

Facultad de Ciencias

Departamento de Física de la Materia Condensada

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Competencia de «gangs» en dinámicas sociales de comportamientos corruptos

Hugo Pérez Martínez

Directores:

Dr. Mario Floría Peralta

Dr. Jesús Gómez-Gardeñes



Universidad Zaragoza

Curso 2020/2021

Índice

1. Abstract	2
2. Introducción	2
3. Modelos compartimentales	3
4. Modelo HCO	4
4.1. Campo medio	6
5. Modelo HCCO	8
5.1. Campo medio	9
5.2. Dinámica markoviana y simulaciones Montecarlo	14
5.2.1. Segregación	18
5.2.2. Visualización de la segregación	20
6. Conclusiones	27

1. Abstract

En este trabajo abordamos el fenómeno de la corrupción desde una perspectiva infectiva, en analogía con modelos epidemiológicos tradicionales. Nos centramos en el estudio de los efectos de la competencia entre dos estados corruptos o bandas diferentes, excluyentes entre sí, que se disputan un mismo sistema. Para ello, establecemos en primer lugar unas reglas de interacción entre agentes que dan lugar a estados estables de supervivencia de ambas especies corruptas, según el estudio del comportamiento en campo medio. Se muestra también que la situación de convivencia resulta beneficiosa para los agentes honestos, cuya población es mayor que en el caso de sobrevivir una única banda. La implementación del modelo sobre redes homogéneas muestra un efecto de segregación entre corruptos de diferentes bandas, dando lugar a regiones del espacio donde habitan corruptos pertenecientes sólo a una de ellas, y que se puede caracterizar matemáticamente mediante unas métricas que comparan los entornos locales de los agentes con los globales. Dependiendo de las características de la red subyacente, los grupos corruptos pueden llegar a ser lo suficientemente grandes como para que el comportamiento en su interior se pueda aproximar por el que tendría el sistema si sólo existiese una banda, eliminando los beneficios de la convivencia entre ambas.

2. Introducción

Toda comunidad humana está caracterizada por un conjunto de normas sociales, a menudo explícitamente regladas, aunque en ocasiones únicamente de carácter cultural, que se asumen de obligado cumplimiento para todos los individuos que forman parte de dicha comunidad. La violación de alguna de estas reglas conlleva una sanción, moral o penal, que tiene como objetivo desincentivar los comportamientos asociales. Una de las conductas asociales paradigmáticas es la corrupción en sus múltiples formas (económica, política, administrativa...), que ha impregnado todas las sociedades y culturas a lo largo de la historia, y que asumiremos merecedora de castigo. En este trabajo identificaremos la honestidad como el cumplimiento de las normas sociales, la corrupción como su incumplimiento, y el ostracismo como la sanción de la sociedad ante comportamientos antisociales.

El estudio de la corrupción desde una perspectiva economicista (y por tanto matemática en última instancia) se ha abordado desde los campos de teoría de juegos y teoría de juegos evolutiva, en los que se concibe el comportamiento asocial como una estrategia que permite obtener un beneficio frente al resto de individuos, y su propagación por la población se explica por conductas egoístas que buscan maximizar las ganancias individuales de los agentes [1]. De esta manera, un individuo racional, dada una posibilidad de elección y unos criterios de maximización de beneficios, podría decidir adoptar un comportamiento corrupto. Este tipo de aproximaciones da lugar con frecuencia a modelos muy complejos con gran cantidad de parámetros y estrategias, que dificultan el estudio exhaustivo de la influencia de cada uno de ellos.

Otra perspectiva de gran importancia a la hora de estudiar los fenómenos colectivos de comportamientos sociales, que no adolece de los problemas anteriores, se basa en establecer una analogía entre la propagación de estos comportamientos y la propagación de epidemias [2], campo

tradicionalmente estudiado en el contexto de redes complejas. En este sentido, se puede entender la conducta corrupta como una epidemia con sus mecanismos propios de contagio y recuperación, y la población honesta como individuos susceptibles de ser corrompidos. No obstante, el estudio de la propagación de comportamientos sociales como epidemias no se circunscribe al ámbito de modelos de corrupción, sino que abarca una gran cantidad de fenómenos como la difusión de ideas u opiniones, la segregación urbana o cultural, o la propagación de rumores [3, 4]. Sin embargo, existen grandes diferencias entre los mecanismos propios de la propagación de enfermedades y los de la propagación de fenómenos sociales, que deben ser debidamente incluidos y justificados en los modelos.

Nuestro trabajo adopta esta última línea de investigación para estudiar el comportamiento de un sistema en el que se desarrolla la corrupción. Partiendo de investigaciones anteriores [5, 6] en las que se analiza la evolución de una población formada por agentes honestos, corruptos y en el ostracismo (sancionados), planteamos ahora qué ocurre cuando en esta misma población se dan dos conductas corruptas diferentes, enfrentadas y excluyentes. Necesitaremos entonces definir unas nuevas interacciones entre individuos corruptos, y estudiaremos los efectos de la existencia de competencia en el sistema, que se concreta en la existencia de dos *gangs*, o bandas.

La estructura de este trabajo es la siguiente: En la sección 3 se presentan brevemente los modelos compartimentales, y en la sección 4 se discute el modelo original del que parte la investigación, que se conoce como HCO. En la sección 5 se presenta la modificación del modelo que es objeto de estudio, y que denominamos como modelo HCCO, y sus principales resultados en aproximación de campo medio, simulaciones Montecarlo y dinámica markoviana. Por último, en la sección 6 se discuten las conclusiones más importantes del trabajo.

3. Modelos compartimentales

El estudio de la propagación de enfermedades se ha abordado históricamente haciendo uso de modelos compartimentales. Desde esta perspectiva, los diferentes estadios de una enfermedad se dividen en secciones o compartimentos, que caracterizan así los estados posibles que puede atravesar un agente. El estudio de la evolución de la enfermedad se basará entonces en dividir la población del sistema en función de su estado infectivo, y definir unas reglas claras que regirán el paso de estos agentes de uno a otro compartimento.

El ejemplo más sencillo de un modelo compartimental es el que se conoce como SIS (sano-infectado-sano), en el que se consideran dos estados posibles: estar sano (S), o estar infectado (I). Así, dividimos a la población en dos compartimentos, y podemos definir unas reglas sencillas que gobiernan el paso de un compartimento a otro. Estas reglas deben ser reflejo de los fenómenos infectivos reales que se produzcan en la enfermedad. Así, generalmente se establece que, en una interacción entre un agente sano y un agente infectado, hay cierta probabilidad α de que el infectado contagie al sano, en un proceso:

$$S + I \xrightarrow{\alpha} I + I, \quad (1)$$

mientras que el paso de infectado a sano no requiere de ninguna interacción adicional, se produce

espontáneamente con cierta probabilidad β :

$$I \xrightarrow{\beta} S . \quad (2)$$

Este es el modelo más simple de propagación de epidemias que podemos considerar, y puede representar todas aquellas enfermedades en las que, tras haber superado un contagio, podemos volver a contagiarnos inmediatamente, como es el caso de algunas enfermedades de transmisión sexual como sífilis o gonorrea. Una de las variaciones más importantes es el conocido como modelo SIR (Sano-Infectado-Recuperado), en el que, tras haber superado la enfermedad, pasamos a un estado no susceptible de contraerla de nuevo (recuperado) con probabilidad β , como ocurre con la varicela, o el modelo SIRS (Sano-Infectado-Recuperado-Sano), en el que, tras un periodo de tiempo en el estado no susceptible, podemos volver a contraer la enfermedad, como ocurre con el virus de la gripe. Este último paso depende en general únicamente del tiempo transcurrido desde la última infección, y por ello se suele modelizar con una probabilidad:

$$R \xrightarrow{r} S . \quad (3)$$

Ahora bien, los fenómenos de transición entre compartimentos de la propagación de epidemias no tienen por qué explicar los mecanismos propios de la propagación de fenómenos sociales. En este sentido, centrándonos en fenómenos como la propagación de ideas o rumores, se han propuesto mecanismos alternativos al paso de un agente de un estado propagador de la idea (I) a un estado no propagador ni susceptible (R) mediante interacción con otros agentes propagadores [4]:

$$I + I \xrightarrow{\beta} I + R . \quad (4)$$

De esta manera, se establece que un agente podría dejar de intentar propagar una idea si se da cuenta de que otros agentes de su entorno ya la conocen. Este es un ejemplo claro de las diferencias que aparecen al pasar de modelizar epidemias a modelizar fenómenos sociales. Veremos a continuación cómo los modelos compartimentales anteriormente descritos deben ser modificados para capturar los mecanismos característicos de los fenómenos de propagación de la corrupción.

4. Modelo HCO

El modelo original [5, 6] trata de modelizar el fenómeno social de la corrupción a partir del modelo SIRS comentado anteriormente, identificando la corrupción como un estado infectivo y el ostracismo como un estado inmune al contagio. En este sentido, no se contempla la corrupción como un mecanismo de rédito para el agente corrupto, y su difusión no se rige por ganancias esperadas. Se desarrolla entonces un modelo compartimental formado por tres estados: Honestidad (H), Corrupción (C), y Ostracismo (O), recibiendo así el nombre de modelo HCO. Los agentes del sistema se distribuyen entre ellos, y son capaces de transitar de uno a otro mediante interacción con otros agentes siguiendo unas reglas impuestas. En su formulación más simple, esto da lugar a los siguientes flujos:

- Flujo de corrupción: Los agentes H pueden corromperse al interactuar con sus vecinos C , con un ratio f_α dependiente de una probabilidad α :

$$H + C \xrightarrow{\alpha} C + C . \quad (5)$$

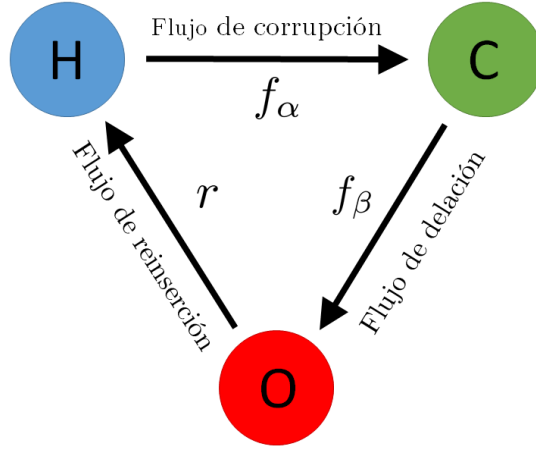


Figura 1: Esquema compartimental y flujos del modelo HCO.

- Flujo de delación: Los agentes C pueden ser delatados al interactuar con sus vecinos H , pasando al ostracismo con un ratio f_β dado por cierta probabilidad β . Este mecanismo es el que difiere de los planteamientos tradicionales del modelo SIRS, al necesitar de la mediación de individuos honestos (sanos) para la recuperación de los corruptos (infectados).

$$H + C \xrightarrow{\beta} H + O . \quad (6)$$

- Flujo de reinserción: Los agentes O se reintegran en la población honesta con cierto ratio r , sin precisar de interacción con sus vecinos.

$$O \xrightarrow{r} H . \quad (7)$$

El ratio de reinserción es, por tanto, constante e independiente del entorno, mientras que los ratios de corrupción f_α y delación f_β dependen únicamente de procesos microscópicos en la vecindad del agente: en una interacción entre H y C , hay una probabilidad α de que el agente H resulte corrompido, y una probabilidad β de que el agente C sea delatado. De aquí se deduce que los ratios f_α y f_β deben ser nulos en ausencia de agentes C y H , respectivamente¹.

Se observan así las características principales del modelo que lo relacionan con el fenómeno social de la corrupción: un agente honesto necesita de un corrupto para ser corrompido, y éste se ve expulsado de la sociedad (ostracismo) al ser delatado por un honesto. Tras un cierto periodo, se permite su regreso como un individuo honesto. El modelo compartimental completo se encuentra resumido en la Figura 1. La publicación original [5] considera además un flujo adicional $\langle O \rangle$ de “advertencia a infractores” que permite a los agentes C volver al estado H sin pasar por O , incluyendo así la posibilidad de que un infractor cambie su comportamiento por miedo a ser castigado. No obstante, en nuestro caso esto no produce cambios cualitativos en el comportamiento del sistema, y no lo contemplaremos.

¹Nótese que el ratio f_α será nulo en todo momento a partir de la desaparición de los agentes C , mientras que el ratio f_β puede ser restituido en caso de que en el sistema haya agentes O , que pueden transformarse en H .

