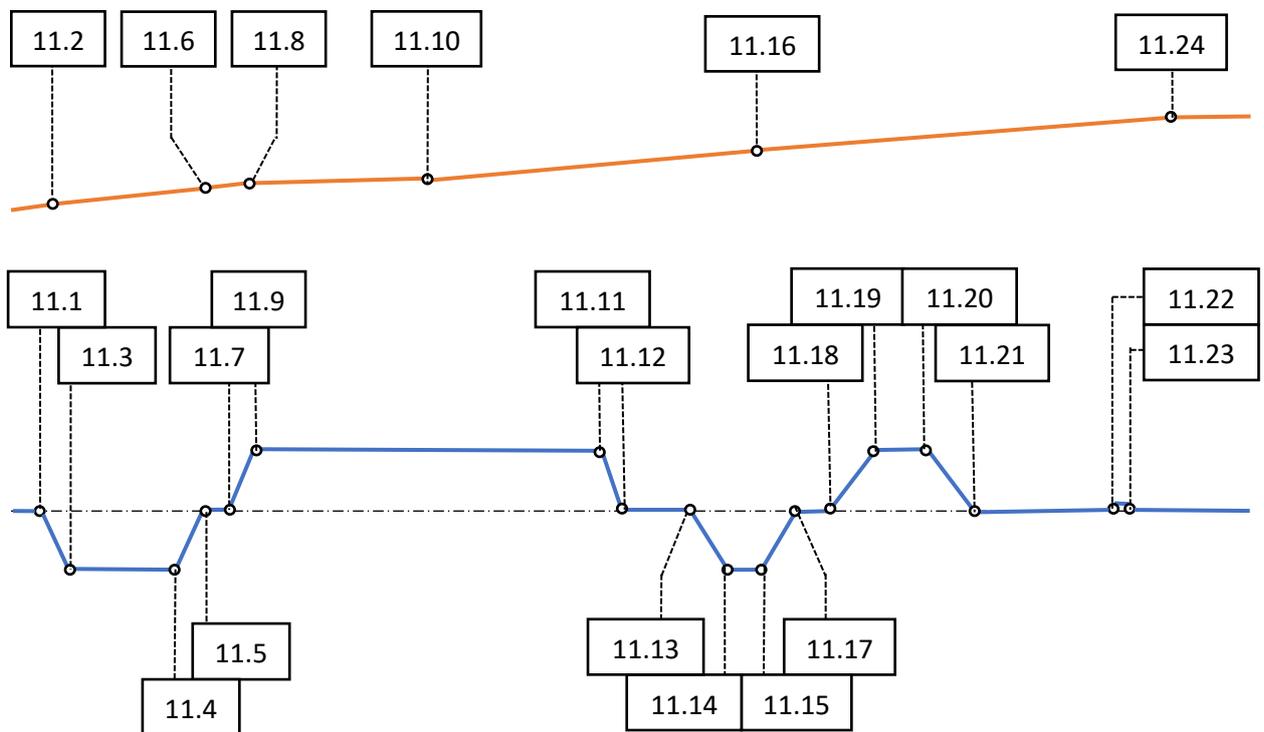


Figura V.11. Alzado y planta del tramo XI. Datos geométricos en la tabla V.11.

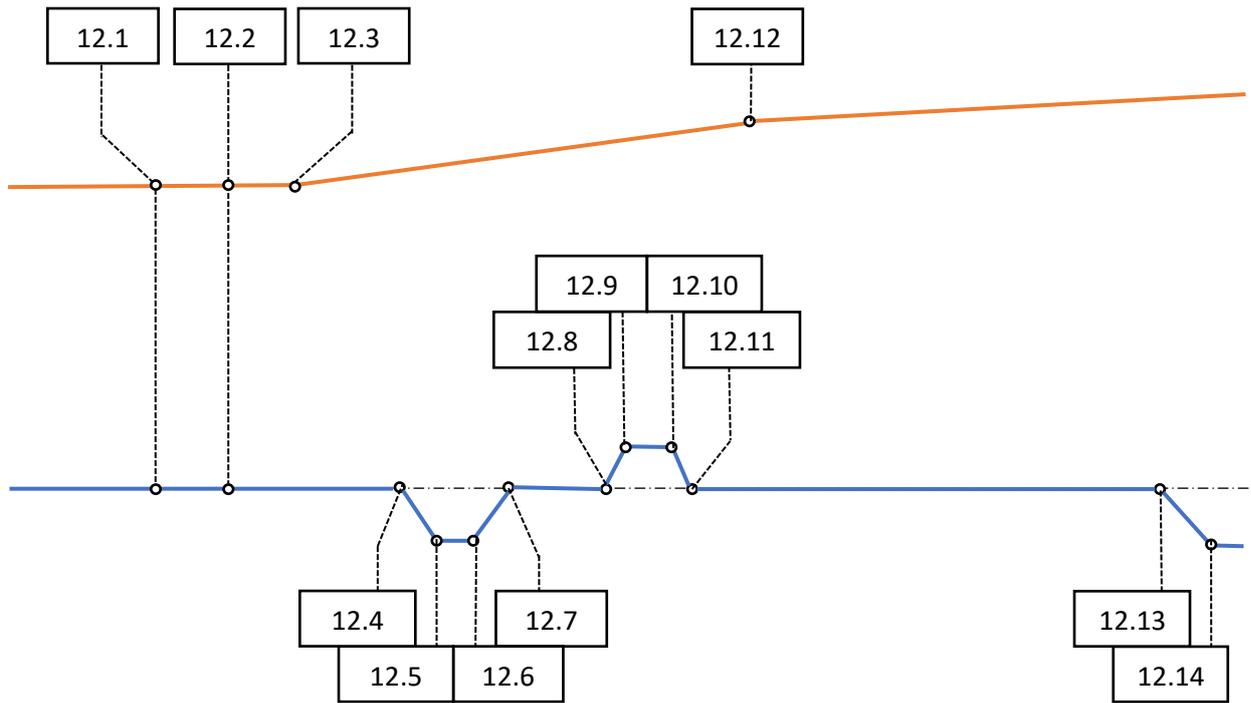


Figura V.12. Alzado y planta del tramo XII. Datos geométricos en la tabla V.12.

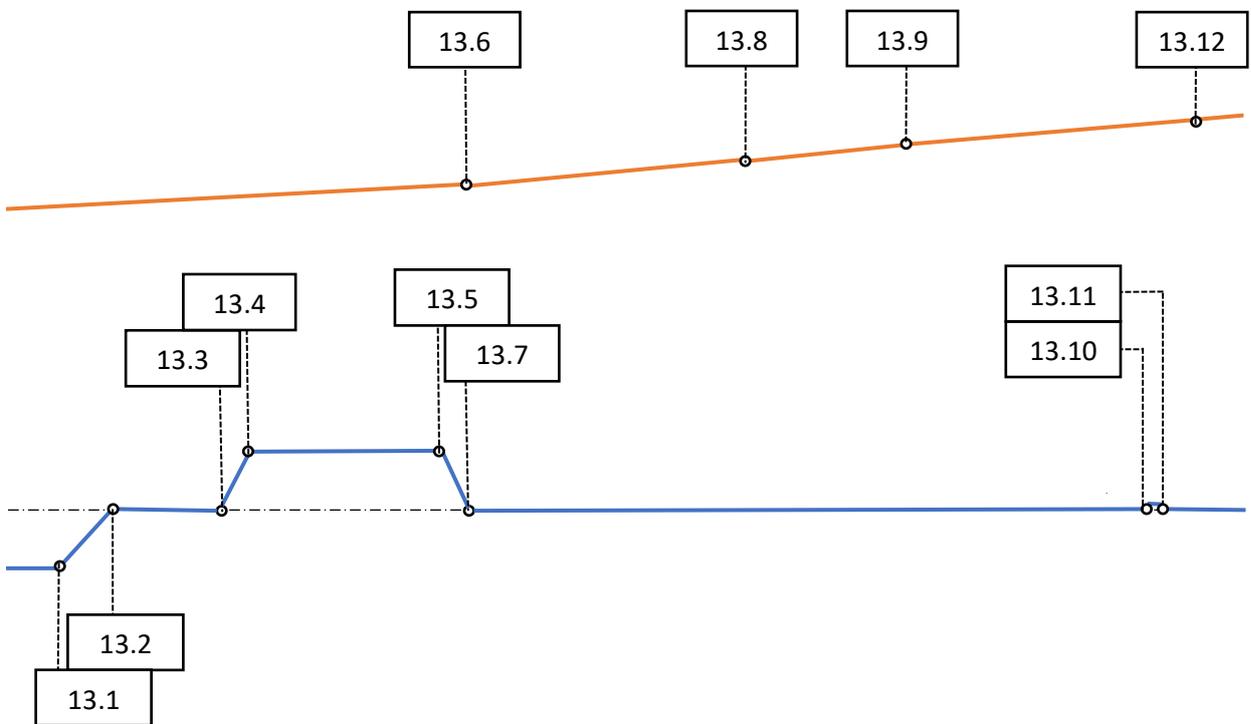


Figura V.13. Alzado y planta del tramo XIII. Datos geométricos en la tabla V.13.

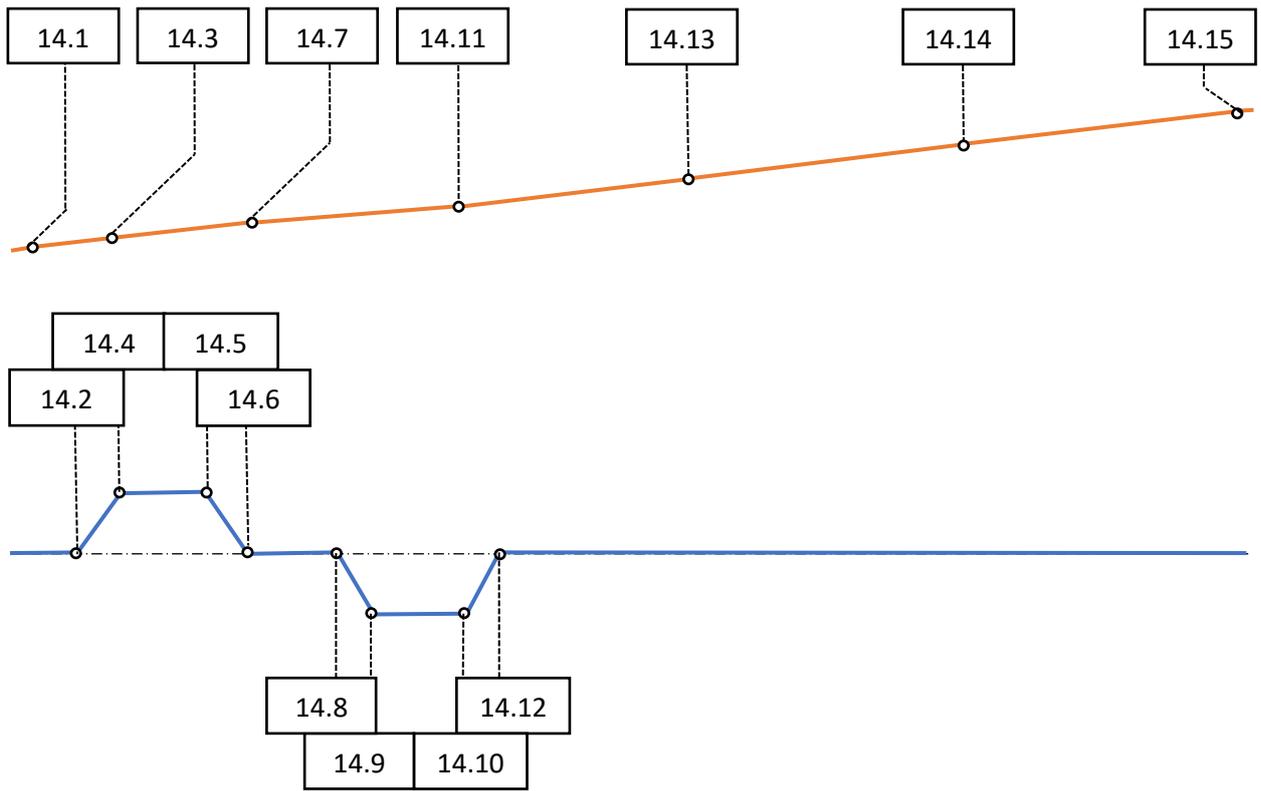


Figura V.14. Alzado y planta del tramo XIV. Datos geométricos en la tabla V.14.

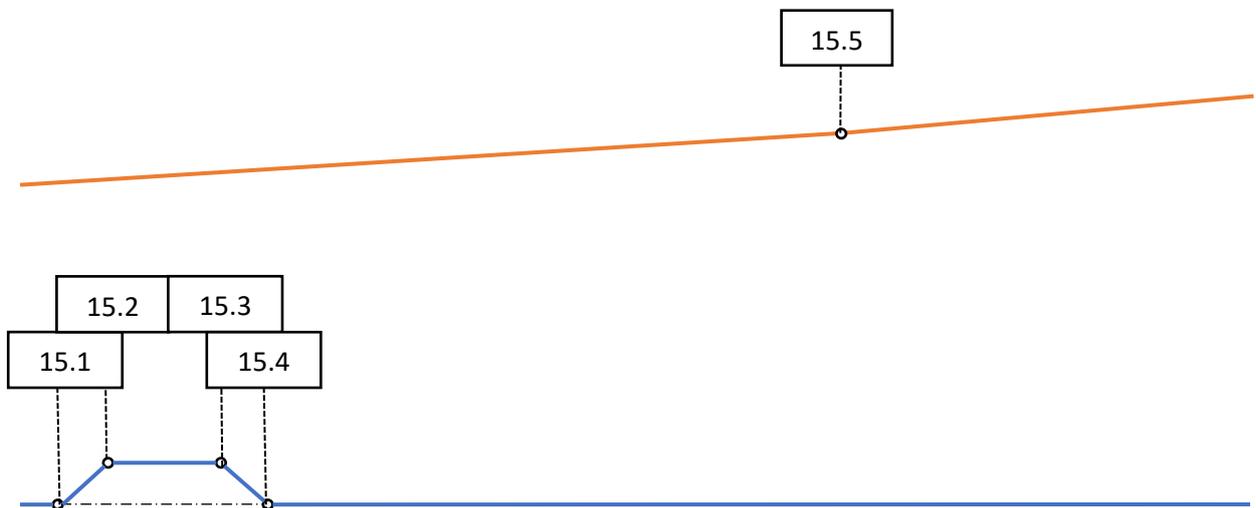


Figura V.15. Alzado y planta del tramo XV. Datos geométricos en la tabla V.15.

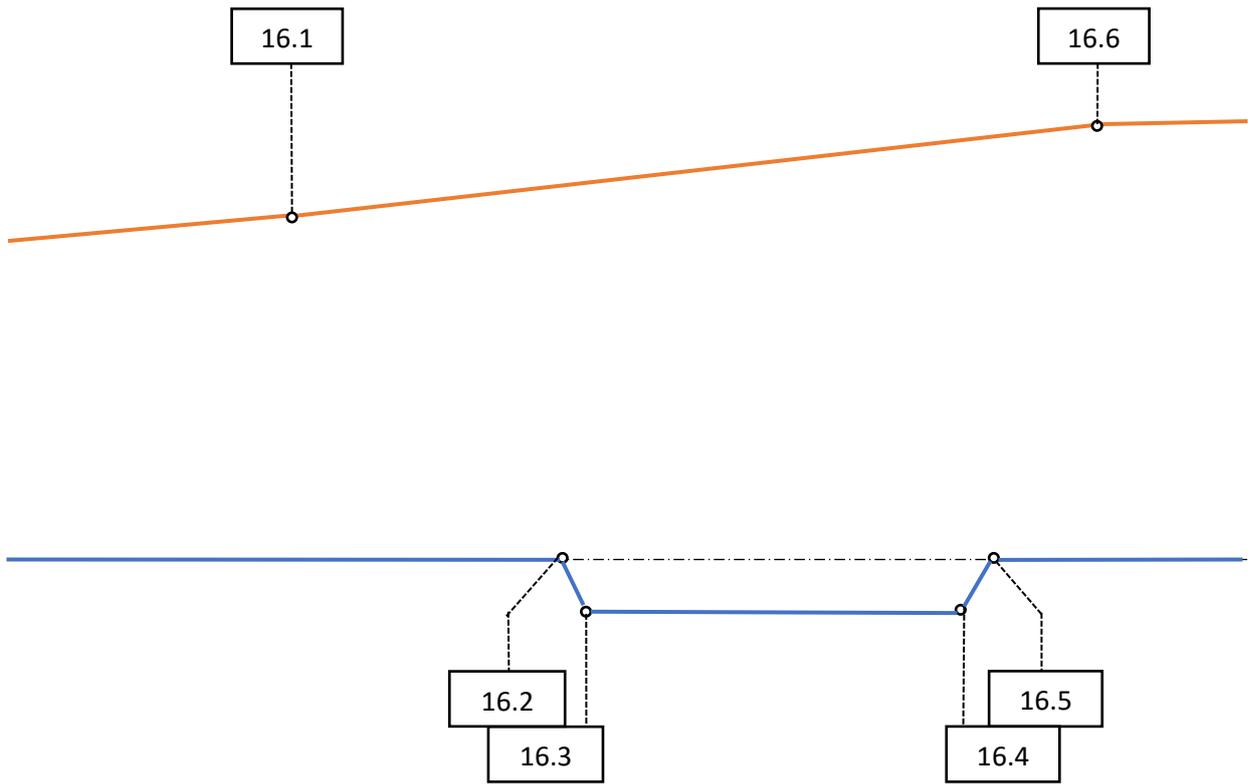


Figura V.16. Alzado y planta del tramo XVI. Datos geométricos en la tabla V.16.

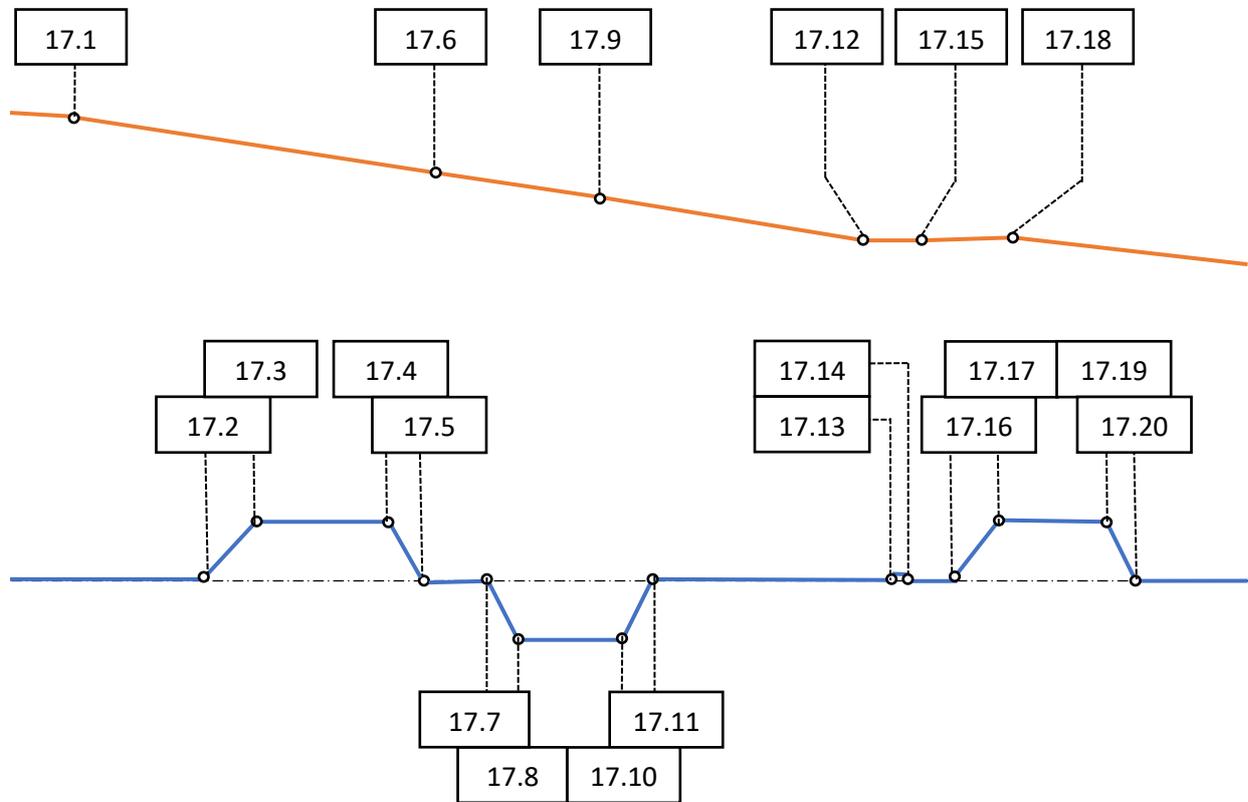


Figura V.17. Alzado y planta del tramo XVII. Datos geométricos en la tabla V.17.

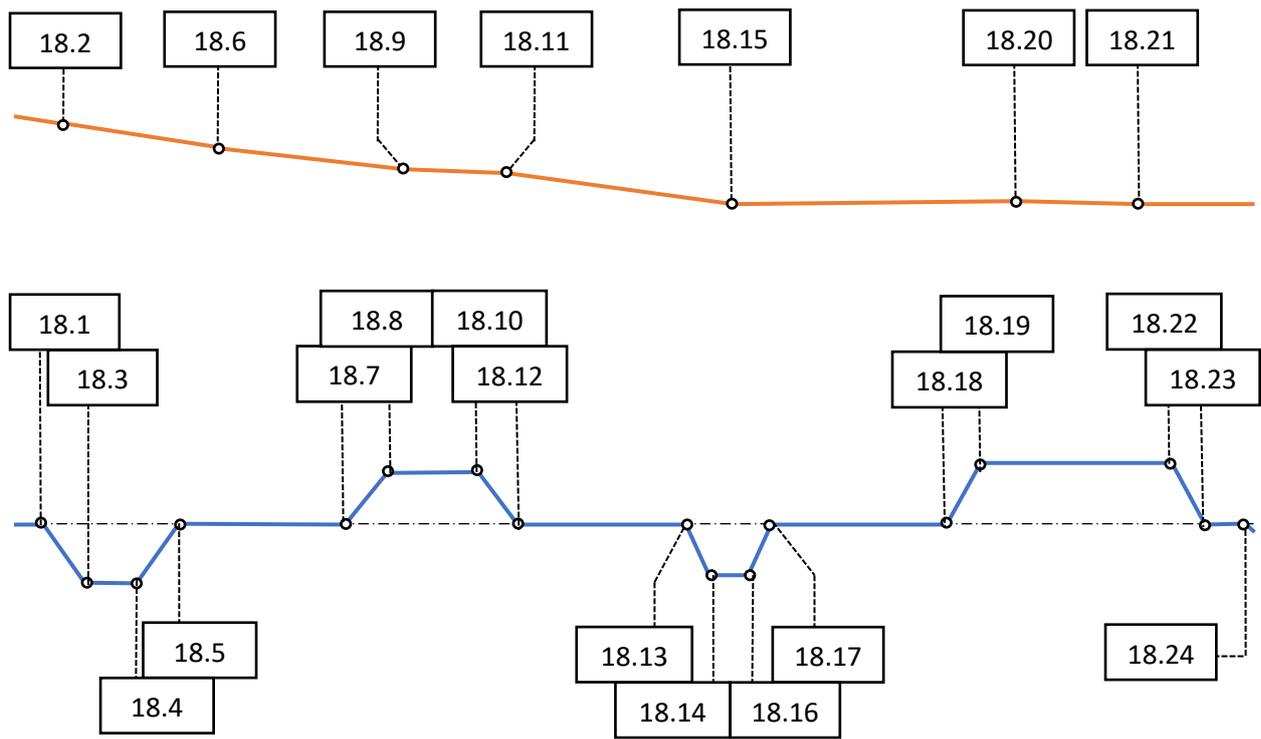


Figura V.18. Alzado y planta del tramo XVIII. Datos geométricos en la tabla V.18.

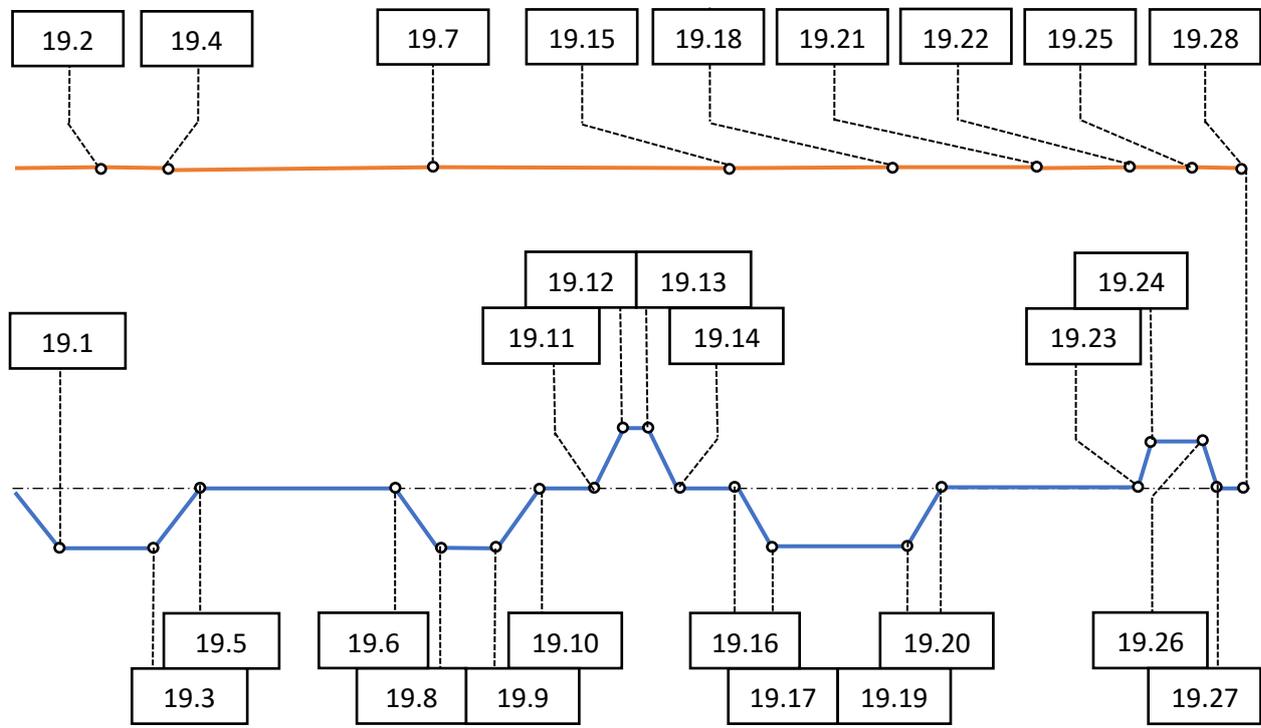


Figura V.19. Alzado y planta del tramo XIX. Datos geométricos en la tabla V.19.

V.4. Presentación de los datos paramétricos.

En esta sección se van a presentar tabulados los datos paramétricos correspondientes a cada estación, cada vértice y cada subtramo del trazado. En concreto, los datos presentados para cada elemento son:

- ✓ El punto kilométrico y la cota a la que se encuentra el final del andén de la estación de Albarque (inicio de la línea férrea).
- ✓ Los puntos kilométricos entre los que se sitúa el andén de la estación de Milbello (hacia la mitad de la línea), la cota a la que está dicho andén (cota única porque el andén se sitúa sobre una explanación del terreno) y si el andén es recto o curvo (recto con una inclinación nula).
- ✓ El punto kilométrico y la cota a la que se encuentra el principio del andén de la estación de Zacarín (final de la línea).
- ✓ El punto kilométrico y la cota a la que se encuentra cada vértice (recuérdese que los vértices son los puntos singulares situados en el alzado).
- ✓ Los puntos kilométricos entre los cuales se sitúa cada subtramo, los parámetros geométricos (léanse abajo) y los parámetros de velocidad (léanse abajo) de dicho subtramo. Cada uno de los subtramos se define entre pares puntos singulares consecutivos: normalmente entre $N.M$ y $N.(M+1)$, y entre $N.M$ y $(N+1).1$ cuando el subtramo se localiza entre dos tramos y los conecta (recuérdese que N es el número de figura/tramo (entre 1 y 19) y M el número de punto).

Los parámetros geométricos mostrados para cada subtramo son:

- ✓ Tipo de alineación: Recta (RECTA), curva circular (CIR) o uno de los tres tipos de curvas de transición estudiados a lo largo del presente documento (CLO si se trata de una clotoide, PARACUAD si es una parábola cuadrática y PARACUB si es una parábola cúbica).
- ✓ Sentido de la curva: A derechas (DCHA) o a izquierdas (IZDA), excepto en las rectas, que no tienen sentido ninguno (NING).
- ✓ Movimiento en la curva: Entrada (ENT) o salida (SAL), según se esté transitando hacia a una curva circular o hacia una recta. Dentro de una curva circular no hay movimiento ninguno (NING).
- ✓ Radio de la curva: Puede ser infinito (∞), variable (-) o un valor fijo (R). Exprésase en [m].
- ✓ Peralte: Puede ser nulo (0), variable (-) o un valor fijo (h). Exprésase en [mm].
- ✓ Inclinación: Siempre es un valor fijo (i) y en ocasiones puede ser nula (0,0). Exprésase en [%].

Y los parámetros de velocidad para un tren mercante (debe considerarse que los trenes mercantes son de tipo (N) al carecer de mecanismos de basculación, por lo que se les aplican límites de velocidad más restrictivos para limitar la aceleración centrífuga no compensada a $0,65 \text{ [m/s}^2\text{]}$, tal como se observa en la tabla I.3 de la [parte I.5.4.3](#)) son:

- ✓ Velocidad inicial: Es la velocidad a la que el tren deberá entrar en cada subtramo para cumplir con los límites de velocidad establecidos. Exprésase en [km/h].
- ✓ Velocidad final: Es la velocidad a la que el tren deberá abandonar cada subtramo para cumplir con los límites de velocidad establecidos. Exprésase en [km/h].

Nota: Los puntos kilométricos se abrevian con las iniciales en singular (“P. K.”) y se expresan en [km], con su parte decimal separada mediante una barra oblicua, tal como es habitual en los hitos o mojones de los trazados reales. Por otro lado, las cotas se expresan en [m] sobre el nivel del mar, lo cual se abrevia como “M. S. N. M”.

