

Coeficientes de los armónicos esféricos del potencial gravitatorio de un sólido e integrales de inercia



Juan José Costa Pérez de Iriarte
Trabajo de Fin de Grado en Física
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Luis Floría Gimeno
10 de septiembre de 2021

Prólogo

Este Trabajo de Fin de Grado, que lleva por título “*Coefficientes de los armónicos esféricos del potencial gravitatorio de un sólido e integrales de inercia*”, surgió como ampliación y generalización de algunos conceptos y resultados expuestos en la asignatura optativa “*Geofísica*”, perteneciente al plan de estudios del Grado en Física de la Universidad de Zaragoza.

El propósito de este TFG consiste en la deducción de unas fórmulas generales para los coeficientes del desarrollo, en forma de serie absolutamente convergente de armónicos esféricos, del potencial gravitatorio creado por un sólido rígido de figura geométrica arbitraria y con una distribución de materia arbitraria en su interior.

En esta Memoria se recogen las fórmulas finales obtenidas, que se presentan en términos de combinaciones lineales de integrales de inercia, y su aplicación a algunos casos concretos.

Parte de este trabajo fue expuesto como comunicación oral, bajo el título “*Coefficients of the Gravitational Potential of a Rigid Body and Inertia Integrals*”, en las *XIX Jornadas de Trabajo en Mecánica Celeste* que tuvieron lugar en el Campus de Tudela de la Universidad Pública de Navarra entre el 30 de agosto y el 1 de septiembre de 2021.

Los contenidos de esta Memoria se organizan en dos capítulos, una sección bibliográfica y dos anexos.

El Capítulo 1 está dedicado a una descripción verbal del marco teórico del trabajo, de los objetivos y de los conceptos y resultados matemáticos que se utilizan a lo largo del mismo.

El Capítulo 2 contiene los detalles técnicos y formales del tratamiento matemático y del desarrollo de los cálculos que permiten justificar las fórmulas generales buscadas, considerándose a continuación su uso para el estudio de algunos casos particulares. Asimismo, en la última sección de este capítulo se recogen las conclusiones de Trabajo.

El Anexo I, sobre la Fórmula de Rodrigues para polinomios de Legendre y la Fórmula de Ferrers para polinomios Asociados de Legendre, recoge cálculos auxiliares para dar expresiones explícitas de dichas funciones.

En el Anexo II se incluyen los certificados de asistencia a las *XIX Jornadas de Trabajo en Mecánica Celeste* y de presentación (por parte del autor de este TFG) de los principales resultados del mismo, bajo la forma de una comunicación oral durante dichas Jornadas.

Índice general

Prólogo	III
1. Descripción del contenido del Trabajo	1
1.1. Contexto teórico	1
1.2. Modelo matemático	2
1.3. Desarrollo del potencial gravitatorio en serie de armónicos esféricos	2
1.4. Coeficientes del potencial e integrales de inercia	3
1.5. Ejemplos considerados	4
2. Cálculo de los coeficientes y aplicaciones	7
2.1. Coeficientes del potencial	7
2.2. Integrales de inercia	9
2.3. Cálculo de los coeficientes J_n de los armónicos zonales $P_n(\cos \theta)$	10
2.4. Deducción de los coeficientes C_n^m de los armónicos $P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda$	11
2.5. Obtención de los coeficientes S_n^m de los armónicos $P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda$	13
2.6. Resumen de resultados	14
2.7. Ejemplo 1: Paralelepípedo homogéneo	14
2.7.1. Origen del sistema de referencia en el centro geométrico del paralelepípedo	14
2.7.2. Origen del sistema de referencia en un vértice del paralelepípedo	17
2.8. Ejemplo 2: Cilindro circular homogéneo	18
2.9. Conclusiones	20
Bibliografía	21
Anexo I	I
1. Desarrollo de la fórmula de Rodrigues	I
2. Desarrollo de la fórmula de Ferrers	II
Anexo II	III

Capítulo 1

Descripción del contenido del Trabajo

1.1. Contexto teórico

Es un hecho bien conocido en diversas ramas de las Ciencias Matemáticas y Físicas y de la Tecnología Espacial (por ejemplo, en Análisis Vectorial, Teoría del Potencial, Mecánica Celeste, Astrodinámica, Geodesia Física, Geofísica) que el campo vectorial que describe la fuerza de atracción gravitatoria que crea un sólido rígido extenso (de forma geométrica irregular arbitraria, y con una distribución de masa arbitraria confinada en su interior) en cualquier punto de fuera del cuerpo puede expresarse en función del gradiente de un campo escalar llamado potencial gravitatorio (escalar) de dicho campo vectorial.

El objetivo de este trabajo es expresar los coeficientes de los armónicos esféricos del potencial gravitatorio creado por un sólido rígido (Cid y Ferrer, [2], Cap. 7, §7.6, p. 204; Fitzpatrick, [3], Cap. 12, §12.1, p. 265, §12.2, p. 279; Heiskanen y Moritz, [4], Cap. 2, §2.5 p. 57, con notaciones de Cap 1, §1.13, p. 28) en función de integrales de inercia.

Definiciones de estas integrales de inercia aparece en los libros de MacMillan ([5], Cap. II, §50, p. 89) y de Fitzpatrick ([3], Cap. 12, §12.4, p. 293).

Los principales conceptos y resultados matemáticos que se han utilizado en nuestras consideraciones y desarrollos para deducir las expresiones generales de los coeficientes de los diversos armónicos esféricos del potencial gravitatorio obtenidas en este TFG son

- funciones de Legendre de primera especie (Cid y Ferrer, [2], Apéndice B, §B.2 p. 451; Heiskanen y Moritz, [4], Cap. 1, §11, p. 21; Abramowitz y Stegun, [1], Cap. 8, p. 331),
- integrales de inercia de un cuerpo (referencias bibliográficas más arriba),
- Teorema (o Fórmula) del Multinomio y, en particular, el Teorema del Trinomio (Abramowitz y Stegun, [1], Cap. 24, §24.1, §§24.1.2, p. 823; Weisstein, [6]; MacMillan, [5], Cap. VII, §204, p. 383),
- algunas fórmulas de funciones trigonométricas de ángulos múltiples (Weisstein, [7]).

Una vez obtenidas las expresiones generales buscadas, se ilustrará su aplicación en algunos casos concretos (paralelepípedo homogéneo y cilindro circular homogéneo).

El marco teórico y otros aspectos relacionados con las cuestiones tratadas en este Trabajo pueden consultarse, por ejemplo, en los libros de Cid y Ferrer ([2], Cap. 7, pp. 185–216, y Apéndice B, pp. 443– 479), Fitzpatrick ([3], Cap. 12, pp. 265– 309), Heiskanen y Moritz ([4], Cap. 1, pp. 1– 45 y Cap. 2, §2.5– §2.6, pp. 57– 63) y MacMillan ([5], Cap. II, pp. 24– 95, y Cap. VII, pp. 325– 406).

1.2. Modelo matemático

Trabajaremos en el espacio ordinario tridimensional \mathbf{R}^3 dotado de las estructuras algebraica (de espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbf{R} de los números reales), geométrica (de espacio afín) y topológica o métrica (de espacio euclídeo) habituales, y fijaremos un sistema de referencia inercial rectangular (o cartesiano) $Ox_1x_2x_3 \equiv O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ dado por un punto cualquiera O elegido como origen y una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ positivamente orientada (triedro dextrógiro).

Consideraremos un sólido rígido para el cual adoptaremos como modelo matemático un subconjunto \mathcal{D} de \mathbf{R}^3 abierto, conexo y acotado, limitado por una superficie cerrada suficientemente regular \mathcal{F} .

Se puede expresar la posición de cualquier punto del espacio mediante diversos sistemas de coordenadas. En particular utilizaremos tanto coordenadas cartesianas como coordenadas polares esféricas, según las necesidades que se presenten a lo largo de la realización del Trabajo.