4.1. Campo medio

El estudio del sistema en aproximación de campo medio resulta muy útil para determinar su comportamiento cualitativo. Consiste en describir su evolución únicamente a partir de la fracción total de agentes en uno u otro compartimento, asumiendo que el entorno de cada uno de ellos se asemeja a la composición global del sistema. Definimos entonces las variables $\vec{\rho} = (\rho_h, \rho_c, \rho_o)$ que representan las fracciones totales de H , C y O respectivamente. Además, teniendo en cuenta la condición de normalización $\rho_H + \rho_C + \rho_O = 1$, podemos expresar una de estas fracciones en función de las otras dos. Esto significa que podemos describir el sistema en un plano bidimensional de coordenadas ρ_H, ρ_C . Las ecuaciones que rigen el flujo $\vec{F} = \dot{\vec{\rho}}$ entre compartimentos resultan:

$$F_h(\vec{\rho}) = -f_\alpha(\rho_c) \rho_h + r \rho_o = -[f_\alpha(\rho_c) + r] \rho_h + r(1 - \rho_c) , \quad (8)$$

$$F_c(\vec{\rho}) = f_\alpha(\rho_c) \rho_h - f_\beta(\rho_h) \rho_c . \quad (9)$$

Ahora, los ratios son función de la fracción total de honestos y corruptos del sistema gracias a la asunción de homogeneidad en la estructura de contactos de cualquier agente, y podemos obtener su expresión matemática explícita. Tomando el caso del ratio de corrupción f_α , la probabilidad de que un agente H sea corrompido al interactuar con otro agente viene dada por el producto entre la probabilidad de encontrarse con un agente C , y la probabilidad α de que éste le corrompa, dando lugar a una probabilidad total $\alpha \rho_c$. Considerando además que cada agente de la red tiene, en promedio, k contactos en cada paso temporal, la probabilidad de que sea corrompido en al menos uno de estos contactos es:

$$f_\alpha(\rho_c) = 1 - (1 - \alpha \rho_c)^k . \quad (10)$$

De manera completamente análoga, podemos ver que el ratio de delación resulta:

$$f_\beta(\rho_h) = 1 - (1 - \beta \rho_h)^k . \quad (11)$$

Volviendo a las ecuaciones de flujos, hallando el valor de $\vec{\rho}$ para el que alguno de ellos se anula obtenemos las expresiones matemáticas de las nulclinas del sistema. En este caso:

$$F_h = 0 \Rightarrow \rho_c = 1 - \frac{f_\alpha + r}{r} \rho_h , \quad (12)$$

$$F_c = 0 \Rightarrow f_\alpha \rho_h = f_\beta \rho_c . \quad (13)$$

Los puntos de cruce entre ambas nulclinas corresponden a puntos fijos de equilibrio de la dinámica, en los que las variaciones de población son nulas. Este sistema de ecuaciones tiene dos soluciones triviales, dadas por los vértices $(\rho_h = 1, \rho_c = 0)$ (equilibrio honesto, o *Full H*) y $(\rho_h = 0, \rho_c = 1)$ (equilibrio corrupto, o *Full C*), y una solución no trivial, cuya expresión matemática es no lineal debido a las dependencias con ρ_c y ρ_h a través de f_α y f_β . Estas soluciones pueden ser estables ante perturbaciones, si la dinámica del sistema en torno al punto fijo lo atrae hacia él, o inestables, si ocurre lo contrario. Por tanto, las trayectorias del sistema tenderán hacia puntos fijos estables, que determinarán la composición en el equilibrio. Para estudiar la estabilidad, debemos llevar a cabo una aproximación lineal del comportamiento del sistema en

el entorno de un punto fijo (ρ_h^*, ρ_c^*) haciendo uso de la matriz jacobiana J [7], de manera que asumimos una evolución temporal descrita por:

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_h \\ \dot{\rho}_c \end{pmatrix} = J|_{(\rho_h^*, \rho_c^*)} \begin{pmatrix} \rho_h \\ \rho_c \end{pmatrix}, \quad J|_{(\rho_h^*, \rho_c^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_h}{\partial \rho_h} & \frac{\partial F_h}{\partial \rho_c} \\ \frac{\partial F_c}{\partial \rho_h} & \frac{\partial F_c}{\partial \rho_c} \end{pmatrix}_{(\rho_h^*, \rho_c^*)}. \quad (14)$$

Los autovalores de $J|_{(\rho_h^*, \rho_c^*)}$ determinan la estabilidad: si son negativos, el sistema es estable en la dirección de los respectivos autovectores, mientras que si son positivos, es inestable. Explícitamente, partiendo de las ecuaciones (10) y (11):

$$J|_{(\rho_h^*, \rho_c^*)} = \begin{pmatrix} -(f_\alpha + r) & -(f'_\alpha + r) \\ f_\alpha & f'_\alpha + f_\beta \end{pmatrix}_{(\rho_h^*, \rho_c^*)}. \quad (15)$$

En la situación Full H , $(\rho_h^*, \rho_c^*) = (1, 0)$, los autovalores dan lugar a la siguiente condición de estabilidad:

$$f'_\alpha(0) < f_\beta(1). \quad (16)$$

Si esto se cumple, el estado Full H es estable, y existirá un conjunto de condiciones iniciales tales que la dinámica del sistema siempre lleve al exterminio de los agentes C . Por otro lado, en el caso de Full C :

$$f_\alpha(1) > f'_\beta(0). \quad (17)$$

Si se cumple, existirá un conjunto de condiciones iniciales que evolucionarán hasta el dominio de los agentes C . Vemos así que la estabilidad de estos puntos viene determinada en última instancia por los parámetros α y β . Con las expresiones matemáticas explícitas en (10) y (11) podemos hallar los valores críticos de ambos parámetros en los que alguna de estas soluciones deja de ser estable. En concreto, la condición de estabilidad del estado completamente honesto resulta:

$$\alpha < \alpha_c(\beta) = \frac{1 - (1 - \beta)^k}{k}, \quad (18)$$

y la condición de estabilidad del estado completamente corrupto es:

$$\beta < \beta_c(\alpha) = \frac{1 - (1 - \alpha)^k}{k}. \quad (19)$$

Se puede ver que las ecuaciones anteriores son incompatibles, y por tanto, no hay ninguna elección de los parámetros α y β para la que se produzca convivencia de puntos fijos estables. Esto quiere decir que, dadas unas condiciones iniciales $\vec{\rho}(0)$ arbitrarias, la dinámica del sistema en el campo medio tenderá siempre a un único punto fijo dado por α y β , y no podremos generar ciclos de histéresis variando dichos parámetros. En la Figura 2a se aprecia además que el tercer punto fijo, no trivial, corresponde a un atractor global del sistema cuando ambos puntos Full H y Full C son inestables. En la Figura 2b se muestran las fracciones ρ_h y ρ_c que se obtienen en el equilibrio para diferentes elecciones de los parámetros α y β , y se observan claramente los umbrales α_c , β_c para los que las soluciones de dominio de alguna de las estrategias dejan de ser estables.

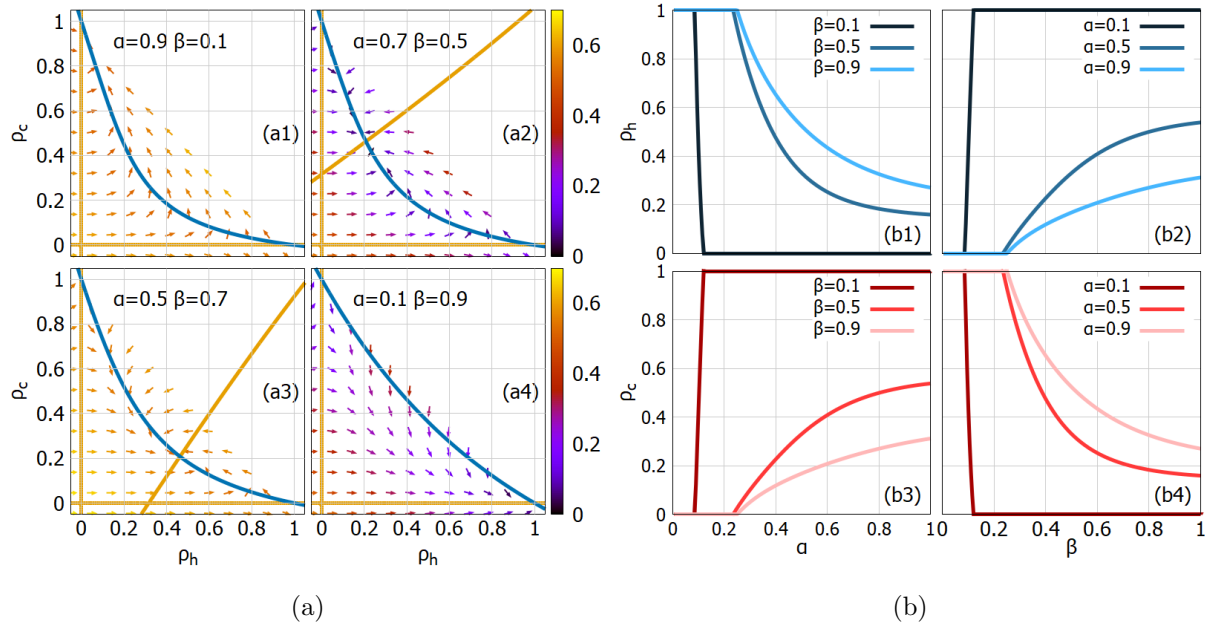


Figura 2: Modelo HCO. (a) Diagramas de flujo y nulclinas $F_h = 0$ (azul), $F_c = 0$ (amarillo), para $k = 4$, $r = 0.5$ y diferentes elecciones de parámetros α y β . Los cortes entre ellas dan lugar a puntos fijos. Las flechas representan la dirección del flujo, y la escala de color, su intensidad. (a1) estado completamente corrupto estable. (a2,a3) convivencia estable. (a4) estado completamente honesto estable. (b) Fracciones totales, para $r = 0.5$, de individuos honestos (ρ_h) en función de (b1) α y (b2) β , y fracciones totales de individuos corruptos (ρ_c) en función de (b3) α y (b4) β .

El modelo HCO contempla así la existencia de una única banda corrupta y estudia su interacción con los individuos honestos de la red, mostrando que la corrupción es capaz de sobrevivir e incluso imponerse para ciertos valores de los parámetros del modelo. Se trata, por tanto, de un modelo de competencia entre dos especies mutuamente excluyentes, honestos y corruptos, que se disputan un mismo sistema. La generalización directa de este planteamiento pasa por considerar la existencia de una especie corrupta adicional capaz de competir con las anteriores. Este es el modelo HCCO, que desarrollamos a continuación.

5. Modelo HCCO

Ahora, a la especie corrupta original, que pasamos a denotar como c_{in} , se suma una nueva especie invasora c_{st} que sigue sus mismas reglas en los procesos de delación y corrupción frente a agentes honestos. Respecto a la nueva interacción que aparece entre agentes corruptos de diferentes bandas, asumimos que compiten entre ellos, y por tanto se delatan con probabilidad β .

$$C_{in} + C_{st} \xrightarrow{\beta} C_{in} + O. \quad (20)$$

Todos los agentes en el ostracismo se comportan según las mismas reglas y se reintegran con un mismo ratio r en la población honesta, independientemente de la especie corrupta a la que

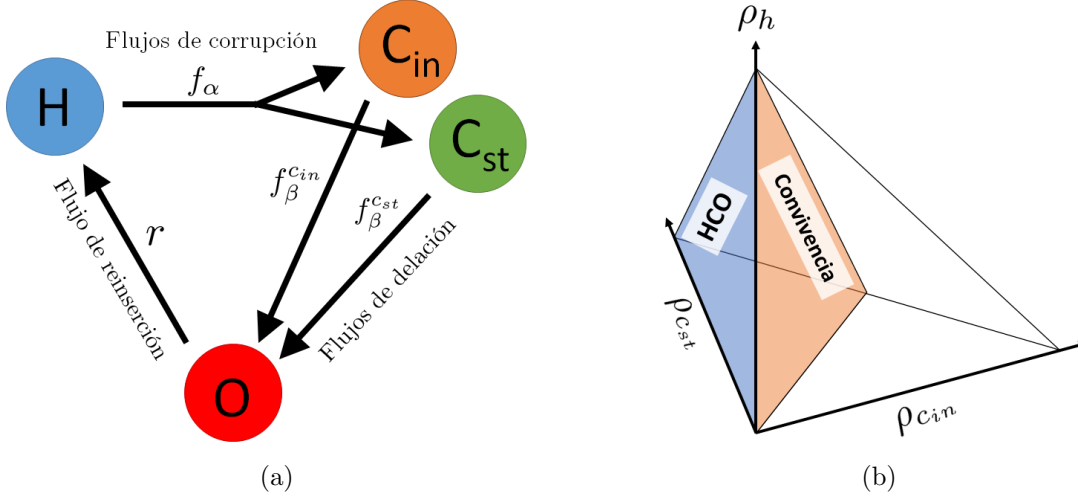


Figura 3: Modelo HCO. (a) Esquema compartimental y flujos. (b) Diagrama que representa el espacio de estados del modelo HCO. En azul: superficie sobre la que se desarrolla el comportamiento HCO, en este caso con $\rho_{c_{in}} = 0$. La otra cara del tetraedro, con $\rho_{c_{st}} = 0$, también se comporta como un HCO. En naranja, región de convivencia de bandas con una misma fracción $\rho_{c_{in}} = \rho_{c_{st}}$, que denominamos como «plano bisectriz» en el trabajo.

perteneciesen, o la especie de su delator. Estas reglas definen un nuevo esquema compartimental y un diagrama de flujos que se muestran en la Figura 3a.

5.1. Campo medio

Volvemos a estudiar el sistema haciendo uso de la aproximación de campo medio, que nos proporciona información útil acerca del comportamiento cualitativo. Consideramos ahora las cuatro fracciones $\vec{\rho} = (\rho_h, \rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}, \rho_o)$ que caracterizan la composición de la población. Con la condición de normalización podemos escribir una de estas fracciones en función de las otras tres, y podemos representar el espacio de fases completo del sistema mediante un tetraedro, como se muestra en la Figura 3b. En el límite en el que la fracción de una de las especies corruptas es nula, que corresponde a una de las caras del tetraedro, recuperamos el modelo HCO original. Por otro lado, cuando las fracciones de corruptos de ambas bandas son iguales, el sistema se sitúa sobre el plano bisectriz que separa el tetraedro en dos partes iguales. El sistema es completamente simétrico respecto de este plano, intercambiando $\rho_{c_{in}}$ y $\rho_{c_{st}}$.

