

<p>TRABAJO DE FIN DE GRADO</p> <p>ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS</p>
--

**ESTUDIO DE MERCADOS FINANCIEROS:
EVOLUCIÓN Y RIESGO**

Autor

JAVIER GÜELL CARDEÑOSA.

Directores

PILAR GARGALLO VALERO
JESÚS MIGUEL ALVAREZ

Facultad de Economía y Empresa

2020/21

RESUMEN

En la actualidad, vivimos en un mundo en el que los mercados financieros juegan un papel fundamental dentro de la economía mundial. Dichos mercados han ido cobrando gran relevancia a la par que han ido creciendo tanto en volumen como en presencia, desde los activos más tradicionales, como las divisas, bonos o letras del tesoro, o incluso el novedoso mercado de las criptomonedas.

Todos los activos anteriormente nombrados tienen un elemento en común, y es que ninguno se escapa a la volatilidad y los riesgos que esta trae consigo. Con el propósito de observar el comportamiento de dicha volatilidad de los activos financieros, el campo de estadística/econometría nos ha permitido desde hace mucho tiempo desarrollar una serie de métodos que la modelizan. El mercado financiero con mayor volumen del mundo es el mercado de divisas, también conocido como FOREX (Foreign Exchange), donde encontramos el dólar (USD), el euro (EUR) y el yen japonés (JPY) entre las divisas más importantes y con las que vamos a trabajar.

El objetivo principal del presente trabajo es analizar la volatilidad de los pares de divisas comentadas en el anterior párrafo y cómo esta afecta a las posibles predicciones de sus precios. Estudiaremos también los modelos teóricos ARMA, ARCH y GARCH.

En los últimos apartados se realizará un análisis empírico sobre dos series financieras en el programa R commander analizando los modelos ARMA para intentar explicar la rentabilidad, así como los modelos GARCH para modelizar la volatilidad de estas divisas. Por último, se obtendrán unas conclusiones sobre los modelos identificados y desarrollados, y los resultados obtenidos a lo largo del trabajo

Palabras clave: *Tipo de cambio, FOREX, Modelos heterocedásticos, Predicción de series temporales, VaR*

ABSTRACT

Nowadays, we live in a world in which financial markets have been gaining great relevance and growing both in volume and in presence within the world economy, from the most traditional assets such as currencies, stocks, bonds or treasury bills to the “new” Cryptocurrency market that is booming in terms of volume and popularity within the financial markets despite its volatility and risk, as it is not regulated by any organization. But there is something common in all the financial assets that we find in these markets and that is that none escapes volatility and its risks.

In order to work with this volatility, the field of econometrics has long allowed us to develop methods that model the volatility of these assets that are available in the financial markets.

In this paper we are going to focus on the financial market with the largest volume in the world, such as the foreign exchange market also known as FOREX (FOREign EXchange), focused on 3 of the most important currencies such as the Dollar (USD) the Euro (EUR) and the Japanese yen (JPY).

The objective of this work is to analyze the volatility of the currency pairs mentioned in the previous paragraph and how it affects the possible predictions in their prices. For this we will make use of the ARMA-GARCH models, a family of models developed by Engel, and especially the GARCH (p, q) model within the GARCH models that Bollerslev put into practice later and that have their advantages and disadvantages that We will see throughout the work.

In the last sections, an empirical analysis of two financial series in the R commander program will be commented, analyzing the ARMA models to try explaining the return, as well as the GARCH models in order to adjust the volatility of these currencies. Finally, some conclusions will be obtained on the models identified and developed, and the results obtained throughout the work.

Keywords: *Exchange rate, FOREX, Heteroscedastic models, Time series prediction, VaR*

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	5
1.1 MERCADOS FINANCIEROS.....	5
1.2 TIPO DE CAMBIO.....	7
2. MODELOS TEÓRICOS.....	8
2.1 MODELOS ARMA.....	8
2.2 MODELOS ARCH.....	9
2.2.1 ARCH (1).....	11
2.3 MODELOS GARCH.....	12
3. APLICACIÓN EMPÍRICA.....	13
3.1 MODELIZACIÓN ARMA DE LA RENTABILIDAD.....	16
3.2 MODELIZACIÓN ARMA-GARCH DE LA RENTABILIDAD.....	23
3.3 ANALISIS PREDICTIVO.....	31
4. CONCLUSIONES.....	33
5. BIBLIOGRAFÍA.....	35

1. Introducción

1.1. Mercados financieros

A pesar de lo presente que están en nuestras vidas y lo relevantes que son los mercados financieros en el siglo XXI, es difícil establecer el momento exacto de la historia en el que surgieron estos mercados. Algunos historiadores apuntan a que pudieron surgir en la Antigua Mesopotamia donde los primeros “operadores” o “traders” apuntaban en tablas de arcilla las operaciones que llevaban a cabo. En el siglo VII apareció en Asia menor la primera moneda de la historia que era una mezcla de oro y plata conocida como Electrum, que daría lugar más tarde al desarrollo de todas las divisas que existen en el mundo actualmente, y con ellas el comercio más similar al que conocemos a día de hoy.

Como definición teórica podemos decir que un mercado financiero es un espacio físico o virtual donde se intercambian instrumentos financieros a unos precios que se encuentran definidos por la ley de oferta y demanda.

Aunque existen distintos tipos de mercados financieros en base a los activos que se negocian en ellos, podemos fijar una serie de características comunes que indican una mayor eficiencia si cumplen estas condiciones:

- **Amplitud:** Es el número de productos financieros que se pueden intercambiar. Cuanto mayor es el número de productos mayor amplitud tiene el mercado.
- **Profundidad:** Mide la cantidad de órdenes de compra y de venta que se encuentran pendientes de ejecución. Cuanto mayor es el número de órdenes más profundo es el mercado, lo que mide a su vez la liquidez del mismo.
- **Libertad:** No deben existir restricciones para el intercambio de los productos, cualquiera con la cantidad de dinero necesaria debe poder entrar en el mercado, aunque sea mediante un intermediario financiero.
- **Flexibilidad.** En todo momento los precios reflejan las variaciones que se producen fruto de la ley de la oferta y la demanda. Decimos que un mercado es flexible cuando ofrece facilidad para la reacción de los agentes ante cambios en los precios.

- **Transparencia.** Los compradores y vendedores conocen toda la información y los factores que afectan al activo o deben poder conocerla. El uso de información privilegiada con ánimo de lucro es un tema que las autoridades persiguen.

Una vez definidas las principales características de los mercados financieros, cabe destacar que cada uno de ellos tiene diferentes condiciones. Entre los mercados financieros más importantes encontramos: Mercado de Materias Primas, Mercado de Capitales, Mercado de Derivados y el Mercado de Divisas o FOREX.

El mercado de Materias Primas también conocido como de “Commodities”, operaba inicialmente con las principales materias primas como el algodón, el azúcar, la soja, el oro... Y destacaba por el gran volumen de operaciones en futuros donde se fijaba un precio para estas materias en ventas y compras a realizar en meses posteriores.

Por su parte, el Mercado de Capitales, es el más famoso para los inversores particulares. Tiene dos grandes vertientes que son las acciones y los bonos, este último muy importante en EEUU, en los cuales se puede invertir en las grandes y pequeñas compañías cotizadas. Por ejemplo, en España podríamos invertir en Telefónica, Inditex, Santander...

El Mercado de Derivados, que es utilizado especialmente por los grandes fondos de inversión e instituciones, invierte en los diferentes instrumentos financieros especialmente relacionados con la deuda de los estados, etc...

Por último y sobre el que centraremos nuestro trabajo, encontramos el Mercado de Divisas también conocido como FOREX (Foreign Exchange), es el mercado financiero en el que se intercambian las divisas más importantes del mundo y donde se pueden llevar a cabo operaciones de distintos tipos: spot, swap, pares, futuros...

Este mercado es el que tiene más volumen de todos los mercados financieros y es que a diferencia de otros mercados como el de valores, no dispone de un horario para operar sino que se encuentra abierto las 24 horas del día.

1.2. Tipos de cambio

Si realizamos una revisión histórica rápida, el origen del tipo de cambio entre las distintas divisas tiene lugar en el año 1944, momento en el que 44 países de todo el mundo firmaron el Tratado de Bretton Woods. Dicho tratado daba lugar a la creación de organizaciones como el Fondo Monetario Internacional (FMI), cuyo principal objetivo era definir un sistema mundial de tipo de cambio fijo entre las distintas divisas que existían. En aquel momento, la cotización estaba ligada al patrón oro que equivalía a 35\$ por onza, mientras las demás divisas estaban ligadas a la moneda norteamericana.

