



TRABAJO DE FIN DE GRADO
GRADO EN FÍSICA

**Condiciones de estabilidad y
evolución de un fluido
autogravitante en relatividad
general**

AUTOR:
Jorge Borque López-Torres

DIRECTOR:
Eduardo Follana Adin

Departamento de Física Teórica
Zaragoza, 10 de septiembre de 2021

Índice

1. Introducción	3
2. Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	3
3. Estrellas compactas	5
3.1. Enanas blancas	5
3.2. Estrellas de neutrones	7
3.3. Ecuación de estado para estrellas compactas	7
4. Cálculos numéricos	9
4.1. Método de Runge-Kutta de 4º Orden	10
4.2. Resultados para estrellas de densidad constante	11
4.3. Resultados de la integración para enanas blancas	11
4.3.1. Solución numérica para el caso no relativista	12
4.3.2. Solución numérica para el caso relativista	12
4.4. Resultados de la integración para estrellas de neutrones	14
4.4.1. Solución numérica para el caso no relativista	14
4.5. Resultados de la integración para RG y Newton para una ecuación de estado c valores intermedios	16
4.6. Integración variando las condiciones iniciales	18

4.6.1. Integración variando la densidad central	18
4.6.2. Integración variando los valores de la constante K y el coeficiente adiabático Γ	20
5. Modelo mixto para una estrella compacta	21
6. Estabilidad	23
7. Conclusiones	25
A. Resultados de la integración	27
B. Cálculos	29
B.1. Solución de TOV para densidad constante	29
B.2. Adimensionalización de las ecuaciones TOV para la simulación de estrellas compactas en sus límites teóricos	31

1. Introducción

En este trabajo se van a estudiar las condiciones de estabilidad para las denominadas estrellas compactas. Estos cuerpos son capaces de soportar el colapso gravitatorio gracias a una presión de naturaleza cuántica, mientras que las estrellas ordinarias lo hacen mediante una presión térmica.

Se realizará el análisis en condiciones de relatividad general y de gravedad newtoniana y se compararán las diferencias entre ambas teorías. Para poder hallar unas conclusiones sólidas se van a estudiar diferentes modelos de estrellas compactas, siendo algunos más físicamente consistentes que otros, también se analizará como cambian los cálculos numéricos variando las condiciones iniciales de integración. Por último, se analizarán las condiciones de estabilidad de nuestros modelos más realistas.

La ecuación que determina la relación entre la materia y la curvatura del espacio tiempo es la ecuación de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2)$$

que está formado por el tensor de curvatura de Ricci ($R_{\mu\nu}$), el escalar de Ricci (R) y el tensor métrico ($g_{\mu\nu}$). Este lado de la expresión representa la curvatura del espacio-tiempo. Por otro lado, la parte derecha está relacionada con la concentración de materia, para ello se tiene el tensor de energía-momento, que está formado por las densidades de energía, las densidades de momento y la presión en cada una de las direcciones. Así, la ecuación relaciona la curvatura del espacio-tiempo y la cantidad de materia (o energía) que hay en él, de forma que cuanta más cantidad de materia (ya sea en forma de masa o de energía) mayor será la curvatura. Será esta expresión la que se va a manipular para hallar la ecuación diferencial sobre la que se centra este trabajo.

2. Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Vamos a estudiar las soluciones estáticas y con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein en el interior de una estrella. Consideramos un fluido ideal definido por el tensor energía momento de la forma

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_{\mu\nu}), \quad (3)$$

donde ρ y P son la densidad y la presión respectivamente. De las ecuaciones de Einstein obtenemos tres ecuaciones independientes

$$8\pi T_{00} = 8\pi\rho = G_{00}, \quad (4)$$

$$8\pi T_{11} = 8\pi P = G_{11}, \quad (5)$$

$$8\pi T_{22} = 8\pi P = G_{22}. \quad (6)$$

Estas ecuaciones relacionan la densidad y la presión con los elementos diagonales del tensor de curvatura. Así pues, manipulando estas ecuaciones [13] [4] [6] se llega a la expresión para la métrica que se tiene en el interior de un fluido estelar estático y con simetría esférica

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (7)$$

donde $M(r)$ es la masa y ϕ es un análogo relativista del potencial gravitatorio newtoniano cuya expresión es $\phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$. Obtenemos también la ecuación de *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* para equilibrio hidroestático, cuya expresión es

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G}{r^2} \left[\rho + \frac{P(r)}{c^2} \right] \left[M(r) + 4\pi r^3 \frac{P(r)}{c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (8)$$

donde

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 dr. \quad (9)$$

Esta ecuación describe la estructura de una estrella que está bajo las condiciones mencionadas al principio del apartado, su análisis permite hallar los límites de estabilidad del cuerpo si se tiene la ecuación de estado del fluido que forma la estrella. Si las condiciones del problema son $P \ll \rho$ y $M(r) \ll r$, la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff se reduce a

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho(r)M(r)}{r^2}, \quad (10)$$

que es la ecuación de equilibrio hidrostático que se obtiene a través del formalismo newtoniano. Esto es lógico puesto que estas dos condiciones definen el ya mencionado límite newtoniano que separa el dominio relativista del dominio clásico a la hora de describir el movimiento y la interacción de los cuerpos sometidos a la gravedad. La ecuación (8) representa físicamente el balance entre la fuerza que actúa sobre la materia desde dentro y el peso de la materia que actúa sobre esta en sentido opuesto. De esta forma se tiene que la variación de la presión respecto al radio depende en primera instancia del término newtoniano al que se le añaden tres factores que representan correcciones relativistas, es interesante añadir que el tercer factor es una corrección dada por la relatividad general relacionada con el tamaño máximo que puede tener la estrella, diverge cuando llegamos a un radio crítico $R = 2GM/c^2$ llamado radio de Schwarzschild. Es interesante observar que los factores de corrección están definidos con el mismo signo, de tal forma que en la ecuación TOV el cambio de presión depende en mayor medida de la gravedad que en la fórmula newtoniana. Es una forma sencilla de observar como la relatividad general es un añadido sobre la gravedad newtoniana que dota a la gravedad de mayor capacidad atractora.

3. Estrellas compactas

Cuando una estrella ordinaria llega al estado final en su proceso evolutivo ya ha consumido todo el hidrógeno y el helio [14]. Las reservas de helio se queman y forman oxígeno y carbono, de tal forma que la estrella encoge y la presión del núcleo aumenta considerablemente. En estos casos la estrella no debería poder mantenerse gravitacionalmente, pues la presión no podría igualar el colapso gravitatorio provocado por la alta densidad del núcleo. Sin embargo, en este proceso entra en juego la mecánica cuántica, pues aparece una presión de degeneración que consigue igualar el tirón hacia dentro que provoca la gravedad y que es muy diferente a la presión térmica que es la que mantiene estables las estrellas ordinarias. Dependiendo de la partícula que provoque esta presión de degeneración se tienen las *enanas blancas* o las *estrellas de neutrones*, estos dos tipos de cuerpos son los llamados *estrellas compactas*. Si la masa de la estrella original tiene más de 9-10 masas solares se formará una estrella de neutrones, si tiene menos se formará una enana blanca y si contiene 30-70 masas solares colapsará hasta el punto en el que se formará un agujero negro. Este tipo de objetos son el estado final de la evolución estelar pero se diferencian de los otros tipos de estrellas en algunos aspectos:

1. Como ya se ha mencionado no utilizan combustible nuclear, pues ya se ha agotado al llegar a este punto, por lo que están comprimidas hasta el máximo que su masa les permite.
2. Son mucho menores en tamaño, puesto que tienen un límite de masa que no es muy elevado y un radio máximo que no llega al del sol [2] [3] [11] por tanto su campo gravitatorio en la superficie es muy elevado.
3. Generalmente tienen campos magnéticos más fuertes que el resto de estrellas (Entre 10^6 y 10^7 T).

Como se observa en la Figura 1 las estrellas de neutrones y las enanas blancas son el paso final en la evolución estelar.