En cuanto a los ratios de conversión entre compartimentos, adoptamos las mismas reglas que en el caso anterior, considerando ahora que la población honesta se ve corrompida por ambas bandas y que las poblaciones corruptas pueden ser delatadas también por la banda rival. Así:

$$f_\alpha(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) = 1 - [1 - \alpha(\rho_{c_{in}} + \rho_{c_{st}})]^k, \quad (21)$$

$$f_\beta^{c_{in}}(\rho_h, \rho_{c_{st}}) = 1 - [1 - \beta(\rho_h + \rho_{c_{st}})]^k. \quad (22)$$

El ratio $f_\beta^{c_{st}}$ se obtiene de manera análoga, intercambiando $\rho_{c_{st}}$ por $\rho_{c_{in}}$. A la hora de calcular los flujos entre compartimentos con estos ratios, es importante notar que $f_\alpha(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}})$ establece la fracción honesta que se ve corrompida en un paso temporal, pero no cómo se reparte esta

población entre ambas bandas. Para determinarlo, recurrimos a una función de combate $t(x, y)$ que asigna el reparto de manera proporcional a la presencia de cada banda en la red:

$$t(x, y) = \frac{x}{x + y} . \quad (23)$$

De esta manera, la banda C_{in} recibe una fracción $t(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) f_{\alpha} \rho_h$ en cada paso temporal, mientras que la banda C_{st} recibe $t(\rho_{c_{st}}, \rho_{c_{in}}) f_{\alpha} \rho_h$. Es inmediato ver que $t(y, x) = 1 - t(x, y)$, y por tanto, las fracciones anteriores suman la fracción total corrompida $f_{\alpha} \rho_h$, como debe ser. Con todo esto, podemos expresar las ecuaciones de flujo del modelo HCCO:

$$F_h(\vec{\rho}) = -f_{\alpha}(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) \rho_h + r \rho_o = -[f_{\alpha}(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) + r] \rho_h + r [1 - (\rho_{c_{in}} + \rho_{c_{st}})] , \quad (24)$$

$$F_{c_{in}}(\vec{\rho}) = f_{\alpha}(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) t(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) \rho_h - f_{\beta}(\rho_h, \rho_{c_{st}}) \rho_{c_{in}} , \quad (25)$$

$$F_{c_{st}}(\vec{\rho}) = f_{\alpha}(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) t(\rho_{c_{st}}, \rho_{c_{in}}) \rho_h - f_{\beta}(\rho_h, \rho_{c_{in}}) \rho_{c_{st}} . \quad (26)$$

Estudiamos ahora los puntos fijos del sistema. En primer lugar, cuando una de las fracciones corruptas ρ_c es nula, las ecuaciones se reducen a las del modelo HCO, y las trayectorias quedarán confinadas a las caras laterales del tetraedro. Además, el flujo correspondiente a la especie extinta cumplirá $F_c = 0$, y por tanto, la cara dada por $\rho_c = 0$ formará parte de la nulclina de F_c . De esta manera, los puntos fijos del modelo HCO serán también puntos fijos del modelo HCCO, y se comportarán igual que antes en el subespacio dado por la cara. Por otro lado, la simetría del modelo invita a estudiar el comportamiento sobre el plano bisectriz, que cumple $\rho_{c_{in}} = \rho_{c_{st}} \equiv \rho_c$. Las ecuaciones muestran que éste es invariante, y por tanto debe contener puntos fijos. Sobre este plano se cumple $F_{c_{in}} = F_{c_{st}} \equiv F_c$, y los flujos resultan:

$$F_h(\vec{\rho}) = -[f_{\alpha}(2\rho_c) + r] \rho_h + r(1 - 2\rho_c) , \quad (27)$$

$$F_c(\vec{\rho}) = \frac{1}{2} f_{\alpha}(2\rho_c) \rho_h - f_{\beta}(\rho_h + \rho_c) \rho_c . \quad (28)$$

Este sistema muestra un gran parecido con el formado por las ecuaciones (8) y (9) del modelo HCO. Sin embargo, existen dos diferencias fundamentales entre ambos debidas al mecanismo de delación cruzada entre bandas de corruptos: por un lado, el estado de dominación corrupta Full C con coexistencia de bandas no puede ser nunca estable, y por otro, la fracción total de honestos es siempre mayor que en el caso del modelo HCO, porque a la delación que sufren ambas bandas corruptas por parte de los honestos cuando sus fracciones son iguales se suma este mecanismo de delación cruzada. Podemos observar en la Figura 4a las nulclinas sobre el plano bisectriz (arriba) y dos secciones horizontales del tetraedro que conforma el espacio de fases (abajo). Se ve claramente que el punto fijo sobre la bisectriz dado por el corte entre las nulclinas ocurre para una fracción de honestos mayor (Figura 4a.3, $\rho_h^* = 0.505$) que sobre la cara (Figura 4a.4, $\rho_h^* = 0.46$).

Por completitud, podemos estudiar cómo se comporta el punto de dominio honesto Full H . Al estudiar el sistema mediante una aproximación lineal en torno al punto fijo, hemos obtenido el criterio de estabilidad sobre las caras. Por otro lado, los posibles efectos desestabilizadores que tenga la convivencia entre bandas serán de segundo orden en ρ_c , y por tanto, despreciables frente al comportamiento lineal. Así, el criterio de estabilidad del punto fijo Full H deberá ser el del modelo HCO necesariamente.

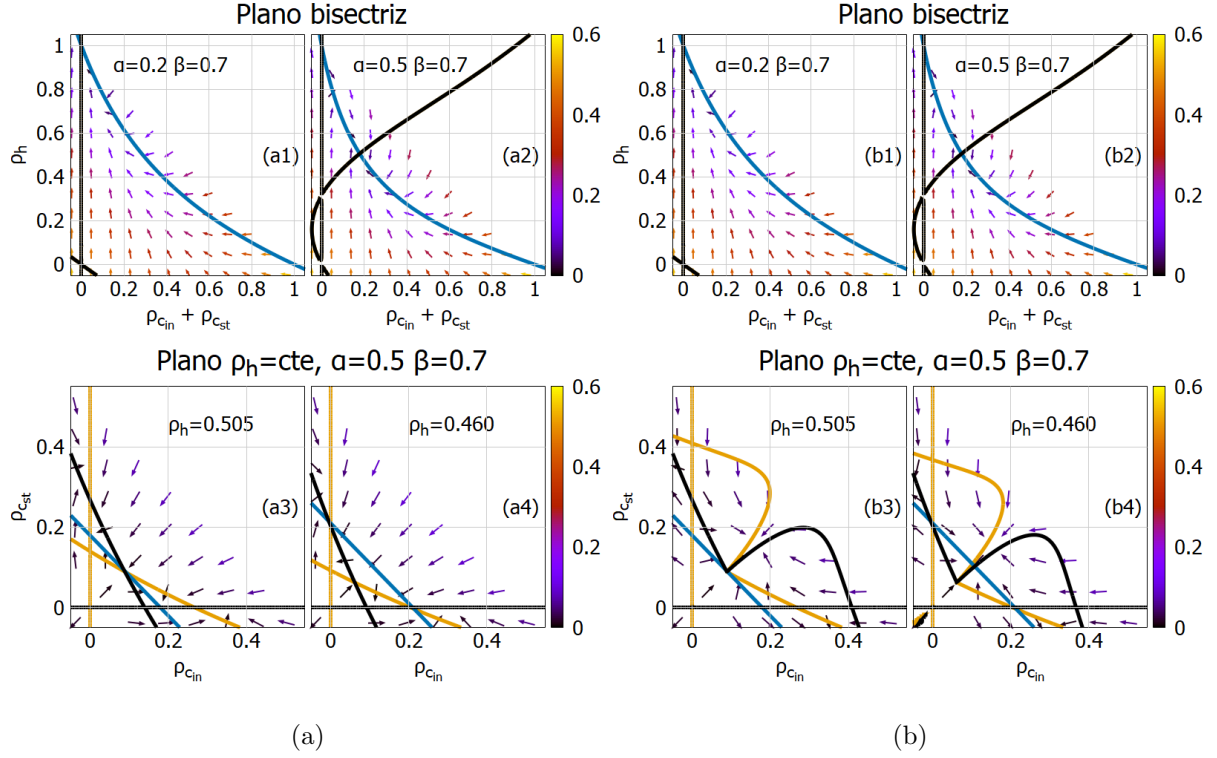


Figura 4: Diagramas de flujo y nulclinas $F_h = 0$ (azul), $F_{c_{in}} = 0$ (amarillo) y $F_{c_{st}} = 0$ (negro), para $r = 0.5$ y diferentes elecciones de parámetros α y β . (a) Modelo HCCO. Arriba: representación del plano bisectriz del tetraedro, correspondiente a coexistencia de bandas. Se muestra el punto fijo completamente honesto (a1), y el punto de convivencia (a2). Las nulclinas de C_{in} y C_{st} están superpuestas por simetría. Abajo: secciones horizontales del tetraedro, a $\rho_h = cte$. Se observa el punto fijo sobre la bisectriz (a3) y el punto fijo sobre la cara (a4) para una misma elección de parámetros α y β . (b) Modelo HCCO con delación selectiva. Se muestran los mismos planos que en la Figura (a). Ahora, se observa la alteración en la forma de las nulclinas debida a la función Boltzmann, y se aprecia el punto fijo sobre el plano bisectriz (siempre estable) y el punto fijo sobre la cara (inestable para ciertos valores de α y β).

Respecto al plano bisectriz, éste confina las trayectorias en su interior: dada cualquier condición inicial dentro del plano, el sistema nunca logrará abandonar la bisectriz. Esto es evidente por simetría teniendo en cuenta que, si en un punto determinado del espacio de fases el sistema logra abandonar la bisectriz, entonces debe poder hacerlo hacia la zona de mayoría de C_{st} o de mayoría de C_{in} indistintamente. Por tanto, las trayectorias no podrían ser completamente deterministas, algo que no tiene cabida en nuestro modelo. El punto fijo en la bisectriz, que es único, debe ser así estable en este subespacio. Sin embargo, fuera de la bisectriz este punto resulta ser inestable. Se puede demostrar fácilmente partiendo del punto fijo interior $(\rho_h^*, \rho_c^*, \rho_c^*)$, que cumple:

$$F_h = -[f_\alpha(2\rho_c^*) + r]\rho_h^* + r(1 - 2\rho_c^*) = 0, \quad (29)$$

$$F_c = \frac{1}{2}f_\alpha(2\rho_c^*)\rho_h^* - f_\beta(\rho_h^* + \rho_c^*) = 0. \quad (30)$$

Ahora, una pequeña perturbación ϵ que convierta a la especie C_{in} en mayoritaria y nos sitúe en

un punto $(\rho_h^*, \rho_c^* + \epsilon, \rho_c^* - \epsilon)$ da lugar a los flujos:

$$F_{c_{in}} = f_\beta(\rho_h^* + \rho_c^*)(\rho_c^* + \epsilon) - f_\beta(\rho_h^* + \rho_c^* - \epsilon)(\rho_c^* + \epsilon) , \quad (31)$$

$$F_{c_{st}} = f_\beta(\rho_h^* + \rho_c^*)(\rho_c^* - \epsilon) - f_\beta(\rho_h^* + \rho_c^* + \epsilon)(\rho_c^* - \epsilon) , \quad (32)$$

donde hemos usado que $t(x \pm \epsilon, x \mp \epsilon) = (1 \pm \epsilon/x)/2$, y la relación $f_\alpha(2\rho_c^*)\rho_h^*/2 = f_\beta(\rho_h^* + \rho_c^*)$, que se puede obtener directamente de (30). Teniendo en cuenta que la función f_β es monótona creciente, tenemos que $F_{c_{in}} > 0$ y $F_{c_{st}} < 0$, y por tanto el sistema tenderá a amplificar la perturbación alejándose del plano bisectriz. Se demuestra así que este punto fijo es inestable, y los únicos puntos fijos estables del espacio de fases se situarán sobre las caras. Recuperamos así un comportamiento que emula por completo al modelo HCO, y la generalización a dos especies corruptas no lleva a ningún resultado nuevo de interés al no lograr sobrevivir ambas especies al mismo tiempo.

Es preciso entonces plantear alguna modificación que de lugar a coexistencia. Para ello, optamos por alterar la regla de delación de los agentes honestos: ahora, un agente honesto delatará con menor probabilidad a un agente corrupto perteneciente a la banda minoritaria (es decir, la que represente una menor fracción de población) que a uno perteneciente a la mayoritaria, favoreciendo así la expansión de la minoritaria. Si bien este comportamiento de los agentes honestos puede parecer arbitrario, encuentra justificación en el hecho de que el punto fijo en el caso de coexistencia de bandas tiene una fracción de población honesta total mayor que el caso con una única banda, como hemos visto anteriormente. Por tanto, para un agente honesto, no delatar al corrupto minoritario es una estrategia inteligente desde un punto de vista colectivo. De aquí en adelante, llamamos «HCCO» a este nuevo modelo, y «HCCO sin delación selectiva» al anterior, que no contiene la nueva regla de delación.

