La constante de isotropía de cuerpos convexos y la conjetura del hiperplano

Javier Martín Goñi

Trabajo de Fin de Máster
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: David Alonso Gutiérrez
y Julio Bernués Pardo

21 de junio de 2020

Abstract

Convexity and in particular convex bodies have been an important research field in recent decades, based on the interaction between local Banach theory with convex geometry and probability. In this work, we focus our study on the isotropic constant of convex bodies, which is a magnitude related with the mass distribution of convex bodies.

Each convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ is associated with an isotropic constant, denoted L_K, which indicates the volume of the inertial ellipsoid of that element of its family of affine transformation, $\{a + TK\ ;\ a \in \mathbb{R}^n,\ T \in GL(n)\}$, which is in a specific position, called isotropic position. The main goal of this work is to study the isotropic constant conjecture, which states that there exists an absolute constant $C > 0$ such that $L_K \leq C$, for every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$, for every $n \in \mathbb{N}$. In addition, we will prove that this question is equivalent to the so-called hyperplane conjecture, which asks whether every centered convex body of volumen 1 has a hyperplane section through the origin whose volume is greater than an absolute constant $c > 0$.

These questions have not been solved yet in all their generality, but for some families of convex bodies the conjectures are known to be true. In this work, we present some examples of it. The study of log-concave functions is essential in this study. As original result, we will improve some estimates for log-concave functions when better concavity conditions are fulfilled, as in the case of some of the functions appearing in the study.

Resumen

La convexidad y en particular los cuerpos convexos han sido un importante campo de estudio en las últimas décadas, basado en la interacción entre la teoría local de espacios de Banach con geometría convexa y probabilidad. En este trabajo centramos nuestro estudio en la isotropía de cuerpos convexos, la cual es una magnitud relacionada con la distribución de masa de cuerpos convexos.

A cada cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ se le asocia una constante de isotropía, denotada L_K, que indica el volumen del elipsoide de inercia de aquel elemento de su familia de transformaciones afines, $\{a + TK\,;\, a \in \mathbb{R}^n,\, T \in GL(n)\}$, que está en una posición específica, llamada posición de isotropía. El objetivo principal de este trabajo es estudiar la conjetura de la constante de isotropía, la cual plantea la existencia de una constante absoluta $C > 0$ tal que $L_K \leq C$, para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$, para toda dimensión $n \in \mathbb{N}$. Además, veremos que esta cuestión es equivalente a la conjetura del hiperplano, en la que se plantea si existe una cota inferior $c > 0$ absoluta, tal que todo cuerpo convexo de volumen 1 tenga una sección central con volumen al menos c.

Estas cuestiones aún no ha sido resultas en toda su generalidad, pero sí en algunas familias de cuerpos convexos. En este trabajo vamos a exponer algunos ejemplos de ello. El estudio de funciones log-cóncavas es esencial en trabajo. Como resultados originales, mejoraremos algunas estimaciones para funciones log-cóncavas cuando se satisfacen mejores condiciones de concavidad, como es el caso de algunas de las funciones que aparecen en este estudio.

Índice general

Introducción

El análisis geométrico asintótico se puede describir como el estudio de cuerpos convexos desde un punto de vista geométrico y analítico, haciendo énfasis en la dependencia en la dimensión de algunos parámetros. Esta rama de las matemáticas se basa en el análisis funcional, en particular en la teoría local de espacios de Banach, y su interacción con la geometría convexa y teoría de la probabilidad, las cuales estudian fenómenos en altas dimensiones. Esta área de las matemáticas empezo a ganar relevancia a finales del siglo pasado, y tuvo un gran crecimiento en parte por su relación con otras ramas de las matemáticas, con física matemática e incluso con teoría de la computación. El análisis geométrico asintótico se centra en mostrar aquellos fenómenos sobre cuerpos convexos que ocurren en altas dimensiones.

En este trabajo vamos a abordar una de las cuestiones no resueltas más importantes del análisis geométrico asintótico: la conjetura de la constante de isotropía. Para ello, vamos a hacer una introducción al análisis geométrico asintótico, viendo algunos resultados fundamentales, para así comprender qué es la constante de isotropía de cuerpos convexos, y poder responder parcialmente a esta conjetura. Este problema no está resulto en su totalidad, pero sí en ciertos casos particulares. Así, en este trabajo veremos algunas familias de cuerpos convexos en las que se satisface la conjetura. También enunciaremos la conjetura del hiperplano y veremos que ambas conjeturas son equivalentes. Finalmente, haremos alguna aportación original basada en el estudio de funciones α-cóncavas, con la cual mejoraremos algunas acotaciones relevantes en el estudio de cuerpos convexos.

Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, denotamos L_K la constante de isotropía de K. Este parámetro está asociado no solo a K sino a toda la familia de transformaciones afines de K, es decir, el conjunto $\{a+TK\,;\, a \in \mathbb{R}^n,\ T \in GL(n)\}$. La constante de isotropía está relacionada con la distribución de masa de K, e indica el volumen del elipsoide de inercia de la transformación lineal de K que cumple unas ciertas condiciones, la cual se dice que está en posición de isotropía.

La conjetura de constante de isotropía plantea la existencia de una constante absoluta $C > 0$ tal que $L_K \leq C$, para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$, para toda dimensión $n \in \mathbb{N}$. Esta cuestión ha sido resuelta en algunas clases de cuerpos convexos, como veremos en el capítulo 4. Sin embargo, no ha sido demostrada para cuerpos convexos en general. Además, veremos que es equivalente a la conjetura del hiperplano, en la que se plantea si existe una cota inferior $c > 0$ absoluta, tal que todo cuerpo convexo de volumen 1 tenga una sección central con volumen al menos c.

La estructura del trabajo está formada por cuatro capítulos.

En el capítulo 1, se presentan los conceptos y resultados que serán fundamentales en el posterior desarrollo de los contenidos, es decir, nociones básicas de teoría de cuerpos convexos y de teoría asintótica de espacios normados de dimensión finita. En este capítulo, vamos a trabajar con cuerpos convexos: conjuntos convexos cerrados y con interior no vacío; de los cuales veremos algunos funcionales que de forma natural se utilizan para trabajar con ellos. Además, daremos algunas resultados fundamentales en análisis geométrico, como la desigualdad de Brunn-Minkowski, la cual relaciona la suma de los volúmenes de cuerpos con el volumen de la suma de esos cuerpos; el volumen de las p-bolas, es decir, bolas unidad en $\mathbb{R}^n$ de la norma $\|\cdot\|_p$; o la posición de John de un cuerpo convexo K, en la cual el elipsoide de mayor volumen contenido en K es la bola unidad.

Los capítulos 2 y 3 tienen como principal objetivo el estudio del resultado que da nombre a esta memoria: la constante de isotropía de cuerpos convexos y la conjetura del hiperplano. Para ello, en primer lugar definiremos en el capítulo 2 la constante de isotropía de un cuerpo convexo. Haremos una minuciosa descripción de sus propiedades, así como de su existencia. Con esto, formularemos la conjetura de la constante de isotropía. Seguidamente, mediante unos conjuntos asociados a funciones log-cóncavas llamados cuerpos de Ball, daremos un resultado por el cual para cada cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ no necesariamente simétrico, podemos acotar la constante de isotropía de K mediante la constante de isotropía de un cuerpo de Ball simétrico asociado a una función log-cóncava determinada por K. Finalmente, acabaremos este capítulo dando un resultado original para en funciones α-cóncavas, en el que mejoramos la desigualdad con la que se acota la constante de isotropía de un cuerpo convexo, mediante la constante de isotropía de un cuerpo de Ball asociado. Una implicación de este resultado, es que si se prueba la conjetura de la constante de isotropía para cuerpos simétricos, entonces se satisface para cuerpos convexos en general.

En el capítulo 3, presentaremos la conjetura del hiperplano. Mediante una desigualdad entre la constante de isotropía de un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ y el volumen de sus secciones centrales, veremos que ambas conjeturas son equivalentes. Es decir, si una de las conjeturas se cumple, la otra se satisface también. Utilizando funciones α-cóncavas, daremos una mejora original en las constantes que aparecen en dicha desigualdad.

Por último, en el capítulo 4, veremos algunos ejemplos de familias de cuerpos convexos en los que se satisface la conjetura del hiperplano. En primer lugar, veremos dos clases de cuerpos convexos en los que podemos acotar la constante de isotropía por una constante. Estos son los cuerpos convexos incondicionales y cuerpos 2-convexos. Ambos satisfacen ciertas condiciones de convexidad o simetría que hacen posible la acotación de la constante de isotropía. Seguidamente, veremos que en politopos (envoltura convexa de un número finito de puntos), podemos acotar la constante de isotropía por una cantidad que depende del número de puntos con los que se define el politopo. Finalmente, daremos una cota para la constante de isotropía de politopos aleatorios Gaussianos con probabilidad muy alta, simplificando la demostración general conocida.

En resumen, en este trabajo se realizan las siguientes aportaciones:

- Se ve una exposición estructurada y autocontenida de los conceptos y resultados necesarios para entender la conjetura de la constante de isotropía y la conjetura del hiperplano, además de dar algunos ejemplos de familias de cuerpos convexos que las satisfacen.
- Se presentan, con una notación unificada y de un modo claro, las demostraciones de los resultados anteriormente mencionados, y se se ofrecen demostraciones originales de ciertos resultados que, aunque conocidos y aceptados, no hemos podido encontrar en la literatura.
- En los capítulos 2 y 3, a partir del estudio de funciones con condiciones más fuertes que la log-concavidad, que es la propiedad que generalmente se ha utilizado en el estudio de cuerpos convexos, se recogen algunos resultados originales basados en funciones α-cóncavas.
- En el capítulo 4, si bien la acotación de la constante de isotropía para politopos aleatorios ya ha sido estudiada, en este trabajo damos una acotación original para politopos Gaussianos, a partir de estudiar algunas propiedades de vectores aleatorios Gaussianos.

Capítulo 1

Geometría asintótica convexa

En este capítulo vamos a dar las nociones básicas de teoría de cuerpos convexos y de teoría asintótica de espacios normados de dimensión finita. Comenzaremos en la sección 1.1, dando los conceptos básicos de cuerpos convexos, así como la suma de Minkowsi de cuerpos convexos, el cuerpo polar (o dual) y el funcional de Minkowski de un cuerpo convexo.

En la sección 1.2, veremos una desigualdad clásica en geometría convexa: la desigualdad de Brunn-Minkowski. Esta desigualdad relaciona la suma de los volúmenes de cuerpos convexos, con el volumen de la suma de esos cuerpos.

En la sección 1.3, vamos a calcular el volumen de las bolas p en $\mathbb{R}^n$, es decir, el volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$ con la norma p. Las bolas p en $\mathbb{R}^n$ se denotan como $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_p \leq 1\}$.

Por último, en la sección 1.4, definiremos la posición de John y la posición de Löwner de un cuerpo convexo. Estas posiciones clásicas satisfacen una ecuación funcional que nos será útil para trabajar con cuerpos convexos.

1.1. Introducción a la convexidad

Vamos a centrar nuestro estudio en $\mathbb{R}^n$ equipado con el producto escalar Euclídeo $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y su correspondiente norma Euclídea $\|\cdot\|_2$. Denotamos B_2^n a la bola Euclídea centrada en el origen y de radio 1, es decir, $B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$; y denotamos S^{n-1} a la esfera centrada en el origen y de radio 1, es decir, $S^{n-1}\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$. Denotamos el volumen de un cuerpo con $|\cdot|$. Denotamos la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ en un subespacio F como P_F.

1.1.1. Primeras definiciones

El principal punto estudio de este trabajo recae sobre los conjuntos convexos. Definimos ahora qué se entiende por conjunto convexo.

Definición 1.1. Se dice que un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall x, y \in K$, y $\forall \lambda \in (0,1)$, se tiene que $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$.

Además, las intersecciones de conjuntos convexos son convexas.

Definición 1.2. Se dice que un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es estrictamente convexo si $\forall x, y \in K$, y $\forall \lambda \in (0,1)$, se tiene que $(1-\lambda)x + \lambda y \in intK$.

Notar que todo conjunto estrictamente convexo es, en particular, convexo.

Definición 1.3. La suma de Minkowski de dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se define como $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, y para cualquier $\mu \in \mathbb{R}$ se define $\mu A = \{\mu a : a \in A\}$.

Notar que ambas operaciones preservan la convexidad. Además, se tiene que A es convexo si y sólo si para todo $\lambda \in (0,1)$, $(1-\lambda)A + \lambda A = A$. En general, para cualquier $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in (0,1)$ se tiene que $A \subset (1-\lambda)A + \lambda A$.

Definición 1.4. Se dice que un conjunto A es simétrico si $x \in A$ implica que $-x \in A$.

En particular, en este trabajo nos centraremos en cuerpos convexos.

1.1.2. Cuerpos Convexos

Definición 1.5. Un cuerpo convexo es un subconjunto convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y con interior no vacío.

En este trabajo, denotaremos la clase de cuerpos convexos en $\mathbb{R}^n$ como $\mathscr{K}_n$.

Definición 1.6. Decimos que $K \in \mathscr{K}_n$ es *centrado*, si el baricentro,

$$bar(K) = \frac{1}{|K|} \int_K x dx,$$

está en el origen.

Del mismo modo, si f es una función medible, decimos que f es centrada si

$$\int_{\mathbb{R}^n} x f(x) dx = 0.$$

Definición 1.7. Un cono (convexo) es un subconjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, tal que si $x \in C$, entonces $\lambda x \in C$ para todo $\lambda > 0$.

Es decir, un cono es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ cerrado para la suma y el producto por números reales no negativos.

Definición 1.8. Dado un conjunto arbitrario X, se define la envoltura convexa de X, y se representa como $conv(X)$, como la intersección de todos los subconjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$ que contienen a X.

La envoltura convexa de un conjunto X es el menor convexo que contiene a X. En este trabajo tienen especial interés los conjuntos que se obtienen como envoltura convexa de un número finito de puntos.

Definición 1.9. Un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ se llama politopo, si es la envoltura convexa de un número finito de puntos.

Veamos ahora una serie de normas y funciones asociadas a cuerpos convexos.

Definición 1.10. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo con $0 \in intK$. Entonces, se define el funcional de Minkowski de K como

$$\|x\|_K = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 \,;\, x \in \lambda K\}.$$

Notar que si $A \subset B$, entonces $\|\cdot\|_A \geq \|\cdot\|_B$.

Proposición 1.1. *Sea K un cuerpo convexo y simétrico en $\mathbb{R}^n$ con $0 \in intK$. Entonces, el funcional de Minkowski de K, $\|\cdot\|_K$, es una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Por tanto, cualquier cuerpo convexo K simétrico con $0 \in intK$ define una norma en $\mathbb{R}^n$ dada por su funcional de Minkowski, con K como bola unidad, es decir,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_K \leq 1\}.$$

Recíprocamente, para cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, se tiene que su bola unidad,

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\},$$

es un cuerpo convexo simétrico y centrado en el origen.

Definición 1.11. Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con $0 \in intK$. Denotamos $\rho_K(x) = \sup\{\lambda > 0; \lambda x \in K\}$ la función radial de K.

Se puede ver que para todo $x \neq 0$, la función radial y el funcional de Minkowski de un cuerpo convexo K quedan inversamente relacionados:

$$\begin{aligned}\rho_K(x) &= \sup\{\lambda > 0; \lambda x \in K\} = \sup\left\{\lambda > 0; x \in \frac{1}{\lambda}K\right\} \\ &= \sup\left\{\lambda > 0; x \in \frac{1}{\lambda}K\right\} = \frac{1}{\text{ínf}\{\lambda > 0; x \in \lambda K\}} = \frac{1}{\|x\|_K}.\end{aligned}$$

Si ρ_K es continuo, se dice que K es un cuerpo estrellado. Para calcular el volumen de un cuerpo estrellado K, mediante integración en coordenadas polares, se tiene que

$$|K| = |B_2^n| \int_{S^{n-1}} \rho_K^n(\theta) d\sigma(\theta)$$

con σ la medida de probabilidad invariante rotacional de S^{n-1}.

Definición 1.12. Se define la función suporte de un cuerpo convexo (o en general de un conjunto convexo) de $\mathbb{R}^n$ como

$$h_K(x) = \sup\{\langle x, y\rangle; y \in K\}.$$

Se puede ver que h_K es una función homogénea positiva y convexa. Al contrario de lo que ocurría con el funcional de Minkowski, se tiene que si $A \subset B$, entonces $h_A \leq h_B$. El recíproco también es cierto: si $h_A \leq h_B$, entonces $A \subset B$. Dado $\theta \in S^{n-1}$, se llama *anchura* de K en la dirección θ a la cantidad $h_K(\theta) + h_K(-\theta)$.

Definición 1.13. Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con $0 \in intK$. Se define el cuerpo polar (o dual) de K como

$$K^o = \left\{y \in \mathbb{R}^n \,;\, \sup_{x \in K}\langle x, y\rangle \leq 1\right\}.$$

Se puede ver fácilmente que K^o es también un cuerpo convexo.

Proposición 1.2. *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con $0 \in intK$. Entonces, para todo $r > 0$, se tiene que $(rK)^o = (1/r)K$.*

Como el cuerpo polar de la bola unidad es ella misma, se tiene que $(rB_2^n)^o = (1/r)(B_2^n)^o = (1/r)B_2^n$. De manera más general tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con $0 \in intK$. Para todo $T \in GL(n)$ se tiene que $(TK)^o = (T^t)^{-1}K^o$.*

Demostración. Como $T \in GL(n)$, es claro que

$$\begin{aligned}(TK)^o = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \langle x, y\rangle \leq 1,\ \forall y \in TK\} &= \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \langle x, Ty\rangle \leq 1,\ \forall y \in K\} \\ &= \left\{(T^t)^{-1}T^t x \in \mathbb{R}^n \,;\, \langle T^t x, y\rangle \leq 1,\ \forall y \in K\right\} \\ &= \left\{(T^t)^{-1}z \in \mathbb{R}^n \,;\, \langle z, y\rangle \leq 1,\ \forall y \in K\right\} = (T^t)^{-1}K^o.\end{aligned}$$

□

Terminamos esta sección introduciendo las funciones log-cóncavas y α-cóncavas, las cuales aparecerán de forma natural cuando trabajemos con volúmenes o secciones.

Definición 1.14. Se dice que una función f es log-cóncava, si $\log(f)$ es una función cóncava.

Definición 1.15. Se dice que una función f es α-cóncava, si f^α es una función cóncava.

1.2. Desigualdad de Brunn-Minkowski

Una de las desigualdades más importantes en convexidad es la desigualdad de Brunn-Minkowski. Esta desigualdad relaciona el volumen de la suma de Minkowski de conjuntos convexos con los volúmenes de dichos conjuntos.

Teorema 1.1 (Brunn-Minkowski). *Las siguientes desigualdades son equivalentes. Sean $T,K \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos no vacíos y compactos, entonces*

$$|K+T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{1.1}$$

Equivalentemente, para todo $\lambda \in [0,1]$, se tiene que

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geq \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n} \tag{1.2}$$

y también

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda} \cdot |T|^{1-\lambda}. \tag{1.3}$$

Para demostrar este resultado, necesitamos el siguiente Teorema.

Teorema 1.2 (Prékopa-Leindler). *Sean $f,g,h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ funciones integrables, y sea $\lambda \in (0,1)$. Si se cumple que para todo $x,y \in \mathbb{R}^n$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} \cdot g(y)^{1-\lambda},$$

entonces se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)^{\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\right)^{1-\lambda}. \tag{1.4}$$

Demostración. Procedemos por inducción en la dimensión. Empezamos con $n=1$. Supongamos que f,g son continuas y estrictamente positivas. Definimos las funciones $x,y : (0,1) \to \mathbb{R}$ por las ecuaciones

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t \int_{\mathbb{R}} f \tag{1.5}$$

$$\int_{-\infty}^{y(t)} g = t \int_{\mathbb{R}} g \tag{1.6}$$

Como f y g son integrables y estrictamente positivas, es claro que x,y están bien definidas. Aplicando el Teorema fundamental del cálculo integral y el Teorema de derivación de la función inversa a los miembros de la izquierda y derivando, se tiene que para todo $t \in (0,1)$,

$$x'(t)f(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} f \tag{1.7}$$

$$y'(t)g(y(t)) = \int_{\mathbb{R}} g. \tag{1.8}$$

Para cada $\lambda \in (0,1)$, definimos $z_{\lambda} : (0,1) \to \mathbb{R}$ por

$$z_{\lambda}(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda)y(t).$$

Es claro que para todo $\lambda \in (0,1)$, como x,y son estrictamente crecientes, z es estrictamente creciente. Así, aplicando la desigualdad Aritmético-Geométrica,

$$z_{\lambda}'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda)y'(t) \geq (x'(t))^{\lambda} \cdot (y'(t))^{1-\lambda}$$

Por tanto, mediante el cambio de variables $s = z_\lambda(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(s)ds &= \int_0^1 h(z(t))z'(t)dt \\ &\geq \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t)) \cdot \left((x'(t))^\lambda \cdot (y'(t))^{1-\lambda}\right) dt \\ &\geq \int_0^1 f(x(t))^\lambda \cdot g(y(t))^{1-\lambda} \cdot \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} f}{f(x(t))}\right)^\lambda \cdot \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} f\right)^\lambda \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} g\right)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Luego, (1.4) es cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para dimensión $2, 3, ..., n-1$. Sean f, g, h como en el enunciado del teorema. Para todo $s \in \mathbb{R}$, definimos $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ dado por $h_s(w) = h(w, s)$. De forma análoga se definen $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Por hipótesis, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda \cdot g(y)^{1-\lambda}.$$

Por tanto, para todo $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$, y $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$h(\lambda(\tilde{x}, s_1) + (1-\lambda)(\tilde{y}, s_0)) \geq f((\tilde{x}, s_1))^\lambda \cdot g((\tilde{y}, s_0))^{1-\lambda}.$$

Es decir, para todo $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$, y $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda s_0)}(\lambda \tilde{x} + (1-\lambda)\tilde{y}) \geq f_{s_1}(\tilde{x})^\lambda \cdot g_{s_0}(\tilde{x})^{1-\lambda}.$$

Definimos

$$H = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h, \;\; F = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f \;\; y \;\; G = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g.$$

Por tanto, por la hipótesis de inducción se tiene que

$$H(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0) \geq F^\lambda(s_1) G^{1-\lambda}(s_0).$$

Por tanto, aplicando la misma hipótesis de inducción a H, F, G, con $n = 1$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h = \int_{\mathbb{R}} H \geq \left(\int_{\mathbb{R}} F\right)^\lambda \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} G\right)^{1-\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Así, se tiene el resultado. □

Observación. La desigualdad de Brunn-Minkowski adimensional (1.3), es consecuencia de la desigualdad de Prékopa-Leindler. Sean $T, K \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos no vacíos y compactos, y sea $\lambda \in (0,1)$. Definimos

$$f = \chi_K, \quad g = \chi_T \;\; y \;\; h = \chi_{\lambda K + (1-\lambda)T}.$$

donde χ_A es la fución característica en el conjunto A. Como f, g, h solo pueden tomar los valores 1 o 0, es claro que si $x \notin K$ o $y \notin T$, entonces

$$h(\lambda x + (1-\lambda y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} = 0.$$

Y si $x \in K$ y $y \in T$, entonces por definición

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} = 1.$$

Por tanto, se cumple la hipótesis de la desigualdad de Prékopa-Leindler, y se tiene que

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)^\lambda \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\right)^{1-\lambda} = |K|^\lambda \cdot |T|^{1-\lambda}.$$

Como hemos probado (1.3), para demostrar el resto de desigualdades del Teorema de Brunn-Minkowski 1.1, basta con ver que (1.1), (1.2) y (1.3) son equivalentes.

Demostración del Teorema 1.1. Veamos que las siguientes desigualdades son equivalentes

(1) $|K+T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}$, $\forall K, T \subset \mathbb{R}^n$ compactos no vacíos.

(2) $|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geq \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}$, $\forall K, T \subset \mathbb{R}^n$ compactos no vacíos y $\forall \lambda \in [0,1]$.

(3) $|\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda} \cdot |T|^{1-\lambda}$, $\forall K, T \subset \mathbb{R}^n$ compactos no vacíos y $\forall \lambda \in [0,1]$.

$(1 \Rightarrow 2)$: Tomamos $K' = \lambda K$ y $T' = (1-\lambda)T$. Entonces, aplicando (1), se tiene que

$$\begin{aligned} |\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} = |K' + T'|^{1/n} \geq |K'|^{1/n} + |T'|^{1/n} &= |\lambda K|^{1/n} + |(1-\lambda)T|^{1/n} \\ &= \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}. \end{aligned}$$

$(2 \Rightarrow 3)$: Utilizando la desigualdad aritmético-geométrica, se tiene que

$$\lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n} \geq |K|^{\lambda/n} \cdot |T|^{(1-\lambda)/n}.$$

Así, si se cumple (2), se tiene que

$$\begin{aligned} |\lambda K + (1-\lambda)T| = \left(|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n}\right)^n &\geq \left(\lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}\right)^n \\ &\geq \left(|K|^{\lambda/n} \cdot |T|^{(1-\lambda)/n}\right)^n \\ &= |K|^{\lambda} \cdot |T|^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

$(3 \Rightarrow 1)$: Tomamos

$$K' = \frac{K}{|K|^{1/n}}, \quad T' = \frac{T}{|T|^{1/n}} \ \text{ y } \ \lambda = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}} \in [0,1].$$

Notar que K' y T' son convexos no vacíos de volumen 1. Entonces, por un lado, por (3) se tiene que

$$|\lambda K' + (1-\lambda)T'| \geq |K'|^{\lambda} \cdot |T'|^{1-\lambda} = 1.$$

Por otro lado,

$$\lambda K' + (1-\lambda)T' = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}} \cdot \frac{K}{|K|^{1/n}} + \frac{|K|^{1/n} + |T|^{1/n} - |K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}} \cdot \frac{T}{|T|^{1/n}} = \frac{K+T}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}.$$

Entonces, con estas dos desigualdades se tiene que

$$1 \leq |\lambda K' + (1-\lambda)T'| = \left| \frac{K+T}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}} \right| = \frac{|K+T|}{(|K|^{1/n} + |T|^{1/n})^n}.$$

Por tanto, se tiene que

$$|K+T| \geq \left(|K|^{1/n} + |T|^{1/n}\right)^n.$$

Equivalentemente,

$$|K+T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}.$$

□

1.3. Volumen de las bolas p

En esta sección vamos a calcular el volumen de las bolas p, es decir, la bola unidad en $\mathbb{R}^n$ de la norma $\|\cdot\|_p$. Las bolas p en $\mathbb{R}^n$ se denotan B_p^n.

Teorema 1.3. *Para cualquier $p \in [1,\infty]$, el volumen de B_p^n es*

$$|B_p^n| = \begin{cases} \frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}, & si\ p \in [1,\infty) \\ \\ 2^n, & si\ p = \infty \end{cases}$$

Demostración. Utilizando el Teorema de Fubini, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_p^p} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n |x_i|^p} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x_1|^p} e^{-|x_2|^p} \cdots e^{-|x_n|^p} dx_n \cdots dx_2 dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x_1|^p} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x_2|^p} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x_n|^p} dx_n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|^p} dx\right)^n = \left(2\int_0^{\infty} e^{-|x|^p} dx\right)^n. \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable $x^p = t$, se tiene que

$$\left(2\int_0^{\infty} e^{-|x|^p} dx\right)^n = \left(\frac{2}{p}\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{p}-1} dt\right)^n = \left(\frac{2}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n = \left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n. \tag{1.9}$$

Por otro lado, notar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_p^p} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\|x\|_p^p}^{\infty} e^{-t} dt dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} e^{-t} \chi_{\{t > \|x\|_p^p\}}(x,t) dt dx.$$

Mediante el Teorema de Fubini, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t} \chi_{\{t > \|x\|_p^p\}}(x,t) dx dt &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t} \chi_{\{t^{1/p} > \|x\|_p\}}(x,t) dx dt. \\ &= \int_0^{\infty} \int_{t^{1/p} B_p^n} e^{-t} dx dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \left| t^{\frac{1}{p}} B_p^n \right| dt \\ &= \left|B_p^n\right| \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{p}} dt = \left|B_p^n\right| \Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right). \end{aligned}$$

Igualando esta expresión a la igualdad 1.9, se tiene que

$$\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n = \left|B_p^n\right| \Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right),$$

de donde se deduce que

$$\left|B_p^n\right| = \frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}.$$

□

Observación. Por el Teorema anterior, tomando $p = 2$, se tiene que

$$|B_2^n| = \frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}.$$

Tomando raíces n-ésimas y utilizando la fórmula de Stirling, tenemos que

$$|B_2^n|^{1/n} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)^{1/n}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} e^{-1/2} (\sqrt{\pi n})^{1/n}} \approx \frac{\sqrt{2\pi e}}{\sqrt{n}}.$$

Y por tanto, si n tiende a infinito, $\sqrt{n}\,|B_2^n|^{1/n}$ tiende asintóticamente a $\sqrt{2\pi e}$.

1.4. Elipsoide de John

El elipsoide de John de un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ es el elipsoide de máximo volumen contenido en K. Recíprocamente, el elipsoide de Löwner, es el elipsoide de mínimo volumen que contiene a K. La existencia y unicidad de estos elipsoides fue demostrada por John en [13]. En esta sección, veremos que si el elipsoide de Löwner de K es B_2^n, entonces podemos obtener una descomposición de la identidad mediante una combinación lineal de productos tensoriales de vectores u_j, con $u_j \in \partial K \cap S^{n-1}$.

Definición 1.16. Se dice que un cuerpo K en $\mathbb{R}^n$ está en posición de John si el elipsoide de mayor volumen contenido en K es B_2^n. Y se dice que está en posición de Löwner si el elipsoide de mínimo volumen que contiene a K es B_2^n. Cuando $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo simétrico, dicho elipsoide está centrado en 0.

Mediante las propiedades de los cuerpos polares se puede ver que, en efecto, hay una dualidad entre la posición de John y la posición de Löwner.