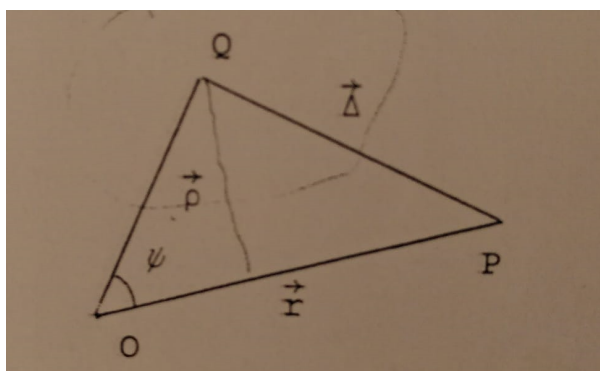


Figura 1.1: Geometría de los puntos de interés (Cid y Ferrer, [2], Apendice B, §B.3, p. 457)

Sea Q un punto cualquiera del dominio \mathcal{D} y P un punto exterior a este dominio. La distancia entre estos dos puntos P y Q se designará mediante la letra Δ , y el ángulo entre sus vectores de posición mediante la letra ψ .

También definiremos una cantidad R como el supremo de las distancias de los puntos del dominio \mathcal{D} al origen de coordenadas O . Es decir, esta cantidad será la mayor distancia entre los puntos del cuerpo y el origen.

1.3. Desarrollo del potencial gravitatorio en serie de armónicos esféricos

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales viene gobernada por la Ley de Gravitación Universal de Newton. La magnitud de la fuerza de la atracción entre masas puntuales (o partículas materiales) es proporcional al producto de las masas de las partículas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Su dirección es la de la recta que las une y el sentido es el que va de la partícula que experimenta la fuerza a la que genera la atracción. Se trata, por lo tanto, de una fuerza central.

Para simplificar esta descripción vectorial, se introduce una función escalar llamada potencial gravitatorio tal que su gradiente respecto a las coordenadas del punto sobre el que se crea el campo es igual a la fuerza de la atracción gravitatoria. Este es el convenio usado habitualmente en la Geofísica, que se diferencia en el signo del que se utiliza en la Mecánica. De esta manera, en vez de asignar a cada punto del espacio un vector, sólo hay que asignarle un escalar.

Con el fin de estudiar esta interacción colocaremos una partícula de prueba de masa unidad en el punto P . Supondremos además que la distribución de materia en el interior del cuerpo queda caracterizada por una función escalar arbitraria de la posición, ρ_{vol} , que describe la densidad volumétrica (local)

de masa en cada punto del cuerpo (es decir, en un entorno del punto) y que permite asignar a cada punto del dominio \mathcal{D} un elemento diferencial de masa; aunque en principio puede suponerse que esta función es acotada e integrable en el sentido de Riemann en la totalidad del volumen del cuerpo, para algunos propósitos habría que suponer que además sea de clase $C^1(\mathcal{D} \subseteq \mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ sobre dicho volumen del sólido.

Hasta el momento hemos hablado de la interacción entre masas puntuales, una de las cuales era un elemento diferencial de masa situado en un punto Q de \mathcal{D} . Podemos considerar que esta masa elemental crea un diferencial de potencial sobre la masa de prueba. Para calcular cuál es el potencial sobre la masa de prueba debido a la totalidad del sólido únicamente hay que integrar sobre el dominio \mathcal{D} (que describe al sólido rígido) la expresión obtenida para el potencial en el caso de masas puntuales.

En general es difícil aplicar la expresión que se acaba de mencionar y obtener el potencial gravitatorio en forma cerrada. Para los casos en los que el punto P se encuentra alejado del sólido rígido, o lo que es lo mismo, la distancia radial de P es mucho mayor que la cantidad R anteriormente definida, se puede efectuar un desarrollo en serie del potencial gravitatorio.

Esto es posible porque se puede expresar la inversa de la distancia Δ como una serie absolutamente convergente. Esta serie se puede interpretar de dos maneras: como una serie de potencias cuyos coeficientes son polinomios de Legendre, o como una serie de polinomios de Legendre en la que los coeficientes son potencias del cociente entre las distancias radiales de los puntos Q y P . En este trabajo utilizaremos la segunda interpretación. En esta serie la variable de los polinomios de Legendre es el coseno del ángulo ψ que forman los vectores de posición de los puntos Q y P .

Es conveniente expresar dicha serie en función de las coordenadas polares esféricas de los puntos en vez de en función del ángulo ψ . Para esto utilizaremos la Fórmula de Adición de los polinomios de Legendre (Cid y Ferrer, [2], Apendice B, §B.5, p. 461). Al aplicar este resultado pasaremos a tener términos en los que intervienen también los polinomios asociados de Legendre.

Definiendo ahora los coeficientes adimensionales J_n , C_n^m y S_n^m , e introduciéndolos en el desarrollo del potencial en el punto P (cuyas coordenadas polares esféricas serán r , θ y λ) obtenemos ahora un desarrollo en serie de armónicos esféricos. Estos coeficientes reciben el nombre de coeficientes del potencial gravitatorio. Por otra parte, los armónicos esféricos son funciones del tipo $P_n(\cos \theta)$, $P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda$ y $P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda$. Los del primer tipo se conocen como armónicos zonales; dentro de los del segundo y tercer tipo, los que cumplen que $n = m$ se llaman armónicos sectoriales, y el resto armónicos tesorales.

Las integrales de inercia anteriormente mencionadas son unas integrales de volumen sobre el dominio \mathcal{D} de las variables cartesianas ξ , η y ζ de los puntos Q del sólido rígido, donde la primera coordenada va elevada a una potencia i , la segunda a una potencia j y la tercera a una potencia k , siendo i , j y k números enteros no negativos y que nos permiten identificar las integrales de inercia.

1.4. Coeficientes del potencial e integrales de inercia

En esta sección describiremos los conceptos y resultados matemáticos que se utilizarán para obtener las expresiones generales de los coeficientes J_n , C_n^m y S_n^m .

La deducción rigurosa de cómo se obtienen dichas fórmulas generales constituye el núcleo de este trabajo, y se presenta en las secciones 2.3, 2.4 y 2.5 del siguiente capítulo. Además, parte de los cálculos intermedios se recogen en el Anexo I para no interrumpir la continuidad en la lectura de las deducciones de los resultados generales.

Para poder precisar cómo se llevan a cabo los cálculos, digamos que las notaciones con las que designaremos a las coordenadas polares esféricas de los puntos Q del dominio \mathcal{D} serán la distancia radial ρ , la colatitud Θ y la longitud Λ .

En las definiciones de los coeficientes del potencial aparecen potencias de ρ , polinomios de Legendre o polinomios asociados de Legendre en la variable $\cos \Theta$ y funciones trigonométricas de ciertos múltiplos de Λ .

Una de las fórmulas más conocidas para calcular los polinomios de Legendre es la fórmula de Rodrigues (Cid y Ferrer, [2], Apendice B, §B.2, p. 451, fórmula (B.2.4); Fitzpatrick, [3], Cap. 12, §12.1, p. 269, fórmula (12.1.11)). Pero esta fórmula implica calcular una derivada. Para el desarrollo del trabajo es conveniente expresar los polinomios de Legendre explícitamente como funciones polinómicas, es decir, en nuestro caso, como sumas finitas de potencias de $\cos \Theta$; para ello determinaremos la derivada que interviene en la fórmula de Rodrigues y obtendremos una fórmula equivalente a esta, tal y como se detalla en el Anexo I. De este resultado hay que destacar que el número de sumandos resultante es la parte entera de $n/2$, donde n es el grado del polinomio de Legendre en cuestión.

De la misma manera que en el caso anterior, para calcular los polinomios asociados de Legendre se suele utilizar la fórmula de Ferrers (Cid y Ferrer, [2], Apendice B, §B.2, p. 452) que también involucra derivadas. Mediante un procedimiento similar al que se ha seguido en el caso anterior, y que también se recoge en el Anexo I, llegaremos a una fórmula equivalente a la Ferrers.