No fue hasta 1971 cuando se produjo el cambio del modelo de tipo de cambio fijo, dando lugar a nuevos tipos de cambio, como el flexible, que pasaba a estar regulado por otras fuerzas como la oferta y la demanda, dejando al Banco central como un agente pasivo; o el tipo flexible dirigido, en el que el Banco Central interviene de forma activa para mantener los precios en una franja (entre un techo y un suelo). Se puede decir que en 1971 se produjo el final y para algunos el derrumbe del Tratado de Bretton Woods.

No obstante, a pesar de que Bretton Woods no perdurara como tratado, dejó como legado la creación de importantes organismos internacionales que continúan a día de hoy como el FMI, el Acuerdo General sobre Aranceles Aduaneros y Comercio, GATT, por sus siglas en inglés, y otras organizaciones que se encuentran ahora en el seno del Banco Mundial.

Actualmente, el mercado de divisas conocido también como FOREX (FOREign EXchange) es el mercado financiero mundial con mayor volumen. Según el Banco Internacional de Pagos, este alcanzó un volumen diario de más de 6,6 billones de dólares en el año 2019. Y es que este mercado ofrece desde operaciones con tipos spot (precio del momento) como operaciones con futuros que los inversores utilizan a menudo.

Dada la gran importancia de este mercado, se han elegido tres de las que se consideran las divisas más importantes como son el Dólar, Euro y el Yen japonés para estudiar la

evolución de rentabilidad y la volatilidad de estos pares de divisas a lo largo de los últimos diez años.

2. Modelos teóricos

2.1. Modelos ARMA

Los modelos ARMA (AutoRegressive Moving Average) también conocidos como modelos Box-Jenkins por la metodología en que se basan, son modelos que se utilizan con series temporales y que se caracterizan por que sus variables independientes tienen tendencias estocásticas y el término error es estacionario. Para simplificarlo un poco, estos modelos integran en sus regresiones la autocorrelación y la media móvil. El modelo más general es el ARMA (p,q) donde “p” representa el orden del modelo autorregresivo y “q” el orden del modelo de media móvil. Este modelo parte de la base de que los términos de error ε_t son variables aleatorias independientes con la misma distribución.

Para resumir lo que hemos comentado antes, la ecuación del modelo general ARMA (p,q) para series temporales quedaría como podemos observar en las ecuaciones 1 y 2, donde el término del error seguiría un proceso estocástico como ya se ha mencionado antes.

$$X_t = \alpha + \varrho_t X_{t-1} + \dots + \varrho_p X_{t-p} + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \varphi_p \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \quad \text{Ecuación 1}$$

$$\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2) \quad \text{Ecuación 2}$$

Y, en el caso de querer diferenciar entre ambas ecuaciones por separado, solo tenemos que observar la ecuación 3 en la que se ve reflejada la ecuación del modelo autorregresivo y la del modelo de media móvil por separado (ecuación 4).

Modelo autorregresivo:

$$\gamma(R) * X_t = \alpha + \varepsilon_t \rightarrow X_t = \alpha + \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad \text{Ecuación 3}$$

Modelo de media móvil:

$$X_t = \alpha + \delta(E) \varepsilon_t \rightarrow X_t = \alpha + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \varphi_p \varepsilon_{t-q} \quad \text{Ecuación 4}$$

El problema de estos modelos ARMA, es que asumen que tienen una varianza constante en el tiempo, principio que se ha demostrado que en los modelos con activos financieros

ya sean acciones, divisas... no se cumple. Para poder modelizar estas series en las que la varianza no es constante sino que es condicionalmente cambiante en el tiempo, surgen los modelos ARCH que introduciremos y explicaremos brevemente a continuación.

2.2. Modelos ARCH

Los modelos ARCH surgen en los años 80 propuestos por el economista y premio nobel de economía Robert, F Engel para tratar de explicar como hemos comentado antes un efecto que los modelos ARMA no tenían en cuenta y es la variabilidad condicional no constante a lo largo de la serie en cuestión. Como principio muy resumido, estos modelos tratan de explicar la varianza condicional mediante los cuadrados de los errores estandarizados.

Respecto a las características empíricas más importantes de las series financieras que se utilizan en estos modelos ARCH se pueden resumir en (Ruiz 1994):

- Series que presentan un exceso de curtosis, también conocidas como distribuciones leptocúrticas, que se caracterizan por una gran concentración en los valores centrales de la variable analizada, gráficamente se distingue por ser apuntada y con colas más anchas que la normal.
- Se distingue un agrupamiento de la volatilidad en algunos periodos de tiempo, así como cierta persistencia de la misma en el tiempo, es decir, los efectos de los shocks de volatilidad tardan tiempo en desaparecer.
- Nula o escasa estructura regular dinámica en la media, de existir alguna estructura dinámica en niveles suele estar representada en modelos AR o MA con órdenes pequeños. No obstante, el estadístico Box-Ljung para 10 retardos no suele ser significativo y por tanto refleja ausencia de estructura dinámica.
- Habitualmente estas series tienen distribuciones simétricas pero no es raro encontrar coeficientes de asimetría significativamente distintos de cero.

Para empezar, estos modelos utilizan el retorno o rentabilidad de estos activos financieros que se pueden explicar como la variación del precio con respecto a un periodo t anterior. En el caso de nuestro trabajo utilizaremos los retornos diarios de los

pares de divisas, y se puede explicar con la siguiente expresión: $r_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$.

En el caso del modelo ARCH (q) para modelizar la serie se utilizará la siguiente ecuación:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

Donde σ_t es el factor que denominaremos volatilidad, que es la raíz cuadrada de la varianza condicional en el instante t, y ε_t es un proceso de ruido blanco formado por variables aleatorias de media cero y varianza 1, siendo ambos procesos estacionarios independientes entre sí.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \quad \text{Ecuación 5}$$

Para Engel la varianza de un proceso de puede obtener como resultado de la ecuación 5, que requiere para su correcto funcionamiento una serie de supuestos como son que las varianzas sean positivas y se cumpla la estacionariedad, por lo tanto, los coeficientes deben verificar que:

- $\alpha_0 \geq 0$
- $\alpha_i \geq 0$
- $\sum \alpha_i < 1$

Si bien estas restricciones sobre los parámetros de la ecuación de la varianza no son necesarias, garantizan una varianza positiva condicional en todos los periodos. Sin embargo, si no todos los coeficientes fueran positivos se podría asegurar que la varianza condicional fuese positiva en todos los instantes. Mientras que la restricción sobre la suma de estos parámetros permite garantizar que el proceso sea estacionario en varianza.

Por otro lado, la condición que hemos comentado de que ambos procesos σ_t y ε_t sean independientes entre sí aseguran que la serie r_t tenga la media incondicional y la condicional igual a 0, como se explica en las ecuaciones 6 y 7 .

$$\text{Media incondicional: } E(r_t) = E(\sigma_t \varepsilon_t) = E(\sigma_t) E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{Ecuación 6}$$

$$\text{Media condicional: } E(r_t/r_{t-1}) = E(\sigma_t/r_{t-1}) E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{Ecuación 7}$$

Al ser un proceso estacionario tendremos una varianza incondicional constante pero una varianza condicional, a la cual denominaremos volatilidad, que no será constante. Así lo demostramos en las ecuaciones 8 y 9, que aparecen a continuación:

$$\text{Varianza: } E(r_t^2) = E(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2) E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 * 1 = \sigma^2 \quad \text{Ecuación 8}$$

$$\text{Varianza Condicionada: } Var(r_t^2/r_{t-1}) = E(\sigma_t^2/r_{t-1}) E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 \quad \text{Ecuación 9}$$

$$\text{Teniendo en cuenta que: } E(\varepsilon_t^2/r_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2) = 1 \quad \text{Ecuación 10}$$

Esta condición de independencia de σ_t y ε_t garantiza que la serie tenga una media incondicional igual a 0 y que carezca de autocorrelación, formando lo que se denomina ruido blanco. No obstante, las variables estudiadas no son independientes.