Proposición 1.4. *Un cuerpo convexo simétrico K está en posición de John si y sólo si el polar de K, K^o, está en posición de Löwner.*

Demostración. Supongamos que K está en posición de John. Entonces $|K| \leq |TK|$ para todo $T \in GL(n)$ tal que $B_2^n \subset TK$. Como $B_2^n \subset K$, se tiene que $K^o \subset (B_2^n)^o = B_2^n$. Supongamos que K^o no está en posición de Löwner. Entonces, existe un $T \in GL(n)$ tal que $|TK^o| > |T^o|$ con $TK^o \subset B_2^n$. Por tanto, $|\det T| > 1$. Como $(TK^o)^o = (T^t)^{-1}(K^o)^o = (T^t)^{-1}K$, tenemos que

$$|(T^t)^{-1}K| = |\det(T^t)|^{-1}|K| = \frac{1}{|\det T|}|K| < |K|.$$

Por tanto, $(T^t)^{-1}K$ tiene volumen menor que K y cumple que $B_2^n \subset (T^t)^{-1}K$, luego K no puede estar en posición de John. Así, se contradice la hipótesis de que K^o no está en posición de Löwner.

El recíproco de demuestra de forma análoga. □

Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con $0 \in int(K)$. Entonces definimos

$$\tilde{W}_i(K) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-i}(u)d\sigma(u).$$

El objetivo de esta sección es maximizar el conjunto

$$\left\{\tilde{W}_i(TK); 0 \in TK \subset B_2^n\,,\ T \in GL(n)\right\}, \tag{1.10}$$

y caracterizar qué ocurre cuando $T = I_n$ produce el máximo del conjunto, es decir, cuando $\tilde{W}_i(K)$ es el máximo.

Lema 1.1. *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con $0 \in int(K)$. Para $i < n$ se tiene que*

(i) : $\tilde{W}_i(K) = \dfrac{n-i}{n}\displaystyle\int_K \frac{dx}{|x|^i}$

(ii) : $\tilde{W}_i(TK) = \dfrac{n-i}{n}|\det T|\displaystyle\int_K \frac{dx}{|Tx|^i}$

Para $i = 0$, es claro que $\tilde{W}_i(K)$ es el volumen de K. Por tanto, para $i = 0$, maximizar el conjunto 1,10 es encontrar el $T \in GL(n)$ tal que TK está contenido en B_2^n y tiene el máximo volumen posible. En ese caso, TK está en posición de Löwner. Veamos la demostración de este Lema.

Demostración. Para ver que (i) es cierto, basta con hacer un cambio de variable a polares en el miembro de la derecha,

$$\begin{aligned}\frac{n-i}{n}\int_K \frac{dx}{|x|^i} &= \frac{n-i}{n}\int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho_K(\theta)} \frac{1}{|r\theta|^i} r^{n-1} dr d\sigma(\theta)\\ &= \frac{n-i}{n}\int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho_K(\theta)} r^{n-1-i} dr d\sigma(\theta)\\ &= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-i}(\theta) d\sigma(\theta) = \tilde{W}_i(K).\end{aligned}$$

Para ver (ii) aplicamos la igualdad que hemos obtenido en (i) y hacemos el cambio de variables $x = Ty$,

$$\tilde{W}_i(TK) = \frac{n-i}{n}\int_{TK} \frac{dx}{|x|^i} = \frac{n-i}{n}|\det T|\int_K \frac{dy}{|Ty|^i}.$$

□

Como hemos dicho al principio de la sección, si el elipsoide de Löwner de K es B_2^n, entonces podemos obtener una descomposición de la identidad mediante una combinación lineal de productos de vectores u_j, con $u_j \in \partial K \cap S^{n-1}$. Esto será el caso particular de $i = 0$ del siguiente Teorema.

Teorema 1.4. *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con $0 \in K \subset B_2^n$, y $i < n$. Si $\{\tilde{W}_i(TK); 0 \in TK \subset B_2^n, T \in GL(n)\}$ se maximiza en $T = I_n$, entonces existen puntos de contacto $w_1, \dots, w_s \in \partial K \cap S^{n-1}$ con $s \le n(n+1)/2$, y constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$ con $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ tales que*

$$I_n = i \cdot \int_{S^{n-1}} u \otimes u \cdot d\mu(u) + (n-i)\sum_{j=1}^s \lambda_j w_j \otimes w_j,$$

donde

$$d\mu(u) = \frac{\rho_K^{n-i}(u)}{\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-i}(u) \cdot d\sigma(u)} d\sigma(u).$$

Para demostrar este Teorema, necesitamos el siguiente resultado, llamado Teorema de John [13, Th.1]

Teorema 1.5 (Teorema de John)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abierto no vacío y $F : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $C^{(1)}$. Sea $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^l$ abierto no vacío, $S \subset \Omega_1$ compacto y $G : \Omega \times \Omega_1 \to \mathbb{R}$ de clase $C^{(1)}$. Sea $A = \{x \in \Omega\ ;\ G(x,y) \ge 0,\ \forall y \in S\}$. Si F alcanza su mínimo en $x_0 \in A$, entonces existen $y_1, \dots, y_s \in S$ y $\lambda_0, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ con $0 \le s \le m$ y $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$ tales que*

(1) : $G(x_0, y_1) = \dots = G(x_0, y_s) = 0$

(2) : $\nabla\left(\lambda_0 F(x_0) + \sum_{j=1}^s \lambda_j G(x_0, y_j)\right) = 0$.

Demostración del Teorema 4.2. Siguiendo la notación del Teorema de John, sea $\Omega_1 = \mathbb{R}^n$ y $S = K$ un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con $0 \in K \subset B_2^n$ en posición de John. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ definido como

$$\Omega = \left\{T \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}; \int_K \frac{dx}{|Tx|^i} < \infty\right\}.$$

Sea $G : \Omega \times \Omega_1 \to \mathbb{R}$ la función definida por $G(T,x) = 1 - |Tx|^2$. Notar que si $T = I_n$, entonces $G(T,x)$ se anula si y solo si $x \in S^{n-1}$. Definimos el conjunto

$$A = \{T \in \Omega\ ;\ G(T,x) \ge 0,\ \forall x \in K\}.$$

Es decir, A es el conjunto de los $T \in \Omega$ tales que TK está contenido en B_2^n. Por tanto, es claro que A es un compacto.

Si $i < n$, tomamos $F(T) = -\tilde{W}_i(TK)$. Por tanto, si $\tilde{W}_i(TK)$ alcanza su máximo en $T = I_n$, se tiene que $F(T) = -\tilde{W}_i(TK)$ alcanza su mínimo en $T = I_n$. Así, por el Teorema de John se tiene que existen $y_1, \dots, y_s \in K$ y $\lambda_0, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ con $0 \le s \le m$ y $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$ tales que

(1) : $G(I_n,y_1)=...=G(I_n,y_s)=0$

(2) : $\nabla\left(\lambda_0 F(I_n)+\sum_{j=1}^{s}\lambda_j G(I_n,y_j)\right)=0.$

El item (1) implica que $1-|y_1|^2=...=1-|y_s|^2=0$. Así, $y_1,...,y_s\in K\cap S^{n-1}$. Pero como $K\subset B_2^n$, en particular se tiene que $y_1,...,y_s\in\partial K\cap S^{n-1}$.

Vamos a calcular (2). Por computación directa, se tiene que

$$\frac{\partial G(T,x)}{\partial T}(I_n,y_i)=y_i\otimes y_i.$$

Del mismo modo, se tiene que

$$\frac{\partial F(T)}{\partial T}(I_n)=\tilde{W}_i(K)I_n+\frac{i-n}{n}\int_K\frac{-i}{|x|^{i+2}}(x\otimes x)dx.$$

Por tanto, el Teorema de John implica que existen $y_1,...,y_s\in\partial K\cap S^{n-1}$ y $\lambda_0,...,\lambda_s\in\mathbb{R}$ con $0\le s\le m$ y $\lambda_0\ge 0$, $\lambda_1,...,\lambda_s>0$ tales que

$$\lambda_0\left(\tilde{W}_i(K)I_n+\frac{i-n}{n}\int_K\frac{-i}{|x|^{i+2}}(x\otimes x)dx\right)+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k y_k\otimes y_k=0. \tag{1.11}$$

Vamos a tomar la traza de esta expresión. Notar que $\frac{i-n}{n}\int_K\frac{-i}{|x|^{i+2}}(x\otimes x)dx$ es una matriz $n\times n$ cuyo elemento en posición (u,v) es

$$\frac{i-n}{n}\int_K\frac{-i}{|x|^{i+2}}x_u x_v dx.$$

Por tanto, la traza de $\frac{i-n}{n}\int_K\frac{-i}{|x|^{i+2}}(x\otimes x)dx$ es

$$\begin{aligned}\frac{i-n}{n}\int_K\frac{-i}{|x|^{i+2}}x_1^2dx+...+\frac{i-n}{n}\int_K\frac{-i}{|x|^{i+2}}x_n^2dx &= \frac{-i(i-n)}{n}\int_K\frac{x_1^2+...x_n^2}{|x|^{i+2}}dx\\ &= \frac{-i(i-n)}{n}\int_K\frac{|x|^2}{|x|^{i+2}}dx\\ &= \frac{-i(i-n)}{n}\int_K\frac{1}{|x|^i}dx.\end{aligned}$$

Por la propiedad (i) del Lema 1.1,

$$\begin{aligned}Tr\left(\frac{i-n}{n}\int_K\frac{-i}{|x|^{i+2}}(x\otimes x)dxf\right) &= \frac{-i(i-n)}{n}\int_K\frac{1}{|x|^i}dx\\ &= \frac{-i(i-n)}{n}\frac{n}{n-i}\frac{n-i}{n}\int_K\frac{1}{|x|^i}\\ &= \frac{-i(i-n)}{n}\frac{n}{n-i}\tilde{W}_i(K)\\ &= -i\cdot\tilde{W}_i(K).\end{aligned}$$

Por otro lado, es claro que la traza de $\tilde{W}_i(K)I_n$ es $n\cdot\tilde{W}_i(K)$. Y por último,

$$Tr\left(\sum_{k=1}^{s}\lambda_k y_k\otimes y_k\right)=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k|y_k|^2=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k,$$

ya que $|y_k|=1$, para todo $k=1,...,s$.

Así, tomando la traza de la expresión (1.11), se tiene que

$$\lambda_0(n-i)\tilde{W}_i(K)+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k=0.$$

Para $k=1,...,s$ tomamos

$$t_k=\frac{\lambda_k}{\lambda_0(n-i)\tilde{W}_i(K)}.$$

Es claro que $t_k>0$, y $\sum_{k=1}^{s}t_k=1$. Reformulando la expresión $1{,}11$ con los t_k, se tiene que

$$\frac{I_n}{i-n}-\frac{i}{n}\int_K\frac{x\otimes x}{|x|^{i+1}}\frac{dx}{\tilde{W}_i(K)}+\sum_{k=1}^{s}t_ky_k\otimes y_k=0.$$

Finalmente, tomando coordenadas polares en esta expresión, se tiene el resultado. □

El recíproco de este Teorema también es cierto.

Teorema 1.6. *Sea $K\subset B_2^n$ un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con $0\in intK$. Si existen puntos de contacto $w_1,...,w_s\in\partial K\cap S^{n-1}$ con $s\leq n(n+1)/2$, y constantes $\lambda_1,...,\lambda_s>0$ con $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=1$ tales que*

$$I_n=i\cdot\int_{S^{n-1}}u\otimes u\cdot d\mu(u)+(n-i)\sum_{j=1}^{s}\lambda_jw_j\otimes w_j,$$

donde

$$d\mu(u)=\frac{\rho_K^{n-i}(u)}{\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n-i}(u)\cdot d\sigma(u)}d\sigma(u),$$

entonces para todo $T\in GL(n)$ tal que $TK\subset B_2^n$, se tiene que $\tilde{W}_i(TK)\leq\tilde{W}_i(K)$.

En particular, si $i=0$, este Teorema indica que si existe una descomposición de la identidad con puntos de contacto $w_j\in\partial K\cap B_2^n$ de un cuerpo convexo $K\subset B_2^n$, y unos escalares $\lambda_1,...,\lambda_s>0$ con $\sum\lambda_s=1$, de la forma

$$I_n=n\sum_{j=1}^{s}\lambda_jw_j\otimes w_j,$$

entonces podemos asegurar que K está en posición de Löwner. No vamos a demostrar este resultado, ya que no es un objetivo principal de este trabajo. Sin embargo, su demostración puede encontrarse en [6].

Capítulo 2

La constante de isotropía

En este capítulo presentamos uno de los principales problemas de este trabajo: la conjetura de la constante de isotropía. Esta conjetura plantea la existencia de una constante absoluta adimensional $C > 0$ que cumpla que

$$L_K \leq C$$

para todo cuerpo K isotrópico, siendo L_K la constante de isotropía del cuerpo K. En la sección 2.1 definiremos la constante de isotropía, la cual como veremos no está asociada sólo a un cuerpo isotrópico, sino a su familia de transformaciones afines. Además, veremos que en cada dimensión, es la bola euclidea el cuerpo convexos que tiene la menor constante de isotropía posible. Por último, daremos una serie de acotaciones de la constante de isotropía que se han probado en los últimos años.

En la sección 2.2, definiremos los cuerpos de Ball $K_p(f)$: conjuntos convexos generados a partir de una función f y un valor $p > 0$, los cuales veremos que en on cuerpos convexos si f es una función log-cóncava, y simétricos si f es par. Utilizando los cuerpos de Ball, daremos una acotación de la constante de isotropía de cuerpos convexos, mediante la constante de isotropía de cuerpos simétricos. Estos implica que si la conjetura de la constante de isotropía se cumple para cuerpos simétricos, entonces es cierta en general.

Por último, teniendo en cuenta que los resultados sobre los cuerpos de Ball se aplican a una función con mejores condiciones de convexidad que la log-concavidad, en la sección 2.3 daremos un resultado original, en el cual acotamos acotamos la constante de isotropía de cuerpos convexos, por la constante de isotropía de cuerpos de Ball asociados a funciones α-cóncavas.

2.1. Posición isotrópica de un cuerpo convexo

En esta sección vamos a definir la posición de isotropía de un cuerpo convexo centrado K, y la constante de isotropía L_K como un invariante de la clase lineal asociada a K. Para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ centrado, existe una transformación lineal $T \in GL(n)$ tal que TK está en posición de isotropía. Además, esta transformación lineal es única, salvo transforamciones ortogonales. Por tanto, como veremos, la constante de isotropía asociada tanto a TK (en posición de isotropía), a K y a RK, con $R \in GL(n)$, es la misma.

2.1.1. Posición isotrópica de un cuerpo convexo

Definición 2.1. Un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ se llama *isotrópico* si tiene volumen 1, está centrado (tiene baricentro en el origen) y existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\int_K \langle x, y \rangle^2 dx = \alpha^2 \|y\|_2^2$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. En ese caso, llamamos a α (y denotamos L_K) *constante de isotropía* de K.

Notar que si un cuerpo K satisface la condición de entropía, entonces

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = \int_K \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_K \langle x, e_i \rangle^2 dx = n\alpha^2.$$

Vamos a ver una serie de definiciones equivalentes para caracterizar cuerpos isotrópicos.

Teorema 2.1. *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) : Para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_K \langle x, y \rangle^2 dx = \alpha^2 \|y\|_2^2.$$

(2) : Denotando $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, para todo $i, j = 1, ..., n$,

$$\int_K x_i x_j dx = \alpha^2 \delta_{i,j}.$$

(3) : Para todo $T \in L(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_K \langle x, Tx \rangle dx = \alpha^2 (trT).$$

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$: Si $i = j$, es claro que

$$\int_K x_i, x_i^2 dx = \int_K \langle x, e_i \rangle^2 dx = \alpha^2 \|e_i\|_2^2 = \alpha^2.$$

Si $i \neq j$, notar que

$$\int_K (x_i + x_j)^2 dx = \int_K \langle x, e_i + e_j \rangle^2 dx = \alpha^2 \|e_i + e_j\|_2^2 = 2\alpha^2.$$

Además, se tiene que

$$\int_K (x_i + x_j)^2 dx = \int_K x_i^2 dx + \int_K x_j^2 dx + 2 \int_K x_i x_j dx = \alpha^2 + \alpha^2 + 2 \int_K x_i x_j .dx$$

Por tanto, si $i \neq j$,

$$\int_K x_i x_j dx = 0.$$

$(2 \Rightarrow 3)$: Sea $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$, se tiene que

$$\int_K \langle x, Tx \rangle dx = \int_K \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n t_{i,j} x_j dx = \sum_{i,j=1}^n t_{i,j} \int_K x_i x_j dx.$$

Aplicando el apartado (2), es claro que

$$\sum_{i,j=1}^n t_{i,j} \int_K x_i x_j dx = \sum_{i=1}^n t_{i,i} \alpha^2 = \alpha^2 (trT).$$

$(3 \Rightarrow 1)$: Sea T la matriz con $t_{i,j} = y_i y_j$. Entonces,

$$\int_K \langle x, y \rangle^2 dx = \int_K \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j dx = \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \int_K x_i x_j dx = \int_K \langle x, Tx \rangle dx.$$

Como $trT = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \|y\|_2^2$, aplicando (3), se tiene que

$$\int_K \langle x, y \rangle^2 dx = \int_K \langle x, Tx \rangle dx = \alpha^2 (trT) = \alpha^2 \|y\|_2^2.$$

□

Observación 2.1. *Sea K un cuerpo isotrópico y $U \in O(n)$ una transformación ortogonal, entonces UK sigue siendo isotrópico. Además, su constante de isotropía no cambia, es decir, $L_{UK} = L_K$. En efecto, para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$ y $U \in O(n)$,*

$$\int_{UK} \langle x,y \rangle^2 dx = \int_K \langle Ux,y \rangle^2 dx = \int_K \langle x,U^t y \rangle^2 dx = L_K^2 \|U^t y\|_2^2 = L_K^2 \|y\|_2^2.$$

Es decir, si K es isotrópico existe una clase lineal de cuerpos isotrópicos con la misma constante de isotropía, $\{UK; U \in O(n)\}$.

2.1.2. Existencia

En el siguiente resultado veremos que para cualquier cuerpo convexo K centrado, existe una transformación lineal $T \in GL(n)$ tal que TK es isotrópico. En ese caso, decimos que TK está en *posición isotrópica*. Así, en esta sección demostraremos que todo cuerpo convexo K centrado tiene una posición $\tilde{K}$ que es isotrópica.

Teorema 2.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y centrado. Entonces, existe una transformación lineal $T \in GL(n)$ tal que TK es isotrópico.*

Demostración. Sea $M \in L(\mathbb{R}^n)$ el operador definido por $M(y) = \int_K \langle x,y \rangle x dx$. Los elementos $(M_{i,j})_{i,j=1}^n$ de la matriz M vienen dados por

$$M_{i,j} = e_i^t M e_j = \int_K \langle x,e_i \rangle \langle x,e_j \rangle dx = \int_K x_i x_j dx.$$

Luego, es claro que M es simétrica. Además, para todo $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$y^t My = \int_K \langle x,y \rangle \langle x,y \rangle dx = \int_K \langle x,y \rangle^2 dx > 0,$$

luego M es deinida positiva. Por tanto, existe una matriz ortogonal $U \in O(n)$ y una matriz diagonal $D = diag(\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2)$ con los $\lambda_i > 0$, tal que $M = UDU^t$.

Tomamos $S = UD^{1/2}U^t$, con $D^{1/2} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Es claro que $S^2 = M$:

$$S^2 = (UD^{1/2}U^t)(UD^{1/2}U^t) = UD^{1/2}D^{1/2}U^t = UDU^t = M.$$

Es fácil ver que $S^{-1} = U diag(\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1})U^t$:

$$SS^{-1} = (U diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)U^t)(U diag(\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1})U^t) = U diag(1, ..., 1)U^t) = I_n.$$

Notar que S^{-1} es simétrica. Consideramos la imagen lineal $\tilde{K} = S^{-1}K$ de K. Entonces, para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\int_{S^{-1}K} \langle x,y \rangle^2 dx = \left|\det S^{-1}\right| \int_K \langle S^{-1}x,y \rangle^2 dx = |\det S|^{-1} \int_K \langle S^{-1}x,y \rangle^2 dx &= |\det S|^{-1} \int_K \langle x,(S^{-1})^t y \rangle^2 dx \\ &= |\det S|^{-1} \int_K \langle x,S^{-1}y \rangle^2 dx \\ &= |\det S|^{-1} \left\langle \int_K \langle x,S^{-1}y \rangle x dx, S^{-1}y \right\rangle\end{aligned}$$

Por definición de M, es claro que

$$\int_K \langle x,S^{-1}y \rangle x dx = MS^{-1}y.$$

Por lo que se sigue que

$$\begin{aligned}|\det S|^{-1} \left\langle \int_K \langle x,S^{-1}y \rangle x dx, S^{-1}y \right\rangle = |\det S|^{-1} \left\langle MS^{-1}y, S^{-1}y \right\rangle &= |\det S|^{-1} \left\langle MS^{-1}y, S^{-1}y \right\rangle \\ &= |\det S|^{-1} \left\langle S^{-1}MS^{-1}y, y \right\rangle \\ &= |\det S|^{-1} \|y\|_2^2.\end{aligned}$$

En el último paso hemos utilizado que $S^{-1}MS^{-1} = I_n$. Así, tenemos que

$$\int_{\tilde{K}} \langle x,y\rangle^2 dx = |\det S|^{-1} \|y\|_2^2$$

por lo que $\tilde{K}/|\tilde{K}|^{1/n}$ es isotrópico. $\square$

Acabamos de ver que todo cuerpo $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo y centrado tiene una posición $\tilde{K}$ que es isotrópica, con $\tilde{K} = TK$ para algún $T \in GL(n)$. Como hemos visto en la observación 2.1, para cualquier $U \in O(n)$ se tiene que UTK también es isotrópico. En la siguiente proposición vamos a ver que, en efecto, la posición isotrópica de un cuerpo convexo está únicamente determinada, salvo por transformación ortogonal, y de hecho se puede encontrar como la solución a un problema de minimización.

Teorema 2.3. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y centrado de volumen* 1. *Definimos*

$$B(K) = \text{ínf}\left\{ \int_{TK} \|x\|_2^2 dx \; ; \; T \in SL(n) \right\}.$$

Entonces, una posición K_1 de K es isotrópica si y solo si

$$\int_{K_1} \|x\|_2^2 dx = B(K).$$

Además, si K_1 y K_2 son posiciones isotrópicas de K, entonces $K_1 = UK_2$ para algún $U \in O(n)$.

Demostración. Sea K_1 una posición isotrópica de K. Por el Teorema 2.1, se tiene que

$$\int_{K_1} \langle x, Tx\rangle dx = L_{K_1}^2 (trT)$$

para todo $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para todo $T \in SL(n)$,

$$\begin{aligned}\int_{TK_1} \|x\|_2^2 dx = \int_{K_1} \|Tx\|_2^2 dx = \int_{K_1} \langle Tx, Tx\rangle^2 dx &= \int_{K_1} \langle x, T^tTx\rangle^2 dx \\ &= \int_{K_1} \langle x, T^tTx\rangle^2 dx \\ &= L_{K_1}^2 (tr(T^tT)).\end{aligned}$$

Usando la desigualdad aritmético-geométrica, se tiene que $tr(T^tT) \geq n\,[\det(T^tT)]^{1/n}$. Por tanto,

$$\int_{TK_1} \|x\|_2^2 dx = L_{K_1}^2 tr(T^tT) \geq L_{K_1}^2 n\left[\det(T^tT)\right]^{1/n} \geq nL_{K_1}^2 = \int_{K_1} \|x\|_2^2 dx. \tag{2.1}$$

Luego, si K_1 está en posición de isotropía, $B(K) = \int_{K_1} \|x\|_2^2 dx$.

Recíprocamente, si $K_2 = TK_1$ es una posición de K con $B(K) = \int_{K_2} \|x\|_2^2 dx$, entonces la desigualdad (2.1) indica que $tr(T^tT) = n\,[\det(T^tT)]^{1/n}$, por lo que $T^tT = I_n$, y por tanto $T \in O(n)$.

Además, si K_1 y K_2 son posiciones de isotropía de K, como $K_1 = TK_2$ para alguna $T \in GL(n)$, en particular $T \in O(n)$. $\square$

Como consecuencia, para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ centrado podemos definir su constante de isotropía, L_K, como la constante de isotropía de la posición isotrópica de K.

2.1.3. Acotación de la constante de isotropía

Nos podemos preguntar qué cuerpos maximizan y minimizan la constante de isotropía para cada dimensión. El siguiente resultado muestra que para cada n, el cuerpo que minimiza la constante de isotropía en $\mathbb{R}^n$ es la bola euclídea.

Teorema 2.4. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo isotrópico. Entonces,*

$$c \leq L_{B_2^n} \leq L_K,$$

para alguna constante absoluta $c > 0$.

Demostración. Por la invarianza rotacional de B_2^n, se tiene que para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{B_2^n} \langle x, y\rangle^2 dx = |y|^2 \int_{B_2^n} \langle x, \frac{y}{|y|}\rangle^2 dx = |y|^2 \int_{B_2^n} \langle x, e_1\rangle^2 dx.$$

Tomando $r_n = |B_2^n|^{-1/n}$, es claro que $r_n B_2^n$ es isotrópico. Notar que si $x \in r_n B_2^n$, entonces $\|x\|_2 \leq r_n$. Así,

$$\begin{aligned} nL_K^2 = \int_K \|x\|_2^2 dx = \int_{K\cap r_n B_2^n} \|x\|_2^2 dx + \int_{K\setminus r_n B_2^n} \|x\|_2^2 dx &\geq \int_{K\cap r_n B_2^n} \|x\|_2^2 dx + \int_{K\setminus r_n B_2^n} r_n^2 dx \\ &= \int_{K\cap r_n B_2^n} \|x\|_2^2 dx + r_n^2 \left|K \setminus r_n B_2^n\right|. \end{aligned}$$

Como K y $r_n B_2^n$ son ambos cuerpos isotrópicos, por un lado

$$1 = |K| = |K \cap r_n B_2^n| + |K \setminus r_n B_2^n|.$$

Por otro lado,

$$1 = |r_n B_2^n| = |r_n B_2^n \cap K| + |r_n B_2^n \setminus K|.$$

Luego, $|K \setminus r_n B_2^n| = |r_n B_2^n \setminus K|$. Procediendo como antes, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{K\cap r_n B_2^n} \|x\|_2^2 dx + r_n^2 |K \setminus r_n B_2^n| = \int_{K\cap r_n B_2^n} \|x\|_2^2 dx + r_n^2 |r_n B_2^n \setminus K| &= \int_{K\cap r_n B_2^n} \|x\|_2^2 dx + \int_{r_n B_2^n\setminus K} \|x\|_2^2 dx \\ &= \int_{r_n B_2^n} \|x\|_2^2 dx = nL_{B_2^n}^2. \end{aligned}$$

Así, para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ isotrópico, $L_K \geq L_{B_2^n}$.

Veamos que existe una constante absoluta $c > 0$ tal que $c \leq L_{B_2^n}^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mediante el cambio de variables a polares, se tiene que

$$\begin{aligned} L_{B_2^n}^2 = \frac{1}{n} \int_{r_n B_2^n} \|x\|_2^2 dx &= \frac{1}{n} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} \|r\theta\|_2^2 \chi_{[0,r_n]}(\|r\theta\|_2) d\theta dr \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{r_n} r^{n+1} \int_{S^{n-1}} d\theta dr \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{r_n} r^{n+1} n |B_2^n| dr \\ &= \frac{(r_n)^{n+2}}{n+2} |B_2^n| = \frac{1}{n+2} |B_2^n|^{-2/n}. \end{aligned}$$

Como $\sqrt{n} \cdot |B_2^n|^{1/n}$ tiende asintóticamente a $\sqrt{2\pi e}$, si $n \to \infty$, entonces es claro que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} |B_2^n|^{-2/n} = \frac{1}{2\pi e}.$$

Por tanto, sea $c > 0$ la constante definida por

$$c = \inf \left\{ \frac{1}{n+2} |B_2^n|^{-2/n} \ ; \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

se tiene que $L_{B_2^n}^2 \geq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Del mismo modo que se tiene que la bola B_2^n normalizada es la que minimiza la constante de isotropía, nos podemos preguntar cual es el cuerpo isotrópico que la maximiza. De hecho, la pregunta que plantea la existencia de una constante absoluta que la acote superiormente sigue abierta. Aunque ha sido resuelta para grandes clases de cuerpos convexos, como veremos en el Capítulo 4, la pregunta no ha sido resuelta en toda su generalidad. Esta cuestión es uno de los principales objetos de estudio de este trabajo, y queda enunciada en la siguiente conjetura.

Conjetura 2.1 (Conjetura de la constante de isotropía)**.** *Existe una constante absoluta $C > 0$ que cumple que*

$$L_K \leq C$$

para todo cuerpo isotrópico $K \subset \mathbb{R}^n$, y todo $n \geq 1$.

Observación. La conjetura de la constante de isotropía no ha sido probada, pero en los últimos años se han conseguido dar algunas cotas. Una muestra de ello son los siguientes resultados.

- En el artículo [8], Bourgain demostró que la constante de isotropía de cuerpos convexos en $\mathbb{R}^n$ se puede acotar por $Cn^{1/4}\log(n)$, para alguna constante absoluta $C > 0$.
- En el artículo [14], Klartag mejoró la cota de Bourgain quitando el logaritmo, y demostró la acotación $L_K < Cn^{1/4}$, para alguna constante absoluta $C > 0$.
- En el artículo [9], todavía no publicado, Yuansi Chen ha demostrado una acotación para la conjetura de Kannan-Lovász-Simonovits, que implica una acotación para la conjetura del hiperplano. Esto da como resultado la acotación $L_K < Cn^{o(1)}$, donde $C > 0$ es una constante absoluta, y $o(1)$ es una sucesión que tiende a 0.

2.2. Cuerpos convexos simétricos

En esta sección vamos a definir unos conjuntos, $K_p(f)$, definidos a partir de una función f asociada y un valor $p > 0$. Veremos que estos conjuntos son convexos, y en particular, si f es una función log-cóncava, son cuerpos convexos, llamados *cuerpos de Ball*, ya que los definió Keith Ball en [4]. Además, si la función f es par, el cuerpo de Ball $K_p(f)$ es simétrico. Estos cuerpos convexos son más grandes según aumenta el valor de p, es decir, para $0 < p < q$, $K_p(f) \subset K_q(f)$.

Para cada cuerpo isotrópico K, vamos a definir una función F asociada a K. Esta función F es en particular una medida de probabilidad, y guardará cierta relación con el cuerpo de Ball asociado a F, $K_p(F)$. En concreto, nos servirá para relacionar las constantes de isotropía de un cuerpo isotrópico K en $\mathbb{R}^n$ con un cuerpo de Ball definido a partir de él. Para cada cuerpo $K \subset \mathbb{R}^n$ isotrópico, si tomamos $p = n+2$, la relación entre las constantes de isotropía de K y $K_{n+2}(F)$ es

$$\sqrt{2C}L_K \leq L_{K_{n+2}(F)} \leq \sqrt{2}L_K$$

para cierta constante absoluta C. Esta acotación reduce la búsqueda de la constante que satisfaga la *conjetura de la constante de isotropía* sólo a cuerpos simétricos.