3.1. Enanas blancas

Cuando una estrella de masa menor que $10 M_{\odot}$ agota su combustible nuclear se forma una enana blanca. La gran mayoría de estrellas, incluido el Sol, atraviesan esta etapa en su evolución estelar. Estos astros están compuestos por átomos en estado de plasma, a causa de la compresión que sufre la estrella sobre sí misma debido a su propio peso la distancia entre los átomos decrece dejando menos espacio a los electrones para moverse libremente. De esta forma la densidad del fluido

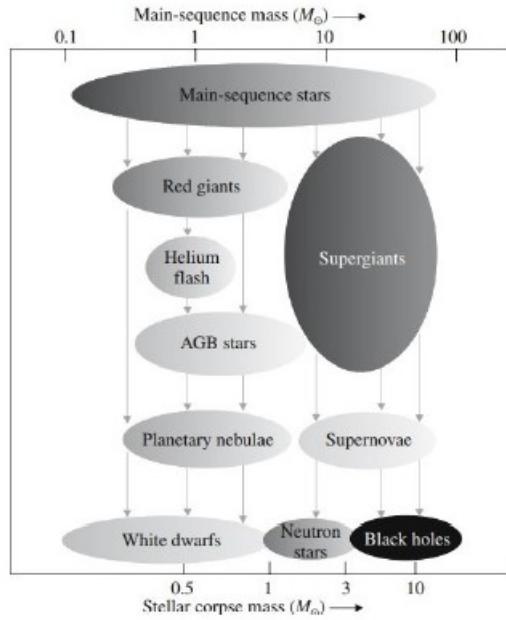


Figura 1: Esquema de la evolución estelar [1].

aumenta considerablemente y los electrones sufren las consecuencias del principio de indeterminación y del principio de exclusión de tal forma que consiguen moverse a mucha velocidad. Al tener un número tan elevado de electrones moviéndose a velocidades tan altas se genera una presión de degeneración electrónica que contrarresta el colapso gravitacional de la estrella. Las enanas blancas son objetos realmente densos, sólo superados por las estrellas de neutrones y los agujeros negros. Dado que la energía térmica que emiten es remanente poseen una luminosidad muy débil y que disminuye conforme pasa el tiempo. Las enanas blancas también pueden formarse como consecuencia de una supernova del tipo Ia. En 1931 [2] y 1935 [3] Subrahmanyan Chandrasekhar estudió cual era la masa máxima que podía tener una enana blanca, esta masa es el límite que permite a estas estrellas existir, si una de ellas lo supera el colapso gravitatorio supera la presión de degeneración y se forma un objeto más compacto, ya sea una estrella de neutrones o directamente un agujero negro. El límite es $M_{ch} = 1,44M_{\odot}$ y Chandrasekhar se basó en la ecuación de estado del gas de Fermi para calcularlo. Las enanas blancas poseen temperaturas muy elevadas, pero se enfrián paulatinamente al no tener combustible para fusionar y generar energía calorífica, cuando las enanas blancas se enfrián completamente se forman nuevos astros llamados enanas negras, sin embargo, el tiempo que debe pasar para que ocurra este fenómeno es mucho mayor que la edad actual del universo, por lo que es virtualmente imposible llegar a observar un objeto de este tipo. Se han observado enanas blancas desde 0.17 hasta 1.33 masas solares, aunque la máxima distribución se encuentra entre 0.5 y 0.7 masas solares. Este tipo de estrellas es el más abundante del universo junto a las enanas rojas [8].

3.2. Estrellas de neutrones

Cuando las enanas blancas tienen una masa elevada pueden contraerse de nuevo, el núcleo se calienta lo suficiente como para fusionar núcleos más pesados y realiza este proceso por capas hasta que el núcleo está formado por hierro. La estrella colapsa y explota en una supernova (tipo II, Ib o Ic) dejando como remanente una estrella de neutrones. El origen de la presión que contrarresta el colapso gravitacional en las estrellas de neutrones es similar al que ocurre en las enanas blancas, la presión cuántica es provocada en este caso por neutrones (y una pequeña cantidad de protones) en vez de por electrones. Las estrellas de neutrones tienen una masa de entre 1.35 y 2.1 la masa del Sol y un radio de entre 10-20 Km, por lo que su densidad es aun mayor que la que se encuentra en las enanas blancas. El análogo para las estrellas de neutrones al límite de Chandrasekhar de las enanas blancas es el denominado límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [11]. Hasta hace relativamente poco se creía que el valor máximo posible para la masa de una estrella de neutrones era de $2.9 M_{\odot}$ [7], sin embargo, estudios recientes han mostrado que este valor es $2.16 M_{\odot}$ [12].

3.3. Ecuación de estado para estrellas compactas

Las ecuaciones diferenciales (8) y (10) junto con (9) necesitan una ecuación más que relacione la presión con la densidad, considerando que $\rho(r) = \epsilon(r)/c^2$ (donde $\epsilon(r)$ es la densidad de energía) y utilizando ciertos principios de la mecánica estadística se puede obtener la relación $P(\epsilon)$ [14]. Como ya se ha mencionado, las enanas blancas están formadas por electrones completamente degenerados, así pues se puede utilizar la estadística de Fermi-Dirac para hallar la ecuación de estado del fluido formado por este plasma de electrones. Partimos de la función de distribución de Fermi

$$n_i = \frac{1}{e^{(\frac{\epsilon_k - \mu}{k_B T})} + 1}, \quad (11)$$

donde μ es el potencial químico y n_i la ocupación de estados. Esta distribución a temperatura nula ($\beta \rightarrow \infty$) se comporta como una función escalón: se hace 0 si $(\epsilon_k - \mu) > 0$ y se hace 1 si $(\epsilon_k - \mu) < 0$. Conociendo la expresión que da el número de estados disponibles para un momento k

$$dn = \frac{4\pi k^2}{(2\pi\hbar)^3} dk, \quad (12)$$

podemos integrarla para hallar la ocupación $n(k_F)$ en el nivel de Fermi.

$$n_e = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad (13)$$

Ahora, la densidad de masa en términos de la masa del nucleon m_N viene dada por

$$\rho = mm_N \frac{A}{Z}, \quad (14)$$

donde $A/Z = 2$ si consideramos que la estrella está formada mayormente por ^{12}C y ^{16}O . Así, podemos calcular el valor de k_F

$$k_F(\rho) = \hbar \left(\frac{3\pi^2 \rho}{m_N A} \right)^{1/3} \quad (15)$$

Conociendo la relación de dispersión para una partícula relativista, dada por

$$\epsilon_0 = \sqrt{(kc)^2 + (m_e c^2)^2}, \quad (16)$$

podemos calcular la contribución de los electrones a la densidad de energía

$$\epsilon_e(k_F) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_F} (k^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} k^2 dk. \quad (17)$$

La presión de un sistema con una distribución isótropa de momento viene dada por

$$P = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{K^4 C^2}{E(k)}, \quad (18)$$

donde el factor $1/3$ viene por la isotropía. Desarrollando se llega a

$$p(k_F) = \frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 c^2 + m_e^2 c^4}} \quad (19)$$

$$= \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} (u^2 + 1)^{-1/2} u^4 du \quad (20)$$

$$= \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 - 3x)(1 + x^2)^{1/2} + 3 \sinh^{-1}(x)]. \quad (21)$$

La densidad de energía está dominada por la densidad de masa de los nucleones mientras que los electrones contribuyen mayormente a la presión. Así, se busca llegar a una ecuación de la forma $P = P(\epsilon)$, considerando los casos $x \ll 1$ y $x \gg 1$, es decir, $k_F \ll m_e c$ y $k_F \gg m_e c$ respectivamente. Considerando el primer caso se llega a

$$P(k_F) = \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} (u^2 + 1)^{-1/2} c^2 k^4 \approx \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_e c} u^4 du \quad (22)$$

$$= \frac{m_e^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{k_F}{m_e c} \right) = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2 \rho Z}{m_N A} \right)^{5/3}. \quad (23)$$

Recordando la relación $\epsilon = \rho c^2$ llegamos a la ecuación de estado en el límite no relativista

$$P = K_{no-rel}^{5/3} \quad (24)$$

donde

$$K_{no-rel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2 \rho Z}{m_N A} \right)^{5/3}. \quad (25)$$

Para el caso relativista ($k_F >> m_e$) llegamos a

$$P = K_{rel}^{4/3} \quad (26)$$

con

$$K_{rel} = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2 \rho Z}{m_N A} \right)^{4/3}. \quad (27)$$

La ecuación general tiene la forma

$$P = K \epsilon^\Gamma \quad (28)$$

llamada ecuación de estado politrópica. Para este tipo de ecuaciones el factor Γ , llamado exponente adiabático, viene dado por $\Gamma = 1 + \frac{1}{n}$ donde n es el índice adiabático, en los casos no relativista y relativista se tiene que $n = 3/2$ y $n = 3$ respectivamente.

Para las estrellas de neutrones se realiza un procedimiento análogo al anterior, de tal forma que

$$K_{no-rel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_n} \left(\frac{3\pi^2 \rho Z}{m_N A} \right)^{5/3} \quad (29)$$

y la K_{rel} no cambia. Se observa que la K_{no-rel} es la misma para ambos tipos de estrella pero cambiando la masa del electrón por la del neutrón.