2.2.1. MODELO ARCH (1)

Dentro de la gran variedad de modelos ARCH vamos a hablar del modelo ARCH (1), el cual sabemos que parte de una estructura para la varianza condicional similar al de un AR (1), por lo que las expresiones para la serie de retornos son como hemos comentado anteriormente para ARCH (1):

$$r_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

Siendo esta última expresión la varianza condicionada que viene del periodo $t-1$, y teniendo en cuenta que α_0 y α_1 son parámetros desconocidos que cumplen los supuestos de; $\alpha_0 > 0$ como mínima varianza condicional y por otro lado $\alpha_1 > 0$, $\alpha_1 < 1$ como condición necesaria y suficiente para la estacionariedad débil del ARCH (1). Y con ε_t como un proceso de ruido blanco que tiene una esperanza media igual a 0 y una varianza igual a uno.

$$E_{t-1} r_t = \sigma_t E_{t-1}(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{Ecuación 11}$$

$$Var_{t-1}(r_t) = E_{t-1} r_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 E_{t-1}(\varepsilon_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 \quad \text{Ecuación 12}$$

Se puede observar en las ecuaciones 11 y 12 que representan la esperanza y la varianza condicional, la esperanza condicional es igual a cero, al igual que $E(\varepsilon_t) = 0$ esto último se cumple para todo ARCH (q), y la varianza condicional depende de la realización del proceso de r_t .

Como es independiente en el tiempo, ε_t es independiente de valores pasados de r_t por lo que la esperanza y la varianza incondicional de r_t se escriben de la siguiente forma:

$$E(r_t) = E(\varepsilon_t \sigma_t) = E(\varepsilon_t) E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) = 0$$

$$Var(r_t) = E(r_t^2) = E(\varepsilon_t^2) E(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(r_{t-1}^2)$$

Para ello hemos partido de la premisa de independencia entre ε_t y r_t , lo cual teniendo en cuenta que $\alpha_1 < 1$, el proceso es estacionario con $E(r_t^2) = E(r_{t+1}^2)$ hace que la varianza quede como vemos a continuación (ecuación 13) y que, a diferencia de la varianza incondicional, es constante en el tiempo.

$$Var(r_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \quad \text{Ecuación 13}$$

Por otro lado, la autocovarianza de orden τ con $\tau \geq 1$, para el proceso ARCH (1) es:

$$E(r_t r_{t-\tau}) = E[(\varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2} r_{t-\tau})] = E(\varepsilon_t) E(\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2} r_{t-\tau}) = 0$$

Lo que hace que ARCH (1) no sea un proceso autocorrelacionado, lo que quiere decir que no existen relaciones lineales entre sus valores a lo largo del tiempo. No obstante, su cuadrado r_t^2 si que está autocorrelacionado como podemos observar a continuación:

$$\gamma_1(r_t^2) = E(r_t^2 r_{t-1}^2) = -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha_1}\right)^2 + [\alpha_0 + E(r_{t-1}^2) + \alpha_1 + E(r_{t-1}^4)]$$

Ecuación a la cual llegamos sabiendo que $r_t^2 = \varepsilon_t^2(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2)$, y como se ha podido observar antes: $E(r_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(r_{t-1}^2)$.

La ausencia de autocorrelación que hemos comentado hace que el modelo ARCH sea bueno para modelizar series temporales financieras, además en el caso de un proceso ARCH puro sin variables explicativas, $E(r_t | I_{t-1}) = E(r_t) = 0$ los efectos ARCH no contradicen la hipótesis de mercados eficientes que se define como la incapacidad de predecir la rentabilidad futura basándose en la pasada.

2.3. Modelos GARCH

El problema de estas especificaciones de los modelos ARCH es que necesitan una cantidad de retardos elevada para poder recoger la estructura de autocorrelación en varianza de forma precisa. Es por ello que Bollerslev llevó a la práctica un modelo

conocido actualmente como GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) en 1986. Una parametrización alternativa que depende de un número más reducido de parámetros, para poder evitar la falta de precisión en la estimación producida por el alto número de coeficientes que utilizan los modelos ARCH.

Estos modelos GARCH quedan especificados como aparecen en las ecuaciones 14 y 15.

$$r_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad \text{Ecuación 14}$$

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \sum \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad \text{Ecuación 15}$$

Bajo las condiciones que aparecen a continuación y que, si bien no son necesarias, que la varianza condicional sea positiva en todos los periodos.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &> 0 \\ \alpha_i, \beta_j &\geq 0 \\ \sum \alpha_i + \sum \beta_j &< 1 \end{aligned}$$

En la especificación que se ha planteado se ha partido de que r_t carece de autocorrelación y de que no disponemos de variables explicativas para la esperanza condicional.

La esperanza de este proceso GARCH (p,q) es cero y su varianza viene determinada por la ecuación 16, lo que supone una distribución leptocúrtica e incondicionalmente homocedástica.

$$Var(r_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j} \quad \text{Ecuación 16}$$

Cuando r_t sigue un proceso GARCH (p,q), su cuadrado r_t^2 tiene una función de autocorrelación que es análoga a un ARMA (p*,q) con $p^* = \max\{p, q\}$, y con parámetros autorregresivos $\phi_i = \alpha_i + \beta_i$ y con parámetros para la media móvil $\theta_j = -\beta_j$, $j=1,2,\dots,q$. Esto hace que se utilicen técnicas de identificación para modelos ARCH y GARCH, basadas en las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, como se hace con la técnica Box-Jenkins, pero usando los cuadrados de los residuos.

3. Aplicación empírica

En esta sección vamos a llevar un análisis de la rentabilidad diaria de los tipos de cambio de interés. Para ello abordaremos el estudio de la propia rentabilidad mediante modelos ARMA. Sin embargo, como toda serie financiera presentará un problema de

homocedasticidad, puesto que la volatilidad es cambiante en el tiempo y, por lo tanto, aplicaremos modelos GARCH para intentar explicarla. Se realizará un análisis residual para comprobar la validez del modelo propuesto y, por último, se realizará un análisis predictivo extramuestral con el fin de comprobar su funcionamiento.

Los datos de las series que vamos a modelizar han sido obtenidos de Investing.com y son los precios de apertura y cierre de los pares de divisas EUR/USD y EUR/YEN tomando como fecha de inicio el 3 de enero de 2011 y como fecha final el 26 de febrero de 2021, lo que serían 10 años de cotización dentro del Mercado Forex o Mercado de Divisas. En total tenemos 2651 observaciones de las rentabilidades diarias de ambos tipos de cambio. La rentabilidad diaria calculada se ha obtenido a partir de los precios de cierre, calculando $R_t = 100 * \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ o lo que es lo mismo $R_t = 100 \log(\frac{P_t}{P_{t-1}})$

Este cálculo hace que la serie de rentabilidades sea estacionaria en media para poder plantear los modelos ARMA y, posteriormente, modelizar su volatilidad mediante modelos GARCH.

El programa que utilizaremos va a ser R, que es un software gratuito y de código abierto que nos va a permitir llevar a cabo la modelización de estas series y sobre el cual hemos utilizado una serie de paquetes específicos para el estudio de series temporales. En concreto, hemos empleado *timeSeries*, *forecast*, *rugarch* y *fGarch*.

Para comenzar vamos a representar gráficamente ambas series temporales tanto del Euro/Dólar como la del Euro/Yen para poder distinguir si existen valores atípicos que haya que intervenir para la correcta especificación del modelo ARMA.

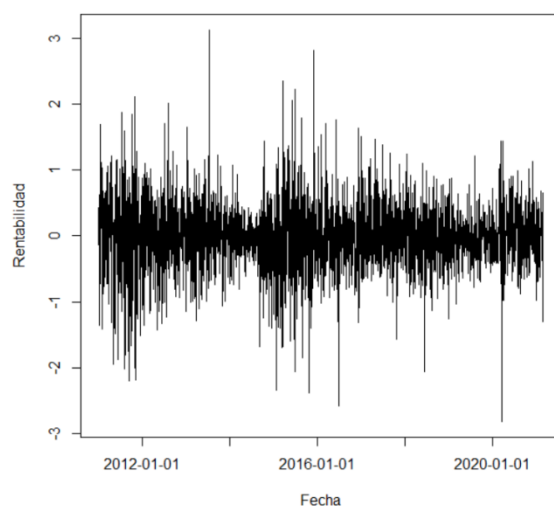


Figura 1. Rentabilidad del tipo de cambio (EUR/USD) (Investing, 2021)

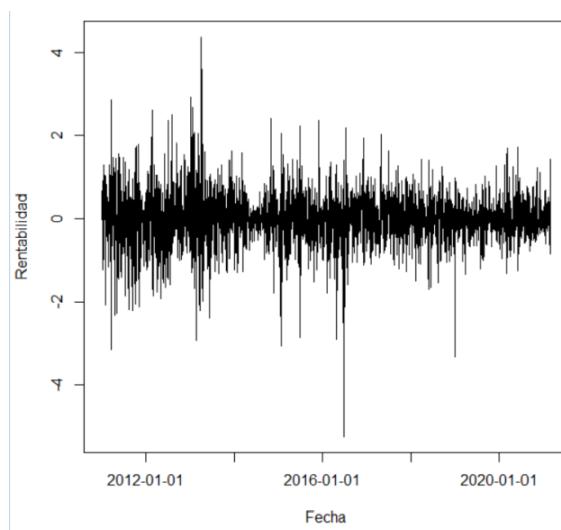


Figura 2. Rentabilidad del tipo de cambio (EUR/YEN) (Investing, 2021)

Podemos observar distintas situaciones en los dos gráficos, en el gráfico del Dólar (Figura 1) no observamos valores significativamente atípicos ya que los extremos en este caso el máximo y el mínimo que se vieron afectados por la Resolución 1988 del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas en julio de 2011 y por el estallido de la Covid-19 en Marzo del año 2020 respectivamente, no se desmarcan de otros valores con mayor volatilidad de la normal (por ejemplo, el resultado de la consulta del Brexit de 27 de junio de 2016 o la catástrofe provocada por el huracán Patricia el 21 de octubre de 2015, etc..) pero no preocupante.