Tanto para los polinomios de Legendre como para los polinomios asociados la variable será el coseno de la colatitud Θ , ya que la definición de los coeficientes J_n , C_n^m y S_n^m se habrá efectuado en coordenadas polares esféricas (ρ, Θ, Λ) . Por su parte, las variables que aparecen en la definición de las integrales de inercia (también llamadas productos generalizados de inercia) son las coordenadas cartesianas de los puntos Q del dominio \mathcal{D} , por lo que tendremos que realizar un cambio entre unas y otras coordenadas. No obstante, en la definición de los coeficientes del potencial gravitatorio aparece una potencia de ρ , de modo que se mantendrá la dependencia respecto de esta variable hasta poder realizar las simplificaciones correspondientes.

Centraremos ahora nuestra atención en el caso de las funciones trigonométricas de ángulos múltiples, y en concreto en las funciones $\cos m\Lambda$ y $\sin m\Lambda$. Para trabajar más cómodamente es conveniente escribir estas expresiones en función de combinaciones de productos de potencias de $\cos \Lambda$ y $\sin \Lambda$. En casos sencillos, como el del ángulo doble o el del ángulo triple, se puede utilizar la fórmula de De Moivre; como tratamos de obtener expresiones generales, utilizaremos las fórmulas (Weisstein, [7]) que aparecen en las secciones 2.4 y 2.5.

Tras realizar las simplificaciones necesarias, restauraremos las coordenadas cartesianas (ξ, η, ζ) , para lo que nos resultará especialmente útil la Fórmula del Trinomio. Esta fórmula es, por una parte, una generalización del conocido Teorema del Binomio de Newton, y por otra, un caso particular de la Fórmula del Multinomio.

Una vez que tenemos los coeficientes expresados en coordenadas cartesianas, se puede intercambiar el orden de integración y de suma, ya que se trabaja con sumas finitas. De esta forma es posible expresar los coeficientes del desarrollo del potencial en serie de armónicos esféricos en función de combinaciones lineales de integrales de inercia.

En particular, este tratamiento matemático proporciona un primer enfoque para el estudio tanto del campo de fuerzas de la atracción gravitatoria creada por muchos cuerpos celestes (y, en concreto, por la Tierra), como para su correspondiente potencial escalar.

1.5. Ejemplos considerados

Para mostrar la utilización de las fórmulas obtenidas, las aplicaremos en varios ejemplos. En primer lugar, se tomará como sólido rígido un paralelepípedo con densidad volumétrica de masa constante. En este caso consideraremos dos orígenes de coordenadas diferentes: el centro geométrico del paralelepípedo y uno de sus vértices. Como segundo ejemplo se trabajará con un cilindro circular homogéneo.

En la primera situación, es decir, el paralelepípedo homogéneo, la determinación del potencial gravi-

tatorio en forma cerrada resulta complicada (MacMillan, [5], Cap. II, §43, p. 72), pero se puede obtener fácilmente una fórmula general para las integrales de inercia. Observaremos que las integrales de inercia cuyos índices suman uno se anulan porque se ha tomado el centro de masas del cuerpo como origen de coordenadas.

Además, la fórmula obtenida para las integrales de inercia en este caso, junto con las fórmulas generales del desarrollo del potencial en serie de armónicos esféricos, nos permitirá deducir cuáles de los coeficientes del potencial se anulan y cuáles no.

Por otra parte, se analizará el mismo sólido rígido tomando esta vez el origen de coordenadas en un vértice del paralelepípedo, llegándose a otro resultado para las integrales de inercia: en este caso no se anulará ninguna de ellas. Por lo tanto obtendremos otras fórmulas distintas para los coeficientes y otra expresión para el desarrollo en serie del potencial gravitatorio.

Finalmente, se estudiará el caso del cilindro circular homogéneo. De esta situación hay que destacar que, por simetría, algunas integrales de inercia obedecerán a la misma fórmula, por lo que los coeficientes de algunos armónicos del potencial se anularán aunque las integrales de inercia involucradas en su expresión no lo hagan.

Capítulo 2

Cálculo de los coeficientes y aplicaciones

2.1. Coeficientes del potencial

Trabajamos en el espacio euclídeo tridimensional \mathbf{R}^3 . En él tomaremos como sistema de referencia un sistema inercial con origen en un punto cualquiera O , y ejes coordenados según las direcciones de los vectores ortogonales y unitarios \vec{e}_1 , \vec{e}_2 y \vec{e}_3 que forman un triedro dextrógiro.

Describiremos el sólido rígido mediante un dominio \mathcal{D} , abierto, conexo y acotado, limitado por una superficie cerrada suficientemente regular \mathcal{F} .

Tomemos un punto P exterior al dominio \mathcal{D} . La posición de este punto en nuestro sistema de referencia viene dada por el vector

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \equiv (x, y, z),$$

de forma que le corresponden las coordenadas cartesianas (x, y, z) . Por otra parte, su posición también se puede especificar mediante las coordenadas polares esféricas (r, θ, λ) , utilizando la transformación entre coordenadas

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \lambda \\ y = r \sin \theta \sin \lambda \\ z = r \cos \theta \end{cases}.$$

Es habitual referirse a la coordenada θ como colatitud y a la coordenada λ como longitud.

Sea Q un punto perteneciente al dominio \mathcal{D} cuyo vector posición es

$$\overrightarrow{OQ} = \xi \vec{e}_1 + \eta \vec{e}_2 + \zeta \vec{e}_3 \equiv (\xi, \eta, \zeta),$$

de manera que a este punto corresponden las coordenadas cartesianas (ξ, η, ζ) . Su posición también se puede describir mediante las coordenadas polares esféricas (ρ, Θ, Λ) introducidas a través de las relaciones

$$\begin{cases} \xi = \rho \sin \Theta \cos \Lambda \\ \eta = \rho \sin \Theta \sin \Lambda \\ \zeta = \rho \cos \Theta \end{cases}.$$

A partir de la transformación anterior es sencillo llegar a los siguientes resultados:

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad (2.1)$$

$$\cos \Theta = \frac{\zeta}{\rho}, \quad (2.2)$$

$$\sin \Lambda = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad (2.3)$$

$$\cos \Lambda = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \quad (2.4)$$

Dados dos puntos P y Q , la distancia $\Delta = \overline{QP}$ entre ellos se puede expresar de acuerdo con las fórmula

$$\Delta = ||\vec{\Delta}||, \quad \text{donde} \quad \vec{\Delta} = \vec{OP} - \vec{OQ} = \vec{QP},$$

que, en función de las coordenada polares esféricas de los puntos Q y P , se puede reescribir como (Cid y Ferrer, [2], Apéndice B, §B.3, p.457)

$$\Delta = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi)^{1/2} = r(1 - 2h\alpha + h^2)^{1/2},$$

donde se han introducido las notaciones h y α dadas por

$$h = \rho/r \quad \text{y} \quad \alpha = \cos \psi = \cos \theta \cos \Theta + \sin \theta \sin \Theta \cos (\Lambda - \lambda).$$

En la última igualdad se ha utilizado una de las Fórmulas de Bessel de la Trigonometría Esférica.

Suponiendo que $\rho < r$, se puede efectuar el siguiente desarrollo en serie absolutamente convergente,

$$(1 - 2h\alpha + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\alpha),$$

donde $P_n(\alpha)$ es el polinomio de Legendre de grado n en la variable $\alpha = \cos \psi$.

Por lo tanto tenemos que la inversa de la distancia Δ se puede expresar como

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos \psi). \quad (2.5)$$

Además el polinomio $P_n(\cos \psi)$ puede expresarse en función de los polinomios $P_n(\cos \theta)$, $P_n(\cos \Theta)$, $P_n^m(\cos \theta)$, $P_n^m(\cos \Theta)$ y de la función $\cos m(\Lambda - \lambda)$ utilizando el Teorema de Adición de los polinomios de Legendre (Cid y Ferrer, [2], Apéndice B, §B.5, p. 461), de modo que se obtiene para la fórmula (2.5) la expresión

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = & \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n [P_n(\cos \theta) P_n(\cos \Theta) \\ & + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \Theta) \cos m(\Lambda - \lambda)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $P_n^m(\cos \theta)$ y $P_n^m(\cos \Theta)$ son los polinomios asociados de Legendre de grado n y orden m .