4. Cálculos numéricos

Para estudiar los límites de estabilidad y hallar el radio y la masa dada una ecuación se debe integrar la ecuación que determina el equilibrio entre presión y gravedad (ya sea la de Tolman-Oppenheimer-Volkoff o la de Newton) junto con la ecuación que relaciona la masa con el radio. Para un fluido cuya ecuación de estado $P = P(\rho)$ es conocida, podemos determinar las configuraciones de equilibrio de la siguiente forma: Elegimos una *densidad central* ρ_c que define una presión central $P_c = P(\rho_c)$, integramos las ecuaciones de $M(r)$ y de equilibrio hasta que llegamos al punto en el que la presión se hace nula. Llegados a este punto se puede obtener la masa y el radio de la estrella dada una EoS y una presión central. El método de integración debe ser numérico, pues como se ha mencionado anteriormente hay escasas soluciones analíticas. Existe gran variedad de métodos numéricos (Euler, Verlet, Runge-Kutta 2º orden...), sin embargo, el escogido es el método de Runge-Kutta de 4º orden, pues es muy preciso y relativamente sencillo de implementar en un código.

4.1. Método de Runge-Kutta de 4º Orden

Para realizar la integración se implementa el método numérico de R-K, consiste en un método iterativo que permite calcular la solución de una ecuación diferencial ordinaria con mayor exactitud que el método de Euler o el método de Verlet.

El método permite hallar una aproximación numérica a la solución $y(x)$ dado un

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (30)$$

y conociendo una condición inicial $y(x_0) = y_0$. Este método nos permite discretizar las ecuaciones diferenciales, en particular, para el de 4º orden se deben hallar

$$k_0 = hf(x_n, y_n), \quad (31)$$

$$k_1 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}\right), \quad (32)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad (33)$$

$$k_3 = hf(x_n + h, y_n + k_2) \quad (34)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad (35)$$

donde h es el paso temporal. En el caso de nuestro problema se tienen que integrar la ecuación (8) y la ecuación (9). Como la primera depende de la segunda se debe definir una nueva serie de variables l_i similares a las k_i e iterarlas antes que ellas. Además, en el caso de esta integración el paso temporal h es realmente un diferencial del radio de la estrella, que es la variable sobre la que se está haciendo la integración. Integraremos con la condición $P(r) > 0$ y con valores iniciales

$$M(0) = 0, \quad (36)$$

$$P_0 = P_c, \quad (37)$$

donde P_0 viene de sustituir ρ_0 en la EoS. Se comienza el proceso desde $r \approx 0$ ¹ y se va aumentando el radio a cada paso hasta llegar al momento en el que $P(R) = 0$. Este radio R es el radio final de la estrella y con él se puede hallar también la masa final de esta.

¹No se integra desde $r = 0$ estrictamente porque se produce una indeterminación en la ecuación TOV.

4.2. Resultados para estrellas de densidad constante

Para comprobar que el programa funciona correctamente estudiamos el caso más sencillo, la solución analítica para una estrella de densidad constante ρ_0 (se resuelve en el anexo B.1). La masa resultante al integrar la ecuación TOV con la densidad independiente de la presión viene dada por la expresión (52). Además, sabemos que existe un límite superior para la masa.

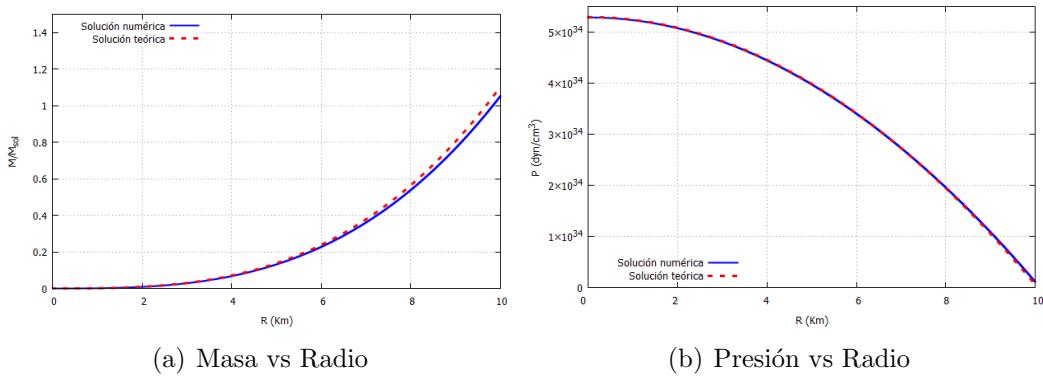


Figura 2: Resultados para densidad constante.

Comparando con el resultado teórico de la referencia [6] y con las soluciones teóricas que vienen dadas en el anexo B.1 vemos que la integración de este caso particular arroja resultados matemáticamente consistentes, sin embargo, físicamente este resultado no tiene sentido, pues no existen estrellas cuya densidad no varíe conforme lo hace el radio.

4.3. Resultados de la integración para enanas blancas

En la sección 3.3 se han estudiado las estrellas compactas para los casos no relativista y relativista, en este apartado se mostrarán las soluciones numéricas para las enanas blancas y las estrellas de neutrones en ambos casos. Para que el cálculo numérico sea computacionalmente más sencillo es conveniente adimensionalizar las ecuaciones (8), (10) y (9), en este caso lo hacemos siguiendo las referencias [14], [5], [11] y [15]. En el apéndice B.2 se adjuntan los cálculos así como los valores iniciales de las constantes que genera la factorización. Para las enanas blancas se va a realizar la integración utilizando la ecuación de equilibrio hidrostático de Newton, pues las correcciones de la relatividad general no tienen mucha relevancia para esta clase de astros [15].

4.3.1. Solución numérica para el caso no relativista

Como ya hemos visto anteriormente tenemos dos casos límite: el relativista y el no relativista, para poder realizar la integración se debe conocer el rango de presiones centrales de las enanas blancas. Se realiza la simulación para 3 valores diferentes de P_0 .

Así, los resultados para las enanas blancas para electrones degenerados no relativistas se recogen en el cuadro 1 y en la figura 3.

P_0 (dyn/cm ³)	Masa (M_\odot)	Radio (Km)
$2,5 \cdot 10^{23}$	0.796	8411.35
$2,5 \cdot 10^{22}$	0.393	10589.26
$2,5 \cdot 10^{21}$	0.198	13331.09

Cuadro 1: Resultados de la masa M respecto al radio R en una enana blanca con electrones no relativistas.

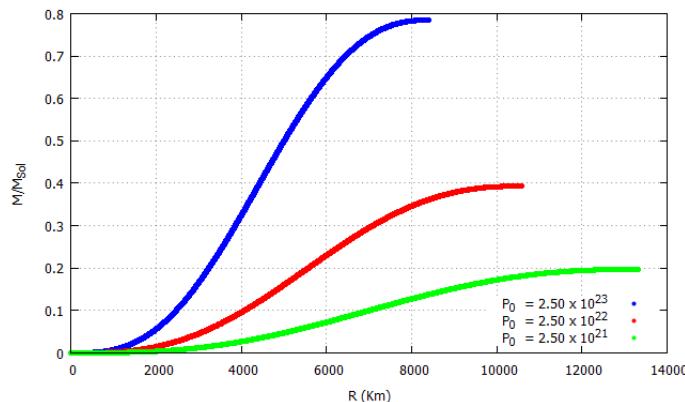


Figura 3: Evolución de la masa M respecto al radio R en una enana blanca con electrones no relativistas.

Se observa que cuánto menor es la presión central mayor es el radio de la estrella pero menor su masa final.

4.3.2. Solución numérica para el caso relativista

En el caso de una enana blanca con electrones relativistas se tienen los resultados recogidos en el cuadro 2 y la figura 4.

P_0 (dyn/cm ³)	Masa (M_\odot)	Radio (Km)
$5,62 \cdot 10^{25}$	1.431	5710.65
$5,62 \cdot 10^{24}$	1.431	10155.14
$5,62 \cdot 10^{23}$	1.431	18058.60

Cuadro 2: Resultados de la masa M respecto al radio R en una enana blanca con electrones relativistas.