Mientras que en el caso del gráfico del Yen (Figura 2) sí que podemos observar un par de valores atípicos, en este caso producidos por motivos distintos: el primero por una

decisión del banco central de Japón anunciada el 5 de abril de 2013 que tenía como objetivo salir de la deflación en la que se encontraba el país, en la que se inyectó más de un billón de yenes a la economía y que produjo la devaluación de la moneda. Y en segundo lugar como en la serie del Dólar motivado por la decisión del Brexit el 27 de junio de 2016.

En resumen, respecto a las gráficas para estimar el modelo ARMA y posteriormente el modelo GARCH, no intervendremos ningún valor en la serie del Euro/Dólar mientras que en el caso del EUR/YEN emplearemos dos variables dummy para intervenir los dos valores que hemos comentado ya que son más atípicos en comparación al resto de la serie.

3.1 Modelización ARMA de la rentabilidad

Una vez representadas las gráficas de las series para identificar los valores atípicos, llevaremos a cabo una estimación con R en la que buscaremos el modelo ARMA más óptimo dadas las características de las series.

En este caso, ambas series dan como resultado que el modelo ARMA que considera más preciso es el modelo AR(1) suponiendo que la distribución de las noticias no esperadas es una distribución normal; seguido del MA(1), como se observa en la Tablas 1 y 2 que presentan el Criterio de Información Bayesiano (BIC) que desarrolló Gideon E.Schwarz.

MODELO	BIC
AR (1) MA (0)	1.6014
AR (0) MA (1)	1.6014
AR (1) MA (1)	1.6043

Tabla 1 Criterio BIC para la rentabilidad diaria EUR/USD

MODELO	BIC
AR (1) MA (0)	1.9483

AR (0) MA (1)	1.9485
AR (1) MA (1)	1.9512

Tabla 2 Criterio BIC para la rentabilidad diaria EUR/YEN

Una vez conocemos cual es modelo ARMA que mejor se ajusta a nuestras series llevaremos a cabo la estimación del mismo para cada una de nuestras series temporales. A continuación, el proceso de validación y el análisis residual del modelo nos permitirán decidir si necesitamos aplicar alguna variación o elegir otro modelo que pueda solucionar los problemas que surjan.

Comenzaremos con la Serie del EUR/USD. Para ello estimaremos en R un modelo ARMA(1,0) con distribución normal para los errores. Los resultados del proceso de estimación se presentan en la Tabla 3, y se puede comprobar que ambos parámetros, sigma (σ) y ar1, son significativos al 5%.

Coeficientes	Estimación	Desviación estándar	t-valor	Pr ($> t $)
ar1	-0.0471	0.0194	-2.4266	0.0152
sigma (σ)	0.5373	0.0073	72.8011	0.0000

Tabla 3 Estimación del modelo óptimo AR(1) para EUR/USD

BAYES(BIC)	AKAIKE (AIC)	HANNAN-QUINN
1.6014	1.5970	1.5986

Tabla 4 Criterios de Información del modelo óptimo para EUR/USD

Respecto al análisis de los residuos estandarizados si atendemos a los resultados del estadístico Ljung-Box podemos observar que los resultados (Tabla 5) de los p-valores permiten aceptar la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación a un nivel de 5%.

Ljung-Box Test	ESTADÍSTICO	P-valor
Lag[1]	0.0002296	0.9879
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]	0.0535970	1.0000
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]	0.6062635	0.9882

Tabla 5 Test Ljung-Box para los residuos estandarizados (EUR/USD)

No obstante, si observamos los resultados del Test de Ljung-Box para los residuos estandarizados al cuadrado, la cosa cambia ya que no podemos aceptar la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación entre los residuos por lo que existe un problema ya que no siguen una distribución independiente. Lo cual nos indica que no son capaces de explicar la volatilidad del modelo. (Tabla 6)

Ljung-Box Test	ESTADÍSTICO	P-valor
Lag[1]	41.12	1.434e-10
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]	52.35	1.510e-14
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]	87.45	0.000e+00

Tabla 6. Test Ljung-Box para los residuos estandarizados cuadráticos (EUR/USD)

Mientras que en el caso de los resultados obtenidos al aplicar el Test ARCH LM, en la Tabla 7, la hipótesis nula se rechaza a unos niveles del 5% y en principio se puede afirmar que existen efectos ARCH presentes.

ARCH LM Test	Estadístico	P-valor
ARCH Lag[2]	56.88	4.461e-13

ARCH Lag[5]	99.75	0.000e+00
ARCH Lag[10]	118.16	0.000e+00

Tabla 7 Test ARCH LM, Efectos ARCH (EUR/USD)

A continuación, llevaremos a cabo la estimación del modelo para la serie EUR/YEN donde sí que intervendremos, como hemos comentado antes, en un par de valores atípicos que corresponde a las rentabilidades del 5 de abril de 2013 y 27 de junio de 2016.

Como en el caso de la serie del dólar estimaremos el modelo AR(1) dentro de las opciones de modelos ARMA, obteniendo como resultados los que se pueden ver en las tablas 8 y 9. Se observa que se han incluido los valores que hemos seleccionado como atípicos a intervenir originando dos parámetros nuevos a estimar. Se puede comprobar que todos los parámetros son significativos con p-valores prácticamente nulos.

Coeficientes	Estimación	Desviación estándar	t-valor	Pr ($> t $)
ar1	-0.0703	0.0194	-3.6158	0.0002
mx reg1	-5.2530	0.6356	-8.2641	0.0000
mx reg2	4.5391	0.6375	7.1194	0.0000
sigma(σ)	0.6371	0.0087	72.8011	0.0000

Tabla 8. Análisis Estimación AR(1) EUR/YEN

BAYES(BIC)	AKAIKE (AIC)	HANNAN-QUINN
1.9484	1.9395	1.9427

Tabla 9. Criterios de Información

En cuanto al análisis de los residuos estandarizados como hemos hecho antes observamos el Test de Ljung-Box y de nuevo los valores que obtenemos (Tabla 10) indican que no podemos rechazar la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación a un nivel de confianza del 5%.

Ljung-Box Test	ESTADÍSTICO	P-valor
Lag[1]	0.0006	0.9795
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]	0.0989	0.9999
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]	0.2258	0.9996

Tabla 10. Test Ljung-Box para los residuos estandarizados (EUR/YEN)

Mientras que si nos fijamos en los residuos estandarizados al cuadrado, igual que en la serie del EUR/USD, podemos rechazar la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación entre los residuos a un 5% y por tanto no podemos explicar la volatilidad de la serie como se muestra en la Tabla 11.

Ljung-Box Test	ESTADÍSTICO	P-valor
Lag[1]	50.36	1.28e-12
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]	65.65	0.00e+00
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]	93.13	0.00e+00

Tabla 11. Test Ljung-Box para los residuos estandarizados cuadráticos (EUR/YEN)

Por otro lado, en cuanto al Test ARCH LM para conocer si existen efectos ARCH, los resultados obtenidos de este test nos permiten rechazar a un nivel del 5% la hipótesis nula y con ello admitimos la presencia de efectos ARCH en el modelo (Tabla 12).

ARCH LM Test	Estadístico	P-valor
ARCH Lag[2]	71.39	3.331e-16

ARCH Lag[5]	107.27	0.000e+00
ARCH Lag[10]	147.12	0.000e+00

Tabla 12. Test ARCH LM, Efectos ARCH (EUR/YEN)

Una vez estimados los modelos tanto de la serie del EUR/USD como de la serie EUR/YEN, procedemos a analizar gráficamente los residuos de la misma para el modelo ARMA que hemos estimado como óptimo y sobre el que hemos trabajado. Este debería corroborar los problemas de autocorrelación en los residuos estandarizados cuadráticos que ya habíamos detectado anteriormente.