Una vez explicada la información contenida en las tablas, procédese a mostrarlas (todas ellas de elaboración propia en el programa *Microsoft Excel*, lo cual no se indica en los títulos de las tablas con el afán de no ser repetitivo):

Tabla V.1. Datos paramétricos del tramo I. Alzado y planta en la figura V.1.

Punto inicial (figura V.1)	Punto final (figura V.1)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
1.1		0/0		FINAL DEL ANDÉN DE LA ESTACIÓN DE ALBARQUE - INICIO DE LA LÍNEA - 650,0 M. S. N. M.							
1.1	1.2	0/0	0/38	RECTA	NING	NING	∞	-	0,0	35	50
1.2		0/38		CAMBIO DE RASANTE A 650,0 M. S. N. M.							
1.2	1.3	0/38	0/107	RECTA	NING	NING	∞	-	4,5	50	70
1.3	1.4	0/107	0/187	CLO	DCHA	ENT	-	-	4,5	70	70
1.4	1.5	0/187	0/205	CIR	DCHA	NING	293	120	4,5	70	70
1.5		0/205		CAMBIO DE RASANTE A 650,9 M. S. N. M.							
1.5	1.6	0/205	0/384	CIR	DCHA	NING	293	120	-0,4	70	70
1.6	1.7	0/384	0/444	CLO	DCHA	SAL	-	-	-0,4	70	70
1.7	1.8	0/444	0/580	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,4	70	60
1.8		0/580		CAMBIO DE RASANTE A 650,7 M. S. N. M.							
1.8	1.9	0/580	0/595	RECTA	NING	NING	∞	0	-2,1	60	60
1.9	1.10	0/595	0/635	CLO	IZDA	ENT	-	-	-2,1	60	60
1.10	1.11	0/635	0/733	CIR	IZDA	NING	272	80	-2,1	60	60
1.11	1.12	0/733	0/773	CLO	IZDA	SAL	-	-	-2,1	60	60
1.12	1.13	0/773	0/779	RECTA	NING	NING	∞	0	-2,1	60	60
1.13		0/779		CAMBIO DE RASANTE A 650,3 M. S. N. M.							
1.13	1.14	0/779	0/953	RECTA	NING	NING	∞	0	0,1	60	70
1.14	1.15	0/953	0/975	CIR	DCHA	NING	50.000	0	0,1	70	70
1.15		0/975		CAMBIO DE RASANTE A 650,3 M. S. N. M.							
1.15	1.16	0/975	1/036	CIR	DCHA	NING	50.000	0	16,1	70	70
1.16	1.17	1/036	1/060	RECTA	NING	NING	∞	0	16,1	70	70
1.17	1.18	1/060	1/130	CLO	DCHA	ENT	-	-	16,1	70	70
1.18	1.19	1/130	1/217	CIR	DCHA	NING	428	150	16,1	70	70
1.19	1.20	1/217	1/287	CLO	DCHA	SAL	-	-	16,1	70	70
1.20	1.21	1/287	1/319	RECTA	NING	NING	∞	0	16,1	70	70
1.21		1/319		CAMBIO DE RASANTE A 655,9 M. S. N. M.							

Nota al pie de tabla: La curva circular de 50.000 m de radio (cifra que decuplica el radio característico de una línea de alta velocidad) no requieren de transición previa ni posterior y tampoco de peralte, puesto que el radio es bastante elevado y la curva es muy suave, casi imperceptible para el tren. Esta curva tan particular también aparece en las tablas V.11, V.13 y V.17.

Tabla V.2. Datos paramétricos del tramo II. Alzado y planta en la figura V.2.

Punto inicial (figura V.2)	Punto final (figura V.2)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
1.21	2.1	1/319	1/821	RECTA	NING	NING	∞	0	15,4	70	70
2.1		1/821		CAMBIO DE RASANTE A 663,6 M. S. N. M.							
2.1	2.2	1/821	2/149	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,2	70	70
2.2	2.3	2/149	2/259	CLO	IZDA	ENT	-	-	-0,2	70	70
2.3	2.4	2/259	2/382	CIR	IZDA	NING	900	150	-0,2	70	70
2.4	2.5	2/382	2/492	CLO	IZDA	SAL	-	-	-0,2	70	70
2.5	2.6	2/492	2/729	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,2	70	70
2.6		2/729		CAMBIO DE RASANTE A 663,5 M. S. N. M.							
2.6	2.7	2/729	2/893	RECTA	NING	NING	∞	0	15,8	70	70
2.7	2.8	2/893	2/953	CLO	IZDA	ENT	-	-	15,8	70	70
2.8	2.9	2/953	3/030	CIR	IZDA	NING	360	140	15,8	70	70
2.9		3/030		CAMBIO DE RASANTE A 668,2 M. S. N. M.							
2.9	2.10	3/030	3/055	CIR	IZDA	NING	360	140	14,9	70	70
2.10	2.11	3/055	3/115	CLO	IZDA	SAL	-	-	14,9	70	70
2.11	2.12	3/115	3/187	RECTA	NING	NING	∞	0	14,9	70	65
2.12	2.13	3/187	3/227	CLO	IZDA	ENT	-	-	14,9	65	65
2.13	2.14	3/227	3/255	CIR	IZDA	NING	306	80	14,9	65	65
2.14	2.15	3/255	3/290	CLO	IZDA	SAL	-	-	14,9	65	65

Tabla V.3. Datos paramétricos del tramo III. Alzado y planta en la figura V.3.

Punto inicial (figura V.3)	Punto final (figura V.3)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
2.15	3.1	3/290	3/656	RECTA	NING	NING	∞	0	14,9	65	65
3.1	3.2	3/656	3/694	CLO	DCHA	ENT	-	-	14,9	65	65
3.2	3.3	3/694	3/726	CIR	DCHA	NING	280	90	14,9	65	65
3.3	3.4	3/726	3/764	CLO	DCHA	SAL	-	-	14,9	65	65
3.4	3.5	3/764	3/876	RECTA	NING	NING	∞	0	14,9	65	65
3.5	3.6	3/876	3/924	PARACUAD	IZDA	ENT	-	-	14,9	65	65
3.6	3.7	3/924	3/936	CIR	IZDA	NING	268	106	14,9	65	65
3.7		3/936		CAMBIO DE RASANTE A 681,7 M. S. N. M.							
3.7	3.8	3/936	4/176	CIR	IZDA	NING	268	106	15,7	65	65
3.8	3.9	4/176	4/244	PARACUAD	IZDA	SAL	-	-	15,7	65	65
3.9	3.10	4/244	4/284	RECTA	NING	NING	∞	0	15,7	65	65
3.10		4/284		CAMBIO DE RASANTE A 687,2 M. S. N. M.							
3.10	3.11	4/284	4/334	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,4	65	70
3.11	3.12	4/334	4/404	CLO	DCHA	ENT	-	-	-0,4	70	70
3.12	3.13	4/404	4/470	CIR	DCHA	NING	272	155	-0,4	70	70
3.13	3.14	4/470	4/576	CLO	DCHA	SAL	-	-	-0,4	70	70
3.14	3.15	4/576	4/658	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,4	70	70
3.15	3.16	4/658	4/714	PARACUAD	IZDA	ENT	-	-	-0,4	70	70
3.16	3.17	4/714	4/881	CIR	IZDA	NING	266	130	-0,4	70	70
3.17	3.18	4/881	4/928	PARACUAD	IZDA	SAL	-	-	-0,4	70	70
3.18		4/928		CAMBIO DE RASANTE A 686,9 M. S. N. M.							
3.18	3.19	4/928	4/957	PARACUAD	IZDA	SAL	-	-	0,5	70	70
3.19	3.20	4/957	5/045	RECTA	NING	NING	∞	0	0,5	70	70
3.20	3.21	5/045	5/110	CLO	DCHA	ENT	-	-	0,5	70	70
3.21	3.22	5/110	5/319	CIR	DCHA	NING	287	155	0,5	70	70
3.22	3.23	5/319	5/384	CLO	DCHA	SAL	-	-	0,5	70	70

Tabla V.4. Datos paramétricos del tramo IV. Alzado y planta en la figura V.4.

Punto inicial (figura V.4)	Punto final (figura V.4)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
3.23	4.1	5/384	5/595	RECTA	NING	NING	∞	0	0,5	70	70
4.1		5/595		CAMBIO DE RASANTE A 687,2 M. S. N. M.							
4.1	4.2	5/595	5/617	RECTA	NING	NING	∞	0	4,7	70	70
4.2	4.3	5/617	5/682	CLO	DCHA	ENT	-	-	4,7	70	70
4.3	4.4	5/682	5/747	CIR	DCHA	NING	475	155	4,7	70	70
4.4	4.5	5/747	5/812	CLO	DCHA	SAL	-	-	4,7	70	70
4.5	4.6	5/812	5/978	RECTA	NING	NING	∞	0	4,7	70	70
4.6	4.7	5/978	6/058	CLO	DCHA	ENT	-	-	4,7	70	70
4.7	4.8	6/058	6/228	CIR	DCHA	NING	498	155	4,7	70	70
4.8	4.9	6/228	6/308	CLO	DCHA	SAL	-	-	4,7	70	70
4.9	4.10	6/308	6/812	RECTA	NING	NING	∞	0	4,7	70	65
4.10	4.11	6/812	6/852	CLO	IZDA	ENT	-	-	4,7	65	65
4.11	4.12	6/852	6/903	CIR	IZDA	NING	290	95	4,7	65	65
4.12	4.13	6/903	6/943	CLO	IZDA	SAL	-	-	4,7	65	65
4.13	4.14	6/943	7/034	RECTA	NING	NING	∞	0	4,7	65	65
4.14	4.15	7/034	7/079	CLO	DCHA	ENT	-	-	4,7	65	65
4.15	4.16	7/079	7/240	CIR	DCHA	NING	290	95	4,7	65	65
4.16	4.17	7/240	7/285	CLO	DCHA	SAL	-	-	4,7	65	65
4.17	4.18	7/285	7/401	RECTA	NING	NING	∞	0	4,7	65	70

Tabla V.5. Datos paramétricos del tramo IV. Alzado y planta en la figura V.5.

Punto inicial (figura V.5)	Punto final (figura V.5)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
4.18	5.1	7/401	7/461	CLO	IZDA	ENT	-	-	4,7	70	70
5.1	5.2	7/461	7/485	CIR	IZDA	NING	350	140	4,7	70	70
5.2		7/485		CAMBIO DE RASANTE A 696,1 M. S. N. M.							
5.2	5.3	7/485	7/501	CIR	IZDA	NING	350	140	3,4	70	70
5.3	5.4	7/501	7/561	CLO	IZDA	SAL	-	-	3,4	70	70
5.4	5.5	7/561	8/062	RECTA	NING	NING	∞	0	3,4	70	70
5.5	5.6	8/062	8/162	CLO	DCHA	ENT	-	-	3,4	70	70
5.6	5.7	8/162	8/270	CIR	DCHA	NING	880	155	3,4	70	70
5.7	5.8	8/270	8/370	CLO	DCHA	SAL	-	-	3,4	70	70
5.8	5.9	8/370	8/500	RECTA	NING	NING	∞	0	3,4	70	70
5.9		8/500		CAMBIO DE RASANTE A 699,5 M. S. N. M.							
5.9	5.10	8/500	9/224	RECTA	NING	NING	∞	0	7,6	70	70
5.10	5.11	9/224	9/339	CLO	IZDA	ENT	-	-	7,6	70	70

Tabla V.6. Datos paramétricos del tramo VI. Alzado y planta en la figura V.6.

Punto inicial (figura V.6)	Punto final (figura V.6)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
5.11	6.1	9/339	9/539	CIR	IZDA	NING	1.880	72	7,6	70	70
6.1	6.2	9/539	9/639	CLO	IZDA	SAL	-	-	7,6	70	70
6.2		9/639		CAMBIO DE RASANTE A 708,2 M. S. N. M.							
6.2	6.3	9/639	9/654	CLO	IZDA	SAL	1.880	-	8,1	70	70
6.3	6.4	9/654	10/327	RECTA	NING	NING	∞	0	8,1	70	70
6.4	6.5	10/327	10/387	CLO	IZDA	ENT	-	-	8,1	70	70
6.5	6.6	10/387	10/405	CIR	IZDA	NING	1.000	105	8,1	70	70
6.6		10/405		CAMBIO DE RASANTE A 714,4 M. S. N. M.							
6.6	6.7	10/405	10/438	CIR	IZDA	NING	1.000	105	10,8	70	70
6.7	6.8	10/438	10/498	CLO	IZDA	SAL	-	-	10,8	70	70
6.8	6.9	10/498	10/583	RECTA	NING	NING	∞	0	10,8	70	70
6.9	6.10	10/583	10/643	CLO	IZDA	ENT	-	-	10,8	70	70
6.10	6.11	10/643	10/709	CIR	IZDA	NING	445	140	10,8	70	70
6.11	6.12	10/709	10/745	CLO	IZDA	SAL	-	-	10,8	70	70
6.12		10/745		CAMBIO DE RASANTE A 718,1 M. S. N. M.							
6.12	6.13	10/745	10/764	CLO	IZDA	SAL	-	-	1,0	70	70
6.13	6.14	10/764	11/178	RECTA	NING	NING	∞	0	1,0	70	70
6.14	6.15	11/178	11/241	PARACUB	IZDA	ENT	-	-	1,0	70	70
6.15		11/241		CAMBIO DE RASANTE A 718,6 M. S. N. M.							
6.15	6.16	11/241	11/248	PARACUB	IZDA	ENT	-	-	7,7	70	70

Tabla V.7. Datos paramétricos del tramo VII. Alzado y planta en la figura V.7.

Punto inicial (figura V.7)	Punto final (figura V.7)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
6.16	7.1	11/248	11/458	CIR	IZDA	NING	425	160	7,7	70	70
7.1	7.2	11/458	11/505	PARACUB	IZDA	SAL	-	-	7,7	70	70
7.2	7.3	11/505	11/675	RECTA	NING	NING	∞	0	7,7	70	70
7.3	7.4	11/675	11/775	CLO	IZDA	ENT	-	-	7,7	70	70
7.4	7.5	11/775	11/838	CIR	IZDA	NING	525	148	7,7	70	70
7.5	7.6	11/838	11/938	CLO	IZDA	SAL	-	-	7,7	70	70
7.6	7.7	11/938	12/114	RECTA	NING	NING	∞	0	7,7	70	70
7.7	7.8	12/114	12/174	CLO	IZDA	ENT	-	-	7,7	70	70
7.8	7.9	12/174	12/206	CIR	IZDA	NING	307	140	7,7	70	70
7.9	7.10	12/206	12/266	CLO	IZDA	SAL	-	-	7,7	70	70
7.10	7.11	12/266	12/559	RECTA	NING	NING	∞	0	7,7	70	70
7.11	7.12	12/559	12/629	CLO	DCHA	ENT	-	-	7,7	70	70
7.12	7.13	12/629	12/708	CIR	DCHA	NING	500	135	7,7	70	70
7.13	7.14	12/708	12/779	CLO	DCHA	SAL	-	-	7,7	70	70
7.14	7.15	12/779	12/786	RECTA	NING	NING	∞	0	7,7	70	70
7.15		12/786		CAMBIO DE RASANTE A 730,3 M. S. N. M.							
7.15	7.16	12/786	12/911	RECTA	NING	NING	∞	0	3,9	70	70
7.16	7.17	12/911	12/971	CLO	IZDA	ENT	-	-	3,9	70	70
7.17	7.18	12/971	13/095	CIR	IZDA	NING	290	140	3,9	70	70
7.18	7.19	13/095	13/155	CLO	IZDA	SAL	-	-	3,9	70	70
7.19	7.20	13/155	13/211	RECTA	NING	NING	∞	0	3,9	70	70
7.20		13/211		CAMBIO DE RASANTE A 732,0 M. S. N. M.							
7.20	7.21	13/211	13/375	RECTA	NING	NING	∞	0	5,6	70	70

Tabla V.8. Datos paramétricos del tramo VIII. Alzado y planta en la figura V.8.

Punto inicial (figura V.8)	Punto final (figura V.8)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
7.21	8.1	13/375	13/432	CLO	DCHA	ENT	-	-	5,6	70	70
8.1	8.2	13/432	13/435	CIR	DCHA	NING	290	140	5,6	70	70
8.2		13/435		CAMBIO DE RASANTE A 733,2 M. S. N. M.							
8.2	8.3	13/435	13/477	CIR	DCHA	NING	290	140	4,3	70	70
8.3	8.4	13/477	13/537	CLO	DCHA	SAL	-	-	4,3	70	70
8.4	8.5	13/537	13/554	RECTA	NING	NING	∞	0	4,3	70	70
8.5		13/554		CAMBIO DE RASANTE A 733,2 M. S. N. M.							
8.5	8.6	13/554	13/818	RECTA	NING	NING	∞	0	4,5	70	70
8.6	8.7	13/818	13/835	CLO	DCHA	ENT	-	-	4,5	70	70
8.7		13/835		CAMBIO DE RASANTE A 735,0 M. S. N. M.							
8.7	8.8	13/835	13/848	CLO	DCHA	ENT	-	-	6,3	70	70
8.8	8.9	13/848	13/901	CIR	DCHA	NING	1.350	40	6,3	70	70
8.9	8.10	13/901	13/931	CLO	DCHA	SAL	-	-	6,3	70	70
8.10	8.11	13/931	14/020	RECTA	NING	NING	∞	0	6,3	70	70
8.11	8.12	14/020	14/039	CLO	DCHA	ENT	-	-	6,3	70	70
8.12	8.13	14/039	14/124	CIR	DCHA	NING	1.475	38	6,3	70	70
8.13	8.14	14/124	14/144	CLO	DCHA	SAL	-	-	6,3	70	70
8.14	8.15	14/144	14/148	RECTA	NING	NING	∞	0	6,3	70	70
8.15		14/148		CAMBIO DE RASANTE A 737,0 M. S. N. M.							
8.15	8.16	14/148	14/212	RECTA	NING	NING	∞	0	6,0	70	70
8.16	8.17	14/212	14/252	CLO	DCHA	ENT	-	-	6,0	70	70
8.17	8.18	14/252	14/414	CIR	DCHA	NING	990	40	6,0	70	70
8.18	8.19	14/414	14/444	CLO	DCHA	SAL	-	-	6,0	70	70
8.19	8.20	14/444	14/499	RECTA	NING	NING	∞	0	6,0	70	70
8.20	8.21	14/499	14/512	CLO	DCHA	ENT	-	-	6,0	70	70
8.21		14/512		CAMBIO DE RASANTE A 739,1 M. S. N. M.							
8.21	8.22	14/512	14/569	CLO	DCHA	ENT	-	-	-1,2	70	70
8.22	8.23	14/569	14/735	CIR	DCHA	NING	331	152	-1,2	70	70
8.23	8.24	14/735	14/805	CLO	DCHA	SAL	-	-	-1,2	70	70
8.24	8.25	14/805	14/868	RECTA	NING	NING	∞	0	-1,2	70	70
8.25		14/868		CAMBIO DE RASANTE A 738,7 M. S. N. M.							
8.25	8.26	14/868	15/128	RECTA	NING	NING	∞	0	14,1	70	70
8.26	8.27	15/128	15/170	CLO	IZDA	ENT	-	-	14,1	70	70
8.27		15/170		CAMBIO DE RASANTE A 743,0 M. S. N. M.							
8.27	8.28	15/170	15/203	CLO	IZDA	ENT	-	-	16,3	70	70
8.28	8.29	15/203	15/273	CIR	IZDA	NING	490	110	16,3	70	70
8.29		15/273		CAMBIO DE RASANTE A 744,7 M. S. N. M.							
8.29	8.30	15/273	15/338	CIR	IZDA	NING	490	110	13,8	70	70
8.30	8.31	15/338	15/393	CLO	IZDA	SAL	-	-	13,8	70	70

Tabla V.9. Datos paramétricos del tramo IX. Alzado y planta en la figura V.9.

Punto inicial (figura V.9)	Punto final (figura V.9)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [‰]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
8.31	9.1	15/393	15/725	RECTA	NING	NING	∞	0	13,8	70	70
9.1		15/725		CAMBIO DE RASANTE A 750,9 M. S. N. M.							
9.1	9.2	15/725	15/946	RECTA	NING	NING	∞	0	15,2	70	70
9.2	9.3	15/946	15/980	CLO	IZDA	ENT	-	-	15,2	70	70
9.3		15/980		CAMBIO DE RASANTE A 754,8 M. S. N. M.							
9.3	9.4	15/980	16/016	CLO	IZDA	ENT	-	-	-0,2	70	70
9.4	9.5	16/016	16/129	CIR	IZDA	NING	380	140	-0,2	70	70
9.5	9.6	16/129	16/189	CLO	IZDA	SAL	-	-	-0,2	70	70
9.6	9.7	16/189	16/232	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,2	70	70
9.7		16/232		CAMBIO DE RASANTE A 754,7 M. S. N. M.							
9.7	9.8	16/232	16/358	RECTA	NING	NING	∞	0	-1,4	70	70
9.8		16/358		CAMBIO DE RASANTE A 754,6 M. S. N. M.							
9.8	9.9	16/358	16/451	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,1	70	70
9.9	9.10	16/451	16/503	CLO	DCHA	ENT	-	-	-0,1	70	70
9.10	9.11	16/503	16/534	CIR	DCHA	NING	285	125	-0,1	70	70
9.11		16/534		CAMBIO DE RASANTE A 754,5 M. S. N. M.							
9.11	9.12	16/534	16/566	CIR	DCHA	NING	285	125	4,4	70	70
9.12	9.13	16/566	16/618	CLO	DCHA	SAL	-	-	4,4	70	70
9.13	9.14	16/618	16/757	RECTA	NING	NING	∞	0	4,4	70	70
9.14		16/757		CAMBIO DE RASANTE A 755,5 M. S. N. M.							
9.14	9.15	16/757	16/989	RECTA	NING	NING	∞	0	8,3	70	70
9.15	9.16	16/989	17/049	CLO	DCHA	ENT	-	-	8,3	70	70
9.15	9.17	17/049	17/153	CIR	DCHA	NING	1.000	98	8,3	70	70
9.16	9.18	17/153	17/213	CLO	DCHA	SAL	-	-	8,3	70	70
9.17	9.19	17/213	17/345	RECTA	NING	NING	∞	0	8,3	70	70
9.18	9.20	17/345	17/395	CLO	DCHA	ENT	-	-	8,3	70	70

Tabla V.10. Datos paramétricos del tramo X. Alzado y planta en la figura V.10.

Punto inicial (figura V.10)	Punto final (figura V.10)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [‰]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
9.20	10.1	17/395	17/476	CIR	DCHA	NING	390	115	8,3	70	70
10.1	10.2	17/476	17/526	CLO	DCHA	SAL	-	-	8,3	70	70
10.2	10.3	17/526	17/669	RECTA	NING	NING	∞	0	8,3	70	70
10.3		17/669		CAMBIO DE RASANTE A 763,0 M. S. N. M.							
10.3	10.4	17/669	17/685	RECTA	NING	NING	∞	0	0,1	70	70
10.4	10.5	17/685	17/735	CLO	IZDA	ENT	-	-	0,1	70	70
10.5	10.6	17/735	17/874	CIR	IZDA	NING	298	120	0,1	70	70
10.6	10.7	17/874	17/929	CLO	IZDA	SAL	-	-	0,1	70	70
10.7	10.8	17/929	18/096	RECTA	NING	NING	∞	0	0,1	70	70
10.8	10.9	18/096	18/156	CLO	IZDA	ENT	-	-	0,1	70	70
10.9	10.10	18/156	18/209	CIR	IZDA	NING	460	110	0,1	70	70
10.10	10.11	18/209	18/269	CLO	IZDA	SAL	-	-	0,1	70	70
10.11	10.12	18/269	18/349	RECTA	NING	NING	∞	0	0,1	70	70
10.12	10.13	18/349	18/389	CLO	IZDA	ENT	-	-	0,1	70	70
10.13	10.14	18/389	18/392	CIR	IZDA	NING	500	90	0,1	70	70
10.14		18/392		CAMBIO DE RASANTE A 763,1 M. S. N. M.							
10.14	10.15	18/392	18/430	CIR	IZDA	NING	500	90	-0,5	70	70
10.15	10.16	18/430	18/470	CLO	IZDA	SAL	-	-	-0,5	70	70
10.16	10.17	18/470	18/531	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,5	70	70
10.17	10.18	18/531	18/576	CLO	DCHA	ENT	-	-	-0,5	70	70
10.18	10.19	18/576	18/637	CIR	DCHA	NING	375	100	-0,5	70	70
10.19	10.20	18/637	18/682	CLO	DCHA	SAL	-	-	-0,5	70	70
10.20	10.21	18/682	18/806	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,5	70	65
10.21	10.22	18/806	18/856	CLO	DCHA	ENT	-	-	-0,5	65	65
10.22	10.23	18/856	18/954	CIR	DCHA	NING	280	100	-0,5	65	65
10.23		18/954		CAMBIO DE RASANTE A 762,9 M. S. N. M.							
10.23	10.24	18/954	18/975	CIR	DCHA	NING	280	100	11,2	65	65
10.24	10.25	18/975	19/025	CLO	DCHA	SAL	-	-	11,2	65	65
10.25	10.26	19/025	19/104	RECTA	NING	NING	∞	0	11,2	65	70
10.26	10.27	19/104	19/164	CLO	IZDA	ENT	-	-	11,2	70	70
10.27	10.28	19/164	19/335	CIR	IZDA	NING	327	125	11,2	70	70
10.28	10.29	19/335	19/395	CLO	IZDA	SAL	-	-	11,2	70	70

Tabla V.11. Datos paramétricos del tramo XI. Alzado y planta en la figura V.11.

Punto inicial (figura V.11)	Punto final (figura V.11)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
10.29	11.1	19/395	19/464	RECTA	NING	NING	∞	0	11,2	70	70
11.1	11.2	19/464	19/486	PARACUB	DCHA	ENT	-	-	11,2	70	70
11.2		19/486		CAMBIO DE RASANTE A 768,8 M. S. N. M.							
11.2	11.3	19/486	19/514	PARACUB	DCHA	ENT	-	-	10,4	70	70
11.3	11.4	19/514	19/682	CIR	DCHA	NING	293	115	10,4	70	70
11.4	11.5	19/682	19/729	PARACUB	DCHA	SAL	-	-	10,4	70	70
11.5	11.6	19/729	19/732	RECTA	NING	NING	∞	0	10,4	70	65
11.6		19/732		CAMBIO DE RASANTE A 771,4 M. S. N. M.							
11.6	11.7	19/732	19/768	RECTA	NING	NING	∞	0	14,7	65	65
11.7	11.8	19/768	19/805	PARACUB	IZDA	ENT	-	-	14,7	65	65
11.8		19/805		CAMBIO DE RASANTE A 772,5 M. S. N. M.							
11.8	11.9	19/805	19/813	PARACUB	IZDA	ENT	-	-	0,5	65	65
11.9	11.10	19/813	20/094	CIR	IZDA	NING	275	100	0,5	65	65
11.10		20/094		CAMBIO DE RASANTE A 772,6 M. S. N. M.							
11.10	11.11	20/094	20/372	CIR	IZDA	NING	275	100	9,3	65	65
11.11	11.12	20/372	20/408	PARACUB	IZDA	SAL	-	-	9,3	65	65
11.12	11.13	20/408	20/518	RECTA	NING	NING	∞	0	9,3	65	70
11.13	11.14	20/518	20/578	CLO	DCHA	ENT	-	-	9,3	70	70
11.14	11.15	20/578	20/623	CIR	DCHA	NING	265	140	9,3	70	70
11.15	11.16	20/623	20/626	CLO	DCHA	SAL	-	-	9,3	70	70
11.16		20/626		CAMBIO DE RASANTE A 777,6 M. S. N. M.							
11.16	11.17	20/626	20/690	CLO	DCHA	SAL	-	-	8,3	70	70
11.17	11.18	20/690	20/743	RECTA	NING	NING	∞	0	8,3	70	70
11.18	11.19	20/743	20/818	CLO	IZDA	ENT	-	-	8,3	70	70
11.19	11.20	20/818	20/869	CIR	IZDA	NING	288	154	8,3	70	70
11.20	11.21	20/869	20/974	CLO	IZDA	SAL	-	-	8,3	70	70
11.21	11.22	20/974	21/214	RECTA	NING	NING	∞	0	8,3	70	70
11.22	11.23	21/214	21/218	CIR	IZDA	NING	50.000	0	8,3	70	70
11.23	11.24	21/218	21/294	RECTA	NING	NING	∞	0	8,3	70	70
11.24		21/294		CAMBIO DE RASANTE A 783,1 M. S. N. M.							

Tabla V.12. Datos paramétricos del tramo XII. Alzado y planta en la figura V.12.

Punto inicial (figura V.12)	Punto final (figura V.12)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
11.24	12.1	21/294	21/642	RECTA	NING	NING	∞	0	0,0	70	70
12.1	12.2	21/642	21/757	ANDÉN DE LA ESTACIÓN DE MILBELLO - MITAD DE LA LÍNEA - 783,1 M. S. N. M. (RECTA HORIZONTAL)							
12.2	12.3	21/757	21/887	RECTA	NING	NING	∞	0	0,0	70	85
12.3		21/887		CAMBIO DE RASANTE A 783,1 M. S. N. M.							
12.3	12.4	21/887	22/054	RECTA	NING	NING	∞	0	14,7	85	85
12.4	12.5	22/054	22/114	CLO	DCHA	ENT	-	-	14,7	85	85
12.5	12.6	22/114	22/173	CIR	DCHA	NING	1.000	62	14,7	85	85
12.6	12.7	22/173	22/233	CLO	DCHA	SAL	-	-	14,7	85	85
12.7	12.8	22/233	22/390	RECTA	NING	NING	∞	0	14,7	85	85
12.8	12.9	22/390	22/420	CLO	IZDA	ENT	-	-	14,7	85	85
12.9	12.10	22/420	22/496	CIR	IZDA	NING	2.000	32	14,7	85	85
12.10	12.11	22/496	22/526	CLO	IZDA	SAL	-	-	14,7	85	85
12.11	12.12	22/526	22/619	RECTA	NING	NING	∞	0	14,7	85	85
12.12		22/619		CAMBIO DE RASANTE A 793,9 M. S. N. M.							
12.12	12.13	22/619	23/282	RECTA	NING	NING	∞	0	5,3	85	85
12.13	12.14	23/282	23/368	CLO	DCHA	ENT	-	-	5,3	85	85

Nota al pie de tabla: En la estación de Milbello está permitido circular a 70 km/h por la vía general, incluso aunque haya viajeros en el andén (quienes deberán situarse tras la franja amarilla por seguridad). Si se desea programar una parada en esta estación para el intercambio de mercancías, entonces el tren deberá ingresar a la estación a una velocidad baja (20 km/h) para poder llegar a 0 km/h a la mitad de la vía lateral y deberá abandonar la estación a la misma velocidad que la de ingreso. Las reducciones y aumentos de velocidad previstos en esta situación son:

- ✓ Reducción de 70 a 50 km/h en el subtramo 11.23 – 11.24.
- ✓ Reducción de 50 a 20 km/h en el subtramo 11.24 – 12.1.
- ✓ Aumento de 20 a 40 km/h en el subtramo 12.2 – 12.3.
- ✓ Aumento de 40 a 85 km/h en el subtramo 12.3 – 12.4.