Si ahora colocamos una partícula de prueba en el punto P de masa unidad y definimos una función densidad $\rho(Q)$, que asigna a cada punto Q un elemento diferencial de masa dm de la siguiente manera

$$dm(Q) = \rho(Q) dv(Q),$$

donde $dv(Q)$ es un elemento diferencial de volumen en el entorno del punto Q , el potencial gravitatorio creado en P por la totalidad de la masa contenida en el dominio \mathcal{D} obedece a las fórmulas

$$V(P) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{G dm(Q)}{\Delta} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{G \rho(Q) dv(Q)}{\Delta}.$$

Introduciendo en esta última fórmula el desarrollo en serie de potencias de la inversa de la distancia Δ , ecuación (2.6), obtenemos

$$\begin{aligned} V = & \frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n [P_n(\cos \theta) P_n(\cos \Theta) \\ & + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \Theta) \cos m(\Lambda - \lambda)] dm \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para un sólido determinado se puede definir la distancia R como $R = \sup \left\{ \rho = \|\vec{OQ}\| / Q \in \mathcal{D} \right\}$, e introducir las siguientes definiciones de las cantidades adimensionales

$$J_n = -\frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n(\cos \Theta) dm, \quad (2.8)$$

$$C_n^m = -\frac{2}{M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n^m(\cos \Theta) \cos m\Lambda dm, \quad (2.9)$$

$$S_n^m = -\frac{2}{M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n^m(\cos \Theta) \sin m\Lambda dm, \quad (2.10)$$

con lo que se puede escribir la fórmula (2.7) como

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n \left\{ J_n P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (C_n^m \cos m\lambda + S_n^m \sin m\lambda) \right\} \right]. \quad (2.11)$$

2.2. Integrales de inercia

En el apartado anterior hemos presentado una descripción del potencial gravitatorio que crea el sólido rígido en un punto exterior. A continuación nos centraremos en la expresión de los coeficientes del desarrollo anterior en términos de integrales de inercia.

La definición de las integrales de inercia generalizadas es (Fitzpatrick, [3], Cap. 12, §12.4, p.293; MacMillan [5], Cap. II, §50, p. 89)

$$I_{i,j,k} = \iiint_{\mathcal{D}} \xi^i \eta^j \zeta^k dm. \quad (2.12)$$

donde i, j y k son números enteros no negativos.

Este concepto generaliza las integrales de volumen extendidas a la totalidad del dominio \mathcal{D} que permiten determinar las coordenadas de su centro de masas y los momentos y productos de inercia del sólido rígido. Así, se puede escribir, por ejemplo, el momento de inercia $I_{\zeta\zeta}$ y el producto de inercia $I_{\xi\eta}$ en función de integrales de inercia en la forma

$$I_{\zeta\zeta} = \iiint_{\mathcal{D}} (\xi^2 + \eta^2) dm = I_{200} + I_{020},$$

$$I_{\xi\eta} = \iiint_{\mathcal{D}} \xi \eta dm = I_{110}.$$

Para un número entero no negativo n dado, las integrales $I_{i,j,k}$, con i, j y k enteros no negativos tales que $i + j + k = n$, se llaman momentos de orden n .

Al tratar con armónicos esféricos de grado n consideraremos además que $i + j + k = n =$ grado del armónico.

Evidentemente ([3], Cap. 12, §12.4, p. 293), $I_{0,0,0} = M =$ masa total del cuerpo.

Fitzpatrick ([3], Ch. 12, §12.7, Eqs. (12.7.1)–(12.7.4), pp. 306–307) da expresiones explícitas en función de coordenadas esféricas para los términos del potencial gravitatorio hasta grado 3 con los coeficientes de los armónicos esféricos,

$$J_1, C_1^1, S_1^1, J_2, C_2^1, S_2^1, C_2^2, S_2^2, J_3, C_3^1, S_3^1, C_3^2, S_3^2, C_3^3, S_3^3,$$

representados en función de combinaciones lineales de integrales de inercia hasta grado 3.

2.3. Cálculo de los coeficientes J_n de los armónicos zonales $P_n(\cos \theta)$

Partimos de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n ,$$

donde para uso posterior se considerará que $x = \cos \Theta$. En el Anexo I se detalla cómo se puede llegar desde la fórmula anterior a la siguiente,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!} x^{n-2\ell} , \quad (2.13)$$

donde $\lfloor n/2 \rfloor$ representa la parte entera de $n/2$. Además, para simplificar la notación y centrar nuestra atención en cómo intervienen las coordenadas ξ , η y ζ en las fórmulas que obtendremos, denotaremos los coeficientes numéricos de (2.13) de la siguiente forma

$$A(n, \ell) = \frac{1}{2^n n!} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!} . \quad (2.14)$$

Con estas notaciones tenemos la expresión para los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A(n, \ell) x^{n-2\ell} .$$

Hay que recordad que para nuestros propósitos se tomará $x = \cos \Theta$. A partir de aquí, y gracias a la igualdad (2.2), trabajaremos con las variables ρ y ζ . Si sustituimos la expresión obtenida en la definición de los coeficientes J_n , fórmula (2.8), obtenemos

$$\begin{aligned} J_n &= -\frac{1}{M} \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A(n, \ell) \left(\frac{\zeta}{\rho}\right)^{n-2\ell} dm \\ &= -\frac{1}{MR^n} \iiint_{\mathcal{D}} \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A(n, \ell) \zeta^{n-2\ell} \rho^{2\ell} dm . \end{aligned}$$

Para expresar dichos coeficientes en coordenadas cartesianas exclusivamente utilizamos la igualdad (2.1) y el Teorema del Trinomio,

$$\begin{aligned} \rho^{2\ell} &= (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^\ell = \sum_{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \ell} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} \xi^{2\ell_1} \eta^{2\ell_2} \zeta^{2\ell_3} \\ &= \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} \xi^{2\ell_1} \eta^{2\ell_2} \zeta^{2\ell_3} , \end{aligned} \quad (2.15)$$

siendo ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 enteros no negativos tales que $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \ell$.

El número de términos que genera este desarrollo es

$$\frac{(\ell+2)(\ell+1)}{2} ,$$

donde ℓ es el exponente de la potencia a la cual está elevado el trinomio.

Destejando ℓ_3 obtenemos $\ell_3 = \ell - \ell_1 - \ell_2$, lo que nos permite expresar las potencias de las variables ξ , η y ζ en función de ℓ_1 y ℓ_2 únicamente. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} J_n &= -\frac{1}{MR^n} \iiint_{\mathcal{D}} \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A(n, \ell) \zeta^{n-2\ell} \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} \xi^{2\ell_1} \eta^{2\ell_2} \zeta^{2(\ell-\ell_1-\ell_2)} dm \\ &= -\frac{1}{MR^n} \iiint_{\mathcal{D}} \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A(n, \ell) \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} \xi^{2\ell_1} \eta^{2\ell_2} \zeta^{n-2\ell_1-2\ell_2} dm. \end{aligned}$$

En virtud de la definición de las integrales de inercia, fórmula (2.12),

$$J_n = -\frac{1}{MR^n} \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A(n, \ell) \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} I_{2\ell_1, 2\ell_2, n-2\ell_1-2\ell_2}.$$

Finalmente obtenemos la fórmula general para los coeficientes J_n ,

$$J_n = -\frac{1}{2^n n! MR^n} \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!} \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} I_{2\ell_1, 2\ell_2, n-2\ell_1-2\ell_2}. \quad (2.16)$$

2.4. Deducción de los coeficientes C_n^m de los armónicos $P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda$

La obtención de las fórmulas generales para los coeficientes C_n^m y S_n^m es parecida a la de los coeficientes J_n . Se diferencian en que mientras que en el caso anterior únicamente intervenían los polinomios de Legendre, en este se utilizan también los polinomios asociados de Legendre. Además en este caso aparecen funciones trigonométricas de la longitud Λ en la definición de los coeficientes.