Dentro del análisis de los residuos en el modelo AR (1) de la serie EUR/USD se puede observar que el histograma (Figura 3) no recoge correctamente la distribución normal. Del mismo modo, en el gráfico Q-Q plot observamos que los cuantiles muestrales no están recogidos en la banda de confianza, lo que nos lleva a plantearnos si una distribución t de Student podría recoger mejor los datos. El diagrama de cajas no presenta problemas significativos porque es simétrico y con valores atípicos debido a la alta frecuencia de observación.

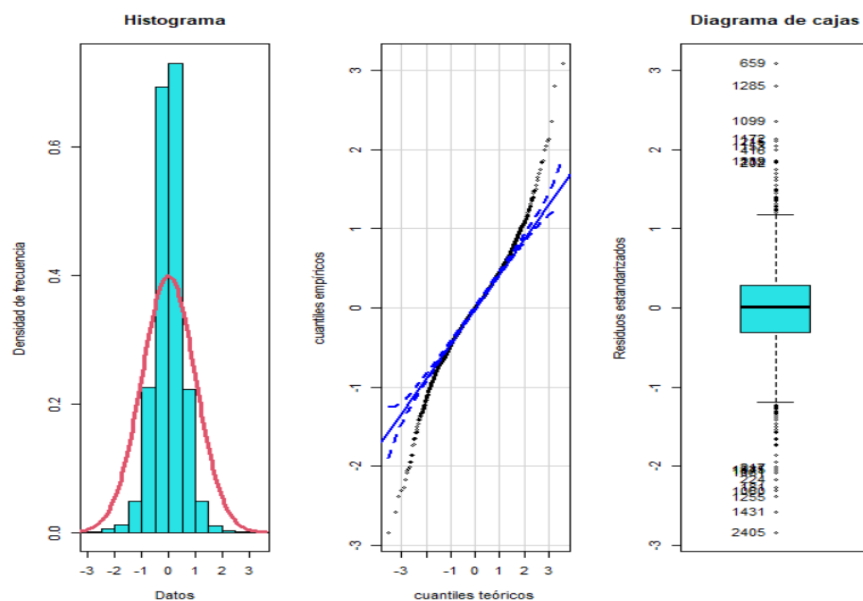


Figura 3. Histograma, Cuantiles y Diagrama de Cajas (EUR/USD)

Por otro lado, respecto a las funciones de autocorrelación para los residuos (ACF) y la función de Autocorrelación parcial (PACF) vemos que se encuentran entre valores

normales, pero si observamos la función de Autocorrelación (ACF) y de Autocorrelación Parcial (PACF) de los residuos cuadráticos sí que encontramos que tenemos un problema de autocorrelación con estos por lo que intentaremos buscar una solución para arreglar este problema. Estos gráficos corroboran los resultados numéricos obtenidos en el Test de Ljung-Box.

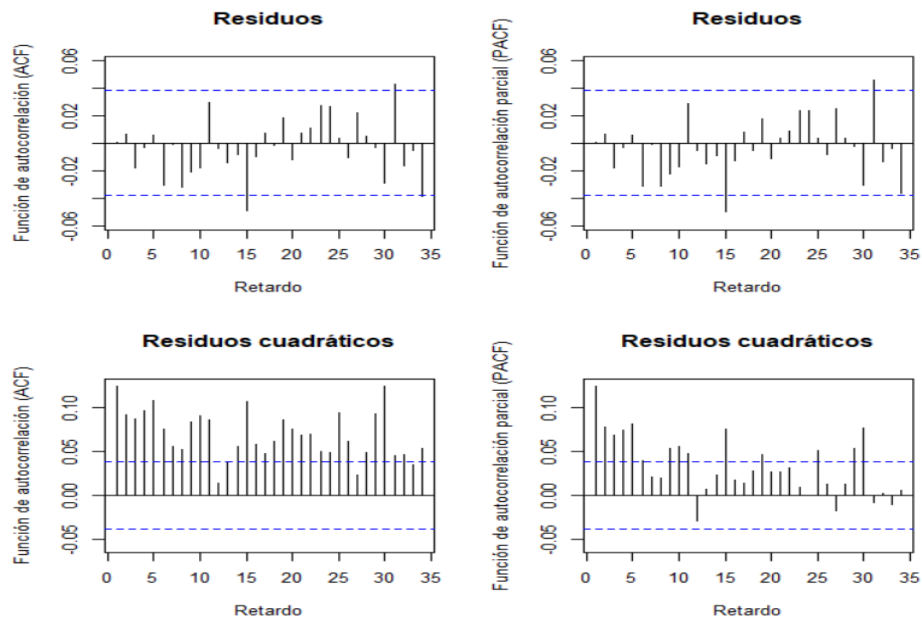


Figura 4. Funciones de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial para los residuos estandarizados y sus cuadrados (EUR/USD)

Por su parte, en cuanto a la serie de EUR/YEN llevamos a cabo el mismo análisis gráfico de los residuos sobre el modelo que hemos estimado, observando en la Figura 5 un resultado similar. El histograma que no recoge correctamente la distribución y unos cuantiles observados que no responden a la distribución normal, cuya solución puede ser una distribución t de Student y por otro lado no aparecen problemas en el diagrama de cajas.

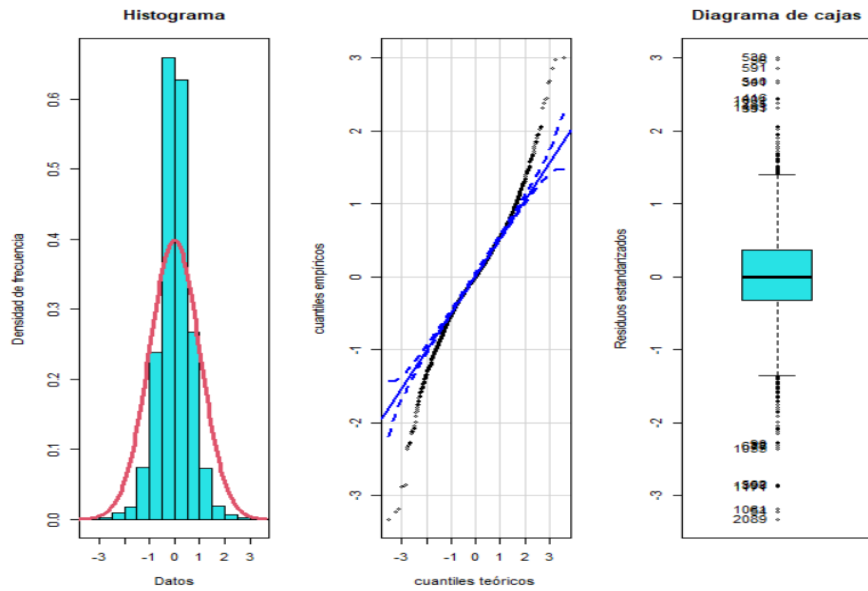


Figura 5. Histograma, Cuantiles y Diagrama de Cajas (EUR/YEN)

En cuanto a los residuos, como ocurre en la serie del dólar, encontramos que la función de Autocorrelación (ACF) y la de Autocorrelación Parcial (PACF) presenta unos valores correctos, pero las mismas funciones para los residuos estandarizados cuadráticos presentan problemas de autocorrelación a los que hay que buscar solución. (Figura 6)