La modificación de la regla se implementa en las ecuaciones a través de una nueva función $B(x, y)$ que regula la delación de las bandas por parte de los honestos, de manera que los flujos resultan:

$$F_h(\vec{\rho}) = -[f_\alpha(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) + r] \rho_h + r [1 - (\rho_{c_{in}} + \rho_{c_{st}})] , \quad (33)$$

$$F_{c_{in}}(\vec{\rho}) = f_\alpha(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) t(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) \rho_h - f_\beta(\rho_h B(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}), \rho_{c_{st}}) \rho_{c_{in}} , \quad (34)$$

$$F_{c_{st}}(\vec{\rho}) = f_\alpha(\rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) t(\rho_{c_{st}}, \rho_{c_{in}}) \rho_h - f_\beta(\rho_h B(\rho_{c_{st}}, \rho_{c_{in}}), \rho_{c_{in}}) \rho_{c_{st}} . \quad (35)$$

La forma explícita de la función $B(x, y)$ depende del comportamiento que asumen los honestos cuando ambas bandas tienen fracciones de población muy similares, y la determinación de la banda mayoritaria puede resultar algo difusa. En nuestro caso, aplicamos una función de Boltzmann para la especie minoritaria, mientras que la mayoritaria no se ve afectada por este mecanismo:

$$B(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y , \\ \exp \left[\frac{1}{T} \frac{(x-y)}{(x+y)} \right] & \text{si } x < y . \end{cases} \quad (36)$$

T representa la temperatura, que tomaremos como $T = 0.1$ en todo el trabajo. Esta temperatura marca la delación que sufrirá la especie minoritaria: cuanto mayor sea, menos delación sufrirá para una misma distancia hasta el plano bisectriz. Además, cuando la diferencia poblacional $x - y$ sea razonablemente grande, la delación que soportará la banda minoritaria por parte de los agentes honestos será nula, mientras que si ambas poblaciones son iguales, la delación

será igual a la del modelo original para ambas. Esta elección de $B(x, y)$ tiene dos ventajas principales: la función es continua en $x = y$, y se conserva la posición de los puntos fijos sobre el plano bisectriz, al cumplirse $B(x, x) = 1$. Hay otras elecciones posibles, aunque no todas mantienen las propiedades anteriores (ver anexo 1).

La función elegida resulta difícil de tratar analíticamente a la hora de estudiar el comportamiento de los puntos fijos. Para ello, tomaremos en los cálculos que siguen el límite $T \rightarrow 0$, en el que obtenemos una función escalón. Las predicciones realizadas en este límite serán válidas cuando la diferencia de poblaciones corruptas sea razonablemente grande. Tenemos así:

$$B(x, y) = \theta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y, \\ 0 & \text{si } x < y. \end{cases} \quad (37)$$

Estudiamos ahora el comportamiento sobre la bisectriz. En esta ocasión, tras aplicar al estado en el equilibrio dado por las relaciones (29) y (30) una pequeña desviación ϵ , obtenemos unas ecuaciones de flujo:

$$F_{cin} = f_\beta(\rho_h^* + \rho_c^*)(\rho_c^* + \epsilon) - f_\beta(\rho_h^* + \rho_c^* - \epsilon)(\rho_c^* + \epsilon) > 0, \quad (38)$$

$$F_{cst} = f_\beta(\rho_h^* + \rho_c^*)(\rho_c^* - \epsilon) - f_\beta(\rho_c^* + \epsilon)(\rho_c^* - \epsilon) > 0. \quad (39)$$

Dado que $\epsilon \ll 1$, podemos asumir que $\rho_h^* > \epsilon$, y podemos ver fácilmente que $F_{cst} > F_{cin}$ porque $f_\beta(\rho_h^* + \rho_c^* - \epsilon) > f_\beta(\rho_c^* + \epsilon)$. Por tanto, el flujo tenderá a restablecer la situación de equilibrio, y el punto fijo sobre la bisectriz se convierte en estable para cualquier elección de α y β . Falta estudiar entonces cómo afecta el cambio al punto fijo sobre la cara, en el que sólo hay presente un grupo corrupto. Para ello, tomamos las ecuaciones de flujo evaluadas en el punto fijo $(\rho_h^*, \rho_c^*, 0)$:

$$F_h = -[f_\alpha(\rho_c^*) + r]\rho_h^* + r(1 - \rho_c^*) = 0, \quad (40)$$

$$F_{cin} = f_\alpha(\rho_c^*)\rho_h^* - f_\beta(\rho_h^*)\rho_c^* = 0, \quad (41)$$

$$F_{cst} = 0. \quad (42)$$

Ahora, situándonos en un punto muy cercano al anterior, con una pequeña fracción de corruptos de la banda rival presentes $(\rho_h^*, \rho_c^* - \epsilon, \epsilon)$, obtenemos las ecuaciones:

$$F_h = -[f_\alpha(\rho_c^*) + r]\rho_h^* + r(1 - \rho_c^*) = 0, \quad (43)$$

$$F_{cin} = [f_\beta(\rho_h^*) - f_\beta(\rho_h^* + \epsilon)](\rho_c^* - \epsilon), \quad (44)$$

$$F_{cst} = [f_\beta(\rho_h^*) - f_\beta(\rho_c^* - \epsilon)]\epsilon, \quad (45)$$

donde hemos usado que $f_\alpha(\rho_c^*)\rho_h^* = f_\beta(\rho_h^*)\rho_c^*$, obtenido de la ecuación (41). De nuevo, dado que f_β es una función monótona creciente, y asumiendo $\epsilon \ll 1$, podemos ver que $F_{cin} < 0$ en general. Por otro lado, el signo de F_{cst} depende de la relación entre ρ_h^* y ρ_c^* . En concreto, cuando $\rho_h^* > \rho_c^*$ ($\rho_h^* < \rho_c^*$), tendremos que $F_{cst} > 0$ ($F_{cst} < 0$). Si el flujo de la especie minoritaria es negativo, el sistema siempre acabará exterminándola y regresando a la cara, recuperando el comportamiento HCO. Sin embargo, si el flujo F_{cst} es positivo, el sistema siempre tenderá a la coexistencia, y el punto fijo sobre la cara será inestable.

Necesitamos encontrar entonces la condición para que se cumpla $\rho_h^* = \rho_c^*$. Dada la simetría implícita en el modelo HCO, en el que corrupción y delación hacen uso de los mismos mecanismos

de interacción y el mismo tipo de función f_α, f_β con distintos parámetros α y β , es evidente que esto se producirá cuando $\alpha = \beta$. Por tanto, si $\alpha < \beta$, el punto fijo sobre la cara será inestable, y el único atractor global del sistema será el punto fijo sobre la bisectriz, de coexistencia de bandas. Por otro lado, cuando $\alpha > \beta$, los puntos fijos sobre las caras se convertirán en estables, dando lugar a biestabilidad: la fracción final de honestos y corruptos dependerá de las condiciones iniciales del sistema, pudiendo darse convivencia entre bandas, con una mayor fracción de población honesta, o dominio de una única banda, con una fracción honesta total menor. Se puede ver entonces que en $\alpha = \beta$ se produce una bifurcación transcítica, en la que los puntos fijos inestables internos del sistema que separan las cuencas de atracción de los puntos fijos estables sobre la cara y la bisectriz colisionan con los puntos fijos sobre las caras. A partir de ese momento, cuando $\alpha < \beta$, el punto fijo sobre la cara pasa a ser inestable, y el punto fijo en el interior del sistema sale al exterior del tetraedro convertido en un punto estable.

Los diagramas de flujo del modelo modificado se muestran en la Figura 4b. Se puede ver que la posición del punto fijo sobre el plano bisectriz no ha cambiado, pero ahora es un atractor global del sistema para cualquier elección de parámetros. En cambio, el punto fijo sobre la cara se convierte en inestable cuando $\alpha < \beta$. En la Figura 5 se observan las fracciones en equilibrio de individuos honestos, corruptos (de ambas bandas), y en el ostracismo, para diferentes elecciones de los parámetros α y β . Se puede ver que la fracción de población honesta es sistemáticamente mayor en la situación de convivencia (bisectriz) que en la situación de supervivencia de una única banda (cara), y además, se observa la condición de estabilidad del punto fijo sobre la cara comentado anteriormente y la biestabilidad existente cuando $\alpha > \beta$. De ahora en adelante nos centraremos únicamente en el comportamiento en el punto fijo de coexistencia de bandas, que es la novedad de este modelo, porque la fenomenología asociada al punto fijo con una única banda ya ha sido desarrollada ampliamente en la bibliografía [5, 6].

5.2. Dinámica markoviana y simulaciones Montecarlo

Una vez estudiadas las ecuaciones del sistema que determinan la dinámica en campo medio, pasamos a describir el comportamiento en redes. Para ello, hacemos uso del método de Montecarlo para simular la evolución estocástica de un sistema formado por agentes que se relacionan entre sí. En cada paso temporal, todos los agentes interactúan con sus respectivos vecinos y modifican sus estados con ciertas probabilidades fijadas por su entorno:

- Un agente H , al interactuar con un agente C_{in} o C_{st} tiene una probabilidad α de corromperse. Además, dado que en cada paso temporal todos los agentes interactúan con todos sus vecinos, cabe la posibilidad de que este agente H haya sido corrompido por más de un vecino al mismo tiempo. En ese caso, el estado final del agente se asigna a la especie C_{in} con probabilidad $t(n_{C_{in}}, n_{C_{st}}) = n_{C_{in}} / (n_{C_{in}} + n_{C_{st}})$, donde n_{C_x} representa el número de eventos corruptivos exitosos de la especie C_x , o a la especie C_{st} con probabilidad $t(n_{C_{st}}, n_{C_{in}}) = 1 - t(n_{C_{in}}, n_{C_{st}})$.
- Un agente C_{in} (C_{st}), al interactuar con un agente C_{st} (C_{in}), tiene una probabilidad β de ser delatado. Al interactuar con un agente H , tiene una probabilidad $\beta \cdot B(N_{C_{in}}, N_{C_{st}})$

$(\beta \cdot B(N_{c_{st}}, N_{c_{in}}))$, donde N_{c_x} es el número total de agentes de la especie C_x presentes en la red.

- Un agente O tiene una probabilidad r de ser reintegrado en la sociedad como H , independientemente de su entorno y sus interacciones.

Vemos así que en la delación interviene por un lado el vecindario del agente corrupto, que puede delatarle, y por otro la situación global de la red, que determina la probabilidad de delación por parte de los agentes honestos. En cambio, la corrupción sólo depende del entorno cercano. Teniendo esto en cuenta, dada una red $\{\sigma_i\}$ ($\sigma_i = H, C_{in}, C_{st}, O$) formada por N agentes, cuyas relaciones se encuentran codificadas en la matriz de adyacencia A_{ij} ($A_{ij} = 1$ si los agentes son vecinos, $A_{ij} = 0$ si no lo son), las probabilidades totales de corrupción (f_α) y delación (f_β) del agente i son:

$$f_\alpha(i, \sigma_j) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \alpha A_{ij}(\delta_{\sigma_j, C_{in}} + \delta_{\sigma_j, C_{st}})] , \quad (46)$$

$$f_\beta(i, \sigma_i = C_{in}, \sigma_j) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \beta A_{ij}(\delta_{\sigma_j, C_{st}} + B(N_{c_{in}}, N_{c_{st}})\delta_{\sigma_j, H})] . \quad (47)$$

La probabilidad de delación para los agentes C_{st} se obtiene a partir de la de los agentes C_{in} , intercambiando $C_{in} \leftrightarrow C_{st}$.

A este esquema de interacción en términos de una simulación Montecarlo se le puede asociar directamente un proceso Markoviano, en el que el estado de cada nodo se ve descrito por la probabilidad de que éste pertenezca a cada una de las especies en un momento determinado. Así, a cada agente i en un instante t se le asigna un vector $\vec{\rho}(i; t)$ de componentes:

$$\vec{\rho}(i; t) = (\rho_h(i; t), \rho_{c_{in}}(i; t), \rho_{c_{st}}(i; t), \rho_o(i; t)) \quad (48)$$

donde $\rho_x(i; t)$ representa la probabilidad de pertenecer a la especie x . La evolución temporal de las probabilidades del agente i viene determinada por las interacciones con sus vecinos, y se describe fácilmente mediante una matriz \mathbf{Q} tal que $\vec{\rho}(i, t+1) = \mathbf{Q} \vec{\rho}(i, t)$, donde:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 - f_\alpha & 0 & 0 & r \\ f_\alpha t(i; C_{in}, C_{st}) & 1 - f_\beta(i; C_{in}) & 0 & 0 \\ f_\alpha t(i; C_{st}, C_{in}) & 0 & 1 - f_\beta(i; C_{st}) & 0 \\ 0 & f_\beta(i; C_{in}) & f_\beta(i; C_{st}) & 1 - r \end{pmatrix} , \quad (49)$$

y $f_\beta(i; C_i)$ representa el ratio de transición entre ρ_{c_j} y ρ_o del agente i . Las expresiones de estos ratios y la función de combate toman la forma:

$$f_\alpha(i, \{\vec{\rho}(j)\}) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \alpha A_{ij}(\rho_{c_{in}}(j) + \rho_{c_{st}}(j))] , \quad (50)$$

$$f_\beta(i, \{\vec{\rho}(j)\}; C_{in}) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \beta A_{ij}(\rho_{c_{st}}(j) + B(\rho_{c_{in}}^T, \rho_{c_{st}}^T)\rho_h(j))] , \quad (51)$$

$$t(C_{in}, C_{st}) = \frac{\rho_{c_{in}}^T(i)}{\rho_{c_{in}}^T(i) + \rho_{c_{st}}^T(i)} , \quad (52)$$

donde $\rho_{C_j}^T$ representa la fracción total de la especie C_j en el sistema, y $\rho_{C_j}^T(i)$ representa la fracción total en el entorno del agente i . La aplicación de la dinámica markoviana en este sistema nos permite obtener resultados libres de los fenómenos estocásticos que gobiernan las simulaciones Montecarlo. Dado que trabajamos en términos de las probabilidades de pertenencia a una u otra especie que varían en el tiempo según las probabilidades de contagio, estamos contemplando simultáneamente el éxito o fracaso de todos los posibles eventos infectivos, y por tanto, todas las posibles vías de evolución del sistema. En este sentido, la dinámica markoviana representa el promedio de infinitas simulaciones Montecarlo, dando una valiosa información acerca del comportamiento del modelo.