Comenzamos con los coeficientes C_n^m y vamos a utilizar la siguiente propiedad (Weisstein, [7])

$$\cos mx = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k} \sin^{2k} x \cos^{m-2k} x.$$

En nuestro caso la variables será $x = \Lambda$ y utilizando las igualdades (2.3) y (2.4) obtenemos en función de coordenadas cartesianas

$$\cos m\Lambda = (\xi^2 + \eta^2)^{-m/2} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k} \eta^{2k} \xi^{m-2k}.$$

Para simplificar la notación utilizaremos la abreviatura

$$B(m, k) = (-1)^k \binom{m}{2k}, \quad (2.17)$$

con lo que

$$\cos m\Lambda = (\xi^2 + \eta^2)^{-m/2} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} B(m, k) \eta^{2k} \xi^{m-2k}.$$

Por otra parte, tenemos que la fórmula de Ferrers es

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \quad (2.18)$$

donde hemos utilizado $x = \cos \Theta$ para aligerar la notación. En el Anexo I se detalla cómo a partir de esta fórmula se puede obtener la siguiente,

$$\begin{aligned} P_n^m \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) &= \frac{1}{2^n n!} \left(1 - \frac{\zeta}{\rho} \right)^{m/2} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-m-2\ell)!} \left(\frac{\zeta}{\rho} \right)^{n-m-2\ell} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \rho^{-m} (\xi^2 + \eta^2)^{m/2} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-m-2\ell)!} \left(\frac{\zeta}{\rho} \right)^{n-m-2\ell}. \end{aligned}$$

Si denotamos

$$\hat{A}(n, m, \ell) = \frac{1}{2^n n!} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-m-2\ell)!}, \quad (2.19)$$

podemos escribir la expresión anterior de la siguiente forma

$$P_n^m \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) = \rho^{-m} (\xi^2 + \eta^2)^{m/2} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \hat{A}(n, m, \ell) \left(\frac{\zeta}{\rho} \right)^{n-m-2\ell}. \quad (2.20)$$

A continuación vamos a calcular el integrando de la fórmula (2.9). Para ello comenzamos efectuando la siguiente multiplicación,

$$\begin{aligned} P_n^m \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) \cos m\Lambda &= \rho^{-m} \left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \hat{A}(n, m, \ell) \left(\frac{\zeta}{\rho} \right)^{n-m-2\ell} \right) \left(\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} B(m, k) \eta^{2k} \xi^{m-2k} \right) \\ &= \rho^{-m} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \hat{A}(n, m, \ell) \left(\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} B(m, k) \zeta^{n-m-2\ell} \eta^{2k} \xi^{m-2k} \rho^{-n+m+2\ell} \right). \end{aligned}$$

Después multiplicamos por $(\rho/R)^n$ para obtener el integrando de la fórmula (2.9),

$$\left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n^m \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) \cos m\Lambda = \frac{1}{R^n} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \hat{A}(n, m, \ell) \left(\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} B(m, k) \zeta^{n-m-2\ell} \eta^{2k} \xi^{m-2k} \rho^{2\ell} \right).$$

Utilizando el Teorema del Trinomio, fórmula (2.15),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n^m \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) \cos m\Lambda &= \frac{1}{R^n} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \hat{A}(n, m, \ell) \left(\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} B(m, k) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} \xi^{2\ell_1+m-2k} \eta^{2\ell_2+2k} \zeta^{n+m-2\ell_1-2\ell_2} \right\} \right). \end{aligned}$$

Recordando las definiciones de estos coeficientes, las de $\hat{A}(n, m, \ell)$ y $B(m, k)$, fórmulas (2.19) y (2.17), y expresándolo en función de las integrales de inercia (2.12) se concluye

$$\begin{aligned} C_n^m &= -\frac{2}{MR^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{2^n n!} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-m-2\ell)!} \\ &\quad \left(\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k} \left\{ \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} I_{2\ell_1+m-2k, 2\ell_2+2k, n-m-2\ell_1-2\ell_2} \right\} \right). \quad (2.21) \end{aligned}$$

2.5. Obtención de los coeficientes S_n^m de los armónicos $P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda$

Para calcular los coeficientes S_n^m vamos a utilizar la siguiente propiedad (Weisstein, [7])

$$\sin mx = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k+1} \sin^{2k+1} x \cos^{m-2k-1} x.$$

En nuestro caso la variables es $x = \Lambda$ y utilizando las igualdades (2.3) y (2.4) obtenemos

$$\sin m\Lambda = (\xi^2 + \eta^2)^{-m/2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k+1} \eta^{2k+1} \xi^{m-2k-1}.$$

Para simplificar la notación introducimos la abreviatura

$$\widehat{B}(m, k) = (-1)^k \binom{m}{2k+1}, \quad (2.22)$$

con la cual

$$\sin m\Lambda = (\xi^2 + \eta^2)^{-m/2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \widehat{B}(m, k) \eta^{2k+1} \xi^{m-2k-1}.$$

A partir de la fórmula de Ferrers (2.18) hemos obtenido en la sección anterior la expresión (2.20), que reproducimos a continuación,

$$P_n^m \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) = \rho^{-m} (\xi^2 + \eta^2)^{m/2} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \widehat{A}(n, m, \ell) \left(\frac{\zeta}{\rho} \right)^{n-m-2\ell}.$$

Ahora vamos a calcular el integrando de la fórmula (2.10). Efectuaremos la multiplicación

$$\begin{aligned} P_n^m \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) \sin m\Lambda &= \rho^{-m} \left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \widehat{A}(n, m, \ell) \left(\frac{\zeta}{\rho} \right)^{n-m-2\ell} \right) \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \widehat{B}(m, k) \eta^{2k+1} \xi^{m-2k-1} \right) \\ &= \rho^{-m} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \widehat{A}(n, m, \ell) \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \widehat{B}(m, k) \zeta^{n-m-2\ell} \eta^{2k+1} \xi^{m-2k-1} \rho^{-n+m+2\ell} \right). \end{aligned}$$

y multiplicando por $(\rho/R)^n$ para completar el integrando de la fórmula (2.10),

$$\left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n^m \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) \sin m\Lambda = \frac{1}{R^n} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \widehat{A}(n, m, \ell) \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \widehat{B}(m, k) \zeta^{n-m-2\ell} \eta^{2k+1} \xi^{m-2k-1} \rho^{2\ell} \right).$$

Por el Teorema del Trinomio, fórmula (2.15),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n^m \left(\frac{\zeta}{\rho} \right) \sin m\Lambda &= \frac{1}{R^n} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \widehat{A}(n, m, \ell) \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \widehat{B}(m, k) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} \xi^{2\ell_1+m-2k-1} \eta^{2\ell_2+2k+1} \zeta^{n+m-2\ell_1-2\ell_2} \right\} \right). \end{aligned}$$

A la vista de las definiciones de estos coeficientes, las de $\widehat{A}(n, m, \ell)$ y $\widehat{B}(m, k)$, fórmulas (2.19) y (2.22), y expresándolo en función de las integrales de inercia (2.12), se llega finalmente a

$$\begin{aligned} S_n^m &= -\frac{2}{MR^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{2^n n!} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-m-2\ell)!} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k+1} \left\{ \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} I_{2\ell_1+m-2k-1, 2\ell_2+2k+1, n+m-2\ell_1-2\ell_2} \right\} \right). \quad (2.23) \end{aligned}$$

2.6. Resumen de resultados

En esta sección, y a modo de resumen, se recogen las fórmulas generales que se acaban de deducir y que constituyen el objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado:

$$\begin{aligned}
 J_n &= -\frac{1}{2^n n! M R^n} \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!} \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} I_{2\ell_1, 2\ell_2, n-2\ell_1-2\ell_2} \cdot \\
 C_n^m &= -\frac{2}{2^n n! M R^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-m-2\ell)!} \times \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k} \left\{ \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} I_{2\ell_1+m-2k, 2\ell_2+2k, n-m-2\ell_1-2\ell_2} \right\} \right) \cdot \\
 S_n^m &= -\frac{2}{2^n n! M R^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-m-2\ell)!} \times \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{2k+1} \left\{ \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \ell_3!} I_{2\ell_1+m-2k-1, 2\ell_2+2k+1, n+m-2\ell_1-2\ell_2} \right\} \right) \cdot
 \end{aligned}$$

2.7. Ejemplo 1: Paralelepípedo homogéneo

Una vez obtenidas las expresiones generales de los coeficientes de los diferentes armónicos esféricos, estudiaremos su aplicación en algún caso concreto.