En primer lugar, vamos a definir la función F asociada a un cuerpo convexo K.

Teorema 2.5. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo centrado con volumen 1. Sea $F(x) = |K \cap (x+K)|$. Entonces, $\forall \theta \in S^{n-1}$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 F(x)dx = 2\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx. \tag{2.2}$$

Para cada x, $F(x)$ es el volumen de la intersección del cuerpo convexo K consigo mismo desplazado, $x+K$. Antes de realizar la demostración de este teorema, veamos una serie de propiedades de la función F.

Proposición 2.1. *F es una densidad de probabilidad.*

Demostración. Para ver que es F una densidad de probabilidad basta con ver que su integral en $\mathbb{R}^n$ es 1.

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |K \cap (x+K)|dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y)\chi_{x+K}(y)dydx.$$

Aplicando el Teorema de Fubini, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y)\chi_{x+K}(y)dxdy. \tag{2.3}$$

Como $y \in x+K \Leftrightarrow y-x \in K \Leftrightarrow -x \in -y+K \Leftrightarrow x \in y-K$, tenemos que $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$,

$$\chi_{x+K}(y) = \chi_{y-K}(x). \tag{2.4}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y)\chi_{y-K}(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y)\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{y-K}(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y)|y-K|dy \\
&= |K|\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y)dy \\
&= |K|\cdot|K| = 1.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.2. *F es una función par.*

Demostración. Veamos que $F(x) = F(-x)$:

$$F(-x) = |K \cap (-x+K)| = |(x+K)\cap(x-x+K)| = |(x+K)\cap K| = F(x).$$

□

Con estas propiedades vamos a demostrar el teorema 2.5.

Demostración del Teorema 2.5.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle^2 F(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle^2 \chi_K(y)\chi_{x+K}(y)dxdy$$

Utilizando el mismo razonamiento que en (2.4) y aplicando el Teorema de Fubini, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle^2 F(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle^2 \chi_K(y)\chi_{y-K}(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \langle y+(x-y),\theta\rangle^2 \chi_K(y)\chi_{y-K}(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\langle y,\theta\rangle^2 + 2\langle y,\theta\rangle\langle x-y,\theta\rangle^2 + \langle x-y,\theta\rangle^2\right)\chi_K(y)\chi_{y-K}(x)dxdy
\end{aligned}$$

Separando esta integral en 3 integrales, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle^2 F(x)dx = &\int_{\mathbb{R}^n} \langle y,\theta\rangle^2 \chi_K(y)dy|K| + 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \langle y,\theta\rangle\langle x-y,\theta\rangle^2 \chi_K(y)\chi_{y-K}(x)dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y,\theta\rangle^2 \chi_K(y)\chi_{y-K}(x)dxdy
\end{aligned}$$

Aplicamos el cambio de variables $x-y=z$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\theta\rangle^2F(x)dx &= \int_K\langle y,\theta\rangle^2dy+2\int_K\int_{-K}\langle y,\theta\rangle\langle z,\theta\rangle^2dzdy+\int_K\int_{-K}\langle z,\theta\rangle^2dzdy\\ &= \int_K\langle y,\theta\rangle^2dy+0+\int_K\langle z,\theta\rangle^2dz\\ &= 2\int_K\langle x,\theta\rangle^2dx\end{aligned}$$

□

Para aplicar esta función más adelante necesitamos la log-concavidad de F. El siguiente resultado nos dice que F es una función $\frac{1}{n}$-cóncava, luego en particular es una función log-cóncava en su soporte.

Proposición 2.3. *F es una función $\frac{1}{n}$-cóncava en su soporte.*

Demostración. Sean $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ tales que $K\cap(x_1+K)\neq\emptyset$ y $K\cap(x_2+K)\neq\emptyset$, y sea $\lambda\in(0,1)$. Veamos que se cumple que

$$(1-\lambda)[K\cap(x_1+K)]+\lambda[K\cap(x_2+K)]\subset[K\cap((1-\lambda)x_1+\lambda x_2+K)]. \tag{2.5}$$

Sea $y_1\in K\cap(x_1+K)$, $y_2\in K\cap(x_2+K)$. Como K es convexo, $(1-\lambda)y_1+\lambda y_2\in K$.

Como $y_1\in x_1+K$, se tiene que $y_1=x_1+z_1$, para algún $z_1\in K$. Del mismo modo, $y_2\in x_2+K$, luego $y_2=x_2+z_2$, para algún $z_2\in K$. Así,

$$(1-\lambda)y_1+\lambda y_2=(1-\lambda)(x_1+z_1)+\lambda(x_2+z_2)=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2+(1-\lambda)z_1+\lambda z_2.$$

Como $(1-\lambda)z_1+\lambda z_2\in K$ por la convexidad de K, se tiene que

$$(1-\lambda)y_1+\lambda y_2\in(1-\lambda)x_1+\lambda x_2+K.$$

Luego, se cumple la inclusión (2.5). Así, mediante la desigualdad de Brunn-Minkowski se tiene que

$$\begin{aligned}|K\cap((1-\lambda)x_1+\lambda x_2+K)|^{\frac{1}{n}} &\geq |(1-\lambda)[K\cap(x_1+K)]+\lambda[K\cap(x_2+K)]|^{\frac{1}{n}}\\ &\geq (1-\lambda)\,|K\cap(x_1+K)|^{\frac{1}{n}}+\lambda\,|K\cap(x_2+K)|^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Por tanto, podemos concluir que

$$F\left((1-\lambda)x_1+\lambda x_2\right)^{\frac{1}{n}}\geq(1-\lambda)F(x_1)^{\frac{1}{n}}+\lambda F(x_2)^{\frac{1}{n}}$$

para todo $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ y $\lambda\in(0,1)$. □

2.2.1. Cuerpos de Ball

En esta sección vamos a presentar los cuerpos de Ball, $K_p(f)$: una familia de cuerpos convexos asociados a funciones positivas medibles. En esta sección, vamos a ver que los cuerpos de Ball son, en efecto, cuerpos convexos y centrados en el origen, cuando f es una función log-cóncava. Además son simétricos si f es par.

Definición 2.2. Sea $f:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ medible con $f(0)\neq0$. Dado $p>0$, se define el cuerpo de Ball asociado a f con parámetro p como

$$K_p(f)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\int_0^\infty f(rx)r^{p-1}dr\geq\frac{f(0)}{p}\right\}.$$

De la definición es claro que $0 \in K_p(f)$, ya que $\int_0^\infty f(0)r^{p-1}dr$ diverge. Dado $u \in S^{n-1}$, veamos cuando $\lambda u \in K_p(f)$. Mediante el cambio de variables $\lambda r = u$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda u \in K_p(f) &\Leftrightarrow \int_0^\infty f(r\lambda u) r^{p-1} dr \geq \frac{f(0)}{p} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^p} \int_0^\infty f(su) s^{p-1} ds \geq \frac{f(0)}{p} \\ &\Leftrightarrow \lambda \leq \left(\frac{1}{f(0)} \int_0^\infty p s^{p-1} f(su) ds \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Por tanto, $K_p(f)$ es un cuerpo estrellado con función radial

$$\rho_{K_p(f)}(u) = \left(\frac{1}{f(0)} \int_0^\infty p s^{p-1} f(su) ds \right)^{1/p}. \tag{2.6}$$

Proposición 2.4. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ una función medible par con $f(0) \neq 0$. Entonces, $K_p(f)$ es un conjunto simétrico.*

Demostración. Para ver que $K_p(f)$ es simétrico, basta con ver que para cada $u \in S^{n-1}$, $\rho_{K_p(f)}(u) = \rho_{K_p(f)}(-u)$.

$$\rho_{K_p(f)}(-u) = \left(\frac{1}{f(0)} \int_0^\infty p s^{p-1} f(-su) ds \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{f(0)} \int_0^\infty p s^{p-1} f(su) ds \right)^{1/p} = \rho_{K_p(f)}(u).$$

□

Proposición 2.5. *Para todo $\theta \in S^{n-1}$,*

$$\int_{K_{n+1}(f)} \langle x, \theta \rangle dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle f(x) dx. \tag{2.7}$$

Demostración. Integrando en coordenadas polares, se tiene que para cualquier $p > 0$ y $\theta \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned} \int_{K_{n+1}(f)} \langle x, \theta \rangle dx &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_{K_{n+1}(f)}(u)} \langle ru, \theta \rangle r^{n-1} dr \cdot n|B_2^n| d\sigma(u) \\ &= \int_{S^{n-1}} \langle u, \theta \rangle \int_0^{\rho_{K_{n+1}(f)}(u)} r^n dr \cdot n|B_2^n| d\sigma(u) \\ &= \int_{S^{n-1}} \langle u, \theta \rangle \frac{(\rho_{K_{n+1}(f)}(u))^{n+1}}{n+1} n|B_2^n| d\sigma(u). \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (2.6) para la función radial, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{K_{n+1}(f)} \langle x, \theta \rangle dx &= \int_{S^{n-1}} \langle u, \theta \rangle \frac{1}{f(0)} \int_0^\infty \frac{n+1}{n+1} s^n f(su) ds \cdot n|B_2^n| d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{f(0)} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty s^{n-1} \langle su, \theta \rangle f(su) ds \cdot n|B_2^n| d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle f(x) dx \end{aligned}$$

□

Por tanto, este resultado indica que $K_{n+1}(f)$ es centrado si y solo si f es una función centrada. De forma análoga, tenemos el resultado para los momentos de orden p.

Proposición 2.6. *Para todo $\theta \in S^{n-1}$ y $p > 0$,*

$$\int_{K_{n+p}(f)} |\langle x, \theta \rangle|^p \, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta \rangle|^p f(x) dx. \tag{2.8}$$

Demostración. Procedemos análogamente a la demostración de la proposición anterior. Integrando en coordenadas polares, se tiene que para cualquier $p > 0$ y $\theta \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned} \int_{K_{n+p}(f)} |\langle x, \theta \rangle|^p \, dx &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_{K_{n+p}(f)}(u)} |\langle ru, \theta \rangle|^p \, r^{n-1} dr \cdot n |B_2^n| d\sigma(u) \\ &= \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle|^p \int_0^{\rho_{K_{n+p}(f)}(u)} r^{n+p-1} dr \cdot n |B_2^n| d\sigma(u) \\ &= \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle|^p \frac{\left(\rho_{K_{n+p}(f)}(u)\right)^{n+p}}{n+p} n |B_2^n| d\sigma(u). \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (2.6) para la función radial, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{K_{n+p}(f)} |\langle x, \theta \rangle|^p \, dx &= \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle|^p \frac{1}{f(0)} \int_0^\infty \frac{n+p}{n+p} s^{n+p-1} f(su) ds \cdot n |B_2^n| d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{f(0)} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty s^{n-1} |\langle su, \theta \rangle|^p f(su) ds \cdot n |B_2^n| d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta \rangle|^p f(x) dx. \end{aligned}$$

□

En los siguientes resultados, demostraremos que si $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ es una función log-cóncava con $f(0) \neq 0$, entonces el cuerpo de Ball asociado a f con parámetro $p > 0$, $K_p(f)$, es un cuerpo convexo.

Definición 2.3. Sea $\lambda \in (0,1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Si (a,b) es un par de números reales positivos, se define la media de orden γ con coeficiente λ como

$$M_\gamma^\lambda(a,b) = (\lambda a^\gamma + (1-\lambda) b^\gamma)^{1/\gamma}$$

Si $\gamma = 0$, se define $M_0^\lambda(a,b) = a^\lambda b^{1-\lambda}$. Si $a = 0$ o $b = 0$, se define $M_\gamma^\lambda(a,b) = 0$.

Teorema 2.6. *Sea $\gamma > 0$ y $\lambda, \mu > 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$. Sea $w, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ funciones integrables tales que para todo par $(r,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$*

$$h(M_{-\gamma}^\lambda(r,s)) \geq w(r)^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma + \mu r^\gamma}} g(s)^{\frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma + \mu r^\gamma}}. \tag{2.9}$$

Entonces,

$$\int_0^\infty h \geq M_\gamma^\lambda \left(\int_0^\infty w, \int_0^\infty g \right)$$

Demostración. Suponemos que w y g son contínuas y estrictamente positivas. Definimos las funciones $r, s : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ mediante las ecuaciones

$$\int_0^{r(t)} w = t \int_0^\infty w \tag{2.10}$$

$$\int_0^{s(t)} g = t \int_0^\infty g \tag{2.11}$$

Como w y g son integrables y estrictamente positivas, es claro que r y s están bien definidas. Aplicando la regla de Barrow a los miembros de la izquierda y derivando, se tiene que para todo $t \in (0,1)$,

$$r'(t)w(r(t)) = \int_0^\infty w \tag{2.12}$$

$$s'(t)g(s(t)) = \int_0^\infty g. \tag{2.13}$$

Definimos $z : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ como

$$z(t) = M_\gamma^\lambda(r(t),s(t)) = (\lambda r^{-\gamma} + (1-\lambda)s^{-\gamma})^{1/-\gamma}$$

Derivando $z(t)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
z'(t) &= \frac{1}{-\gamma}(\lambda r(t)^{-\gamma} + \mu s(t)^{-\gamma})^{\frac{1+\gamma}{-\gamma}}(\lambda(-\gamma)r(t)^{-\gamma-1}r'(t) + \mu(-\gamma)s(t)^{-\gamma-1}s'(t)) \\
&= \frac{-\gamma}{-\gamma}\left((\lambda r(t)^{-\gamma} + \mu s(t)^{-\gamma})^{\frac{1}{-\gamma}}\right)^{1+\gamma}\left(\frac{\lambda r'(t)}{r(t)^{\gamma+1}} + \frac{\mu s'(t)}{s(t)^{\gamma+1}}\right) \\
&= z^{\gamma+1}\left(\frac{\lambda r'(t)}{r(t)^{\gamma+1}} + \frac{\mu s'(t)}{s(t)^{\gamma+1}}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned}
z'(t) &= \lambda\frac{\int w}{w(r)}\left(\frac{z}{r}\right)^{\gamma+1} + \lambda\frac{\int g}{g(s)}\left(\frac{z}{s}\right)^{\gamma+1} \\
&= \lambda\frac{\int w}{w(r)}\left(\frac{(\lambda r^{-\gamma}+\mu s^{-\gamma})^{1/-\gamma}}{r}\right)^{\gamma+1} + \lambda\frac{\int g}{g(s)}\left(\frac{(\lambda r^{-\gamma}+\mu s^{-\gamma})^{1/-\gamma}}{s}\right)^{\gamma+1} \\
&= \lambda\frac{\int w}{w(r)}\left(\frac{\lambda r^{-\gamma}+\mu s^{-\gamma}}{r^{-\gamma}}\right)^{\frac{\gamma+1}{-\gamma}} + \lambda\frac{\int g}{g(s)}\left(\frac{\lambda r^{-\gamma}+\mu s^{-\gamma}}{s^{-\gamma}}\right)^{\frac{\gamma+1}{-\gamma}} \\
&= \lambda\frac{\int w}{w(r)}\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + \lambda\frac{\int g}{g(s)}\left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \\
&= \frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\left(\frac{\int w}{w(r)}\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{1/\gamma}\right) + \frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\left(\frac{\int g}{g(s)}\left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{1/\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad aritmetico-geométrica, se tiene que

$$z'(t) \geq \left(\frac{\int w}{w(r)}\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{1/\gamma}\right)^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}} \cdot \left(\frac{\int g}{g(s)}\left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{1/\gamma}\right)^{\frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}}.$$

Por otro lado, haciendo el cambio de variables $x = z(t)$ y aplicando la hipótesis (2.9), se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty h(x)dx &= \int_0^1 h(z)z'dz \\
&\geq \int_0^1 w(r)^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}} g(s)^{\frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}} z'dz \\
&\geq \int_0^1 M_0^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}}\left(\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{1/\gamma}\int_0^\infty w, \left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{1/\gamma}\int_0^\infty g\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando que $M_0^\lambda(a,b) \geq M_{-\gamma}^\lambda(a,b)$ y operando, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty h(x)dx &\geq \int_0^1 M_{-\gamma}^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}}\left(\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{1/\gamma}\int_0^\infty w, \left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{1/\gamma}\int_0^\infty g\right)\\
&= \int_0^1 \left(\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\left(\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{1/\gamma}\int_0^\infty w\right)^{-\gamma} + \frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\left(\left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{1/\gamma}\int_0^\infty g\right)^{-\gamma}\right)^{1/-\gamma}\\
&= \int_0^1 \left(\lambda\left(\int_0^\infty w\right)^{-\gamma} + \mu\left(\int_0^\infty g\right)^{-\gamma}\right)^{1/-\gamma}\\
&= \int_0^1 M_{-\gamma}^\lambda\left(\int_0^\infty w, \int_0^\infty g\right)\\
&= M_{-\gamma}^\lambda\left(\int_0^\infty w, \int_0^\infty g\right)
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.7. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ una función log-cóncava tal que $f(0) > 0$. Para todo $p > 0$, $K_p(f)$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Sea $p > 0$. Sean $x, y \in K_p(f)$, por definición se tiene que

$$p\int_0^\infty f(rx)r^{p-1}dr \geq f(0)\,, \quad p\int_0^\infty f(ry)r^{p-1}dr \geq f(0) \tag{2.14}$$

Sean $\lambda, \mu > 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$. Fijamos $\gamma = 1/p$ y definimos $w, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ como

$$w(r) = f(r^\gamma x), \quad g(s) = f(s^\gamma x), \quad h(t) = f(t^\gamma(\lambda x + \mu y)). \tag{2.15}$$

Aplicando que f es log-cóncava, se tiene que para todo par $(r,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
h(M_{-\gamma}^\lambda(r,s)) &= f\left(\left(\left(\lambda r^{-\gamma} + \mu s^{-\gamma}\right)^{1/-\gamma}\right)^\gamma (\lambda x + \mu y)\right)\\
&= f\left(\frac{1}{\lambda r^{-\gamma} + \mu s^{-\gamma}}(\lambda x + \mu y)\right)\\
&= f\left(\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma + \mu r^\gamma} r^\gamma x + \frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma + \mu r^\gamma} s^\gamma y\right)\\
&\geq f(r^\gamma x)^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}} \cdot f(s^\gamma y)^{\frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}}\\
&= w(r)^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}} \cdot g(s)^{\frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}}.
\end{aligned}$$

Así, h, w y g satisfacen las condiciones del teorema 2,6. Por tanto,

$$\int_0^\infty h(r)dr \geq \left(\lambda\left(\int_0^\infty w(r)dr\right)^{-\gamma} + \mu\left(\int_0^\infty g(r)dr\right)^{-\gamma}\right)^{1/-\gamma}. \tag{2.16}$$

Elevando ambos miembros a la potencia $-\gamma$, y aplicando las definiciones de (2.15), se tiene que

$$\left(\int_0^\infty f(r^\gamma(\lambda x + \mu y))dr\right)^{-\gamma} \leq \lambda\left(\int_0^\infty f(r^\gamma x)dr\right)^{-\gamma} + \mu\left(\int_0^\infty f(r^\gamma y)dr\right)^{-\gamma}. \tag{2.17}$$

Haciendo el cambio de variables $t = r^\gamma$ y aplicando que $x, y \in K_p(f)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left(p\int_0^\infty t^{p-1}f(t(\lambda x + \mu y))dt\right)^{-1/p}\\
&\leq \lambda\left(p\int_0^\infty t^{p-1}f(tx)dt\right)^{-1/p} + \mu\left(p\int_0^\infty t^{p-1}f(ty)dt\right)^{-1/p}\\
&\leq \lambda\left(f(0)\right)^{-1/p} + \mu\left(f(0)\right)^{-1/p} = f(0)^{-1/p}.
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$p\int_0^\infty t^{p-1}f(t(\lambda x+\mu y))dt \geq f(0), \tag{2.18}$$

así que $\lambda x+\mu y \in K_p(f)$, luego $K_p(f)$ es un conjunto convexo. □

Falta por ver que $K_p(f)$ es un cuerpo convexo, es decir, es compacto y tiene interior no vacío, cuando f es una función log-cóncava integrable con integral positiva.

Lema 2.1. *Sea $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ una función medible tal que $f(0)>0$. Entonces,*

$$|K_n(f)| = \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

En particular, si f es log-cóncava y tiene integral finita positiva, entonces $K_n(f)$ es un cuerpo convexo.

Demostración. Procediendo como en 2.6,

$$\begin{aligned}|K_n(f)| &= \int_{K_n(f)} dx = \int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho_{K_n(f)}(u)} r^{n-1}dr\cdot n|B_2^n|d\sigma(u)\\ &= \int_{S^{n-1}} \frac{\left(\rho_{K_n(f)}(u)\right)^n}{n} n|B_2^n|d\sigma(u)\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (2.6) para la función radial, se tiene que

$$\begin{aligned}|K_n(f)| &= \int_{S^{n-1}} \frac{1}{f(0)}\int_0^\infty \frac{n}{n}s^{n-1}f(su)ds\cdot n|B_2^n|d\sigma(u)\\ &= \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.\end{aligned}$$

Por tanto, si f es integrable y positiva, es claro que $K_n(f)$ es un cuerpo convexo. □

2.2.2. Inclusión entre los cuerpos de Ball 1

En esta sección vamos a ver la relación de inclusión entre los conjuntos de Ball $K_q(f)$ y $K_p(f)$ para $0<p<q$. Para ello, veremos que la función radial asociada al cuerpo $K_q(f)$ es mayor o igual que la función radial asociada al cuerpo $K_p(f)$, para $0<p<q$. Así, se deduce que $K_p(f)\subset K_q(f)$.

Lema 2.2. *Sea $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ una función log-cóncava. Entonces la función*

$$F(p) = \left(\frac{p}{\|f\|_\infty}\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.19}$$

es creciente en $(0,\infty)$.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|f\|_\infty=1$. Si no, aplicamos el mismo procedimiento a $g=f/\|f\|_\infty$ que tendrá norma infinito 1 y es una función log-cóncava.

Para cualquier $0<p<q$ y $\alpha>0$,

$$\begin{aligned}\frac{F(q)^q}{q} = \int_0^\infty x^{q-1}f(x)dx &= \int_0^\alpha x^{q-1}f(x)dx + \int_\alpha^\infty x^{q-1}f(x)dx\\ &= \int_0^\alpha x^{q-1}f(x)dx + \int_\alpha^\infty x^{p-1}x^{q-p}f(x)dx.\end{aligned}$$

Como $q-p>0$ y $\alpha>0$, $x^{q-p}\geq\alpha^{q-p}$ en (α,∞), se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{F(q)^q}{q} &\geq \int_0^\alpha x^{q-1}f(x)dx+\alpha^{q-p}\int_\alpha^\infty x^{p-1}f(x)dx\\ &= \int_0^\alpha x^{q-1}f(x)dx-\alpha^{q-p}\int_0^\alpha x^{p-1}f(x)dx+\alpha^{q-p}\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx\\ &= \int_0^\alpha x^{q-1}f(x)dx-\alpha^{q-p}\int_0^\alpha x^{p-1}f(x)dx+\alpha^{q-p}\frac{F(p)^p}{p}.\end{aligned}$$

Aplicamos el cambio de variable $x=\alpha y$, y tenemos

$$\begin{aligned}\frac{F(q)^q}{q} &\geq \alpha^{q-p}\frac{F(p)^p}{p}+\alpha^q\int_0^1 y^{q-1}f(\alpha y)dy-\alpha^q\int_0^1 y^{p-1}f(\alpha y)dy\\ &= \alpha^{q-p}\frac{F(p)^p}{p}-\alpha^q\int_0^1(y^{p-1}-y^{q-1})f(\alpha y)dy.\end{aligned}$$

Como $y\in(0,1)$ y $p<q$, es claro que $y^{p-1}-y^{q-1}\geq 0$. Además, la norma infinito de f es menor o igual que 1, luego es claro que para $y\in(0,1)$, $(y^{p-1}-y^{q-1})f(\alpha y)\leq(y^{p-1}-y^{q-1})$. Así,

$$\frac{F(q)^q}{q}\geq\alpha^{q-p}\frac{F(p)^p}{p}-\alpha^q\int_0^1(y^{p-1}-y^{q-1})dy=\alpha^{q-p}\frac{F(p)^p}{p}-\alpha^p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right).$$

Si tomamos $\alpha=F(p)$, tenemos que

$$\frac{F(q)^q}{q}\geq F(p)^{q-p}\frac{F(p)^p}{p}-F(p)^p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=\frac{F(p)^q}{q}.$$

Luego, para todo $0<p<q$, se tiene que $F(p)\leq F(q)$, así que F es creciente en $(0,\infty)$. □

Notar que si $f(x)=\chi_{[0,A]}(x)$ para algún $A>0$, tenemos que

$$F(p)=\left(p\int_0^\infty x^{p-1}\chi_{[0,A]}(x)dx\right)^{1/p}=\left(p\int_0^A x^{p-1}dx\right)^{1/p}=A$$

para cualquier $p>0$. Es decir, para la función característica, F es constante. Podemos generalizar este resultado para funciones características en cuerpos convexos. En general, sea $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ tal que $f(x)=\chi_K(x)$ con K un cuerpo convexo, para cualquier $p>0$, tenemos que $K_p(\chi_K)=K$:

Demostración. Aplicando la fórmula de la función radial (2.6), para cualquier $u\in S^{n-1}$,

$$\rho_{K_p(f)}(u)=\left(\frac{p}{f(0)}\int_0^\infty s^{p-1}f(su)ds\right)^{1/p}=\left(p\int_0^{\rho_K(u)}s^{p-1}ds\right)^{1/p}=\rho_K(u).$$

Luego, $K_p(\chi_K)=K$, $\forall p\in(0,\infty)$. □

Procediendo del mismo modo, podemos ver la relación de contenidos entre los cuerpos de Ball asociados a funciones log-cóncavas:

Teorema 2.8. *Sea $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ una función log-cóncava con $\|f\|_\infty=f(0)$. Para cualesquiera $0<p<q$, se tiene que $K_p(f)\subset K_q(f)$.*

Demostración. Es claro que para cada $u\in S^{n-1}$, la función $f_1:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definida como $f_1(x)=f(xu)$ es una función log-cóncava. Luego, para cada $u\in S^{n-1}$ definimos $F(p)$ como

$$F(p)=\left(\frac{p}{\|f_1\|_\infty}\int_0^\infty x^{p-1}f_1(x)dx\right)^{1/p}=\left(\frac{p}{f(0)}\int_0^\infty x^{p-1}f(xu)dx\right)^{1/p}.$$

Así, por el Lema 2.2, para $0 < p < q$, $F(p) \leq F(q)$. Aplicando esto a la fórmula radial (2.6) del cuerpo de Ball $K_p(f)$, para cada $u \in S^{n-1}$,

$$\rho_{K_p(f)}(u) = \left(\frac{p}{f(0)}\int_0^\infty s^{p-1}f(su)ds\right)^{1/p} = F(p)$$
$$\leq F(q) = \left(\frac{q}{f(0)}\int_0^\infty s^{q-1}f(su)ds\right)^{1/q} = \rho_{K_q(f)}(u).$$

Luego, $K_p(f) \subset K_q(f)$. □

2.2.3. Inclusión entre los cuerpos de Ball 2

Hemos visto que según crece q, los cuerpos de Ball $K_q(f)$ son más grandes, y contienen a los demás $K_p(f)$ con $p < q$. En esta sección vamos a ver que $K_q(f)$ crece de manera controlada según aumenta q. Es decir, vamos a probar la existencia de una constante dependiente de p y q, $C_{p,q}$, para la cual $C_{p,q}K_q(f) \subset K_p(f)$, para todo $0 < p < q$.

Teorema 2.9. *Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función log-cóncava con $f(0) > 0$. Entonces la función*

$$G(p) = \left(\frac{1}{f(0)\Gamma(p)}\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx\right)^{1/p} = \left(\frac{p}{f(0)\Gamma(1+p)}\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.20}$$

es decreciente en $(0,\infty)$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(0) = 1$. Si $f(0)$ fuera distinto a 1, aplicamos el mismo razonamiento a $g = \frac{f}{f(0)}$, que cumple que $g(0) = 1$ y es log-cóncava.