Una vez descritas las reglas anteriores para la aplicación del modelo en redes, pasamos a estudiar los resultados. En primer lugar, recurrimos a una red regular aleatoria (RRN por sus siglas en inglés) para comparar los resultados obtenidos en el apartado anterior en aproximación de campo medio. En este tipo de redes todos los nodos tienen el mismo grado k , y además el sistema carece de estructura espacial definida: los links se reparten aleatoriamente entre todos los nodos (conservando su grado), de manera que la distancia entre dos nodos cualesquiera, es decir, el número de nodos intermedios que debemos atravesar para llegar de uno a otro, es muy pequeña en comparación con el tamaño total de la red. En este sentido, se habla también de redes de mundo pequeño [8] (ver inset de la Figura 5d, donde se muestra un ejemplo de RRN). La red que utilizamos en este trabajo está formada por 10000 nodos de grado $k = 4$, y está caracterizada por un diámetro de 11 y una distancia promedio entre nodos de 7.7, es decir: la mayor distancia mínima que separa dos nodos cualesquiera de la red es 11, y la separación media mínima entre dos nodos cualesquiera es 7.7. La cercanía entre todos los nodos de la red y su homogeneidad de grado hace esperar que su comportamiento se asimile al predicho en campo medio, cuya principal asunción es que el vecindario de un nodo es igual a la composición global del sistema, y que todos los nodos tienen un mismo número de vecinos en promedio.

En la Figura 5 se observan las fracciones de población honesta en el equilibrio que se obtienen al aplicar las dinámicas descritas anteriormente sobre la RRN que hemos comentado. Salvo que se indique lo contrario, todos los resultados en redes se han obtenido como promedio de 100 realizaciones del sistema para cada punto. Destaca el buen ajuste entre las predicciones de campo medio y los resultados obtenidos con la dinámica markoviana, aunque se producen algunas desviaciones apreciables para ciertos rangos de α y β . En concreto, cuando las fracciones de población honesta son relativamente pequeñas, la dinámica markoviana se aleja del comportamiento campo medio en favor del comportamiento que muestra el sistema bajo simulaciones Montecarlo. Este efecto se hace más pronunciado cuanto menor es la fracción honesta total. Una desviación de este estilo en la dinámica markoviana es un indicio de que la estructura de red sobre la que implementamos el modelo tiene una influencia clara y no despreciable en la dinámica del sistema, que el campo medio es incapaz de contemplar. El hecho de que, además, estas desviaciones coincidan casi a la perfección con el comportamiento de las simulaciones Montecarlo en algunas zonas, indica que el mecanismo subyacente que da lugar a la desviación es común para ambos. Además, este fenómeno de desviación en Markov no se da en el modelo HCO, por lo que debe estar íntimamente relacionado con la presencia de dos bandas corruptas y el mecanismo de delación modificado.

También es reseñable el hecho de que este comportamiento aparezca en una RRN, que es

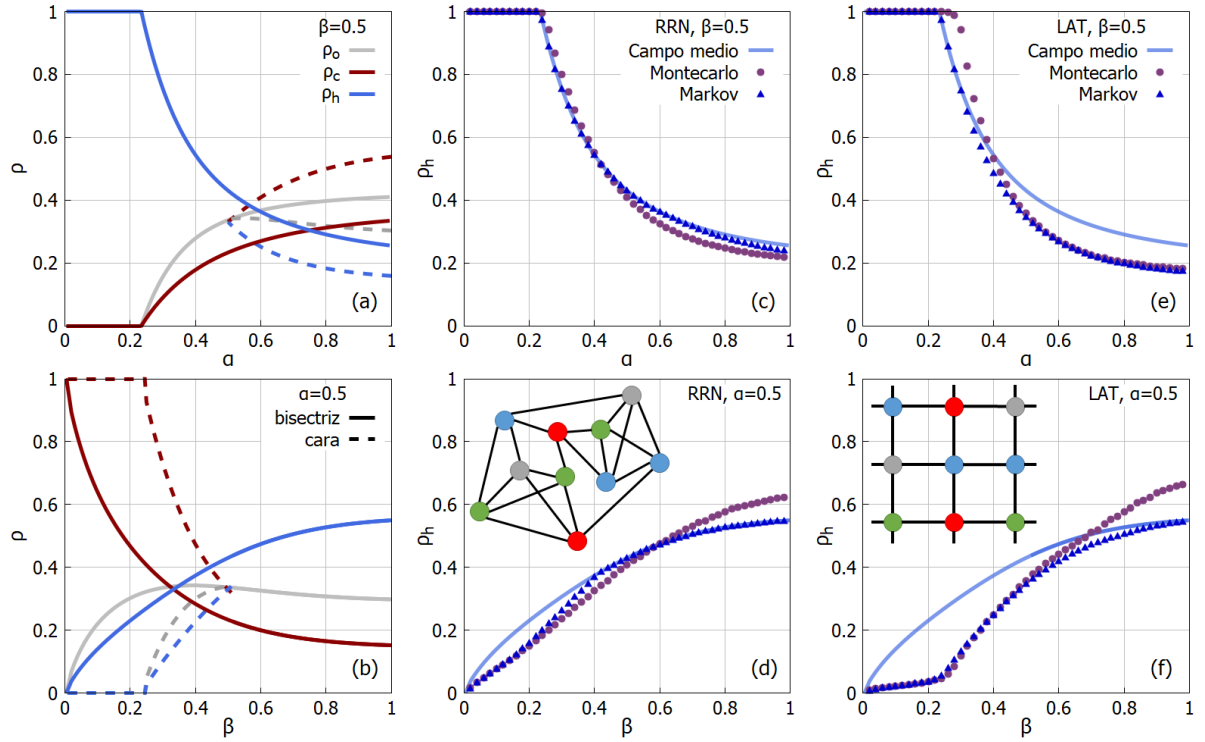


Figura 5: Fracción de población honesta (azul), corrupta total (roja) y en el ostracismo (gris) en el equilibrio, para $r = 0.5$, $k = 4$. (a) Resultados de campo medio para $\beta = 0.5$, en función de α . (b) Resultados de campo medio para $\alpha = 0.5$, en función de β . Se muestran las fracciones sobre la cara, cuando sólo sobrevive una banda corrupta (línea punteada) y sobre la bisectriz, cuando conviven ambas bandas (línea continua). Mostramos también la fracción honesta total sobre la bisectriz en RRN en función de (c) α y (d) β , y sobre redes lattice en función de (e) α y (f) β . Ambas redes tienen 10000 nodos de grado $k = 4$ con $r = 0.5$, para Markov y Montecarlo. Se compara con el resultado en campo medio. Los resultados se han promediado sobre 100 ejecuciones para cada valor de α y β mostrado, con condiciones iniciales $(\rho_h, \rho_{c_{in}}, \rho_{c_{st}}) = (0.4, 0.3, 0.3)$. En el caso de Markov, las fracciones iniciales en cada nodo son aleatorias, pero dando lugar a la misma fracción global. Inset: esquema de (d) una RRN y (f) una lattice.

el tipo de red que más se asemeja al campo medio por sus características. En este contexto, nos preguntamos qué ocurre al implementar el modelo HCCO sobre una red con estructura espacial bien definida, en la que las distancias entre nodos pueden hacerse extremadamente grandes y el aspecto de las vecindades puede, por tanto, variar mucho entre distintas zonas de la red. Esta red es la red cuadrada plana o lattice, que en su formulación estándar está formada por nodos de un mismo grado $k = 4$ conectados dando lugar a una cuadrícula (ver inset de la Figura 5e, donde se muestra una red lattice). Los resultados obtenidos se muestran también en la Figura 5, donde podemos ver que las diferencias entre el comportamiento campo medio y Montecarlo se acentúan, asemejándose de manera clara la dinámica markoviana a este último en un buen rango de valores de α y β . Estos resultados parecen mostrar que la existencia de correlaciones espaciales en la red acentúa las desviaciones de los comportamientos respecto del campo medio, ya de por sí presentes incluso en redes con estructuras muy poco definidas. Debemos identificar los mecanismos de interacción entre nuestro modelo y la red que dan lugar a estos comportamientos.

5.2.1. Segregación

Estudiamos entonces los entornos locales de los nodos para encontrar las desviaciones respecto del comportamiento campo medio. Para ello, podemos definir una métrica que compare la composición del vecindario de una especie determinada con la composición que debería tener en caso de que la población se distribuyese de manera homogénea. Esto se concreta en una medida σ_{xy} que da idea de la segregación que existe entre agentes de la especie x respecto de agentes de la especie y , es decir, cuánto se desvía el vecindario de los agentes x en términos de agentes y respecto al caso de población homogénea. Si el valor de esta métrica es menor que 1, esto significa que la especie x tiene, en promedio, un menor número de vecinos de la especie y de los que debería, y diremos que ambas especies están disgregadas. En cambio, si es mayor que 1, el vecindario de los agentes x estará compuesto por más agentes y que los que correspondería en promedio, y decimos que ambas especies están agregadas. Nótese que las especies x e y pueden ser la misma, y en ese caso mediremos la segregación de una especie consigo misma.

Matemáticamente, esto se concreta de la siguiente manera en el caso de simulaciones Montecarlo: para todo agente i que pertenezca a la especie x , contamos su número de vecinos de la especie y , n_y^i , y lo dividimos por el producto entre su grado k_i y la fracción total de agentes y presentes en la red ρ_y^T . Promediamos finalmente este valor sobre todos los agentes x :

$$\sigma_{xy}^{\text{MC}} = \frac{1}{N_x \rho_y^T} \sum_{i=1}^{N_x} \frac{n_y^i}{k_i}, \quad (53)$$

donde hemos supuesto que cada agente puede tener un grado diferente. En el caso concreto de redes homogéneas en las que todos los nodos tienen el mismo grado, que son las utilizadas en el trabajo, la expresión anterior se puede simplificar, dando lugar a:

$$\sigma_{xy}^{\text{MC}} = \frac{l_{xy}}{N_x} \frac{1}{\rho_y^T k} = \frac{l_{xy}}{N_x} \frac{N}{N_y k}, \quad (54)$$

donde l_{xy} representa el número total de enlaces entre agentes de la especie x y de la especie y , y hemos usado que $\rho_y^T = N_y/N$. Es evidente entonces que, en este caso concreto, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$.

En el caso de la dinámica markoviana resulta un poco más complicado definir esta métrica, teniendo en cuenta que cada nodo contiene fracciones de todas las especies. Por tanto, en el cálculo de las métricas sumamos las fracciones ρ_y^i de todos los vecinos del agente i , y pesamos la contribución de cada agente i a la métrica total por su fracción ρ_x . De esta manera, la expresión resulta:

$$\sigma_{xy}^{\text{MK}} = \frac{1}{N \rho_x^T \rho_y^T} \sum_{i=1}^N \frac{\rho_y^i}{k_i} \rho_x^i = \frac{1}{N k \rho_x^T \rho_y^T} \sum_{i=1}^N \rho_y^i \rho_x^i, \quad (55)$$

donde la última igualdad se cumple en el caso de redes homogéneas. Vemos así que en este caso también se cumple $\sigma_{x,y}^{\text{MK}} = \sigma_{y,x}^{\text{MK}}$.