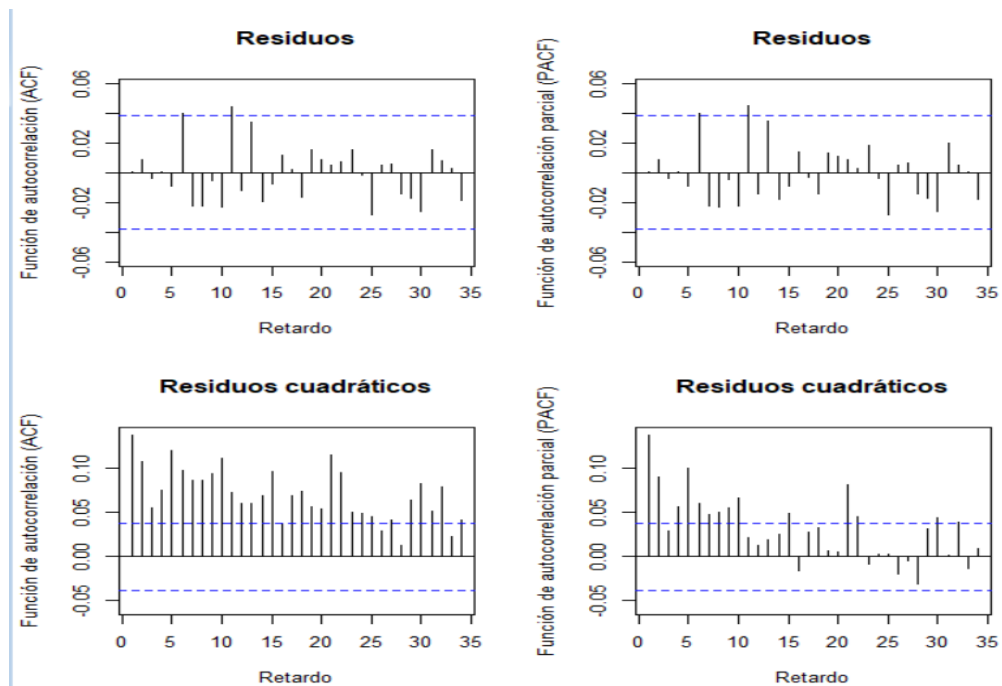


Figura 6. Funciones de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial para los residuos estandarizados y sus cuadrados (EUR/YEN)

3.2 Modelización ARMA-GARCH de la rentabilidad

Dado que este modelo ARMA(1,0) que hemos aplicado ha demostrado tener algunas deficiencias al presentar heterocedasticidad, vamos a intentar explicar la volatilidad cambiante en el tiempo mediante un modelo GARCH (1,1). Además, vamos a implementar una distribución t de Student para el término del error, intentando resolver los problemas de los residuos estandarizados vistos anteriormente.

El proceso de estimación del modelo AR(1)-GARCH(1,1) para la rentabilidad diaria del EUR/USD queda reflejado en la Tabla 13, donde se observa que todos los valores de los parámetros son significativos al 5%.

Coeficientes	Estimación	Desviación estándar	t-valor	Pr ($> t $)
ar1	-0.0471	0.0194	-2.4266	0.0152
omega	0.0008	0.0004	2.1158	0.0343
alpha1	0.0343	0.0030	11.3681	0.0000
beta1	0.9629	0.0021	450.0724	0.0000
shape	7.0028	0.8612	8.1308	0.0000

Tabla 13. Tabla Análisis Estimación GARCH (1,1) (EUR/USD)

La volatilidad estimada con este modelo, es decir, la varianza condicional cambiante en el tiempo se representa en la de la desviación típica que aparece en la Figura 7. Se puede observar que hay periodos de alta volatilidad mientras que en otros el riesgo del mercado es inferior. La suma de los coeficientes alpha1 y beta1 indican la persistencia, en este caso es 0.99, de las noticias no esperadas en el mercado cambiario. Un valor cercano a 1, como este caso, indica que permanecen durante bastante tiempo hasta que su efecto desaparece.

El coeficiente shape, que indica los grados de libertad de la distribución t de Student, es prácticamente 7 indicando que es bastante leptocúrtica y alejada de la distribución normal que hemos supuesto en el modelo ARMA homocedástico.

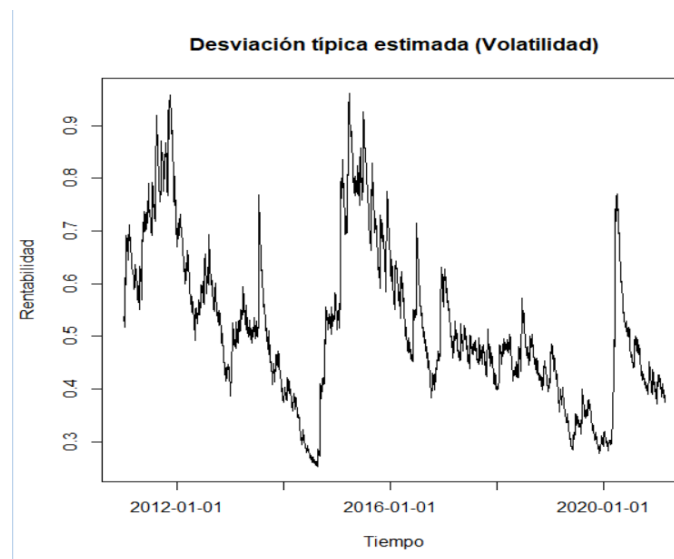


Figura 7. Volatilidad de la rentabilidad diaria (Desviación Típica) EUR/USD.

En cuanto a los residuos el Test de Ljung-Box para los residuos estandarizados sigue mostrándonos como se observa en la Tabla 14, que podemos aceptar la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación en la serie a un nivel de significación del 5%.

Weighted Ljung-Box Test	ESTADÍSTICO	P-VALOR
Lag[1]	0.0000	0.9970
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]	0.6754	0.9079
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]	1.3705	0.8770

Tabla 14. Test Ljung-Box para los residuos estandarizados (EUR/USD)

Mientras que, en cuanto a los residuos estandarizados cuadráticos, donde antes teníamos un problema ya que rechazábamos la hipótesis de ausencia autocorrelación, ahora sí que podemos aceptar dicha hipótesis y asegurar que para un nivel del 5% no existe autocorrelación como aparece en la Tabla 15.

Weighted Ljung-Box Test	ESTADÍSTICO	P-VALOR
Lag[1]	0.0000	0.9951
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]	0.9792	0.8644
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]	3.2878	0.7106

Tabla 15. Test Ljung-Box Residuos Cuadráticos (EUR/USD)

Y por último el Test ARCH LM, que como hemos dicho antes recoge los efectos ARCH, podemos ver en la Tabla 16 que no podemos rechazar la hipótesis nula de que no existen efectos ARCH a un nivel del 5%. Por lo tanto, hemos recogido convenientemente estos efectos mediante el modelo GARCH(1,1).

ARCH LM Test	ESTADÍSTICO	P-VALOR
ARCH Lag[3]	0.2589	0.6109
ARCH Lag[5]	2.2615	0.4163
ARCH Lag[7]	2.9497	0.5231

Tabla 16. Test ARCH LM, Efectos ARCH (EUR/USD)

A continuación llevaremos a cabo exactamente la misma estimación del modelo AR(1)-GARCH (1,1) para la serie de rentabilidades diarias del EURO/YEN. En la Tabla 17, presentamos los resultados del proceso de estimación. Se puede observar que todos los parámetros son significativos para un nivel del 5%. En este caso, igual que antes, la persistencia $\alpha_1 + \beta_1 = 0.99$ es muy cercana a 1 indicando que las noticias no esperadas permanecen en el mercado cambiario. El coeficiente shape es bajo, tomando un valor prácticamente de 6, por lo tanto, tenemos una distribución residual muy leptocúrtica y alejada de la distribución normal inicialmente planteada.

Coeficientes	Estimación	Desviación	t-valor	Pr ($> t $)
ar1	-0.0510	0.0193	-2.6348	0.0084
mx reg1	4.4051	0.7852	5.6101	0.0000

mx reg 2	-5.2430	0.5213	-10.0576	0.0000
omega	0.0018	0.0008	2.2673	0.0233
alpha1	0.0440	0.0054	8.0365	0.0000
beta1	0.9525	0.0049	191.5122	0.0000
shape	5.9955	0.6609	9.0706	0.0000

Tabla 17. Tabla Análisis Estimación GARCH (1,1) (EUR/YEN)

La desviación típica condicional estimada con este modelo se presenta en la Figura 8, donde se observa que la volatilidad claramente no es constante pero que tiene una tendencia decreciente en los últimos años del estudio. En concreto, el incremento de la volatilidad cuando la crisis de la COVID 19 (marzo 2020) de este tipo de cambio EUR/YEN no fue tan elevada como en el EUR/USD.

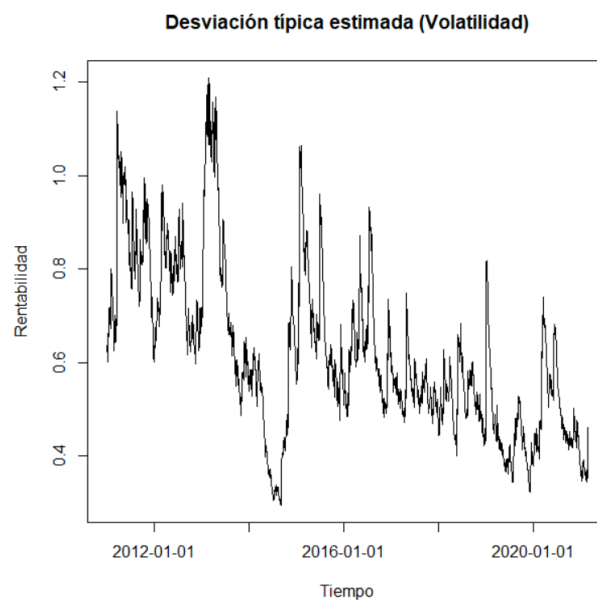


Figura 8. Volatilidad de la serie (Desviación Típica) EUR/YEN

En cuanto a los residuos estandarizados el Test Ljung-Box, como en el modelo AR(1) anterior, observamos que los p-valores que se muestran en la Tabla 18 nos permiten aceptar la ausencia de autocorrelación a un nivel del 5%.

Weighted Ljung-Box Test	ESTADÍSTICO	P-VALOR
-------------------------	-------------	---------

Lag[1]	0.9899	0.3198
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]	1.0096	0.7341
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]	1.2179	0.9091

Tabla 18. Test Ljung-Box para los residuos estandarizados (EUR/YEN)

Mientras que, como en la serie del dólar, aunque en el modelo AR(1) existía un problema de autocorrelación con los residuos cuadráticos, ahora este problema desaparece ya que los resultados arrojados en la Tabla 19 nos permiten rechazar la existencia de autocorrelación en los residuos cuadráticos.

Weighted Ljung-Box Test	ESTADÍSTICO	P-VALOR
Lag[1]	1.055	0.3044
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][5]	2.009	0.6163
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][9]	2.735	0.8018

Tabla 19. Test Ljung-Box para los residuos estandarizados cuadráticos (EUR/YEN)

Weighted ARCH LM Tests	ESTADÍSTICO	P-VALOR
ARCH Lag[3]	1.214	0.2706
ARCH Lag[5]	1.845	0.5065
ARCH Lag[7]	1.973	0.7230

Tabla 20. Test ARCH LM (EUR/YEN)

Por último, respecto al Test ARCH LM sobre los efectos ARCH, en la tabla observamos que los valores indican la ausencia de efectos ARCH en el modelo al no poder rechazar hipótesis nula a un nivel del 5%. (Tabla 20)

Una vez estimados ambos modelos GARCH vamos a realizar un análisis gráfico de los residuos para ambas series. Empezando como hasta ahora con la serie EUR/USD, donde como observamos en la Figura 9 el histograma recoge mucho mejor la distribución de la serie ahora con la distribución t-student que con el modelo AR(1) de distribución normal anterior , y el gráfico Q-Q plot recoge en las bandas de confianza todos los valores muestrales.

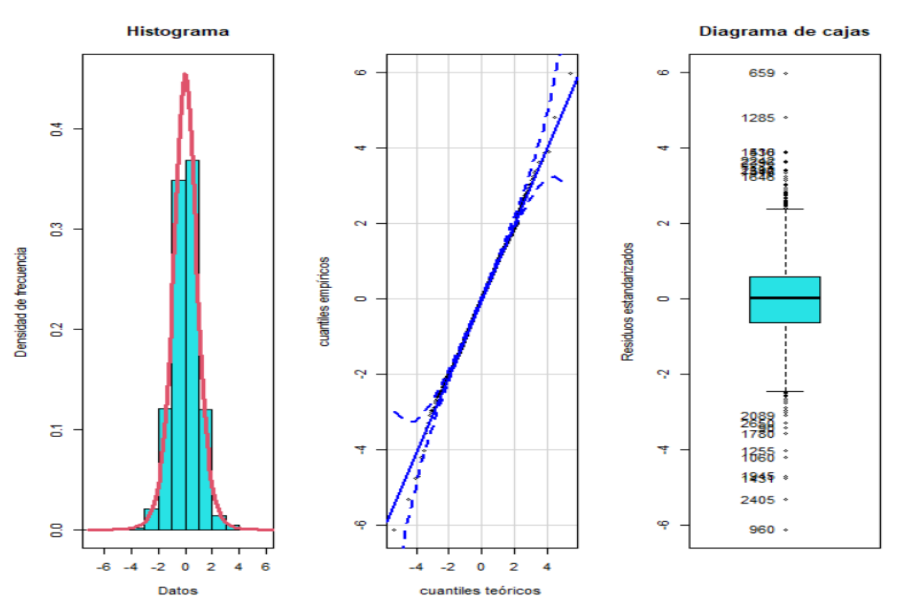


Figura 9: Histograma, Cuantiles y Diagrama de Caja (EUR/USD)

Mientras que respecto a las funciones de Autocorrelación (ACF) y Autocorrelación Parcial (PAFC) para los residuos estandarizados continua como en el modelo AR(1) presentando unos valores correctos pero además hemos conseguido solucionar los problemas de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial que se presentaban anteriormente en los residuos cuadráticos como se observa en la Figura 10, únicamente teniendo algún problema tomando 15 retardos.

A su vez respecto a las funciones de Autocorrelación (ACF) y Autocorrelación Parcial (PACF), como en el modelo AR (1) los residuos estandarizados no presentan problemas de Autocorrelación de ningún tipo, pero a diferencia del anterior modelo los problemas de Autocorrelación de los residuos estandarizados cuadráticos se han solucionado y no hay autocorrelación en estos tampoco. (Figura 12)

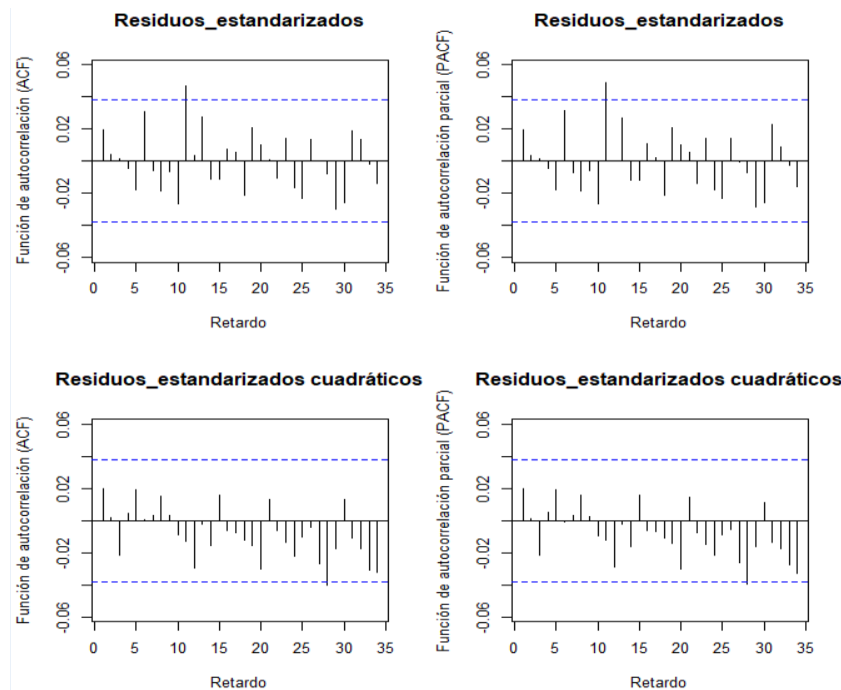


Figura 12: Funciones de Autocorrelación y Autocorrelación Parcial para los residuos estandarizados y sus cuadrados (EUR/YEN)

3.3 Análisis predictivo

Tras estimar nuestro propio modelo AR (1)-GARCH (1,1) procederemos a llevar a cabo una predicción para ambas series tanto del Dólar como del Yen para comprobar si este modelo es eficiente a la hora de predecir la volatilidad de estas series al nivel de confianza que hemos considerado a lo largo del trabajo del 95%.

Para ello tomaremos como referencia inicial hasta octubre del 2020 y haremos una predicción extramuestral hasta febrero de 2021, donde tenemos un total de 107 valores a predecir y lo haremos mediante un procedimiento “rolling”, es decir, se mantiene el tamaño muestral para estimar y se predice a horizontes $h=1, 5$ y 10 instantes de tiempo. Para ello, el periodo muestral empleado en la estimación se incrementa con un dato nuevo y se elimina el dato más antiguo. Se estima el modelo AR(1)-GARCH(1,1) con ese periodo muestral y se obtienen tanto la rentabilidad diaria predicha como la varianza

condicional prevista para los horizontes indicados. De esta forma y empleando la distribución residual t-Student podremos construir los intervalos de confianza, que serán intervalos predictivos, con un nivel del 95%.

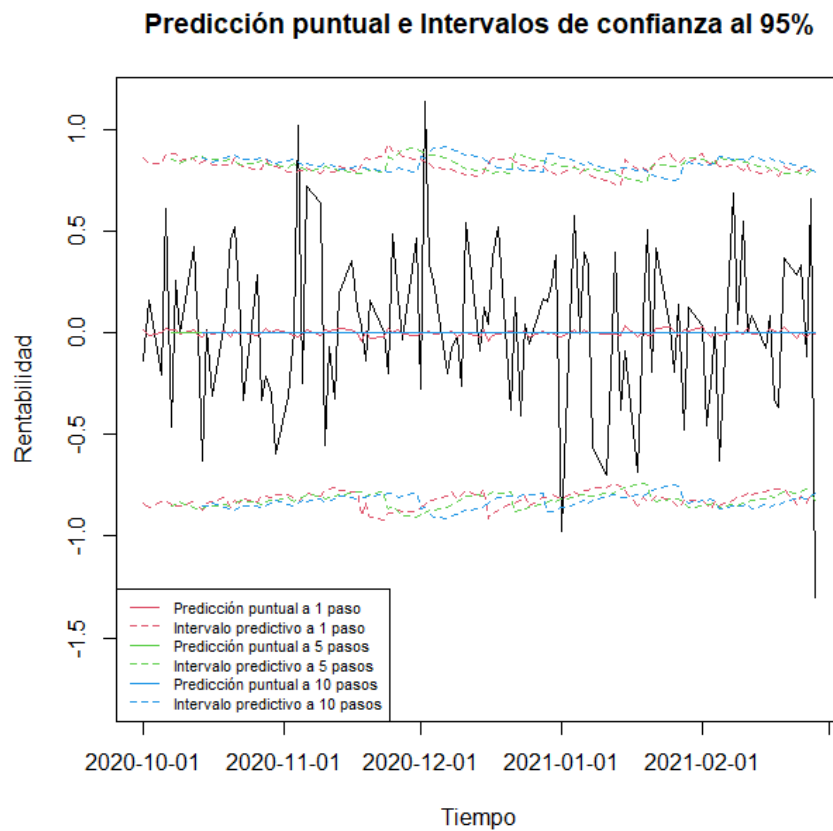


Figura 13 Predicción de la rentabilidad de la serie (EUR/USD)

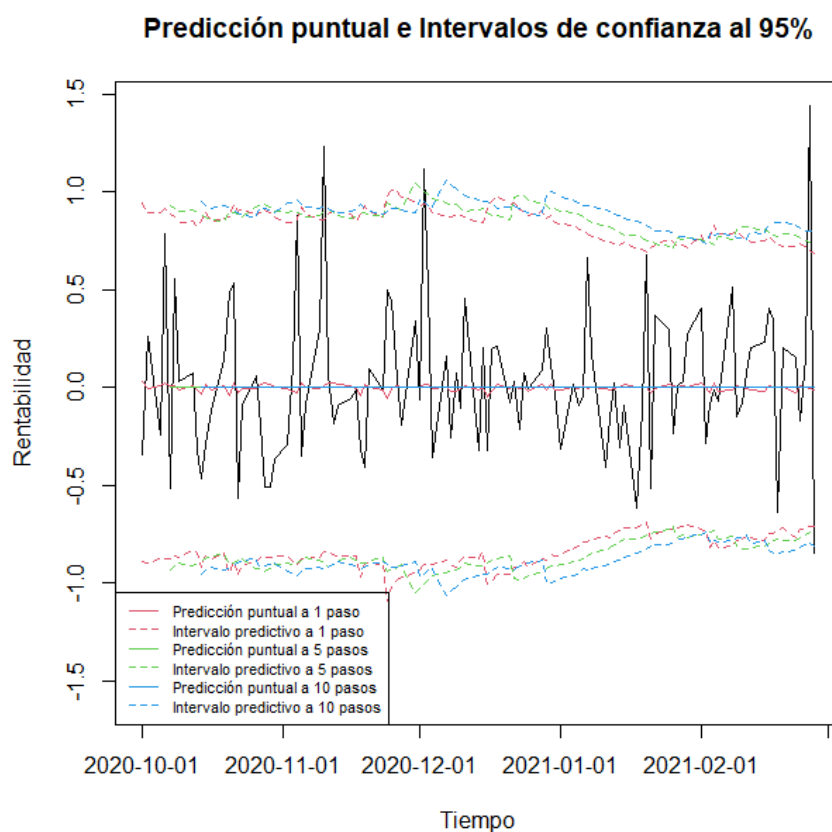


Figura 14. Predicción de la rentabilidad de la serie (EUR/YEN)

Como se puede observar en las figuras 13 y 14 que corresponden a la predicción realizada sobre las series del dólar y el yen, respectivamente, observamos que en ambas el modelo estima de forma muy eficaz la rentabilidad ya que solo unos pocos valores se escapan de las bandas predictivas calculadas, y aunque en el caso del dólar el modelo parece más eficaz para ambas series el número de valores que se escapan es inferior al 5% de error que se estableció como baremo. En concreto, para el caso del EUR/USD la proporción de valores reales que sobresalen de los intervalos predictivos es un 3.74%, mientras que para el EUR/YEN es de un 4.67%.

4. Conclusiones

En este trabajo hemos llevado a cabo un análisis de la volatilidad presente en las series financieras de dos pares de divisas mediante el uso de los modelos ARMA-GARCH que como hemos podido comprobar a lo largo del trabajo permiten modelizar la volatilidad de las series y hacer una predicción basada en datos pasados para un nivel de confianza determinado.

Hemos podido comprobar dentro del análisis empírico que el modelo GARCH (1,1) ofrece una mayor precisión a la hora de explicar y modelizar la volatilidad diaria de estas series que el modelo AR (1) el cual era el modelo más óptimo dentro de la familia de modelos ARMA para las series estudiadas, pero su hipótesis de homocedasticidad no es plausible en series financieras.

El problema de este modelo AR (1) tanto con la distribución que no quedaba recogida correctamente en una normal y con los residuos estandarizados cuadráticos que presentaban problemas de autocorrelación fue solucionado con la aplicación del modelo GARCH (1,1) y considerando una distribución t de de Student.

Se puede observar de forma general que ambas series presentan una volatilidad cambiante que no es muy dispar entre las dos series, no es la del dólar más volátil que el yen ni al contrario, y además ambas presentan indicios de leptocurtosis así como independencia entre las variables.

Como resumen final, podemos decir en este trabajo hemos encontrado un modelo, en este caso el GARCH (1,1), que se ajusta de forma muy eficaz a lo que buscamos que es explicar y poder realizar una predicción sobre la volatilidad que se ajustara al nivel de confianza que hemos planteado (5%) .

5. Bibliografía

BOLLERSLEV, T. (1986) “Generalized autorregressive conditional heteroscedasticity”. *Journal of Econometrics*. Vol. 31: 307-327.

ECONOMIPEDIA (2021) “Modelo ARMA”. *Economipedia*. Disponible en: <https://economipedia.com/definiciones/modelo-arma.html>

ENGLE, R.F. (1982) “Autorregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation”. *Econometrica*. Vol. 50, No 4: 987-1007

FUNDS PEOPLE (2019) “Cuánto mueve el mercado de divisas en el mundo”. *Funds People*. Disponible en: <https://fundspeople.com/es/cuanto-mueve-el-mercado-de-divisas-en-el-mundo/>

IHODL ACADEMIA (2021) “Historia de las divisas y los participantes del mercado” *Ihodl Academia*. Disponible en: <https://es.ihodl.com/academy/forex/historia-divisas-participantes-mercado/>

INVESTING (2021). “EUR/USD – Euro Dólar”. *Investing*. Disponible en: <https://es.investing.com/currencies/eur-usd-historical-data>

INVESTING (2021). “EUR/JPY – Euro Yen Japonés”. *Investing*. Disponible: <https://es.investing.com/currencies/eur-jpy-historical-data>

MARTÍNEZ GALLEGO, J.M. (2018). “La primera moneda del mundo nació hace veintiocho siglos y era de oro y plata”. *Oroinformación*. Disponible en: <https://oroinformacion.com/la-primera-moneda-del-mundo-nacio-hace-veintiocho-siglos-y-era-de-oro-y-plata/>

RUIZ, ESTHER (1994) “Modelos para series temporales heterocedásticas”. *Universidad Carlos III de Madrid*. Disponible en: https://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/4898/modelos_ruiz_ICE_1994_ps.pdf?sequence=2&isAllowed=y