Sea $p > 0$. Mediante el cambio de variables $Cx = y$, para cualquier $C > 0$ se tiene que

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-Cx}dx = \frac{1}{C^p}\int_0^\infty y^{p-1}e^{-y}dx = \frac{\Gamma(p)}{C^p}. \tag{2.21}$$

Si tomamos $C_p = \frac{1}{G(p)}$, con $G(p)$ la función definida en el enunciado, aplicando esta última igualdad tenemos que

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-C_px}dx = \frac{\Gamma(p)}{(C_p)^p} = \Gamma(p)G(p)^p = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p)}\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx = \int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx.$$

Por la elección de C_p, esta igualdad muestra que

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-C_px}dx = \int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx. \tag{2.22}$$

Por tanto, no puede ocurrir que $e^{-C_px} < f(x)$ para todo $x \in (0,+\infty)$. Así, existe algún $x \in (0,+\infty)$ para el cual $e^{-C_px} \geq f(x)$. Por tanto, el conjunto $\{x > 0 : e^{-C_px} \geq f(x)\}$ no es vacío, así pues tiene ínfimo. Tomamos el ínfimo del conjunto

$$x_0 = \text{ínf}\{x > 0 : e^{-C_px} \geq f(x)\}. \tag{2.23}$$

Por la definción de ínfimo, es claro que

$$e^{-C_px} < f(x), \ \ \forall x \in (0,x_0). \tag{2.24}$$

Si $x > x_0$, podemos encontrar un $y \in [x_0,x)$ tal que $e^{-C_py} \geq f(y)$, y entonces aplicando la hipótesis de log-concavidad de f,

$$e^{-C_py} \geq f(y) = f\left(\frac{y}{x}x + \left(1-\frac{y}{x}\right)\cdot 0\right) \geq f(x)^{\frac{y}{x}}f(0)^{1-\frac{y}{x}} = f(x)^{\frac{y}{x}},$$

lo cual implica que

$$e^{-C_p x} \geq f(x), \ \ \forall x \in (x_0, \infty). \tag{2.25}$$

Aplicando (2.25), es claro que para $x \in (x_0, +\infty)$,

$$\int_x^\infty t^{p-1} f(t)dt \leq \int_x^\infty t^{p-1} e^{-C_p t} dt. \tag{2.26}$$

Del mismo modo, aplicando (2.24), para $x \in (0, x_0)$,

$$\int_0^x t^{p-1} f(t)dt \geq \int_0^x t^{p-1} e^{-C_p t} dt. \tag{2.27}$$

Como se tiene que

$$\int_0^\infty x^{p-1} f(x)dx = \int_0^\infty e^{-C_p x} f(x)dx,$$

las desigualdades (2.26) y (2.27) implican que para cualquier $x \in (0, +\infty)$ se da la desigualdad (2.26). Es decir, para todo $x > 0$,

$$\int_x^\infty t^{p-1} f(t)dt \leq \int_x^\infty t^{p-1} e^{-C_p t} dt. \tag{2.28}$$

Sea $0 < p < q$, es claro que

$$\int_0^\infty x^{q-1} f(x)dx = \int_0^\infty x^{p-1} f(x) x^{q-p} dx. \tag{2.29}$$

Aplicando el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{q-1} f(x)dx &= \int_0^\infty x^{p-1} f(x) \int_0^x (q-p) t^{q-p-1} dt dx \\
&= \int_0^\infty \int_t^\infty (q-p) t^{q-p-1} x^{p-1} f(x) dx dt \\
&= \int_0^\infty (q-p) t^{q-p-1} \int_t^\infty x^{p-1} f(x) dx dt.
\end{aligned}$$

Aplicamos la desigualdad (2.28), y se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{q-1} f(x)dx &\leq \int_0^\infty (q-p) t^{q-p-1} \int_t^\infty x^{p-1} e^{-C_p x} dx dt \\
&= \int_0^\infty x^{q-1} e^{-C_p x} dx.
\end{aligned}$$

Por último, aplicando (2.21),

$$\int_0^\infty x^{q-1} f(x)dx \leq \frac{\Gamma(q)}{(C_p)^q}. \tag{2.30}$$

Por tanto, con este último resulultado tenemos que

$$G(q) = \left(\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty x^{q-1} f(x) dx \right)^{1/q} \leq \left(\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q)\,(C_p)^q} \right)^{1/q} = \frac{1}{C_p} = G(p),$$

y podemos concluír que G es una función decreciente en $(0, +\infty)$. □

Acabamos de ver que las funciones $G(p)$ definidas a partir de funciones log-cóncavas son decrecientes en $(0, +\infty)$. Sin embargo, dependiendo de la elección f, la función G puede ser constante. Por ejemplo, si $f(x) = e^{-Ax}$ para algún $A > 0$, tenemos que para cualquier $p > 0$,

$$G(p) = \left(\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-Ax} dx \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{\Gamma(p) A^p} \int_0^\infty y^{p-1} e^{-y} dy \right)^{1/p} = \frac{1}{A},$$

con el cambio de variables $y = Ax$.

Antes de dar la inclusión entre los cuerpos de Ball $K_p(f)$ para funciones log-cóncavas, veamos que eligiendo cierto tipo de funciones log-cóncavas relacionadas con cuerpos convexos K, para $p > 0$ se tiene que $K_p(f) = C_p K$. Es decir, el cuerpo de Ball asociado a f con $p > 0$ es el convexo K dilatado una cierta constante dependiente de p.

Proposición 2.7. *Sea K un cuerpo convexo y centrado. Definimos $f:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ como $f(x)=e^{-\|x\|_K}$. Entonces, para cualquier $p>0$, $K_p(f)=\Gamma(1+p)^{1/p}K$.*

Demostración. Para cada $u\in S^{n-1}$, aplicando la fórmula radial para cuerpos de Ball (2.6),

$$\frac{1}{\Gamma(1+p)^{1/p}}\rho_{K_p(f)}(u)=\left(\frac{p}{p\Gamma(p)}\int_0^\infty s^{p-1}f(su)ds\right)^{1/p}=\left(\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty s^{p-1}e^{-s\|u\|_K}ds\right)^{1/p}.$$

Con el cambio de variables $s\|u\|_K=y$, se tiene que

$$\frac{1}{\Gamma(1+p)^{1/p}}\rho_{K_p(f)}(u)=\left(\frac{1}{\Gamma(p)\|u\|_K^p}\int_0^\infty y^{p-1}e^{-y}dy\right)^{1/p}=\left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p)\|u\|_K^p}\right)^{1/p}=\frac{1}{\|u\|_K}=\rho_K(u).$$

Luego, $K_p(f)=\Gamma(1+p)^{1/p}K$. □

Vamos a generalizar este resultado para funciones log-cóncavas, para ver otra relación de inclusión entre los cuerpos de Ball.

Teorema 2.10. *Sea $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ una función log-cóncava con $f(0)>0$. Para cualesquiera $0<p<q$, se tiene que*

$$\left(\frac{1}{\Gamma(1+q)}\right)^{1/q}K_q(f)\subset\left(\frac{1}{\Gamma(1+p)}\right)^{1/p}K_p(f).$$

Demostración. Es claro que para cada $u\in S^{n-1}$, la función $f_1:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definida como $f_1(x)=f(xu)$ es una función log-cóncava. Luego, para cada $u\in S^{n-1}$ definimos $G(p)$ como

$$G(p)=\left(\frac{1}{\Gamma(p)f(0)}\int_0^\infty x^{p-1}f_1(x)dx\right)^{1/p}=\left(\frac{p}{\Gamma(1+p)f(0)}\int_0^\infty x^{p-1}f(xu)dx\right)^{1/p}.$$

Así, por el Lema 2.9, para $0<p<q$, $G(p)\leq G(q)$. Aplicando esto a la fórmula radial (2.6) del cuerpo de Ball $K_p(f)$, para cada $u\in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\Gamma(1+p)}\right)^{1/p}\rho_{K_p(f)}(u)&=\left(\frac{p}{f(0)}\int_0^\infty s^{p-1}f(su)ds\right)^{1/p}=F(p)\\&\geq F(q)=\left(\frac{q}{f(0)}\int_0^\infty s^{q-1}f(su)ds\right)^{1/q}=\left(\frac{1}{\Gamma(1+q)}\right)^{1/q}\rho_{K_q(f)}(u).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left(\frac{1}{\Gamma(1+q)}\right)^{1/q}K_q(f)\subset\left(\frac{1}{\Gamma(1+p)}\right)^{1/p}K_p(f).\tag{2.31}$$

□

Teorema 2.11. *Sea $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ una función log-cóncava con $f(0)=\|f\|_\infty$. Entonces, si $0<p<q$, se tiene que*

$$\frac{\Gamma(1+p)^{1/p}}{\Gamma(1+q)^{1/q}}K_q(f)\subset K_p(f)\subset K_q(f).$$

Demostración. Podemos asumir que $f(0)=\|f\|_\infty=1$. En caso contrario aplicamos el resultado a $g=f/f(0)$.

Mediante los Teoremas 2.8 y 2.10 es directo ver que se cumple el enunciado. □

2.2.4. Acotación de la constante de isotropía

Teorema 2.12. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo isotrópico. Sea $F(x) = |K \cap (x+K)|$. Entonces, para cada dimensión $n \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_n > 0$ tal que*

$$C_n L_K \leq L_{K_{n+2}(F)} \leq \sqrt{2} L_K,$$

con $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \dfrac{\sqrt{2}}{e}$.

Demostración. Como hemos visto en la Proposición 2.3, si K es un cuerpo isotrópico, la función $F(x)$ es $\frac{1}{n}-$cóncava. Luego, en particular es log-cóncava. Aplicando la Proposición 2.6, se tiene que

$$\int_{K_{n+2}(F)} |\langle x,\theta\rangle|^2 \, dx = \frac{1}{F(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^2 F(x) dx, \tag{2.32}$$

con $F(0) = 1$. Aplicando el Teorema 2.5,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle^2 F(x) dx = 2 \int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx. \tag{2.33}$$

Así, se tiene que

$$\int_{K_{n+2}(F)} |\langle x,\theta\rangle|^2 \, dx = 2 \int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx = 2L_K^2. \tag{2.34}$$

Como hemos visto en la Proposición 2.4, si $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ es par, medible y $f(0) \neq 0$, entonces $K_p(f)$ es simétrico para todo $p > 0$. Por tanto, $K_{n+2}(F)$ es un cuerpo convexo simétrico. En caso de que $|K_{n+2}(F)| \neq 1$, tomamos el cuerpo convexo

$$\frac{K_{n+2}(F)}{|K_{n+2}(F)|^{1/n}},$$

el cual es un cuerpo isotrópico.

Veamos la relación entre las constantes de isotropía de $K_{n+2}(F)$ y L_K. Es claro que

$$L^2_{K_{n+2}(F)} = \int_{\frac{K_{n+2}(F)}{|K_{n+2}(F)|^{1/n}}} |\langle x,\theta\rangle|^2 \, dx.$$

Tomando el cambio de variables $x = y/(|K_{n+2}(F)|^{1/n})$, mediante la igualdad (2.34) se tiene que

$$L^2_{K_{n+2}(F)} = \frac{1}{|K_{n+2}(F)|^{1+2/n}} \int_{K_{n+2}(F)} |\langle x,\theta\rangle|^2 \, dx = \frac{2L_K^2}{|K_{n+2}(F)|^{1+2/n}}. \tag{2.35}$$

Por un lado, el Teorema 2.8 indica que para cualquier $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ log-cóncava con $f(0) > 0$, se tiene que $K_n(f) \subset K_{n+2}(f)$. Por tanto, tomando $f = F$ se tiene que $|K_n(F)| \leq |K_{n+2}(F)|$. Además, el Lema 2.1 dice que

$$|K_n(F)| = \frac{1}{F(0)} \int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = 1,$$

por ser F una medida de probabilidad, como hemos visto al principio del capítulo. Así,

$$L^2_{K_{n+2}(F)} = \frac{2L_K^2}{|K_{n+2}(F)|^{1+2/n}} \leq \frac{2L_K^2}{|K_n(F)|^{1+2/n}} = 2L_K^2. \tag{2.36}$$

Por otro lado, utilizando el Teorema 2.10, es claro que

$$K_{n+2}(F) \subset \frac{\Gamma(1+n+2)^{1/(n+2)}}{\Gamma(1+n)^{1/n}} K_n(F).$$

Tomando volúmenes,

$$|K_{n+2}(F)| \leq \left| \frac{\Gamma(1+n+2)^{1/(n+2)}}{\Gamma(1+n)^{1/n}} K_n(F) \right| = \frac{\Gamma(1+n+2)^{n/(n+2)}}{\Gamma(1+n)} |K_n(F)|.$$

Análogamente al caso anterior,

$$L^2_{K_{n+2}(F)} = \frac{2L^2_K}{|K_{n+2}(F)|^{1+2/n}} \geq \left(\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n+2)^{n/(n+2)}} \right)^{1+2/n} 2L^2_K. \tag{2.37}$$

Si definimos

$$C^2_n = \left(\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n+2)^{n/(n+2)}} \right)^{1+2/n} \cdot 2, \tag{2.38}$$

es claro que

$$L^2_{K_{n+2}(F)} \geq C^2_n L^2_K. \tag{2.39}$$

Finalmente, mediante las desigualdades (2.36) y (2.39), tenemos que

$$C_n L_K \leq L_{K_{n+2}(F)} \leq \sqrt{2} L_K, \tag{2.40}$$

con la constante $C_n > 0$ definida en (2.38).

Simplificando C_n, se tiene que

$$\begin{aligned} C^2_n = 2\left(\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n+2)^{n/(n+2)}} \right)^{1+2/n} &= 2\left(\frac{\Gamma(1+n)^{1+2/n}}{\Gamma(1+n+2)^{(n+2)/(n+2)}} \right) \\ &= 2\frac{\Gamma(1+n)^{1+2/n}}{\Gamma(1+n+2)} = \frac{(n!)^{1+2/n}}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Si tomamos límites cuando $n \to \infty$, por la fórmula de Stirling, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n+2)^{n/(n+2)}} \right)^{1+2/n} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{(n!)^{1+2/n}}{(n+2)!} = \frac{2}{e^2}.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{\sqrt{2}}{e}.$$

□

Observación 2.2. *Notar que cualquier $n > 0$, la constante C_n es estrictamente mayor que* 0*, y el límite cuando $n \to \infty$ de C_n es mayor que* 0*. Por tanto, si tomamos C como*

$$C = \inf \left\{ 2\left(\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n+2)^{n/(n+2)}} \right)^{1+2/n} : n > 0 \right\}, \tag{2.41}$$

la desigualdad (2.40)*, nos dice que para toda dimensión $n \in \mathbb{N}$ y todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que*

$$\sqrt{C} L_K \leq L_{K_{n+2}(F)} \leq \sqrt{2} L_K$$

con C la constante absoluta adimensional definida en (2.41)*. Por tanto, si la conjetura de la constante de isotropía se cumpliera para cuerpos simétricos con constante $C_1 > 0$, entonces se cumple para cuerpos convexos en general con constante $C_1/(\sqrt{C}) \geq C_1 e/\sqrt{2}$.*

2.3. Funciones α-cóncavas

En esta última sección del capítulo, vamos a dar resultado original para funciones α-cóncavas. De forma análoga a la sección anterior, vamos a ver que podemos mejorar la inclusión entre los cuerpos de Ball $K_p(f)$ y $K_q(f)$, para $0 < p < q$, si f es una función α-cóncava.

En la sección anterior, hemos visto que para todo cuerpo $K \subset \mathbb{R}^n$ isotrópico, la relación entre las constantes de isotropía de K y $K_{n+2}(F)$ es

$$\sqrt{C}L_K \leq L_{K_{n+2}(F)} \leq \sqrt{2}L_K,$$

para cierta constante absoluta $C \leq 2/e^2$. Como consecuencia de la acotación original para funciones α-cóncavas que damos en esta sección, para toda dimensión $n \in \mathbb{N}$ y todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$, existirá una constante $C_n > 0$ tal que

$$C_n L_K \leq L_{K_{n+2}(F)} \leq \sqrt{2}L_K.$$

Esta sucesión de constantes, $(C_n)_{n=1}^{\infty}$, tiende a $\sqrt{1/2}$ si $n \to \infty$. Esta acotación implica que si se demuestra la conjetura de la constante de isotropía para cuerpos simétricos, con constante C_1, entonces podemos asegurar que la conjetura se cumple en general con constante $C_2 \geq C_1\sqrt{2}$, mejorando asintóticamente la acotación existente hasta ahora.

2.3.1. Inclusión en los cuerpos de Ball

Como hemos visto en el Teorema 2.11, si $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ es una función log-cóncava con $f(0) = \|f\|_\infty$, entonces existe una relación de inclusión entre los cuerpos de Ball asociados a f dada por

$$\frac{\Gamma(1+p)^{1/p}}{\Gamma(1+q)^{1/q}}K_q(f) \subset K_p(f) \subset K_q(f),$$

con $0 < p < q$. En esta sección vamos a dar la mejor relación de inclusión posible para cuerpos de Ball, en caso de que f sea una función α-cóncava.

En primer lugar, vamos a ver que si $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función α-cóncava, entonces para $0 < p < q$ se tiene

$$K_p(f) \subset K_q(f).$$

Lema 2.3. *Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función α-cóncava. Entonces la función*

$$F(p) = \left(\frac{p}{\|f\|_\infty}\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.42}$$

es creciente en $(0,\infty)$.

Demostración. Notar que si f es α-cóncava, entonces f es log-cóncava. Por tanto, basta con aplicar el Lema 2.2 y se tiene el resultado. □

Teorema 2.13. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ una función α-cóncava con $\|f\|_\infty = f(0)$. Para cualesquiera $0 < p < q$, se tiene que $K_p(f) \subset K_q(f)$.*

Demostración. Como f es α-cóncava, en particular es log-cóncava. Por tanto, procediendo como en el Teorema 2.8 y utilizando el Lema 2.3 se tiene el resultado. □

Veamos ahora la otra incusión. Si $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función α-cóncava, veamos que existe una constante $C_{p,q} > 0$ que cumple que

$$C_{p,q}K_q(f) \subset K_p(f).$$

para cualesquiera $0 < p < q$.

Teorema 2.14. *Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función α-cóncava en su soporte, integrable, no idénticamente nula con $f(0) \neq 0$. Entonces, la función*

$$G_f(p) = \left(\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{f(0)} \int_0^\infty p x^{p-1} f(x) dx \right)^{1/p}$$

es decreciente en p.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(0) = 1$. Si $f(0)$ fuera distinto a 1, aplicamos el mismo razonamiento a $f_1 = \frac{f}{f(0)}$, que cumple que $f_1(0) = 1$ y es α-cóncava en su soporte.

Por definición, como f es una función α-cóncava, se tiene que f^α es una función cóncava. Como además, f es integrable, se tiene que f^α es integrable también. Así, por ser cóncava e integrable, la función f^α tiene soporte compacto, y por tanto f también tiene soporte compacto. Definimos

$$M = \sup\{x \in (0,\infty) \,;\, f(x) \neq 0\}.$$

Por lo tanto, se tiene que $f(x) = 0$, para todo $x > M$. Así,

$$G_f(p) = \left(\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty p x^{p-1} f(x) dx \right)^{1/p} = \left(\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} \int_0^M p x^{p-1} f(x) dx \right)^{1/p}.$$

Por otro lado, para alguna constante $M_1 > 0$, definimos la función $g(t)$ como

$$g(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{M_1}\right)^{1/\alpha}, & \text{si } t \in [0, M_1] \\ 0, & \text{si } t \in (M_1, +\infty) \end{cases}$$

Notar que la función $g^\alpha(t)$ es afín en su soporte, y por tanto también es cóncava en su soporte. Así, la función g es α-cóncava en su soporte. Mediante el cambio de variables $t = M_1 x$, se tiene que

$$\begin{aligned}
G_g(p)^p &= \binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty p t^{p-1} g(t) dt \\
&= \binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{M_1} p t^{p-1} \left(1 - \frac{t}{M_1}\right)^{1/\alpha} dt \\
&= \binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{M_1^{1/\alpha}} \int_0^{M_1} p t^{p-1} (M_1 - t)^{1/\alpha} dx \quad (cv : t = M_1 x) \\
&= \binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{M_1^{1/\alpha}} \int_0^1 p (M_1 x)^{p-1} (M_1 - M_1 x)^{1/\alpha} dx M_1 \\
&= \binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{M_1^{1/\alpha}} \int_0^1 p M_1^{p-1} x^{p-1} (1-x)^{1/\alpha} (M_1)^{1/\alpha} dx M_1 \\
&= \binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} M_1^p p \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{1/\alpha} dx \\
&= \binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} M_1^p p \left(\frac{\Gamma(p)\Gamma(1/\alpha+1)}{\Gamma(p+1/\alpha+1)} \right) \\
&= \left(\frac{\Gamma(p+1/\alpha+1)}{\Gamma(1/\alpha+1)\Gamma(p+1)} \right) M_1^p p \left(\frac{\Gamma(p)\Gamma(1/\alpha+1)}{\Gamma(p+1/\alpha+1)} \right) \\
&= \frac{1}{p} M_1^p p = M_1^p.
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $G_g(p) = G_g(q)$ para todo $q \neq p$. Luego $G_g(q)$ es constante, para todo $q > 0$. Si tomamos

$$M_1 = G_f(p),$$

es claro que $G_g(p) = G_f(p)$. Es decir,

$$\left(\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty px^{p-1} f(x)dx\right)^{1/p} = \left(\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty px^{p-1} g(x)dx\right)^{1/p}.$$

Equivalentemente,

$$\int_0^\infty px^{p-1} f(x)dx = \int_0^\infty px^{p-1} g(x)dx. \tag{2.43}$$

Como estas dos integrales son iguales, y $f(0) = g(0) = 1$, no puede ocurrir que $g(x) < f(x)$ para todo $x \in (0,+\infty)$. Así, existe algún $x \in (0,+\infty)$ para el cual $g(x) \geq f(x)$. Por tanto, el conjunto $\{x > 0 : g(x) \geq f(x)\}$ no es vacío, así pues tiene ínfimo. Tomamos el ínfimo del conjunto

$$x_0 = \inf\left\{x > 0 : \left(1 - \frac{x}{M_1}\right)^{1/\alpha} \geq f(x)\right\}. \tag{2.44}$$

Por la defincíon de ínfimo, es claro que

$$g(x) < f(x), \ \forall x \in (0,x_0). \tag{2.45}$$

Veamos que $g(x) \geq f(x)$, para $x > x_0$. Sea $y > x_0$, tomamos $\lambda > 0$ de forma que $x_0 = \lambda 0 + (1-\lambda)y$. Así, como $f^{1/\alpha}$ es cóncava y $g^{1/\alpha}$ es afín, se tiene que

$$f^{1/\alpha}(x_0) = f^{1/\alpha}(\lambda 0 + (1-\lambda)y) \geq \lambda f^{1/\alpha}(0) + (1-\lambda) f^{1/\alpha}(y)$$
$$g^{1/\alpha}(x_0) = g^{1/\alpha}(\lambda 0 + (1-\lambda)y) = \lambda g^{1/\alpha}(0) + (1-\lambda) g^{1/\alpha}(y).$$

Por elección de x_0, se tiene que $f(x_0) = g(x_0)$. Por lo tanto,

$$\lambda g^{1/\alpha}(0) + (1-\lambda) g^{1/\alpha}(y) \geq \lambda f^{1/\alpha}(0) + (1-\lambda) f^{1/\alpha}(y).$$

Como $f(0) = g(0) = 1$,

$$g(y) \geq f(y).$$

Por tanto, en general para cualquier $y \in (x_0,\infty)$, se tiene que $g(y) \geq f(y)$.

Retomando la igualdad (2.43), teníamos que

$$\frac{1}{\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}}}(G_f(p)^p - G_g(p)^p) = \int_0^\infty pt^{p-1}(f(t)-g(t))dt = 0.$$

Por tanto,

$$\int_0^{x_0} pt^{p-1}(f(t)-g(t))dt - \int_{x_0}^\infty pt^{p-1}(g(t)-f(t))dt = 0. \tag{2.46}$$

Así, para $q > p$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{G_f(q)^q - G_g(q)^q}{\binom{\frac{1}{\alpha}+q}{\frac{1}{\alpha}}} &= \int_0^\infty qt^{q-1}(f(t)-g(t))dt \\
&= \int_0^{x_0} qt^{q-1}(f(t)-g(t))dt - \int_{x_0}^\infty qt^{q-1}(g(t)-f(t))dt \\
&= \frac{q}{p}\left(\int_0^{x_0} pt^{p-1}t^{q-p}(f(t)-g(t))dt - \int_{x_0}^\infty pt^{p-1}t^{q-p}(g(t)-f(t))dt\right) \\
&\leq \frac{q}{p}x_0^{q-p}\left(\int_0^{x_0} pt^{p-1}(f(t)-g(t))dt - \int_{x_0}^\infty pt^{p-1}(g(t)-f(t))dt\right).
\end{aligned}$$

Mediante la igualdad 2.46, es claro que

$$\begin{aligned}\frac{G_f(q)^q - G_g(q)^q}{\binom{\frac{1}{\alpha}+q}{\frac{1}{\alpha}}} &\leq \frac{q}{p}x_0^{q-p}\left(\int_0^{x_0} pt^{p-1}(f(t)-g(t))dt - \int_{x_0}^{\infty} pt^{p-1}(g(t)-f(t))dt\right)\\ &= \frac{q}{p}x_0^{q-p}\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que para $0 < p < q$,

$$G_f(q) - G_g(q) \leq 0.$$

Por definición de g, se tiene que $G_g(q) = G_g(p) = G_f(p)$. Por tanto, podemos concluir que para $0 < p < q$,

$$G_f(q) - G_f(p) \leq 0.$$

Así, queda demostrado que la función $G_f(p)$ es decreciente para $p \in (0,\infty)$. □

Teorema 2.15. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ una función α-cóncava con $f(0) > 0$. Para cualesquiera $0 < p < q$, se tiene que*

$$\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}}^{1/q} K_q(f) \subset \binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}}^{1/p} K_p(f).$$

Demostración. Análogamente a la demostración del Teorema 2.10, para cada $u \in S^{n-1}$ definimos la función $f_1 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ por $f_1(x) = f(xu)$. Como f es una función α-cóncava, es claro que f_1 es una función α-cóncava. Luego, para cada $u \in S^{n-1}$ definimos $G_f(p)$ como

$$G_f(p) = \left(\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{f(0)}\int_0^{\infty} px^{p-1}f_1(x)dx\right)^{1/p} = \left(\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{f(0)}\int_0^{\infty} px^{p-1}f(xu)dx\right)^{1/p}.$$

Así, por el Teorema 2.14, para $0 > p > q$, $G_f(p) \leq G_f(q)$. Aplicando esto a la fórmula radial (2.6) del cuerpo de Ball $K_p(f)$, para cada $u \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}}^{1/p}\rho_{K_p(f)}(u) &= \left(\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{f(0)}\int_0^{\infty} ps^{p-1}f(su)ds\right)^{1/p} = G_{f_1}(p)\\ &\geq G_{f_1}(q) = \left(\binom{\frac{1}{\alpha}+q}{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{f(0)}\int_0^{\infty} qs^{q-1}f(su)ds\right)^{1/q} = \binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}}^{1/q}\rho_{K_q(f)}(u).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\binom{\frac{1}{\alpha}+q}{\frac{1}{\alpha}}^{1/q} K_q(f) \subset \binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}}^{1/p} K_p(f). \tag{2.47}$$

□

Mediante los Teoremas 2.13 y 2.15, ya estamos preparados para ver la inclusión en los cuerpos de Ball para funciones α-cóncavas.

Teorema 2.16. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ una función α-cóncava con $f(0) = \|f\|_\infty$. Entonces, si $0 < p < q$, se tiene que*

$$\frac{\binom{\frac{1}{\alpha}+q}{\frac{1}{\alpha}}^{1/q}}{\binom{\frac{1}{\alpha}+p}{\frac{1}{\alpha}}^{1/p}} K_q(f) \subset K_p(f) \subset K_q(f).$$

Demostración. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $f(0) = \|f\|_\infty = 1$. En caso contrario aplicamos el resultado a $g = f/f(0)$.

Mediante los Teoremas 2,13 y 2,15 es directo ver que se cumple el enunciado. □

2.3.2. Acotación de la constante de isotropía

En esta sección vamos a acotar superior e inferiormente la constante de isotropía de de un cuerpo isotrópico, por la constante de isotropía de un cuerpo de Ball que asociaremos a él. Este resultado es original, y mejora las constantes que se utilizaban en la acotación.

Teorema 2.17. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo isotrópico y sea $F(x) = |K \cap (x+K)|$. Entonces, para cada dimensión $n \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_n > 0$ tal que*

$$C_n L_K \leq L_{K_{n+2}(F)} \leq \sqrt{2} L_K,$$

con $\lim_{n\to\infty} C_n = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Demostración. Como hemos visto en la Proposición 2,3, si K es un cuerpo isotrópico, la función $F(x)$ es $\frac{1}{n}-$cóncava. Luego, en particular es α-cóncava, con $\alpha = \frac{1}{n}$. Aplicando la Proposición 2,6, se tiene que

$$\int_{K_{n+2}(F)} |\langle x, \theta \rangle|^2 \, dx = \frac{1}{F(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta \rangle|^2 F(x) dx, \tag{2.48}$$

con $F(0) = 1$. Aplicando el Teorema 2,5,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 F(x) dx = 2 \int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx. \tag{2.49}$$

Así, se tiene que

$$\int_{K_{n+2}(F)} |\langle x, \theta \rangle|^2 \, dx = 2 \int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = 2L_K^2. \tag{2.50}$$

Como hemos visto en la Proposición 2,4, si $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ es par, medible y $f(0) \neq 0$, entonces $K_p(f)$ es simétrico para todo $p > 0$. Por tanto, $K_{n+2}(F)$ es un cuerpo convexo simétrico. En caso de que $|K_{n+2}(F)| \neq 1$, tomamos el cuerpo convexo

$$\frac{K_{n+2}(F)}{|K_{n+2}(F)|^{1/n}},$$

el cual es un cuerpo isotrópico.

Veamos la relación entre las constantes de isotropía de $K_{n+2}(F)$ y L_K. Es claro que

$$L^2_{K_{n+2}(F)} = \int_{\frac{K_{n+2}(F)}{|K_{n+2}(F)|^{1/n}}} |\langle x, \theta \rangle|^2 \, dx.$$

Tomando el cambio de variables $x = y/(|K_{n+2}(F)|^{1/n})$, mediante la igualdad (2.50) se tiene que

$$L^2_{K_{n+2}(F)} = \frac{1}{|K_{n+2}(F)|^{1+2/n}} \int_{K_{n+2}(F)} |\langle x, \theta \rangle|^2 \, dx = \frac{2L_K^2}{|K_{n+2}(F)|^{1+2/n}}. \tag{2.51}$$

Por un lado, el Teorema 2.13 indica que para cualquier $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ α-cóncava con $f(0) > 0$, se tiene que $K_n(f) \subset K_{n+2}(f)$. Por tanto, tomando $f = F$ se tiene que $|K_n(F)| \leq |K_{n+2}(F)|$. Además, el Lema 2.1 dice que

$$|K_n(F)| = \frac{1}{F(0)} \int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = 1,$$

por ser F una medida de probabilidad, como hemos visto al principio del capítulo. Así,

$$L^2_{K_{n+2}(F)} = \frac{2L_K^2}{|K_{n+2}(F)|^{1+2/n}} \leq \frac{2L_K^2}{|K_n(F)|^{1+2/n}} = 2L_K^2. \tag{2.52}$$

Por otro lado, como F es una función α-cóncava, con $\alpha = \frac{1}{n}$, utilizando el Teorema 2.15, es claro que

$$K_{n+2}(F) \subset \frac{\binom{\frac{1}{\alpha}+n}{\frac{1}{\alpha}}^{1/n}}{\binom{\frac{1}{\alpha}+n+2}{\frac{1}{\alpha}}^{1/(n+2)}} K_n(F) = \frac{\binom{n+n}{n}^{1/n}}{\binom{n+n+2}{n}^{1/(n+2)}} K_n(F).$$

Tomando volúmenes,

$$|K_{n+2}(F)| \leq \left| \frac{\binom{2n}{n}^{1/n}}{\binom{2n+2}{n}^{1/(n+2)}} K_n(F) \right| = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n}^{n/(n+2)}} \left| K_n(F) \right|.$$

Análogamente al caso anterior,

$$L^2_{K_{n+2}(F)} = \frac{2L_K^2}{|K_{n+2}(F)|^{1+2/n}} \geq \left(\frac{\binom{2n+2}{n}^{n/(n+2)}}{\binom{2n}{n}} \right)^{1+2/n} 2L_K^2. \tag{2.53}$$

Por tanto, tomando

$$C_n^2 = 2 \left(\frac{\binom{2n+2}{n}^{n/(n+2)}}{\binom{2n}{n}} \right)^{1+2/n},$$

es claro que

$$L^2_{K_{n+2}(F)} \geq C_n^2 L_K^2. \tag{2.54}$$

Finalmente, mediante las desigualdades (2.52) y (2.54), tenemos que

$$C_n L_K \leq L_{K_{n+2}(F)} \leq \sqrt{2} L_K. \tag{2.55}$$

Simplificando C_n^2, se tiene que

$$C_n^2 = 2 \left(\frac{\binom{2n+2}{n}^{n/(n+2)}}{\binom{2n}{n}} \right)^{1+2/n} = 2 \frac{\binom{2n+2}{n}}{\binom{2n}{n}^{1+2/n}}.$$

Si tomamos límites cuando $n \to \infty$, aplicando la fórmula de Stirling, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} 2 \frac{\binom{2n+2}{n}}{\binom{2n}{n}^{1+2/n}} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$\square$

Este resultado original mejora la relación que entre las constantes de isotropía de cuerpos simétricos y cuerpos no necesariamente simétricos.