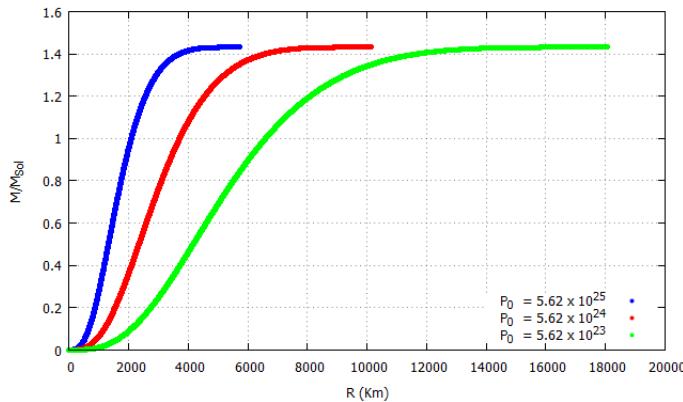


Figura 4: Evolución de la masa M respecto al radio R en una enana blanca con electrones relativistas.

Para este caso se puede observar que la masa es independiente de la presión central, además, se constata que las estrellas para electrones no relativistas son más masivas que las enanas blancas relativistas. El resultado de la masa final llama la atención, pues esta depende directamente de las condiciones iniciales y debería variar para diferentes densidades centrales. Sin embargo, se debe notar que el valor de la masa es muy próximo al límite de Chandrasekhar, por tanto es posible que sólo una de estas tres estrellas sea estable. Para saber cuál de ellas se debería analizar la curva de estabilidad de la que hablaremos al final de este trabajo.

En la figura 5 se observa el perfil de la presión respecto al radio para el caso en el que $P_0 = 2,5 \cdot 10^{23}$ para la enana blanca relativista y la no relativista, es interesante comparar estas figuras pues nos dan cierta información acerca de la atmósfera de la estrella.

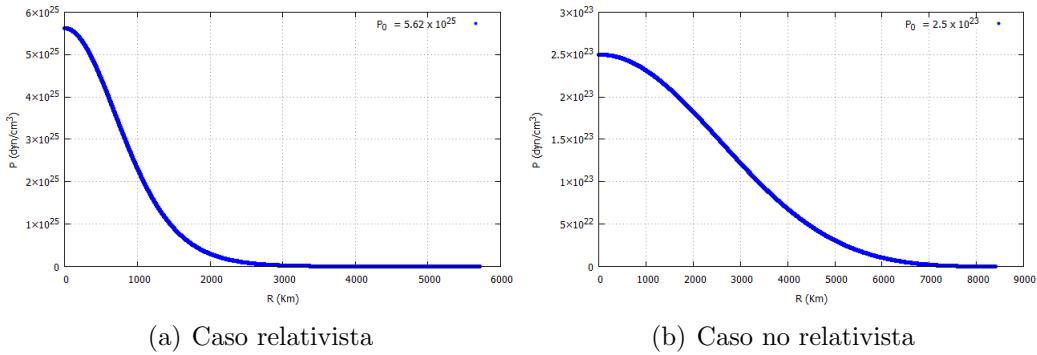


Figura 5: Presión P respecto al radio R en enanas blancas.

Observamos que el perfil de decaimiento de la presión en el caso no relativista es más lento, mientras que en el caso relativista la presión se hace casi 0 a unos 2000 Km, en el caso no relativista la presión no llega a estos valores hasta los 6000 Km. Esto significa que la atmósfera es mucho mayor para el caso relativista que para el caso no relativista. Por otro lado, el caso no relativista tiene menor masa pero mayor radio, es decir, la estrella está formada por un fluido mucho menos denso. Esto tiene mucho sentido, pues las partículas no relativistas tienen una velocidad mucho menor y por tanto generan una presión de degeneración menos intensa, lo que implica una menor densidad.

4.4. Resultados de la integración para estrellas de neutrones

Al ser objetos mucho más densos, las estrellas de neutrones sufren las correcciones de la relatividad general de forma notable, así, se debe integrar la ecuación TOV (anexo B.2).

4.4.1. Solución numérica para el caso no relativista

El resultado esperado para una estrella de neutrones no relativista es obtener un cuerpo con un radio entre 10-20 Km y una masa menor que $2 M_{\odot}$.

P_0 (dyn/cm ³)	Masa (M_\odot)	Radio (Km)
$1,63 \cdot 10^{34}$	0.614	15.26
$1,63 \cdot 10^{33}$	0.351	20.11
$1,63 \cdot 10^{32}$	0.186	25.80

Cuadro 3: Resultados de la masa M respecto al radio R en una estrella de neutrones con neutrones no relativistas.

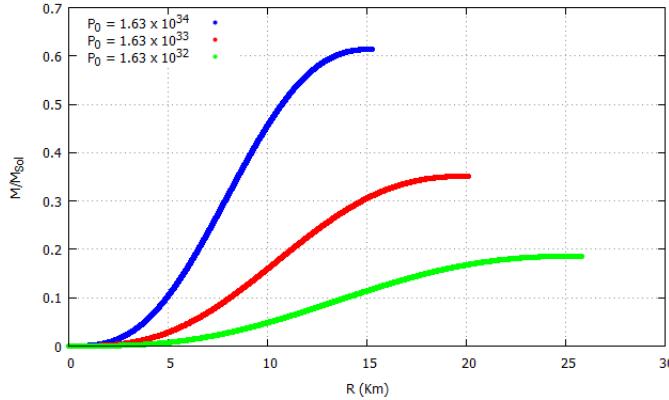


Figura 6: Evolución de la masa M respecto al radio R en una estrella de neutrones con neutrones no relativistas.

Observamos que la dependencia de la masa con la presión central es parecida al caso análogo en enanas blancas, cuando disminuye una lo hace la otra. Sin embargo, se observa que el radio de este tipo de estrellas es mucho menor que el de las enanas blancas, pues se debe recordar que estos astros son el estado anterior a formar un agujero negro, están muy cerca de la densidad límite de colapso.

Por último, para la estrella de neutrones relativista se tiene un resultado diferente al esperado, pues como se ve en la figura 7 la estrella posee un radio mucho mayor del esperado.

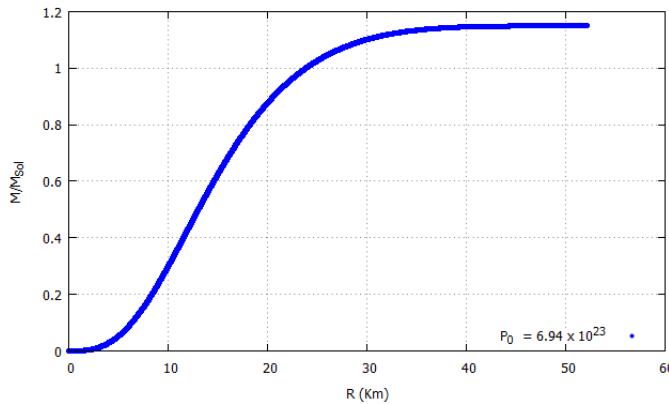


Figura 7: Evolución de la masa M respecto al radio R en una estrella de neutrones con neutrones relativistas.

Esto ocurre debido a que en el modelo relativista las partículas tienen velocidades cercanas a c generando así una presión muy alta, al acercarse a la superficie de la estrella la presión disminuye y el modelo no es consistente, por tanto la condición $P(R) = 0$ no se alcanza cuando debería. on

4.5. Resultados de la integración para RG y Newton para una ecuación de estado c valores intermedios

Una vez hemos estudiado ya los casos límites para las estrellas compactas es conveniente realizar la integración con unos valores de K y Γ que determinen un caso intermedio y más realista, pues que ninguno de los casos límite existe físicamente. En este apartado se estudiarán sólo estrellas de neutrones. Este análisis nos va a permitir observar las diferencias entre la teoría clásica y la relativista y observar como afectan los cambios en los parámetros iniciales al resultado final de la estrella. Como ya hemos visto anteriormente para describir el fluido de este tipo de cuerpos se debe utilizar una ecuación de estado de forma

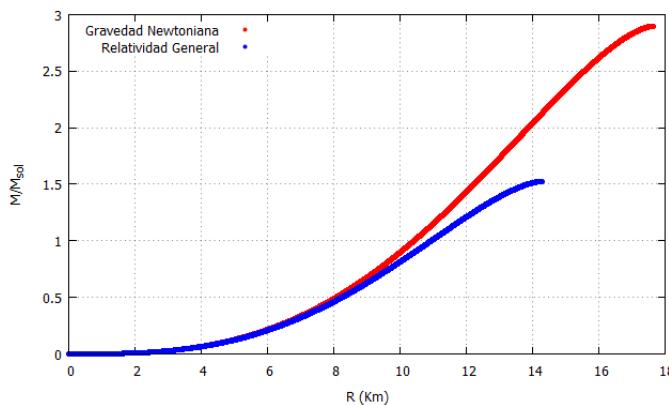
$$P = K\rho^\Gamma. \quad (38)$$

Así pues, se han escogido los parámetros [10]

$$K = 2 \cdot 10^{-6}, \quad (39)$$

$$\Gamma = 2,75. \quad (40)$$

Las Figuras 8, 9 y 10 representan el resultado de esta integración para la masa, la presión y la densidad respectivamente mediante va aumentando el radio de la estrella.