Tabla V.13. Datos paramétricos del tramo XIII. Alzado y planta en la figura V.13.

Punto inicial (figura V.13)	Punto final (figura V.13)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
12.14	13.1	23/368	23/511	CIR	DCHA	NING	475	120	5,3	85	85
13.1	13.2	23/511	23/596	CLO	DCHA	SAL	-	-	5,3	85	85
13.2	13.3	23/596	23/772	RECTA	NING	NING	∞	0	5,3	85	85
13.3	13.4	23/772	23/817	PARACUAD	IZDA	ENT	-	-	5,3	85	85
13.4	13.5	23/817	24/127	CIR	IZDA	NING	439	110	5,3	85	85
13.5	13.6	24/127	24/169	PARACUAD	IZDA	SAL	-	-	5,3	85	85
13.6	13.7	24/169	24/173	PARACUAD	IZDA	SAL	-	-	8,8	85	85
13.7	13.8	24/173	24/617	RECTA	NING	NING	∞	0	8,8	85	85
13.8	13.9	24/617	24/879	RECTA	NING	NING	∞	0	9,8	85	85
13.9	13.10	24/879	25/265	RECTA	NING	NING	∞	0	8,5	85	85
13.10	13.11	25/265	25/296	CIR	IZDA	NING	50.000	0	8,5	85	85
13.11	13.12	25/296	25/350	RECTA	NING	NING	∞	0	8,5	85	85
13.12		25/350									

Tabla V.14. Datos paramétricos del tramo XIV. Alzado y planta en la figura V.14.

Punto inicial (figura V.14)	Punto final (figura V.14)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
13.12	14.1	25/350	25/456	RECTA	NING	NING	∞	0	11,5	85	85
14.1	14.2	25/456	25/528	RECTA	NING	NING	∞	0	12,5	85	70
14.2	14.3	25/528	25/586	CLO	IZDA	ENT	-	-	12,5	70	70
14.3	14.4	25/586	25/598	CLO	IZDA	ENT	-	-	10,4	70	70
14.4	14.5	25/598	25/733	CIR	IZDA	NING	272	140	10,4	70	70
14.5	14.6	25/733	25/803	CLO	IZDA	SAL	-	-	10,4	70	70
14.6	14.7	25/803	25/810	RECTA	NING	NING	∞	0	10,4	70	70
14.7	14.8	25/810	25/945	RECTA	NING	NING	∞	0	7,9	70	70
14.8	14.9	25/945	26/005	CLO	DCHA	ENT	-	-	7,9	70	70
14.9	14.10	26/005	26/143	CIR	DCHA	NING	277	140	7,9	70	70
14.10	14.11	26/143	26/146	CLO	DCHA	SAL	-	-	7,9	70	70
14.11	14.12	26/146	26/216	CLO	DCHA	SAL	-	-	12,1	70	70
14.12	14.13	26/216	26/515	RECTA	NING	NING	∞	0	12,1	70	85
14.13	14.14	26/515	26/959	RECTA	NING	NING	∞	0	12,7	85	85
14.14	14.15	26/959	27/372	RECTA	NING	NING	∞	0	12,5	85	85
14.15		27/372									

Tabla V.15. Datos paramétricos del tramo XV. Alzado y planta en la figura V.15.

Punto inicial (figura V.15)	Punto final (figura V.15)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
14.15	15.1	27/372	27/489	RECTA	NING	NING	∞	0	6,2	85	85
15.1	15.2	27/489	27/569	CLO	IZDA	ENT	-	-	6,2	85	85
15.2	15.3	27/569	27/745	CIR	IZDA	NING	1.850	20	6,2	85	85
15.3	15.4	27/745	27/825	CLO	IZDA	SAL	-	-	6,2	85	85
15.4	15.5	27/825	28/753	RECTA	NING	NING	∞	0	6,2	85	85
15.5		28/753									

Tabla V.16. Datos paramétricos del tramo XVI. Alzado y planta en la figura V.16.

Punto inicial (figura V.16)	Punto final (figura V.16)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
15.5	16.1	28/753	29/880	RECTA	NING	NING	∞	0	9,3	85	85
16.1	16.2	29/880	30/316	RECTA	NING	NING	∞	0	11,5	85	85
16.2	16.3	30/316	30/356	PARACUB	DCHA	ENT	-	-	11,5	85	85
16.3	16.4	30/356	30/959	CIR	DCHA	NING	894	70	11,5	85	85
16.4	16.5	30/959	31/014	PARACUB	DCHA	SAL	-	-	11,5	85	85
16.5	16.6	31/014	31/182	RECTA	NING	NING	∞	0	11,5	85	85
16.6		31/182									

Tabla V.17. Datos paramétricos del tramo XVII. Alzado y planta en la figura V.17.

Punto inicial (figura V.17)	Punto final (figura V.17)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
16.6	17.1	31/182	31/525	RECTA	NING	NING	∞	0	1,2	85	70
17.1		31/525		CAMBIO DE RASANTE A 870,3 M. S. N. M.							
17.1	17.2	31/525	31/726	RECTA	NING	NING	∞	0	-17,1	70	70
17.2	17.3	31/726	31/820	CLO	IZDA	ENT	-	-	-17,1	70	70
17.3	17.4	31/820	32/034	CIR	IZDA	NING	490	100	-17,1	70	70
17.4	17.5	32/034	32/094	CLO	IZDA	SAL	-	-	-17,1	70	70
17.5	17.6	32/094	32/110	RECTA	NING	NING	∞	0	-17,1	70	70
17.6		32/110		CAMBIO DE RASANTE A 860,3 M. S. N. M.							
17.6	17.7	32/110	32/193	RECTA	NING	NING	∞	0	-15,1	70	70
17.7	17.8	32/193	32/243	CLO	DCHA	ENT	-	-	-15,1	70	70
17.8	17.9	32/243	32/376	CIR	DCHA	NING	291	120	-15,1	70	70
17.9		32/376		CAMBIO DE RASANTE A 856,3 M. S. N. M.							
17.9	17.10	32/376	32/412	CIR	DCHA	NING	291	120	-16,5	70	70
17.10	17.11	32/412	32/462	CLO	DCHA	SAL	-	-	-16,5	70	70
17.11	17.12	32/462	32/801	RECTA	NING	NING	∞	0	-16,5	70	70
17.12		32/801		CAMBIO DE RASANTE A 849,2 M. S. N. M.							
17.12	17.13	32/801	32/851	RECTA	NING	NING	∞	0	0,5	70	70
17.13	17.14	32/851	32/870	CIR	IZDA	NING	50.000	0	0,5	70	70
17.14	17.15	32/870	32/894	RECTA	NING	NING	∞	0	0,5	70	70
17.15		32/894		CAMBIO DE RASANTE A 849,3 M. S. N. M.							
17.15	17.16	32/894	32/948	RECTA	NING	NING	∞	0	3,4	70	70
17.16	17.17	32/948	33/018	PARACUAD	IZDA	ENT	-	-	3,4	70	70
17.17	17.18	33/018	33/046	CIR	IZDA	NING	307	110	3,4	70	70
17.18		33/046		CAMBIO DE RASANTE A 849,8 M. S. N. M.							
17.18	17.19	33/046	33/194	CIR	IZDA	NING	307	110	-12,1	70	70
17.19	17.20	33/194	33/242	PARACUAD	IZDA	SAL	-	-	-12,1	70	70

Tabla V.18. Datos paramétricos del tramo XVIII. Alzado y planta en la figura V.18.

Punto inicial (figura V.18)	Punto final (figura V.18)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [%]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
17.20	18.1	33/242	33/464	RECTA	NING	NING	∞	0	-12,1	70	70
18.1	18.2	33/464	33/500	CLO	DCHA	ENT	-	-	-12,1	70	70
18.2		33/500		CAMBIO DE RASANTE A 844,3 M. S. N. M.							
18.2	18.3	33/500	33/534	CLO	DCHA	ENT	-	-	-15,2	70	70
18.3	18.4	33/534	33/616	CIR	DCHA	NING	350	160	-15,2	70	70
18.4	18.5	33/616	33/686	CLO	DCHA	SAL	-	-	-15,2	70	70
18.5	18.6	33/686	33/752	RECTA	NING	NING	∞	0	-15,2	70	70
18.6		33/752		CAMBIO DE RASANTE A 840,5 M. S. N. M.							
18.6	18.7	33/752	33/975	RECTA	NING	NING	∞	0	-12,1	70	70
18.7	18.8	33/975	34/025	CLO	IZDA	ENT	-	-	-12,1	70	70
18.8	18.9	34/025	34/049	CIR	IZDA	NING	886	50	70	70	
18.9		34/049		CAMBIO DE RASANTE A 836,9 M. S. N. M.							
18.9	18.10	34/049	34/166	CIR	IZDA	NING	886	50	-3,1	70	70
18.10	18.11	34/166	34/217	CLO	IZDA	SAL	-	-	-3,1	70	70
18.11		34/217		CAMBIO DE RASANTE A 836,4 M. S. N. M.							
18.11	18.12	34/217	34/236	CLO	IZDA	SAL	-	-	-14,9	70	70
18.12	18.13	34/236	34/505	RECTA	NING	NING	∞	0	-14,9	70	70
18.13	18.14	34/505	34/545	CLO	DCHA	ENT	-	-	-14,9	70	70
18.14	18.15	34/545	34/580	CIR	DCHA	NING	1.000	40	-14,9	70	70
18.15		34/580		CAMBIO DE RASANTE A 831,0 M. S. N. M.							
18.15	18.16	34/580	34/605	CIR	DCHA	NING	1.000	40	1,1	70	70
18.16	18.17	34/605	34/645	CLO	DCHA	SAL	-	-	1,1	70	70
18.17	18.18	34/645	34/927	RECTA	NING	NING	∞	0	1,1	70	70
18.18	18.19	34/927	34/982	PARACUB	IZDA	ENT	-	-	1,1	70	70
18.19	18.20	34/982	35/043	CIR	IZDA	NING	270	134	1,1	70	70
18.20		35/043		CAMBIO DE RASANTE A 831,5 M. S. N. M.							
18.20	18.21	35/043	35/238	CIR	IZDA	NING	270	134	-1,5	70	70
18.21		35/238		CAMBIO DE RASANTE A 831,2 M. S. N. M.							
18.21	18.22	35/238	35/293	CIR	IZDA	NING	270	134	0,1	70	70
18.22	18.23	35/293	35/347	PARACUB	IZDA	SAL	-	-	0,1	70	70
18.23	18.24	35/347	35/413	RECTA	NING	NING	∞	0	0,1	70	70

Tabla V.19. Datos paramétricos del tramo XIX. Alzado y planta en la figura V.19.

Punto inicial (figura V.19)	Punto final (figura V.19)	P. K. inicial [km]	P. K. final [km]	Tipo de alineación	Sentido de la curva	Movimiento en la curva	Radio de la curva [m]	Peralte [mm]	Inclinación [‰]	Velocidad inicial [km/h]	Velocidad final [km/h]
18.24	19.1	35/413	35/493	CLO	DCHA	ENT	-	-	0,1	70	70
19.1	19.2	35/493	35/560	CIR	DCHA	NING	290	155	0,1	70	70
19.2		35/560		CAMBIO DE RASANTE A 831,2 M. S. N. M.							
19.2	19.3	35/560	35/645	CIR	DCHA	NING	290	155	-3,1	70	70
19.3	19.4	35/645	35/672	CLO	DCHA	SAL	-	-	-3,1	70	70
19.4		35/672		CAMBIO DE RASANTE A 830,9 M. S. N. M.							
19.4	19.5	35/672	35/725	CLO	DCHA	SAL	-	-	1,2	70	70
19.5	19.6	35/725	36/038	RECTA	NING	NING	∞	0	1,2	70	70
19.6	19.7	36/038	36/098	CLO	DCHA	ENT	-	-	1,2	70	70
19.7		36/098		CAMBIO DE RASANTE A 831,4 M. S. N. M.							
19.7	19.8	36/098	36/108	CLO	DCHA	ENT	-	-	-0,6	70	70
19.8	19.9	36/108	36/204	CIR	DCHA	NING	280	160	-0,6	70	70
19.9	19.10	36/204	36/274	CLO	DCHA	SAL	-	-	-0,6	70	70
19.10	19.11	36/274	36/359	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,6	70	70
19.11	19.12	36/359	36/409	CLO	IZDA	ENT	-	-	-0,6	70	70
19.12	19.13	36/409	36/445	CIR	IZDA	NING	390	120	-0,6	70	70
19.13	19.14	36/445	36/495	CLO	IZDA	SAL	-	-	-0,6	70	70
19.14	19.15	36/495	36/578	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,6	70	70
19.15		36/578		CAMBIO DE RASANTE A 831,1 M. S. N. M.							
19.15	19.16	36/578	36/590	RECTA	NING	NING	∞	0	0,4	70	70
19.16	19.17	36/590	36/645	CLO	DCHA	ENT	-	-	0,4	70	70
19.17	19.18	36/645	36/842	CIR	DCHA	NING	477	120	0,4	70	70
19.18		36/842		CAMBIO DE RASANTE A 831,2 M. S. N. M.							
19.18	19.19	36/842	36/866	CIR	DCHA	NING	477	120	0,0	70	70
19.19	19.20	36/866	36/871	CLO	DCHA	SAL	-	-	0,0	70	70
19.20	19.21	36/871	37/076	RECTA	NING	NING	∞	0	0,0	70	70
19.21		37/076		CAMBIO DE RASANTE A 831,2 M. S. N. M.							
19.21	19.22	37/076	37/229	RECTA	NING	NING	∞	0	0,6	70	60
19.22		37/229		CAMBIO DE RASANTE A 831,3 M. S. N. M.							
19.22	19.23	37/229	37/240	RECTA	NING	NING	∞	0	-0,9	60	60
19.23	19.24	37/240	37/262	CLO	IZDA	ENT	-	-	-0,9	60	60
19.24	19.25	37/262	37/329	CIR	IZDA	NING	800	60	-0,9	60	60
19.25		37/329		CAMBIO DE RASANTE A 831,2 M. S. N. M.							
19.25	19.26	37/329	37/346	CIR	IZDA	NING	800	60	-2,5	60	60
19.26	19.27	37/346	37/366	CLO	IZDA	SAL	-	-	-2,5	60	60
19.27	19.28	37/366	37/636	RECTA	NING	NING	∞	0	-2,5	60	35
19.28		37/636		PRINCIPIO DEL ANDÉN DE LA ESTACIÓN DE ZACARÍN - FINAL DE LA LÍNEA - 831,0 M. S. N. M.							

V.5. Tratamiento computacional de los datos paramétricos.

Por último, en esta sección se aborda cómo realizar el tratamiento computacional de los datos paramétricos. Estos datos deberán ser introducidos en el EES, pero no mediante las 19 tablas creadas, sino mediante una única tabla más simple y con todos los datos alfanuméricos (el EES no admite símbolos como “∞” o “-”) y con un separador decimal convencional (no sirve la barra oblicua).

Por otro lado, ha de tenerse en cuenta que no tiene sentido tabular aquello que se puede calcular inmediatamente por vía de una fórmula. Por ello, se desarrollarán nuevas fórmulas.

V.5.1. Creación de una tabla unificada.

Para la creación de una tabla unificada se toman las siguientes medidas con respecto a las 19 tablas:

1. Eliminación de los puntos *N.M*, que no aportan nada al cálculo del desgaste.
2. Muestra de los puntos kilométricos con el separador decimal convencional utilizado en España, que es la coma (”,”).
3. Multiplicación de los puntos kilométricos por 1.000 para convertir las unidades a [m]. Esto facilitará la lectura de los puntos, que pueden ser rebautizados como puntos métricos.
4. Eliminación de las filas correspondientes a los vértices y las estaciones, ya que su información (sus cotas, básicamente) no contribuye al cómputo del desgaste. Como única excepción está la estación de Milbello, cuyo andén se modela como una alineación recta.
5. Asignación de un radio de curvatura falso a las rectas, ya que el programa no comprende el símbolo “∞”. Este radio falso es 50.000.000 m (1.000 veces más que los repetidos 50.000 m).
6. Asignación de un radio de curvatura a las curvas de transición. No el radio promedio, que no es útil para los cálculos, sino el radio con el cual enlaza con la curva circular: R_L si la curva es de tipo I y R_o si es de tipo II (recuérdese que el radio de una curva de tipo I varía entre ∞ y R_L y que el radio de una curva de tipo II lo hace entre R_o e ∞, tal como aparece en la figura I.17 de la [subsección I.4.2](#); cumpliéndose además $R_L = R = R_o$, donde R es el radio de la curva circular concomitante).
7. Cálculo del peralte promedio en las curvas de transición por medio del procedimiento descrito en la [parte I.5.4.4](#) y haciendo uso de las ecuaciones I.198 – I.202 (véanse debajo los procedimientos realizados).
8. Selección del parámetro $R_{L/2}$ para todas las parábolas cuadráticas del trazado, lo cual se realizará junto con el cálculo del peralte promedio, ya que así se podrá evaluar cuál valor de $R_{L/2}$ es el más conveniente.

9. Unión de las de las curvas de transición partidas en dos subtramos, puesto que, como consecuencia de la formulación matemática aplicada en las curvas de transición (cálculo de valores promedio de las diferentes funciones), una curva de transición no se puede dividir en subtramos. Es decir, no se puede tener una parte de la curva con una inclinación y otra parte con una inclinación diferente. La solución a esto consiste en hallar la inclinación equivalente para toda la curva (véase debajo la ecuación que solventa este problema).

V.5.1.1. Obtención del peralte promedio y selección de $R_{L/2}$ para las parábolas cuadráticas.

Para la obtención del peralte promedio basta con seguir el procedimiento descrito en [parte I.5.4.4](#) y hacer uso de las ecuaciones I.198 – I.202. Para la clotoide y la parábola cúbica se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\bar{h}_r (\text{transición})}{h_r (\text{circular})} = \frac{\bar{1}}{\frac{1}{R}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Clotoide} \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipo I} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{1}{2} \\ h_r = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 1}] \\ \text{Tipo II} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{1}{2} \\ h_r = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 2}] \end{array} \right. \\ \text{Paráb. cúb.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipo I} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{1}{4} \\ h_r = \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 3}] \\ \text{Tipo II} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{3}{4} \\ h_r = \frac{3}{4} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 4}] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

En el caso de la parábola cuadrática se requiere de un parámetro adicional para alcanzar el resultado. Este parámetro es el radio a la mitad de la longitud de la curva de transición, denotado $R_{L/2}$, y es el que define la evolución de la parábola. Abajo se muestra cuánto vale la ratio \bar{h}_r/h_r para diferentes valores de $R_{L/2}$:

$$\text{Paráb. cuad.} \left\{ \begin{array}{l} R_{L/2} = 2R_{L|o} \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipo I} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{1}{2} \\ h_r = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 5}] \\ \text{Tipo II} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{1}{2} \\ h_r = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 6}] \end{array} \right. \\ R_{L/2} = 3R_{L|o} \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipo I} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{7}{18} \\ h_r = \frac{7}{18} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 7}] \\ \text{Tipo II} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{11}{18} \\ h_r = \frac{11}{18} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 8}] \end{array} \right. \\ R_{L/2} = 4R_{L|o} \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipo I} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{1}{3} \\ h_r = \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 9}] \\ \text{Tipo II} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{2}{3} \\ h_r = \frac{2}{3} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 10}] \end{array} \right. \\ R_{L/2} = 5R_{L|o} \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipo I} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{3}{10} \\ h_r = \frac{3}{10} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 11}] \\ \text{Tipo II} \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_r = \frac{7}{10} \\ h_r = \frac{7}{10} \end{array} \right. \quad [\text{Ec. V. 12}] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Como se puede apreciar, cuando $R_{L/2} = 2R_{L|0}$ el comportamiento es idéntico al de la clotoide, lo cual es debido a que en una clotoide se tiene una evolución lineal de la función $1/R(x)$ y entonces el radio en la mitad de su recorrido es el doble que su radio final (R_L , curva de tipo I) o su radio original (R_0 , curva de tipo II).

En cambio, conforme se incrementa el valor de $R_{L/2}$ el comportamiento se va aproximando cada vez más a de la parábola cúbica, a juzgar por las fracciones obtenidas. De hecho, cuando $R_{L/2} = 8R_{L|0}$ sucede que la parábola cuadrática se comporta como una cúbica.

En definitiva, el valor de $R_{L/2}$ que se va a aplicar a todas las parábolas cuadráticas (por lo que se va a tratar como una constante que no se va a tabular) es $R_{L/2} = 4R_{L|0}$, ya que por un lado el comportamiento obtenido no dista mucho de aquel de la clotoide y la transición que consigue la curva es suave; mientras que por otro lado el tratamiento matemático de la curva se simplifica, pues los coeficientes d_1 y d_2 adquieren estos valores:

$$\begin{cases} d_1 = 0 & [Ec. V. 13] \\ d_2 = \frac{1}{R_{L|0}} & [Ec. V. 14] \end{cases}$$

V.5.1.2. Unión de las curvas de transición partidas en dos subtramos.

Algunas curvas de transición se muestran divididas en dos subtramos en algunas filas las 19 tablas arriba mostradas por culpa de un cambio de rasante intermedio. Por ello, estas curvas poseen un subtramo L_1 [m] con una inclinación i_1 [‰] y otro subtramo L_2 [m] con una inclinación i_2 [‰]. Un ejemplo de esto se encuentra, por ejemplo, en la tabla V.3 (subtramos 3.17 – 3.18 y 3.18 – 3.19).

Definiendo una inclinación equivalente i_{eq} [‰] para toda la curva es posible unir ambos subtramos, obteniendo así una curva equivalente de longitud $L_1 + L_2$ e inclinación i_{eq} :

$$i_{eq} = \frac{L_1 i_1 + L_2 i_2}{L_1 + L_2} \quad [Ec. V. 15]$$

V.5.2. Desarrollo de nuevas ecuaciones.

Hay parámetros que se pueden calcular a través de ecuaciones que los ligen con parámetros tabulados, por lo que no es preciso tabularlos. Esto sucede con la longitud de cada subtramo, con la longitud que recorre cada rueda (las ruedas externas a las curvas realizan un recorrido mayor debido a la curvatura) y con la velocidad del vehículo en cada subtramo.

V.5.2.1 Longitud de cada subtramo.

La longitud L [m] de cada subtramo se puede calcular mediante la resta de dos columnas de las tablas/la tabla definitiva:

$$L = Q_f - Q_i \quad [Ec.V.16]$$

donde Q_f [m] es el punto métrico final y Q_i [m] el inicial. La letra Q procede de la palabra “quilométrico”, que es una grafía alternativa de “kilométrico”, si bien ahora se está hablando de puntos métricos en vez de quilométricos.

Esta longitud de cada subtramo se corresponde con la longitud del eje de la vía, la cual no coincide con la longitud que recorre la rueda externa en las curvas (L_e [m]) ni con la longitud que recorre la interna en las curvas (L_i [m]). Como el radio de curvatura interno R_i [m] es menor que el externo R_e [m], entonces se tiene $L_i < L_e$.

V.5.2.2. Longitud recorrida por la rueda externa y por la interna.

Por su parte, el radio tabulado R [m] es el que une el CIR/EIR con el eje de la vía, por lo que está a medio camino entre R_i y R_e . Es decir, $R_e > R > R_i$ y, como consecuencia de esto, $L_e > L > L_i$. A continuación, van a desarrollarse las ecuaciones precisas para ligar R (tabulado) y L (no tabulado, pero computable a través de la ecuación V.16) con L_e (no tabulado) y con L_i (no tabulado):

Sea una circular de radio R en la cual se describe un giro θ_c [rad], la longitud L de la porción girada (longitud medida en el eje de la curva) es:

$$L = R\theta_c \quad [Ec.V.17]$$

Y las longitudes L_i y L_e , con el mismo ángulo de giro:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_i = R_i\theta_c \\ L_e = R_e\theta_c \end{array} \right. \quad [Ec.V.18]$$

$$\quad \quad \quad [Ec.V.19]$$

Despejando θ_c de la ecuación V.17 e insertándolas en las ecuaciones V.18 y V.19 se obtiene lo que sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_i = \frac{R_i}{R}L \\ L_e = \frac{R_e}{R}L \end{array} \right. \quad [Ec.V.20]$$

$$\quad \quad \quad [Ec.V.21]$$

Como se puede observar, ha quedado todo en función de las ratios R_i/R y R_e/R . Los radios R_e y R_i se pueden eliminar si se relacionan con R a través del parámetro b_o (véase este en la [subsección I.4.1](#)):

$$\left\{ \begin{array}{l} R_i = R + b_o \\ R_e = R - b_o \end{array} \right. \quad [Ec.V.22]$$

$$\quad \quad \quad [Ec.V.23]$$

Insertando estas dos últimas ecuaciones en las ecuaciones V.20 y V.21 se llega a la solución buscada:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_i = \left(1 - \frac{b_o}{R}\right)L \\ L_e = \left(1 + \frac{b_o}{R}\right)L \end{array} \right. \quad [Ec.V.24]$$

$$\quad \quad \quad [Ec.V.25]$$

Esto se ha planteado para una curva circular, por lo que falta extrapolarlo para una curva de transición. En una curva de transición se tendrá, utilizando el radio inverso promedio $\overline{1/R}$ que ya fue empleado en la [parte V.5.1.1](#):

$$\begin{cases} L_i = \left(1 - b_o \frac{\overline{1}}{R}\right) L & [Ec. V. 26] \\ L_e = \left(1 + b_o \frac{\overline{1}}{R}\right) L & [Ec. V. 27] \end{cases}$$

El valor de $\overline{1/R}$ ya se calculó en la [parte V.5.1.2](#) porque forma parte de la ratio $\overline{h_r}/h_r$. Abajo se recogen sus valores para cada caso (recuérdese que para las parábolas cuadráticas del trazado se ha seleccionado $R_{L/2} = 4R_{L|o}$):

$$\begin{cases} \text{Clotoide} & \begin{cases} \text{Tipo I} & \left\{ \frac{\overline{1}}{R} = \frac{1}{2R_L} \right. & [Ec. V. 28] \\ \text{Tipo II} & \left\{ \frac{\overline{1}}{R} = \frac{1}{2R_o} \right. & [Ec. V. 29] \end{cases} \\ \text{Paráb. cuad.} & \begin{cases} \text{Tipo I} & \left\{ \frac{\overline{1}}{R} = \frac{1}{3R_L} \right. & [Ec. V. 30] \\ \text{Tipo II} & \left\{ \frac{\overline{1}}{R} = \frac{2}{3R_o} \right. & [Ec. V. 31] \end{cases} \\ \text{Paráb. cúb.} & \begin{cases} \text{Tipo I} & \left\{ \frac{\overline{1}}{R} = \frac{1}{4R_L} \right. & [Ec. V. 32] \\ \text{Tipo II} & \left\{ \frac{\overline{h_r}}{h_r} = \frac{3}{4R_o} \right. & [Ec. V. 33] \end{cases} \end{cases}$$

A la luz de estos resultados puede concluirse que el término $b_o \overline{1/R}$ se torna menos relevante cuanto mayor es el grado de la curva y L_i es más similar a L_e en consecuencia. Esto es lógico, ya que cuanto mayor es el grado de la curva matemática, la porción de la curva física con radios grandes (ceranos al infinito) es mayor y debe considerarse que se tiene $L_e = L_i$ cuando $R \rightarrow \infty$.

V.5.2.3. Velocidad del vehículo en cada subtramo.

Las tablas/la tabla definitiva no contiene la velocidad exacta del vehículo (V [m/s]) en cada subtramo, sino que únicamente informa de los límites de velocidad en cada subtramo, tanto donde comienza el subtramo como donde finaliza dicho subtramo (V_i y V_f , respectivamente).

Lo que se propone es obtener un valor promedio de V cuando $V_i \neq V_f$ (cuando el vehículo debe acelerar o frenar para respetar los límites de velocidad) e igualar V a V_i (o, indistintamente, V_f) cuando $V_i = V_f$. Matemáticamente:

$$\begin{cases} V = V_i, & V_i = V_f & [Ec. V. 34] \\ \bar{V} = \frac{V_i + V_f}{2}, & V_i \neq V_f & [Ec. V. 35] \end{cases}$$

V.5.3. Tabla finalmente introducida en el EES.

Finalmente, se muestra la tabla finalmente introducida en el EES, que es una tabla con 333 filas, pero minimalista en comparación con las 19 tablas anteriormente expuestas. Las variables que muestra esta tabla son, de izquierda a derecha:

1. Punto métrico inicial Q_1 [m].
2. Punto métrico final Q_2 [m].
3. Tipo de alineación (RECTA, CLO, PARACUAD o PARACUB).
4. Sentido de la curva (NING, DCHA, IZDA).
5. Movimiento en la curva (NING, ENT, SAL).
6. Radio generalizado de la curva R_{gen} [m].
7. Peralte promedio $\overline{h_r}$ [mm].
8. Inclinación i [%].
9. Velocidad inicial V_i [km/h].
10. Velocidad final V_f [km/h].

Nota: R_{gen} deberá interpretarse tal que así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Circular} \rightarrow R_{gen} = R \quad [Ec.V.36] \\ \text{Transición} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipo I} \rightarrow R_{gen} = R_L \quad [Ec.V.37] \\ \text{Tipo II} \rightarrow R_{gen} = R_o \quad [Ec.V.38] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dicho esto, la tabla obtenida es la que se presenta a lo largo de las siguientes páginas (60 filas en cada una de las 5 primeras páginas y 33 filas en la última página). La cabecera de la tabla se ha repetido en cada página para facilitar la lectura de las variables y conocer sus unidades con celeridad:

Tabla V.20. Tabla finalmente introducida en el EES.