Observación. Notar que cualquier $n > 0$, la constante C_n es estrictamente mayor que 0, y el límite cuando $n \to \infty$ de C_n es $1/2$. Por tanto, si tomamos C como

$$C = \inf \left\{ 2 \frac{\binom{2n+2}{n}}{\binom{2n}{n}^{1+2/n}} \ : n > 0 \right\}, \tag{2.56}$$

es claro que $C > 0$. Así, mediante la desigualdad (2.55), se tiene que para toda dimensión $n \in \mathbb{N}$ y todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$\sqrt{C} L_K \leq L_{K_{n+2}(F)} \leq \sqrt{2} L_K \tag{2.57}$$

con C la constante absoluta adimensional definida en (2.56). Como consecuencia de la desigualdad (2.57), si la conjetura de la constante de isotropía se cumpliera para cuerpos simétricos con constante $C_1 > 0$, entonces se cumple para cuerpos convexos en general con constante mayor o igual a $C_1/(\sqrt{C}) \geq C_1\sqrt{2}$.

Capítulo 3

La conjetura del hiperplano

En este capítulo vamos a presentar otra de las principales cuestiones de este trabajo: la conjetura del hiperplano. Esta conjetura afirma que todo cuerpo convexo centrado de volumen 1 tiene una sección que pasa por el origen, cuyo volumen es mayor o igual a una constante absoluta $c > 0$.

En este capítulo veremos que esta conjetura está muy relacionada con la conjetura de la constante de isotropía que presentamos en el capítulo anterior. De hecho, veremos que son equivalentes. Es decir, si una de las conjeturas se cumple, la otra se satisface también. Para ello, daremos una desigualdad entre la constante de isotropía de un cuerpo convexo y de sus secciones centrales, la cual mejoraremos utilizando funciones α-cóncavas.

3.1. Momentos de Inercia y secciones de hiperplanos maximales

En esta sección vamos a explicar la relación entre los momentos de inercia de un cuerpo convexo y el volumen de secciones del cuerpo mediante hiperplanos pasando por el origen.

Teorema 3.1. *Sea K un cuerpo isotrópico en $\mathbb{R}^n$. Para todo $\theta \in S^{n-1}$ se tiene*

$$\frac{c_1}{L_K} \leq |K \cap \theta^\perp| \leq \frac{c_2}{L_K} \tag{3.1}$$

donde $c_1, c_2 > 0$ son constantes absolutas.

Por lo tanto, si K es un cuerpo isotrópico, todas las secciones que pasan por el origen tienen un volumen similar. Este resultado procede de una serie de observaciones en los resultados siguientes. En este caso, vamos a demostrar este teorema para cuerpos isotrópicos simétricos. En el caso de cuerpos isotrópicos no simétricos, se tiene la prueba en [7, Th. 3.1.2] .

Para demostrar este Teorema, vamos a demostrar primero la siguiente desigualdad.

Teorema 3.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo simétrico de volumen* 1*. Entonces, para cualquier $q > 0$ se tiene que*

$$\frac{1}{2(q+1)^{1/q}} \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|} \leq \left(\int_K |\langle x, \theta \rangle|^q \right)^{1/q} \leq \frac{C \cdot \text{mín}\{q, n\}}{|K \cap \theta^\perp|}, \tag{3.2}$$

para alguna constante $C > 0$.

Para probar este Teorema, vamos a comenzar probando primero la cota inferior.

Teorema 3.3. *Sea K un cuerpo simétrico de volumen* 1 *en $\mathbb{R}^n$. Para todo $q > 0$ y $\theta \in S^{n-1}$,*

$$\left(\int_K |\langle x, \theta \rangle|^q \right)^{1/q} \geq \frac{1}{2(q+1)^{1/q}} \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|}.$$

Demostración. Por el Lema 2,2, sabemos que si $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ es una función log-cóncava, entonces

$$F(p) = \left(\frac{p}{\|f\|_\infty} \int_0^\infty x^{p-1} f(x)dx \right)^{1/p} \tag{3.3}$$

es una función creciente. Sea $\theta \in S^{n-1}$, vamos a aplicar este resultado a la función

$$f(t) = \chi_{[0,+\infty)}(t) \cdot |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = t\}|. \tag{3.4}$$

Esta función se puede ver fácilmente que es log-cóncava aplicando la desigualdad de Brunn-Minkowski. Además, $\|f\|_\infty = f(0) = |K \cap \theta^\perp|$. Así,

$$\begin{aligned} F(q+1) &= \left(\frac{q+1}{\|f\|_\infty} \int_0^\infty t^q |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = t\}| dt \right)^{1/(q+1)} \\ &\geq F(1) = \frac{1}{\|f\|_\infty} \int_0^\infty |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = t\}| dt \\ &= \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|} \int_0^\infty |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = t\}| dt. \end{aligned}$$

Como K es simétrico y

$$\int_{-\infty}^\infty |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = t\}| = 1,$$

es claro que

$$\int_0^\infty |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = t\}| dt = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, para todo $q > 0$,

$$\left(\frac{q+1}{\|f\|_\infty} \int_0^\infty t^q |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = t\}| dt \right)^{1/(q+1)} \geq \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|} \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

Como K es simétrico, con el cambio de variable $t = -s$, es claro que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^q |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = t\}| dt &= \int_{-\infty}^0 (-s)^q |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = -s\}| ds \\ &= \int_{-\infty}^0 |s|^q |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = s\}| ds \end{aligned}$$

Por tanto, es claro que

$$\int_{-\infty}^\infty |t|^q |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = s\}| ds = 2 \int_0^\infty t^q |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = t\}| dt$$

Aplicando esto a la igualdad (3.5), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|} \frac{1}{2} &\leq \left(\frac{q+1}{\|f\|_\infty} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty |t|^q |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = t\}| dt \right)^{1/(q+1)} \\ &= \left(\frac{q+1}{|K \cap \theta^\perp|} \frac{1}{2} \int_K |\langle x, \theta \rangle|^q dx \right)^{1/(q+1)}. \end{aligned}$$

Tomando la potencia $(q+1)$ de la expresión, se tiene que

$$\frac{1}{|K \cap \theta^\perp|^{q+1}} \frac{1}{2^{q+1}} \leq \frac{q+1}{|K \cap \theta^\perp|} \frac{1}{2} \int_K |\langle x, \theta \rangle|^q dx.$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{|K\cap\theta^\perp|^q}\frac{1}{2^q(q+1)}\leq\int_K|\langle x,\theta\rangle|^q dx.$$

Tomando la raíz q-ésima de ambos miembros, se tiene que

$$\frac{1}{|K\cap\theta^\perp|\cdot 2(q+1)^{1/q}}\leq\left(\int_K|\langle x,\theta\rangle|^q dx\right)^{1/q}.$$

□

Observación. Si tomamos $K=\frac{1}{2}B_\infty^n$ y $\theta=e_1$, con e_1 un vector de la base canónica, la desigualdad del Teorema 3.3 pasa a ser una igualdad. Como $\left|\frac{1}{2}B_\infty^n\cap\theta^\perp\right|=1$, se tiene que

$$\int_{\frac{1}{2}B_\infty^n}|\langle x,e_1\rangle|^q=2\int_0^{\frac{1}{2}}t^q=\frac{1}{2^{q+1}(q+1)}=\frac{1}{2^q(q+1)}\frac{1}{\left|\frac{1}{2}B_\infty^n\cap\theta^\perp\right|^q}.$$

En [7, Prop. 3.1.4], podemos encontrar un resultado similar al Teorema 3.3 para cuerpos no necesariamente simétricos.

Lema 3.1. *Sea K un cuerpo convexo y centrado de volumen 1 en $\mathbb{R}^n$. Para todo $q>0$ y $\theta\in S^{n-1}$,*

$$\left(\int_K|\langle x,\theta\rangle|^q\right)^{1/q}\geq\frac{1}{2e(q+1)^{1/q}}\frac{1}{|K\cap\theta^\perp|}.$$

Veamos ahora la cota superior de la desigualdad 3.2.

Teorema 3.4. *Sea K un cuerpo centrado y simétrico de volumen 1 en $\mathbb{R}^n$. Para todo $q>0$ y $\theta\in S^{n-1}$, se tiene que*

$$\left(\int_K|\langle x,\theta\rangle|^q\right)^{1/q}\leq\frac{C\cdot\min\{q,n\}}{|K\cap\theta^\perp|}.$$

para alguna constante absoluta $C>0$.

Demostración. De forma análoga a la demostración del Teorema 3.3, sea $\theta\in S^{n-1}$, consideramos la función

$$f(t)=\chi_{[0,+\infty)}(t)\cdot|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|.$$

que es log-cóncava, y alcanza su máximo en 0, es decir, $\|f\|_\infty=f(0)$. El Teorema de Brunn Minkowski nos dice que esta función es en particular $\frac{1}{n-1}-$cóncava. Por lo tanto, aplicando el Teorema 2.14 a f, tenemos que la función

$$\begin{aligned}G_f(p)&=\left(\binom{n-1+p}{n-1}\frac{p}{f(0)}\int_0^\infty t^{p-1}f(t)dt\right)^{1/p}\\&=\left(\frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p)}\frac{1}{|K\cap\theta^\perp|}\int_0^\infty t^{p-1}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt\right)^{1/p}\end{aligned}$$

es decreciente. Por tanto,

$$\begin{aligned}G_f(q+1)&=\left(\frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n)\Gamma(q+1)}\frac{1}{|K\cap\theta^\perp|}\int_0^\infty t^q|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt\right)^{1/(q+1)}\\&\leq G(1)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)\Gamma(1)}\frac{1}{|K\cap\theta^\perp|}\int_0^\infty|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt\\&=\frac{n}{|K\cap\theta^\perp|}\int_0^\infty|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt\end{aligned}$$

Razonando como en la demostración del Teorema anterior, como $|K|=1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt=1.$$

Además, como K es simétrico, es claro que

$$\int_{0}^{\infty}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt=\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{0}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt. \tag{3.6}$$

Por tanto, para todo $q>0$,

$$\left(\frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n)\Gamma(q+1)}\frac{1}{|K\cap\theta^{\perp}|}\int_{0}^{\infty}t^{q}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt\right)^{1/(q+1)}\leq\frac{n}{|K\cap\theta^{\perp}|}\frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

Razonando como en Teorema anterior, como K es simétrico, con el cambio de variable $t=-s$, es claro que

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}t^{q}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt&=\int_{-\infty}^{0}(-s)^{q}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=-s\}|ds\\&=\int_{-\infty}^{0}|s|^{q}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=s\}|ds\end{aligned}$$

Por tanto, es claro que

$$\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{q}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=s\}|ds=2\int_{0}^{\infty}t^{q}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt$$

Aplicando esto a la igualdad (3.7), se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{n}{|K\cap\theta^{\perp}|}\frac{1}{2}&\geq\left(\frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n)\Gamma(q+1)}\frac{1}{|K\cap\theta^{\perp}|}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}t^{q}|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|dt\right)^{1/(q+1)}\\&=\left(\frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n)\Gamma(q+1)}\frac{1}{|K\cap\theta^{\perp}|}\frac{1}{2}\int_{K}|\langle x,\theta\rangle|^{q}dx\right)^{1/(q+1)}.\end{aligned}$$

Tomando la potencia $(q+1)$ de la expresión, se tiene que

$$\frac{n^{q+1}}{|K\cap\theta^{\perp}|^{q+1}}\frac{1}{2^{q+1}}\geq\frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n)\Gamma(q+1)}\frac{1}{|K\cap\theta^{\perp}|}\frac{1}{2}\int_{K}|\langle x,\theta\rangle|^{q}dx.$$

Equivalentemente,

$$\frac{n^{q+1}}{|K\cap\theta^{\perp}|^{q}}\frac{1}{2^{q}}\frac{\Gamma(n)\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q+1)}\geq\int_{K}|\langle x,\theta\rangle|^{q}dx$$

Tomando la raíz q-ésima de ambos miembros, se tiene que

$$\frac{n^{(q+1)/q}}{|K\cap\theta^{\perp}|}\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma(n)\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q+1)}\right)^{1/q}\geq\left(\int_{K}|\langle x,\theta\rangle|^{q}dx\right)^{1/q}. \tag{3.8}$$

Vamos a acotar la función

$$\left(\frac{\Gamma(n)\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q+1)}\right)^{1/q}\cdot n^{(q+1)/q}=\left(\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q+1)}\right)^{1/q}\cdot n.$$

Utilizando la fórmula de stirling, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q+1)}\right)^{1/q}\cdot n &\leq C\left(\frac{q^q e^{-q}\sqrt{2\pi q}\, n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{(n+q)^{(n+q)}e^{-(n+q)}\sqrt{2\pi(n+q)}}\right)^{1/q}\cdot n\\ &= (\sqrt{2\pi})^{1/q} C\frac{qn}{n+q}\frac{1}{\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q}}\left(\sqrt{\frac{nq}{n+q}}\right)^{1/q}\end{aligned}$$

Notar que si $n \geq q$, entonces

$$\frac{1}{\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q}} \leq \frac{1}{2},$$

ya que es estrictamente decreciente en n, y su límite cuando $n \to \infty$ es $1/e$. Y si $q > n$, como

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q}} = 1$$

existe una constante $C_1 > 0$, tal que esta expresión es menor que C_1. Así, tomando $C_2 = \max\{C_1, 1/2\}$ y $C_3 = C\sqrt{2\pi}$, se tiene que

$$\left(\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q+1)}\right)^{1/q}\cdot n \leq C_2C_3\left(\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}}\right)^{1/(2q)}.$$

Notar que

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}}\right) \leq \min\{n,q\}.$$

Así, si $n \geq q$,

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}}\right)^{2/q} \leq \min\{n,q\}^{2/q} \leq q^{2/q}.$$

Esta función es asintóticamente equivalente a 1, luego se puede acotar por una constante $C_4 > 0$. De forma análoga, si $q > n$, entonces

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}}\right)^{2/q} \leq \min\{n,q\}^{2/q} \leq n^{2/q} \leq n^{2/n},$$

que también se puede acotar por una constante $C_5 > 0$. Por tanto, si definimos $C_6 = \max\{C_4, C_5\}$, se tiene que

$$\left(\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q+1)}\right)^{1/q}\cdot n \leq C_2C_3\min\{n,q\}C_6.$$

Así, volviendo a la expresión (3.8), podemos asegurar que existe una constante absoluta $C > 0$ tal que

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx\right)^{1/q} \leq \frac{C\cdot\min\{n,q\}}{2|K\cap\theta^\perp|}. \tag{3.9}$$

□

Observación. En [7, Prop. 3.1.5], podemos encontrar un resultado similar en el que solo se tiene en cuenta la log-concavidad de f, y con ello se obtiene la cota

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q\right)^{1/q} \leq \frac{C\cdot q}{|K\cap\theta^\perp|},$$

para alguna constante $C>0$ absoluta. En este trabajo, gracias al estudio que hemos hecho de funciones α-cóncavas, hemos mejorado esa acotación, teniendo en cuenta que dado un cuerpo convexo $K\subset\mathbb{R}^n$, la función $f(t)$ dada por

$$f(t)=\chi_{[0,+\infty)}(t)\cdot|K\cap\{\langle x,\theta\rangle=t\}|$$

es $\frac{1}{n-1}-$cóncava, mejorando asintóticamente la cota superior existente de los momentos centrales de orden q.

Con estos 2 teoremas, hemos acotado los momentos de orden q de un cuerpo convexo, centrado y simétrico K. Es claro que si K es isotrópico, y tomamos $q=2$,

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^2dx\right)^{1/2} = L_K^2. \tag{3.10}$$

Por tanto, aplicando estos teoremas, vamos a obtener las cotas necesarias para demostrar el Teorema 3.1.

Demostración del Teorema 3.1. Sea K isotrópico y simétrico en $\mathbb{R}^n$. Sea $\theta\in S^{n-1}$, si tomamos $q=2$ en la desiguldad del Teorema 3.3, se tiene que

$$L_K=\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^2\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2(3)^{1/2}}\frac{1}{|K\cap\theta^\perp|}.$$

Equivalentemente,

$$|K\cap\theta^\perp| \geq \frac{1}{L_K 2\sqrt{3}}. \tag{3.11}$$

Por otro lado, tomando $q=2$ en la desigualdad del Teorema 3,4,

$$L_K=\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^2\right)^{1/2} \leq \frac{C\cdot 2}{|K\cap\theta^\perp|}.$$

Equivalentemente,

$$|K\cap\theta^\perp| \leq \frac{C\cdot 2}{L_K}. \tag{3.12}$$

Por tanto, las desigualdades (3.11) y (3.12), aseguran que existen constantes absolutas c_1,c_2 tales que para cualquier $\theta\in S^{n-1}$,

$$\frac{c_1}{L_K} \leq |K\cap\theta^\perp| \leq \frac{c_2}{L_K} \tag{3.13}$$

□

3.2. La conjetura del hiperplano

En esta sección presentamos la conjetura del hiperplano, y la relacionamos con la conjetura de la constante de isotropía.

Conjetura 3.1. *(Conjetura del hiperplano). Existe una constante absoluta $c>0$ que satisface la siguiente propiedad: para todo $n\geq 1$ y para todo cuerpo convexo centrado K de volumen 1, existe $\theta\in S^{n-1}$ tal que*

$$|K\cap\theta^\perp| \geq c \tag{3.14}$$

Esta conjetura es equivalente a la conjetura de la constante de isotropía. Es decir, una respuesta afirmativa en alguno de los dos implicaría que la otra conjetura es cierta. Supongamos que la conjetura del hiperplano es cierta. Si K es un cuerpo isotrópico, el teorema 3.1 muestra que para todo $\theta \in S^{n-1}$,

$$\frac{c_1}{L_K} \leq |K \cap \theta^{\perp}| \leq \frac{c_2}{L_K}.$$

Como existe un θ para el cual (3.14) se cumple, para ese θ tenemos que

$$c \leq |K \cap \theta^{\perp}| \leq \frac{c_2}{L_K}.$$

Así,

$$L_K \leq \frac{c_2}{c}. \tag{3.15}$$

De la misma forma, si existe una cota superior C para la constante de isotropía, entonces se satisface la conjetura del hiperplano. Una forma de demostrarlo es utilizando el elipsoide de inercia de Binet.

Definición 3.1. Sea K un cuerpo convexo de volumen 1 y centrado. El elipsoide de Binet de K es la bola unidad de la norma dada por

$$\|y\|_{\mathscr{E}_B(K)} = \left(\int_K \langle x,y\rangle^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.16}$$

Así, el elipsoide de Binet de K es

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_B(K) &= \{y \in \mathbb{R}^n | \int_K \langle x,y\rangle^2 dx \leq 1\} \\
&= \{y \in \mathbb{R}^n | \int_K \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_i y_i\right) dx \leq 1\} \\
&= \{y \in \mathbb{R}^n | \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \int_K x_i x_j dx \leq 1\} \\
&= \{y \in \mathbb{R}^n | \langle y, My\rangle \leq 1\},
\end{aligned}$$

donde M es una matriz $n \times n$ cuya posición (i,j) es

$$(M)_{i,j} = \int_K x_i x_j dx. \tag{3.17}$$

Por tanto, es claro que $(M)_{i,j} = (M)_{j,i}$ para todo i,j, luego M es simétrica. Además, podemos expresar la norma asociada al elipsoide de Binet como

$$\|y\|^2_{\mathscr{E}_B(K)} = \int_K \langle x,y\rangle^2 dx = \langle y, My\rangle, \tag{3.18}$$

por lo que es claro que M es una matriz definida positiva. Así pues, existe D, una matriz diagonal $n \times n$, y U, una matriz ortogonal $n \times n$ tal que $M = U^t DU$. Definimos $D^{1/2}$ como la matriz diagonal $D^{1/2}$ que cumple que $D^{1/2}_{i,i}$ es la raíz cuadrada de $D_{i,i}$, para todo $i = 1,...,n$. Así, $A = U^t D^{1/2} U$ satisface que

$$M = U^t DU = U^t D^{1/2}(UU^t)D^{1/2}U = (U^t D^{1/2}U)(U^t D^{1/2}U) = (U^t D^{1/2}U)^t (U^t D^{1/2}U) = A^t A$$

Por tanto, podemos expresar $\mathscr{E}_B(K)$ en términos de A:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_B(K) &= \{y \in \mathbb{R}^n | \langle y, My\rangle \leq 1\} \\
&= \{y \in \mathbb{R}^n | \langle y, A^t Ay\rangle \leq 1\} \\
&= \{y \in \mathbb{R}^n | \langle Ay, Ay\rangle \leq 1\} \\
&= \{A^{-1}z \in \mathbb{R}^n | \langle z, z\rangle \leq 1\} \\
&= A^{-1}\{z \in \mathbb{R}^n | |z|^2 \leq 1\} = A^{-1}B_2^n.
\end{aligned}$$

Tomando volúmenes, tenemos que

$$|\mathscr{E}_B(K)| = \frac{|B_2^n|}{|det(A)|} = \frac{|B_2^n|}{\sqrt{|det(M)|}}. \tag{3.19}$$

Sea K un cuerpo convexo centrado y de volumen 1, y $T \in SL(n)$. Entonces, aplicando (3.18) se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{TK} \langle x,y\rangle^2 dx = \int_K \langle Tz,y\rangle^2 dz = \int_K \langle x,T^t y\rangle^2 dy\\ = \langle T^t y, MT^t y\rangle = \langle y, TMT^t y\rangle.\end{aligned}$$

Es decir, análogamente a (3.18), la matriz $M(TK)$ asociada la norma generada por $\mathscr{E}_B(TK)$ es TMT^t, con M la matriz asociada a la norma generada por $\mathscr{E}_B(K)$. Así, procediendo como en (3.19), tenemos que

$$|\mathscr{E}_B(TK)| = \frac{|B_2^n|}{\sqrt{|det(M(TK))|}} = \frac{|B_2^n|}{\sqrt{|det(T^tMT)|}} = \frac{|B_2^n|}{\sqrt{|det(M)|}} = |\mathscr{E}_B(K)| \tag{3.20}$$

Por tanto, el volumen del elipsoide de Binet asociado a una transformación lineal de un cuerpo convexo K mediante una matriz $T \in SL(n)$, es igual al volumen del elipsoide de Binet asociado al cuerpo convexo K.

Si K es isotrópico,

$$\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx = L_K^2,$$

para todo $\theta \in S^{n-1}$. Así,

$$M_{i,i} = \int_K x_i^2 dx = \int_K \langle x,e_i\rangle^2 dx = L_K^2,$$

y para $i \neq j$,

$$M_{i,j} = \int_K x_i x_j dx = 0$$

por las propiedades vistas de los cuerpos isotrópicos. Así, aplicando (3.19), si K es un cuerpo isotrópico,

$$|\mathscr{E}_B(K)| = \frac{|B_2^n|}{\sqrt{|det(M)|}} = \frac{|B_2^n|}{\sqrt{L_K^{2n}}} = \frac{|B_2^n|}{L_K^n}. \tag{3.21}$$

Como hemos visto en el Teorema 2.2, si K es un cuerpo convexo centrado de volumen 1, existe una transformación lineal T tal que TK está en posición isotrópica. Por tanto, mediante el resultado (3.20), tenemos que esta última igualdad, (3.21), se cumple para cualquier cuerpo convexo K de volumen 1 y centrado.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{|B_2^n|}{L_K^n} &= |\mathscr{E}_B(K)| = \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_{\mathscr{E}_B(K)(\theta)}} r^{n-1} dr \cdot n|B_2^n| d\sigma(\theta)\\ &= \int_{S^{n-1}} \left(\rho_{\mathscr{E}_B(K)}(\theta)\right)^n |B_2^n| d\sigma(\theta) = \int_{S^{n-1}} \frac{|B_2^n|}{\|\theta\|^n_{\mathscr{E}_B(K)}} d\sigma(\theta)\\ &\leq \frac{|B_2^n|}{\min_{\theta\in S^{n-1}} \|\theta\|^n_{\mathscr{E}_B(K)}}\end{aligned}$$

siendo $\rho_{\mathscr{E}_B(K)}(\theta)$ la función radial en $\mathscr{E}_B(K)$, que por definición es igual a $\left(\|\theta\|_{\mathscr{E}_B(K)}\right)^{-1}$. Por tanto,

$$\min_{\theta\in S^{n-1}} \|\theta\|_{\mathscr{E}_B(K)} \leq L_K. \tag{3.22}$$

Es decir,

$$\min_{\theta \in S^{n-1}} \left(\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \right)^{1/2} \leq L_K. \tag{3.23}$$

Podemos ver ahora que la conjetura de la constante de isotropía implica la conjetura del hiperplano. Supongamos que se satisface la conjetura de la constante de isotropía. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo centrado de volumen 1. Éste último resultado, (3.23), implica que existe un $\theta \in S^{n-1}$ tal que

$$\left(\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \right)^{1/2} \leq L_K \leq C. \tag{3.24}$$

Por tanto, el Lema 3.1 muestra que

$$\frac{1}{2e\sqrt{3}} \frac{1}{|K \cap \theta^{\perp}|} \leq \left(\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \right)^{1/2} \leq L_K \leq C. \tag{3.25}$$

para algún $\theta \in S^{n-1}$. Y por tanto, para todo convexo K centrado y de volumen 1 existe un $\theta \in S^{n-1}$ para el cual

$$|K \cap \theta^{\perp}| \geq \frac{1}{2eC\sqrt{3}}. \tag{3.26}$$

Capítulo 4

Respuestas parciales

La conjetura de la constante de isotropía, si bien no ha sido demostrada en toda su generalidad, se puede probar para ciertas clases de cuerpos convexos. En este capítulo vamos a ver algunas respuestas parciales afirmativas a esta conjetura.

En las secciones 4.1 y 4.2 vamos a ver que en ciertas clases de cuerpos simétricos podemos acotar su constante de isotropía por una constante absoluta. En la sección 4.1, trabajaremos con cuerpos convexos incondicionales. Este resultado es consecuencia de la simetría que tienen esta clase de cuerpos respecto de cualquier hiperplano coordenado. Para ello, basaremos la demostración en la desigualdad de Loomis-Whitney. En la sección 4.2 trataremos con cuerpos 2-convexos simétricos: un clase de cuerpos que cumple ciertas condiciones de convexidad. En este caso, su constante de isotropía se puede acotar por una constante dependiente del tipo de 2-convexidad del cuerpo.

En las secciones 4.3 y 4.4 trabajaremos con politopos simétricos. En la sección 4.3, veremos que para politopos simétricos de N vértices, podemos acotar su constante de isotropía por una función del orden de $\log(N)$. En la sección 4.4, trataremos con polítopos aleatorios gaussianos. Es decir, cuyos vértices son generados por variables aleatorias gaussianas. En ese caso, con probabilidad muy alta, podemos acotar por una constante absoluta su constante de isotropía.

Por último, veremos otras acotaciones de la constante de isotropía para politopos aleatorios no necesariamente gaussianos.

4.1. Cuerpos convexos incondicionales

En esta sección estudiaremos el caso de cuerpos convexos incondicionales. Esta clase de cuerpos convexos cumple que si $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$, entonces $x = (\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n) \in K$ para toda elección de $\varepsilon_i = \pm 1$. Geométricamente, esto es que si $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$, entonces todo el rectángulo $\prod_{i=1}^{n}[-|x_i|, |x_i|]$ está contenido en K. Esta propiedad implica que para todo vector de la base canónica e_j, con $j = 1, \dots, n$, la proyección de K sobre el hiperplano $e_j^{\perp}$, $P_{e_j^{\perp}}(K)$, es igual a la sección de K intersectada con el hiperplano $e_j^{\perp}$, $K \cap e_j^{\perp}$. Por tanto, si K es un cuerpo incondicionalmente convexo, para cualquier e_j, con $j = 1, \dots, n$, se tiene que

$$\left| P_{e_j^{\perp}}(K) \right| = \left| K \cap e_j^{\perp} \right|.$$

4.1.1. Desigualdad de Loomis-Whitney

Antes de demostrar la acotación de la constante de isotropía, veamos la demostración de la desigualdad de Loomis-Whitney. Este resultado relaciona el volumen de un cuerpo convexo K en $\mathbb{R}^n$ con el producto de los volúmenes $n-1$-dimensionales de sus proyecciones en los hiperplanos ortogonales a los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Vamos a probar este resultado utilizando una técnica discreta de demostración.

Teorema 4.1 (Desigualdad de Loomis-Witney [17]). *Para todo cuerpo convexo K en $\mathbb{R}^n$,*

$$|K|^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} \left| P_{e_i^\perp}(K) \right|$$

Demostración. Sea B una unión de N cubos distintos de lado 1 con vértices en $\mathbb{Z}^n$. Como cada cubo tiene volumen 1, es claro que $|B| = N$. Así, B es unión de cubos de la forma

$$[a_{j_1}, a_{j_1}+1] \times [a_{j_2}, a_{j_2}+1] \times \ldots \times [a_{j_n}, a_{j_n}+1] \subset \mathbb{R}^n.$$

Por tanto, podemos identificar cada cubo con el punto $(a_{j_1}, a_{j_2}, .., a_{j_n}) \in \mathbb{Z}^n$.