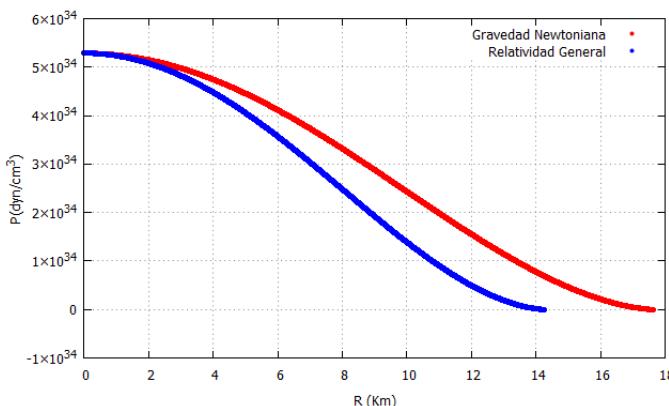
Figura 8: Evolución de la masa M respecto al radio R .

Los resultados de la integración de las ecuaciones (8) y (9) se recogen en el Cuadro 4.

Modelo	Masa (M/M_\odot)	Radio (Km)
Gravedad Newtoniana	2.90	17.65
Relatividad general	1.65	14.27

Cuadro 4: Resultados integración para masa y radio.

Podemos observar que para el modelo clásico tenemos como resultado una estrella con mayor masa y mayor radio que la integración de la ecuación (8). Estos resultados son físicamente consistentes, pues como se ha mencionado anteriormente, la relatividad general dota de más fuerza a la atracción gravitatoria, por tanto el modelo relativista nos proporciona un astro con un radio menor, pues la presión de degeneración aguanta menos ante ella. Para la densidad y la presión se tienen 9 y 10.

Figura 9: Evolución de la presión P respecto al radio R .

En la Figura 9 se observa que la presión cae a 0 más lentamente para la ecuación (10) dando como resultado que el radio R sea mayor al obtenido usando la relatividad general.

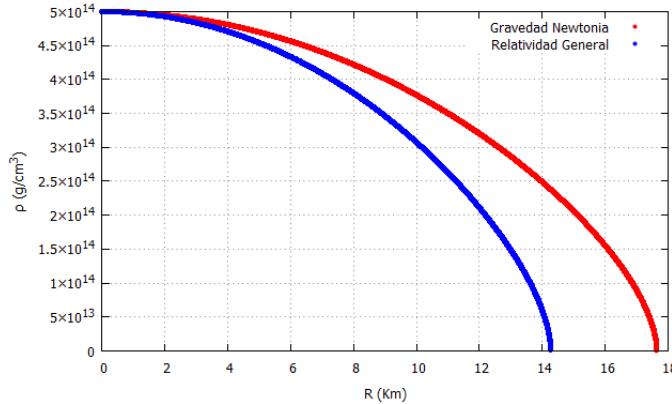


Figura 10: Evolución de la densidad ρ respecto al radio R .

Observamos que la densidad también cae a 0, de tal forma que el perfil relativista cae más rápidamente coincidiendo en este aspecto con los resultados de la figura 9.

4.6. Integración variando las condiciones iniciales

En el apartado anterior se han utilizado unos valores fijos de Γ y de K , además, hemos observado que la teoría adecuada para describir una estrella de neutrones es la relatividad general. Esta última afirmación se hace más evidente al variar ligeramente la presión central alrededor del valor que hemos usado inicialmente. Además, para obtener un análisis más profundo de la relevancia de la ecuación de estado es interesante realizar la integración variando los valores de la constante K y el índice adiabático Γ . De esta forma podemos observar como afectan los valores iniciales a los resultados para la masa y el radio final de nuestra estrella.

4.6.1. Integración variando la densidad central

Para la densidad central ρ_0 se tienen las figuras 11 y 12.

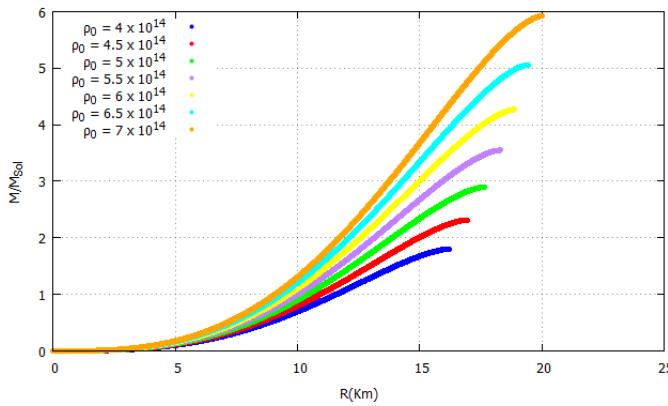


Figura 11: Evolución de la masa M respecto al radio R variando la densidad central ρ_0 en gravedad newtoniana.

Para la figura 11 se observa como el aumento de la densidad central conlleva un aumento de la masa y el radio final de la estrella, esto se debe a que el modelo de gravedad newtoniana no es realista para las estrellas de neutrones, por lo que no tiene significado físico realizar esta integración, si seguimos aumentando el valor de la densidad central los resultados para la masa y el radio no convergerán a un valor límite y seguirán aumentando.

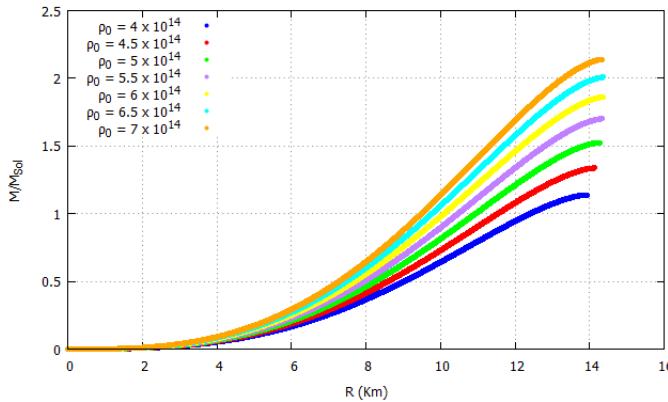


Figura 12: Evolución de la masa M respecto al radio R variando la densidad central ρ_0 en relatividad general.

Por el contrario, para la figura 12 se observa como la variación de la masa y el radio final tienden a un valor límite cercano a 14 Km y $2-3 M_\odot$ respectivamente. Es interesante observar que el aumento de la densidad central ya no implica un aumento del radio final de la estrella, pues a partir de $\rho_0 = 5.5 \cdot 10^{14}$ el resultado decrece conforme aumenta ρ_0 . En este caso el modelo elegido es mucho más realista y se ajusta a la realidad física de estos astros, pues como ya se ha explicado en secciones anteriores la naturaleza de la materia que forma las estrellas de neutrones hace a estos astros uno de los objetos más densos del universo, lo que implica que

tienen un efecto mucho mayor en la curvatura del espacio-tiempo y, por lo tanto, deben obedecer las ecuaciones de la relatividad general.

4.6.2. Integración variando los valores de la constante K y el coeficiente adiabático Γ

Una vez estudiada la dependencia de los resultados al variar la densidad central es interesante realizar el mismo proceso para las otras dos condiciones iniciales relacionadas con la ecuación de estado politrópica, es decir, para la constante K y el coeficiente adiabático. Aunque ya hemos visto que no tiene sentido físico el modelo clásico es interesante seguir observando las diferencias entre este y el relativista. Al final del presente trabajo se estudiará con mayor detalle las implicaciones que tiene la convergencia a un valor límite y como se relaciona con la estabilidad de estos objetos.

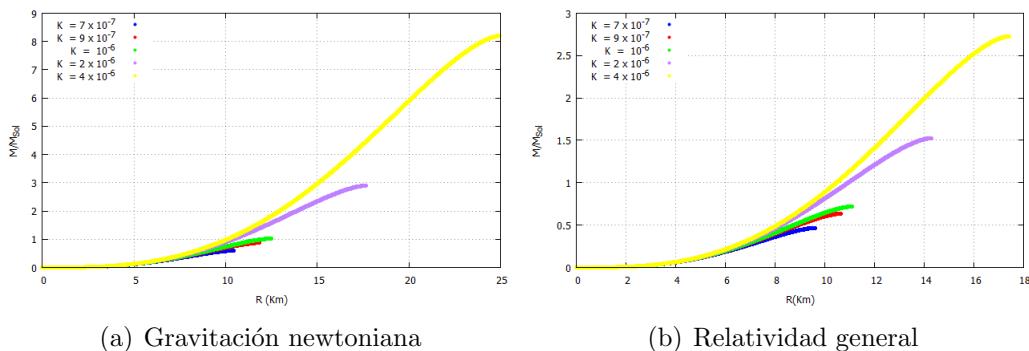


Figura 13: Evolución de la masa M respecto al radio R variando la constante K .