1.333	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Q_{in} [m]	Q_f [m]	TCS	SCS	POSS	R [m]	h_r [mm]	i [mm/m]	V_{in} [km/h]	V_{fn} [km/h]
Run 1	0	38	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0	35	50
Run 2	38	107	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	4,5	50	70
Run 3	107	187	CLO	DCHA	ENT	293	60	4,5	70	70
Run 4	187	205	CIR	DCHA	NING	293	120	4,5	70	70
Run 5	205	384	CIR	DCHA	NING	293	120	-0,4	70	70
Run 6	384	444	CLO	DCHA	SAL	293	60	-0,4	70	70
Run 7	444	580	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,4	70	60
Run 8	580	595	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-2,1	60	60
Run 9	595	635	CLO	IZDA	ENT	272	40	-2,1	60	60
Run 10	635	733	CIR	IZDA	NING	272	80	-2,1	60	60
Run 11	733	773	CLO	IZDA	SAL	272	40	-2,1	60	60
Run 12	773	779	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-2,1	60	60
Run 13	779	953	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,1	60	70
Run 14	953	975	CIR	DCHA	NING	50000	0	0,1	70	70
Run 15	975	1036	CIR	DCHA	NING	50000	0	16,1	70	70
Run 16	1036	1060	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	16,1	70	70
Run 17	1060	1130	CLO	DCHA	ENT	428	75	16,1	70	70
Run 18	1130	1217	CIR	DCHA	NING	428	150	16,1	70	70
Run 19	1217	1287	CLO	DCHA	SAL	428	75	16,1	70	70
Run 20	1287	1319	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	16,1	70	70
Run 21	1319	1821	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	15,4	70	70
Run 22	1821	2149	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,2	70	70
Run 23	2149	2259	CLO	IZDA	ENT	900	75	-0,2	70	70
Run 24	2259	2382	CIR	IZDA	NING	900	150	-0,2	70	70
Run 25	2382	2492	CLO	IZDA	SAL	900	75	-0,2	70	70
Run 26	2492	2729	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,2	70	70
Run 27	2729	2893	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	15,8	70	70
Run 28	2893	2953	CLO	IZDA	ENT	360	70	15,8	70	70
Run 29	2953	3030	CIR	IZDA	NING	360	140	15,8	70	70
Run 30	3030	3055	CIR	IZDA	NING	360	140	14,9	70	70
Run 31	3055	3115	CLO	IZDA	SAL	360	70	14,9	70	70
Run 32	3115	3187	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	14,9	70	65
Run 33	3187	3227	CLO	IZDA	ENT	306	40	14,9	65	65
Run 34	3227	3255	CIR	IZDA	NING	306	80	14,9	65	65
Run 35	3255	3290	CLO	IZDA	SAL	306	40	14,9	65	65
Run 36	3290	3656	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	14,9	65	65
Run 37	3656	3694	CLO	DCHA	ENT	280	45	14,9	65	65
Run 38	3694	3726	CIR	DCHA	NING	280	90	14,9	65	65
Run 39	3726	3764	CLO	DCHA	SAL	280	45	14,9	65	65
Run 40	3764	3876	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	14,9	65	65
Run 41	3876	3924	PARACUAD	IZDA	ENT	268	35	14,9	65	65
Run 42	3924	3936	CIR	IZDA	NING	268	106	14,9	65	65
Run 43	3936	4176	CIR	IZDA	NING	268	106	15,7	65	65
Run 44	4176	4244	PARACUAD	IZDA	SAL	268	71	15,7	65	65
Run 45	4244	4284	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	15,7	65	65
Run 46	4284	4334	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,4	65	70
Run 47	4334	4404	CLO	DCHA	ENT	272	78	-0,4	70	70
Run 48	4404	4470	CIR	DCHA	NING	272	155	-0,4	70	70
Run 49	4470	4576	CLO	DCHA	SAL	272	78	-0,4	70	70
Run 50	4576	4658	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,4	70	70
Run 51	4658	4714	PARACUAD	IZDA	ENT	266	43	-0,4	70	70
Run 52	4714	4881	CIR	IZDA	NING	266	130	-0,4	70	70
Run 53	4881	4957	PARACUAD	IZDA	SAL	266	87	-0,1	70	70
Run 54	4957	5045	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,5	70	70
Run 55	5045	5110	CLO	DCHA	ENT	287	78	0,5	70	70
Run 56	5110	5319	CIR	DCHA	NING	287	155	0,5	70	70
Run 57	5319	5384	CLO	DCHA	SAL	287	78	0,5	70	70
Run 58	5384	5595	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,5	70	70
Run 59	5595	5617	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	4,7	70	70
Run 60	5617	5682	CLO	DCHA	ENT	475	78	4,7	70	70

1.333	1 Q _{in} [m]	2 Q _f [m]	3 TCS	4 SCS	5 POSS	6 R [m]	7 h _r [mm]	8 i [mm/m]	9 V _{in} [km/h]	10 V _{fn} [km/h]
Run 61	5682	5747	CIR	DCHA	NING	475	155	4,7	70	70
Run 62	5747	5812	CLO	DCHA	SAL	475	78	4,7	70	70
Run 63	5812	5978	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	4,7	70	70
Run 64	5978	6058	CLO	DCHA	ENT	498	78	4,7	70	70
Run 65	6058	6228	CIR	DCHA	NING	498	155	4,7	70	70
Run 66	6228	6308	CLO	DCHA	SAL	498	78	4,7	70	70
Run 67	6308	6812	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	4,7	70	65
Run 68	6812	6852	CLO	IZDA	ENT	290	48	4,7	65	65
Run 69	6852	6903	CIR	IZDA	NING	290	95	4,7	65	65
Run 70	6903	6943	CLO	IZDA	SAL	290	48	4,7	65	65
Run 71	6943	7034	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	4,7	65	65
Run 72	7034	7079	CLO	DCHA	ENT	290	48	4,7	65	65
Run 73	7079	7240	CIR	DCHA	NING	290	95	4,7	65	65
Run 74	7240	7285	CLO	DCHA	SAL	290	48	4,7	65	65
Run 75	7285	7401	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	4,7	65	70
Run 76	7401	7461	CLO	IZDA	ENT	350	70	4,7	70	70
Run 77	7461	7485	CIR	IZDA	NING	350	140	4,7	70	70
Run 78	7485	7501	CIR	IZDA	NING	350	140	3,4	70	70
Run 79	7501	7561	CLO	IZDA	SAL	350	70	3,4	70	70
Run 80	7561	8062	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	3,4	70	70
Run 81	8062	8162	CLO	DCHA	ENT	880	78	3,4	70	70
Run 82	8162	8270	CIR	DCHA	NING	880	155	3,4	70	70
Run 83	8270	8370	CLO	DCHA	SAL	880	78	3,4	70	70
Run 84	8370	8500	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	3,4	70	70
Run 85	8500	9224	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	7,6	70	70
Run 86	9224	9339	CLO	IZDA	ENT	1880	36	7,6	70	70
Run 87	9339	9539	CIR	IZDA	NING	1880	72	7,6	70	70
Run 88	9539	9654	CLO	IZDA	SAL	1880	36	7,7	70	70
Run 89	9654	10327	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	8,1	70	70
Run 90	10327	10387	CLO	IZDA	ENT	1000	53	8,1	70	70
Run 91	10387	10405	CIR	IZDA	NING	1000	105	9,8	70	70
Run 92	10405	10438	CIR	IZDA	NING	1000	105	10,8	70	70
Run 93	10438	10498	CLO	IZDA	SAL	1000	53	10,8	70	70
Run 94	10498	10583	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	10,8	70	70
Run 95	10583	10643	CLO	IZDA	ENT	445	70	10,8	70	70
Run 96	10643	10709	CIR	IZDA	NING	445	140	10,8	70	70
Run 97	10709	10764	CLO	IZDA	SAL	445	70	7,4	70	70
Run 98	10764	11178	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	1	70	70
Run 99	11178	11248	PARACUB	IZDA	ENT	425	40	1,7	70	70
Run 100	11248	11458	CIR	IZDA	NING	425	160	7,7	70	70
Run 101	11458	11505	PARACUB	IZDA	SAL	425	120	7,7	70	70
Run 102	11505	11675	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	7,7	70	70
Run 103	11675	11775	CLO	IZDA	ENT	525	74	7,7	70	70
Run 104	11775	11838	CIR	IZDA	NING	525	148	7,7	70	70
Run 105	11838	11938	CLO	IZDA	SAL	525	74	7,7	70	70
Run 106	11938	12114	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	7,7	70	70
Run 107	12114	12174	CLO	IZDA	ENT	307	70	7,7	70	70
Run 108	12174	12206	CIR	IZDA	NING	307	140	7,7	70	70
Run 109	12206	12266	CLO	IZDA	SAL	307	70	7,7	70	70
Run 110	12266	12559	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	7,7	70	70
Run 111	12559	12629	CLO	DCHA	ENT	500	68	7,7	70	70
Run 112	12629	12708	CIR	DCHA	NING	500	135	7,7	70	70
Run 113	12708	12779	CLO	DCHA	SAL	500	68	7,7	70	70
Run 114	12779	12786	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	7,7	70	70
Run 115	12786	12911	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	3,9	70	70
Run 116	12911	12971	CLO	IZDA	ENT	290	70	3,9	70	70
Run 117	12971	13095	CIR	IZDA	NING	290	140	3,9	70	70
Run 118	13095	13155	CLO	IZDA	SAL	290	70	3,9	70	70
Run 119	13155	13211	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	3,9	70	70
Run 120	13211	13375	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	5,6	70	70

1.333	1 Q _{in} [m]	2 Q _f [m]	3 TCS	4 SCS	5 POSS	6 R [m]	7 h _r [mm]	8 i [mm/m]	9 V _{in} [km/h]	10 V _{fn} [km/h]
Run 121	13375	13432	CLO	DCHA	ENT	290	70	5,6	70	70
Run 122	13432	13435	CIR	DCHA	NING	290	140	5,6	70	70
Run 123	13435	13477	CIR	DCHA	NING	290	140	4,3	70	70
Run 124	13477	13537	CLO	DCHA	SAL	290	70	4,3	70	70
Run 125	13537	13554	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	4,3	70	70
Run 126	13554	13818	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	4,5	70	70
Run 127	13818	13848	CLO	DCHA	ENT	1350	20	5,3	70	70
Run 128	13848	13901	CIR	DCHA	NING	1350	40	6,3	70	70
Run 129	13901	13931	CLO	DCHA	SAL	1350	20	6,3	70	70
Run 130	13931	14020	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	6,3	70	70
Run 131	14020	14039	CLO	DCHA	ENT	1480	19	6,3	70	70
Run 132	14039	14124	CIR	DCHA	NING	1480	38	6,3	70	70
Run 133	14124	14144	CLO	DCHA	SAL	1480	19	6,3	70	70
Run 134	14144	14148	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	6,3	70	70
Run 135	14148	14212	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	6	70	70
Run 136	14212	14252	CLO	DCHA	ENT	990	20	6	70	70
Run 137	14252	14414	CIR	DCHA	NING	990	40	6	70	70
Run 138	14414	14444	CLO	DCHA	SAL	990	20	6	70	70
Run 139	14444	14499	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	6	70	70
Run 140	14499	14569	CLO	DCHA	ENT	331	76	0,1	70	70
Run 141	14569	14735	CIR	DCHA	NING	331	152	-1,2	70	70
Run 142	14735	14805	CLO	DCHA	SAL	331	76	-1,2	70	70
Run 143	14805	14868	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-1,2	70	70
Run 144	14868	15128	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	14,1	70	70
Run 145	15128	15203	CLO	IZDA	ENT	490	55	15,1	70	70
Run 146	15203	15273	CIR	IZDA	NING	490	110	16,3	70	70
Run 147	15273	15338	CIR	IZDA	NING	490	110	13,8	70	70
Run 148	15338	15393	CLO	IZDA	SAL	490	55	13,8	70	70
Run 149	15393	15725	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	13,8	70	70
Run 150	15725	15946	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	15,2	70	70
Run 151	15946	16016	CLO	IZDA	ENT	380	70	7,3	70	70
Run 152	16016	16129	CIR	IZDA	NING	380	140	-0,2	70	70
Run 153	16129	16189	CLO	IZDA	SAL	380	70	-0,2	70	70
Run 154	16189	16232	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,2	70	70
Run 155	16232	16358	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-1,4	70	70
Run 156	16358	16451	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,1	70	70
Run 157	16451	16503	CLO	DCHA	ENT	285	63	-0,1	70	70
Run 158	16503	16534	CIR	DCHA	NING	285	125	-0,1	70	70
Run 159	16534	16566	CIR	DCHA	NING	285	125	4,4	70	70
Run 160	16566	16618	CLO	DCHA	SAL	285	63	4,4	70	70
Run 161	16618	16757	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	4,4	70	70
Run 162	16757	16989	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	8,3	70	70
Run 163	16989	17049	CLO	DCHA	ENT	1000	49	8,3	70	70
Run 164	17049	17153	CIR	DCHA	NING	1000	98	8,3	70	70
Run 165	17153	17213	CLO	DCHA	SAL	1000	49	8,3	70	70
Run 166	17213	17345	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	8,3	70	70
Run 167	17345	17395	CLO	DCHA	ENT	390	58	8,3	70	70
Run 168	17395	17476	CIR	DCHA	NING	390	115	8,3	70	70
Run 169	17476	17526	CLO	DCHA	SAL	390	58	8,3	70	70
Run 170	17526	17669	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	8,3	70	70
Run 171	17669	17685	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,1	70	70
Run 172	17685	17735	CLO	IZDA	ENT	298	60	0,1	70	70
Run 173	17735	17874	CIR	IZDA	NING	298	120	0,1	70	70
Run 174	17874	17929	CLO	IZDA	SAL	298	60	0,1	70	70
Run 175	17929	18096	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,1	70	70
Run 176	18096	18156	CLO	IZDA	ENT	460	55	0,1	70	70
Run 177	18156	18209	CIR	IZDA	NING	460	110	0,1	70	70
Run 178	18209	18269	CLO	IZDA	SAL	460	55	0,1	70	70
Run 179	18269	18349	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,1	70	70
Run 180	18349	18389	CLO	IZDA	ENT	500	45	0,1	70	70

1.333	1 Q _{in} [m]	2 Q _f [m]	3 TCS	4 SCS	5 POSS	6 R [m]	7 h _r [mm]	8 i [mm/m]	9 V _{in} [km/h]	10 V _{fn} [km/h]
Run 181	18389	18392	CIR	IZDA	NING	500	90	0,1	70	70
Run 182	18392	18430	CIR	IZDA	NING	500	90	-0,5	70	70
Run 183	18430	18470	CLO	IZDA	SAL	500	45	-0,5	70	70
Run 184	18470	18531	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,5	70	70
Run 185	18531	18576	CLO	DCHA	ENT	375	50	-0,5	70	70
Run 186	18576	18637	CIR	DCHA	NING	375	100	-0,5	70	70
Run 187	18637	18682	CLO	DCHA	SAL	375	50	-0,5	70	70
Run 188	18682	18806	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,5	70	65
Run 189	18806	18856	CLO	DCHA	ENT	280	50	-0,5	65	65
Run 190	18856	18954	CIR	DCHA	NING	280	100	-0,5	65	65
Run 191	18954	18975	CIR	DCHA	NING	280	100	11,2	65	65
Run 192	18975	19025	CLO	DCHA	SAL	280	50	11,2	65	65
Run 193	19025	19104	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	11,2	65	70
Run 194	19104	19164	CLO	IZDA	ENT	327	63	11,2	70	70
Run 195	19164	19335	CIR	IZDA	NING	327	125	11,2	70	70
Run 196	19335	19395	CLO	IZDA	SAL	327	63	11,2	70	70
Run 197	19395	19464	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	11,2	70	70
Run 198	19464	19514	PARACUB	DCHA	ENT	293	29	10,8	70	70
Run 199	19514	19682	CIR	DCHA	NING	293	115	10,4	70	70
Run 200	19682	19729	PARACUB	DCHA	SAL	293	86	10,4	70	70
Run 201	19729	19732	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	10,4	70	65
Run 202	19732	19768	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	14,7	65	65
Run 203	19768	19813	PARACUB	IZDA	ENT	275	25	12,2	65	65
Run 204	19813	20094	CIR	IZDA	NING	275	100	0,5	65	65
Run 205	20094	20372	CIR	IZDA	NING	275	100	9,3	65	65
Run 206	20372	20408	PARACUB	IZDA	SAL	275	75	9,3	65	65
Run 207	20408	20518	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	9,3	65	70
Run 208	20518	20578	CLO	DCHA	ENT	265	70	9,3	70	70
Run 209	20578	20623	CIR	DCHA	NING	265	140	9,3	70	70
Run 210	20623	20690	CLO	DCHA	SAL	265	70	8,3	70	70
Run 211	20690	20743	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	8,3	70	70
Run 212	20743	20818	CLO	IZDA	ENT	288	77	8,3	70	70
Run 213	20818	20869	CIR	IZDA	NING	288	154	8,3	70	70
Run 214	20869	20974	CLO	IZDA	SAL	288	77	8,3	70	70
Run 215	20974	21214	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	8,3	70	70
Run 216	21214	21218	CIR	IZDA	NING	50000	0	8,3	70	70
Run 217	21218	21294	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	8,3	70	70
Run 218	21294	21757	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0	70	70
Run 219	21757	21887	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0	70	85
Run 220	21887	22054	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	14,7	85	85
Run 221	22054	22114	CLO	DCHA	ENT	1000	31	14,7	85	85
Run 222	22114	22173	CIR	DCHA	NING	1000	62	14,7	85	85
Run 223	22173	22233	CLO	DCHA	SAL	1000	31	14,7	85	85
Run 224	22233	22390	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	14,7	85	85
Run 225	22390	22420	CLO	IZDA	ENT	2000	16	14,7	85	85
Run 226	22420	22496	CIR	IZDA	NING	2000	32	14,7	85	85
Run 227	22496	22526	CLO	IZDA	SAL	2000	16	14,7	85	85
Run 228	22526	22619	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	14,7	85	85
Run 229	22619	23282	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	5,3	85	85
Run 230	23282	23368	CLO	DCHA	ENT	475	60	5,3	85	85
Run 231	23368	23511	CIR	DCHA	NING	475	120	5,3	85	85
Run 232	23511	23596	CLO	DCHA	SAL	475	60	5,3	85	85
Run 233	23596	23772	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	5,3	85	85
Run 234	23772	23817	PARACUAD	IZDA	ENT	439	37	5,3	85	85
Run 235	23817	24127	CIR	IZDA	NING	439	110	5,3	85	85
Run 236	24127	24173	PARACUAD	IZDA	SAL	439	73	5,6	85	85
Run 237	24173	24617	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	8,8	85	85
Run 238	24617	24879	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	9,8	85	85
Run 239	24879	25265	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	8,5	85	85
Run 240	25265	25296	CIR	IZDA	NING	50000	0	8,5	85	85

1.333	1 Q _{in} [m]	2 Q _f [m]	3 TCS	4 SCS	5 POSS	6 R [m]	7 h _r [mm]	8 i [mm/m]	9 V _{in} [km/h]	10 V _{fn} [km/h]
Run 241	25296	25350	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	8,5	85	85
Run 242	25350	25456	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	11,5	85	85
Run 243	25456	25528	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	12,5	85	70
Run 244	25528	25598	CLO	IZDA	ENT	272	70	12,1	70	70
Run 245	25598	25733	CIR	IZDA	NING	272	140	10,4	70	70
Run 246	25733	25803	CLO	IZDA	SAL	272	70	10,4	70	70
Run 247	25803	25810	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	10,4	70	70
Run 248	25810	25945	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	7,9	70	70
Run 249	25945	26005	CLO	DCHA	ENT	277	70	7,9	70	70
Run 250	26005	26143	CIR	DCHA	NING	277	140	7,9	70	70
Run 251	26143	26216	CLO	DCHA	SAL	277	70	11,9	70	70
Run 252	26216	26515	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	12,1	70	85
Run 253	26515	26959	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	12,7	85	85
Run 254	26959	27372	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	12,5	85	85
Run 255	27372	27489	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	6,2	85	85
Run 256	27489	27569	CLO	IZDA	ENT	1850	10	6,2	85	85
Run 257	27569	27745	CIR	IZDA	NING	1850	20	6,2	85	85
Run 258	27745	27825	CLO	IZDA	SAL	1850	10	6,2	85	85
Run 259	27825	28735	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	6,2	85	85
Run 260	28753	29880	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	9,3	85	85
Run 261	29880	30316	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	11,5	85	85
Run 262	30316	30356	PARACUB	DCHA	ENT	894	18	11,5	85	85
Run 263	30356	30959	CIR	DCHA	NING	894	70	11,5	85	85
Run 264	30959	31014	PARACUB	DCHA	SAL	894	53	11,5	85	85
Run 265	31014	31182	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	11,5	85	85
Run 266	31182	31525	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	1,2	85	70
Run 267	31525	31726	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-17,1	70	70
Run 268	31726	31820	CLO	IZDA	ENT	490	50	-17,1	70	70
Run 269	31820	32034	CIR	IZDA	NING	490	100	-17,1	70	70
Run 270	32034	32094	CLO	IZDA	SAL	490	50	-17,1	70	70
Run 271	32094	32110	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-17,1	70	70
Run 272	32110	32193	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-15,1	70	70
Run 273	32193	32243	CLO	DCHA	ENT	291	60	-15,1	70	70
Run 274	32243	32376	CIR	DCHA	NING	291	120	-15,1	70	70
Run 275	32376	32412	CIR	DCHA	NING	291	120	-16,5	70	70
Run 276	32412	32462	CLO	DCHA	SAL	291	60	-16,5	70	70
Run 277	32462	32801	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-16,5	70	70
Run 278	32801	32851	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,5	70	70
Run 279	32851	32870	CIR	IZDA	NING	50000	0	0,5	70	70
Run 280	32870	32894	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,5	70	70
Run 281	32894	32948	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	3,4	70	70
Run 282	32948	33018	PARACUAD	IZDA	ENT	307	37	3,4	70	70
Run 283	33018	33046	CIR	IZDA	NING	307	110	3,4	70	70
Run 284	33046	33194	CIR	IZDA	NING	307	110	-12,1	70	70
Run 285	33194	33242	PARACUAD	IZDA	SAL	307	73	-12,1	70	70
Run 286	33242	33464	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-12,1	70	70
Run 287	33464	33534	CLO	DCHA	ENT	350	80	-13,6	70	70
Run 288	33534	33616	CIR	DCHA	NING	350	160	-15,2	70	70
Run 289	33616	33686	CLO	DCHA	SAL	350	80	-15,2	70	70
Run 290	33686	33752	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-15,2	70	70
Run 291	33752	33975	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-12,1	70	70
Run 292	33975	34025	CLO	IZDA	ENT	886	25	-12,1	70	70
Run 293	34025	34049	CIR	IZDA	NING	886	50	-12,1	70	70
Run 294	34049	34166	CIR	IZDA	NING	886	50	-3,1	70	70
Run 295	34166	34236	CLO	IZDA	SAL	886	25	-6,3	70	70
Run 296	34236	34505	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-14,9	70	70
Run 297	34505	34545	CLO	DCHA	ENT	1000	20	-14,9	70	70
Run 298	34545	34580	CIR	DCHA	NING	1000	40	-14,9	70	70
Run 299	34580	34605	CIR	DCHA	NING	1000	40	1,1	70	70
Run 300	34605	34645	CLO	DCHA	SAL	1000	20	1,1	70	70

1.333	1 Q _{in} [m]	2 Q _f [m]	3 TCS	4 SCS	5 POSS	6 R [m]	7 h _r [mm]	8 i [mm/m]	9 V _{in} [km/h]	10 V _{fn} [km/h]
Run 301	34645	34927	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	1,1	70	70
Run 302	34927	34982	PARACUB	IZDA	ENT	270	34	1,1	70	70
Run 303	34982	35043	CIR	IZDA	NING	270	134	1,1	70	70
Run 304	35043	35238	CIR	IZDA	NING	270	134	-1,5	70	70
Run 305	35238	35293	CIR	IZDA	NING	270	134	0,1	70	70
Run 306	35293	35347	PARACUB	IZDA	SAL	270	101	0,1	70	70
Run 307	35347	35413	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,1	70	70
Run 308	35413	35493	CLO	DCHA	ENT	290	78	0,1	70	70
Run 309	35493	35560	CIR	DCHA	NING	290	155	0,1	70	70
Run 310	35560	35645	CIR	DCHA	NING	290	155	-3,1	70	70
Run 311	35645	35725	CLO	DCHA	SAL	290	78	-0,3	70	70
Run 312	35725	36038	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	1,2	70	70
Run 313	36038	36108	CLO	DCHA	ENT	280	80	0,9	70	70
Run 314	36108	36204	CIR	DCHA	NING	280	160	-0,6	70	70
Run 315	36204	36274	CLO	DCHA	SAL	280	80	-0,6	70	70
Run 316	36274	36359	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,6	70	70
Run 317	36359	36409	CLO	IZDA	ENT	390	60	-0,6	70	70
Run 318	36409	36445	CIR	IZDA	NING	390	120	-0,6	70	70
Run 319	36445	36495	CLO	IZDA	SAL	390	60	-0,6	70	70
Run 320	36495	36578	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,6	70	70
Run 321	36578	36590	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,4	70	70
Run 322	36590	36645	CLO	DCHA	ENT	477	60	0,4	70	70
Run 323	36645	36842	CIR	DCHA	NING	477	120	0,4	70	70
Run 324	36842	36866	CIR	DCHA	NING	477	120	0	70	70
Run 325	36866	36871	CLO	DCHA	SAL	477	60	0	70	70
Run 326	36871	37076	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0	70	70
Run 327	37076	37229	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	0,6	70	60
Run 328	37229	37240	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-0,9	60	60
Run 329	37240	37262	CLO	IZDA	ENT	800	30	-0,9	60	60
Run 330	37262	37329	CIR	IZDA	NING	800	60	-0,9	60	60
Run 331	37329	37346	CIR	IZDA	NING	800	60	-2,5	60	60
Run 332	37346	37366	CLO	IZDA	SAL	800	30	-2,5	60	60
Run 333	37366	37636	RECTA	NING	NING	5,000E+07	0	-2,5	60	35

Anexo VI. Escenarios de verificación, comparación y comprobación.

VI.1. Escenario I. Verificación de la necesidad de limitar la carga en las ruedas más pequeñas.

VI.1.1. Planteamiento.

En este primer escenario se va a verificar la necesidad de limitar la carga en las ruedas más pequeñas. En el [subapartado IV.4.3](#) ya se advirtió esta necesidad y se justificó desde un punto de vista teórico. Lo que se propone es ir más allá y verificar con cálculos esta necesidad.

Para ello, se va a emplear el bloque de ecuaciones de la [solución de Hertz](#) en su totalidad y, parcialmente, el de la [fuerza normal sobre cada rueda](#). La última ecuación que se va a introducir es la que permite el cálculo de A_c . El cálculo se va a centrar sobre una rueda del juego en reposo y con el juego centrado en una alineación recta horizontal ($i = 0\%$). Por tanto, el problema es simétrico y no importa realizar los cálculos sobre la rueda izquierda o sobre la derecha del juego.

Como datos de entrada, van a utilizarse los de la tabla 9.1 con los datos de R_{x_1} , R_{x_2} y γ_0 referidos a la banda de rodadura sin contacto pestaña – carril en la rueda axialmente opuesta (B. R.).

Aparte, hace falta establecer las combinaciones de carga por eje límite y diámetro que se van a utilizar. Se proponen para ello las combinaciones de los bogies prototípicos y comerciales mostrados en la tabla 8.1 del [subcapítulo 8.4](#). En resumen:

Tabla VI.1. Combinaciones de carga por eje límite y diámetro del escenario I.

λ_{eje} [kg]	D [m]	λ_{eje} [kg]	D [m]	λ_{eje} [kg]	D [m]
22.500	0,920	16.000	0,680	7.800	0,380
18.000	0,840	12.000	0,500	5.000	0,355
17.000	0,750	9.500	0,470		
17.000	0,730	9.500	0,450		

Con esta información ya se pueden obtener los resultados de este escenario los cuales se muestran en el [subapartado VI.1.2](#). Estos resultados se interpretan seguidamente en el [VI.1.3](#) mediante un análisis comparativo dada su gran relevancia, pues se utilizarán para el planteamiento de los siguientes escenarios.

VI.1.2. Resultados.

Los resultados se muestran a continuación, tanto en formato tabular cuanto en formato gráfico:

Tabla VI.2 Resultados tabulares del escenario I.

1..10	1 λ_{eje} [kg]	2 D [m]	3 $p_{z,o}$ [Pa]	4 a [m]	5 b [m]	6 A_c [m ²]	7 δ_o [m]
Run 1	22.500	0,920	1,312E+09	7,104E-03	5,654E-03	1,262E-04	1,081E-04
Run 2	18.000	0,840	1,240E+09	6,362E-03	5,341E-03	1,067E-04	9,510E-05
Run 3	17.000	0,750	1,247E+09	5,977E-03	5,338E-03	1,002E-04	9,558E-05
Run 4	17.000	0,730	1,255E+09	5,916E-03	5,359E-03	9,960E-05	9,675E-05
Run 5	16.000	0,680	1,253E+09	5,642E-03	5,300E-03	9,393E-05	9,572E-05
Run 6	12.000	0,500	1,266E+09	4,930E-03	4,499E-03	6,969E-05	8,203E-05
Run 7	9.500	0,470	1,203E+09	4,574E-03	4,041E-03	5,807E-05	6,972E-05
Run 8	9.500	0,450	1,227E+09	4,584E-03	3,955E-03	5,696E-05	6,950E-05
Run 9	7.800	0,380	1,242E+09	4,336E-03	3,391E-03	4,620E-05	6,189E-05
Run 10	5.000	0,355	1,104E+09	3,762E-03	2,818E-03	3,331E-05	4,681E-05

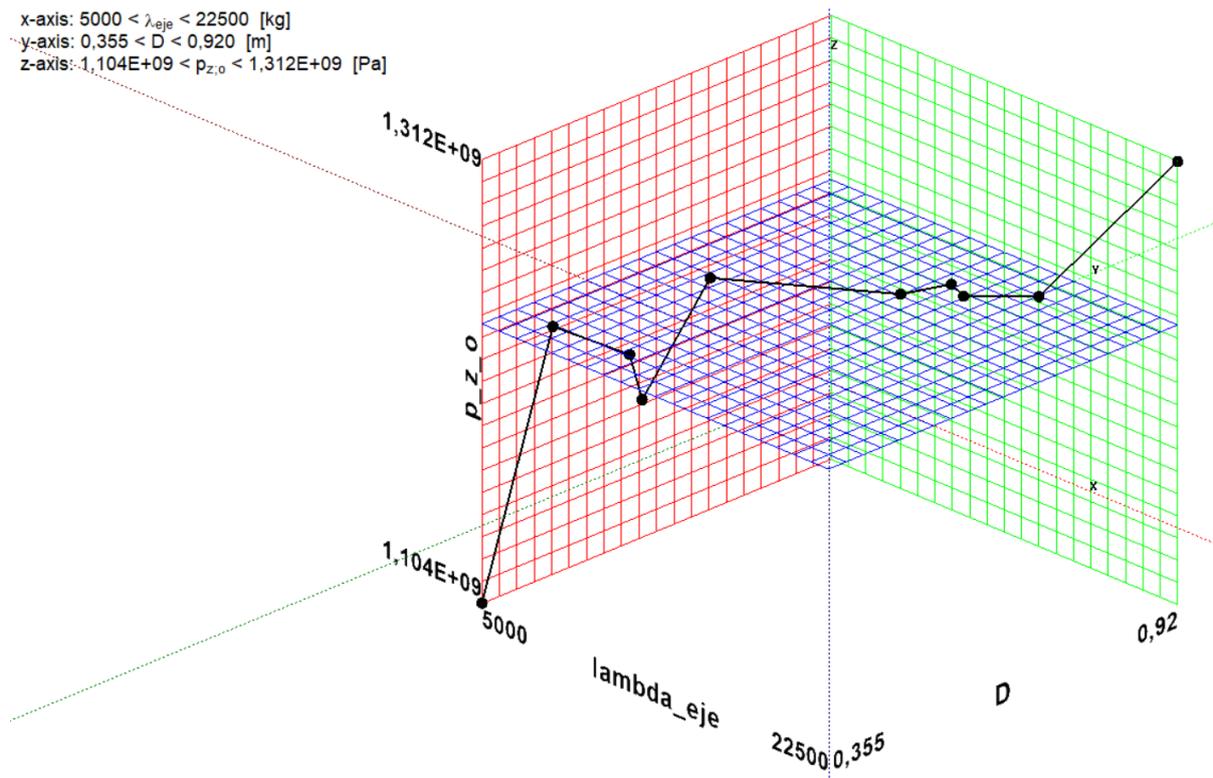


Figura VI.1 Resultados gráficos del escenario I.