Sea N_i el número de cubos en $P_{e_i^\perp}(B)$, es decir, el número de cubos $n-1$-dimensionales que aparecen en la proyección sobre el hiperplano $e_i^\perp$. Así, parar todo $i_1, \ldots, n$ tenemos que $N_i = |P_{e_i^\perp}(B)|$. Veamos por inducción que

$$N^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} N_i. \tag{4.1}$$

Si $n = 2$, es claro que $N \leq N_1 N_2$, ya que $B \subset P_{e_1^\perp}(B) \times P_{e_2^\perp}(B)$. Supongamos la desigualdad cierta para $n-1$, y veamos que entonces se cumple para n.

Agrupamos los elementos de B en k conjuntos de la siguiente forma:

- Sea $z_1 \in \mathbb{Z}$ la primera coordenada de algún elemento de B. Definimos B_1 como el subconjunto de B cuyos elementos son los $z \in B$ tales que la primera la coordenada de z es z_1. Definimos b_1 como el número de elementos de B_1.

- Sea $z_2 \in \mathbb{Z}$, la primera coordenada de algún elemento de B tal que $z_2 \neq z_1$. Definimos B_2 como el subconjunto de B cuyos elementos son los $z \in B$ tales que la primera la coordenada de z es z_2. Definimos b_2 como el número de elementos de B_2.

- Sea $z_3 \in \mathbb{Z}$, la primera coordenada de algún elemento de B tal que $z_3 \neq z_1$ y $z_3 \neq z_2$. Definimos B_3 como el subconjunto de B cuyos elementos son los $z \in B$ tales que la primera la coordenada de z es z_3. Definimos b_3 como el número de elementos de B_3.

- En general, para definir el conjunto B_l, tomamos un $z_l \in \mathbb{Z}$ que sea la primera coordenada de algún elemento de B tal que $z_l \neq z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}$. Definimos B_l como el subconjunto de B cuyos elementos son los $z \in B$ tales que la primera la coordenada de z es z_l. Definimos b_l como el número de elementos de B_l.

Como B es finito, habrá un número k finito de numeros enteros diferentes que sean la primera coordenada de algún elemento de B. Así, habrá $k \in \mathbb{Z}$ conjuntos, $B_1, .., B_k$. Es fácil ver que son disjuntos, ya que para cualesquiera $a_1 \in B_{i_1}$ y $a_2 \in B_{i_2}$, por definición de los conjuntos B_{i_1} y B_{i_2}, la primera coordenada de a_1 es diferente a la de a_2, luego $a_1 \neq a_2$. Por tanto, es claro que

$$|B| = \sum_{l=1}^{k} b_l.$$

Para cualquier $l \in \{1, .., k\}$, los elementos del conjunto B_l tienen su primera coordenada igual, y alguna de las demás coordenadas diferentes (ya que en caso de que tuvieran todas las coordenadas iguales, serían el mismo elemento). Por tanto, cada elemento de B_1 tendrá una proyección sobre $e_1^\perp$ diferente. Así, tenemos que $|P_{e_1^\perp}(B_l)| = b_l$. Por tanto, como $B_1 \subset B$ para todo $l \in \{1, .., k\}$, se tiene que, para cualquier $l \in \{1, .., k\}$,

$$b_l = |P_{e_1^\perp}(B_l)| \leq |P_{e_1^\perp}(B)| = N_1. \tag{4.2}$$

Definimos ahora, para $l \in \{1, .., k\}$ y $j \in \{2, .., n\}$, $b_{l,j}$ como el número de proyecciones diferentes del conjunto B_l sobre el hiperplano $e_j^\perp$. Es decir,

$$b_{l,j} = |P_{e_j^\perp}(B_l)|. \tag{4.3}$$

Como la primera coordenada de los elementos de B_{l_1} es distinta de la primera coordenada de los elementos de B_{l_2}, si $l_1 \neq l_2$, es claro que

$$N_j = |P_{e_j^\perp}(B)| = \sum_{l=1}^{k} |P_{e_j^\perp}(B_l)| = \sum_{l=1}^{k} b_{l,j}$$

Para cada $l \in \{1,..,k\}$, si aplicamos la hipótesis de inducción a b_l, tenemos que

$$b_l^{n-2} \leq b_{l,2} b_{l,3} ... b_{l,n} \tag{4.4}$$

Así, para cada $l \in \{1,..,k\}$, utilizando la desigualdad (4.2), se tiene que

$$b_l^{n-1} \leq b_l b_{l,2} b_{l,3} ... b_{l,n} \leq N_1 b_{l,2} b_{l,3} ... b_{l,n}. \tag{4.5}$$

Luego,

$$\begin{aligned} N = \sum_{l=1}^{k} b_l \leq \sum_{l=1}^{k} (N_1 b_{l,2} b_{l,3} ... b_{l,n})^{\frac{1}{n-1}} &= N_1^{\frac{1}{n-1}} \sum_{l=1}^{k} (b_{l,2})^{\frac{1}{n-1}} (b_{l,3})^{\frac{1}{n-1}} ... (b_{l,n})^{\frac{1}{n-1}} \\ (*) \leq N_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=2}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k} b_{l,j} \right)^{\frac{1}{n-1}} &= (N_1)^{\frac{1}{n-1}} (N_2)^{\frac{1}{n-1}} ... (N_n)^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

utlizando en $(*)$ la desigualdad de Hölder. Así,

$$N^{n-1} \leq N_1 N_2 ... N_n$$

como queríamos probar. Luego para cualquier unión de cubos B de volumen 1 se tiene que

$$|B|^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} \left| P_{e_i^\perp}(B) \right|. \tag{4.6}$$

Si B es unión de cubos de lado $\delta > 0$ con vértices en $\delta \mathbb{Z}^n$, entonces tomamos $B_1 = \frac{1}{\delta} B$. Es claro que B_1 es unión de cubos de volumen 1. Por un lado,

$$|B_1|^{n-1} = \left| \frac{1}{\delta} B \right| = \left(\frac{1}{\delta} \right)^{n(n-1)} |B|.$$

Por otro lado,

$$\prod_{i=1}^{n} \left| P_{e_i^\perp}(B_1) \right| = \prod_{i=1}^{n} \left| P_{e_i^\perp} \left(\frac{1}{\delta} B \right) \right| = \left(\frac{1}{\delta} \right)^{n(n-1)} \prod_{i=1}^{n} \left| P_{e_i^\perp}(B) \right|.$$

Así, como B_1 cumple (4.6), se tiene que

$$|B|^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} \left| P_{e_i^\perp}(B) \right|.$$

En general, podemos aproximar cualquier boreliano de $\mathbb{R}^n$ por uniones de cubos de lado $\delta > 0$ casi disjuntos: la intersección de cualesquiera dos es de medida nula. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto B unión de cubos de radio $\delta > 0$ tal que $A \subset B$ y $|A \setminus B| < \varepsilon$ tal que

$$|B|^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} \left| P_{e_i^\perp}(B) \right| \leq \prod_{i=1}^{n} \left| P_{e_i^\perp}(A) \right|.$$

Como $|B|^{n-1} = |A \setminus (A \setminus B)|^{n-1} \geq (|A| - \varepsilon)^{n-1}$, si $\varepsilon \to 0$, se tiene el resultado. $\square$

4.1.2. Aplicación a la conjetura del hiperplano

Como hemos visto en la introducción de esta sección, si K es un cuerpo convexo incondicional,

$$|P_{e_i^\perp}(K)| = |K \cap e_i^\perp|$$

para todo $i \in \{1,..,n\}$. Aplicando la desigualdad de Loomis-Whitney, se tiene que

$$|K|^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} |P_{e_i^\perp}(K)| = \prod_{i=1}^{n} |K \cap e_i^\perp| \leq \max_{i=1,..,n} |K \cap e_i^\perp|^n$$

Si $|K| = 1$, se tiene que existe un $i \in \{1,..,n\}$ tal que

$$1 \leq |K \cap e_i^\perp|.$$

Así, la conjetura del hiperplano se cumple para cuerpos convexos incondicionales con constante 1.

4.2. Cuerpos 2-convexos

El objetivo de esta seción es acotar la constante de isotropía de cuerpos isotrópicos simétricos que cumplen ciertas condiciones de convexidad. Los cuerpos que vamos a tratar son los 2-convexos. Para ellos definimos el módulo de convexidad uniforme, δ_K, como una medida de ”cuán convexo” es un cuerpo. Un cuerpo se dice 2-convexo de parámetro α, si se cumple que $\forall t \in [0,2]$,

$$\delta_K(t) \geq \alpha t^2.$$

En esta sección vamos a ver que para un cuerpo K isotrópico y simétrico, si $\delta_K(t) \geq \alpha t^2$, $\forall t \in [0,2]$, entonces podemos acotar la constante de isotropía de K como $L_K \leq c/\sqrt{\alpha}$, donde $c > 0$ es una constante absoluta. Este resultado se ha obtenido del arículo [16] .

4.2.1. Módulo de convexidad uniforme

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y simétrico, definimos el módulo de convexidad uniforme de K como la función $\delta_K(t) : (0,2] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\delta_K(t) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_K \; ; \, x,y \in K, \|x-y\|_K \geq t\right\}.$$

Si K es convexo, $(x+y)/2 \in K$, y por tanto es claro que $\|(x+y)/2\|_K \leq 1$. No es difícil ver que dado un $t > 0$, $\|(x+y)/2\|$ alcanzará su supremo cuando x,y estén en la frontera de K. Equivalentemente, $1 - \|(x+y)/2\|$ alcanzará su ínfimo para valores $x,y \in \partial K$. Si suponemos que x,y son valores de la frontera de K, de forma intuitiva se puede ver que si la distancia de x,y es t, es decir, $\|x-y\|_K = t$, entonces su punto medio estará más cerca de la frontera que si en cambio $\|x-y\|_K > t$. Por tanto, $\|(x+y)/2\|$ será mayor cuando $\|x-y\|_K = t$, lo cual implica que $1 - \|(x+y)/2\|$ sea menor. Así, se puede simplificar la definición de módulo de convexidad a

$$\delta_K(t) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_K \; ; \, x,y \in \partial K, \|x-y\|_K = t\right\}.$$

Veamos una serie de observaciones del módulo de convexidad uniforme para ayudar a caracterizarlo.

Observación 4.1. *Para $t > 0$ fijo, sea $(1-\delta_K(t))K$ un dilatado de K. Para cualquier sección S de K que no corte a $(1-\delta_K(t))K$, se tiene que el diámetro de S es menor a t, entendiendo diámetro como* $\max\{\|x-y\|_K \; ; \, x,y \in S\}$.

Es decir, $(1-\delta_K(t))K$ cumple que todas las secciones de K de diámetro mayor o igual a t cortan a $(1-\delta_K(t))K$ al menos en un punto.

Observación 4.2. *Si K no es estrictamente convexo, entonces $\delta_K(t)=0$ para valores de t suficientemente pequeños. Y si K es estrictamente convexo, $\delta_K(t)>0$, para todo t.*

Notar que si K no es estrictamente convexo, existen x,y en la frontera de K tales que su punto medio está en la frontera de K. Es decir, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_K = 1$. Así, $\delta_K(t)=0$, para algún $t>0$.

Observación 4.3. *Para cualquier subespacio M del espacio total, $\delta_{K\cap M}(t)\geq\delta_K(t)$, para todo t.*

En esta última observación se incluyen espacios de dimensión infinita. Es por ello que nos podemos plantear cual es el módulo de convexidad uniforme de la bola unidad de un espacio de Banach de dimensión infinita. Veamos qué ocurre en el espacio de Banach $H=l_2$ con su norma euclídea asociada.

Sean $x,y\in H$. Usando la identidad del paralelogramo tenemos que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_2^2=\frac{\|x\|_2^2+\|y\|_2^2}{2}.$$

Si $x,y\in H$ cumplen que $\|x\|_2^2=\|x\|_2^2=1$, y $\|x-y\|_2\geq t$, entonces

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2^2=\frac{1+1}{2}-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_2^2\leq 1-\frac{t^2}{4}.$$

Equivalentemente,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2\leq\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Por tanto, para cualesquiera x,y en la frontera de la bola unidad tales que $\|x-y\|_2\geq t$, se tiene que

$$1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2\geq 1-\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{1/2},$$

En particular, tomando ínfimos,

$$\delta_{B_H}(t)=\operatorname{ínf}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2\ ;\ x,y\in\partial B_H,\|x-y\|_2\geq t\right\}\geq 1-\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{1/2}$$

Esta última expresión es equivalente a $t^2/8$ cuando $t\to 0$. Por tanto,

$$\delta_{B_H}(t)\geq 1-\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{1/2}\approx\frac{t^2}{8}$$

si $t\to 0$. De forma análoga, se puede obtener el mismo resultado para espacios de Banach de dimensión finita con la norma euclídea. Es decir, para cualquier $n>0$,

$$\delta_{B_2^n}(t)\geq 1-\left(1-\frac{t^2}{4}\right)^{1/2}\approx\frac{t^2}{8}$$

si $t\to 0$. Por tanto, la bola euclídea de un espacio de Banach de dimensión finita o infinita es 2-convexa, es decir, existe algún $\alpha>0$ tal que para todo $t\in(0,2]$

$$\delta_{B_2^n}(t)\geq\alpha t^2.$$

Este resultado se puede exteneder a espacios L^p de funciones.

Teorema 4.2. *Si $t \to 0$, se tiene que*

$$\delta_{B_{L^p}} \approx \begin{cases} \frac{p-1}{8}t^2\ , & si\ p \in (1,2] \\ \\ \frac{1}{p2^p}t^p\ , & si\ p \in [2,+\infty) \end{cases}$$

Antes de ver la demostración, vamos a enunciar dos desigualdades funcionales que vamos a necesitar. Estas son la desigualdad de Clarkson y la desigualdad de Bynum-Drew.

Proposición 4.1 (Desigualdad de Clarkson)**.** *Si $2 \leq p < \infty$ y $f,g \in L_p$, entonces se tiene*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}.$$

Proposición 4.2 (Desigualdad de Bynum-Drew)**.** *Si $1 < p \leq 2$ y $f,g \in L_p$, entonces se tiene*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^2 \leq \frac{\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2}{2} - (p-1)\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^2.$$

No vamos a demostrar estas desigualdades funcionales, ya que no son objeto de estudio de este trabajo. La demostración de la desigualdad de Clarkson se puede encontrar en [10, Th.2], y la de Bynum-Drew en [5, Prop.3].

Con estos resultados, ya estamos listos para probar el Teorema 4.2.

Demostración del Teorema 4.2. Veamos primero el caso de $p \in [2,+\infty]$. Sea $f,g \in L^p$, tales que $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ y $\|f-g\|_p \geq t$, utilizando la desigualdad de Clarkson 4.1, se tiene que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}.$$

Equivalentemente,

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p.$$

Como $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ y $\|f-g\|_p \geq t$, se tiene que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1+1}{2} - \frac{t^p}{2^p}.$$

Por tanto, es claro que

$$1 - \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \geq 1 - \left(1 - \frac{t^p}{2^p}\right)^{1/p}.$$

Tomando ínfimos, en ambos miembros de la desigualdad, tenemos que

$$\delta_{B_{L^p}}(t) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p\ ;\ f,g \in \partial B_{L^p}, \|x-y\|_p \geq t\right\} \geq 1 - \left(1 - \frac{t^p}{2^p}\right)^{1/p}.$$

Esta última expresión se comporta asintóticamente como $1/(p2^p)t^p$ cuando $t \to 0$, luego

$$\delta_{B_{L^p}}(t) \gtrsim \frac{1}{p \cdot 2^p} t^p$$

si $p \in [2, +\infty)$ y $t \to 0$.

Veamos el caso $p \in (1,2]$. Sea $f, g \in L^p$, tales que $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$ y $\|f-g\|_p \geq t$. Utilizando la desigualdad de Bynum-Drew (Proposición 4.2), se tiene que

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^2 \leq \frac{\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2}{2} - (p-1)\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^2 \leq \frac{1+1}{2} - (p-1)\frac{t^2}{4}.$$

Por tanto, es claro que

$$1 - \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \geq 1 - \left(1-(p-1)\frac{t^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Tomando ínfimos a ambos miembros, se tiene que

$$\delta_{B_{L^p}}(t) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p ; \, f,g \in \partial B_{L^p}, \|x-y\|_p \geq t\right\} \geq 1 - \left(1-(p-1)\frac{t^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Ésta última expresión se comporta asintóticamente como $(p-1)/8 \cdot t^2$ si $t \to 0$. Por tanto, si $t \to 0$, para $p \in (1,2]$, tenemos que el módulo de convexidad uniforme de la bola unidad en el espacio L^p es

$$\delta_{B_{L^p}}(t) \gtrsim \frac{p-1}{8}t^2.$$

$\square$

Acabamos de ver que si $p \in (1,2]$, los espacios L^p son 2-convexos, es decir, existe alguna $\alpha > 0$ tal que para todo t,

$$\delta_{B_{L^p}}(t) \geq \alpha t^2.$$

La observación 4.3 indica que cualquier subespacio de L^p cumplirá la misma condición, luego será también 2-convexo. Así, en particular para $p \in (1,2]$, B_p^n es 2-convexa, para cualquer $n \in \mathbb{N}$.

4.2.2. Acotación de L_K en cuerpos 2-convexos

Vamos a utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior para acotar la constante de isotropía de cuerpos 2-convexos por una constante. Este resultado, que fue demostrado originalmente en [16], se obtendrá como consecuencia de los siguientes lemas.

Lema 4.1. *Sea K un cuerpo simétrico en $\mathbb{R}^n$ de volumen 1. Fijado $\theta \in S^{n-1}$ y $t > 0$, se tiene que*

$$|\{x \in K; \langle x, \theta\rangle > t\}| \leq \exp\left[-n\delta_K\left(\frac{t}{\|\theta\|_{K^o}}\right)\right]$$

con $\|\theta\|_{K^o} = h_K(\theta)$.

Demostración. Definimos $A(t) = |\{x \in K; \langle x, \theta\rangle > t\}|$ y $B = |\{x \in K; \langle x, \theta\rangle \leq 0\}|$. Como el cuerpo K es simétrico, $|B| = 1/2$. Tomamos $x \in A$, $y \in B$. Por un lado,

$$\langle x-y, \theta\rangle = \langle x, \theta\rangle - \langle y, \theta\rangle > t - 0 = t.$$

Por otro lado, notar que

$$\langle x-y, \theta\rangle \leq \|x-y\|_K \cdot \|\theta\|_{K^o}.$$

Combinando estas desigualdades, tenemos que para $x \in A(t)$, $y \in B$,

$$t < \langle x-y, \theta \rangle < \|x-y\|_K \cdot \|\theta\|_{K^o},$$

y así se tiene que

$$\|x-y\|_K > \frac{t}{\|\theta\|_{K^o}}.$$

Por tanto, para cualesquiera $x \in A(t)$, $y \in B$, utilizando la defninción de módulo de convexidad uniforme se tiene que

$$1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq \delta_K\left(\frac{t}{\|\theta\|_{K^o}}\right).$$

Equivalentemente, para cualesquiera $x \in A(t)$, $y \in B$,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta_K\left(\frac{t}{\|\theta\|_{K^o}}\right),$$

y por tanto,

$$\frac{A(t)+B}{2} \subset \left(1 - \delta_K\left(\frac{t}{\|\theta\|_{K^o}}\right)\right)K.$$

Tomamos volúmenes en ambos miembros, y tenemos que

$$\left|\frac{A(t)+b}{2}\right| \leq \left(1 - \delta_K\left(\frac{t}{\|\theta\|_{K^0}}\right)\right)^n |K| = \left(1 - \delta_K\left(\frac{t}{\|\theta\|_{K^o}}\right)\right)^n.$$

Por un lado, utilizando la desigualdad $1-x \leq e^{-x}$ para $x \in \mathbb{R}$ en esta última expresión, tenemos que

$$\left|\frac{A(t)+b}{2}\right| \leq \exp\left[-n\delta_K\left(\frac{t}{\|\theta\|_{K^o}}\right)\right]. \tag{4.7}$$

Por otro lado, utilizando la desigualdad de Brunn-Minkowski y teniendo en cuenta que $|B| = \frac{1}{2} \geq |A(t)|$,

$$\left|\frac{A(t)+B}{2}\right| \geq |A(t)|^{1/2} \cdot |B|^{1/2} \geq |A(t)|^{1/2} \cdot |A(t)|^{1/2} = |A(t)|. \tag{4.8}$$

Por tanto, combinando las desigualdades (4.7) y (4.8), se tiene que

$$|\{x \in K; \langle x, \theta \rangle > t\}| = A(t) \leq \exp\left[-n\delta_K\left(\frac{t}{\|\theta\|_{K^o}}\right)\right].$$

□

Observación 4.4. *En particular, si $\delta_K(t) \geq \alpha t^2$ para todo $t \in (0,2]$,*

$$|\{x \in K; \langle x, \theta \rangle > t\}| \leq \exp\left[-n\alpha \frac{t^2}{\|\theta\|_{K^o}^2}\right].$$

Utilizaremos este Lema para demostrar el siguiente Lema, que nos llevará al resultado principal de la sección.

Lema 4.2. *Sea K un cuerpo isotrópico en $\mathbb{R}^n$ de volumen 1 tal que $\delta_K(t) \geq \alpha t^2$ para alguna constante $\alpha > 0$. Entonces, para alguna constante absoluta $c > 0$,*

$$c\sqrt{\alpha}\sqrt{n}L_K \cdot B_2^n \subset K.$$

Demostración. Definimos $A(t) = \{x \in K; \langle x, \theta\rangle \geq t\}$, y $B(t) = \{x \in K; \langle x, \theta\rangle < t\} = K \setminus A(t)$. Definimos $f(t) = |B(t)|$. Como el volumen de K es 1, es claro que $f(t) = |B(t)| = 1 - |A(t)|$. Utilizando el Lema 4.1 y la Observación 4.4 se tiene que

$$f(t) = |B(t)| \geq 1 - \exp\left[-n\alpha \frac{t^2}{\|\theta\|_{K^o}^2}\right]. \tag{4.9}$$

Podemos expresar $f(t)$ como una integral,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} |\{x \in K; \langle x, \theta\rangle = s\}|\, ds,$$

y nos damos cuenta de que

$$f'(t) = |\{x \in K; \langle x, \theta\rangle = t\}|.$$

Por la desigualdad de Brunn-Minkowski, $f'(t)$ es una función log-cóncava. En este caso, como K es simétrico, $f'(t)$ es una función par. Así, $f'(t)$ alcanza su máximo en el 0, en el que

$$f'(0) = |\{x \in K; \langle x, \theta\rangle = 0\}| = |K \cap \theta^{\perp}|.$$

Utilizando el Teorema 3,1, se tiene que

$$f'(0) = |K \cap \theta^{\perp}| \leq \frac{c_2}{L_K} \tag{4.10}$$

para alguna constante absoluta $c_2 > 0$. Por el Teorema del valor medio, se tiene que para algún $\xi \in (0,t)$,

$$f(t) = f(0) + tf'(\xi) \leq f(0) + tf'(0).$$

Es claro que $f(0) = |\{x \in K; \langle x, \theta\rangle < 0\}| = 1/2$, ya que K es simétrico. Así, aplicando la desigualdad (4.10),

$$f(t) \leq f(0) + tf'(0) = \frac{1}{2} + t\frac{c_2}{L_K}.$$

Si tomamos $t = \frac{L_K}{4c_2}$ se tiene que

$$f\left(\frac{L_K}{4c_2}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{L_K}{4c_2} \cdot \frac{c_2}{L_K} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Por otro lado, tomando $t = \frac{L_K}{4c_2}$ en la desigualdad (4.9),

$$f\left(\frac{L_K}{4c_2}\right) \geq 1 - \exp\left[-n\alpha \frac{L_K^2}{4^2 c_2^2 \|\theta\|_{K^o}^2}\right] = 1 - \exp\left[-n\alpha \frac{L_K^2}{C\|\theta\|_{K^o}^2}\right]$$

para alguna constante absoluta $C > 0$. Combinando estas dos últimas desigualdades, se tiene que

$$1 - \exp\left[-n\alpha \frac{L_K^2}{C\|\theta\|_{K^o}^2}\right] \leq \frac{3}{4}.$$

Equivalentemente,

$$\exp\left[-n\alpha \frac{L_K^2}{C\|\theta\|_{K^o}^2}\right] \geq \frac{1}{4}.$$

Tomando logaritmos, de esta expresión se deduce que

$$n\alpha \frac{L_K^2}{\|\theta\|_{K^o}^2} \geq C_1$$

para alguna constante C_1. Esto implica que

$$\|\theta\|_{K^o} \geq C_2\sqrt{n}\sqrt{\alpha}L_K$$

para alguna constante C_2. Como $\|\theta\|_2 = 1$, esta última desigualdad es equivalente a

$$\|\theta\|_{K^o} \geq C_2\sqrt{n}\sqrt{\alpha}L_K\|\theta\|_2.$$

Como $\|\theta\|_{K^o} = h_K(\theta)$, se tiene que

$$K^o \subset \frac{1}{C_2\sqrt{n}\sqrt{\alpha}L_K} \cdot B_2^n.$$

Finalmente, aplicando la propiedad 1.2 de cuerpos polares, se tiene que

$$C_2\sqrt{n}\sqrt{\alpha}L_K B_2^n \subset K$$

para alguna constante $C_2 > 0$. □

Con estos dos lemas ya estamos preparados para demostrar el Teorema principal de esta sección.

Teorema 4.3. *Sea K un cuerpo isotrópico y simétrico de volumen 1 en $\mathbb{R}^n$. Si K es 2 convexo con constante α, es decir, $\delta_K(t) \geq \alpha t^2$, para todo $t \in (0,2]$, entonces*

$$L_K \leq \frac{c}{\sqrt{\alpha}}$$

para alguna constante absoluta $c > 0$.

Demostración. Por el Lema 4,2, sabemos que existe una constante $c > 0$ tal que

$$c\sqrt{\alpha}\sqrt{n}L_K \cdot B_2^n \subset K.$$

Tomando volúmenes y elevando a $1/n$ a ambos miembros, se tiene que

$$1 = |K|^{1/n} \geq c\sqrt{\alpha}\sqrt{n}L_K \cdot |B_2^n|^{1/n}.$$

Como $\sqrt{n} \cdot |B_2^n|^{1/n}$ tiende asintóticamente a $\sqrt{2\pi e}$, si $n \to \infty$, existe una constante $c' > 0$ tal que

$$1 \geq c'\sqrt{\alpha}L_K.$$

Por tanto,

$$L_K \leq \frac{c'}{\sqrt{\alpha}}.$$

para alguna constante absoluta $c' > 0$. □

4.3. Politopos

Como hemos definido en el capítulo 1, un politopo convexo en $\mathbb{R}^n$ es la envoltura convexa de una cantidad finita de puntos $\{P_1, \cdots, P_n\}$ en $\mathbb{R}^n$, y se denota $conv\{P_1, \cdots, P_n\}$. En esta sección veremos que en un polítopo convexo simétrico, es decir, cuyos vértices son pares de puntos opuestos, podemos acotar la constante de isotropía por $C \cdot \log(N)$, con C una constante absoluta y N el número de parejas de puntos opuestos que generan el polítopo. Esta acotación no resuelve la conjetura del hiperplano, pero sí es un primer punto de partida para obtener una cota superior para la constante de isotropía.

4.3.1. Acotación de la constante de isotropía

La acotación que vamos a dar, está basada en el artículo [1].

Teorema 4.4. *Sea $K = \{P_1, -P_1, \cdots, P_N, -P_N\}$ un polítopo simétrico de $2N$ vértices, entonces,*

$$L_K \leq C \cdot \log(N) \tag{4.11}$$

donde C es un constante absoluta.

Supongamos que K es isotrópico y L_K es la constante de isotropía de K. Entonces, $\forall T \in GL(n)$ con T simétrica definida positiva, aplicando el teorema 2.1,

$$L_K^2 = \frac{1}{Tr(T)} \int_K \langle x, Tx \rangle dx \leq \frac{1}{Tr(T)} \int_K |\langle x, Tx \rangle| dx \leq \frac{1}{Tr(T)} \int_K \max_{y \in K} |\langle x, Ty \rangle| dx.$$

Para todo $y \in K$, existen $\lambda_1, ..., \lambda_N$ tales que $\sum_{i=1}^N |\lambda_i| = 1$, $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$. Así, para todo $y \in K$,

$$\begin{aligned} |\langle x, Ty \rangle| &= |\sum_{i=1}^N \lambda_i \langle x, TP_i \rangle| \leq \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \cdot |\langle x, TP_i \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \max_{i=1,..,N} |\langle x, TP_i \rangle| = \max_{i=1,..,N} |\langle x, TP_i \rangle|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} L_K^2 \leq \frac{1}{Tr(T)} \int_K \max_{y \in K} |\langle x, Ty \rangle| dx &= \frac{1}{Tr(T)} \int_K \max_{i=1,..,N} |\langle x, TP_i \rangle| dx \\ &= \frac{1}{Tr(T)} \int_K \max_{i=1,..,N} \left| \left\langle x, \frac{TP_i}{|TP_i|} \right\rangle \right| |TP_i| dx \\ &\leq \frac{\max_{i=1,..,N} |TP_i|}{Tr(T)} \int_K \max_{i=1,..,N} \left| \left\langle x, \frac{TP_i}{|TP_i|} \right\rangle \right| dx. \end{aligned}$$

Como T es una matriz simétrica definida positiva, podemos expresar T como $T = UDU^T$, con U una matriz ortogonal y D una matriz diagonal con valores $d_1, \cdots, d_n$ en su diagonal, que son los valores propios de T. Así, por la desigualdad aritmético-geométrica,

$$|\det(T)|^{\frac{1}{n}} = |\det(UDU^T)|^{\frac{1}{n}} = |\det(D)|^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^n d_i^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{Tr(T)}{n}.$$

Por tanto, se tiene que

$$\frac{1}{Tr(T)} \leq \frac{1}{n|\det(T)|^{\frac{1}{n}}}.$$

Así, podemos acotar la constante de isotropía de K por

$$\begin{aligned} L_K^2 &\leq \frac{\max_{i=1,..,N} |TP_i|}{n|\det(T)|^{\frac{1}{n}}} \int_K \max_{i=1,..,N} \left| \left\langle x, \frac{TP_i}{|TP_i|} \right\rangle \right| dx \\ &= \frac{\max_{i=1,..,N} |TP_i|}{n|TK|^{\frac{1}{n}}} \int_K \max_{i=1,..,N} \left| \left\langle x, \frac{TP_i}{|TP_i|} \right\rangle \right| dx \end{aligned}$$

para cualquier $T \in GL(n)$ simétrica definida positiva.