De nuevo, se observa como para los mismos valores de K los resultados para la integración relativista crecen más rápidamente. Sin embargo, en este caso no se observa una convergencia en nuestro rango de valores escogidos.

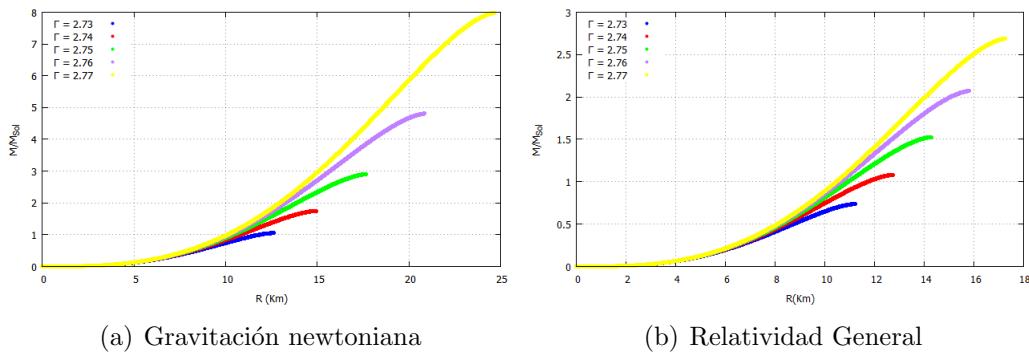


Figura 14: Evolución de la masa M respecto al radio R variando el coeficiente adiabático.

En la figura 14 se observa el mismo fenómeno que en la figura 13. La función de Γ y K es caracterizar el fluido que forma la estrella, por tanto al variar estos valores para una misma presión central estamos comparando fluidos diferentes que forman estrellas que pueden o no existir físicamente pero que no tendrían relación entre ellas. Sin embargo, mantener estas dos magnitudes fijas variando la densidad central nos va a permitir realizar un análisis sobre la estabilidad de un conjunto de estrellas de neutrones formadas por el mismo fluido. Por tanto, vemos que la presión central es una magnitud realmente importante en el estudio de las estrellas de neutrones.

Los valores exactos de la masa y el radio para cada integración se recogen en las tablas del Anexo A.

5. Modelo mixto para una estrella compacta

Cómo se mencionaba en 4.4.1, el resultado de la integración para estrellas de neutrones relativistas no nos proporciona unos valores realistas. El modelo con valores arbitrarios visto en 4.5 depende de consultar biografía y el significado físico de la constante K es difuso. Por tanto, se pueden mezclar los modelos relativista y no relativista para generar un modelo fácilmente comprensible y con resultados plausibles.

En el interior de la estrella de neutrones las partículas están muy compactadas y como se ha visto anteriormente esto genera una mayor presión de degeneración, conforme nos acercamos a la superficie dicha presión disminuye, es decir, las partículas se mueven con menor velocidad. Por tanto, es lógico crear un modelo en el que la integración comienza con neutrones relativistas, cuyas altísimas ve-

locidades se generan por la inmensa presión en el interior de la estrella; mientras que mediante nos acercamos a la superficie se vuelven no relativistas, pues pierden velocidad al sufrir menos presión de degeneración.

Este cambio se podría producir de forma suave, sin embargo, por complejidad se estudiará el caso más simple (y por tanto menos físico), en el que dicho cambio se produce a una presión fija y de forma abrupta.

Para una presión $P_0 = 6,94 \cdot 10^{34}$ se obtiene el perfil de la figura 15.

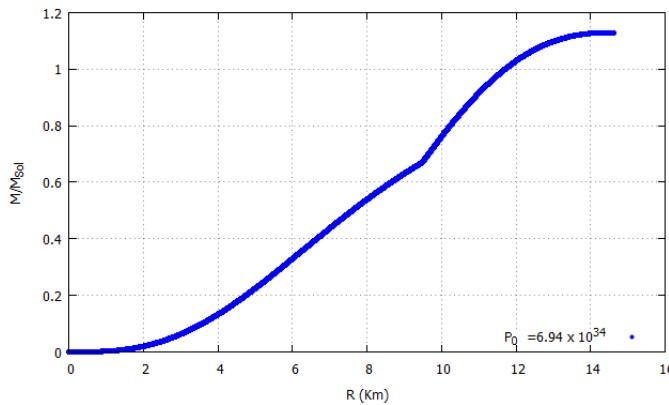


Figura 15: Evolución de la masa M respecto al radio R para una estrella con modelo mixto.

Es evidente que el cambio de modelo acelera la integración, dando unos valores para el radio y la masa más realistas. Por otra parte, el hecho de haber cambiado el modelo tan abruptamente provoca un cambio brusco en la función. Lo importante en este modelo no es tanto el perfil como los resultados finales que nos puede dar. Una de las cuestiones más importantes a la hora de implementar este modelo es establecer el lugar en el que se pasa de un estado a otro. Se debe elegir un momento en la integración adecuado. Este vendrá dado por el valor de la presión en ese radio $P(r_{cambio})$. En este caso, tras realizar la integración numerosas veces se ha elegido que $P(r_{cambio}) = 8,13 \cdot 10^{32}$ dyn/cm³. Esta elección se basa principalmente en la consistencia de los resultados finales, pues si se escoge un valor mayor el cambio no llega a hacerse y estaríamos en el caso de la estrella relativista. Hay que notar también que aunque el valor de la presión es fijo, el valor de r_{cambio} varía dependiendo de la presión central escogida.

Para diferentes presiones centrales se tienen los resultados de la figura 16.

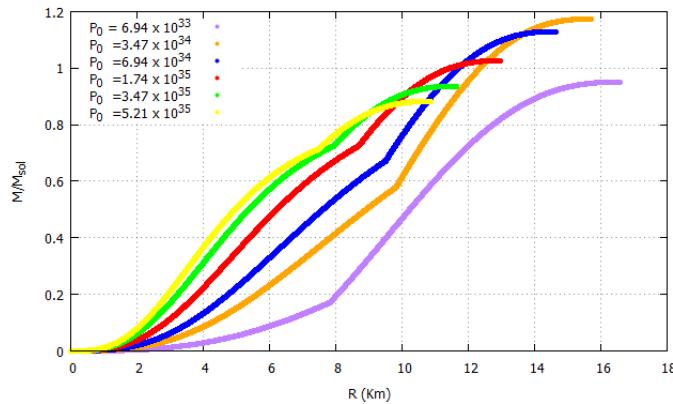


Figura 16: Evolución de la masa M respecto al radio R para una estrella con modelo mixto para diferentes presiones centrales P_0 .

Los resultados se encuentran en el apéndice A.

6. Estabilidad

Una vez se han integrado las ecuaciones para el valor de una presión central, es decir, se han obtenido los valores del radio y de la masa para una determinada EoS dado el valor de su presión en el centro de la estrella, se puede realizar un análisis de la distribución de dichos valores dependiendo del valor de ρ_0 escogido. Esto se consigue realizando la integración para un rango de densidades o presiones centrales.

La gráfica que se obtiene muestra la distribución de las masas y radios que se puede obtener dada la ecuación de estado a partir de las condiciones de presión en el centro de la estrella. A partir de dicha gráfica se obtiene información tal como la máxima masa posible para los parámetros escogidos en la ecuación politrópica y la estabilidad de la estrella.

La condición de estabilidad ² viene dada por la derivada de la masa respecto a la densidad central, de tal forma se tiene

²Esta condición es necesaria pero no suficiente, sin embargo, dada la naturaleza de los resultados podemos considerar que es un criterio adecuado en este caso.

$$\frac{dM}{d\rho_0} > 0 \text{ estable,} \quad (41)$$

$$\frac{dM}{d\rho_0} < 0 \text{ inestable.} \quad (42)$$

Así, para el rango $3,0 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3 - 3 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$ de ρ_c en la estrella de la sección 4.5 se obtiene la gráfica de la Figura 17.