VI.1.3. Análisis comparativo.

De estos resultados se desprende que la presión máxima (tensión normal máxima) está aproximadamente contenida en un rango entre 1.100 MPa (en la rueda más pequeña) y 1.300 MPa (en la rueda más grande), siendo 1.235 MPa el valor promedio y el valor en torno al cual se sitúan la mayoría de los puntos exceptuando los extremos (el plano azul de la gráfica tridimensional está al nivel de 1.235 MPa).

Esto no es fruto de la casualidad, sino que el fabricante de cada rueda ha ido adaptando la carga por eje en cada caso de forma que la presión no superase los 1.315 MPa en ningún caso. De hecho, los diferentes fabricantes han buscado que sus ruedas trabajasen en un estado tensional similar, de ahí que el rango sea tan estrecho.

Esta adaptación de la carga se puede demostrar matemáticamente, para lo cual simplemente hay que combinar las ecuaciones 4.13 y 4.21 de las subsecciones [4.4.3](#) y [4.4.4](#), respectivamente. Si de ellas se despeja la fuerza normal:

$$N = \frac{2}{3} p_{z_0} A_c \quad [Ec. VI. 1]$$

Esta ecuación se aplica a dos ruedas: una de diámetro grande, sin superíndices, y otra de diámetro pequeño, con el superíndice *prima*. Tras esto, ambas ecuaciones se dividen para obtener su ratio:

$$\begin{cases} N = \frac{2}{3} p_{z_0} A_c \\ N' = \frac{2}{3} p'_{z_0} A'_c \end{cases} \rightarrow \frac{N}{N'} = \frac{p_{z_0} A_c}{p'_{z_0} A'_c}$$
$$\frac{N}{N'} = \frac{p_{z_0} A_c}{p'_{z_0} A'_c} \quad [Ec. VI. 2]$$

Y como los fabricantes buscan $p_{z_0} \approx p'_{z_0}$:

$$\frac{N}{N'} \approx \frac{A_c}{A'_c}$$

Además, cuando el juego de ruedas está parado o está recorriendo una alineación recta, lo que se tiene es la proporcionalidad entre la fuerza normal sobre cada rueda y la carga por eje, tal como se explica en la [subsección I.5.1](#):

$$\frac{\lambda_{eje}}{\lambda'_{eje}} \approx \frac{A_c}{A'_c}$$

Si esto se toma como una igualdad estricta:

$$\frac{\lambda_{eje}}{\lambda'_{eje}} \approx \frac{A_c}{A'_c} \quad [Ec. VI. 3]$$

Como lo que sucede es que el área de contacto decrece a medida que disminuye el diámetro, que es justamente la tendencia que se observa en la tabla VI.2, entonces la carga debe reducirse en consonancia. Matemáticamente:

$$A'_c < A_c \Rightarrow \lambda'_{eje} < \lambda_{eje}$$

En la siguiente imagen se va a demostrar gráficamente por qué disminuye el área de contacto cuando lo hace el radio de la rueda, manteniendo todos los demás parámetros constantes. Para ello, se parte de la figura 4.3 de la [subsección 4.4.2](#). En esta figura se ilustran los dos paraboloides de la teoría de Hertz: un paraboloide que modela la superficie de la rueda y otro paraboloide que modela la superficie del carril. Para saber cuál es cuál, debe pensarse en la posición relativa de los cuerpos en contacto en lugar de en los colores, que en este caso no son los habituales. Así, el paraboloide superior (cuyos radios llevan el subíndice 2) se corresponde con la superficie de la rueda (a pesar de ser verde y no azul) y el paraboloide inferior (subíndice 1) con la del carril (a pesar de ser azul y no naranja):

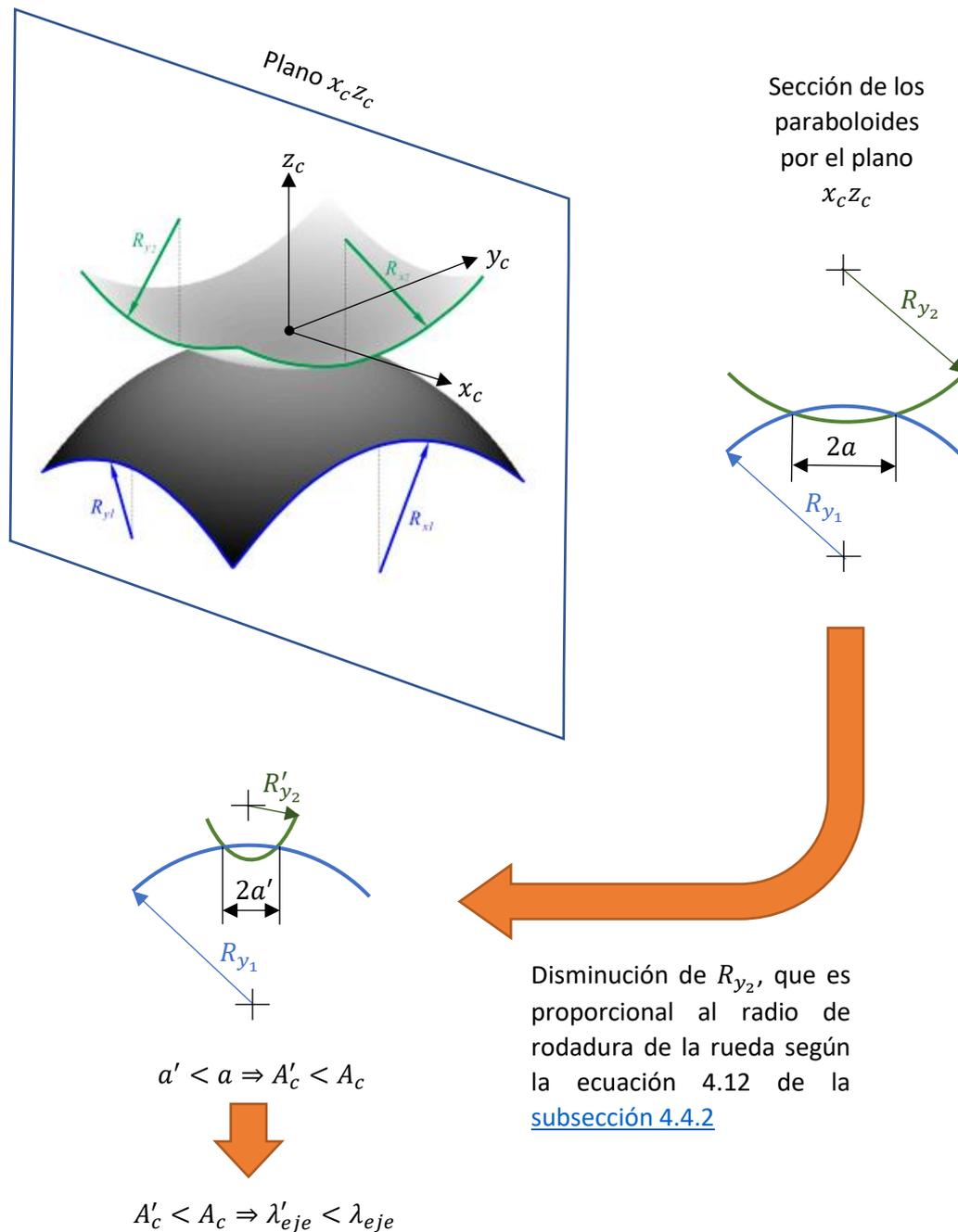


Figura VI.2. Visualización del decrecimiento del área de contacto con el radio de la rueda. Fuente: Elaboración propia, salvo los paraboloides, que proceden de [5, fig. 2.3 (a)].

VI.2. Escenario II. Comparación del desgaste (BRR) sufrido por ruedas de diferentes diámetros.

VI.2.1. Planteamiento.

En este escenario se pretende comparar el desgaste sufrido por ruedas de diferentes diámetros y que forman parte de diferentes tipos de bogies. Para la consecución de resultados comparables se intentará igualar las condiciones de partida de las ruedas y sus bogies. Esta comparación será tanto visual como basada en la ratio de desgaste promedio en [$\mu\text{m}/\text{km}$], que se calculará como la profundidad máxima de desgaste alcanzada dividida entre el kilometraje recorrido. Estos cálculos de desgaste se realizarán en virtud de la ley de desgaste de la BRR.

En aras de igualar las condiciones de partida, lo primero que se realiza es modificar las combinaciones carga – diámetro. Como se ha observado en los resultados del primer escenario, todas las combinaciones provocan una presión (tensión normal) máxima en el área de contacto entre 1.100 MPa y 1.300 MPa, aproximadamente. Esto causa desigualdades en el estado tensional de las ruedas y, de ahí, la falta de igualdad de condiciones.

Para conseguir el mismo estado tensional en todas las ruedas es preciso asignar un valor de presión máxima para todas ellas y obtener la carga por eje que permite alcanzar dicho estado tensional. Dado que la media aritmética de la p_{z_0} de todas las ruedas es 1.235 MPa, este es el valor escogido.

En la tabla inferior se recoge la carga por eje que causa una presión máxima de 1.235 MPa en el área de contacto:

Tabla VI.3. Carga por eje en función del diámetro para una presión de 1.235 MPa.

1..10	1 p_{z_0} [Pa]	2 D [m]	3 λ_{eje} [kg]
Run 1	1,235E+09	0,920	18.784
Run 2	1,235E+09	0,840	17.766
Run 3	1,235E+09	0,750	16.498
Run 4	1,235E+09	0,730	16.184
Run 5	1,235E+09	0,680	15.325
Run 6	1,235E+09	0,500	11.128
Run 7	1,235E+09	0,470	10.273
Run 8	1,235E+09	0,450	9.692
Run 9	1,235E+09	0,380	7.674
Run 10	1,235E+09	0,355	6.996

Estas combinaciones carga – diámetro se van a asignar a todos los ejes de los bogies comerciales o prototípicos que incorporan estas ruedas, que son todas las ruedas de bogies de entre 2 y 4 ejes.

Acercas del dispar número de ejes de los bogies debe recordarse que, como a menores diámetros la carga por eje disminuye, lo que se realiza como medida compensatoria para tratar de mantener la

carga por bogie es incrementar el número de ejes del bogie (véase la explicación completa en el en el [subapartado IV.4.3](#)). Esta disparidad se va a mantener, puesto que eliminar los ejes intermedios (en el caso de bogies con más de dos ejes) falsificaría los valores de fuerza horizontal obtenidos en los contactos pestaña – carril, lo cual afectaría a los resultados de desgaste.

También es cierto que todos los bogies no portan la misma carga, a pesar de la medida compensatoria. De hecho, el bogie más cargado es el BA 741, que alcanza 41.092 kg (4 ejes por 10.273 kg/eje), mientras que el menos cargado es el Saas z-706, que únicamente alcanza los 22.256 kg (2 ejes por 11.128 kg/eje). La capacidad de carga de los demás bogies está dentro de esta horquilla. Para realizar una corrección que igualase este dato habría que modificar las cargas por eje, lo cual causaría que las ruedas no trabajasen a la misma presión máxima (1.235 MPa) y que no partiesen de las mismas condiciones. En cualquier caso, la horquilla no es demasiado grande dentro de lo que cabe, y las fuerzas horizontales influyen mucho menos que las verticales (las normales a las ruedas), por lo que no es realmente necesaria una corrección.

Por otra parte, los bogies que incorporan estas ruedas presentan empates muy variados, los cuales no crecen proporcionalmente al diámetro. Como el empate es un parámetro que influye fuertemente en el desgaste porque produce un ángulo de lazo no nulo y este, a su vez, pseudodeslizamientos varios, es importante fijar un mismo empate para todos los bogies. Para ello, se fijará para todos los bogies el menor valor que funcione para todos ellos. Este valor es el del bogie con más ejes y con un mayor diámetro al mismo tiempo, que es el BA 741 (4 ejes y 470 mm de diámetro nominal). Si se supone que cada eje está espaciado 570 mm del eje más próximo (470 mm más 56 mm por las pestañas y más 44 mm para que no interfieran las pestañas), entonces el empate total del bogie es 1.710 mm.

En la siguiente imagen se muestran todos los bogies con sus dimensiones y con sus ruedas numeradas según el sentido de avance (las impares al norte y las partes al sur). Las dimensiones se expresan en forma paramétrica en vez de numérica y se acotan paralelamente a los ejes del sistema de referencia $\bar{u}\bar{v}\bar{w}$, que es el que se utiliza en el método del centro de fricción y cuyo origen se coloca como se muestra en las imágenes de dicho método (véanse en la [subsección III.5.3](#)); con la salvedad de que la en vez de la línea media del bogie se emplea el eje de la vía (esta alteración permite el uso directo de los parámetros b_e y b_i).

Las dimensiones paramétricas acotadas permiten reconstruir las coordenadas $(u_{f,i}, v_{f,i}, w_{f,i})$ de la posición de contacto de la rueda W_i , donde $i = 1, \dots, Z_w$. La reconstrucción debe realizarse así:

- ✓ La coordenada $u_{f,i}$ resulta de la adición de $e/3$ y la fracción de e que distancie el último eje (el que tiene las ruedas $W_{(Z_w-1)}$ y W_{Z_w}) del eje que incorpore la rueda W_i de cuya posición de contacto se desee conocer su coordenada u_f .
- ✓ La coordenada $v_{f,i}$ resulta de la substracción de $b_{i|e}/7$ al término $b_{i|e}$ cuando la rueda W_i de cuya posición de contacto se desee conocer v_f tenga un número impar. En el caso de que la rueda W_i tenga un número par, entonces la coordenada v_f resultará de la adición de $b_{i|e}/7$ al término $b_{i|e}$. Además, recuérdese que en una curva a derechas el término b_e afectará a las ruedas impares y b_i a las pares, mientras que en una curva a izquierdas será al revés.
- ✓ La coordenada $w_{f,i}$ se toma nula porque solamente interesan las coordenadas del plano $\bar{u}\bar{v}$.

Por lo demás, para este escenario se consignan estos datos de entrada adicionales, donde no se incluyen los del trazado, que son los tabulados en las tablas expuestas en el [subcapítulo V.4](#) o en la [subsección V.5.3](#). Estos datos no incluyen la variable r_p porque se calcula siempre en función de r_o (r_p [m] = r_o [m] + 4,519/1.000 [m]), por lo que no tiene un valor fijo para todas las ruedas.

He aquí los datos tabulados:

Tabla VI.4. Datos de entrada adicionales del escenario II.

Variable	Valor	Variable	Valor	Variable	Valor
H_{CdG} [m]	2,048	$R_{x_1}(P)$ [m]	$13 \cdot 10^{-3}$	λ_{tara} [kg]	20.000
H_{tara} [m]	0,512	$R_{x_2}(P)$ [m]	$36 \cdot 10^{-3}$	μ [Ø]	0,400
$k(P)$ [Ø]	0,625	α_{fn} [Ø]	1		
n_{dec} [Ø]	0	$\gamma_o(P)$ [º]	32		

Para la obtención de un valor fijo para la variable H_{CdG} se ha realizado la media aritmética de los valores de H_{tara} , H_u y λ_{tara} empleados en los cálculos de $H_{CdG}^{p.a.}$ y $H_{CdG}^{p.b.}$ en la [parte 8.5.2.2](#) y se han combinado con n_{ejes} y λ_{eje} (cuyo producto es $\lambda_u + \lambda_{tara}$) en la ecuación de H_{CdG} . Estos valores dan, para todos los bogies, un valor de H_{CdG} cercano a los 2 m, valor que se cambia a 2,048 m (4 veces H_{tara}). Al final, en el programa se introduce la tríada H_{CdG} , H_{tara} y λ_{tara} , quedando H_u y λ_u libres (estos últimos irán variando en función de λ_{eje} y n_{ejes}).

En cuanto a las demás variables, como indica el hecho de que el parámetro α_{fn} se fije en la unidad, se considera que en los contactos pestaña – carril toda la carga cae sobre el arranque de la pestaña. Aparte, solo se tabula un valor constante para μ , lo que es indicativo de que los cálculos se van a obtener en una situación de rozamiento constante. El último valor que cabe justificar es el de n_{dec} , que se toma nulo, lo cual significa que las deceleraciones se suponen constantes.

Todos los resultados de este escenario se obtienen para el recorrido tabulado (una vez en el sentido Albarque – Zacarín y sin parada en Milbello), cuya longitud es 37,636 km. Estos resultados se muestran ordenados en la [subsección VI.2.2](#) según el número de ruedas de los bogies: de [4 ruedas](#), de [6 ruedas](#) y de [8 ruedas](#). La interpretación de todos los resultados se lleva a cabo mediante un análisis comparativo en la [subsección VI.2.3](#).

VI.2.2. Resultados.

VI.2.2.1. Bogies de 4 ruedas.

Para comenzar, se muestran los perfiles desgastados de las 4 ruedas del bogie Y – 25, que se representan en el sistema de coordenadas $X_{p,f}$, $Y_{p,f}$, $Z_{p,f}$ (donde la letra f hace referencia a final), que no es más que una modificación del sistema $X_p Y_p Z_p$, el empleado en la [parte III.4.1.7](#) y en otras partes sucesivas. Su desgaste se analiza al mismo tiempo:

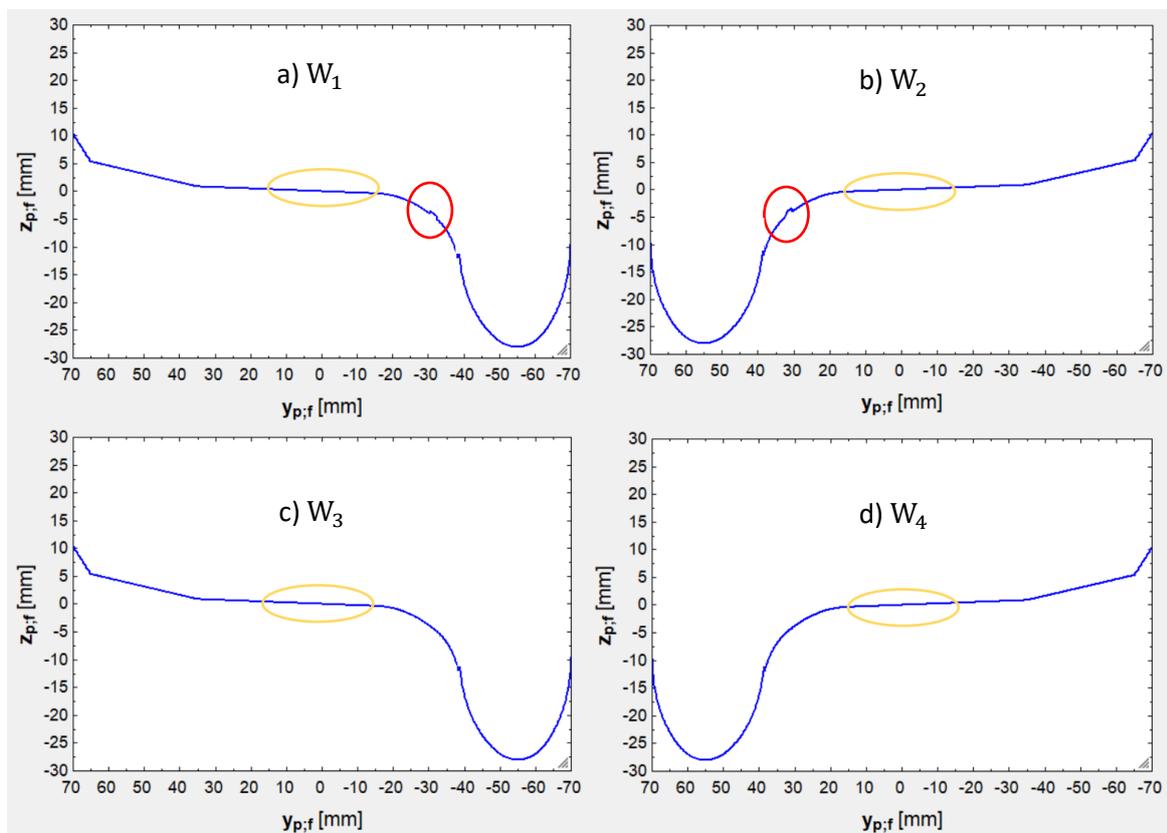


Figura VI.4. Perfiles desgastados (BRR) de las ruedas del bogie Y – 25 (920 mm).

En estos perfiles se han desgastado las siguientes zonas:

- ✓ En los perfiles correspondientes a las ruedas W_1 y W_2 puede apreciarse cierto desgaste en el arranque de la pestaña (en las regiones rodeadas en rojo). También se presenta el desgaste en la banda de rodadura (en las regiones rodeadas en amarillo), aunque a una escala micrométrica, por lo que resulta inapreciable en la imagen.
- ✓ En los perfiles correspondientes a las ruedas W_3 y W_4 , en cambio, únicamente se encuentra desgaste en la banda de rodadura (en las regiones rodeadas en amarillo). Este desgaste es micrométrico, por lo que no se puede apreciar en la imagen.

En las ruedas W_1 y W_2 la profundidad de desgaste máxima se alcanza en el arranque de la pestaña, mientras que en las ruedas W_3 y W_4 lo hace en la banda de rodadura. Esto es debido a la sinuosidad y a la gran curvatura de las curvas, cuyos radios son pequeños por lo general, provocando el movimiento libre del bogie y los contactos pestaña – carril en todas las curvas (la pestaña de la rueda W_1 contacta con el carril en las curvas a derechas y la pestaña de la rueda W_2 en las curvas a izquierdas).

En las siguientes imágenes se muestran las ampliaciones de los arranques de las pestañas de las ruedas W_1 y W_2 . En sendas ampliaciones es posible mensurar la profundidad de desgaste máxima, la cual no se mide en el eje vertical, sino en perpendicular al perfil (al igual que el radio de curvatura R_{y_2}):

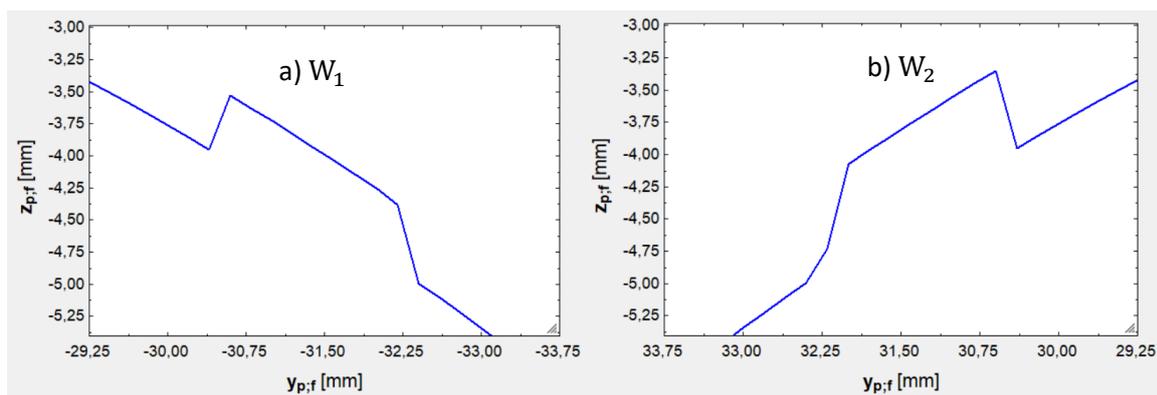


Figura VI.5. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas del bogie Y – 25 (920 mm).

No es posible ampliar el perfil a la escala micrométrica para la muestra de la profundidad de desgaste máxima en las ruedas W_3 y W_4 . Además, no sería realista, pues a esta escala debería percibirse la rugosidad de los perfiles, rugosidad que se despreció en [las hipótesis de cálculo](#). La profundidad de desgaste máxima en estos perfiles se obtiene como la diferencia entre las coordenadas iniciales y las finales (en realidad, lo mismo se realiza en el caso de las ruedas W_1 y W_2 , dado que ofrece una mayor precisión que el método gráfico).

En los demás bogies de 4 ruedas (Y – 33, Laas z-614 (a), Laas z-614 (b), Saas z-703 y Saas z-706) se obtienen resultados muy similares, por lo que no merece la pena colocar ni los perfiles completos ni las ampliaciones para los perfiles de sus ruedas. Así, y con el propósito de economía, únicamente se van a mostrar las ampliaciones para las ruedas W_1 y W_2 del bogie Saas z-706, que es el bogie de 4 ruedas con el menor diámetro nominal en las mismas: 500 mm. De esta forma se podrá comparar visualmente el desgaste en las ruedas del bogie Y – 25 (de 920 mm, el mayor valor) con el desgaste en las ruedas del bogie Saas z-706 (de 500 mm, el menor valor).

A continuación, las ampliaciones citadas:

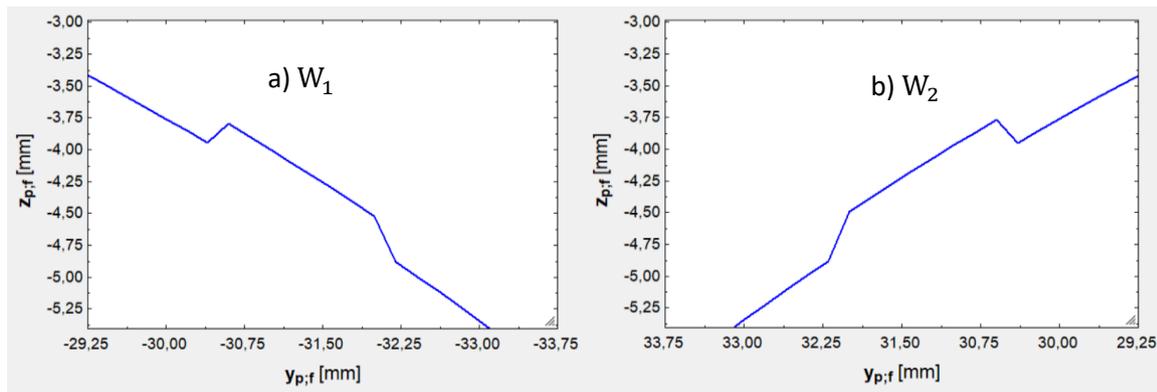


Figura VI.6. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas del bogie Saas z-706 (500 mm).

Una vez se tienen las profundidades de desgaste máximas de todas las ruedas de los 4 bogies, estas se recogen en una tabla. En la misma tabla se calcula la ratio de desgaste, que es la profundidad de desgaste en $[\mu\text{m}]$ dividida por el kilometraje recorrido (37,636 km en este caso). La ecuación que concretamente se aplica es la que viene a continuación:

$$\text{Ratio de desgaste (BRR)} \left[\frac{\mu\text{m}}{\text{km}} \right] = \frac{\text{Prof. de desgaste (BRR)} [\text{mm}] \cdot 10^3 [\mu\text{m}/\text{mm}]}{37,636 [\text{km}]} \quad [\text{Ec. VI. 4}]$$

La tabla obtenida es la que sigue:

Tabla VI.5. Cómputo de la ratio de desgaste promedio (BRR) en los bogies de 4 ruedas.

Bogie (D)	Rueda	Prof. de desgaste (BRR) [mm]	Ratio de desgaste (BRR) [$\mu\text{m}/\text{km}$]
Y – 25 (920 mm)	W ₁	0,437	11,611
	W ₂	0,581	15,437
	W ₃	$2,189 \cdot 10^{-4}$	$5,816 \cdot 10^{-3}$
	W ₄	$2,188 \cdot 10^{-4}$	$5,814 \cdot 10^{-3}$
Y – 33 (840 mm)	W ₁	0,419	11,133
	W ₂	0,546	14,507

	W_3	$2,652 \cdot 10^{-4}$	$7,046 \cdot 10^{-3}$
	W_4	$2,651 \cdot 10^{-4}$	$7,044 \cdot 10^{-3}$
	W_1	0,403	10,708
	W_2	0,500	13,285
Laas z-614 (a) (750 mm)	W_3	$3,473 \cdot 10^{-4}$	$9,227 \cdot 10^{-3}$
	W_4	$3,504 \cdot 10^{-4}$	$9,310 \cdot 10^{-3}$
	W_1	0,395	10,495
	W_2	0,486	12,913
Laas z-614 (b) (730 mm)	W_3	$3,727 \cdot 10^{-4}$	$9,903 \cdot 10^{-3}$
	W_4	$3,783 \cdot 10^{-4}$	$1,005 \cdot 10^{-2}$
	W_1	0,376	9,990
	W_2	0,460	12,222
Saas z-703 (680 mm)	W_3	$4,260 \cdot 10^{-4}$	$1,131 \cdot 10^{-2}$
	W_4	$4,331 \cdot 10^{-4}$	$1,151 \cdot 10^{-2}$
	W_1	0,227	6,031
	W_2	0,239	6,350
Saas z-706 (500 mm)	W_3	$6,945 \cdot 10^{-4}$	$1,845 \cdot 10^{-2}$
	W_4	$7,071 \cdot 10^{-4}$	$1,879 \cdot 10^{-2}$

VI.2.2.2 Bogie de 6 ruedas.

En el caso del único bogie de 6 ruedas se muestran directamente las ampliaciones pertinentes para poder observar las profundidades máximas de desgaste en las ruedas W_1 y W_2 :

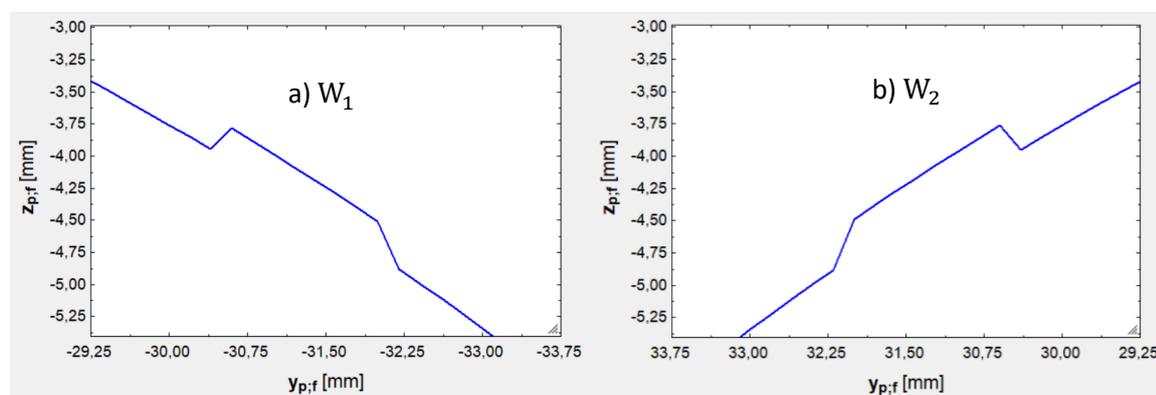


Figura VI.7. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas del bogie 691 (450 mm).

Y en la tabla inferior se recogen las profundidades máximas de desgaste para las 6 ruedas del bogie, incluyendo los cálculos de sus respectivas ratios de desgaste:

Tabla VI.6 Cómputo de la ratio de desgaste promedio (BRR) en el bogie de 6 ruedas.

Bogie (D)	Rueda	Prof. de desgaste (BRR) [mm]	Ratio de desgaste (BRR) [$\mu\text{m}/\text{km}$]
Bogie 691 (450 mm)	W_1	0,237	6,297
	W_2	0,255	6,775
	W_3	$7,951 \cdot 10^{-4}$	$2,113 \cdot 10^{-2}$
	W_4	$8,079 \cdot 10^{-4}$	$2,147 \cdot 10^{-2}$
	W_5	$7,942 \cdot 10^{-4}$	$2,110 \cdot 10^{-2}$
	W_6	$8,071 \cdot 10^{-4}$	$2,144 \cdot 10^{-2}$

VI.2.2.3. Bogies de 8 ruedas.

Del conjunto de los bogies de 8 ruedas se muestran las ampliaciones que permiten ver las profundidades máximas de desgaste en las ruedas W_1 y W_2 correspondientes a dos bogies: el bogie BA 741, que cuenta con el mayor diámetro nominal (470 mm), y el bogie Graz Pauker 702, que cuenta con el menor diámetro (355 mm):

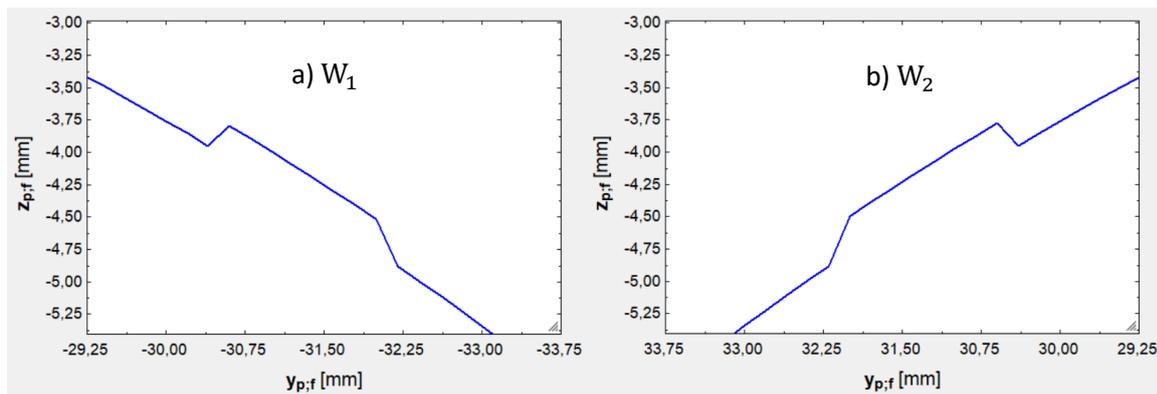


Figura VI.8. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas del bogie BA 741 (470 mm).

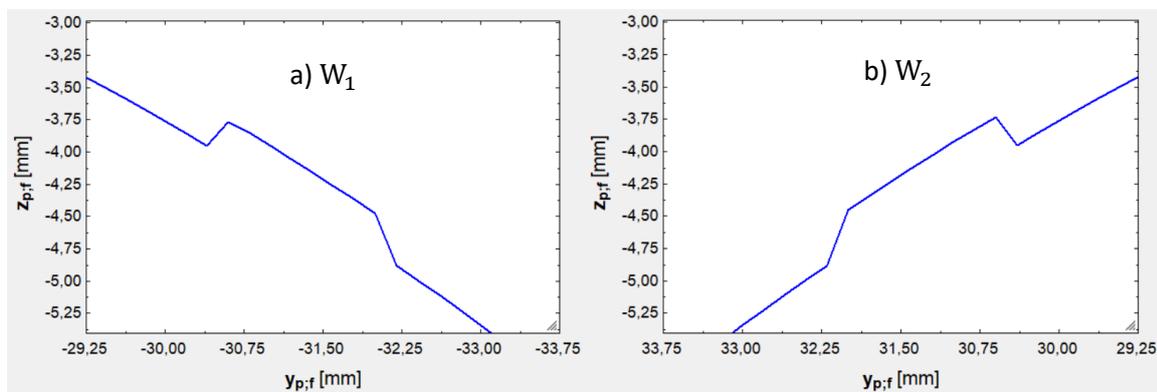


Figura VI.9. Profundidad de desgaste máxima (BRR) en las ruedas del bogie Graz Pauker 702 (355 mm).

Y en la tabla inferior se recogen las profundidades máximas de desgaste para las 8 ruedas de todos los bogies que están dotados de tal número de ruedas, incluyendo los cálculos de sus respectivas ratios de desgaste:

Tabla VI.7 Cómputo de la ratio de desgaste promedio (BRR) en los bogies de 8 ruedas.

Bogie (D)	Rueda	Prof. de desgaste (BRR) [mm]	Ratio de desgaste (BRR) [$\mu\text{m}/\text{km}$]
BA 741 (470 mm)	W ₁	0,230	6,111
	W ₂	0,245	6,510
	W ₃	$7,564 \cdot 10^{-4}$	$2,010 \cdot 10^{-2}$
	W ₄	$7,678 \cdot 10^{-4}$	$2,040 \cdot 10^{-2}$
	W ₅	$7,557 \cdot 10^{-4}$	$2,008 \cdot 10^{-2}$
	W ₆	$7,680 \cdot 10^{-4}$	$2,040 \cdot 10^{-2}$
	W ₇	$7,553 \cdot 10^{-4}$	$2,007 \cdot 10^{-2}$
	W ₈	$7,676 \cdot 10^{-4}$	$2,040 \cdot 10^{-2}$
Saadkms 690 (380 mm)	W ₁	0,254	6,749
	W ₂	0,278	7,387
	W ₃	$9,610 \cdot 10^{-4}$	$2,553 \cdot 10^{-2}$
	W ₄	$9,758 \cdot 10^{-4}$	$2,593 \cdot 10^{-2}$
	W ₅	$9,741 \cdot 10^{-4}$	$2,588 \cdot 10^{-2}$
	W ₆	$9,891 \cdot 10^{-4}$	$2,628 \cdot 10^{-2}$
	W ₇	$9,734 \cdot 10^{-4}$	$2,586 \cdot 10^{-2}$
	W ₈	$9,884 \cdot 10^{-4}$	$2,626 \cdot 10^{-2}$
Graz Pauker 702 (355 mm)	W ₁	0,264	7,015
	W ₂	0,285	7,573

W_3	$1,041 \cdot 10^{-3}$	$2,766 \cdot 10^{-2}$
W_4	$1,057 \cdot 10^{-3}$	$2,808 \cdot 10^{-2}$
W_5	$1,141 \cdot 10^{-3}$	$3,032 \cdot 10^{-2}$
W_6	$1,152 \cdot 10^{-3}$	$3,061 \cdot 10^{-2}$
W_7	$1,139 \cdot 10^{-3}$	$3,026 \cdot 10^{-2}$
W_8	$1,150 \cdot 10^{-3}$	$3,056 \cdot 10^{-2}$

VI.2.3. Análisis comparativo.

Para comenzar el análisis comparativo, en esta gráfica se muestra la evolución de la ratio de desgaste (BRR) con el diámetro en las ruedas delanteras de los bogies (W_1 y W_2). En ella se ha marcado la línea divisoria entre los bogies de 4 ruedas y los bogies de 6 u 8 ruedas, la cual aparece en $D = 500$ mm y, además, en este caso cobra especial relevancia porque coincide con un cambio de tendencia:

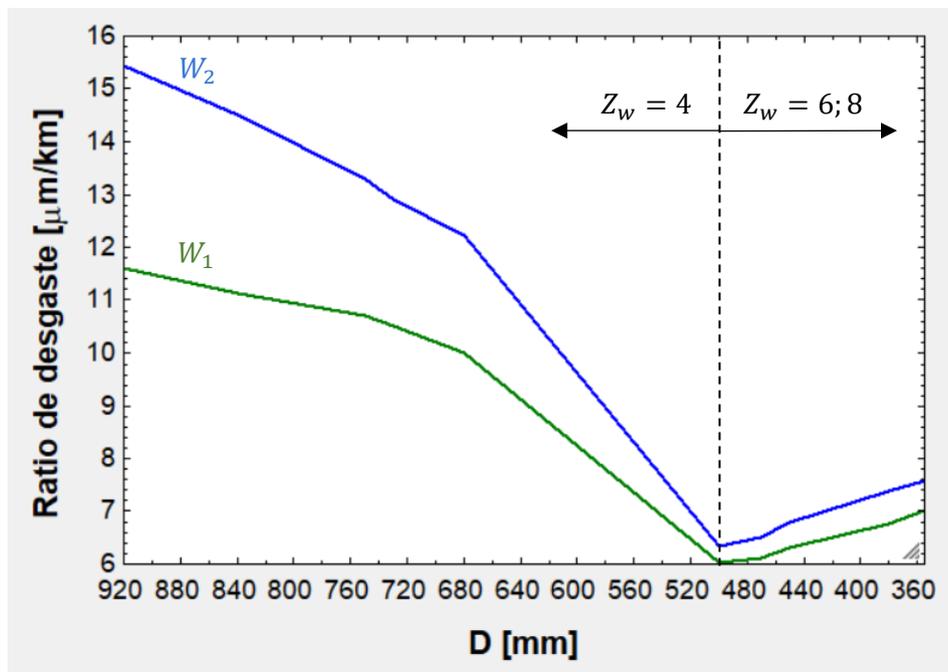


Figura VI.10. Evolución de la ratio de desgaste (BRR) con el diámetro en las ruedas delanteras de los bogies.

Contrariamente a lo esperado, la ratio de desgaste disminuye conforme decrece el diámetro en el rango $D \in [500; 920]$ mm. Esta tendencia se invierte por debajo de los 500 mm de diámetro, valor a partir del cual la ratio crece a medida que mengua el diámetro.

La explicación de este comportamiento no se encuentra en el número de ejes de los bogies (4 por encima de los 500 mm y 6 u 8 por encima de dicha cifra), que casualmente también experimenta un salto en los 500 mm de diámetro; sino en la constitución de la ley de desgaste.

Como se detalló en la [parte 5.2.4.1](#), la ley de desgaste de la BRR se basa en el índice de desgaste $T\gamma$, a partir del cual se calcula la tasa de desgaste W_R gracias a una función definida a trozos que hace las veces de correlación. Esta ley distingue entre tres regímenes de desgaste: suave (contacto banda de rodadura – carril), de transición y severo (contacto pestaña – carril).

Lo que sucede en realidad es que la discontinuidad de esta función definida a trozos (la cual ya se advirtió en el [subapartado 5.2.5](#)) falsea los resultados, lo cual obedece al hecho de que la discontinuidad aparece entre el régimen de transición y el severo, que es donde normalmente está el desgaste ocasionado por el contacto pestaña – carril.

Este falseamiento puede suceder de dos formas. En algunos contactos pestaña – carril sucede lo que se describe a continuación:

1. Una rueda de diámetro D_1 tiene un índice de desgaste $T\gamma_1$ en un contacto pestaña – carril. Con este índice, el desgaste cae en el régimen severo.
2. Otra rueda de diámetro $D_2 < D_1$ tiene un índice de desgaste $T\gamma_2$ en el mismo contacto pestaña – carril (en la misma curva del trazado). Como hay varios términos de los pseudodeslizamientos que decaen ligeramente con el diámetro (es el caso de \dot{y}/V , ya que el descentramiento y es menor cuanto más pequeño es el radio de la rueda, lo cual se puede visualizar en la [parte I.4.1.2](#), de donde sale la ecuación I.50), entonces se cumple $T\gamma_2 < T\gamma_1$. La consecuencia de esto es que el desgaste cae en el régimen de transición y entonces se tiene $W_{R,2} \ll W_{R,1}$ por culpa de la discontinuidad.

En otros contactos pestaña – carril, lo que sucede es diferente:

1. Una rueda de diámetro D_1 tiene un índice de desgaste $T\gamma_1 > 200$ N (régimen severo) en un contacto pestaña – carril.
2. Otra rueda de diámetro $D_2 < D_1$ tiene un índice de desgaste $T\gamma_2 > 200$ N en el mismo contacto pestaña – carril. $T\gamma_2 < T\gamma_1$ por el motivo explicado dos párrafos antes. Si la diferencia entre D_1 y D_2 es pequeña, entonces $T\gamma_2/D_2 < T\gamma_1/D_1$ y $W_{R,2} < W_{R,1}$, estando las dos tasas de desgaste en el régimen severo.

Cuando se combinan las dos situaciones recién descritas a lo largo de un gran porcentaje de las curvas del trazado, al final la ratio de desgaste es menor en la rueda de diámetro D_2 que en la de diámetro $D_1 > D_2$.

Cuando D decrece bastante $D < 500$ mm, $T\gamma$ también lo ha hecho, por lo que el desgaste cae, en un gran porcentaje de las curvas, en el régimen de transición ($100 \leq T\gamma < 200$ N), donde la tasa de

desgaste es prácticamente constante y únicamente depende del diámetro ($25/D$), por lo que se tiene claramente $W_{R,2} > W_{R,1}$ ($25/D_2 > 25/D_1$ porque $D_2 < D_1$).

Para finalizar el análisis comparativo, se muestra la evolución de la ratio de desgaste (BRR) con el diámetro en el resto de las ruedas de los bogies ($W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8$):

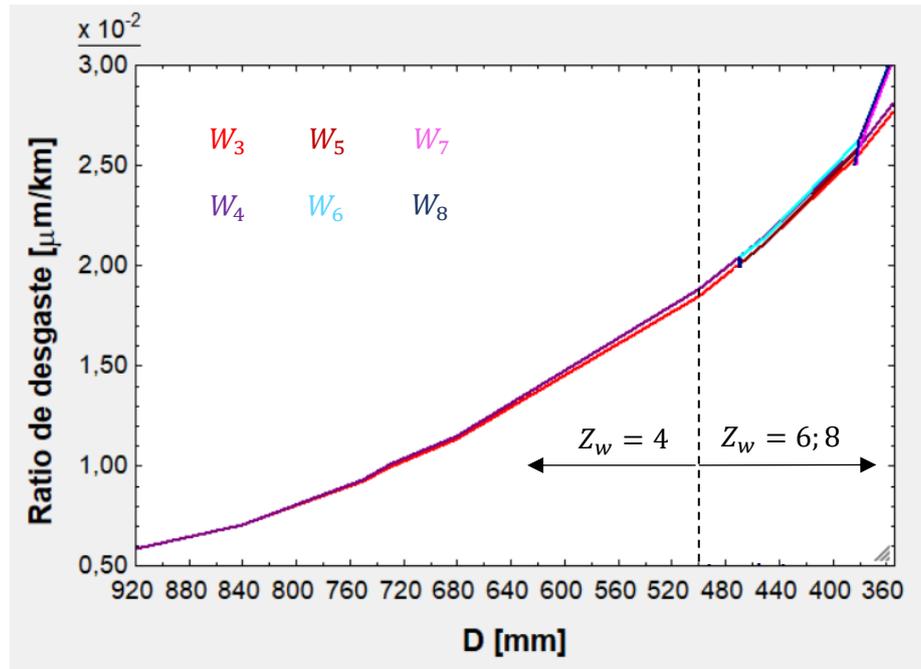


Figura VI.11. Evolución de la ratio de desgaste (BRR) con el diámetro en el resto de las ruedas de los bogies.

De esta gráfica se desprende, en primer lugar, que las ratios de desgaste son bajas, ya que proceden de tasas de desgaste W_R propias del régimen suave al no producirse el contacto pestaña – carril en ningún momento. Esto es debido a que el movimiento de los bogies es libre en todas las curvas, por lo que solo se producen los contactos pestaña – carril en sus ruedas delanteras.

Como consecuencia de esta permanencia en el régimen suave (alejado de la discontinuidad), la ratio de desgaste crece conforme disminuye el diámetro, cumpliéndose así la predicción inicial. Nótese que esta evolución no es lineal, sino más bien polinómica (cúbica, seguramente), lo cual encaja con el hecho de que la mayoría de las ecuaciones no son lineales (las [ecuaciones de la teoría Hertz](#) incluyen raíces cúbicas, lo cual induce a pensar que la evolución es cúbica).

Por último, cabe comentar que en estas ecuaciones intervienen los radios de curvatura de la radio y del carril. En un contacto banda de rodadura – carril, el radio de curvatura longitudinal de la rueda (R_{y_2}) varía bastante al disminuir el diámetro en relación con la curvatura lateral, que es fija y comparable con la anterior ($R_{x_1} = 300$ mm). Por ende, el área de contacto varía notablemente al variar el diámetro. Este efecto se combina con el incremento en el número de revoluciones que debe rotar una rueda conforme disminuye su diámetro para recorrer una distancia determinada.

VI.3. Escenario III. Repetición de los cálculos (USFD) y comparación con los previos (BRR).

VI.3.1. Planteamiento.

En la [subsección 5.2.5](#) se optó por utilizar las leyes de desgaste de la BRR y de la USFD, ambas pertenecientes al modelo de transferencia de energía, lo cual se realizó ante el desconocimiento de cuál de las dos leyes brindaba mejores resultados.

En este escenario se pretende repetir los resultados del escenario II en las mismas condiciones para así poder comparar el desgaste promedio en [$\mu\text{m}/\text{km}$] según la ley de la BRR con el desgaste promedio en [$\mu\text{m}/\text{km}$] según la ley de la USFD. Esto prima sobre la comparación visual, ya que se espera que los resultados visuales no varíen demasiado al cambiar de ley de desgaste.

Todos los resultados de este escenario se muestran ordenados en el [subapartado VI.3.2](#) según el número de ruedas de los bogies: [de 4 ruedas](#), [de 6 ruedas](#) y [de 8 ruedas](#). La interpretación de todos los resultados se lleva a cabo mediante un análisis comparativo en el [subapartado VI.3.3](#).

VI.3.2. Resultados.

VI.3.2.1. Bogies de 4 ruedas.

Los resultados de este escenario se presentan según las directrices expuestas en el subcapítulo anterior. De esta manera, lo que se muestra en primer lugar es la profundidad de desgaste máxima, ahora según la ley de la USFD, en las ruedas delanteras de los bogies Y – 25 y Saas z-706:

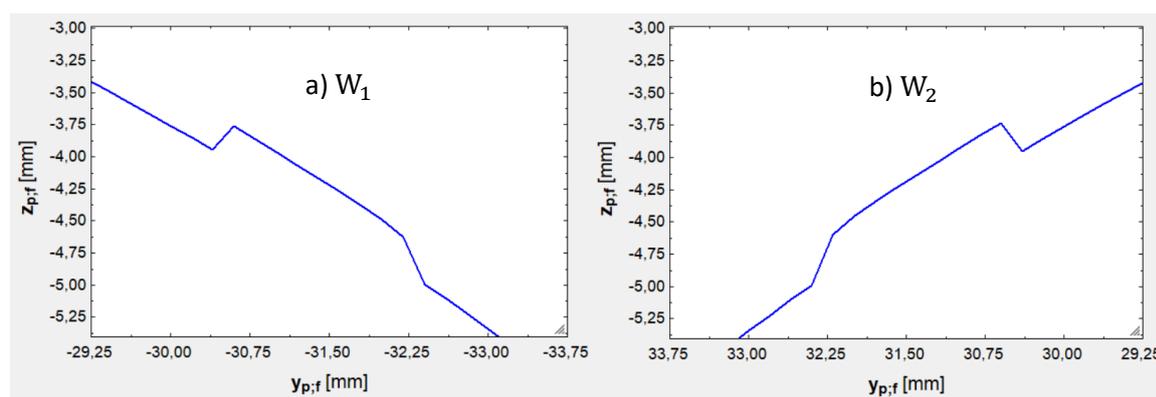


Figura VI.12. Profundidad de desgaste máxima (USFD) en las ruedas del bogie Y – 25 (920 mm).

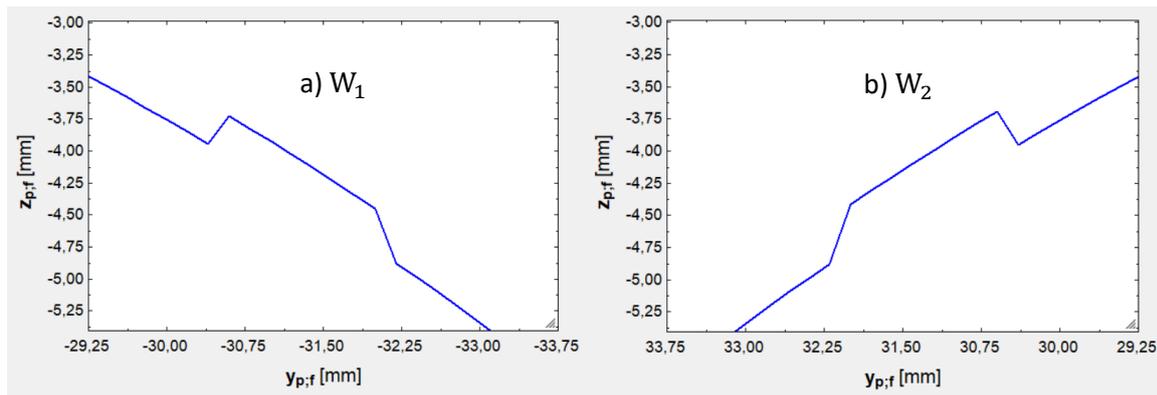


Figura VI.13. Profundidad de desgaste máxima (USFD) en las ruedas del bogie Saas z-706 (500 mm).

Tras esto, se crea una tabla que comparativa de las profundidades de desgaste máximas y de las ratios de desgaste promedio según las leyes de la BRR y de la USFD para los bogies de 4 ruedas. Inclúyese la diferencia porcentual entre las ratios, calculada tal que así:

$$Diferencia [\%] = \frac{(Ratio (USFD) - Ratio (BRR)) [\mu m/km]}{Ratio (BRR) [\mu m/km]} \cdot 100 [\%] \quad [Ec. VI. 5]$$

La tabla obtenida es:

Tabla VI.8. Comparación de la ratio de desgaste promedio (BRR y USFD) en los bogies de 4 ruedas.

Bogie (D)	Rueda	Prof. de desgaste (BRR) [mm]	Prof. de desgaste (USFD) [mm]	Ratio de desgaste (BRR) [$\mu m/km$]	Ratio de desgaste (USFD) [$\mu m/km$]	Diferencia [%]
Y – 25 (920 mm)	W ₁	0,437	0,253	11,611	6,722	-42,105
	W ₂	0,581	0,279	15,437	7,413	-51,979
	W ₃	$2,189 \cdot 10^{-4}$	$2,450 \cdot 10^{-4}$	$5,816 \cdot 10^{-3}$	$6,510 \cdot 10^{-3}$	+11,933
	W ₄	$2,188 \cdot 10^{-4}$	$2,449 \cdot 10^{-4}$	$5,814 \cdot 10^{-3}$	$6,510 \cdot 10^{-3}$	+11,971
Y – 33 (840 mm)	W ₁	0,419	0,259	11,133	6,882	-38,186
	W ₂	0,546	0,286	14,507	7,599	-47,618

	W ₃	2,652·10 ⁻⁴	2,954·10 ⁻⁴	7,046·10 ⁻³	7,849·10 ⁻³	+11,397
	W ₄	2,651·10 ⁻⁴	2,953·10 ⁻⁴	7,044·10 ⁻³	7,846·10 ⁻³	+11,386
Laas z-614 (a) (750 mm)	W ₁	0,403	0,266	10,708	7,068	-33,995
	W ₂	0,500	0,292	13,285	7,759	-41,596
	W ₃	3,473·10 ⁻⁴	3,848·10 ⁻⁴	9,227·10 ⁻³	1,022·10 ⁻²	+10,762
	W ₄	3,504·10 ⁻⁴	3,881·10 ⁻⁴	9,310·10 ⁻³	1,031·10 ⁻²	+10,741
Laas z-614 (b) (730 mm)	W ₁	0,395	0,268	10,495	7,121	-32,152
	W ₂	0,486	0,293	12,913	7,785	-39,712
	W ₃	3,727·10 ⁻⁴	4,124·10 ⁻⁴	9,903·10 ⁻³	1,096·10 ⁻²	+10,674
	W ₄	3,783·10 ⁻⁴	4,185·10 ⁻⁴	1,005·10 ⁻²	1,111·10 ⁻²	+10,547
Saas z-703 (680 mm)	W ₁	0,376	0,272	9,990	7,227	-27,660
	W ₂	0,460	0,298	12,222	7,918	-35,215
	W ₃	4,260·10 ⁻⁴	4,702·10 ⁻⁴	1,131·10 ⁻²	1,250·10 ⁻²	+10,522
	W ₄	4,331·10 ⁻⁴	4,780·10 ⁻⁴	1,151·10 ⁻²	1,270·10 ⁻²	+10,339
Saas z-706 (500 mm)	W ₁	0,227	0,282	6,031	7,493	+24,229
	W ₂	0,239	0,310	6,350	8,237	+29,717
	W ₃	6,945·10 ⁻⁴	7,601·10 ⁻⁴	1,845·10 ⁻²	2,020·10 ⁻²	+9,485
	W ₄	7,071·10 ⁻⁴	7,740·10 ⁻⁴	1,879·10 ⁻²	2,057·10 ⁻²	+9,473

VI.3.2.2. Bogie de 6 ruedas.

En el caso del único bogie de 6 ruedas se pueden apreciar estas profundidades de desgaste máximas en sus ruedas delanteras:

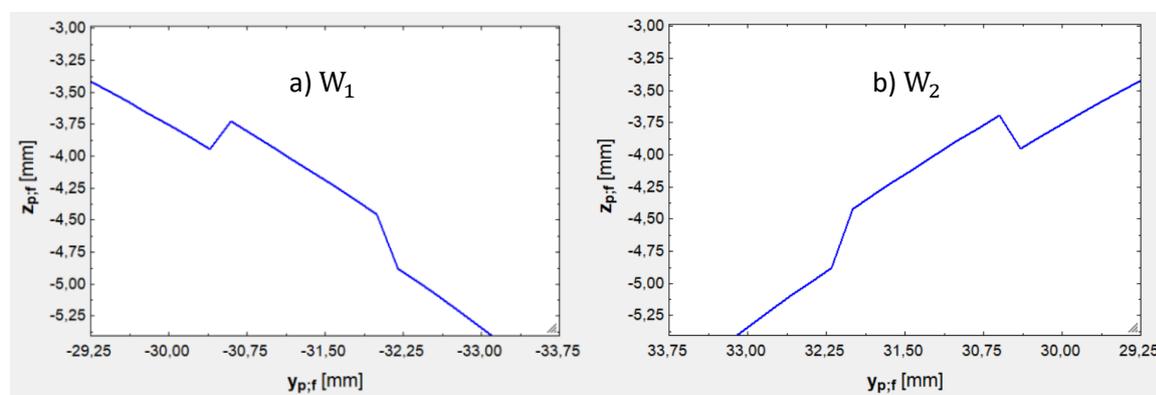


Figura VI.14. Profundidad de desgaste máxima (USFD) en las ruedas del bogie 691 (450 mm).

En esta tabla se recoge la comparativa de los resultados de desgaste para las 6 ruedas del bogie:

Tabla VI.9. Comparación de la ratio de desgaste promedio (BRR y USFD) en el bogie de 6 ruedas.

Bogie (D)	Rueda	Prof. de desgaste (BRR) [mm]	Prof. de desgaste (USFD) [mm]	Ratio de desgaste (BRR) [$\mu\text{m}/\text{km}$]	Ratio de desgaste (USFD) [$\mu\text{m}/\text{km}$]	Diferencia [%]
Bogie 691 (450 mm)	W ₁	0,237	0,284	6,297	7,546	+19,835
	W ₂	0,255	0,314	6,775	8,343	+23,144
	W ₃	$7,951 \cdot 10^{-4}$	$8,702 \cdot 10^{-4}$	$2,113 \cdot 10^{-2}$	$2,312 \cdot 10^{-2}$	+9,418
	W ₄	$8,079 \cdot 10^{-4}$	$8,843 \cdot 10^{-4}$	$2,147 \cdot 10^{-2}$	$2,350 \cdot 10^{-2}$	+9,455
	W ₅	$7,942 \cdot 10^{-4}$	$8,693 \cdot 10^{-4}$	$2,110 \cdot 10^{-2}$	$2,310 \cdot 10^{-2}$	+9,479
	W ₆	$8,071 \cdot 10^{-4}$	$8,834 \cdot 10^{-4}$	$2,144 \cdot 10^{-2}$	$2,347 \cdot 10^{-2}$	+9,468

VI.3.2.3. Bogies de 8 ruedas.

Del mismo modo se procede para los bogies de 8 ruedas, empezando por la presentación de las profundidades máximas de desgaste en las ruedas delanteras para el bogie cuyas ruedas tienen el mayor diámetro nominal (470 mm, que se alcanzan en el bogie BA 741) y el menor diámetro (355 mm, que se alcanzan en el bogie Graz Pauker 702):

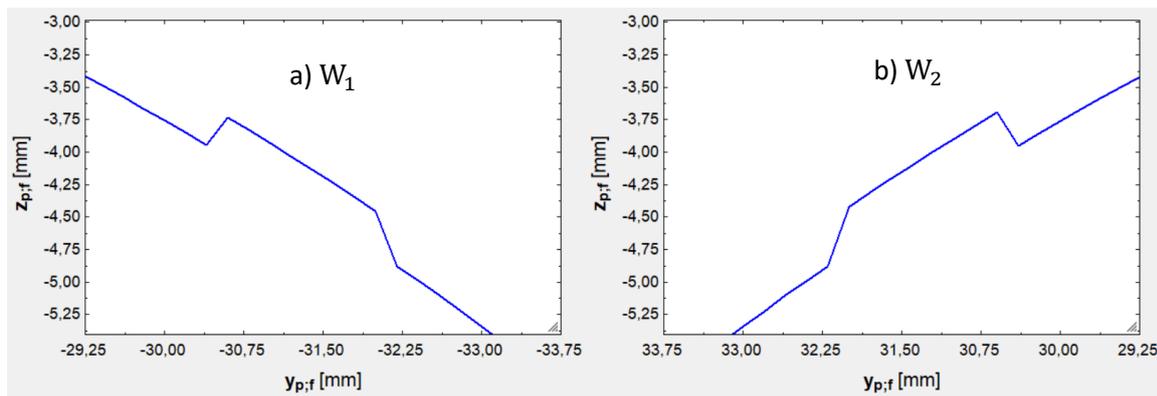


Figura VI.15. Profundidad de desgaste máxima (USFD) en las ruedas del bogie BA 741 (470 mm).

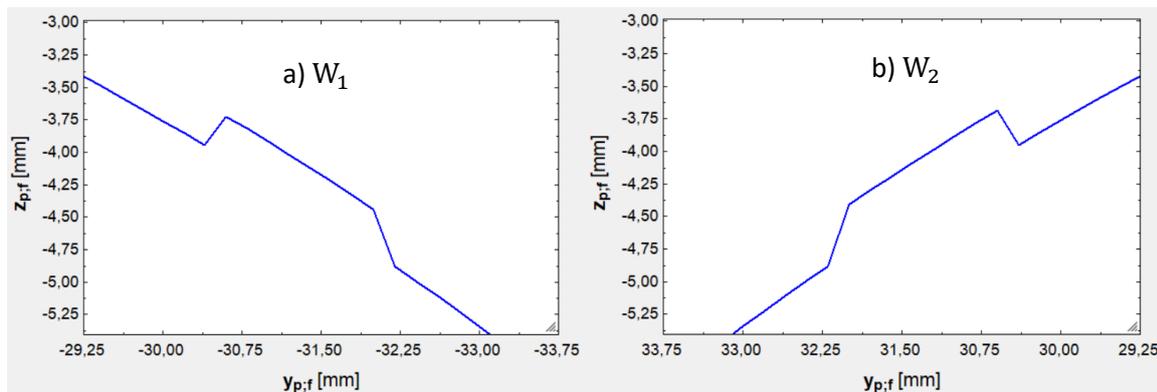


Figura VI.16. Profundidad de desgaste máxima (USFD) en las ruedas del bogie Graz Pauker 702 (355 mm).

Y continuando por la creación de la tabla comparativa correspondiente con los resultados de desgaste para las 8 ruedas de los 3 bogies dotados de tal cantidad de ruedas:

Tabla VI.10. Comparación de la ratio de desgaste promedio (BRR y USFD) en los bogies de 8 ruedas.

Bogie (D)	Rueda	Prof. de desgaste (BRR) [mm]	Prof. de desgaste (USFD) [mm]	Ratio de desgaste (BRR) [$\mu\text{m}/\text{km}$]	Ratio de desgaste (USFD) [$\mu\text{m}/\text{km}$]	Diferencia [%]
BA 741 (470 mm)	W ₁	0,230	0,283	6,111	7,519	+23,040
	W ₂	0,245	0,313	6,510	8,317	+27,757
	W ₃	$7,564 \cdot 10^{-4}$	$8,279 \cdot 10^{-4}$	$2,010 \cdot 10^{-2}$	$2,200 \cdot 10^{-2}$	+9,453
	W ₄	$7,678 \cdot 10^{-4}$	$8,413 \cdot 10^{-4}$	$2,040 \cdot 10^{-2}$	$2,224 \cdot 10^{-2}$	+9,020
	W ₅	$7,557 \cdot 10^{-4}$	$8,272 \cdot 10^{-4}$	$2,008 \cdot 10^{-2}$	$2,198 \cdot 10^{-2}$	+9,462
	W ₆	$7,680 \cdot 10^{-4}$	$8,406 \cdot 10^{-4}$	$2,040 \cdot 10^{-2}$	$2,223 \cdot 10^{-2}$	+8,971
	W ₇	$7,553 \cdot 10^{-4}$	$8,266 \cdot 10^{-4}$	$2,007 \cdot 10^{-2}$	$2,196 \cdot 10^{-2}$	+9,417
	W ₈	$7,676 \cdot 10^{-4}$	$8,401 \cdot 10^{-4}$	$2,040 \cdot 10^{-2}$	$2,223 \cdot 10^{-2}$	+8,971
Saadkms 690 (380 mm)	W ₁	0,254	0,291	6,749	7,732	+14,565
	W ₂	0,278	0,319	7,387	8,476	+14,742
	W ₃	$9,610 \cdot 10^{-4}$	$1,052 \cdot 10^{-3}$	$2,553 \cdot 10^{-2}$	$2,795 \cdot 10^{-2}$	+9,479
	W ₄	$9,758 \cdot 10^{-4}$	$1,068 \cdot 10^{-3}$	$2,593 \cdot 10^{-2}$	$2,838 \cdot 10^{-2}$	+9,449
	W ₅	$9,741 \cdot 10^{-4}$	$1,066 \cdot 10^{-3}$	$2,588 \cdot 10^{-2}$	$2,832 \cdot 10^{-2}$	+9,428
	W ₆	$9,891 \cdot 10^{-4}$	$1,083 \cdot 10^{-3}$	$2,628 \cdot 10^{-2}$	$2,878 \cdot 10^{-2}$	+9,513
	W ₇	$9,734 \cdot 10^{-4}$	$1,065 \cdot 10^{-3}$	$2,586 \cdot 10^{-2}$	$2,830 \cdot 10^{-2}$	+9,435
	W ₈	$9,884 \cdot 10^{-4}$	$1,082 \cdot 10^{-3}$	$2,626 \cdot 10^{-2}$	$2,875 \cdot 10^{-2}$	+9,482

Graz Pauker 702 (355 mm)	W_1	0,264	0,295	7,015	7,838	+11,732
	W_2	0,285	0,321	7,573	8,529	+12,624
	W_3	$1,041 \cdot 10^{-3}$	$1,140 \cdot 10^{-3}$	$2,766 \cdot 10^{-2}$	$3,029 \cdot 10^{-2}$	+9,508
	W_4	$1,057 \cdot 10^{-3}$	$1,157 \cdot 10^{-3}$	$2,808 \cdot 10^{-2}$	$3,074 \cdot 10^{-2}$	+9,473
	W_5	$1,141 \cdot 10^{-3}$	$1,249 \cdot 10^{-3}$	$3,032 \cdot 10^{-2}$	$3,318 \cdot 10^{-2}$	+9,433
	W_6	$1,152 \cdot 10^{-3}$	$1,261 \cdot 10^{-3}$	$3,061 \cdot 10^{-2}$	$3,351 \cdot 10^{-2}$	+9,474
	W_7	$1,139 \cdot 10^{-3}$	$1,247 \cdot 10^{-3}$	$3,026 \cdot 10^{-2}$	$3,313 \cdot 10^{-2}$	+9,484
	W_8	$1,150 \cdot 10^{-3}$	$1,259 \cdot 10^{-3}$	$3,056 \cdot 10^{-2}$	$3,345 \cdot 10^{-2}$	+9,457

VI.3.3. Análisis comparativo.

Para comenzar el análisis comparativo, se ha tomado la gráfica VI.10 del [subapartado VI.2.3](#) y se ha incluido la evolución de la ratio de desgaste (USFD) con el diámetro en las ruedas delanteras de los bogies a fin de poder comparar la evolución de las ratios según la ley de la BRR con la evolución de las ratios según la ley de la USFD:

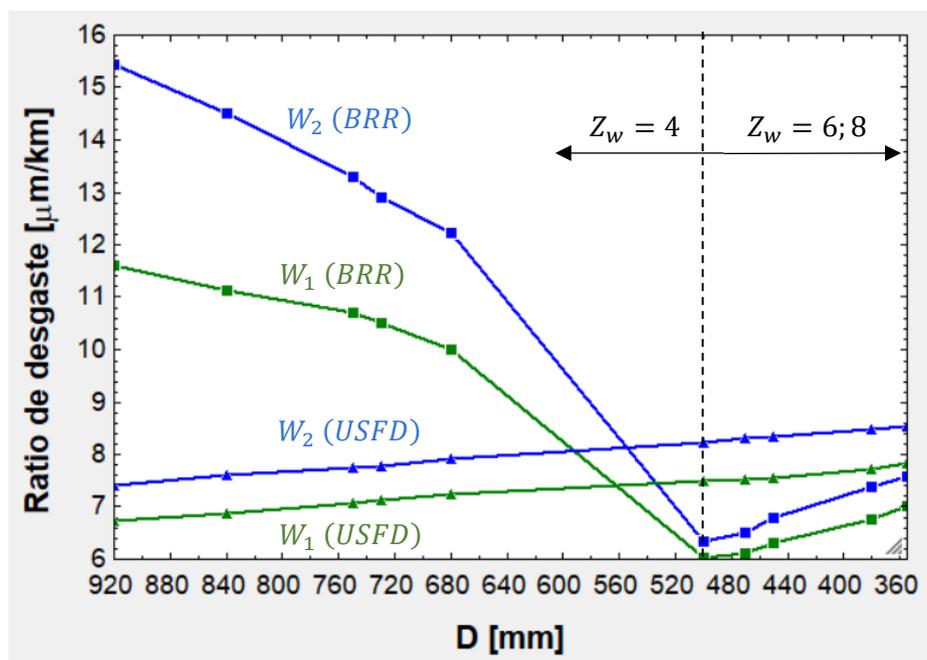


Figura VI.17. Evolución de la ratio de desgaste (BRR y USFD) con el diámetro en las ruedas delanteras de los bogies.

Al contrario de lo que sucede con las ratios según la ley de la BRR, cuyas evoluciones ya se justificaron extensamente en el [subapartado IV.2.3](#), en las ratios según la ley de la USFD se observa una evolución esperada, si bien algo débil.

Es decir, estas ratios crecen en todo momento conforme decrece el diámetro, si bien el incremento calculado entre el inicio del rango (920 mm) y el final del rango (355 mm) es tan solo del 16,602 % en W_1 y del 15,054 % en W_2 . Es decir, la rueda de 355 mm debe rotar más del doble veces que la de 920 mm al recorrer una determinada distancia (2,591 es la ratio exacta, que proviene de $920/355$) pero la ratio de desgaste de la primera no se multiplica por el mismo factor con respecto al de la segunda.

Esto es debido al ligero decremento en el índice de desgaste $T\gamma$ al menguar el diámetro, que ya se comentó en el subapartado previo. Este decremento es contrarrestado por algunos términos de los pseudodeslizamientos que sí aumentan (el giro o espín, por ejemplo), por el mayor número de revoluciones y por la menor área de contacto de una rueda de menor diámetro respecto a una de mayor diámetro. Gracias a esta contrarresta y al hecho de que la función que correlaciona la tasa de desgaste W_R con $T\gamma/A_c$ es continua, se logra evitar la tendencia observada en las curvas obtenidas según la ley de la BRR.

También debe considerarse que el radio de curvatura longitudinal del arranque de la pestaña (R_{y_2}) varía poco al disminuir el diámetro en relación con las curvaturas laterales, que son fijas ($R_{x_1} = 13$ mm y $R_{x_2} = 36$ mm). Estas dos últimas son mucho menores que R_{y_2} y, debido a ello, las dimensiones del área de contacto A_c varían poco al disminuir el diámetro. Ello debilita el incremento del índice de desgaste $T\gamma/A_c$ y, por ende, también el incremento de W_R y de la ratio de desgaste, en definitiva.

Para finalizar el análisis comparativo, se ha tomado la gráfica VI.11 del subapartado referenciado y se ha agregado la evolución de la ratio de desgaste (USFD) con el diámetro en el resto de las ruedas de los bogies:

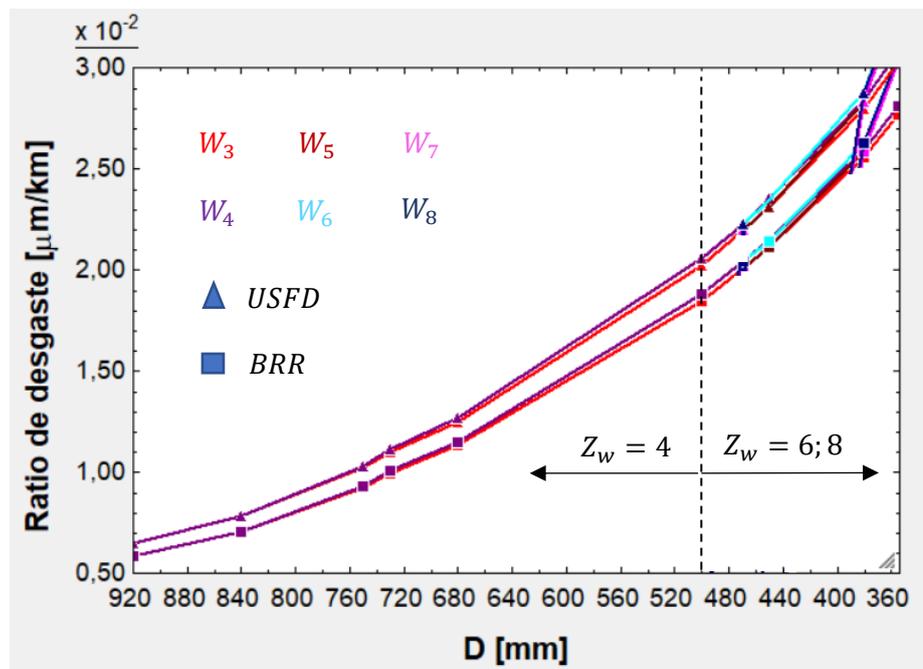


Figura VI.18. Evolución de la ratio de desgaste (BRR y USFD) con el diámetro en el resto de las ruedas de los bogies.

De esta gráfica se desprende que los ratios de desgaste evolucionan de la misma manera independientemente de que se hayan obtenido según la ley de la BRR o de la USFD. Trátase de una evolución polinómica (cúbica, seguramente), como ya se advirtió en el subapartado referenciado.

La diferencia fundamental es que los ratios calculados según la ley de la USFD superan en un 9 % a aquellas obtenidas según la ley de la BRR, lo cual indica que la ley de la USFD es ligeramente más conservadora que la de la BRR. Esto probablemente provenga de las hipótesis adoptadas en el desarrollo de ambas leyes y en las condiciones en las cuales se desarrollaron los experimentos.

Por último, cabe notar que el ratio de desgaste se multiplica entre 3 y 4 veces al pasar de un extremo al otro. Esto se debe a que estos ratios provienen del contacto banda de rodadura – carril en todo el recorrido (incluso en las curvas) y aquí los factores más relevantes son el importante decremento del área de contacto (porque R_{y_2} es comparable a R_{x_1}) y la casi triplicación del número de revoluciones.

VI.4. Escenario IV. Comprobaciones de bloqueo y descarrilamiento.

VI.4.1. Planteamiento.

Hasta ahora se asumido que las ruedas del vehículo no se bloqueaban y tampoco descarrilaban. Esto podría no ser cierto, por lo que es necesario comprobarlo. Esto es útil, ya que, si finalmente se verifica el bloqueo o el descarrilamiento, entonces habrá que afinar los parámetros para evitar estas situaciones límites que tan adversos efectos desencadenan: en el bloqueo de las ruedas se genera el daño catastrófico llamado plano, mientras que en el descarrilamiento se arruina la mercancía al volcar.

Por ello, van a tomarse dos bogies y se van a realizar las comprobaciones en diferentes situaciones. Los bogies tomados poseen ruedas de diferente tamaño, dado que esto permitirá conocer cómo afecta el diámetro de la rueda en tales comprobaciones. De esta forma, se toman estos dos bogies:

- ✓ El bogie modificado Y – 25 (con ruedas de 920 mm). Para este bogie se toman los datos empleados durante el [planteamiento del escenario II](#) (véase la figura VI.3 y la tabla VI.4).
- ✓ El bogie modificado Graz Pauker 702 (con ruedas de 355 mm). Para este bogie también se toman todos los datos presentados durante el planteamiento del escenario II.

Las situaciones de cálculo que se plantean son:

1. Clotoide de entrada que empalma una alineación recta con una curva circular de 265 m de radio (la menor del trazado de ensayo, presente en la tabla V.11).
2. Curva circular de 265 m de radio. Como en el trazado de ensayo, a esta curva se le asigna un peralte de 140 mm y una velocidad inicial y final de 70 km/h.
3. Clotoide de salida que empalma la curva circular de 265 m con otra alineación recta.
4. Clotoide de entrada que conecta una alineación recta con una curva circular de 880 m de radio (también presente en el trazado, presente en la tabla V.5).
5. Curva circular de 880 m de radio. Como en el trazado de ensayo, a esta curva se le asigna un peralte de 140 mm y una velocidad inicial y final de 70 km/h (como en la curva de 265 m).
6. Clotoide de salida que conecta la curva circular de 880 m con otra alineación recta.

Esto se realiza tanto si las curvas son a derechas como si son a izquierdas, para de esta forma observar si el sentido de la curva tiene alguna influencia. Además, para realizar el cálculo en las condiciones más desfavorables, a estas curvas se les asigna una pendiente del 17,1 ‰, para que de esta manera sean necesarios esfuerzos de frenada para mantener la velocidad del vehículo constante; y, además, una longitud de 60 m (longitud de las curvas más cerradas) para que el valor de $\dot{\psi}$ sea elevado.

Los resultados se presentan en formato tabular en la [subsección VI.4.2](#). Posteriormente, en la [subsección IV.4.3](#), se realiza un análisis comparativo de los mismos.

VI.4.2. Resultados.

VI.4.2.1. Primera aproximación, sin considerar el efecto de la fuerza centrífuga no compensada.

Para comprobar el bloqueo lo que se realiza una suma vectorial de las fuerzas de fricción tangenciales al área de contacto rueda – carril (F_x y F_y) y se verifica si esta suma es mayor o menor que la fuerza tangencial máxima transmisible (que es μN_{\perp}). Matemáticamente:

$$\begin{cases} \sqrt{F_x^2 + F_y^2} < \mu N_{\perp} \rightarrow \text{No existe bloqueo} \\ \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \geq \mu N_{\perp} \rightarrow \text{Existe bloqueo} \end{cases}$$

En el caso del descarrilamiento se realiza una comprobación similar, pero con las fuerzas abordadas en la [parte III.5.5.2](#). Es importante destacar, con respecto a las ecuaciones presentadas en esta parte, que el máximo empuje ascensional posible (que es μN_p) se le resta en este caso la fricción consumida por F_x y F_y (su suma vectorial) y que a las componentes tangenciales de ζ_v y ζ_h se les resta F_y en una curva a derechas (porque si F_y es positiva, entonces irá en el sentido de la componente tangencial de ζ_h) o se les suma en una curva a izquierdas (porque el sentido del eje y_c se invierte):

$$\begin{cases} \mu N_p - \sqrt{F_x^2 + F_y^2} < \zeta_v \text{sen} \gamma_o - |\zeta_h| \text{cos} \gamma_o \pm F_y \rightarrow \text{No existe descarrilamiento} \\ \mu N_p - \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \geq \zeta_v \text{sen} \gamma_o - |\zeta_h| \text{cos} \gamma_o \pm F_y \rightarrow \text{Puede existir descarrilamiento} \end{cases}$$

Nótese que en el segundo caso se afirma “puede existir descarrilamiento” en vez de “existe descarrilamiento”. Esto es porque en principio se considera $\gamma_o = 32^\circ$, pero si la segunda inecuación se cumple, entonces este ángulo aumentará y las fuerzas se intentarán reequilibrar. El descarrilamiento se producirá cuando $\gamma_o > 80^\circ$ (ángulo que aparece en la curva de la punta de la pestaña).

De momento no se va a considerar el posible efecto de las fuerzas de fricción que compensan fuerza centrífuga no compensada por el peralte para no complicar la obtención de resultados (que son fuerzas no asociadas a ningún pseudodeslizamiento). Entonces, se va a seguir considerando que estas fuerzas provienen del coeficiente de fricción estática. Si se ve que la rueda se encuentra al borde del bloqueo o del descarrilamiento, entonces se añadirá el efecto de las fuerzas de fricción (las cuales pasarán a ser dinámicas en una situación límite).

En las siguientes dos tablas se recogen todos los cálculos expuestos, aunque por partes para que sea más fácil realizar las comparaciones expresadas matemáticamente mediante inecuaciones.

Antes de pasar a mostrar las tablas, cabe concretar que en la primera tabla se muestran los resultados cuando las curvas definidas son a derechas (la pestaña de la rueda W_1 es la que contacta con el carril) y en la segunda tabla cuando son a izquierdas (la pestaña de la rueda W_2 es la que contacta con el carril):

Tabla VI.11 Comprobaciones de bloqueo y descarrilamiento en las curvas a derechas (W_1).

Situación	Bogie	Suma vectorial de F_x y F_y [N]	Fuerza máxima transmisible [N]	Suma de las fuerzas en el eje y_c [N]	Máximo empuje ascensional [N]
Clotoide con $R_L = 265$ m	Y – 25	31.837	36.615	-1.858	4.778
	Graz P. 702	11.607	13.355	571	1.748
Curva circular con $R = 265$ m	Y – 25	43.032	45.279	-14.481	2.247
	Graz P. 702	16.617	17.570	-8.444	953
Clotoide con $R_o = 265$ m	Y – 25	32.227	36.809	-2.950	4.532
	Graz P. 702	11.845	13.513	-202	1.668
Clotoide con $R_L = 880$ m	Y – 25	25.187	30.812	5.290	5.625
	Graz P. 702	8.737	10.583	5.808	1.846
Curva circular con $R = 880$ m	Y – 25	28.164	33.444	1.901	5.280
	Graz P. 702	10.037	11.872	3.247	1.835
Clotoide con $R_o = 880$ m	Y – 25	25.363	30.902	4.807	5.539
	Graz P. 702	8.832	10.658	5.445	1.825

Tabla VI.12. Comprobaciones de bloqueo y descarrilamiento en las curvas a izquierdas (W_2).

Situación	Bogie	Suma vectorial de F_x y F_y [N]	Fuerza máxima transmisible [N]	Suma de las fuerzas en el eje y_c [N]	Máximo empuje ascensional [N]
Clotoide con $R_L = 265$ m	Y – 25	33.465	38.141	-8.731	4.675
	Graz P. 702	14.180	16.192	-11.644	2.012

Curva circular con $R = 265$ m	Y – 25	44.641	46.428	-20.159	1.788
	Graz P. 702	19.376	20.214	-20.063	839
Clotoide con $R_o = 265$ m	Y – 25	33.927	38.331	-9.806	4.404
	Graz P. 702	14.446	16.345	-12.400	1.900
Clotoide con $R_L = 880$ m	Y – 25	26.599	32.318	-1.288	5.719
	Graz P. 702	11.054	13.360	-6.054	2.306
Curva circular con $R = 880$ m	Y – 25	29.675	34.958	-4.797	5.283
	Graz P. 702	12.448	14.649	-8.658	2.200
Clotoide con $R_o = 880$ m	Y – 25	26.780	32.400	-1.740	5.621
	Graz P. 702	11.159	13.430	-6.389	2.271

VI.4.2.2. Segunda aproximación, considerando el efecto de la aceleración centrífuga no compensada.

En esta parte se va a considerar el efecto de la fuerza centrífuga no compensada. Para ello, lo que se pretende es modificar las inecuaciones presentadas en la parte anterior para incluir el término de fuerza centrífuga no compensada, que es el que sigue:

$$F_{nc} = \lambda_{eje} |a_{lat}| \quad [VI.6]$$

Para incluir este término se puede asumir que la rueda externa, cuya fuerza normal es mayor, contrarresta la parte de F_{nc} proporcional a la ratio entre su fuerza normal (la vertical, sin descomponer) y la suma de las fuerzas normales de la rueda externa y la interna, las verticales, sin descomponer):

$$F_{nc} (\text{rueda ext.}) = \lambda_{eje} |a_{lat}| \frac{N_e}{N_e + N_i}$$

$$F_{nc,e} = \lambda_{eje} |a_{lat}| \frac{N_e}{N_e + N_i} \quad [VI.7]$$

Si se descompone en el eje y_c :

$$F'_{nc,e} = \lambda_{eje} |a_{lat}| \frac{N_e}{N_e + N_i} \cos \gamma_o \quad [VI. 8]$$

Esta fuerza se incluye de esta forma en las inecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt{F_x^2 + (F_y \pm F'_{nc,e})^2} < \mu N_{\perp} \rightarrow \text{No existe bloqueo} \\ \sqrt{F_x^2 + (F_y \pm F'_{nc,e})^2} \geq \mu N_{\perp} \rightarrow \text{Existe bloqueo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu N_p - \sqrt{F_x^2 + (F_y \pm F'_{nc,e})^2} < \zeta_v \text{sen} \gamma_o - |\zeta_h| \cos \gamma_o \pm F_y \pm F'_{nc,e} \rightarrow \text{No existe descarrilamiento} \\ \mu N_p - \sqrt{F_x^2 + (F_y \pm F'_{nc,e})^2} \geq \zeta_v \text{sen} \gamma_o - |\zeta_h| \cos \gamma_o \pm F_y \pm F'_{nc,e} \rightarrow \text{Puede existir descarrilamiento} \end{cases}$$

donde el signo negativo se aplica en las curvas a derechas (porque $F'_{nc,e}$ va en el sentido negativo del eje y_c) y el signo positivo se aplica en las curvas a izquierdas (porque $F'_{nc,e}$ va en el sentido positivo del eje y_c).

Con el objetivo de economía, esta segunda aproximación únicamente se va a aplicar en los casos más críticos, es decir, los más próximos a situaciones de bloqueo o descarrilamiento en las tablas VI.11 y VI.12: curva circular de 265 m de radio, tanto a derechas cuanto a izquierdas.

Estas nuevas comprobaciones se recogen a continuación, en una nueva tabla:

Tabla VI.13. Inclusión del efecto de la fuerza centrífuga no compensada en las comprobaciones.

Situación	Bogie	Suma vectorial de F_x y F_y [N]	Fuerza máxima transmisible [N]	Suma de las fuerzas en el eje y_c [N]	Máximo empuje ascensional [N]
Curva circular a derechas con $R = 265$ m (W_1)	$\gamma - 25$	37.187	45.279	-20.331	8.093
	Graz P. 702	14.444	17.570	-10.622	3.125
Curva circular a izquierdas con $R = 265$ m (W_2)	$\gamma - 25$	38.795	46.428	26.756	7.633
	Graz P. 702	17.203	20.214	-17.883	3.012

VI.4.3. Análisis comparativo.

En esta subsección se van a comparar las fuerzas presentadas dentro de una misma tabla entre sí y, posteriormente, las fuerzas presentadas en diferentes tablas entre sí. Esta comparación puede ser numérica, no siendo necesaria la creación de gráficas:

1. En la tabla VI.11 se observa que la fuerza máxima transmisible (μN_p) es siempre mayor a la suma vectorial de las fuerzas tangenciales F_x y F_y , lo cual significa que la rueda W_1 no se bloquea al recorrer las curvas a derechas. No se puede aseverar lo mismo para la situación de descarrilamiento, pues en muchas ocasiones el máximo empuje ascensional (μN_p menos la suma vectorial de las fuerzas F_x y F_y) es en ocasiones mucho mayor que la suma de fuerzas en el eje y_c . Esto significa que $\gamma_o = 32^\circ$ es un ángulo de contacto insuficiente (porque el empuje causa que la pestaña suba) y que deberá aumentar para que las fuerzas se reequilibren en estas situaciones.
2. En la tabla VI.12 se puede observar lo mismo: la rueda, en este caso W_2 , nunca se bloquea al recorrer las curvas a derechas, pero en varias ocasiones las fuerzas actuantes sobre la pestaña están desequilibradas.
3. En la tabla VI.13 se puede observar cómo de la fuerza centrífuga no compensada no cambia la situación, que se mantiene similar al producirse cambios en ambos lados de las inecuaciones. A modo de ejemplo, puede apreciarse un incremento en el máximo empuje ascensional, pero por otra parte disminuye la suma de fuerzas en el eje γ_o , por lo que el resultado de la comparación queda similar.
4. En general, dentro de las tablas VI.12 y VI.13 se observa que los resultados prácticamente no varían entre las curvas de transición de entrada y las curvas de transición de salida con el mismo, por lo que la posición del bogie en la curva (entrada o salida) no es influyente.
5. En todas las tablas puede verse cómo no hay grandes diferencias entre los dos bogies. Por ejemplo, en la primera curva de la tabla VI.13 se aprecia cómo en el bogie Y – 25 se consume un 82,12 % de la adherencia ($37.187 \cdot 100 / 45.279$) y en el bogie Graz Pauker 702 un 82,21 % ($14.444 \cdot 100 / 17.570$). Esto es debido a que estas ratios dependen del nivel de pseudodeslizamiento relativo alcanzado (siendo 1 el que provoca el bloqueo) y lo que sucede es que ambos bogies están sometidos a niveles muy parecidos de pseudodeslizamiento (el Graz Pauker tiene un mayor espín por el menor radio de sus ruedas, pero esto se compensa con un menor descentramiento teórico).
6. Finalmente, de la comparación de las tablas VI.12 y VI.13 se puede deducir que las curvas a izquierdas son más desfavorables que las curvas a derechas, ya que en las primeras alteran las sumas de las fuerzas en el eje y_c en mayor medida que el máximo empuje ascensional. En cambio, las fuerzas usadas para las comprobaciones de bloqueo apenas varían.

Tras haber realizado este análisis comparativo, se dispone el afinado del parámetro γ_o con el fin de llegar al reequilibrio de las fuerzas y evitar que γ_o rebase los 80° (lo cual conduciría inexorablemente al descarrilamiento).

VI.5. Escenario V. Comprobaciones de descarrilamiento con otros ángulos de contacto.

VI.5.1. Planteamiento.

Del escenario previo se coligen dos ideas centrales:

1. No se produce el bloqueo en ninguna situación, ni siquiera en la más crítica.
2. El ángulo de contacto $\gamma_o = 32^\circ$ es insuficiente en varias situaciones, en las cuales haría falta un ángulo de contacto mayor para el alcance del equilibrio de las fuerzas sobre la pestaña.

Por tanto, no es necesario repetir las comprobaciones de bloqueo, pero, en cambio, sí es necesario repetir las comprobaciones con ángulos de contacto distintos de 32° y que sean mayores, como los incluidos en el rango creado en la [parte 8.5.4.3](#). Esto es lo que se va a realizar en este escenario.

En concreto, lo que se pretende en este escenario es obtener los nuevos balances de fuerzas en la pestaña para valores mayores de γ_o y verificar que se cumpla el equilibrio y que se evite el descarrilamiento en todo momento. Para ello, lo primero que se proponen son estos valores de γ_o : 40° , 55° , 70° y 80° (aunque 80° se sale del rango establecido para el análisis de sensibilidad, pero en este caso es necesario por ser el valor por encima del cual se produce el descarrilamiento). En la tabla de resultados también se incluirán los resultados para 32° con el propósito de observar mejor la evolución.

Recuérdese que los valores de R_{x_2} , r_p y k deben variarse cada vez que se varíe el ángulo γ_o . El valor de R_{x_2} se toma 36 mm hasta los 36° , 13 mm entre 36° y 70° y 20 mm a partir de 70° . El valor de r_p se toma 0,182 m en 32° , 0,184 m en 40° , 0,188 m en 55° , 0,191 m en 70° y 0,196 m en 80° . Y, finalmente, el valor de k se obtiene siempre como la tangente de γ_o : 0,625 para 32° , 0,839 para 40° , 1,428 para 55° , 2,747 para 70° y 5,671 para 80° .

Una vez definidos los valores γ_o y los valores subyacentes de R_{x_2} y r_p , es necesario definir las curvas (tipo, sentido, posición, radio) y el bogie que se va a ensayar. Dado que en el escenario previo se vio que las situaciones más desfavorables surgían en las curvas circulares a izquierdas recorridas por el bogie Graz Pauker 702 (con ruedas de 355 mm), en el presente escenario solamente se van a ensayar curvas de este tipo y se van a utilizar los parámetros de este bogie (del modificado, es decir, el empleado en los escenarios previos).

Con respecto al radio de estas curvas circulares a izquierdas, lo que se propone es variarlo más que en el escenario previo. Los radios de ensayo propuestos son (los cuales no tienen por qué coincidir con los radios del trazado de ensayo): 265, 470, 675, 880, 1.085, 1.290, 1.495 y 1.700 m. No se continúa con 1.905 y 2.110 m porque no se produce el contacto pestaña – carril con estos radios tan elevados (el descentramiento es pequeño, ya que las ruedas del bogie Graz Pauker 702 son las de menor tamaño y, por tanto, las que de menor descentramiento precisan).

Todos los resultados de este escenario se muestran tabulados en el [subapartado VI.5.2](#). Estos resultados se interpretan en el [subapartado VI.5.3](#) mediante un análisis comparativo y son importantes, puesto que servirán para el planteamiento de los próximos escenarios.

VI.5.2. Resultados.

Todos los resultados de este escenario se incluyen en la siguiente tabla, la cual contiene estos cálculos para cada curva y, a su vez, para cada ángulo:

- La suma de las fuerzas en el eje y_c , que incluye la fuerza centrífuga no compensada, cuyas expresiones se pueden verificar en la [parte VI.4.2.2](#). Exprésase en [N].
- El máximo empuje ascensional, el cual incluye el efecto de la fuerza centrífuga no compensada. Exprésase en [N].

He aquí la tabla:

Tabla VI.14. Comprobaciones de descarrilamiento según el valor de γ_o (W_2)

Situación	Cálculo de fuerza	Valor de γ_o [°]				
		32	40	55	70	80
Curva con $R = 265$ m	a)	-17.883	-11.056	8.867	30.738	38.990
	b)	3.012	1.720	3.661	9.371	6.879
Curva con $R = 470$ m	a)	-12.757	-6.988	9.517	27.270	33.934
	b)	1.866	844	2.396	6.858	4.095
Curva con $R = 675$ m	a)	-9.391	-4.160	10.745	26.544	32.144
	b)	2.809	1.748	2.839	6.385	4.144
Curva con $R = 880$ m	a)	-7.612	-2.661	11.410	26.192	31.187
	b)	3.235	2.160	3.023	6.075	3.668
Curva con $R = 1.085$ m	a)	-6.507	-1.727	11.830	25.928	30.593
	b)	3.473	2.392	3.119	5.859	3.381
	a)	-5.753	-1.087	12.122	25.771	30.187

Curva con $R = 1.290$ m	b)	3.623	2.540	3.176	5.700	3.181
Curva con $R = 1.495$ m	a)	-5.205	-622	12.335	25.657	29.893
	b)	3.727	2.641	3.214	5.578	3.034
Curva con $R = 1.700$ m	a)	-4.789	-268	12.499	25.572	29.670
	b)	3.802	2.716	3.240	5.482	2.921

VI.5.3. Análisis comparativo.

En esta subsección se va a relatar lo que se puede desprender de la tabla presentada:

1. Cuando el radio de la curva va en aumento, también va en aumento el máximo empuje ascensional, ya que las fuerzas F_x y F_y son menores, por lo que el consumo de fricción es menor y, en consecuencia, el empuje aumenta. También se observa cómo la suma de las fuerzas en el eje y_c aumenta, lo cual se debe a la disminución de ζ_h y a la variación de F_y .
2. Además de lo anterior, la holgura entre la suma de las fuerzas en el eje y_c y el máximo empuje ascensional evoluciona al alza con el radio. Es decir; el primer término evoluciona más rápido.
3. Al pasar de $\gamma_o = 32^\circ$ a $\gamma_o = 40^\circ$ se pierde parte del empuje máximo ascensional, entre 40 y 70° vuelve a aumentar y entre 70 y 80° decrece de nuevo. Esto obedece a los cambios en las componentes ($\zeta_v \text{sen} \gamma_o$ crece menos de lo que decrece $\zeta_h \text{cos} \gamma_o$).
4. En general, lo que se observa en todas las curvas es que la suma de las fuerzas en el eje y_c es siempre superior al máximo empuje ascensional para $\gamma_o > 55^\circ$. Para $\gamma_o < 40^\circ$ sucede lo contrario, lo cual significa que el cambio de tendencia sucede entre 40 y 55° .

Si se afina el valor de γ_o en el programa se puede hallar el valor de γ_o a partir del cual se produce este cambio. Esto acontece en $\gamma_o = 51^\circ$ (con $R_{x_2} = 13$ mm, $r_p = 0,187$ m y $k = 1,235$), pues en la curva de 265 m se verifica $2.457 > 2.268$ N y en la curva de 1.700 m, con mayor holgura, $8.455 > 2.589$ N.

Por último, cabe decir que en todo este análisis no se ha considerado la influencia de la componente N_t de la fuerza normal (encuéntrese esta en el [bloque de ecuaciones 7.6.4](#)), ya que es una componente de valor muy pequeño (va con el $\text{sen} \zeta$, que es prácticamente 0 porque $\zeta < 1^\circ$). Cuando esta componente va hacia arriba (cuando el área de contacto se encuentra adelantada respecto a la vertical, como se puede ver en la figura I.27 de la [subsección I.5.6](#)), entonces puede contribuir al descarrilamiento. Sin embargo, como se ha dicho, $N_t \sim 0$ y, además, la rueda está tan lejos de descarrilar cuando $\gamma_o \geq 51^\circ$ que no merece la pena tener en cuenta N_t .

VI.6. Escenario VI. Búsqueda de los parámetros más influyentes en el desgaste.

VI.6.1. Planteamiento.

Hasta ahora se ha obtenido la ratio de desgaste promedio en [$\mu\text{m}/\text{km}$] para todos los bogies presentados en el [subcapítulo 8.4](#) bajo unas condiciones determinadas y fijadas cuidadosamente. Lo que se pretende realizar en este escenario es un análisis de sensibilidad en el cual se varíen determinados parámetros o factores con el fin de observar los efectos de tales variaciones en la ratio de desgaste promedio. De esta forma se descubrirán los parámetros más influyentes en el desgaste.

Este análisis de sensibilidad se va a realizar sobre el bogie de 4 ruedas Saas z-706, puesto que es el bogie cuyas ruedas presentan un diámetro nominal más cercano a la media aritmética del rango: 637,5 mm es la media de 920 y 355 mm y 680 mm es el diámetro de las ruedas de este bogie.

En primer lugar, lo que se calcula es la ratio de desgaste promedio en un bogie Saas z-706 estándar (680 mm de diámetro nominal, 1.800 mm de empate y 16.000 kg de carga por eje límite), con estos datos de entrada, los cuales constituyen la base del análisis de sensibilidad:

Tabla VI.15. Datos de entrada propuestos como base del análisis de sensibilidad.

Variable	Valor	Variable	Valor	Variable	Valor
D [m]	0,680	n_{ejes} [\emptyset]	4	$\gamma_o(P)$ [$^\circ$]	51
e [m]	1,800	n_{dec} [\emptyset]	0	λ_{eje} [kg]	16.000
H_{tara} [m]*	0,512	r_p [m]	0,349	λ_{tara} [kg]*	20.000
H_{CdG} [m]*	1,506	$R_{x_1}(P)$ [m]	$13 \cdot 10^{-3}$	λ_u [kg]*	44.000
H_u [m]*	1,958	$R_{x_2}(P)$ [m]	$13 \cdot 10^{-3}$	μ [\emptyset]	0,400
$k(P)$ [\emptyset]	1,235	α_{fn} [\emptyset]	1		

Donde los datos marcados con un asterisco son datos supuestos u obtenidos en base a datos supuestos. Así, se ha supuesto una tara de 20.000 kg (como en los escenarios previos), una carga útil máxima de 44.000 kg (porque 44.000 más 20.000 kg entre los 4 ejes del vagón dan como resultado los 16.000 kg de carga por eje), una altura del baricentro de la carga útil de 1,958 m (media aritmética de los valores homólogos utilizados en los cálculos de $H_{CdG}^{p.a.}$ y $H_{CdG}^{p.b.}$ en la [parte 8.5.2.2](#)), una altura de la tara de 0,512 m (otra media aritmética sobre los valores empleados en tales cálculos) y una altura del

baricentro de la carga por eje de 1,506 m (este dato se obtiene introduciendo todos los anteriores en la fórmula de H_{CdG}).

De todas estas variables, las únicas cuyos valores no se introducen en el programa son λ_u y H_u . Estas variables se dejan libres, lo cual significa que el programa las calculará en función de las demás variables nombradas en el párrafo anterior.

Sobre este bogie estándar cuyos datos constituyen la base del análisis se plantean las variaciones, de tal forma que el efecto de cada una en la ratio de desgaste promedio se pueda observar mediante la comparación de la nueva ratio con aquella correspondiente al bogie estándar.

Para plantear estas variaciones se hace uso de los rangos planteados a lo largo del [subcapítulo 8.5](#). Las variaciones basadas en estos rangos que se plantea aplicar son las que siguen:

1. El empuje total de este bogie (que coincide con el parcial, ya que el bogie es de 2 ejes) es 1.800 mm. Se planifica su variación entre un mínimo de 780 mm (que procede de $(680+100)\cdot(2-1)$) y un máximo de 2.700 mm.
2. La carga por eje límite de este bogie es 16.000 kg, presión con la cual sus ruedas trabajan a 1.253 MPa (según se obtuvo en el [escenario I](#)). Lo que se pretende observar es qué sucede cuando el vagón soportado por una dupla de este bogie se encuentra vacío y también cuando se encuentra medio cargado. En el primer caso, la carga por eje es λ_{tara}/n_{ejes} (= 5.000 kg si se asume que la tara del vagón es de 20.000 kg), mientras que en el segundo caso se tiene la media aritmética de 5.000 y 16.000 kg (10.500 kg).
3. La altura del centro de gravedad de la carga por eje se fija también para los mismos supuestos: vagón vacío y vagón medio cargado. Con el vagón vacío, la altura es la de la tara, es decir, 0,512 m; mientras que con el vagón medio cargado la altura asciende a 1,269 m.
4. La velocidad a la que se desplaza el vagón se varía en los dos sentidos de la forma propuesta: por un lado, 40 km/h menos que los límites de velocidad impuestos para los trenes mercantes y, por el otro lado, 10 km/h más que estos límites.
5. La severidad de las frenadas se varía mediante la variable n_{dec} . Puede asumirse una desaceleración de gran grado (cuarto, es decir, $n_{dec} = 4$) y una desaceleración de grado intermedio (segundo, es decir, $n_{dec} = 2$).
6. El rozamiento se varía según la velocidad de deslizamiento en condiciones secas y húmedas. Para ello, se deja de usar $\mu = 0,40$ y se pasan a utilizar dos series distintas de parámetros: $k_A = 1, k_S = 0,40, \mu_o = 0,55, A_f = 0,40$ y $B_f = 0,60$ [s/m] cuando las condiciones son secas y $k_A = 0,30, k_S = 0,10, \mu_o = 0,30, A_f = 0,40$ y $B_f = 0,20$ [s/m] cuando las condiciones son húmedas. Recuérdese que la aplicación del rozamiento variable requiere del cambio de ciertas ecuaciones, tal como se indica en el bloque de ecuaciones que contiene las [fórmulas del método de Polach](#).
7. El reparto de la carga entre las dos posibles áreas de contacto de la rueda se varía actuando sobre el parámetro α_{fn} , para el cual se proponen dos valores dentro del rango propuesto: 0,50 (el mínimo del rango) y 0,75 (el valor intermedio del rango).

8. El ángulo de contacto se varía directamente. Se escogen dos valores dentro del rango construido, pero mayores a 51° para que no se produzca el descarrilamiento (véase la [subsección VI.5.3](#) para más información): 61° (valor intermedio) y 70° (valor máximo). La semiconicidad o inclinación se calcula como la tangente de este ángulo (resultante en 1,804 y 2,747, respectivamente); r_p se toma como 0,351 m y 0,353 m, respectivamente; y el valor de R_{x_2} se mantiene constante en 13 mm en ambos casos.

Todos los resultados de este escenario se obtienen según la ley de desgaste de la USFD, debido a que es la ley de desgaste que mejores resultados brindó en los escenarios previos. Aparte, y al igual que en los escenarios precedentes, estos resultados se obtienen para el recorrido tabulado (una vez en el sentido Albarque – Zacarín y sin parada en Milbello), cuya longitud es 37,636 km.

Estos resultados se presentan tabulados en la [subsección VI.6.2](#) y se interpretan posteriormente mediante un análisis comparativo, en la [subsección VI.6.3](#).

VI.6.2. Resultados.

Los resultados para las 4 ruedas del bogie Saas z-703 (todas ellas con un diámetro nominal de 680 mm) se muestran tabulados en la siguiente tabla, en la cual se utiliza la siguiente nomenclatura:

- ✓ La profundidad de desgaste I es la profundidad máxima que alcanza el desgaste, calculado según la ley de la USFD, cuando el parámetro o factor variado tiene su menor valor.
- ✓ La ratio de desgaste I se calcula a partir de la profundidad de desgaste I, en virtud de la ecuación VI.4.
- ✓ La profundidad de desgaste II es la profundidad máxima que alcanza el desgaste, calculado según la ley de la USFD, cuando el parámetro o factor variado tiene su mayor valor.
- ✓ La ratio de desgaste II se calcula a partir de la profundidad de desgaste II, en virtud de la ecuación VI.4.

Cabe poner de relieve que las profundidades máximas de desgaste se encuentran casi siempre en el arranque de la pestaña en el caso de las ruedas W_1 y W_2 y en la banda de rodadura en el caso de las ruedas W_3 y W_4 . La única excepción ocurre en las ruedas W_3 y W_4 cuando el empate asciende a 2.700 mm, ya que entonces el movimiento del bogie es restringido en las curvas más cerradas y se produce el contacto pestaña – carril en sus ruedas traseras. Estas excepciones se señalan con asteriscos.

He aquí la tabla:

Tabla VI.16 Resultados del análisis de sensibilidad.

Variación realizada	Rueda	Prof. de desgaste I [mm]	Ratio de desgaste I [$\mu\text{m}/\text{km}$]	Prof. de desgaste II [mm]	Ratio de desgaste II [$\mu\text{m}/\text{km}$]
Ninguna: Bogie estándar (I y II)	W_1	0,298	7,918	0,298	7,918
	W_2	0,327	8,688	0,327	8,688
	W_3	$6,179 \cdot 10^{-4}$	$1,642 \cdot 10^{-2}$	$6,179 \cdot 10^{-4}$	$1,642 \cdot 10^{-2}$
	W_4	$6,254 \cdot 10^{-4}$	$1,662 \cdot 10^{-2}$	$6,254 \cdot 10^{-4}$	$1,662 \cdot 10^{-2}$
e : 780 mm (I); 2.700 mm (II)	W_1	0,149	3,959	0,370	9,831
	W_2	0,175	4,650	0,389	10,336
	W_3	$6,083 \cdot 10^{-4}$	$1,616 \cdot 10^{-2}$	0,293*	7,785
	W_4	$6,178 \cdot 10^{-4}$	$1,301 \cdot 10^{-2}$	0,314*	8,343
λ_{eje} : 5.000 kg (I); 10.500 kg (II)	W_1	0,161	4,278	0,239	6,350
	W_2	0,182	4,836	0,266	7,068
	W_3	$1,489 \cdot 10^{-4}$	$3,956 \cdot 10^{-3}$	$3,454 \cdot 10^{-4}$	$9,177 \cdot 10^{-3}$
	W_4	$1,502 \cdot 10^{-4}$	$3,991 \cdot 10^{-3}$	$3,496 \cdot 10^{-4}$	$9,289 \cdot 10^{-3}$
H_{CdG} : 0,512 m (I); 1,269 m (II)	W_1	0,295	7,838	0,298	7,918
	W_2	0,323	8,582	0,326	8,662
	W_3	$6,179 \cdot 10^{-4}$	$1,642 \cdot 10^{-2}$	$6,179 \cdot 10^{-4}$	$1,642 \cdot 10^{-2}$
	W_4	$6,253 \cdot 10^{-4}$	$1,661 \cdot 10^{-2}$	$6,253 \cdot 10^{-4}$	$1,661 \cdot 10^{-2}$
ΔV : -40 km/h (I) +10 km/h (II)	W_1	0,293	7,785	0,303	8,051
	W_2	0,326	8,662	0,332	8,821

	W_3	$6,894 \cdot 10^{-3}$	$1,832 \cdot 10^{-2}$	$5,261 \cdot 10^{-4}$	$1,398 \cdot 10^{-2}$
	W_4	$6,902 \cdot 10^{-3}$	$1,834 \cdot 10^{-1}$	$8,113 \cdot 10^{-4}$	$2,156 \cdot 10^{-2}$
n_{dec} : 2 (I); 4 (II)	W_1	0,298	7,918	0,298	7,918
	W_2	0,327	8,688	0,327	8,688
	W_3	$6,179 \cdot 10^{-4}$	$1,642 \cdot 10^{-2}$	$6,179 \cdot 10^{-4}$	$1,642 \cdot 10^{-2}$
	W_4	$6,254 \cdot 10^{-4}$	$1,662 \cdot 10^{-2}$	$6,254 \cdot 10^{-4}$	$1,662 \cdot 10^{-2}$
μ : Condiciones húmedas (I); condiciones secas (II)	W_1	0,257	6,829	0,318	8,449
	W_2	0,287	7,626	0,343	9,114
	W_3	$4,006 \cdot 10^{-4}$	$1,069 \cdot 10^{-2}$	$4,819 \cdot 10^{-4}$	$1,280 \cdot 10^{-2}$
	W_4	$4,149 \cdot 10^{-4}$	$1,102 \cdot 10^{-2}$	$4,938 \cdot 10^{-4}$	$1,312 \cdot 10^{-2}$
α_{fn} : 0,50 (I); 0,75 (II)	W_1	0,213	5,659	0,259	6,882
	W_2	0,239	6,350	0,287	7,626
	W_3	$6,179 \cdot 10^{-4}$	$1,642 \cdot 10^{-2}$	$6,179 \cdot 10^{-4}$	$1,642 \cdot 10^{-2}$
	W_4	$6,254 \cdot 10^{-4}$	$1,662 \cdot 10^{-2}$	$6,254 \cdot 10^{-4}$	$1,662 \cdot 10^{-2}$
$\gamma_o (P)$: 61 (I); 70 (II)	W_1	0,399	10,602	0,501	13,312
	W_2	0,422	11,213	0,524	13,923
	W_3	$6,179 \cdot 10^{-4}$	$1,642 \cdot 10^{-2}$	$6,179 \cdot 10^{-4}$	$1,642 \cdot 10^{-2}$
	W_4	$6,254 \cdot 10^{-4}$	$1,662 \cdot 10^{-2}$	$6,254 \cdot 10^{-4}$	$1,662 \cdot 10^{-2}$

*Valores medidos en la pestaña, no en la banda de rodadura (léase la explicación situada encima de la tabla).

VI.6.3. Análisis comparativo.

En este análisis comparativo se van a comentar las tendencias que se pueden desprender del análisis de sensibilidad realizado. Para observar estas tendencias, lo que se realiza en primer lugar es graficar los resultados de la tabla. Estos resultados se grafican en un gráfico en cuyos ejes se representa:

- ✓ En el eje vertical se representa la ratio de desgaste, calculada en la tabla en todos los casos.
- ✓ En el eje horizontal no se representa ninguna variable en particular, sino tres posiciones: 0, 1 y 2. Estas posiciones no tienen nada que ver con el cálculo I y el II de la tabla y a cada una de ellas se le asigna un valor de la ratio de desgaste.

A continuación, se muestran todas las ratios de la rueda W_2 graficadas, puesto que esta es la rueda que sufre un mayor desgaste (debido a la mayor presencia de curvas a izquierdas en el trazado de ensayo recorrido en el sentido Albarque – Zacarín). El resultado de la graficación no son curvas con todos sus puntos, sino solamente la unión lineal de 3 valores ordenados de menor a mayor. Encima de cada línea se muestra la variable variada en cada caso y la flecha que la acompaña indica si la variable se ha incrementado o si se ha decrementado.

Para la interpretación de las líneas es preciso tomar una referencia, para la cual se toma la línea horizontal azul, que es una constante con valor $8,668 \mu\text{m}/\text{km}$ (ratio de desgaste en la rueda W_2 para el bogie estándar), la cual tapa a la línea horizontal amarilla (correspondiente a la variación de n_{dec}):

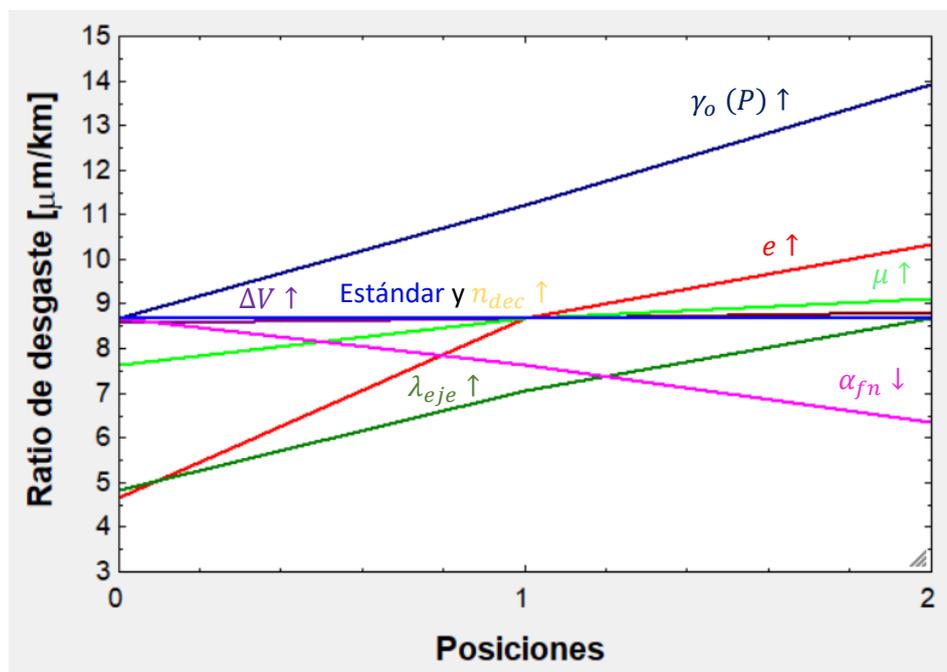


Figura VI.19. Graficación de los resultados del análisis de sensibilidad para la rueda W_2 .

De esta gráfica se desprenden estas tendencias:

1. El mayor incremento en la ratio de desgaste es producido por la variación del ángulo de contacto $\gamma_o (P)$. Este incremento se debe principalmente al incremento en el término del espín cuando $\gamma_o (P)$ pasa de 51 a 70 ° (el espín es proporcional al $\text{sen}(\gamma_o)$, función que pasa de valer 0,777 a 0,940 al incrementar el ángulo). También es cierto que la disminución de los términos de pseudodeslizamiento transversal (que dependen del $\text{cos}(\gamma_o)$) y de las fuerzas transversales (que dependen del $\text{cos}^2(\gamma_o)$) contrarrestan parcialmente este incremento.
2. El segundo mayor incremento en la ratio de desgaste se produce al variar el empate e . Esto es debido a que el bogie se inscribe mejor en las curvas cuanto menor es el valor de e y viceversa. Más concretamente, los términos de pseudodeslizamiento debidos al ángulo de lazo ψ y a su variación temporal $\dot{\psi}$ dependen directamente de e y esta dependencia acaba resultando de gran peso en el cálculo del desgaste. Cabe agregar que el valor de e a partir del cual aparece el movimiento restringido es 2,54 m, que es prácticamente 1/100 del radio de la curva más cerrada del trazado (265 m).
3. El siguiente factor más influyente es la carga por eje λ_{eje} . Esto es debido al hecho de que las fuerzas causantes del desgaste son directamente proporcionales a λ_{eje} . Por tanto, las ruedas de un vagón vacío se desgastarán mucho menos que las de un vagón totalmente cargado (como era de esperar, por otra parte).
4. El siguiente factor más influyente es la fracción de la fuerza normal que recae sobre la pestaña α_{fn} . La línea (que tiene pendiente negativa) indica que el desgaste decrece conforme α_{fn} mengua, lo cual tiene sentido si se compara con el efecto de λ_{eje} : una pestaña menos cargada sufrirá un menor desgaste, del mismo modo que una rueda menos cargada experimentará un menor desgaste. Este efecto sería más notable si la disminución de la carga en la pestaña no disminuyese el área de contacto (esto provoca un aumento en las tensiones normales y presiones y, por tanto, en el desgaste).
5. Un efecto más moderado se observa en el coeficiente de adherencia μ , si bien es también relevante. En condiciones húmedas el desgaste es menor que en condiciones estándar (con $\mu = 0,40$), ya que el coeficiente $\mu_o = 0,30 < 0,40$. Lo opuesto acontece en condiciones secas, donde el desgaste es superior que en condiciones secas al cumplirse $\mu_o = 0,55 > 0,40$. Además, el cambio de condiciones húmedas a condiciones estándar es más notorio que el cambio de condiciones húmedas a secas porque la pendiente de la curva fuerza – deslizamiento es bastante menor cuando las condiciones son húmedas (porque las constantes que modifican la pendiente k_A y k_S son bastante menores).
6. Al aplicar un delta de velocidad ΔV se puede apreciar un tímido efecto en el desgaste. Esto es debido principalmente a los cambios producidos en la fuerza normal sobre la rueda externa a la curva (la que sufre el contacto pestaña – carril en el primer juego del bogie). Esta fuerza normal externa N_e tiene un término que depende de V^2 (a través de la aceleración centrífuga no compensada a_{nc}), por lo que reducir V reduce drásticamente N_e y, por ende, el desgaste que experimenta la pestaña. Adicionalmente, cabe anotar que la relación velocidad – desgaste es más fuerte en la rueda W_1 que en la W_2 , lo cual obedece probablemente a las características del trazado de ensayo (radio de curvatura, peralte, sentido de las curvas etc.).

7. Más tímido aún es el efecto del baricentro de la carga por eje H_{CdG} . Esto responde a que este parámetro únicamente entra en juego a la hora de repartir la carga por eje entre la rueda externa y la interna a la curva y lo hace en un sumando (en el caso de la rueda externa) o un sustraendo (en el caso de la interna) junto con otros parámetros que se mantienen constantes ($\lambda_{eje}, a_{lat}, b_e, b_i$), por lo que su efecto es limitado. Por tanto, duplicar el valor de H_{CdG} sí varía la normal externa N_e y la interna N_i , pero no consigue duplicar el valor de N_e ni dividir por la mitad el valor de N_i ; *ergo* su efecto no alcanza a ser importante.

8. Por último, cabe apuntar que el efecto del grado de la función deceleración – tiempo n_{dec} es inapreciable. Esto es debido a que el término de pseudodeslizamiento debido a las frenadas es bastante pequeño frente a los demás y a que en el trazado de ensayo apenas hay puntos en los que sea necesario frenar (en realidad, las frenadas para mantener la velocidad constante al bajar una pendiente son más intensas, pero estas son siempre lineales y no les afecta n_{dec}).

En resumen, los parámetros que más influyen en el desgaste son (de mayor a menor influencia): $\gamma_o (P), e, \lambda_{eje}, \alpha_{fn}$. Por otro lado, la influencia de μ es moderada, mientras que el de ΔV es moderado en la rueda W_1 y tímido en la rueda W_2 . Finalmente, la influencia de H_{CdG} es muy tímida, pero por lo menos es apreciable, no pudiéndose afirmar lo mismo de n_{dec} , cuya influencia es inapreciable.



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

Fin

The End