El siguiente Lema nos va a permitir acotar la integral de esta última expresión por una función del orden de $\log(N)$.

Lema 4.3. *Sea* $\theta_1, \cdots, \theta_N \in S^{n-1}$ *y sea* K *isotrópico tal que* $\forall \theta \in S^{n-1}$,

$$\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{\psi_\alpha} := \text{ínf}\left\{ t > 0 \ : \ \int_K \exp\left(\frac{|\langle x, \theta \rangle|}{t} \right)^\alpha \leq 2 \right\} \leq B \cdot L_K$$

para alguna constante $B > 0$, *y* $\alpha \in [1, 2]$. *Entonces,*

$$\int_K \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| \leq C \cdot B \cdot L_K (\log(N))^{\frac{1}{\alpha}}$$

donde $C > 0$ *es una constante absoluta.*

Demostración. Por la definición anterior, como

$$\text{ínf}\left\{ t > 0 \ : \ \int_K \exp\left(\frac{|\langle x, \theta \rangle|}{t} \right)^\alpha \leq 2 \right\} \leq B \cdot L_K,$$

en particular se tiene que

$$\int_K \exp\left(\frac{|\langle x, \theta \rangle|}{B \cdot L_K} \right)^\alpha \leq 2.$$

Utilizando esta última desigualdad junto con la desigualdad de Markov, $\forall i = 1, ..., N$, y $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |\{x \in K : |\langle x, \theta_i \rangle| \geq t\}| &= \left| \left\{ x \in K : \exp\left(\frac{|\langle x, \theta_i \rangle|}{B \cdot L_K} \right)^\alpha \geq \exp\left(\frac{t}{B \cdot L_K} \right)^\alpha \right\} \right| \\ &\leq \exp\left[-\left(\frac{t}{B \cdot L_K} \right)^\alpha \right] \int_K \exp\left(\frac{|\langle x, \theta_i \rangle|}{B \cdot L_K} \right)^\alpha dx \\ &\leq \exp\left[-\left(\frac{t}{B \cdot L_K} \right)^\alpha \right] \cdot 2 \end{aligned}$$

Luego, para todo $t \geq 0$, aplicando el resultado anterior se tiene que

$$|\{x \in K : \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| \geq t\}| \leq \sum_{i=1}^N |\{x \in K : |\langle x, \theta_i \rangle| \geq t\}| \tag{4.12}$$

$$\leq 2N \exp\left[-\left(\frac{t}{B \cdot L_K} \right)^\alpha \right]. \tag{4.13}$$

Fijamos un $A > 0$ que elegiremos después. Por el Teorema de Fubini es claro que

$$\begin{aligned} \int_K \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| dx &= \int_0^\infty |\{x \in K : \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| \geq t\}| dt \\ &= \int_0^A |\{x \in K : \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| \geq t\}| dt + \int_A^\infty |\{x \in K : \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| \geq t\}| dt. \end{aligned}$$

Vamos a acotar estas dos integrales. Por un lado, como $|K| = 1$, es claro que para cualquier $t \geq 0$,

$$|\{x \in K : \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| \geq t\}| \leq |K| = 1.$$

Así, se tiene que

$$\int_0^A |\{x \in K : \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| \geq t\}| dt \leq \int_0^A dt = A.$$

Para la otra integral, utilizando la desigualdad (4.12), se tiene que

$$\int_A^\infty |\{x \in K : \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| \geq t\}| dt \leq \int_A^\infty 2N \exp\left[-\left(\frac{t}{B \cdot L_K} \right)^\alpha \right].$$

Así, tenemos que fijando cualquier $A > 0$,

$$\int_K \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| dx \leq A + \int_A^\infty 2N \exp\left[-\left(\frac{t}{B \cdot L_K}\right)^\alpha\right].$$

En particular, con $A = 4BL_K(\log(N))^{1/\alpha}$ se tiene que

$$\int_K \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| dx \leq 4BL_K(\log(N))^{1/\alpha} + \int_{4BL_K(\log(N))^{1/\alpha}}^\infty 2N \exp\left[-\left(\frac{t}{B \cdot L_K}\right)^\alpha\right]. \tag{4.14}$$

Vamos a acotar esta última integral. Mediante el cambio de variable $t = As$,

$$\begin{aligned}
\int_{4BL_K(\log(N))^{1/\alpha}}^\infty 2N \exp\left[-\left(\frac{t}{B \cdot L_K}\right)^\alpha\right] &= \int_1^\infty 4BL_K(\log(N))^{1/\alpha} \cdot \exp\left[-4^\alpha s^\alpha \log(N)\right] ds \\
&\leq 4BL_K(\log(N))^{1/\alpha} \int_1^\infty \exp\left[-4s\log(N)\right] ds \\
&= 4BL_K(\log(N))^{1/\alpha} \left[\frac{\exp\left[-4s\log(N)\right]}{-4\log(N)}\right]_1^\infty \\
&= 4BL_K(\log(N))^{1/\alpha} \frac{\exp\left[-4\log(N)\right]}{4\log(N)} \\
&= BL_K(\log(N))^{1/\alpha} \frac{1}{N^4 \log(N)}.
\end{aligned}$$

Como $(N^4 \log(N))^{-1}$ tiende a 0, si $N \to \infty$, es claro que podemos acotar $(N^4 \log(N))^{-1}$ por alguna constante $C > 0$. Así,

$$\int_{4BL_K(\log(N))^{1/\alpha}}^\infty 2N \exp\left[-\left(\frac{t}{B \cdot L_K}\right)^\alpha\right] \leq CBL_K(\log(N))^{1/\alpha}. \tag{4.15}$$

Por tanto, con este resultado, podemos acotar la desigualdad (4.14) como

$$\int_K \max_{i=1,..,N} |\langle x, \theta_i \rangle| dx \leq (4 + C)BL_K(\log(N))^{1/\alpha}. \tag{4.16}$$

□

Veamos que si $\alpha = 1$, la hipótesis del Lema 4.3 se cumple para cualquier $\theta \in S^{n-1}$. Es decir, en las condiciones del Lema, para cualquier dirección $\theta \in S^{n-1}$, existe una constante absoluta B tal que

$$\inf\left\{t > 0 \ : \ \int_K \exp\left(\frac{|\langle x, \theta \rangle|}{t}\right) \leq 2\right\} \leq B \cdot L_K. \tag{4.17}$$

Si K es isotrópico y simétrico en $\mathbb{R}^n$, el Teorema 3.4 nos asegura que para todo $q > 0$ y todo $\theta \in S^{n-1}$,

$$\left(\int_K |\langle x, \theta \rangle|^q\right)^{1/q} \leq \frac{C \cdot \min\{n, q\}}{|K \cap \theta^\perp|} \leq \frac{C \cdot q}{|K \cap \theta^\perp|}$$

para alguna constante absoluta $C > 0$. Mediante el Teorema 3.1, podemos acotar inferiormente el término $|K \cap \theta^\perp|$ por c_1/L_K, para alguna constante absoluta $c_1 > 0$. Por tanto, con estos dos Teoremas, tenemos que para todo $q > 0$ y para todo $\theta \in S^{n-1}$,

$$\left(\int_K |\langle x, \theta \rangle|^q\right)^{1/q} \leq \frac{C \cdot q}{|K \cap \theta^\perp|} \leq \frac{C \cdot q \cdot L_K}{c_1} = c \cdot q \cdot L_K, \tag{4.18}$$

definiendo $c = C/c_1$. Sea $t > 0$, si desarrollamos la exponencial de la desigualdad (4.17) en serie de potencias, tenemos que

$$\int_K \exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{t}\right) dt = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \int_K \frac{|\langle x,\theta\rangle|^q}{t^q q!} dt = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{t^q q!} \int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dt.$$

Elevando a q ambos miembros de la acotación (4.18), es claro que

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q \leq c^q \cdot q^q \cdot L_K^q.$$

Por tanto,

$$\int_K \exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{t}\right) dt \leq 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c^q q^q L_K^q}{t^q q!}.$$

Vamos a acotar este expresión, utilizando la desigualdad $q! \geq (q/e)^q$. Esta desigualdad es cierta para todo $q > 0$, ya que

$$q! = \Gamma(q+1) = \int_0^{\infty} t^q e^{-t} dt \geq \int_q^{\infty} t^q e^{-t} dt \geq \int_q^{\infty} q^q e^{-t} dt = \frac{q^q}{e^q}.$$

Aplicando este resultado,

$$\int_K \exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{t}\right) dt \leq 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{e^q c^q q^q L_K^q}{q^q t^q} = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{e^q c^q L_K^q}{t^q} = 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{ecL_K}{t}\right)^q$$

Si tomamos $t = 2ceL_K$,

$$\int_K \exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{2ceL_K}\right) dt \leq 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^q = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Acabamos de ver que con $t = 2ceL_K$,

$$\int_K \exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{t}\right) dt \leq 2,$$

lo cual implica que para $\alpha = 1$,

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_\alpha} = \text{ínf}\left\{t > 0 \ : \ \int_K \exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{t}\right)^{\alpha} \leq 2\right\} \leq 2ce \cdot L_K. \tag{4.19}$$

Retomando la acotación de la constante de isotropía de un polítopo simétrico de $2N$ vértices, que hemos visto al principio del capítulo, teníamos que si $K = conv\{P_1, -P_1, \ldots, P_N, -P_N\}$ polítopo simétrico de $2N$ vértices, $\forall T \in GL(n)$ simétrica y definida positiva,

$$L_K^2 \leq \frac{\text{máx}_{i=1,..,N} |TP_i|}{n|TK|^{\frac{1}{n}}} \int_K \max_{i=1,..,N} \left|\left\langle x, \frac{TP_i}{|TP_i|}\right\rangle\right| dx. \tag{4.20}$$

Identificando θ_i con $TP_i/|TP_i|$, como hemos visto en la desigualdad (4.19), se cumplen las hipótesis del Lema 4,3, con $B = 2ce$, para alguna constante $c > 0$. Así que podemos acotar la integral de la expresión (4.20) por

$$\int_K \max_{i=1,..,N} \left|\left\langle x, \frac{TP_i}{|TP_i|}\right\rangle\right| dx \leq C2ceL_K \log(N) = ML_K \log(N)$$

para alguna constante absoluta $M > 0$. Aplicando esta cota a (4.20),

$$L_K^2 \leq \frac{\text{máx}_{i=1,..,N} |TP_i|}{n|TK|^{\frac{1}{n}}} ML_K \log(N),$$

o equivalentemente,

$$L_K \leq \frac{\text{máx}_{i=1,..,N} |TP_i|}{n|TK|^{\frac{1}{n}}} M \log(N), \tag{4.21}$$

para alguna constante absoluta $M > 0$. Vamos a elegir $T \in GL(n)$ de forma que tengamos una buena cota para L_K. En particular, elegimos T tal que el elipsoide de mínimo volumen que contiene a TK sea la bola unidad B_2^n, es decir, elegimos $T \in GL(n)$ tal que TK esté en posición de Löwner.

Recordamos que, se dice que un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ está en posición de Löwner si el elipsoide de mínimo volumen que contiene a K es B_2^n. Como vimos en la sección 1,4, el hecho de que un cuerpo K esté en posición de Löwner implica que existe una descomposición de la identidad mediante una combinación lineal de productos tensoriales de vectores u_j, con $u_j \in \partial K \cap S^{n-1}$. Esto se obtenía con el Teorema 1.4, en donde si $i = 0$, y K está en posición de Löwner, es decir, es la identidad la que maximiza el conjunto de este Teorema, se tiene que

$$I_n = n \sum_{j=1}^{s} \lambda_j w_j \otimes w_j \tag{4.22}$$

para s puntos de contacto $w_1, \ldots, w_s \in \partial K \cap S^{n-1}$ y unas constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_s > 0$ tales que $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$. Por la proposición 1,4, como K está en posición de Löwner, se tiene que K^o está en posición de John. Sea $x \in K^o$, si multiplicamos x por la izquierda en ambos miembros de la igualdad, se tiene que

$$x = n \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \langle x, w_j \rangle \cdot w_j,$$

para todo $x \in K^o$. Así,

$$\begin{aligned} |x|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, n \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \langle x, w_j \rangle \cdot w_j \rangle &= n \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \langle x, w_j \rangle \langle x, w_j \rangle \\ &= n \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \langle x, w_j \rangle^2. \end{aligned}$$

Por un lado $w_j \in K \cap S^{n-1}$ para $j = 1, \ldots, s$, luego $|w_j| = 1$. Por otro lado, K^o es un convexo que tiene los mismos puntos de contacto con S^{n-1} que K. Como K^o es convexo, para cada $w_j \in S^{n-1} \cap K^o$ existe un hiperplano con vector normal w_j tal que $\forall x \in K^o$, $\langle x, w_j \rangle \leq 1$. Como K es simétrico, $-w_j$ también es punto de contacto de K con la esfera, y por tanto punto de contacto de K^o con la esfera. Así, $\forall x \in K^o$, $\langle x, -w_j \rangle \leq 1$. Combinando estas dos desigualdades, se tiene que para todo $x \in K^o$, $\left|\langle x, w_j \rangle\right| \leq 1$. Esto se cumple para cualquier w_j punto de contacto de K^o con la esfera. Así,

$$|x|^2 = n \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \langle x, w_j \rangle^2 \leq n \sum_{j=1}^{s} \lambda_j = n.$$

Por tanto, podemos asegurar que

$$K^o \subset \sqrt{n} B_2^n.$$

Luego por dualidad, tomando los polares de ambos cuerpos se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subset K.$$

Tomando volúmenes,

$$|K|^{1/n} \geq \left|\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n\right|^{1/n} \geq \frac{c}{n}$$

para alguna constante $c > 0$.

Volviendo a la desigualdad 4.21, tenemos que

$$L_K \leq \frac{\text{máx}_{i=1,..,N} |TP_i|}{n|TK|^{\frac{1}{n}}} M \log(N)$$

para alguna constante $M > 0$. Si tomamos $T \in GL(n)$ tal que TK esté en posición de Löwner, como acabamos de ver, $|TK|^{1/n} \geq c/n$ para alguna constante $c > 0$. Además, como $TK \subset B_2^n$, es claro que $|TP_i| \leq 1$, para todo $i = 1, \ldots, 2N$. En particular,

$$\max_{i=1,..,N} |TP_i| \leq 1.$$

Por tanto,

$$L_K \leq \frac{\text{máx}_{i=1,..,N} |TP_i|}{n|TK|^{\frac{1}{n}}} M \log(N) \leq CM \log(N) = C_1 \log(N)$$

para alguna constante absoluta $C_1 > 0$.

4.4. Politopo simplicial Gaussiano

Un politopo simplicial en $\mathbb{R}^n$, es un politopo que cumple que cada una de sus caras $(n-1)$-dimensionales es la envoltura convexa de n puntos que además son vértices. En esta sección vamos a trabajar con politopos simpliciales simétricos aleatorios de $2N$ puntos en $\mathbb{R}^n$, con N un múltiplo de n. Un politopo es aleatorio si sus vértices se generan por vectores aleatorios. En este caso, estudiaremos qué sucede cuando utilizamos vectores Gaussianos, es decir, estudiaremos politopos simpliciales simétricos Gaussianos, para los cuales vamos a poder acotar su constante de isotropía por una constante con probabilidad muy alta. Del mismo modo, al final de la sección, comentaremos otras acotaciones para politopos simpliciales aleatorios generados por otros vectores aleatorias o con dominios restringidos.

4.4.1. Politopos aleatorios

Klartag y Kozma, en el artículo [15], intentaron dar un contraejemplo de la conjetura de la constante de isotropía utilizando cuerpos convexos aleatorios, ya que esta clase de cuerpos no está generalmente incluida en aquellos para los que sí había una respuesta afirmativa de la conjetura. Sin embargo, el resultado obtenido ha acabado siendo una cota para la constante de isotropía con probabilidad muy alta. Este resultado está enunciado en el siguiente Teorema.

Teorema 4.5. *Sea $K_N = conv\{\pm X_1, \ldots, \pm X_N\} \subset \mathbb{R}^n$ un politopo simplicial Gaussiano de $2N$ vértices. Entonces, existe una constante absoluta $c > 0$ tal que*

$$L_{K_N}^2 \leq c.$$

con probabilidad mayor o igual que $1 - c_1 e^{-c_2 n}$, con c_1, c_2 constantes absolutas.

La demostración de este Teorema está basada en el artículo de Klartag y Kozma que hemos mencionado.

Para demostrarlo, comenzaremos con el siguiente resultado, válido para politopos no necesariamente aleatorios.

Proposición 4.3. *Sea $K_N = conv\{\pm X_1,\ldots,\pm X_N\} \subset \mathbb{R}^n$ un polítopo simplicial simétrico de $2N$ vértices. Entonces,*

$$nL_{K_N}^2 \le \frac{1}{|K_N|^{2/n}} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \max_{E,(\varepsilon_i)_{i=1}^N} \left\{ \sum_{i\in E} |\varepsilon_i X_i|^2 + \left| \sum_{i\in E} \varepsilon_i X_i \right|^2 \right\},$$

con $E \subset \{1,\ldots,N\}$ tal que $|E| = n$, y $\varepsilon_i = \pm 1$.

Demostración. Por el Teorema 2.3 sabemos que

$$nL_K^2 = \min_{T\in GL(n)} \left\{ \frac{1}{|TK|^{2/n}} \cdot \frac{1}{|TK|} \cdot \int_{TK} |x|^2 dx \right\}.$$

Por tanto, para K_N se tiene que

$$nL_{K_N}^2 \le \frac{1}{|K_N|^{2/n}} \cdot \frac{1}{|K_N|} \cdot \int_{K_N} |x|^2 dx. \tag{4.23}$$

Sean $F_1,\ldots,F_l$ las caras $(n-1)$-dimensionales de K_N. Es claro que $K_N = \cup_{i=1}^l conv\{0,F_i\}$. Como los conos $conv\{0,F_i\}$ intersecan en conjuntos de volumen 0, se tiene que

$$|K_N| = \sum_{j=1}^l |conv\{0,F_i\}| = \frac{\sum_{j=1}^l |F_j|_{n-1} d(0,F_j)}{n}. \tag{4.24}$$

Vamos a acotar la integral de (4.23). Tomando la medida imagen, es claro que

$$\int_{K_N} |x|^2 dx = \sum_{j=1}^l \int_{conv\{0,F_j\}} |x|^2 dx = \sum_{j=1}^l \int_0^{d(0,F_j)} \int_{\frac{r}{d(0,F_j)} F_j} |x|^2 dx \cdot dr.$$

Hacemos el cambio de variable $\frac{r}{d(0,F_i)} \cdot y = x$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{K_N} |x|^2 dx &= \sum_{j=1}^l \int_0^{d(0,F_j)} \frac{r^{n+1}}{d(0,F_j)^{n+1}} \int_{F_j} |y|^2 dy \cdot dr \\
&= \frac{1}{n+2} \sum_{j=1}^l d(0,F_j) \int_{F_j} |y|^2 dy \\
&= \frac{n}{n+2} |K_N| \sum_{j=1}^l \frac{d(0,F_j)|F_j|_{n-1}}{n|K_N|} \cdot \frac{1}{|F_j|_{n-1}} \int_{F_j} |y|^2 dy.
\end{aligned}$$

Utilizando la igualdad (4.24), podemos acotar esta expresión como

$$\int_{K_N} |x|^2 dx \le \frac{n}{n+2} |K_N| \max_{j=1,..,l} \left\{ \frac{1}{|F_j|_{n-1}} \int_{F_j} |y|^2 dy \right\}. \tag{4.25}$$

Cada F_j es una cara del polítopo, es decir, $F_j = conv\{P_1^j,\ldots,P_n^j\}$, con cada $P_i^j \in \{\pm X_1,\ldots,\pm X_N\}$ con $P_s^j \neq -P_k^j$ para todo s,k. Es decir, en una misma cara no puede haber vértices opuestos. Para cada cara F_j, definimos T_j: una matriz $n\times n$ que en la columna i-ésima tiene el vector P_i^j. Sea $P_i^j(k)$ la componente k-ésima del vector P_i^j, entonces

$$T_j = \begin{pmatrix} P_1^j(1) & P_2^j(1) & \cdots & P_n^j(1) \\ P_1^j(2) & P_2^j(2) & \cdots & P_j^n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^j(n) & P_2^j(n) & \cdots & P_j^n(n) \end{pmatrix}$$

Si consideramos $\Delta^{n-1} = conv\{e_1,...,e_n\}$, es claro que

$$F_j = T_j\Delta^{n-1}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|F_j|}\int_{F_j}|y|^2dy &= \frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}|T_j\cdot x|^2dx \\
&= \frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}P_l^j(k)\cdot x_l\right)^2dx \\
&= \frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l_1,l_2=1}^{n}P_{l_1}^j(k)\cdot P_{l_2}^j(k)\cdot x_{l_1}\cdot x_{l_2}\right)dx \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l_1,l_2=1}^{n}P_{l_1}^j(k)\cdot P_{l_2}^j(k)\frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}x_{l_1}\cdot x_{l_2}dx.
\end{aligned}$$

Si $l_2 = l_1$, el valor de esta última integral es

$$\frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}x_{l_1}\cdot x_{l_2}dx = \frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}x_{l_1}^2dx = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Si $l_2 \neq l_1$, entonces se tiene que

$$\frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}x_{l_1}\cdot x_{l_2}dx = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Por tanto, sustituyendo estos valores, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|F_j|}\int_{F_j}|y|^2dy &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l_1,l_2=1}^{n}P_{l_1}^j(k)\cdot P_{l_2}^j(k)\frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}x_{l_1}\cdot x_{l_2}dx \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(P_l^j(k)\right)^2\frac{2}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l_1\neq l_2}^{n}\frac{1}{n(n+1)}\left(P_{l_1}^j(k)\cdot P_{l_2}^j(k)\right) \\
&= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2 + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{l_1\neq l_2}^{n}\left\langle P_{l_1}^j, P_{l_2}^j\right\rangle.
\end{aligned}$$

Notar que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{l=1}^{n}P_l^j\right|^2 = \left\langle\sum_{l=1}^{n}P_l^j, \sum_{l=1}^{n}P_l^j\right\rangle &= \sum_{l_1,l_2=1}^{n}\left\langle P_{l_1}^j, P_{l_2}^j\right\rangle \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2 + \sum_{l_1\neq l_2}^{n}\left\langle P_{l_1}^j, P_{l_2}^j\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por tanto, aplicando este resultado se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|F_j|}\int_{F_j}|y|^2dy &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2 + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{l_1\neq l_2}^{n}\left\langle P_{l_1}^j, P_{l_2}^j\right\rangle \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2 + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2 + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{l_1\neq l_2}^{n}\left\langle P_{l_1}^j, P_{l_2}^j\right\rangle \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2 + \frac{1}{n(n+1)}\left|\sum_{l=1}^{n}P_l^j\right|^2 \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2 + \left|\sum_{l=1}^{n}P_l^j\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Aplicando esta desigualdad a la fórmula 4.25, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{K_N}|x|^2dx &\leq \frac{n}{n+2}|K_N|\max_{j=1,..,l}\left\{\frac{1}{|F_j|_{n-1}}\int_{F_j}|y|^2dy\right\}\\ &\leq \frac{n}{n+2}|K_N|\frac{1}{n(n+1)}\max_{j=1,..,l}\left\{\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2+\left|\sum_{l=1}^{n}P_l^j\right|^2\right\}\\ &= \frac{|K_N|}{(n+1)(n+2)}\max_{j=1,..,l}\left\{\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2+\left|\sum_{l=1}^{n}P_l^j\right|^2\right\}.\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando esta desigualdad en la fórmula 4.23, concluimos que

$$nL_{K_N}^2 \leq \frac{1}{|K_N|^{2/n}}\cdot\frac{1}{|K_N|}\cdot\int_{K_N}|x|^2dx \tag{4.26}$$

$$\leq \frac{1}{|K_N|^{2/n}}\cdot\frac{1}{|K_N|}\frac{|K_N|}{(n+1)(n+2)}\max_{j=1,..,l}\left\{\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2+\left|\sum_{l=1}^{n}P_l^j\right|^2\right\} \tag{4.27}$$

$$= \frac{1}{|K_N|^{2/n}}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\max_{j=1,...,l}\left\{\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2+\left|\sum_{l=1}^{n}P_l^j\right|^2\right\} \tag{4.28}$$

$$\leq \frac{1}{|K_N|^{2/n}}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\max_{E,(\varepsilon_i)_{i=1}^N}\left\{\sum_{i\in E}|\varepsilon_iX_i|^2+\left|\sum_{i\in E}\varepsilon_iX_i\right|^2\right\} \tag{4.29}$$

con $E\subset\{1,...,N\}$ tal que $|E|=n$, y $\varepsilon_i=\pm1$. □

Para poder acotar $nL_{K_N}^2$ por una constante, vamos a encontrar cotas de estas expresiones. En las siguientes secciones acotaremos por debajo el volumen de K_N, y por arriba estos dos últimos sumatorios con probabilidad 1. Para ello, veremos antes una serie de herramientas de probabilidad.

4.4.2. Variables aleatorias Gaussianas

Vamos a dar una serie de Lemas probabilísticos que nos permitirán más adelante acotar L_{K_N} con probabilidad que tiende a 1 cuando la dimensión tiende a infinito. Estos resultados se centran en variables aleatorias Gaussianas.

Lema 4.4. *Para todo $t\geq 1$ se tiene que*

$$\frac{e^{-t^2/2}}{2t}\leq\int_t^\infty e^{-x^2/2}\leq\frac{2e^{-t^2/2}}{t}. \tag{4.30}$$

Por tanto, para todo $t\geq 1$, si g es una variable aleatoria gaussiana,

$$\frac{e^{-t^2/2}}{2\sqrt{2\pi}t}\leq\mathbb{P}(g\geq t)\leq\frac{2e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}t}. \tag{4.31}$$

Demostración. Definimos para $t\geq 1$,

$$\phi_1(t)=\frac{2e^{-t^2/2}}{t}-\int_t^\infty e^{-x^2/2},\quad \phi_2(t)=\int_t^\infty e^{-x^2/2}-\frac{e^{-t^2/2}}{2t}.$$

Derivando ambas expresiones, tenemos que para todo $t\geq 1$,

$$\phi_1'(t)=-\frac{2e^{-t^2/2}(t^2+1)}{t^2}+e^{-t^2/2}=-\frac{e^{t^2/2}(t^2+2)}{t^2}\leq 0$$

y

$$\phi_2'(t) = -e^{-t^2/2} + \frac{e^{-t^2/2}(t^2+1)}{2t^2} = -\frac{e^{-t^2/2}(t^2-1)}{2t^2} \leq 0.$$

Como además, $\lim_{t\to\infty}\phi_1(t) = \lim_{t\to\infty}\phi_2(t) = 0$, se tiene que $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son funciones positivas en $(1,+\infty)$. Por tanto, se tiene (4.30).

Para ver que se cumple (4.31), basta con multiplicar a los miembros de la desigualdad (4.30) el factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, y notar que

$$\mathbb{P}(g \geq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty e^{-x^2/2}dx$$

si $g \sim N(0,1)$. $\square$

Definición 4.1. Sea X una variable aleatoria real. Definimos la función $\Delta_X(\lambda)$ como

$$\Delta_X(\lambda) = \log\left|\mathbb{E}e^{\lambda X}\right|.$$

En los siguientes Lemas, vamos a caracterizar esta función en los casos en que $X = g$ o $X = g^2$, con g una variable aleatoria Gaussiana.

Lema 4.5. *Sean $X, X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes y idénticamente distribuídas en $\mathbb{R}$. Entonces, para todo $\alpha > 0$,*

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i > \alpha\right)\right| \leq \exp\left(-n\cdot\sup_{\lambda>0}\{\lambda\alpha - \Delta_X(\lambda)\}\right)$$

Demostración. Sea $\lambda > 0$ tal que $\Delta_X(\lambda) < \infty$. Entonces,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i > \alpha\right) = \mathbb{P}\left(\lambda\sum_{i=1}^n X_i > n\lambda\alpha\right) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda\sum_{i=1}^n X_i} > e^{n\lambda\alpha}\right).$$

Utilizando la desigualdad de Markov, se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i > \alpha\right) \leq e^{-n\lambda\alpha}\mathbb{E}\left[e^{\lambda\sum_{i=1}^n X_i}\right]$$

Como las X_i son independientes e idénticamente distribuidas,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i > \alpha\right) \leq e^{-n\lambda\alpha}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{\lambda X}\right] &= e^{-n\lambda\alpha}\left(\mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right]\right)^n \\ &= e^{-n\lambda\alpha}\left(e^{\Delta_X(\lambda)}\right)^n \\ &= e^{-n\lambda\alpha}e^{n\cdot\Delta_X(\lambda)} \\ &= e^{-n(\alpha\lambda - \Delta_X(\lambda))}\end{aligned}$$

Esta desigualdad se mantiene para cualquier $\lambda > 0$. Luego podemos optimizar esta cota tomando el λ que minimiza el exponente. Así,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i > \alpha\right) \leq \exp\left(-n\cdot\sup_{\lambda>0}\{\lambda\alpha - \Delta_X(\lambda)\}\right)$$

$\square$

Lema 4.6. *Sea g una variable aleatoria Gaussiana. Entonces,*

$$\Delta_g(\lambda) := \log \left|\mathbb{E}e^{\lambda g}\right| = \log \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{\lambda^2}{2}.$$

Demostración.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda^2/2} \cdot \frac{e^{-(x-\lambda)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Aplicamos el cambio de variables $u = x - \lambda$, y tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = e^{\lambda^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du = e^{\lambda^2/2}.$$

Tomando logaritmos a ambos miembros, se tiene que

$$\log \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \log e^{\lambda^2/2} = \lambda^2/2.$$

□

Corolario 4.1. *Sea g una variable aleatoria Gaussiana, y Δ_g definido como en el enunciado del Lema 4.6. Entonces, $\forall \alpha > 0$ se tiene que*

$$\sup_{\lambda>0}(\lambda\alpha - \Delta_g(\lambda)) = \sup_{\lambda>0}(\lambda\alpha - \lambda^2/2) = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Demostración. Definimos la función $f_\alpha(\lambda) = \lambda\alpha - \lambda^2/2$. Derivando f_α, se tiene que $f'_\alpha(\lambda) = 0$ si y sólo si $\lambda = \alpha$. Como $f''_\alpha(\lambda) < 0$, es claro que f_α alcanza su máximo en λ, con $f_\alpha(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}$. □

Lema 4.7. *Sea g una variable aleatoria Gaussiana. Entonces,*

$$\Delta_{g^2}(\lambda) = \log \left|Ee^{\lambda g^2}\right| = \log \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x^2} \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \begin{cases} \frac{-1}{2}\log(1-2\lambda) \ , \text{ si } \lambda < 1/2 \\ \\ \infty \ , \text{ si } \lambda \geq 1/2 \end{cases}$$

Demostración. Sea $\lambda \in (-\infty, 1/2)$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x^2} \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x\sqrt{1-2\lambda})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Aplicamos el cambio de variables $u = x\sqrt{1-2\lambda}$, y tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

Tomando logaritmos a ambos miembros, se tiene que

$$\log \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \log \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} = \frac{-1}{2}\log(1-2\lambda).$$

Si $\lambda \geq 1/2$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x^2} \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

diverge, y por tanto su logaritmo es $+\infty$. □

Corolario 4.2. *Sea g una variable aleatoria Gaussiana, y Δ_{g^2} como en el Lema* 4,7*. Entonces,* $\forall\alpha > 1$ *se tiene que*

$$\sup_{\lambda>0}(\lambda\alpha - \Delta_{g^2}(\lambda)) = \frac{\alpha-1}{2} - \frac{1}{2}\log(\alpha)$$

Demostración. Definimos la función $f_\alpha(\lambda) = \lambda\alpha - \frac{1}{2}\log(1-2\lambda)$. Derivando f_α, se tiene que $f'_\alpha(\lambda) = 0$ si y sólo si $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{-1}{2\alpha}$. Como $f''_\alpha(\frac{1}{2} - \frac{-1}{2\alpha}) < 0$, es claro que f_α alcanza su máximo en $\frac{1}{2} - \frac{-1}{2\alpha}$, con $f\alpha(\frac{1}{2} - \frac{-1}{2\alpha}) = \frac{\alpha-1}{2} - \frac{1}{2}\log(\alpha)$. □

4.4.3. Acotación del volumen de K_N

Estos Lemas en primer lugar nos van a permitir acotar por debajo el volumen de K_N, con probabilidad que tiende a 1 con la dimensión. En esta sección vamos a ver que si $n \to \infty$, entonces la probabilidad de que una bola de un cierto volumen esté contenida en K_N tiende a 1. Por tanto, el volumen de K_N será al menos el volumen de esa bola con probabilidad muy alta.