Empezaremos considerando un paralelepípedo homogéneo, y en la siguiente sección estudiaremos el caso de un cilindro circular homogéneo.

2.7.1. Origen del sistema de referencia en el centro geométrico del paralelepípedo

Se tomará para el dominio \mathcal{D} un paralelepípedo de lados a , b y c , densidad volumétrica constante ρ_{vol} , y elegiremos su centro geométrico como origen de coordenadas.

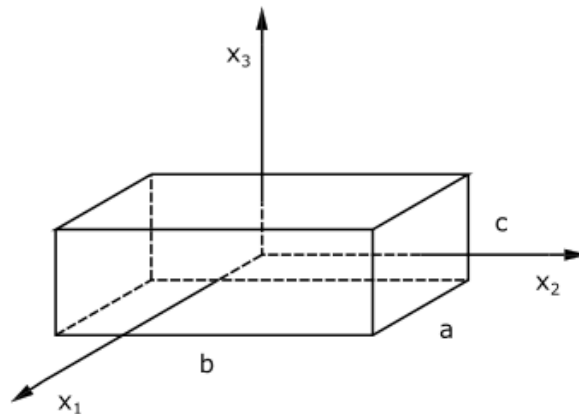


Figura 2.1: Paralelepípedo referido a un sistema de coordenadas con origen en su centro geométrico.

El potencial como desarrollo en serie de armónicos esféricos viene dado por la fórmula (2.11). Si tomamos los términos hasta grado $n = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} V_0 + V_1 + V_2 &= \frac{GM}{r} \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right) \{ J_1 P_1(\cos \theta) + C_1^1 P_1^1(\cos \theta) \cos \lambda + S_1^1 P_1^1(\cos \theta) \sin \lambda \} \right. \\ &\quad - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \{ J_2 P_2(\cos \theta) + C_2^1 P_2^1(\cos \theta) \cos \lambda + C_2^2 P_2^2(\cos \theta) \cos 2\lambda \\ &\quad \left. + S_2^1 P_2^1(\cos \theta) \sin \lambda + S_2^2 P_2^2(\cos \theta) \sin 2\lambda \} \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Utilizando las fórmulas (2.16), (2.21) y (2.23) expresamos los coeficientes de los términos de grado $n = 1$ en función de las integrales de inercia,

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{1}{MR} I_{001}, \\ C_1^1 &= -\frac{1}{MR} I_{100}, \\ S_1^1 &= -\frac{1}{MR} I_{010}. \end{aligned}$$

Para el caso de los coeficientes de los armónicos de grado $n = 2$ tenemos

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{1}{2MR^2} [2I_{002} - I_{200} - I_{020}], \\ C_2^1 &= -\frac{1}{MR^2} I_{101}, \\ C_2^2 &= -\frac{1}{4MR^2} [I_{200} - I_{020}], \\ S_2^1 &= -\frac{1}{MR^2} I_{011}, \\ S_2^2 &= -\frac{1}{2MR^2} I_{110}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Comenzamos calculando la integral de inercia I_{100} ,

$$I_{100} = \iiint_{\mathcal{D}} \xi \, dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \xi \, dv = \rho_{vol} \int_{-a/2}^{a/2} \xi \, d\xi \int_{-b/2}^{b/2} d\eta \int_{-c/2}^{c/2} d\zeta = 0,$$

que se anula porque el factor

$$\int_{-a/2}^{a/2} \xi \, d\xi$$

es la integral de una función impar sobre un intervalo simétrico, $[-a/2, a/2]$, centrado en cero.

De la misma manera, y razonando análogamente, calculamos las integrales de inercia I_{010} e I_{001} ,

$$\begin{aligned} I_{010} &= \iiint_{\mathcal{D}} \eta \, dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \eta \, dv = \rho_{vol} \int_{-a/2}^{a/2} d\xi \int_{-b/2}^{b/2} \eta \, d\eta \int_{-c/2}^{c/2} d\zeta = 0, \\ I_{001} &= \iiint_{\mathcal{D}} \zeta \, dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \zeta \, dv = \rho_{vol} \int_{-a/2}^{a/2} d\xi \int_{-b/2}^{b/2} d\eta \int_{-c/2}^{c/2} \zeta \, d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Para estas integrales obtenemos un resultado nulo porque estas integrales de inercia son proporcionales a las coordenadas del centro de masas, siendo la constante de proporcionalidad la masa total del sólido rígido. Como se ha tomado una densidad volumétrica constante, el centro de masas coincide con el centro geométrico del cuerpo, y por lo tanto con el origen de coordenadas.

Si consideramos ahora la integral de inercia I_{200} , tendremos

$$I_{200} = \iiint_{\mathcal{D}} \xi^2 dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \xi^2 dv = \rho_{vol} \int_{-a/2}^{a/2} \xi^2 d\xi \int_{-b/2}^{b/2} d\eta \int_{-c/2}^{c/2} d\zeta = \frac{1}{12} \rho_{vol} a^3 b c.$$

Para expresar esta cantidad en función de la masa total del cuerpo, calcularemos la densidad volumétrica ρ_{vol} . En este caso será sencillamente la masa total M dividida por el volumen del paralelepípedo,

$$\rho_{vol} = \frac{M}{abc},$$

de modo que la integral anterior se puede escribir como

$$I_{200} = \frac{1}{12} M a^2.$$

Se observa que las integrales de inercia para este sólido en concreto se anulan si alguno de los índices i , j o k es un número impar.

Supongamos que tenemos un caso general en el que los tres índices son números naturales pares o cero. La integral I_{ijk} será

$$\begin{aligned} I_{ijk} &= \iiint_{\mathcal{D}} \xi^i \eta^j \zeta^k dm = \rho_{vol} \int_{-a/2}^{a/2} \xi^i d\xi \int_{-b/2}^{b/2} \eta^j d\eta \int_{-c/2}^{c/2} \zeta^k d\zeta \\ &= \frac{1}{2^{i+j+k}} \frac{1}{(i+1)(j+1)(k+1)} M a^i b^j c^k. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$I_{ijk} = \begin{cases} \frac{1}{2^{i+j+k}} \frac{1}{(i+1)(j+1)(k+1)} M a^i b^j c^k, & i, j \text{ y } k \text{ números pares o cero,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Así, los únicos coeficientes de grado $n = 2$ del potencial que no se anulan son

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{1}{24R^2} [2c^2 - a^2 - b^2], \\ C_2^2 &= -\frac{1}{48R^2} [a^2 - b^2], \end{aligned}$$

donde se observa claramente que los coeficientes del potencial son parámetros adimensionales.

Si introducimos estas expresiones en el potencial truncado a grado $n = 2$, fórmula (2.24), tenemos que

$$\begin{aligned} V_0 + V_1 + V_2 &= \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left\{ \frac{1}{24R^2} [2c^2 - a^2 - b^2] P_2(\cos \theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{48R^2} [a^2 - b^2] P_2^2(\cos \theta) \cos 2\lambda \right\} \right]. \end{aligned}$$

Además, como en este caso hemos obtenido una fórmula general (2.26) para las integrales de inercia, se puede determinar qué coeficientes aparecerán en el desarrollo del potencial gravitatorio y cuáles no.