Nos centramos fundamentalmente en el estudio de las métricas entre bandas corruptas, $\sigma_{c_{in}, c_{in}}$ y $\sigma_{c_{in}, c_{st}}$, para caracterizar las interacciones que se producen al incluir dos bandas en el modelo. Los resultados de la dinámica markoviana y de Montecarlo, tanto en RRN como en lattice, se muestran en la Figura 6. En primer lugar, los resultados de simulaciones Montecarlo muestran una segregación muy acusada entre bandas, de manera que los agentes de una banda

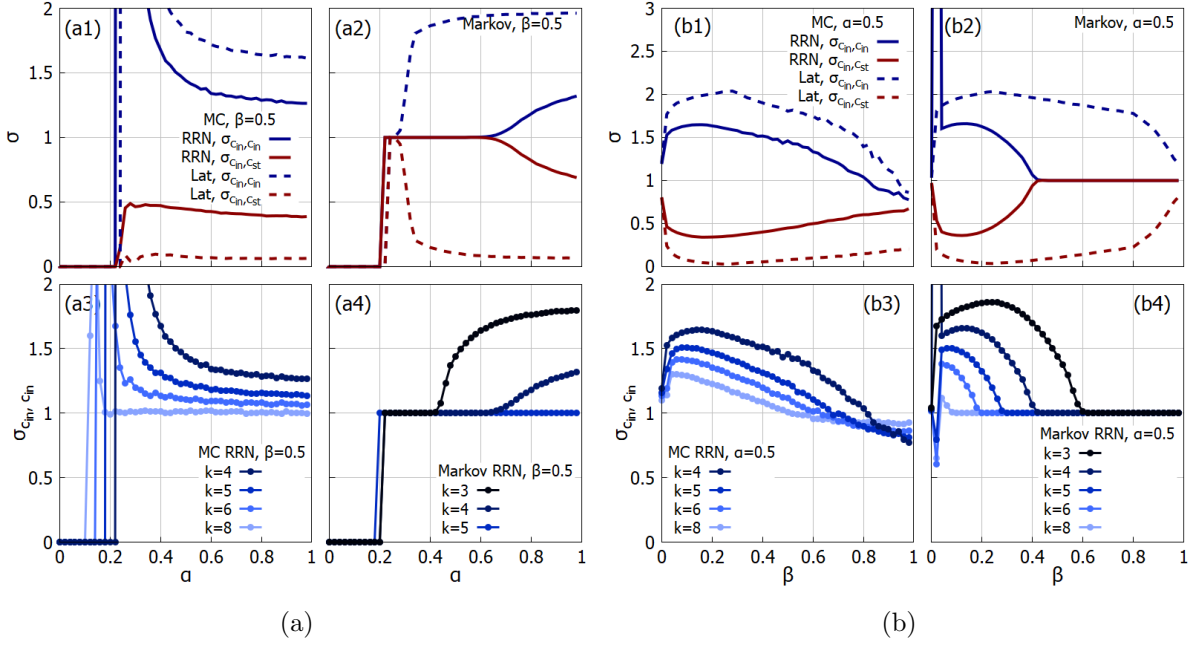


Figura 6: Métricas de segregación entre bandas. (a) Resultados para $\beta = 0.5$. (b) Resultados para $\alpha = 0.5$. Arriba: métricas de agregación de una banda (azul oscuro) y de segregación con la banda contraria (rojo oscuro), en el caso de Markov y Montecarlo, para RRN (líneas continuas) y lattice (líneas discontinuas). Abajo: Resultados de la agregación de una banda en RRN, para distintos valores de grado k de la red, para (a3,b3) Markov y (a4,b4) Montecarlo.

tienden a rodearse en gran medida de agentes de su misma banda ($\sigma_{cin, cin} > 1$), y se alejan mucho de los de la banda contraria ($\sigma_{cin, cst} < 1$). Además, esta segregación es mucho más pronunciada en redes lattice que en RRN, lo que resalta la importancia de la estructura espacial. Estos resultados implican que, en redes, la dinámica del sistema es tal que las bandas corruptas se segregan dando lugar a entornos locales diferentes a la estructura general de la red, y por tanto los resultados no se asemejan a los obtenidos en campo medio.

El estudio de la dinámica markoviana muestra claras diferencias entre una primera región del espacio de parámetros en la que los resultados coinciden con campo medio, y la región en la que se asemejan al comportamiento Montecarlo. En un principio, cabe esperar que la dinámica markoviana sea tal que las probabilidades en cada nodo en el equilibrio sean iguales a las de los demás nodos, e iguales a las fracciones en el equilibrio predichas por campo medio. Esta situación corresponde al caso en el que la composición del entorno de cualquier agente del sistema es igual que la del campo medio, y por tanto, las métricas σ_{xy} deben ser iguales a 1. En efecto, esto es lo que se observa en la primera región. En cambio, en la región en la que el comportamiento se asemeja al obtenido por Montecarlo, las métricas indican también la presencia de segregación entre bandas. Estos resultados son mucho más pronunciados en el caso de redes lattice que en RRN, al igual que ocurría en las simulaciones Montecarlo.

Una alteración como esta en los entornos de los agentes de la red explica las desviaciones en las poblaciones finales de cada especie, al dificultar el mecanismo de delación entre diferentes bandas. Se trata además de un efecto atribuible únicamente a la estructura de la red, y por tanto imposible de observar en campo medio. No obstante, sabemos que el comportamiento de

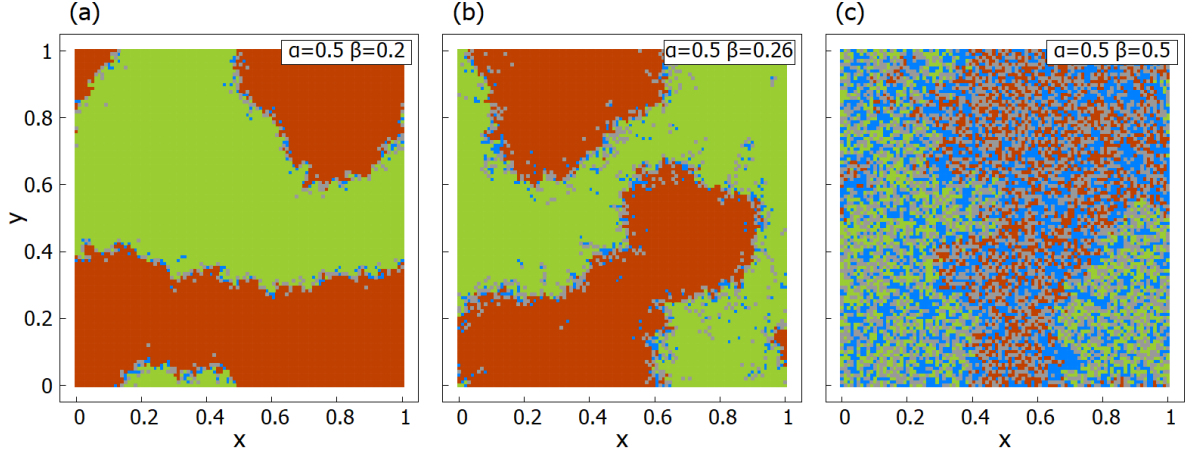


Figura 7: Configuraciones lattice correspondientes a simulaciones Montecarlo del modelo HCCO. Se muestran las cuatro especies: honestos (azul), corruptos C_{in} (verde), corruptos C_{st} (naranja) y en el ostracismo (gris). Las configuraciones corresponden a (a) $\beta = 0.2 < \beta_c$, (b) $\beta = \beta_c = 0.26$ y (c) $\beta = 0.5 > \beta_c$.

los modelos sobre redes se asemejan más al comportamiento campo medio cuanto mayor es el grado de la red, porque en una red más interconectada, los entornos de los agentes se asemejan más entre ellos. Podemos estudiar entonces cómo se comporta la segregación variando el grado. Los resultados se muestran también en la Figura 6, y podemos observar claramente que conforme aumenta el grado, la segregación disminuye, llegando incluso a desaparecer por completo para valores elevados de k .

5.2.2. Visualización de la segregación

El hecho de que este fenómeno de segregación venga provocado por la red subyacente supone que no pueda ser explicado en términos analíticos. Para arrojar luz sobre los mecanismos causantes, podemos aprovechar el hecho de que la lattice tiene una representación espacial bien definida que nos permite visualizar la composición de la red, para ver las distribuciones locales de cada especie. Representamos así en la Figura 7 tres configuraciones Montecarlo de una lattice en equilibrio, tomadas para diferentes valores de α y β , aunque todas corresponden a situaciones de convivencia entre bandas. La Figura 7c corresponde a un valor de β mayor, y por tanto tiene una mayor fracción total de honestos. A simple vista se aprecia el fenómeno de segregación que hemos descrito, mediante la existencia de dos grandes grupos o agregados distribuidos en regiones diferentes del espacio correspondientes a ambas bandas corruptas, y una frontera en medio rica en agentes honestos y en el ostracismo. En el caso de $\beta = 0.2$ (Figura 7a), la totalidad de los agentes honestos y en el ostracismo se sitúan en la frontera o cerca de ella, mientras que en el caso de $\beta = 0.5$ (Figura 7c), se encuentran distribuidos más o menos homogéneamente por toda la red. Esto implica que existe cierto valor crítico β_c a partir del cual los honestos son capaces de penetrar en los agregados corruptos, y sobrevivir por sí mismos en el interior. Este valor crítico se sitúa en torno a $\beta_c = 0.26$, como se observa en la Figura 7b, donde se ve que algunos agentes honestos son capaces de sobrevivir dentro de los grupos corruptos.

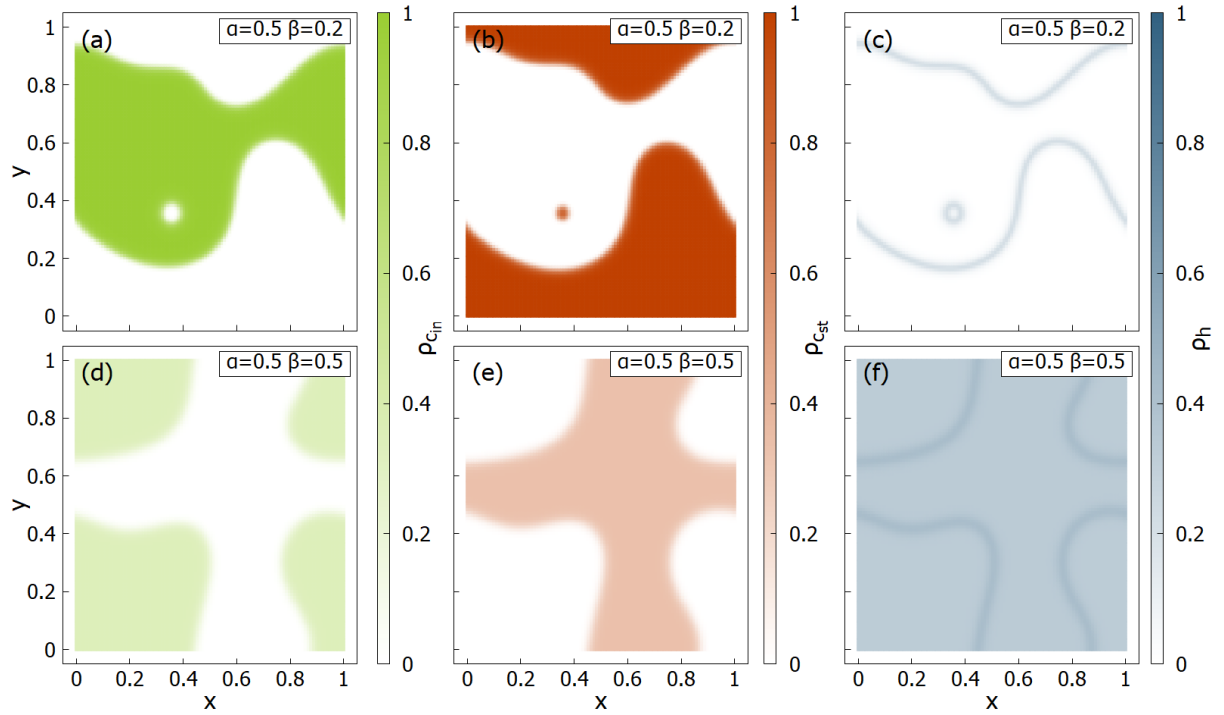


Figura 8: Configuraciones lattice correspondientes a la dinámica markoviana del modelo HCCO. Se muestran las fracciones de las especies (a,d) C_{in} , (b,e) C_{st} y (c,f) H , presentes en cada nodo. Las configuraciones corresponden a (a-c) $\beta = 0.2 < \beta_c$, y (d-f) $\beta = 0.5 > \beta_c$.

Un fenómeno similar ocurre en el caso de Markov. Podemos ver en la Figura 8 que, para una elección de parámetros en la que se produce segregación, aparecen dos grupos de corruptos diferenciados separados por franjas ricas en honestos. Además, no se produce convivencia entre bandas en el interior de estos agregados corruptos, es decir, los nodos del interior de los agregados sólo contienen fracciones corruptas de una banda, y los pocos nodos que contienen de ambas bandas se ven confinados a una pequeña región de frontera. Para diferentes elecciones de los parámetros, las fracciones de honestos en el interior de los agregados corruptos, que son aproximadamente homogéneas, van aumentando o disminuyendo hasta cierto valor límite β_c en el que desaparecen por completo, como vemos por las diferencias de color entre ambos casos. Cabe destacar también que las fracciones corruptas disminuyen conforme aumenta β por este fenómeno de penetración de honestos en los agregados, y no por la aparición de la otra banda minoritaria.

Estas estructuras que observamos al analizar la composición espacial local de la red plantean dudas razonables acerca de los mecanismos que rigen en última instancia la composición global del sistema. Como hemos comentado, el hecho de que ambas bandas formen grandes agregados con una interacción mínima en su frontera supone una desviación evidente respecto de la filosofía original del modelo, en la que las interacciones entre bandas provocaban excesos de honestos con respecto al modelo HCO. Por tanto, para explicar correctamente el comportamiento en redes debemos atender a las características locales, lo que nos lleva a tener en cuenta dos hechos importantes: primero, por el planteamiento del modelo, cuando las fracciones de corruptos de

una y otra banda son muy similares, ambos grupos se ven delatados por honestos con casi la misma probabilidad. Segundo, el comportamiento del sistema en el interior de los agregados corruptos, donde únicamente hay presencia de una banda, ignora los mecanismos de delación cruzada entre bandas. Estas dos propiedades llevan a pensar que la dinámica que se desarrolla en el interior de los agregados corruptos se asemeja a un modelo HCO, y no a un HCCO como esperábamos.

Hay varias maneras de validar esta suposición. En primer lugar, hemos visto que existe cierto umbral β_c , tanto en los resultados de Markov como en los de Montecarlo, que separa el caso en el que los agentes honestos se ven confinados a la frontera y el caso en el que consiguen penetrar en los agregados corruptos. Es razonable pensar que esta transición se debe producir cuando el valor de β sea tal que la situación de convivencia de agentes honestos y corruptos sea estable en el modelo HCO. En efecto, en la Figura 9a se puede ver claramente el cambio de comportamiento en la fracción total de honestos que se produce en el umbral de estabilidad del punto de convivencia del HCO, dado por la aparición de agentes honestos en el interior de los grupos. El pequeño exceso de agentes honestos para $\beta < \beta_c$ se debe únicamente al efecto de frontera que genera un fondo continuo de delaciones. Para valores pequeños de β por encima de β_c , la fracción total de honestos es pequeña y el comportamiento en Markov y Montecarlo sufre ligeras desviaciones respecto al comportamiento del modelo HCO. Sin embargo, para valores mayores de β , el comportamiento markoviano termina encajando casi a la perfección con el obtenido en el modelo HCO, salvo por las pequeñas desviaciones debidas a la frontera.

Algo distinto ocurre en el caso de simulaciones Montecarlo. Se puede observar que para valores de β grandes, la fracción de honestos en el modelo HCCO es menor que la que se obtiene en el caso del HCO. Este resultado va además en contra de las predicciones de campo medio, en las que la fracción de población honesta debía ser siempre mayor debido al mecanismo de delación cruzada entre bandas, que desaparece por el fenómeno de la segregación. Cabe recordar que la convivencia entre bandas es un resultado del mecanismo de delación selectiva por parte de los honestos, que deciden no castigar a la banda minoritaria con el objetivo de que ésta les ayude a delatar a la mayoritaria. El hecho de que ambas bandas se repartan en diferentes zonas en la red invalida en gran medida la supuesta utilidad de la convivencia para los honestos, que ahora se ven compitiendo como si se tratase de un modelo HCO, pero delatando a una de las bandas con una probabilidad menor de la que debería en cada paso temporal. Por tanto, en una red lattice la estrategia de delación inteligente consistiría en delatar a ambos grupos por igual hasta exterminar a uno de ellos, alcanzando entonces un modelo HCO genuino.

Los resultados anteriores muestran claramente que en las simulaciones Montecarlo se producen situaciones análogas al HCO. Ahora, para terminar de validar que, además de la segregación, el comportamiento HCO también está presente en Markov, podemos estudiar la distribución espacial de las fracciones honestas de los nodos. Para ello, realizamos los histogramas que se muestran en la Figura 9 correspondientes a las configuraciones detalladas en los inset, que indican la frecuencia con la que aparecen nodos con cierta fracción ρ_h . Podemos ver que, si bien las distribuciones abarcan varias composiciones posibles, se dan picos claros en la posición correspondiente a las poblaciones en el equilibrio del modelo HCO en campo medio, $\rho_h^{\text{HCO}} = 0$ cuando $\beta = 0.2 < \beta_c$, y $\rho_h^{\text{HCO}} = 0.33$ cuando $\beta = 0.5 > \beta_c$. El primer caso corresponde a la situación en la que el punto fijo Full C es estable, y por tanto no debería haber, en principio, fracciones

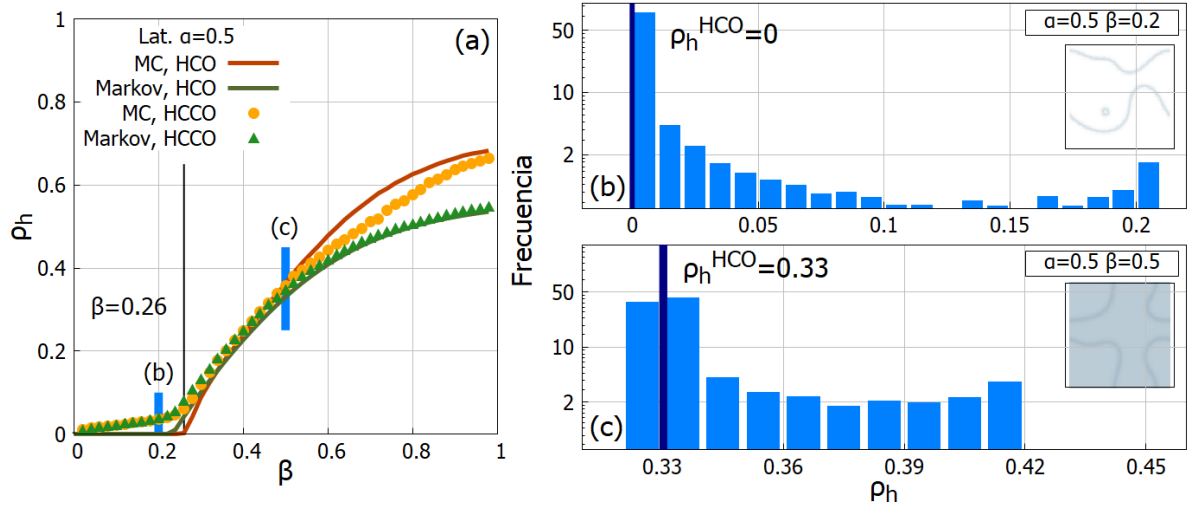


Figura 9: Red lattice. (a) Fracción de población honesta en función de β para $\alpha = 0.5$. Se muestran los resultados en el modelo HCO de simulaciones Markov (línea verde) y Montecarlo (línea roja), y sus contrapartes en el modelo HCCO (Triángulos verdes y círculos amarillos, respectivamente). La línea negra vertical marca la transición de estabilidad del modelo HCO en lattices, en $\beta_c = 0.26$. Los rectángulos azules muestran dos elecciones de β , por encima y por debajo de la crítica, en los que estudiamos la distribución de las poblaciones en la red mediante histogramas del número de nodos con cierta fracción honesta: (b) histograma para $\alpha = 0.5, \beta = 0.2$, (c) histograma para $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$. Ambos histogramas corresponden a las configuraciones que se muestran en los inset. Las líneas verticales azul oscuro marcan el valor obtenido por campo medio en el modelo HCO, que se detalla en las etiquetas ρ_h^{HCO} .

honestas. Sin embargo, vemos que aparecen poblaciones no nulas en la red que se distribuyen a lo largo de la frontera, dando lugar a un pico secundario para la fracción de honestos que se produce justo en el punto medio entre bandas. Algo similar ocurre en el segundo caso, en el que la fracción de honestos mayoritaria resulta ser, de nuevo, la correspondiente a las predicciones campo medio del modelo HCO.

Sabemos entonces que, en efecto, se produce una segregación entre bandas que da lugar a comportamientos HCO. Si bien las consecuencias directas de lo anterior se pueden entender fácilmente, en principio la comprensión del origen de este fenómeno es más complicada. Podemos dar una explicación cualitativa para justificarlo, basada en propiedades del modelo. En concreto, sabemos por los resultados del modelo HCCO sin delación selectiva que las interacciones entre bandas imposibilitan su convivencia, y el único punto fijo estable se da en la situación de supervivencia de una banda. Por tanto, en un entorno local en el que coexistan ambas especies corruptas con algunos agentes honestos que las delaten por igual (como es el caso del modelo que utilizamos en este trabajo, en el que la delación selectiva no tiene casi efecto si la población de ambas bandas es muy similar) necesariamente una de las dos debe desaparecer. En este sentido, podríamos identificar el comportamiento del sistema en subregiones de la red como si se tratase del HCCO sin delación selectiva (en el que habría una probabilidad de delación efectiva algo menor que β , pero igual para ambas bandas), suponiendo que el cambio de composición de ese subsistema no afecta al sistema global lo suficiente como para alterar en gran medida las probabilidades de delación por parte de honestos. De esta manera, en las subregiones se impondrá una

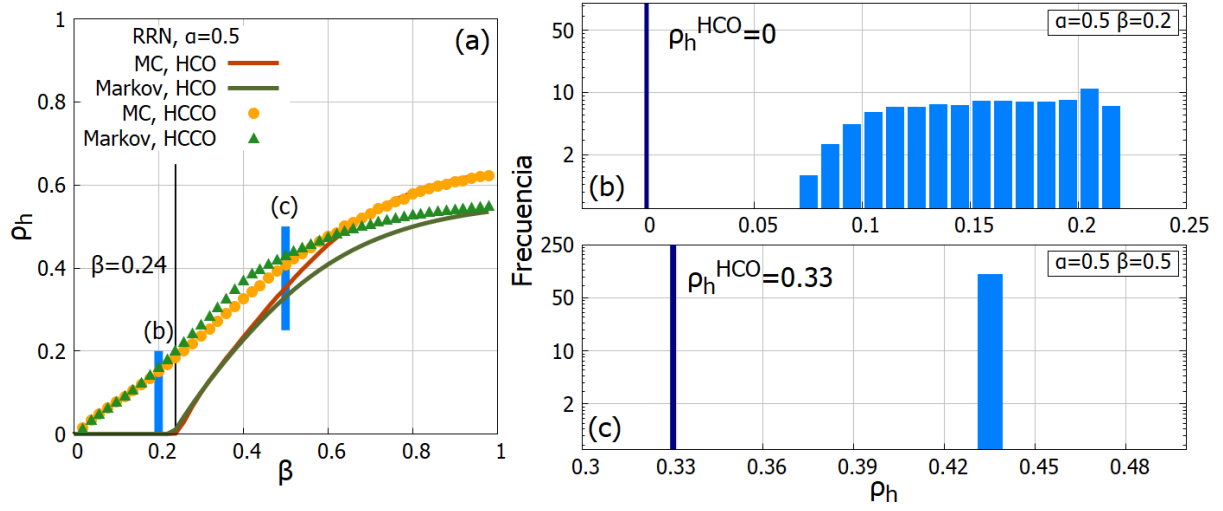


Figura 10: Red regular aleatoria (RRN). (a) Fracción de población honesta en función de β para $\alpha = 0.5$. Se muestran los resultados en el modelo HCO de simulaciones Markov (línea verde) y Montecarlo (línea roja), y sus contrapartes en el modelo HCCO (Triángulos verdes y círculos amarillos, respectivamente). La línea negra vertical marca la transición de estabilidad del modelo HCO en RRN, en $\beta_c = 0.24$. Los rectángulos azules muestran dos elecciones de β , por encima y por debajo de la crítica, en los que estudiamos la distribución de las poblaciones en la red mediante histogramas del número de nodos con cierta fracción honesta: (b) Histograma para $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$, (c) histograma para $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$. Las líneas verticales azul oscuro marcan el valor obtenido por campo medio en el modelo HCO, que se detalla en las etiquetas ρ_h^{HCO} . El histograma (c) muestra que todos los nodos tienen una misma fracción honesta, y corresponde al caso del comportamiento campo medio del sistema HCCO.

banda u otra, dependiendo de qué banda tenga una población mayor en la región. La explicación en el caso de Markov es similar: pequeños excesos en la población de una u otra banda pueden dar lugar a zonas de supervivencia de una única especie corrupta.

Los resultados mostrados hasta ahora describen correctamente el comportamiento en el caso de una lattice, pero el fenómeno de segregación es común a otras redes con estructuras espaciales mucho menos definidas o incluso inexistentes, como hemos visto en el caso de RRN. Cabe preguntarse entonces si las desviaciones que se producen en este caso también se pueden entender como efectos debidos a la aparición de regiones de la red donde se desarrolla el modelo HCO. Para ello, representamos de nuevo en la Figura 10a las poblaciones de honestos en Markov y Montecarlo en función de β , junto con las distribuciones obtenidas en el modelo HCO. Se puede ver ahora que no existe relación aparente entre el umbral β_c del HCO y el comportamiento en el modelo HCCO, poniendo en duda que este efecto sea relevante. No obstante, para valores de β elevados las fracciones de población honesta en simulaciones Montecarlo del modelo HCCO coincide casi a la perfección con los resultados en HCO. En realidad, se compensan dos efectos: la disminución de la delación por parte de honestos debido al mecanismo de delación selectiva, y el aumento debido a la delación cruzada entre diferentes bandas corruptas. Así, la segregación muestra tener influencia en el desarrollo de la dinámica, pero no da lugar a regiones de comportamiento HCO genuino.

Por otro lado, observamos también en la Figura 10 los histogramas de nodos con una determinada fracción ρ_h correspondientes a dos configuraciones RRN en el equilibrio, con valores de

β por encima y por debajo de la crítica. En esta ocasión, las fracciones honestas se desvían claramente del valor obtenido en el HCO, y muestran además poblaciones mucho más homogéneas. En el caso de $\beta = 0.5$ no llega a producirse la segregación, y se alcanza un estado completamente análogo al campo medio del HCCO, en el que todos los nodos tienen las mismas fracciones de población. Por tanto, podemos concluir que no hay regiones de la red en Markov que se comporten como si se tratase de un modelo HCO. Por otro lado, estos resultados son esperables a la luz del comportamiento de la segregación que se muestra en la Figura 6, donde se ve que ambas bandas corruptas siguen estando expuestas a fracciones no despreciables de la otra banda en RRN, mucho más que en lattices.

Esta diferencia de comportamientos entre diferentes estructuras de red resulta llamativa, teniendo en cuenta además que en ambas se produce segregación entre bandas. Este fenómeno debe ir necesariamente ligado a la aparición de agregados corruptos de cada especie en los que, en principio, siempre debería desarrollarse un HCO. El hecho de que en RRN no aparezca este comportamiento nos lleva a estudiar la estructura de los agregados corruptos que se forman para descubrir las diferencias que den lugar al cambio de comportamiento, para lo que recurrimos a los resultados en Montecarlo. En la Figura 11a se muestra el tamaño del agregado de corruptos mayor en función de β teniendo en cuenta ambas bandas, obtenido como promedio de 50 ejecuciones. Este tamaño se obtiene contando el número de agentes corruptos que pertenecen a un mismo grupo continuo, y seleccionando el grupo continuo con mayor número de estos. Podemos ver que existen claras diferencias respecto al comportamiento en el caso de redes lattice y RRN. Por un lado, la meseta que aparece para valores pequeños de β en la lattice indica que los agentes corruptos se reparten en dos grandes grupos que dominan la red, y hasta que β no supera el valor del umbral de HCO, $\beta_c \approx 0.26$, estas agregaciones no decaen. A partir de ahí, los agentes honestos aumentan en número, y se van uniendo hasta formar un gran grupo que atraviesa la red representando una buena fracción de la población total. Por otro lado, en RRN vemos que, si bien los agregados comienzan siendo muy grandes para $\beta < \beta_c$, disminuyen de tamaño rápidamente, teniendo los agregados mayores en torno a la mitad de tamaño que en el caso de la lattice cuando $\beta = \beta_c$. Además, el crecimiento del grupo mayor de honestos comienza mucho antes que en el caso anterior.

Los resultados parecen indicar por tanto que no existen, en principio, limitaciones al desarrollo del comportamiento HCO en el caso de RRN, porque grupos de corruptos de en torno a 2000 individuos deberían ser capaces de albergar en su interior esta clase de comportamiento sin intervención de la banda rival. Sin embargo, el tamaño del grupo no es lo único que determina el comportamiento en el interior de éste, sino que también debemos tener en cuenta los efectos de frontera. Para ello, representamos de nuevo en la Figura 11b el tamaño del agregado mayor en la misma escala que antes, pero en esta ocasión contabilizando únicamente aquellos agentes que se encuentren completamente rodeados por agentes de su misma especie. De esta manera, eliminamos en primera aproximación el efecto directo de frontera, y podemos comparar los interiores de los grupos. Las diferencias de comportamiento son evidentes: mientras que en redes lattice los agregados corruptos contienen en su interior espacio suficiente como para desarrollar comportamiento HCO, en el caso de RRN prácticamente la totalidad de los agentes se encuentran en la frontera. Por tanto, la dinámica viene dominada por interacciones entre bandas y con honestos, incluso cuando éstos no deberían estar presentes según un modelo HCO. Así, aunque

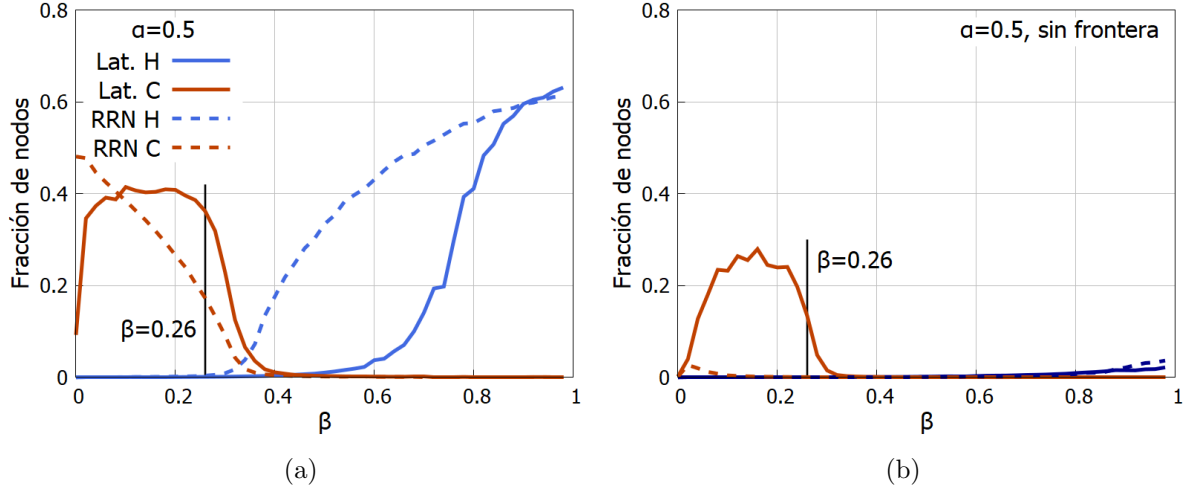


Figura 11: Tamaño del agregado mayor de la especie H , y el mayor de las especies C_{in} y C_{st} , obtenidos como promedio de 50 ejecuciones para cada valor de β . (a) Tamaño mayor teniendo en cuenta todos los agentes de una misma especie que forman un grupo continuo. (b) Tamaño mayor teniendo en cuenta únicamente aquellos agentes que se encuentren completamente rodeados por agentes de su misma especie.

la segregación entre bandas esté presente y juegue un papel importante en la composición final del sistema, no es suficiente como para romper el modelo HCCO en dos modelos HCO.

Estas diferencias de comportamiento se explican por la estructura espacial subyacente de ambas redes. La RRN tiene la propiedad de mundo pequeño, que hemos comentado al principio, según la cual la distancia entre dos nodos cualesquiera de la red, en términos del número de nodos que hay que atravesar para ir de uno a otro, es mucho menor que el tamaño total. Esto quiere decir que dos agentes cualquiera de una misma especie o de especies diferentes se encuentran, de media, mucho más cerca que si formasen parte de una lattice. La consecuencia directa es que es imposible formar regiones del espacio dominadas por una banda en las que se puedan ignorar efectos de frontera, porque siempre habrá agentes de la otra banda en las cercanías que alterarán la dinámica. En definitiva, podemos entender las RRN como sistemas en los que sólo hay frontera, provocada por la segregación de las bandas y las pequeñas distancias entre agentes.

Los mecanismos que dan lugar a la formación de fronteras son, por tanto, iguales en RRN y lattice, y la única diferencia es la capacidad de producir grupos corruptos lo suficientemente grandes. Esto tiene también influencia en el comportamiento markoviano del sistema, como podemos ver en la Figura 6, atenuando y retrasando la aparición de la segregación en RRN. La explicación cuantitativa de este fenómeno, y concretamente de la existencia de un umbral que separa las regiones de parámetros en los que se produce o no segregación, no es sencilla, y queda abierta para futuras investigaciones. Puede estar relacionada con la fracción total de honestos en la red y el parámetro α de corrupción: para que las poblaciones de corruptos puedan homogeneizarse dando lugar a comportamiento campo medio, es necesario que los corruptos de una banda consigan expandirse lo suficiente sobre nodos vecinos dominados por la banda contraria en cada paso temporal, de manera que al final ambas bandas logren un equilibrio sobre cada nodo. Para ello, es necesario que haya una fracción honesta suficiente en el agente vecino y un parámetro α elevado que permita compensar las pérdidas por delación. Cuando

alguna de estas dos condiciones no se cumpla, una de las especies tendrá que retroceder frente a la otra hasta alcanzar una región del espacio en la que puedan competir, dando lugar a una frontera que separará dos zonas en las que no se producirá convivencia.

6. Conclusiones

En este trabajo hemos explorado la generalización directa del modelo HCO, en el que se trata la corrupción como si fuese un estado infectivo, al caso en el que dos bandas corruptas diferentes compiten. Hemos visto que no puede darse la situación de convivencia de bandas corruptas, y eventualmente se alcanza siempre un estado de supervivencia de una única banda regido por el modelo HCO. Para solventar este problema, modificamos el modelo de manera que los honestos delaten con menor probabilidad a los corruptos de la banda minoritaria que a los de la mayoritaria, cuando su diferencia de población sea lo suficientemente grande. De esta manera, la banda minoritaria se ve beneficiada y es capaz de crecer hasta competir con la mayoritaria. Así, el modelo HCCO modificado da lugar a un punto fijo siempre estable de convivencia de bandas, y dos puntos fijos, estables para determinadas combinaciones de parámetros, de supervivencia de una única banda. Existen por tanto situaciones de biestabilidad en la red, en las que la composición final del sistema viene únicamente determinada por la población inicial.

Los resultados obtenidos mediante aproximación de campo medio muestran que la población honesta en el caso de convivencia de bandas es sistemáticamente mayor que en el caso de supervivencia de una única banda. Esto se debe a que los corruptos de ambas bandas ayudan a la creación de nuevos honestos mediante el mecanismo de delación cruzada, y por tanto la existencia de dos bandas que compiten por un mismo sistema resulta beneficiosa para los honestos justificando así la modificación del modelo desde un punto de vista inteligente: el honesto puede decidir no delatar a un corrupto minoritario en búsqueda del mejor resultado global.

La implementación sobre redes del sistema da lugar a resultados diferentes según su topología. En el caso de redes regulares aleatorias, que poseen la propiedad de mundo pequeño, la dinámica da lugar a resultados muy similares a los predichos en campo medio, siendo mayores las desviaciones en el caso de simulaciones Montecarlo. En cambio, la implementación del modelo en redes lattice muestra un comportamiento que difiere claramente de los anteriores, dando lugar a poblaciones muy diferentes. La representación visual de algunas de las configuraciones de equilibrio de sistemas lattice da la pista de los mecanismos que provocan estas desviaciones: la aparición de grandes agregados corruptos que segregan las bandas en regiones diferenciadas de la red.

Este fenómeno se puede entender teniendo en cuenta que, cuando ambas bandas tienen la misma población, se ven delatadas por igual por parte de los agentes honestos. Entonces, si dividimos el sistema en regiones pequeñas en las que una de las bandas sea mayoritaria, en principio la evolución será la esperada según el modelo HCCO sin delación selectiva, en el que los honestos delatan por igual a ambas bandas siempre. Por tanto, en esta región del espacio únicamente sobrevivirá una de las bandas, y estas terminarán segregándose en grandes grupos. La supervivencia de ambas en el sistema global viene garantizada por la asimetría en la delación por parte de los honestos.

Para cuantificar la formación de estos agregados, se han propuesto unas métricas que miden la desviación de la abundancia de cierta especie en el entorno de otra especie con respecto al promedio de la red. Si esta métrica es mayor que 1, entonces ambas especies se encuentran agregadas, y si es menor, se encuentran disgregadas. Estas métricas nos permiten observar que la segregación no sólo está presente en caso de redes lattice, sino también en RRN, y las pequeñas desviaciones poblacionales observadas en este caso son atribuibles a ella. Hemos visto también que la segregación disminuye conforme aumenta el grado de la red, llegando incluso a desaparecer por completo en el caso de Markov en RRN.

La aparición de regiones en lattices en las que únicamente se desarrolla una de las bandas da lugar a comportamientos tipo HCO que dominan la dinámica, y relega la interacción entre bandas a una pequeña región de frontera con escasa influencia en el comportamiento global. Esto provoca que las composiciones finales del sistema se acerquen más a los resultados HCO que a los de HCCO, al eliminar de manera efectiva la delación entre bandas, uno de sus mecanismos principales. Por otro lado, aunque este efecto también está presente en RRN, por la propiedad de mundo pequeño todo agente de una banda corrupta se encuentra muy cerca de cualquier otro agente de la banda contraria, y el comportamiento de todo el sistema corresponde esencialmente al de una frontera, sin llegar a producir un comportamiento HCO.

Por último, merece la pena destacar que el fenómeno de la segregación siempre penaliza a los agentes honestos, que ven disminuida su fracción en el sistema. En el caso de redes lattice, la penalización es tal que llega incluso a empeorar los resultados con respecto al modelo HCCO sin delación selectiva, en el que los honestos delatan siempre a sus vecinos corruptos independientemente de su banda. Esto revela la importancia crucial que tienen los mecanismos de delación cruzada a la hora de valorar positiva o negativamente un posible cambio de estrategia en los agentes honestos.

En definitiva, hemos comprobado que un sistema en el que conviven dos bandas corruptas diferentes que compiten entre sí muestra una gran riqueza en su comportamiento atribuible a los nuevos mecanismos de interacción entre ellas, y a la modificación inteligente de la estrategia delatora de los honestos. Las estructuras locales de la red han jugado también un papel fundamental en la dinámica del sistema, llegando incluso a separar de manera efectiva el modelo HCCO de convivencia en dos modelos HCO situados en regiones diferenciadas de la red. Estos resultados son un claro ejemplo de fenómenos emergentes, en los que los mecanismos locales de un sistema condicionan su expresión global, y muestran el papel fundamental que juegan las estructuras de red subyacentes a los modelos epidémicos, llegando incluso a invertir los resultados de nuestras predicciones. Todo lo anterior invita a seguir explorando esta vía haciendo uso de nuevas topologías de red y nuevas modificaciones del modelo, para desvelar nuevos resultados fruto de la competencia entre bandas corruptas.

Referencias

- ¹M. Perc, J. Gómez-Gardeñes, A. Szolnoki, L. M. Floría and Y. Moreno, “Evolutionary Dynamics of Group Interactions on Structured Populations: A Review”, *Journal of The Royal Society Interface* **10**, 20120997 (2013).
- ²R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. Van Mieghem and A. Vespignani, “Epidemic processes in complex networks”, *Reviews of modern physics* **87**, 925 (2015).
- ³C. Castellano, S. Fortunato and V. Loreto, “Statistical physics of social dynamics”, *Reviews of modern physics* **81**, 591 (2009).
- ⁴J. Gómez-Gardeñes, L. Lotero, S. Taraskin and F. Pérez-Reche, “Explosive contagion in networks”, *Scientific reports* **6**, 1–9 (2016).
- ⁵D. Lu, F. Bauzá, D. Soriano-Paños, J. Gómez-Gardeñes and L. M. Floría, “Norm violation versus punishment risk in a social model of corruption”, in *Phys. rev., E*, ART-2020-117331 (2020).
- ⁶F. Bauzá, D. Soriano-Paños, J. Gómez-Gardeñes and L. M. Floría, “Fear Induced Explosive Transitions in the Dynamics of Corruption”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **30**, 063107 (2020).
- ⁷S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (CRC press, 2018).
- ⁸D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective Dynamics of ‘Small-World’ Networks”, en, *Nature* **393**, 440–442 (1998).