Proposición 4.4. *Sean $G_1,...,G_N$ vectores aleatorios gaussianos independientes en $\mathbb{R}^n$ con $N \geq C_1 n$ con C_1 constante absoluta. Si $K_N = conv\{\pm G_1,...,\pm G_N\}$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{4}{6}\log\left(\frac{N}{n}\right)}\cdot B_2^n \subset K_N\right) \geq 1 - e^{-n}.$$

Demostración. En primer lugar, veamos que K_N es simplicial. Es decir, con probabilidad 1 cada cara $(n-1)$-dimensional de K_N tiene n vértices. Sea $K_N = conv\{\pm G_1,...,\pm G_N\}$ y sean $F_1,...,F_l$ las caras de K_N, con cada $F_j = conv\{G^j_{i_1},...,G^j_{i_n}\}$, con cada $G^j_{i_k} \in \{\pm G_1,...,\pm G_N\}$. Entonces,

$$\mathbb{P}(K_N \text{ no simplicial}) \leq \sum_{j=1}^{l}\mathbb{P}(F_j \text{ contiene algún } \pm G_i \text{ distinto de los vértices de } F_j) = 0,$$

ya que la probabilidad de que una cara $F_j = conv\{G^j_{i_1},...,G^j_{i_n}\}$ contenga algún vértice de K_N distinto de $G^j_{i_1},...,G^j_{i_n}$ es 0. Por tanto, la probabilidad de que K_N sea simiplicial es 1.

Sea $\alpha > 0$. Si $\alpha B_2^n \not\subset K_N$, entonces existe una cara $F_j = conv\{G^j_{i_1},...,G^j_{i_n}\}$ de K_N y un vector $\theta_j \in S^{n-1}$ normal a la cara, tal que para todo $G_k \in \{\pm G_1,...,\pm G_N\}$ tal que $G_k \notin \{\pm G^j_{i_1},...,\pm G^j_{i_n}\}$,

$$|\langle G_k, \theta_j\rangle| \leq \alpha.$$

Siendo θ_j el vector normal a la cara F_j, esto se cumple por la convexidad de K_N. Entonces,

$$\mathbb{P}(\alpha B_2^n \not\subset K_N) \leq \binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(|\langle G_k, \theta_j\rangle| \leq \alpha\right)^{N-n} = \binom{2N}{n}\mathbb{P}(|g| \leq \alpha)^{N-n} \tag{4.32}$$

con g un variable aleatoria Gaussiana, ya que si G es un vector aleatorio Gaussiano en $\mathbb{R}^n$ y $\theta \in S^{n-1}$, entonces $\langle G, \theta\rangle \sim N(0,1)$. Vamos a acotar esta última expresión. Aplicando el Lema 4.4,

$$\mathbb{P}(|g| \geq \alpha) = 2\mathbb{P}(g \geq \alpha) \geq \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{2\pi}\alpha} = e^{-\left(\alpha^2/2 + \log(\alpha) + \frac{1}{2}\log(2\pi).\right)}$$

Es claro que $\alpha^2/4 >> \log(\alpha) + \frac{1}{2}\log(2\pi)$ si $\alpha \to \infty$. Por tanto, existe un C_0 tal que si $\alpha > C_0$, entonces,

$$\mathbb{P}(|g| \geq \alpha) \geq e^{-\frac{3\alpha^2}{4}}.$$

Así, tenemos que

$$\binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(|g|\leq\alpha\right)^{N-n}\leq\binom{2N}{n}\left(1-e^{-\frac{3\alpha^2}{4}}\right)^{N-n}$$

Utilizamos la desigualdad $1+x\leq e^x$, para todo $x\in\mathbb{R}$, y se tiene que

$$\binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(|g|\leq\alpha\right)^{N-n}\leq\binom{2N}{n}\exp\left(-(N-n)e^{-\frac{3\alpha^2}{4}}\right).$$

Acotamos el número combinatorio de $2N$ sobre n como

$$\binom{2N}{n}=\frac{(2N)(2N-1)\cdots(2N-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}\leq\frac{(2N)^n}{n!}\leq\left(\frac{2Ne}{n}\right)^n. \tag{4.33}$$

En la última desigualdad hemos utilizado que

$$e^n=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\geq\frac{n^n}{n!}\implies\frac{1}{n!}\leq\frac{e^n}{n^n}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(|g|\leq\alpha\right)^{N-n}&\leq\left(\frac{2Ne}{n}\right)^n\exp\left(-(N-n)e^{-\frac{3\alpha^2}{4}}\right)\\&=\exp\left[-n\left(\left(\frac{N}{n}-1\right)e^{-\frac{3\alpha^2}{4}}-\log\left(2\frac{N}{n}e\right)\right)\right]\\&=\exp\left[-n\log\left(2\frac{N}{n}e\right)\left(\frac{\left(\frac{N}{n}-1\right)e^{-\frac{3\alpha^2}{4}}}{\log\left(2\frac{N}{n}e\right)}-1\right)\right].\end{aligned}$$

Si tomo $\alpha=\sqrt{\frac{4}{6}\log\left(\frac{N}{n}\right)}$, entonces

$$\binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(|g|\leq\alpha\right)^{N-n}\leq\exp\left[-n\log\left(2\frac{N}{n}e\right)\left(\frac{\left(\frac{N}{n}-1\right)}{\sqrt{\frac{N}{n}}\log\left(2\frac{N}{n}e\right)}-1\right)\right].$$

Notar que

$$\lim_{n\to\infty}\log(2xe)\left[\frac{x-1}{\sqrt{x}\log(2xe)}-1\right]=\infty.$$

Por tanto, existe algún $C_1>0$ tal que si $x=N/n\geq C_1$,

$$\binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(|g|\leq\alpha\right)^{N-n}\leq e^{-n}.$$

Por tanto, la probabilidad de que una bola de radio $\alpha=\sqrt{\frac{4}{6}\log\left(\frac{N}{n}\right)}$ no esté contenida en K_N, si $N\geq C_1\cdot n$ para alguna constante absoluta C_1, es menor o igual que e^{-n}. Así,

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{4}{6}\log\left(\frac{N}{n}\right)}\cdot B_2^n\subset K_N\right)\geq 1-e^{-n}$$

Luego,

$$\mathbb{P}\left(|K_N|^{1/n}\geq\frac{c\sqrt{\log\left(\frac{N}{n}\right)}}{\sqrt{n}}\right)\geq 1-e^{-n} \tag{4.34}$$

para alguna constante absoluta c. □

En las siguientes subsecciones nos dedicaremos a acotar los sumatorios de la desigualdad 4.26.

4.4.4. Acotación de $\sum_{l=1}^{n}\left|P_l^j\right|^2$

Lema 4.8. *Sea $G=(g_1,\ldots,g_n)$ un vector Gaussiano en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $\alpha>1$,*

$$\mathbb{P}\left(|G|^2\geq \alpha n\right)\leq e^{-n\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}\log\alpha\right)}.$$

Demostración. Dado $\alpha>1$,

$$\mathbb{P}\left(|G|^2\geq \alpha n\right)=\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}g_i^2\geq \alpha n\right)=\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g_i^2\geq \alpha\right).$$

Utilizando el Lema 4,5 con $X_i=g_i$, se tiene que

$$\mathbb{P}\left(|G|^2\geq \alpha n\right)\leq \exp\left(-n\cdot\sup_{\lambda>0}\{\lambda\alpha-\Delta_{g^2}(\lambda)\}\right).$$

Finalmente, por el Corolario del Lema 4,7,

$$\mathbb{P}\left(|G|^2\geq \alpha n\right)\leq \exp\left(-n\cdot\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}\log(\alpha)\right)\right).$$

□

Proposición 4.5. *Sea $G_1,\ldots,G_N$ vectores Gaussianos independientes en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $\alpha>1$,*

$$\mathbb{P}\left(\max_{E,(\varepsilon_j)_{j=1}^N}\left\{\sum_{i\in E}|\varepsilon_i G_i|^2\right\}\geq \alpha n^2\right)\leq \exp\left[-n^2\cdot\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}\log(\alpha)\right)-n\log\left(\frac{2eN}{n}\right)\right]$$

con $E\subset\{1,\ldots,N\}$ tal que $|E|=n$, y $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N=\pm1$.

Demostración. Es claro que el suceso $\left\{\max_{E,(\varepsilon_j)_{j=1}^N}\left\{\sum_{i\in E}|\varepsilon_i G_i|^2\right\}\geq \alpha n^2\right\}$ es igual a la unión de sucesos de la forma $\left\{\sum_{i\in E}|\varepsilon_i G_i|^2\geq \alpha n^2 \text{ , para algún E}\right\}$ con $|E|=n$, y $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N=\pm1$. Por tanto, como las G_i son independientes e idénticamente distribuídas,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{E(\varepsilon_j)_{j=1}^N}\left\{\sum_{i\in E}|\varepsilon_i G_i|^2\right\}\geq \alpha n^2\right)&\leq\binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}|G_i|^2\geq \alpha n^2\right)\\&=\binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{i,j}^2\geq \alpha n^2\right)\\&=\binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{i,j}^2\geq \alpha\right)\end{aligned}$$

Con las $g_{i,j}$ variables aleatorias Gaussianas independientes. Aplicando el Lema 4,5 es claro que

$$\binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{i,j}^2\geq \alpha\right)\leq\binom{2N}{n}\exp\left(-n^2\cdot\sup_{\lambda>0}\{\lambda\alpha-\Delta_{g^2}(\lambda).\}\right)$$

con $g\sim N(0,1)$. Y, por el Corolario del Lema 4,7, se tiene que

$$\sup_{\lambda>0}\{\lambda\alpha-\Delta_{g^2}(\lambda)\}=\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}\log(\alpha).$$

Así, se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_E\left\{\sum_{i\in E}|\varepsilon_i G_i|^2\right\}\geq \alpha n^2\right) &\leq \binom{2N}{n}\exp\left(-n^2\cdot\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}\log(\alpha)\right)\right)\\ &\leq \left(\frac{2Ne}{n}\right)^n\exp\left(-n^2\cdot\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}\log(\alpha)\right)\right)\\ &= \exp\left(n\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)-n^2\cdot\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}\log(\alpha)\right)\right).\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = 2$, se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\max_E\left\{\sum_{i\in E}|\varepsilon_i G_i|^2\right\}\leq 2n^2\right) > 1-\exp\left(n\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)-n^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log(2)\right)\right) \tag{4.35}$$

$$> 1-e^{-cn^2} \tag{4.36}$$

para alguna constante absoluta $c > 0$. □

4.4.5. Acotación de $\left|\sum_{l=1}^n P_l^j\right|^2$

El argumento que vamos a utilizar en esta sección para acotar $\left|\sum_{l=1}^n P_l^j\right|^2$ es el que se ha utilizado para hacer acotaciones similares en el caso de otro tipo de politopos aleatorios, no necesariamente con distribución Gaussiana.

Observación. Como K_N es un polítopo gaussiano, podemos utilizar las propiedades de esta distribución para hallar una cota. Sean $G, G_1, \ldots, G_n$ vectores gaussianos independientes en $\mathbb{R}^n$. Por simetría,

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i G_i \sim \sum_{i=1}^n G_i \sim \sqrt{n}G.$$

Razonando como en la sección anterior, sea $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{E,(\varepsilon_j)_{j=1}^N}\left\{\left|\sum_{i\in E}\varepsilon_i G_i\right|^2\right\} > \alpha n^2\right) &\leq \binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n G_i\right|^2 > \alpha n^2\right)\\ &= \binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(\left|\sqrt{n}G\right|^2 > \alpha n^2\right)\\ &= \binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(|G|^2 > \alpha n\right).\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 4.8,

$$\begin{aligned}\binom{2N}{n}\mathbb{P}\left(|G|^2 > \alpha n\right) &\leq \binom{2N}{n}\exp\left[-n\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}\log(\alpha)\right)\right]\\ &= \exp\left[-n\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}\log(\alpha)-\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)\right)\right],\end{aligned}$$

utilizando la desigualdad (4.33). Si tomamos $\alpha = 4\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)-1}{2}-\frac{1}{2}\log\left(4\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)\right)-\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)\right) = +\infty.$$

Por lo tanto, existe una constante absoluta $C_1 > 0$ tal que

$$\exp\left[-n\left(\frac{4\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)-1}{2}-\frac{1}{2}\log\left(4\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)\right)-\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)\right)\right]\leq e^{-nC_1}.$$

Así, podemos concluir que

$$\mathbb{P}\left(\max_E\left\{\left|\sum_{i\in E}\varepsilon_i G_i\right|^2\right\}\leq 4\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)n^2\right)>1-e^{-nC_1}.$$

Con esto podemos asegurar que si $n\to\infty$, entonces $\left|\sum_{l=1}^{n}P_l^j\right|^2\leq 4\log\left(\frac{2Ne}{n}\right)n^2$ con probabilidad que tiende a 1.

Ahora, vamos a demostrar este mismo resultado siguiendo el argumento que se usa cuando no se trata necesariamente de una distribución normal, ya que se trata de un argumento de interés.

Lema 4.9. *Sea $\theta\in S^{n-1}$, y $G_1,\ldots,G_n$ vectores aleatorios Gaussianos independientes en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $\alpha>0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}G_i,\theta\right\rangle\right|>\alpha n\right)\leq 2e^{-n\frac{\alpha^2}{2}}$$

Demostración. Por invarianza rotacional de la distribución Gaussiana, se tiene que para todo $\alpha>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}G_i,\theta\right\rangle\right|>\alpha n\right)&=\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}g_i\right|>\alpha n\right)\\&=\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}g_i>\alpha n\right)+\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}g_i<-\alpha n\right)\\&=2\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}g_i>\alpha n\right)\\&=2\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g_i>\alpha n\right).\end{aligned}$$

Utilizando el Lema 4,5, se tiene que

$$2\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g_i>\alpha n\right)\leq 2\exp\left(-n\cdot\sup_{\lambda>0}\{\lambda\alpha-\Delta_g(\lambda)\}\right).$$

Finalmente, mediante el Corolario del Lema 4,6 se sigue que

$$2\exp\left(-n\cdot\sup_{\lambda>0}\{\lambda\alpha-\Delta_g(\lambda)\}\right)\leq 2e^{-n\frac{\alpha^2}{2}}.$$

□

Lema 4.10. *Sean $G_1,\ldots,G_n$ vectores Gaussianos independientes en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $\alpha>0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}G_i\right|>\alpha n\right)\leq e^{-n\left(\frac{\alpha^2}{2}-\log 5\right)}.$$

Demostración. Veamos que podemos construir una $\varepsilon-$red de cardinal $\leq 5^n$, de S^{n-1} con $\varepsilon = \frac{1}{2}$ para aproximar los vectores de la esfera. Es decir, veamos que podemos construir $\mathscr{N}$ con $\mathscr{N} \subset S^{n-1}$ y $|\mathscr{N}| \leq 5^n$, tal que $\forall u \in S^{n-1}$ existe un $\theta \in \mathscr{N}$ tal que $|\theta - u| \leq \frac{1}{2}$. El algoritmo para construirla es el siguiente

- Tomamos $\theta_1 \in S^{n-1}$
- Tomamos $\theta_2 \in S^{n-1}$ tal que $|\theta_1 - \theta_2| > \frac{1}{2}$
- Tomamos $\theta_3 \in S^{n-1}$ tal que $|\theta_1 - \theta_3| > \frac{1}{2}$, $|\theta_2 - \theta_3| > \frac{1}{2}$
- En el la iteración k, tomamos un $\theta_k \in S^{n-1}$ tal que $|\theta_1 - \theta_k| > \frac{1}{2}$,...,$|\theta_{k-1} - \theta_k| > \frac{1}{2}$

Este proceso se repite hasta que no se pueda encontrar ningún $\theta_{N+1} \in S^{n-1}$ tal que $\forall i = 1,\ldots,N$ se tenga que $|\theta_i - \theta_{N+1}| > \frac{1}{2}$. Como S^{n-1} es compacto, es claro que existe un θ_N que cumple esta propiedad. Por tanto, $\mathscr{N} = \{\theta_1,\ldots,\theta_N\}$ cumple que $\forall u \in S^{n-1}$, existe un $\theta_i \in \mathscr{N}$ con $|\theta_i - u| \leq \frac{1}{2}$.

Como $|\theta_i - \theta_j| > \frac{1}{2}$, para todo $\theta_i, \theta_j \in \mathscr{N}$ con $\theta_i \neq \theta_j$, es claro que $\mathbb{B}(\theta_i, \frac{1}{4}) \cap \mathbb{B}(\theta_j, \frac{1}{4}) = \emptyset$, si $i \neq j$. Así, se tiene que

$$\left|S^{n-1} + \frac{1}{4}B_2^n\right| \geq \left|\mathscr{N} + \frac{1}{4}B_2^n\right| = \left|\bigcup_{\theta\in\mathscr{N}} \mathscr{B}(\theta, \frac{1}{4})\right| = |\mathscr{N}| \cdot \frac{1}{4^n}\,|B_2^n|.$$

Por otro lado,

$$\left|S^{n-1} + \frac{1}{4}B_2^n\right| \leq \left|B_2^n + \frac{1}{4}B_2^n\right| \geq = \left|\frac{5}{4}B_2^n\right| = \frac{5^n}{4^n}\,|B_2^n|.$$

Así, con estas dos desigualdades se tiene que

$$|\mathscr{N}| \cdot \frac{1}{4^n}\,|B_2^n| \leq \left|S^{n-1} + \frac{1}{4}B_2^n\right| \leq \frac{5^n}{4^n}\,|B_2^n|.$$

Por tanto, $5^n \geq |\mathscr{N}|$.

Veamos que $\forall u \in S^{n-1}$, existe una sucesión $(\theta_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{N}$ con una sucesión asociada de eslacares $(s_j)_{j=1}^{\infty}$ con $0 \leq s_j \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$, tales que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} s_j \theta_j.$$

Dado $u \in S^{n-1}$, existe $\theta_1 \in \mathscr{N}$ con $|u - \theta_1| \leq \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$u = \theta_1 + z_1$$

para algún z_1 con $|z_1| < \frac{1}{2}$. Si $z_1 = 0$, ya está probado.

En caso contrario, $z_1/|z_1| \in S^{n-1}$, luego existe $\theta_2 \in \mathscr{N}$ con $|z_1/|z_1| - \theta_1| \leq \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\frac{z_1}{|z_1|} = \theta_2 + z_2$$

para algún z_2 con $|z_2| < \frac{1}{2}$. Si $z_2 = 0$, se tiene que

$$u = \theta_1 + |z_1|\theta_2,$$

luego el resultado está probado.

En caso contrario, $\frac{z_1|z_1|}{|z_2||z_1|} \in S^{n-1}$, luego existe un $\theta_3 \in \mathscr{N}$ con $\left|\frac{z_1|z_1|}{|z_2||z_1|} - \theta_1\right| \leq \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\frac{z_1|z_1|}{|z_2||z_1|} = \theta_3 + z_3$$

para algún z_3 con $|z_3| < \frac{1}{2}$.

Procediendo de este modo, podemos representar u como

$$u = \theta_1 + |z_1|\theta_2 + |z_1||z_2|\theta_3 + |z_1||z_2||z_3|\theta_4 + ...$$

con todo los $\theta_j \in \mathscr{N}$, y el coeficiente que multiplica a cada θ_j es $|z_1||z_2|\cdots|z_{j-1}| < \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$.

Con este resultado, si se cumple que $\forall\theta \in \mathscr{N}$,

$$\left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} G_i, \theta \right\rangle\right| \leq \alpha n,$$

entonces se tiene que $\forall u \in S^{n-1}$, descomponiendo u en suma de $\theta_j \in \mathscr{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} G_i, u \right\rangle\right| = \left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} G_i, \sum_{j=1}^{\infty} s_j\theta_j \right\rangle\right| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} s_j \left\langle \sum_{i=1}^{n} G_i, \theta_j \right\rangle\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j \cdot \left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} G_i, \theta_j \right\rangle\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j \alpha n \\
&< \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} \alpha n = 2\alpha n.
\end{aligned}$$

Por tanto, aplicando este último resultado, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} G_i, \theta\right| > 2\alpha n\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{u\in S}\left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} G_i, u \right\rangle\right| > 2\alpha n\right) \\
&\leq 5^n \mathbb{P}\left(\left\langle \sum_{i=1}^{n} G_i, \theta \right\rangle > \alpha n\right).
\end{aligned}$$

Con el Lema 4,9, concluimos que

$$5^n \mathbb{P}\left(\left\langle \sum_{i=1}^{n} G_i, \theta \right\rangle > \alpha n\right) \leq 5^n 2 e^{-n\frac{\alpha^2}{2}} = 2e^{-n\left(\frac{\alpha^2}{2} - \log 5\right)}.$$

□

Lema 4.11. *Sean $G_1, ..., G_N$ vectores Gaussianos independientes en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para todo $\alpha > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\max_{E,(\varepsilon_j)_{j=1}^{N}} \left\{\left|\sum_{i\in E} \varepsilon_i G_i\right|\right\} \leq 2\alpha n\right) > 2e^{-n\left(\frac{\alpha^2}{2} - \log\left(\frac{10N}{n}\right)\right)}.$$

con $E \subset \{1, ..., N\}$ tal que $|E| = n$, y $\varepsilon_i = \pm 1$.

Demostración. Es claro que el suceso $\left\{ \max_{E,(\varepsilon_j)_{j=1}^N} \left\{ \left| \sum_{i\in E} \varepsilon_i G_i \right| \right\} \geq 2\alpha n \right\}$ es igual a la unión de sucesos de la forma $\left\{ \left| \sum_{i\in E} \varepsilon_i G_i \right| \geq 2\alpha n \text{ ,para algún E} \right\}$ con $|E| = n$, y $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N = \pm 1$. Por tanto, como las G_i son idénticamente distribuídas,

$$\mathbb{P}\left(\max_E \left\{ \left| \sum_{i\in E} \varepsilon_i G_i \right| \right\} \geq 2\alpha n \right) \leq \binom{2N}{n} \mathbb{P}\left(\left| \sum_{i=1}^n G_i \right| \geq 2\alpha n \right).$$

Utilizamos el Lema 4,10 y la desigualdad

$$\binom{2N}{n} \leq \left(\frac{2Ne}{n} \right)^n,$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} \binom{2N}{n} \mathbb{P}\left(\left| \sum_{i=1}^n G_i \right| \geq 2\alpha n \right) &\leq \left(\frac{2Ne}{n} \right)^n 2e^{-n\left(\frac{\alpha^2}{2} - \log 5\right)} \\ &= 2e^{-n\left(\frac{\alpha^2}{2} - \log\left(\frac{10Ne}{n}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Tomamos $\alpha = 2\sqrt{\log\left(\frac{10Ne}{n}\right)}$, y se sigue

$$\mathbb{P}\left(\max_E \left\{ \left| \sum_{i\in E} \varepsilon_i G_i \right| \right\} > 4n\sqrt{\log\left(\frac{10Ne}{n}\right)} \right) \leq 2e^{-n\log\left(\frac{10Ne}{n}\right)}, \tag{4.37}$$

si $N \in \left[c_1 n, \frac{n}{2e} e^{c_2 n}\right]$ para constantes absolutas $c_1, c_2 > 0$. □

Retomando la desigualdad 4,26, se tenía que

$$nL_{K_N}^2 \leq \frac{1}{|K_N|^{2/n}} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \max_{j=1,..,l} \left\{ \sum_{l=1}^n \left| P_l^j \right|^2 + \left| \sum_{l=1}^n P_l^j \right|^2 \right\}.$$

Con los resultados 4.34, 4.35 y 4.37, podemos concluír que con probabilidad mayor o igual a

$$1 - e^{-n} - e^{-cn^2} - 2e^{-n\log\left(\frac{10Ne}{n}\right)} \geq 1 - c_3 e^{-n}$$

para alguna constante absoluta c_3, se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|K_N|^{2/n}} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \max_{j=1,..,l} \left\{ \sum_{l=1}^n \left| P_l^j \right|^2 + \left| \sum_{l=1}^n P_l^j \right|^2 \right\} \\ &\leq \frac{1}{C\log\left(\frac{N}{n}\right)} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(2n^2 + 16n^2 \log\left(\frac{10Ne}{n}\right) \right) \leq cn \end{aligned}$$

para alguna constante absoluta c. Por tanto, se tiene que

$$L_K^2 \leq c$$

para alguna constante absoluta c.

Observación. De la misma forma en que Klartag y Kozma consiguieron acotar la constante de isotropía de polítopos gaussianos, en los últimos años se ha intentado hacer lo mismo con polítopos generados por otras variables aleatorias. Una muestra de ello son los siguientes resultados.

- En el artículo [2], se demostró que la constante de isotropía de polítopos aleatorios generados por puntos uniformemente distrubuidos sobre la esfera está acotado con probabilidad alta.
- En el artículo [11], se demostró que que la constante de isotropía de politopos aleatorios generados por puntos unifomemente distribuidos en un cuerpo incondicional está acotada con una probabilidad alta
- En el artículo [18], se demostró que la constante de isotropía de politopos aleatorios generados por puntos distribuidos en la esfera de un cuerpo incondicional según la medida cono está acotada con probabilidad alta, extendiendo así el resultado de la esfera.
- En los artículos [3] y [12], se demostró de forma simultánea e independiente una acotación con probabilidad alta para la constante de isotropía de politopos generados por puntos unifomemente distribuidos en un cuerpo convexo.

Bibliografía

[1] ALONSO-GUTIÉRREZ, D, A remark on the isotropy constant of polytopes, *Proceedings of the AMS* **139** (2011), no 7. 2565-2569.

[2] ALONSO-GUTIÉRREZ, D, On the isotropy constant of random convex sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), no. 9, 3293–3300.

[3] ALONSO-GUTIÉRREZ, D; LITVAK, A. E; TOMCZAK-JAEGERMANN, N, On the isotropic constant of random polytopes, *J. Geom. Anal.* **26** (2016), no. 1, 645–662.

[4] BALL, K, Logarithmically concave functions and sections of convex sets in $\mathbb{R}^n$, *Stud. Math.* **88** (1), 69–84 (1988)

[5] BALL, K; CARLEN, E. A; LIEB, E. H, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms, *Invent. Math.* **115**, 1 (1994), 463-482.

[6] BASTERO, J; BERNUÉS, J; ROMANCE, M, From John to Gauss-John positions via dual mixed volumes, *2000 Mathematics Subject Classification* , (2001)-1793.

[7] BRAZITIKOS, S; GIANNOPOULOS, A; VALETTAS, P; VRITSIOU, B-H, Geometry of Isotropic Convex Bodies, *Mathematical surveys and monographs* , (2010), 105–107.

[8] BOURGAIN, J, On the distribution of polynomials on high-dimensional convex sets., *Springer Lecture Notes in Math* **1469** (1991), 127-137.

[9] CHEN, Y. An Almost Constant Lower Bound of the Isoperimetric Coefficient in the KLS Conjecture. Aceptado en *geom. Funct. Anal.*

[10] CLARKSON, J, Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **40** (1936), 396-414.

[11] DAFNIS, N; GIANNOPOULOS, A; GUÉDON, O, On the isotropic constant of random polytopes, *Adv. Geom.* **10** (2010), no. 2, 311–322.

[12] GIANNOPOULOS, A; HIONI, L; TSOLOMITIS, A, Asymptotic shape of the convex hull of isotropic log-concave random vectors, *Adv. in Appl. Math.* **75** (2016), 116–143.

[13] JOHN, F. "Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions", *en Studies and Essays presented to R. Courant on his 60th Birthday, Nueva York: Interscience Publishers,* (1948), 187–204.

[14] KLARTAG, B, On convex perturbations with a bounded isotropic constant, *Geom. Funct. Anal.* **16** vol.6 (2006), 1274-1290.

[15] KLARTAG, B; KOZMA, G, On the hyperplane conjecture for random convex sets, *Israel J. Math* **170** (2009), 253–268.

[16] KLARTAG, B; MILMAN, E, On volume distributions on 2-convex bodies, *Israel J. Math* 164 (2008), 2275-2293

[17] LOOMIS, L-H; WHITNEY, H, An inequality related to the isoperimetric inequality, *Bulletin of the AMS 55* , (1949), no 10, 961-962.

[18] PROCHNO, J; THÄLE, C; TURCHI, N, The isotropic constant of random polytopes with vertices on convex surfaces, *J. Complexity* **54** (2019), 101394.