En la fórmula (2.16) para los coeficientes J_n de los armónicos zonales intervienen integrales de inercia que tienen los dos primeros índices pares, mientras que el tercero es $n - 2\ell_1 - 2\ell_2$, que solo será par si n es par. Cabe recordar que si alguno de los índices de las integrales de inercia es un número impar, la correspondiente integral de inercia se anula, y en consecuencia el coeficiente en cuestión también es nulo.

Por otra parte, para los coeficientes C_n^m se ha obtenido la fórmula (2.21) cuyo primer índice es $2\ell_1 + m - 2k$, que será par únicamente si m lo es; en cuanto al segundo índice, $2\ell_2 + 2k$, siempre será par; por su parte, el tercer índice, $n - m - 2\ell_1 - \ell_2$, si suponemos que m es par (en virtud de lo que se acaba de comentar en relación con el primer índice), será par cuando n también lo sea.

Finalmente, el desarrollo del potencial no contendrá armónicos esféricos afectados de coeficientes de tipo S_n^m , ya que las integrales que aparecen en la fórmula (2.23) tienen todas ellas como segundo índice un número impar $2\ell_2 + 2k + 1$.

2.7.2. Origen del sistema de referencia en un vértice del paralelepípedo

También nos podemos preguntar qué ocurriría si se tomase el origen de coordenadas en otro punto distinto del centro geométrico (y centro de masas) de este paralelepípedo homogéneo.

Consideraremos en particular uno de los vértices de dicho cuerpo como origen de un sistema de coordenadas rectangulares (Figura 2.2).

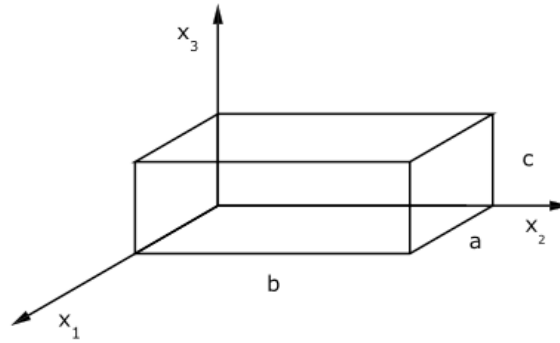


Figura 2.2: Paralelepípedo referido a un sistema de coordenadas con origen en un vértice.

Procedemos a calcular la integral de inercia I'_{100} , que designamos mediante una prima para no confundirla con las calculadas anteriormente, y para la cual obtenemos

$$I'_{100} = \iiint_{\mathcal{D}} \xi \, dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \xi \, dv = \rho_{vol} \int_0^a \xi \, d\xi \int_0^b d\eta \int_0^c d\zeta = \frac{1}{2} \rho_{vol} a^2 bc,$$

que en función de la masa total queda

$$I'_{100} = \frac{1}{2} M a.$$

De la misma manera se pueden obtener I'_{010} e I'_{001} ,

$$I'_{010} = \iiint_{\mathcal{D}} \eta \, dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \eta \, dv = \rho_{vol} \int_0^a d\xi \int_0^b \eta \, d\eta \int_0^c d\zeta = \frac{1}{2} M b,$$

$$I'_{001} = \iiint_{\mathcal{D}} \zeta \, dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \zeta \, dv = \rho_{vol} \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \int_0^c \zeta \, d\zeta = \frac{1}{2} M c.$$

Concluimos así que las coordenadas del centro de masas en el nuevo sistema de referencia son $(a/2, b/2, c/2)$.

A continuación calculamos la integral de inercia I'_{200} ,

$$I'_{200} = \iiint_{\mathcal{D}} \xi^2 dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \xi^2 dv = \rho_{vol} \int_0^a \xi^2 d\xi \int_0^b d\eta \int_0^c d\zeta = \frac{1}{3} M a^2.$$

Se observa que para esta elección del origen del sistema de coordenadas estas integrales de inercia no se anulan para ningún valor de i , j o k .

Se busca ahora una fórmula general para estas integrales,

$$\begin{aligned} I'_{ijk} &= \iiint_{\mathcal{D}} \xi^i \eta^j \zeta^k dm = \rho_{vol} \int_0^a \xi^i d\xi \int_0^b \eta^j d\eta \int_0^c \zeta^k d\zeta \\ &= \frac{1}{(i+1)(j+1)(k+1)} M a^i b^j c^k \neq 0. \end{aligned}$$

2.8. Ejemplo 2: Cilindro circular homogéneo

Para profundizar en el uso de las integrales de inercia como herramienta para hallar los coeficientes de los armónicos del potencial gravitatorio presentamos otro ejemplo.

En este caso se considerará como dominio \mathcal{D} un cilindro circular de radio R' y altura h , densidad volumétrica ρ_{vol} constante, y tomaremos su centro geométrico como origen de coordenadas.

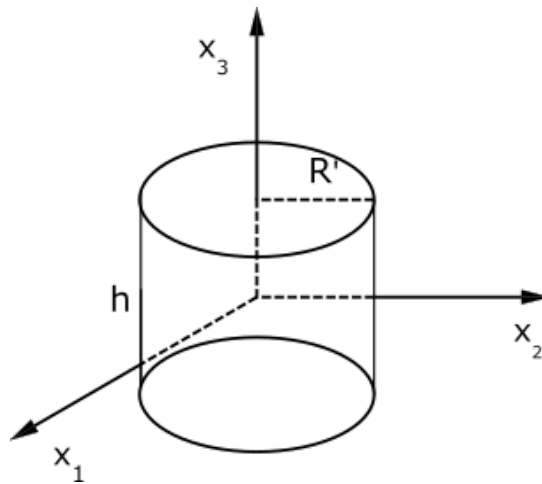


Figura 2.3: Cilindro circular referido a un sistema de coordenadas con origen en su centro geométrico.

Para calcular las integrales de inercia será conveniente trabajar ahora en coordenadas polares cilíndricas (ρ, φ, z) , utilizando el siguiente cambio de coordenadas,

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \varphi, \\ \eta = \rho \sin \varphi, \\ \zeta = z. \end{cases}$$

En esta ocasión el elemento diferencial de volumen es

$$dv = \rho d\rho d\varphi dz.$$

Comprobamos que como se cumplen las mismas condiciones que en el caso anterior, como la densidad volumétrica es constante, y además el origen de coordenadas coincide con el centro geométrico del cilindro, se anulan las integrales I_{100} , I_{010} e I_{001} , correspondientes a grado $n = 1$,

$$I_{100} = \iiint_{\mathcal{D}} \xi dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \xi dv = \rho_{vol} \int_0^{R'} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz = 0.$$

Esta integral se anula porque

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (2.27)$$

A continuación se calcula I_{010} ,

$$I_{010} = \iiint_{\mathcal{D}} \eta dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \eta dv = \rho_{vol} \int_0^{R'} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz = 0,$$

que se anula porque

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0. \quad (2.28)$$

Por último calculamos I_{001} ,

$$I_{001} = \iiint_{\mathcal{D}} \zeta dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \zeta dv = \rho_{vol} \int_0^{R'} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0,$$

ya que

$$\int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0,$$

por tratarse de la integral de una función impar sobre un intervalo simétrico $[-h/2, h/2]$ centrado en el origen.

Una vez que hemos comprobado esto, pasamos a calcular las integrales de inercia que aparecen en las fórmulas de los coeficientes del potencial de grado $n = 2$. Las integrales de inercia I_{110} , I_{101} e I_{011} se anulan porque involucran a integrales del tipo (2.27) y (2.28). Calculamos la integral de inercia I_{200} ,

$$I_{200} = \iiint_{\mathcal{D}} \xi^2 dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \xi^2 dv = \rho_{vol} \int_0^{R'} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz = \frac{1}{4} R'^4 \pi h,$$

donde la densidad volumétrica, que es constante, vendrá dada por el cociente entre la masa total M y el volumen del cilindro

$$\rho_{vol} = \frac{M}{\pi R'^2 h},$$

de manera que se puede escribir

$$I_{200} = \frac{1}{4} M R'^2.$$

Por simetría respecto del eje Ox_3 tenemos que $I_{020} = I_{200}$. Por otra parte

$$I_{002} = \iiint_{\mathcal{D}} \zeta^2 dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho_{vol} \zeta^2 dv = \rho_{vol} \int_0^{R'} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{12} M h^2.$$

De modo que el único coeficiente de grado $n = 2$ que no se anula es

$$J_2 = -\frac{1}{4R'^2} \left[\frac{1}{3} h^2 - R'^2 \right].$$

Hay que observar que en este caso el coeficiente C_2^2 no se anula porque las integrales de inercia I_{200} e I_{020} que aparecen en la fórmula (2.25) de dicho coeficiente se anulan, sino porque ambas integrales son iguales y en esa fórmula interviene su diferencia.