[14] [15]

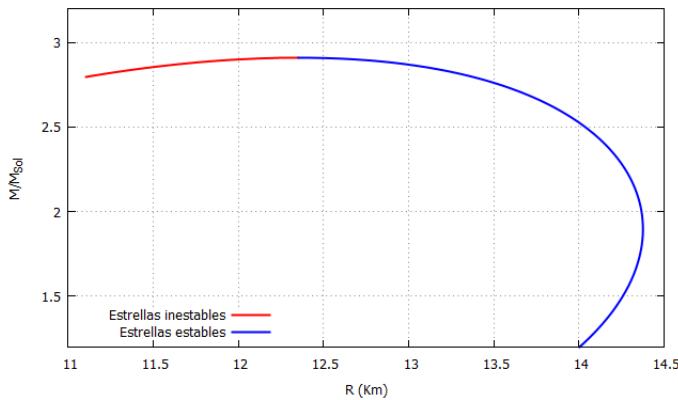


Figura 17: Masa como función del radio variando la presión central para una estrella de neutrones con $\Gamma = 2,75$ y $K = 2 \cdot 10^{-6}$.

Por la condición de estabilidad sabemos pues que sólo serán estables las estrellas cuyos valores se encuentran a la derecha del máximo, las que ocupan la parte izquierda sufrirán colapso gravitatorio.

Podemos hacer el mismo análisis para para el modelo mixto de la sección anterior.

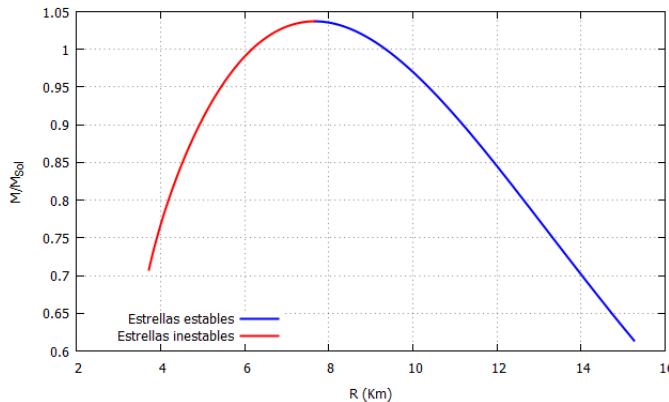


Figura 18: Masa como función del radio variando la presión central para el modelo mixto de una estrella de neutrones.

Así, para cada tipo de estrella tenemos los valores máximos de la masa que se ven en el cuadro 5.

Modelo	Masa (M_{\odot})	Radio (Km)
Valores intermedios	2.910	12.350
Modelo mixto	1.0372	7.664

Cuadro 5: Valores máximos de la masa M y el radio R en una estrella de neutrones.

7. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado las ecuaciones que describen las propiedades de los fluidos que forman las estrellas compactas. Se ha visto que a través de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff y utilizando una ecuación de estado (en nuestro caso politrópica) se pueden hallar los valores finales del radio y masa conociendo la densidad en el centro.

Se han estudiado los modelos límites para las enanas blancas y las estrellas de neutrones, estableciendo que estos modelos dan resultados interesantes pero muy alejados de los objetos que existen realmente. Por ello se han utilizado dos modelos presumiblemente más veraces. En el primero de ellos se utilizan valores arbitrarios recogidos de la literatura para realizar la integración, integrando en este modelo se ha comprobado que la teoría de la relatividad general es la adecuada para analizar las estrellas de neutrones, mientras que la teoría clásica de newton no arroja resultados físicamente correctos. Bajo este modelo también, se ha observado lo que

ocurre al variar los valores iniciales de la integración. De esta forma hemos obtenido que para los dos valores relacionados con la ecuación de estado (Γ y K) el radio y masa final de la estrella aumentan conforme dichas magnitudes lo hacen. Sin embargo, para la presión central en relatividad general ocurre un fenómeno reseñable, puesto que al llegar a un valor máximo para la masa la siguiente integración da unos resultados menores.

En el segundo modelo se han combinado los valores de K y Γ para estrellas relativistas y no relativistas, de tal forma que se realiza el cambio entre ambos valores en un determinado valor de la presión (matemáticamente hablando es como integrar utilizando una ecuación de estado definida a trozos). Este modelo arroja resultados bastante buenos que entran en el rango de las estrellas reales.

Por último, se han analizado las condiciones de estabilidad de las estrellas dado el valor de la presión central, de tal forma que se han obtenido unos perfiles de la relación masa final-radio final pudiendo conocer si la estrella es estable o colapsa sólo con observar donde cae en la gráfica.

A. Resultados de la integración

ρ_0 (g/cm^3)	M/M_\odot	R (Km)
$4 \cdot 10^{14}$	1.81	16.23
$4,5 \cdot 10^{14}$	2.32	16.96
$5 \cdot 10^{14}$	2.90	17.65
$5,5 \cdot 10^{14}$	3.55	18.28
$6 \cdot 10^{14}$	4.27	18.89
$6,5 \cdot 10^{14}$	5.06	19.47
$7 \cdot 10^{14}$	5.93	20.02

Cuadro 6: Resultados de la masa M y radio R variando la densidad central ρ_0 en gravedad newtoniana.

ρ_0 (g/cm^3)	M/M_\odot	R (Km)
$4 \cdot 10^{14}$	1.14	13.93
$4,5 \cdot 10^{14}$	1.34	14.14
$5 \cdot 10^{14}$	1.53	14.27
$5,5 \cdot 10^{14}$	1.70	14.35
$6 \cdot 10^{14}$	1.86	14.37
$6,5 \cdot 10^{14}$	2.01	14.36
$7 \cdot 10^{14}$	2.14	14.33

Cuadro 7: Resultados de la masa M y radio R variando la densidad central ρ_0 en relatividad general.

K	M/M_\odot	R (Km)
$7 \cdot 10^{-7}$	0.80	10.44
$9 \cdot 10^{-7}$	0.88	11.84
10^{-6}	1.03	12.48
$2 \cdot 10^{-6}$	2.90	17.65
$4 \cdot 10^{-6}$	8.2	24.95

Cuadro 8: Resultados de la masa M y radio R variando la constante K en gravedad newtoniana.

K	M/M_\odot	R (Km)
$7 \cdot 10^{-7}$	0.47	9.59
$9 \cdot 10^{-7}$	0.64	10.64
10^{-6}	0.72	11.10
$2 \cdot 10^{-6}$	1.53	14.27
$4 \cdot 10^{-6}$	2.73	17.41

Cuadro 9: Resultados de la masa M y radio R variando la constante K en relatividad general.

Γ	M/M_\odot	R (Km)
2.73	1.05	12.63
2.74	1.75	14.93
2.75	2.90	17.65
2.76	4.81	20.86
2.77	7.98	24.66

Cuadro 10: Resultados de la masa M y radio R variando el índice adiabático Γ en gravedad newtoniana.

Γ	M/M_\odot	R (Km)
2.73	0.74	11.21
2.74	1.08	12.72
2.75	1.53	14.27
2.76	2.07	15.81
2.77	2.69	17.27

Cuadro 11: Resultados de la masa M y radio R variando el índice adiabático Γ en relatividad general.

P_0 (dyn/cm ³)	Masa (M_\odot)	Radio (Km)
$6.94 \cdot 10^{33}$	0.95	16.59
$3.47 \cdot 10^{34}$	1.17	15.71
$6.94 \cdot 10^{34}$	1.13	14.63
$1.74 \cdot 10^{35}$	1.03	12.97
$3.47 \cdot 10^{35}$	0.94	11.64
$5.21 \cdot 10^{35}$	0.88	10.87

Cuadro 12: Resultados de la masa M y radio R en el modelo mixto para diferentes presiones centrales.

B. Cálculos

B.1. Solución de TOV para densidad constante

La ecuación TOV tiene un número limitado de soluciones analíticas, y entre ellas muchas no tienen un significado físico relevante [9]. La solución analítica más sencilla se da al analizar un fluido cuya densidad es constante, en este caso la presión P es independiente de la densidad ρ_0 [5]

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & (r \leq 0) \\ 0 & (r > 0) \end{cases} \quad (43)$$

Para realizar este conjunto de operaciones se va a reescribir la ecuación (8) como

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho + P)(M + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2M)}, \quad (44)$$

Es decir, un sistema de unidades en el que $c = M_\odot = G = 1$ que nos permite ignorar estas constantes y hacer más llevaderos los cálculos. Con todo esto, resolver la ecuación (9) es trivial y se obtiene

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3 \quad (45)$$

de tal forma que se puede insertar en (44) y se tiene

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3}\pi r \frac{(\rho_0 + P)(\rho_0 + 3P)}{1 - \frac{8}{3}\pi\rho_0 r^2}. \quad (46)$$

Así pues, esta ecuación diferencial tiene variables separables y se puede integrar a ambos lados de la igualdad con rangos de integración desde P hasta $P_c = P(r = 0)$, esto queda

$$\int_P^{P_c} \frac{dP'}{(\rho_0 + P')(\rho_0 + 3P')} = -\frac{4}{3}\pi \int_0^r \frac{r' dr'}{1 - \frac{8}{3}\pi\rho_0 r'^2}. \quad (47)$$

Pese a que no es un cálculo inmediato, resolver ambas integrales es relativamente sencillo, la expresión resultante es

$$\frac{1}{2\rho_0} \left[\ln \left(\frac{3P + \rho_0}{P + \rho_0} \right) - \ln \left(\frac{3P_c + \rho_0}{P_c + \rho_0} \right) \right] = \frac{1}{4\rho_0} \ln \left(1 - \frac{8}{3}\pi\rho_0 r^2 \right), \quad (48)$$

simplificando e introduciendo la masa $m(r) = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{3}$ se tiene

$$\frac{\rho_0 + 3P}{\rho_0 + P} = \frac{\rho_0 + 3P_c}{\rho_0 P_c} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}. \quad (49)$$

En la superficie de la estrella la presión se vuelve nula, o lo que es lo mismo $P(R) = 0$. Para encontrar la expresión del radio se despeja la anterior expresión con $P = 0$ y $r = R$ obteniéndose

$$R^2 = \frac{1}{8\pi\rho_0} \left[1 - \frac{(\rho_0 + P_c)^2}{(\rho_0 + 3P_c)^2} \right], \quad (50)$$

sustituyendo en (49) para eliminar P_c se llega a (**cita**)

$$P(r) = \rho_0 \left[\frac{(1 - \frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2} - (1 - \frac{2M}{R})^{1/2}}{3(1 - \frac{2M}{R})^{1/2} - (1 - \frac{2Mr^2}{R^3})^{1/2}} \right], \quad (51)$$

donde

$$M = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} \quad (52)$$

es la masa de la estrella.

B.2. Adimensionalización de las ecuaciones TOV para la simulación de estrellas compactas en sus límites teóricos

La ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana es

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (53)$$

donde sabemos que $\rho(r) = \epsilon(r)/c^2$. Para adimensionalizar esta ecuación a valores adimensionales definimos:

$$M(r) = \tilde{M}(r)M_\odot, \quad (54)$$

$$P = \epsilon_0 \tilde{P}, \quad (55)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}. \quad (56)$$

Tenemos \tilde{M} , \tilde{P} y $\tilde{\epsilon}$ como los valores adimensionales. De la adimensionalización de la masa llegamos a

$$\frac{dP}{dr} = -R_0 \frac{\tilde{M}(r)\tilde{\epsilon}(r)}{r^2}, \quad (57)$$

donde $R_0 = \frac{GM_\odot}{c^2} = 1,47 Km$. De las expresiones para P y ϵ la ecuación politrópica queda como

$$\tilde{P} = \tilde{K}\tilde{\epsilon}^\Gamma, \quad (58)$$

con

$$\tilde{K} = K\epsilon_0^{\Gamma-1}. \quad (59)$$

La ecuación de equilibrio hidroestático tiene ahora la siguiente forma

$$\frac{d\tilde{P}}{dr} = -\frac{\alpha \tilde{P}(r)^{\frac{1}{\Gamma}} \tilde{M}(r)}{r^2}, \quad (60)$$

siendo α

$$\alpha = \frac{R_0}{\tilde{K}^{\frac{1}{\Gamma}}} = \frac{R_0}{(K\epsilon_0^{\Gamma-1})^{\frac{1}{\Gamma}}}. \quad (61)$$

De esta forma, despejando se llega a una expresión para obtener un ϵ_0 dependiendo de un valor de α escogido. Por otro lado también se debe adimensionalizar la ecuación (9), operando llegamos a

$$\frac{d\tilde{M}(r)}{dr} = \beta r^2 \tilde{P}^{\frac{1}{\Gamma}}, \quad (62)$$

con

$$\beta = \frac{4\pi\epsilon_0}{M_\odot c^2 (K\epsilon_0^{\Gamma-1})^{\frac{1}{\Gamma}}}. \quad (63)$$

Así, tenemos ambas ecuaciones diferenciales con dimensiones de Km^{-1} . La factorización de la ecuación (8) sigue los mismos pasos y da como resultado

$$\frac{d\tilde{P}(r)}{dr} = -\frac{\alpha\tilde{P}(r)^{\frac{1}{\Gamma}}}{r^2} \left[1 + \tilde{K}^{\frac{1}{\Gamma}}\tilde{P}(r) \right] \left[1 + \delta r^3 \frac{\tilde{P}(r)}{\tilde{M}(r)} \right] \left[1 - \frac{2R_0\tilde{M}(r)}{r} \right]^{-1} \quad (64)$$

donde

$$\delta = \frac{4\pi}{M_\odot c^2} \left[\frac{1}{K} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right)^\Gamma \right]^{\frac{1}{\Gamma-1}}. \quad (65)$$

Los valores de alfa escogidos para las integraciones (dados por [15], [14], [5] y [6]) son los siguientes:

Tipo de estrella	α (Km)	ϵ_0 (erg/cm ³)	β (Km ⁻³)
Estrella de neutrones no relativista	1.00	$1.61 \cdot 10^{38}$	0.7636
Estrella de neutrones relativista	4.43	$1.61 \cdot 10^{38}$	3.374
Enana blanca no relativista	0.05	$2.49 \cdot 10^{37}$	0.0053
Enana blanca relativista	1.47	$7.46 \cdot 10^{39}$	52.46

Referencias

- [1] Max Camenzind. *Compact Objects in Astrophysics*. Springer, 2007.
- [2] S. Chandrasekhar. “The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass. (Second Paper.)” En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 95.3 (ene. de 1935), págs. 207-225. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1093/mnras/95.3.207. eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/95/3/207/18326119/mnras95-0207.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/95.3.207>.
- [3] S. Chandrasekhar. “The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs”. En: 74 (jul. de 1931), pág. 81. DOI: 10.1086/143324.
- [4] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973, 593-612.
- [5] Ellen Egeland. “Compact Stars”. En: (2007).
- [6] Jose Juan González Avilés. “Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para estrellas compactas, representación paramétrica e influencia de la constante cosmológica”. Tesis doct. Universidad Michoacana de san Nicolás de Hidalgo, 2011.

- [7] Vassiliki Kalogera y Gordon Baym. “The Maximum Mass of a Neutron Star”. En: *The Astrophysical Journal* 470.1 (1996), págs. L61-L64. DOI: 10.1086/310296. URL: <https://doi.org/10.1086/310296>.
- [8] S. O. Kepler y col. “White dwarf mass distribution in the SDSS”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 375.4 (2007), 1315–1324. ISSN: 1365-2966. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2006.11388.x. URL: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.11388.x>.
- [9] Ch. C. Moustakidis. *The stability of relativistic stars and the role of the adiabatic index*. 2017. arXiv: 1612.01726 [gr-qc].
- [10] Charalampos Moustakidis. “Solving the neutron star TOV equations with polytropic EoS”. En: University of thessaloniki, 2020.
- [11] J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff. “On Massive Neutron Cores”. En: *Physical Review* 55.4 (feb. de 1939), págs. 374-381. DOI: 10.1103/PhysRev.55.374.
- [12] Luciano Rezzolla, Elias R. Most y Lukas R. Weih. “Using Gravitational-wave Observations and Quasi-universal Relations to Constrain the Maximum Mass of Neutron Stars”. En: *The Astrophysical Journal* 852.2 (2018), pág. L25. DOI: 10.3847/2041-8213/aaa401. URL: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/aaa401>.
- [13] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984, 136-148.
- [14] Irina Sagert y col. “Compact stars for undergraduates”. En: *European Journal of Physics* 27.3 (2006), 577–610. ISSN: 1361-6404. DOI: 10.1088/0143-0807/27/3/012. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/27/3/012>.
- [15] Richard R. Silbar y Sanjay Reddy. “Erratum: “Neutron stars for undergraduates” [Am. J. Phys. 72 (7), 892–905 (2004)]”. En: *American Journal of Physics* 73.3 (2005), págs. 286-286. DOI: 10.1119/1.1852544. eprint: <https://doi.org/10.1119/1.1852544>. URL: <https://doi.org/10.1119/1.1852544>.