Con todo lo anterior, el potencial truncado a grado $n = 2$ resultará ser

$$V_0 + V_1 + V_2 = \frac{GM}{r} \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{4R'^2} \left(\frac{1}{3} h^2 - R'^2 \right) P_2(\cos \theta) \right].$$

2.9. Conclusiones

En este Trabajo se han establecido y justificado con rigor fórmulas completamente generales para los coeficientes adimensionales de los diversos términos que aparecen en el desarrollo (en forma de serie absolutamente convergente de armónicos esféricos) del potencial gravitatorio creado en un punto exterior por un sólido rígido arbitrario (tanto en cuanto a su forma geométrica como a la distribución de masa en su interior).

Las fórmulas obtenidas se presentan como combinaciones lineales de integrales de inercia.

Si bien ciertos autores han considerado algunas expresiones para los coeficientes de armónicos de grado bajo ($n = 3$ y $n = 4$) en función de integrales de inercia, no hemos encontrado en la literatura consultada menciones a fórmulas válidas para los coeficientes de armónicos de cualquier grado y orden.

La generalidad de las fórmulas aquí deducidas constituyen una aportación original y novedosa de este Trabajo.

Al estudiar un caso concreto de sólido rígido para el que se pueda obtener una fórmula general para las integrales de inercia, los resultados de este Trabajo permiten determinar qué armónicos estarán presentes en el desarrollo del potencial y cuáles no.

Bibliografía

- [1] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun (Editores). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, Inc., New York, 1965. Ninth Dover printing, 1970.
- [2] Rafael Cid Palacios, Sebastián Ferrer Martínez. *Geodesia. Geométrica, Física y por Satélites*. Instituto Geográfico Nacional, Ministerio de Fomento, Madrid, 1997.
- [3] Philip M. Fitzpatrick. *Principles of Celestial Mechanics*. Academic Press, Inc., New York and London, 1970.
- [4] Weikko A. Heiskanen, Helmut Moritz. *Physical Geodesy*. W. H. Freeman and Company, San Francisco and London, 1967.
- [5] William Duncan MacMillan. *Theoretical Mechanics. The Theory of the Potential*. Dover Publications, Inc., New York, New York, 1958. Unabridged and unaltered republication of the first edition, 1930.
- [6] Eric W. Weisstein. *Multinomial Series*. From: *MathWorld*—A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/MultinomialSeries.html>
- [7] Eric W. Weisstein. *Multiple-Angle Formulas*. From: *MathWorld*—A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/Multiple-AngleFormulas.html>

Anexo I

.1. Desarrollo de la fórmula de Rodrigues

En primer lugar vamos a trabajar con los polinomios de Legendre, y a continuación pasaremos a hacerlo con los polinomios asociados de Legendre. Para los primeros se cumple la fórmula de Rodrigues ([2]) ([4]) ([1]):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Para expresar $(x^2 - 1)^n$ como una suma, utilizaremos la Fórmula del Binomio de Newton,

$$(x - y)^n = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell, \quad \text{con } y = 1 \implies (x^2 - 1)^n = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} x^{2n-2\ell}.$$

A partir de esta expresión tendríamos que calcular su derivada n -ésima, para lo cual vamos a proceder a determinar las derivadas de órdenes sucesivos. Para la derivada primera se tendrá

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 1)^n = \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} (2n - 2\ell) x^{2n-2\ell-1}.$$

Aquí el sumatorio se extiende hasta $n - 1$ porque el término correspondiente a $\ell = n$ en el desarrollo de $(x^2 - 1)^n$ es una constante, por lo que su derivada será cero, y podemos omitir ese término en la suma.

En cuanto a la derivada segunda,

$$\frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^n = \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} (2n - 2\ell) (2n - 2\ell - 1) x^{2n-2\ell-2}.$$

En este caso el término con $\ell = n - 1$ no es una constante sino un monomio de grado uno en x , por lo que su derivada no se anula y mantenemos el número de términos en el sumatorio.

Si calculamos la tercera derivada obtenemos

$$\frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^n = \sum_{\ell=0}^{n-2} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} (2n - 2\ell) (2n - 2\ell - 1) (2n - 2\ell - 2) x^{2n-2\ell-3},$$

con lo que nos encontramos en la misma situación que la que se presentaba en la derivada primera.

Esto sugiere que se puede escribir una fórmula general para las derivadas de orden par y otra para las derivadas de orden impar:

- si i es par,

$$\frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^n = \sum_{\ell=0}^{n-\frac{i}{2}} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n - 2\ell)!}{(2n - 2\ell - i)!} x^{2n-2\ell-i},$$

- si i es impar,

$$\frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^n = \sum_{\ell=0}^{n-\frac{i+1}{2}} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(2n-2\ell-i)!} x^{2n-2\ell-i}.$$

Se observa que la única diferencia entre estas dos fórmulas está en hasta dónde se extiende la suma en cada una de ellas.

Para unificar los dos casos utilizamos la función parte entera, que denotamos por $\lfloor \cdot \rfloor$, ya que

$$\lfloor n - \frac{i}{2} \rfloor = \lfloor n - \frac{i+1}{2} \rfloor.$$

De esta forma podemos escribir cualquier derivada como

$$\frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n-\frac{i}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(2n-2\ell-i)!} x^{2n-2\ell-i}. \quad (29)$$

Teniendo en cuenta que $n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$, la derivada n -ésima será

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!} x^{n-2\ell}.$$

Y sustituyendo esto en la fórmula de Rodrigues obtenemos para el polinomio de Legendre de grado n la expresión

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!} x^{n-2\ell}.$$

2. Desarrollo de la fórmula de Ferrers

Tenemos que la fórmula de Ferrers ([2]) ([4]) ([1]) es

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

Sustituyendo la fórmula de Rodrigues en esta expresión obtenemos

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n.$$

Con la fórmula (29) que se ha obtenido anteriormente para la derivada i -ésima se llega a la siguiente expresión del polinomio asociado de Legendre de grado n y orden m ,

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-m-2\ell)!} x^{n-m-2\ell}.$$

Anexo II



XIX JORNADAS DE TRABAJO EN MECÁNICA CELESTE

El Comité organizador de las XIX Jornadas de Trabajo en Mecánica Celeste,

CERTIFICA que la comunicación titulada

Coefficients of the Gravitational Potential of a Rigid Body and Inertia Integrals

y cuyos autores son **Juan José Costa y Luis Floría**, ha sido presentada dentro de las sesiones de trabajo en las mencionadas XIX Jornadas, organizadas por la Universidad Pública de Navarra, que se han desarrollado en Tudela, Navarra, los días 30 y 31 de agosto y 1 de septiembre.

Tudela, 1 de septiembre de 2021.

Por el Comité Organizador,


Fdo.: Patricia Yanguas Sayas



XIX JORNADAS DE TRABAJO EN MECÁNICA CELESTE

El Comité organizador de las XIX Jornadas de Trabajo en Mecánica Celeste,

CERTIFICA que

D/D^a Juan José Costa Pérez de Iriarte

ha asistido a las mencionadas XIX Jornadas, organizadas por la Universidad Pública de Navarra, que se han desarrollado en Tudela, Navarra, los días 30 y 31 de agosto y 1 de septiembre.

Tudela, 1 de septiembre de 2021.

Por el Comité Organizador,


Fdo.: Patricia Yanguas Sayas

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa