



Universidad Zaragoza

Universidad de Zaragoza

FACULTAD DE CIENCIAS

Trabajo de Fin de Grado

Estudio e implementación de la dinámica de modelos ‘rate-and-state’ para abordar problemas de fricción.

Autor:

Celia Calderón Calvente

Director:

Juan José Mazo Torres



Departamento de física de la Materia Condensada
Universidad de Zaragoza - Facultad de Ciencias

Índice

1. Introducción	2
2. Objetivos	3
3. Evidencias de la necesidad de nuevas teorías.	3
4. <i>Stick-Slip</i> y teorías de <i>rate and state</i>	6
4.1. Solución estacionaria y análisis de la estabilidad	8
4.1.1. Análisis de la estabilidad	8
4.2. Evolución temporal del estado $\dot{\phi}$	11
5. Simulación del modelo descrito. Visualización del fenómeno <i>Stick Slip</i> y su comportamiento ante cambios en los parámetros elegidos.	15
5.1. Adaptación de las ecuaciones para la implementación del modelo	15
5.2. Suponemos que $\mu_d = \mu_0 = cte$	16
5.3. Añadimos un término dependiente de la velocidad ($A < 0$)	17
5.3.1. Otras formas funcionales.	19
5.4. Consideramos la dependencia $\mu_d = \mu_d(\dot{x}, \phi)$	22
6. Conclusión	24

1. Introducción

Durante más de dos siglos, la fricción entre sólidos ha sido descrita mediante las *leyes de Amontons-Coulomb* ([1], [2]). Aunque Leonardo da Vinci ya había sentado las bases de estas, fue Amontons quien las formuló y Coulomb quien las verificó.

Sean dos cuerpos sólidos, sometidos a una fuerza F tangencial relativa y presionados entre sí por una carga o fuerza normal W , existe una fuerza de rozamiento F_R debida a la fricción de los sólidos, que se opone al movimiento. Coulomb [2] observó que, en función de si los cuerpos se encontraban en reposo, esta fuerza se comportaba de manera distinta.

Si los cuerpos se encontraban en reposo, la fuerza de rozamiento era igual en módulo y dirección (pero en sentido opuesto) a la fuerza tangencial relativa F , siempre y cuando dicha fuerza no superase a la llamada *fuerza de rozamiento estático* F_s . Así, F_s resultaba ser una fuerza crítica que representa el umbral entre las situaciones de reposo y de movimiento relativo entre los cuerpos.

Una vez superado el umbral F_s y, por tanto, iniciado el movimiento, la fuerza de fricción decaía y se oponía al movimiento. Esta es la llamada *fuerza de rozamiento dinámico* F_d , y es aquella que aparece cuando los cuerpos se encuentran en situación de movimiento relativo.

Una vez diferenciados los dos tipos de fuerza de rozamiento, se encontraron las siguientes propiedades:

- La fuerza de fricción o rozamiento es proporcional al módulo de la *carga o fuerza normal* W , y esta proporcionalidad es lineal y dada por una constante denominada *coeficiente de rozamiento*. Al igual que ocurre con la fuerza de rozamiento, diferenciaremos entre coeficiente de rozamiento *estático* y *dinámico*.

$$F_e = \mu_e \cdot W \quad F_d = \mu_d \cdot W \quad (1)$$

- El coeficiente de rozamiento μ es independiente del área de contacto macroscópica Σ (también llamada área aparente de contacto) .
- La fricción dinámica no depende de la velocidad de desplazamiento.

Sin embargo, la anterior resultó ser una descripción demasiado aproximada. En la actualidad la descripción de la fricción entre sólidos es mucho más compleja, siendo necesario tener en cuenta un mayor número de variables. Además, las leyes clásicas de Amontons-Coulomb resultan totalmente erróneas cuando salimos del marco de la fricción seca; es decir, fricción entre superficies no lubricadas. La adición de un lubricante modifica las propiedades tribológicas, entrando en juego la física de Fluidos, y haciendo necesario el abordaje del problema de manera totalmente distinta.

En el presente trabajo se pretende estudiar en profundidad las teorías actuales existentes para abordar problemas de fricción seca entre sólidos, así como su visualización, con el objetivo de una mejor comprensión de estas.

2. Objetivos

Actualmente, la fricción seca entre sólidos es descrita mediante las llamadas teorías de *rate and state*, que establecen que la fricción depende de la velocidad de deslizamiento relativo entre las superficies (*rate*) y del estado de dichas superficies (*state*). El primer objetivo de este trabajo consistirá en entender en qué consisten estas teorías y las evidencias que han motivado que fueran formuladas.

Se explorarán diversas formas de describir la fricción, y se analizarán las dinámicas que conllevan las diferentes formas funcionales de la fuerza de fricción.

Además, se hará un análisis teórico de la dinámica de un modelo sencillo compuesto por un bloque y un muelle. Esto nos llevará a entender la naturaleza del llamado fenómeno de *Stick-Slip*, observado de manera universal en problemas de fricción a velocidades muy lentas, donde el sistema se vuelve inestable.

Finalmente, se buscará la visualización de las dinámicas estudiadas a lo largo del trabajo mediante su implementación.

3. Evidencias de la necesidad de nuevas teorías.

A pesar de que las leyes de Amontons-Coulomb fueron formuladas hace ya más de dos siglos, no ha sido hasta recientemente que se han ido observando algunas incongruencias hasta dar lugar a las nuevas teorías.

Por un lado, se encontró que las superficies de contacto aparentemente lisas en la macroescala cuentan con unas micro-rugosidades en la microescala, generándose unos *microcontactos* entre ellas. Tabor distinguió entre lo que llamó el *área de contacto real* Σ_r y *aparente* Σ_{app} . Mientras que Σ_{app} se refiere al área de contacto en la macroescala, Σ_r tiene en cuenta sólo los microcontactos. Esta diferenciación hizo posible la *ley de Tabor*, que establece que la fuerza de rozamiento viene dada por la siguiente expresión, donde τ_s se refiere al *esfuerzo cortante o de fricción* [1]:

$$F_R = \tau_s \Sigma_r \quad (2)$$

La introducción de este nuevo concepto permite entender la relación existente entre la fuerza de fricción y la fuerza normal, descrita en la ecuación (1). La mayor parte de los sólidos que tienen propiedades elásticas son capaces de soportar un esfuerzo máximo a partir del cual se comienzan a deformar plásticamente. Si suponemos un microcontacto con un área de contacto dado, podemos pensar que, si la fuerza normal entre las superficies es suficientemente alta, este se pueda deformar, implicando un aumento del área de contacto conforme mayor sea la carga entre las superficies. Esto explica la dependencia aparentemente lineal de la fuerza de fricción con la carga $F_R \propto W$, que describían las leyes de Amontons-Coulomb [1].

Sin embargo, esta dependencia lineal con W no termina de ser del todo cierta. Se ha observado que sólo resulta válida en un determinado intervalo de fuerzas. En el caso de que la carga sea demasiado grande o demasiado pequeña, el área de contacto real se hace comparable al área de contacto aparente, invalidándose la dependencia lineal supuesta. En el caso de metales, el intervalo en que esta dependencia es válida puede comprender fuerzas de compresión de varios órdenes de magnitud. En la figura 1 se muestra la fricción de acero sobre aluminio. Se observa que el coeficiente de fricción se mantiene constante ante cambios en la carga a lo largo de todo el intervalo estudiado, lo que supone que $F_R = cte \cdot W \propto W$ [2].

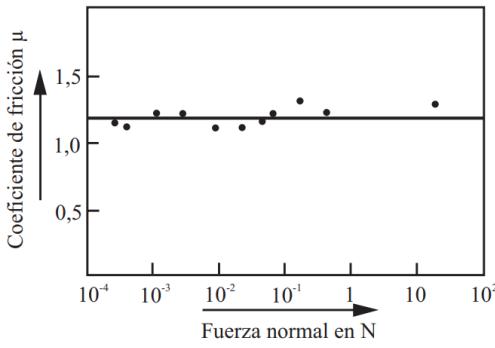


Figura 1: Coeficiente de fricción del acero sobre aluminio pulido mediante electrólisis. Las cargas oscilan desde los $10mg$ hasta los $10kg$, abarcando un intervalo de $10^6 N$. A lo largo de todo el intervalo el coeficiente de rozamiento es constante. Gráfica obtenida de [2].

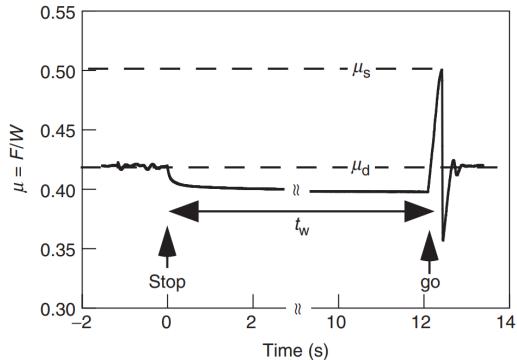


Figura 2: Coeficiente de fricción en un experimento de *stop and go*. Estos experimentos demuestran el fortalecimiento del coeficiente de fricción con el aumento del tiempo de espera t_w . Gráfica obtenida de [1].

Por otro lado, se encontró que si un bloque se desliza sobre una superficie en la que colocamos el sistema de referencia, y éste es sometido a una fuerza F intermitente de tal manera que se vayan intercalando periodos de reposo con periodos de movimiento a velocidad constante, la fuerza de fricción estática umbral μ_s , crecen logarítmicamente con el llamado *tiempo de espera* t_w , es decir, el tiempo durante el cual el bloque se mantiene en reposo antes de reanudar el movimiento. En la figura 2 podemos ver un ejemplo de estos llamados experimentos de *stop and go*. Es de aquí de donde surge el concepto de envejecimiento o *ageing*: las superficies de fricción se debilitan (μ_s decae) con el deslizamiento, mientras que se hacen más fuertes (aumenta μ_s) conforme mayor sea el tiempo que permanezcan en reposo relativo. Esta *recuperación* del coeficiente de fricción en las situaciones de reposo se conoce como *healing*. En la figura 3 podemos ver cómo el coeficiente de fricción estático umbral aumenta logarítmicamente con el tiempo de contacto o de espera en una diversidad de materiales diferentes. En todos ellos el exponente que gobierna dicho incremento es del orden de 10^{-2} .

Dieterich y Kilgore [3] encontraron que la dependencia entre el área de contacto real y el tiempo que el bloque se mantenía quieto sobre una misma superficie de contacto $\Sigma_r(t_w)$ es logarítmica, al igual que sucedía con el coeficiente de fricción $\mu_s(t_w)$. De esta manera es directo ver que existe una dependencia entre el área de contacto real y el coeficiente de fricción $\Sigma_r(\mu_s)$. Si hacemos una revisión de las leyes de Amontons-Coulomb, vemos que es cierta la ley que afirma que el coeficiente de fricción es independiente del área de contacto macroscópico (o aparente). Pese a ello, resulta ser una descripción incompleta, pues no hace distinción con el área de contacto real, con la que sí que existe una dependencia.

Sin embargo, la evidencia que más contrasta con la descripción de Amontons-Coulomb es la aparición de experimentos como el de la figura 5. Estos muestran cómo, en principio, no podemos distinguir un experimento de rozamiento estático, durante un tiempo de contacto dado, de un experimento de rozamiento dinámico a velocidades muy bajas. Es por esto que ambos coeficientes deben ser estudiados desde una perspectiva común.

Se define distancia característica D_0 como aquella a lo largo de la cual un cuerpo desliza

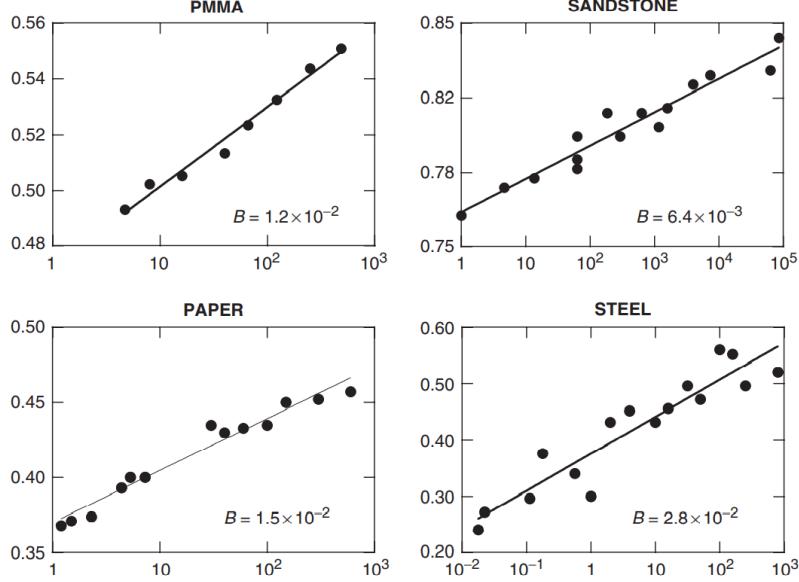


Figura 3: Coeficiente de fricción estática umbral μ_s frente al tiempo de espera t_w . Se observa dependencia logarítmica, donde $B = \frac{d\mu_s}{d(\ln t_w)}$. Gráfica obtenida de [1]

sobre un microcontacto antes de desaparecer, y es del orden del micrómetro. Esto nos permite definir el tiempo de contacto para un microcontacto cualquiera como $\Delta t = D_0/v$, donde v es la velocidad de deslizamiento de las superficies. Así, la figura 5 muestra cómo los coeficientes estáticos y dinámicos se pueden entender en un marco común, entendiendo a los primeros como coeficientes dinámicos medidos a velocidades muy bajas.

Otra manera más intuitiva de entenderlo, sería partiendo de uno de los ya mencionados experimentos de *stop and go*. En estos experimentos, las superficies se mantienen en reposo durante un tiempo tras el cual se hace deslizar el sistema de nuevo. Si medimos el coeficiente de fricción justo antes de reanudar el movimiento, estaremos midiendo el coeficiente de fricción estática. Ahora, suponemos que cada vez que repetimos el proceso, permitimos el deslizamiento sólamente durante una distancia del orden del μm ($\sim D_0$), hasta alcanzar los siguientes microcontactos. Además, iremos disminuyendo el tiempo de contacto antes de reanudar el movimiento hasta hacerlo infinitamente pequeño. Si nos paramos a pensarla, la situación descrita no es más que una situación de deslizamiento donde el coeficiente de fricción que estaríamos midiendo sería el coeficiente de fricción dinámica. Así, en vez de ver el movimiento del bloque como una situación distinta a la de reposo, podemos verlo como una sucesión de situaciones de reposo con tiempos de contacto tan pequeños que resultan imperceptibles.

De la misma manera, en el marco de velocidades pequeñas, del orden del $\mu\text{m}/\text{s}$, podemos pensar que cuanto más rápido se mueva el bloque menor será el tiempo de contacto de los microcontactos. Esto lleva a un debilitamiento del coeficiente de rozamiento conforme aumenta la velocidad, permitiéndonos recuperar la observación macroscópica de $\mu_s > \mu_d$. También conduce obligatoriamente a inestabilidades dinámicas, ya que un aumento de la velocidad conduce a una disminución de la fricción, que a su vez lleva a un nuevo aumento de la velocidad. Esto se manifiesta en forma de un fenómeno llamado *Stick-Slip*, observado de manera universal en problemas de fricción a velocidades muy lentas (figura 4).

La dependencia $\mu_d(v)$ de nuevo contrasta con las leyes de Amontons-Coulomb, que afirman

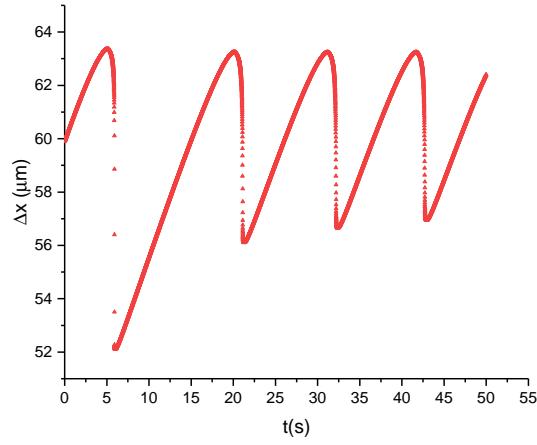


Figura 4: Fenómeno de *Stick-Slip*. Elongación de un muelle unido en un extremo a un bloque y del que se tira a velocidad constante por el otro extremo. En cada uno de los saltos del bloque la elongación decrece rápidamente y vuelve a deslizar.

lo contrario. Cabe decir que a velocidades medias esta dependencia prácticamente desaparece, tratándose de una buena aproximación. Sin embargo, conforme consideramos velocidades de orden superior, la dependencia $\mu_d(v)$ cambia, aumentando el coeficiente de fricción con el aumento de velocidad. Todo esto se puede ver en la figura 6.

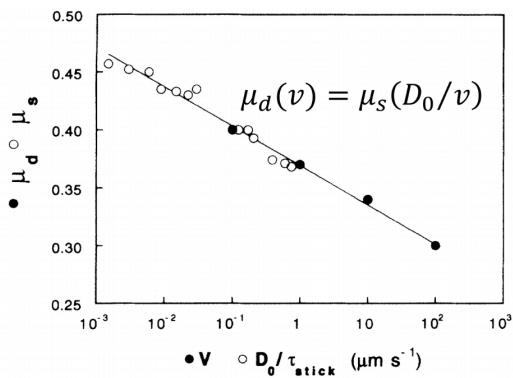


Figura 5: Experimentos de fricción estática (puntos blancos) y fricción dinámica (puntos negros). Gráfica obtenida de [4]

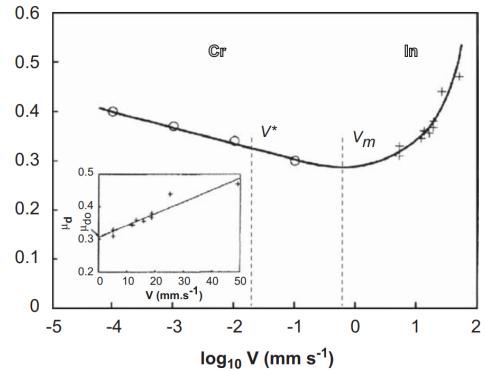


Figura 6: Resultados experimentales de Heslot et al, (1994). Coeficiente de fricción en función de la velocidad de un bloque unido a un resorte. Gráfica obtenida de [5]

4. *Stick-Slip* y teorías de *rate and state*

La dependencia existente entre el coeficiente de rozamiento y la velocidad, cuando esta es pequeña, lleva a unas inestabilidades. Si la velocidad aumenta, la fricción disminuye, dando pie a que la velocidad aumente de nuevo y se repita el ciclo. Físicamente esto se manifiesta como unos saltos tras los cuales el bloque se mantiene en reposo durante un instante (*Stick*), antes de volver a deslizarse (*Slip*) y repetirse el proceso (ver figura 4).

Este fenómeno puede estudiarse con la ayuda de un modelo sencillo que se muestra en

la figura 7. En este modelo de sustituye el bloque por una dinámica de un único grado de libertad. Su centro de masas es sometido a interacción elástica con un soporte del que se estira a velocidad constante V , que llamaremos *velocidad de arrastre*, así como a una fuerza de rozamiento proporcional a la carga aplicada. La fuerza con la que se estira del soporte, es la llamada *fuerza lateral*, y es igual a la fuerza elástica sobre el bloque en el caso contemplado, en el que la velocidad de arrastre es constante $V = cte$.

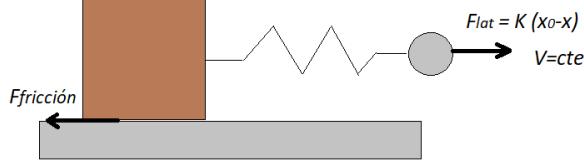


Figura 7: Esquema del modelo. Situamos el sistema de referencia sobre una de las superficies. Suponemos un bloque que presiona dicha superficie con una fuerza normal W y del que se tira con una fuerza tangencial F_{lat} a través de un resorte, de tal manera que la velocidad de estiramiento V sea constante.

De esta manera la ecuación del movimiento del bloque vendrá dada por

$$M\ddot{x} = K(x_0(t) - x) - W\mu_d \quad (3)$$

donde x_0 es la posición del extremo del muelle del cual estiramos. Puesto que lo hacemos con una velocidad V constante, se cumple que $x_0(t) = x_{0,inicial} + Vt$.

Nuestro siguiente paso debe ser buscar una expresión para el coeficiente de fricción μ_d . Ya sabemos que debe depender de la velocidad \dot{x} del bloque, pero eso no es todo. Si μ_d dependiese exclusivamente de la velocidad, entonces su valor cuando el bloque estuviera quieto (régimen estático) sería siempre el mismo, independientemente del tiempo de contacto transcurrido. Es por esto que resulta necesario definir una variable que mida el estado de la superficie de contacto, que llamaremos ϕ . De aquí surgen las llamadas teorías de *rate and state*, que establecen que la fricción depende de dos variables que evolucionan con el tiempo: la *velocidad* y el *estado* (\dot{x} y ϕ) ([6] , [7]).

La ley de Dieterich (o Ageing law) es una de las posibles descripciones que existen actualmente para la evolución de ϕ (de esto se volverá a hablar más adelante).

$$\dot{\phi} = 1 - \frac{\dot{x}\phi}{D_0} \quad (\text{Ageing law}) \quad (4)$$

La propia necesidad que teníamos de definir la variable ϕ , responsable del fortalecimiento del coeficiente de fricción en aquellos momentos en que el bloque queda quieto, muestra que ϕ debe ser función del tiempo. De hecho, si hacemos un análisis dimensional de la ecuación (4), ϕ resulta tener dimensiones de tiempo.

Esta ley, en el caso estático, conduce a una identificación directa de ϕ con el tiempo de contacto. Así, podemos identificar esta variable con el llamado *tiempo efectivo de contacto*, responsable del *envejecimiento*, ya mencionado anteriormente.

Una vez definida la variable de estado ϕ , podemos considerar la ley de fricción de *Rice-Ruina* (cap. 2.4 de [1]), que establece que el coeficiente de fricción dinámico, viene dado por lo siguiente:

$$\mu_d(\dot{x}, \phi) = \mu_{d0} + A \ln\left(\frac{\dot{x}}{V_0}\right) + B \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \quad (5)$$

donde A y B dos constantes y μ_{d0} , ϕ_0 y V_0 son valores de referencia. Consideraremos que estos son $\mu_{d0} = \mu_d(V_0)$ y $\phi_0 = \phi(V_0) = D_0/V_0$.

4.1. Solución estacionaria y análisis de la estabilidad

Una vez definidas todas las ecuaciones que rigen la dinámica del modelo descrito, conviene hacer un estudio de lo que estas implican ([8], [9]).

Lo primero que conviene buscar es la solución estacionaria del sistema, si existe. Esta será aquella que anule el sumatorio de fuerzas y cumpla $\ddot{x} = 0$. Esto implica que la velocidad \dot{x} del bloque ha de ser constante y, por consiguiente, coincidir con la velocidad con la que el muelle es estirado (que habíamos llamado velocidad de arrastre), siendo $\dot{x}_{estac} = V$.

Además, a partir de la ec. (3) se obtiene que

$$0 = K(x_0(t) - x) - W \cdot \mu_d \Rightarrow x(t)_{estac} = x_0(t) - \frac{W}{K} \cdot \mu_d \quad (6)$$

Si pasamos x_0 a restar al lado izquierdo de la igualdad, obtenemos una expresión para la elongación del muelle. Puesto que el bloque lleva la misma velocidad que el extremo del muelle del que estiramos, esta elongación resulta ser constante y, como la fuerza normal W y la constante de elasticidad K también lo son, de nuevo μ_d debe ser constante. Así, viéndose la dependencia de $\mu_d(\dot{x}, \phi)$ en la ec (5) y sabiendo que $\dot{x} = V$, se llega a que $\phi = cte$.

$$|x(t) - x_0(t)| = \frac{W}{K} \cdot \mu_d = cte \Rightarrow \mu_d(\dot{x}, \phi) = \mu_d = cte \Rightarrow \phi, \dot{x} = cte \quad (7)$$

Ya sabemos qué valor toma \dot{x} , nos queda saber el que toma $\dot{\phi}$. Igualando $\dot{\phi} = 0$ en la ec. (4) se llega a

$$\phi_{estac} = \frac{D_0}{V} \quad (8)$$

Para este caso particular, podemos encontrar un significado físico para ϕ : tiempo necesario para que una nueva configuración de microcontactos sustituya a la anterior o, lo que es lo mismo, el tiempo que tarda el bloque en recorrer D_0 .

4.1.1. Análisis de la estabilidad

Se ha calculado entonces la solución estacionaria de las ecuaciones que describen la dinámica del bloque.

Ahora estudiaremos la estabilidad de esta solución. Vamos a suponer que la solución estacionaria es perturbada ligeramente y que dicha perturbación viene dada por δx , $\delta \dot{x}$ y $\delta \phi$ para cada una de las variables de evolución. Aplicándolo a las ecuaciones del movimiento, se tiene:

$$\delta \ddot{x} = -\frac{K}{M} \delta x - \frac{W}{M} \delta(\mu_d(\dot{x}, \phi)) \quad \delta \phi = -\delta \dot{x} \frac{\phi}{D_0} - \delta \phi \frac{\dot{x}}{D_0} \quad (9)$$

Como el coeficiente de fricción es función de \dot{x} y ϕ ,

$$\delta(\mu_d(\dot{x}, \phi)) = B \delta(\ln(\phi)) + A \delta(\ln(\dot{x})) = B \frac{\delta \phi}{\phi} + A \frac{\delta \dot{x}}{\dot{x}} \quad (10)$$

Estamos estudiando la estabilidad de la solución estacionaria. Esto significa que debemos particularizar las expresiones de las perturbaciones al caso estacionario, de tal manera que $x = x_{est}$, $\dot{x} = \dot{x}_{est}$ y $\phi = \phi_{est}$.

$$\delta\ddot{x} = -\frac{K}{M}\delta x - \frac{W}{M}\left[B\frac{V\delta\phi}{D_0} + A\frac{\delta\dot{x}}{V}\right] \quad (11)$$

$$\delta\dot{\phi} = -\frac{\delta\dot{x}}{V} - \delta\phi\frac{V}{D_0} \quad (12)$$

Tenemos un sistema de 3 grados de libertad $\{\delta x, \delta\phi, \delta p\}$.

$$\delta\ddot{x} = -\frac{K}{M}\delta x - \frac{W}{M}\left[B\frac{V\delta\phi}{D_0} + A\frac{\delta p}{MV}\right] \quad (13)$$

$$\delta\dot{\phi} = -\frac{\delta p}{MV} - \delta\phi\frac{V}{D_0} \quad (14)$$

$$\delta p = M\delta\dot{x} \quad (15)$$

Ahora, sea Λ la matriz del movimiento, que cumpla $\delta\dot{\vec{x}} = \Lambda\delta\vec{x}$, suponemos una solución del sistema tal que, si λ es autovalor de Λ y \vec{v} su respectivo autovector, sea

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta\phi \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} e^{i\lambda t} \quad (16)$$

De esta manera, sustituyendo las soluciones (16) y sus respectivas derivadas en las ecuaciones (13), (14) y (15), se obtiene :

$$\begin{aligned} (-\lambda^2 + \frac{K}{M})v_1 + \frac{WBV}{MD_0}v_2 + \frac{WA}{M^2V}v_3 &= 0 \\ (\lambda i + \frac{V}{D_0})v_2 + \frac{1}{MV}v_3 &= 0 \\ (-Mi\lambda)v_1 + v_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} (-\lambda^2 + \frac{K}{M}) & \frac{WBV}{MD_0} & \frac{WA}{M^2V} \\ 0 & (\lambda i + \frac{V}{D_0}) & \frac{1}{MV} \\ -Mi\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

La matriz anterior resulta ser $(\Lambda - \lambda\mathbb{1})$, donde Λ era la matriz del movimiento, λ su autovalor y $\mathbb{1}$ la matriz identidad. Esto implica que, si hacemos su determinante e igualamos la expresión a cero, podremos calcular los posibles autovalores. Esto será clave para hacer un análisis de la estabilidad del sistema. Se llega a la siguiente ecuación

$$-i\lambda^3 - \left(\frac{V}{D_0} + \frac{WA}{MV}\right)\lambda^2 + \left(\frac{W(A-B)}{MD_0} + \frac{K}{M}\right)i\lambda + \frac{KV}{MD_0} = 0 \quad (19)$$

Esta ecuación ha sido resuelta por *T.Baumberger* y *C. Caroli* [1], y es en el capítulo 2.4 y en el apéndice C donde analizan sus soluciones.

Si $Im(\lambda) > 0$, todas las perturbaciones cerca del equilibrio decaen, teniendo así deslizamiento localmente estable. Lo contrario sucede para el caso de $Im(\lambda) < 0$, donde tendremos comportamiento inestable en el régimen estacionario.

El resultado es una *bifurcación de tipo Hopf*, donde la constante elástica crítica K_c es el parámetro de bifurcación, implicando que, para $K > K_c$, tendremos régimen estacionario estable mientras que, para $K \leq K_c$, el régimen estacionario será oscilatorio. Físicamente, esta dinámica oscilatoria se manifestará como la dinámica de *Stick-Slip*.

T.Baumberger y C. Caroli [1] calculan el parámetro de bifurcación:

$$\frac{K_c}{W} = \frac{(B - A)}{D_0} \left[1 + \frac{MV^2}{WD_0A} \right] \approx \frac{(B - A)}{D_0} \quad (20)$$

Puesto que K_c depende de la resta $(B - A)$, sea un valor de K dado, es posible estimar qué tipo de dinámica tendremos, según los valores de A y B que elijamos. Como ya se ha mencionado anteriormente, ambos valores son constantes y dependerán de las superficies de fricción.

Podemos apreciar que, en el caso de que la resta dé lugar a un valor negativo $(B - A) < 0$, la dinámica será siempre estable. Esto se debe a que, para este caso particular, siempre se cumple $K_c < 0 < K$, sea cual sea el valor de la constante de elasticidad K , ya que esta es siempre positiva $K > 0$.

Sin embargo, para visualizar *Stick-Slip*, deberá cumplirse que $(B - A) > 0$, además de darse las condiciones necesarias de V y K , de tal manera que $K \leq K_c$.

Cabe particularizar en el caso de $A < 0$. Esto significa que la fuerza de rozamiento decrece con la velocidad. Puesto que la fricción siempre crecerá con el tiempo de contacto debido al *healing* (ver capítulo 3), B ha de ser positiva. Así, en el caso de que A sea negativa, se cumplirá siempre que $(B - A) > 0$ y, si el valor de K es suficientemente bajo, tendremos *Stick-Slip*. Esto es consistente con lo descrito en el capítulo anterior, donde se explicaba cómo el decrecimiento de la fricción con la velocidad daba lugar a inestabilidades.

La expresión (20) viene descrita por la suma de una constante y un término dependiente de la velocidad de arrastre, que llamaremos término de inercia. Si consideramos los valores típicos $D_0 \approx 1\mu m$ y $A \approx 10^{-2}$ para el deslizamiento de un bloque y masas típicas de un bloque real ($W = Mg \approx 10N$), el término de inercia se hace despreciable a velocidades de arrastre pequeñas $V \lesssim 100\mu m/s$, permitiendo despreciarlo en la ecuación anterior, siempre que trabajemos en este rango de velocidades.

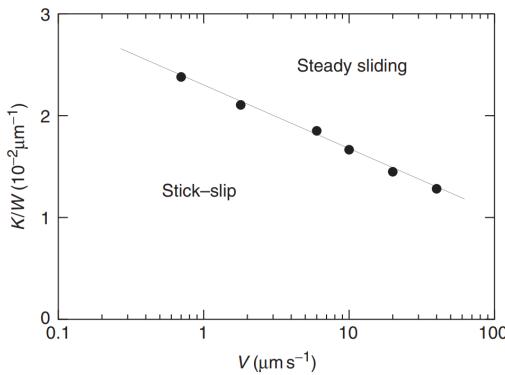


Figura 8: Diagrama de estabilidad de la dinámica de un PMMA/PMMA MCI en el rango de velocidades pequeñas. Gráfica obtenida de [1].

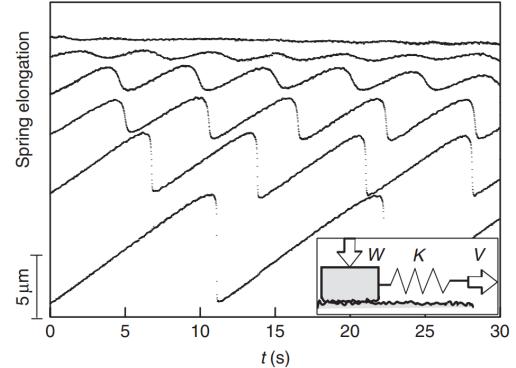


Figura 9: Elongación del muelle frente al tiempo para papel/papel MCI a una velocidad de estiramiento de $V = 1\mu m/s$. Gráfica obtenida de [1].

Si observamos la ecuación (20), podemos ver que K_c es constante con la velocidad V . Sin

embargo, resultados experimentales como los de la figura 8 muestran lo contrario. $(\frac{K}{W})_c$ no es estrictamente constante, sino que decrece lentamente con el aumento de V . Por otro lado, podemos observar cómo por encima del valor crítico tenemos deslizamiento estable y, por debajo, régimen inestable (*Stick-Slip*), que se corresponde con lo obtenido en el modelo descrito. Así, el modelo de *Rice-Ruina* (5) nos da una idea cualitativa de la dinámica.

En la figura 9 podemos ver que, conforme el valor de (K/W) decrece, la dinámica se bifurca de manera continua desde régimen estable (curva superior) hasta tener régimen inestable, con *Stick-Slip* (curva inferior). Esto contrasta con lo obtenido en el modelo tratado, donde la transición es abrupta.

Estas discrepancias aparecen por haber asumido en (5) que $\partial\mu_d/\partial(\ln(\phi)) = B = cte$ y $\partial\mu_d/\partial(\ln(\dot{x})) = A = cte$. Baumberger y Caroli curan estas discrepancias añadiendo términos de segundo orden en (5), como $\ln^2\phi$, $\ln^2\dot{x}$ o incluso $(\ln(\phi)) \cdot (\ln(\dot{x}))$.

Con todo esto, debido a la complejidad de la ecuación que se obtendría tras la corrección, podemos afirmar que el modelo de *Rice-Ruina* considerado es una buena aproximación de la dinámica considerada. Además, en el siguiente capítulo, se hará una simulación del modelo descrito para analizar su comportamiento en profundidad y la utilización de ecuaciones más complejas con términos de \ln^2 , lo imposibilitaría.

Cabe mencionar la existencia de un artículo publicado recientemente en *Nature Geoscience* [10], en el que exploran la idea de añadir términos dependientes del logaritmo de la velocidad a parámetros que hasta ahora se han considerado constantes. Estos son A y D_0 . Los resultados que obtienen para dinámicas lentas de *Stick-Slip* comparten características con datos reales recogidos en fallas tectónicas naturales. Si sustituimos las expresiones de A y D_0 en la ecuación para μ_d , se puede ver que realmente esto es equivalente a añadir términos de \ln^2 a la expresión de μ_d .

4.2. Evolución temporal del estado $\dot{\phi}$

En páginas anteriores ya se ha argumentado que el coeficiente de fricción debía depender de una variable que midiera el ‘estado’ de las superficies de contacto que friccionan entre sí; esta es ϕ . Así mismo, esta variable coincidía con el tiempo de contacto efectivo de cada uno de los microcontactos, que a su vez dependerá de la dinámica de las superficies en cada instante de tiempo. Con todo esto queda claro que ϕ es función del tiempo.

La evolución temporal de ϕ se ha descrito de diversas maneras, y es que todavía no se ha encontrado una fórmula matemática única que describa todos los datos experimentales que se han recogido hasta la fecha. Todas las leyes existentes actualmente son fenomenológicas y no existe una derivación formal de las mismas. En función de las distintas observaciones experimentales, se han propuesto diversas formas funcionales. Las más conocidas son las leyes de *Dieterich* (o *Ageing law*) y *Ruina* (o *Slip law*), aunque existen otras, como la ley de *Nagata*.

$$\dot{\phi} = 1 - \frac{\dot{x}\phi}{D_0} \quad (\text{Ageing law}) \quad (21)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\dot{x}\phi}{D_0} \ln\left(\frac{\dot{x}\phi}{D_0}\right) \quad (\text{Slip law}) \quad (22)$$

Estas dos leyes cuentan con algunas diferencias importantes.

Por un lado, según la ley de *Ruina* (22), la variable de estado sólamente evoluciona en el tiempo para aquellos microcontactos que estén deslizándose. Esto es, si las superficies se

encuentran en reposo relativo, entonces $\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \dot{\phi} = 0$.

Sin embargo, en capítulos anteriores se ha hablado del llamado *healing* [11]. Decíamos que los microcontactos y, por tanto, las superficies de fricción se hacen más fuertes conforme mayor sea el tiempo que estas están en reposo relativo. Esto refleja la necesidad de que la variable de estado aumente en el tiempo cuando la velocidad sea nula. Precisamente es lo que ocurre con la ley de Dieterich (21), donde $\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \dot{\phi} = 1$, y es la razón por la que el 1 positivo que aparece en la expresión es conocido como *término de recuperación* o *healing term*.

En la figura 10 se muestra la forma funcional de cada una de las dos leyes y los efectos que estas generan en la variable de estado ϕ . En azul se muestra la ley de Dieterich, mientras que en rojo se muestra la ley de Ruina. Como cabía esperar, en el caso de la ley de Dieterich, $\dot{\phi}$ aumenta de manera brusca y llega a su valor máximo (la unidad) en cada una de las situaciones de reposo, tras las cuales disminuye con el movimiento, alcanzando incluso valores negativos. Esto se manifiesta en la forma de ϕ de manera que, tras cada salto, crece mucho linealmente, con pendiente muy pronunciada, para disminuir de nuevo bruscamente cuando $\dot{\phi}$ alcanza valores negativos. En el caso de la ley de Ruina, $\dot{\phi}$ se hace nulo en el instante de tiempo en que tiene lugar el reposo. Sin embargo, crece rápidamente hasta alcanzar su valor máximo. La forma curiosa de $\dot{\phi}$ se manifiesta en ϕ de manera que esta última tiene forma de exponencial (distinta a la forma lineal que se observa con la ley de Dieterich). Puesto que los valores máximos de $\dot{\phi}$ en el caso de la ley de Ruina son menores que los observados en la ley de Dieterich, ϕ no alcanza valores tan altos.

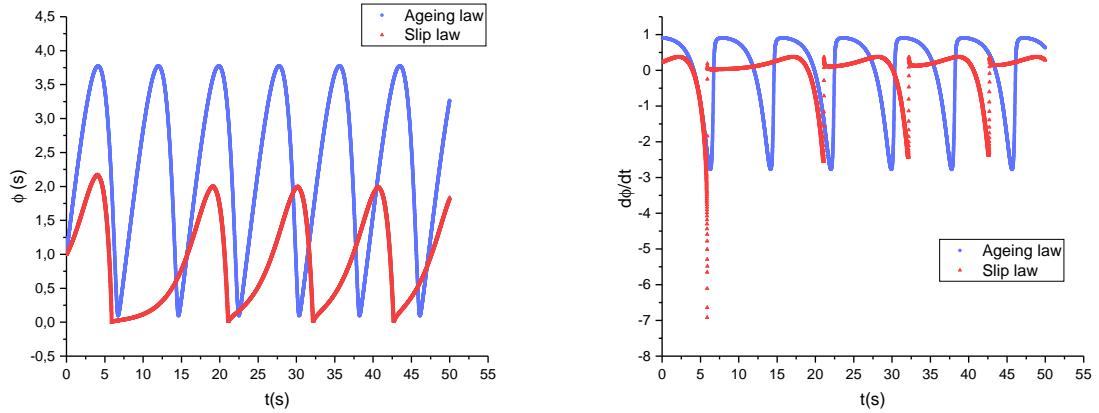


Figura 10: Comparativa de la forma funcional de las leyes de Dieterich y Ruina. A la izquierda se tiene la evolución temporal de la variable ϕ , mientras que a la derecha se tiene la evolución de su derivada. En ambos casos se muestra la ley de Dieterich con color azul y la ley de Ruina con color rojo. Evolución realizada mediante el método de Runge-Kuta. Parámetros utilizados: $V = 1\mu m/s$, $K = 10^5 N/m$, $A = 0,01$, $B = 0,02$, $V_0 = 9,5\mu m/s$, $D_0 = 1\mu m$, $\mu_0 = 0,6$, $M_{bloque} = 1kg$, $W = 10N$.

La afinidad de la ley de Dieterich con el concepto de *healing*, podría llevarnos a pensar que es más correcta que la ley de Ruina, desecharlo así esta última. Sin embargo, la forma funcional de la ley de Ruina ha resultado ajustarse mejor a los datos recogidos en experimentos en los que la velocidad de arrastre se hace aumentar de manera repentina.

Simulaciones numéricas han mostrado que la característica de la ley de evolución de ϕ más

relevante en la dinámica de terremotos es su respuesta ante saltos en la velocidad de arrastre. En el artículo [12], se hace un estudio de las leyes de Ruina, Dieterich y Nagata, con objetivo de entender cuál de las 3 leyes es más apropiada para simulaciones de terremotos. Para ello simulan y comparan con experimentos en los que la velocidad de arrastre describe saltos de 1, 2 y 3 órdenes de magnitud. En todos los casos la ley de Ruina se ajusta mejor a los datos experimentales que la ley de Dieterich.

Otro tipo de experimentos recurrentes son los ya mencionados experimentos de *stop and go*. Este tipo de experimentos se llevan a cabo con el objetivo de medir el *healing* de las superficies de contacto durante los períodos de reposo. Estos experimentos han respaldado siempre la ley de Dieterich, debido al término de recuperación o *healing*, con el que esta ley cuenta. Sin embargo, recientemente se ha observado que la recuperación del coeficiente de fricción en el tiempo $\Delta\mu$, en los momentos en los que las superficies se mantienen en reposo relativo (conocido como *frictional healing*) depende de la rigidez del sistema K . Estudios como el de la figura 11 muestran que, si la ley usada es la de Dieterich, la recuperación de la fricción no cambia su comportamiento ante variaciones en K . En naranja se muestran datos experimentales reales, mientras que en verde se muestran los resultados obtenidos usando esta ley.

Si echamos un vistazo a los valores de la rigidez utilizados en cada caso, podemos ver que para valores pequeños de esta ($K = 0,472$ en verde y $K = 0,27$ en naranja), los resultados obtenidos son parecidos, y los puntos naranjas se montan sobre la línea verde. Sin embargo, si consideramos valores más altos de rigidez, esto no es así. Según lo obtenido con la ley de Dieterich, grandes cambios en la rigidez implican pequeños cambios en el *frictional healing*. Esto contrasta con la realidad, que muestra un *frictional healing* mayor con valores de rigidez más pequeños que los usados con la ley de Dieterich (ver que los puntos experimentales de $K = 8$ quedan por encima de la línea verde de $K = 14,165$). Además, es fácil apreciar que la pendiente de las líneas verdes, que usan la ley de Dieterich, es en todos los casos constante, contrastando de nuevo con la realidad.

Este contraste con los resultados experimentales resta afinidad a la ley de Dieterich, pudiéndonos inclinar así hacia la ley de Ruina que, a pesar de no contar con un término de *healing*, el *frictional healing* sí que responde a cambios en la rigidez ([12], [13]). En definitiva elegir una ley u otra dependerá de la situación ante la que nos encontremos.

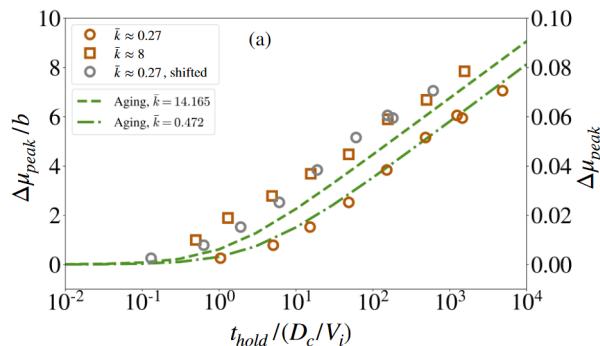


Figura 11: *Frictional healing* en función del tiempo de recuperación transcurrido, antes de volver a reanudar el movimiento. Mientras que en naranja se muestran resultados experimentales recogidos en laboratorio, en verde se muestran los obtenidos con la ley de Dieterich. Gráfica obtenida de [13].

En [14] se llevaron a cabo una serie de experimentos que implicaban saltos en el esfuerzo cortante. Ninguna de las dos leyes Dieterich y Ruina, se ajustaron a los datos experimentales de laboratorio. Para solucionar el problema propusieron la ley de Nagata. Su formulación se hizo añadiendo un término extra a la ley de Dieterich que dependiese de la derivada del esfuerzo, con objetivo de intentar ajustarse mejor a los datos experimentales observados.

$$\dot{\phi} = 1 - \frac{V\phi}{D_0} - \phi \frac{c\dot{\tau}}{b\sigma} \quad (\text{Nagata law}) \quad (23)$$

Aquí τ es el esfuerzo cortante (ver ec. 2) y σ es el *esfuerzo normal*, de tal manera que $\mu = \tau/\sigma$. La ecuación anterior (23) depende de una nueva constante c . En el mismo artículo estimaron que, si $c \sim 2$, la ley se ajustaba a los datos experimentales que estaban considerando.

Sin embargo, estudios posteriores como el que hacen en el ya citado artículo [12] descubren que, en experimentos en los que la velocidad de arrastre describe saltos, son necesarios valores de c en el rango de $10 - 100$ para conseguir un buen ajuste con la realidad. En la figura 12 se muestra cómo según el valor elegido de c , la ley de Nagata se acerca más al comportamiento de la ley de Dieterich o al de la ley de Ruina. En (A) se muestra Nagata con $c = 1$, siendo afín a la ley de Dieterich. En (B) se muestra Nagata con $c = 10$, afín a la ley de Ruina. En ambos casos, las leyes se ajustan mejor si se consideran saltos pequeños en la velocidad, frente a saltos grandes. Puesto que no hay manera de estimar el valor de c idóneo para cada experimento hasta que no se hace un ajuste con dichos datos experimentales, estos experimentos que implican saltos en la velocidad es suficiente describirlos usando la ley de Ruina.

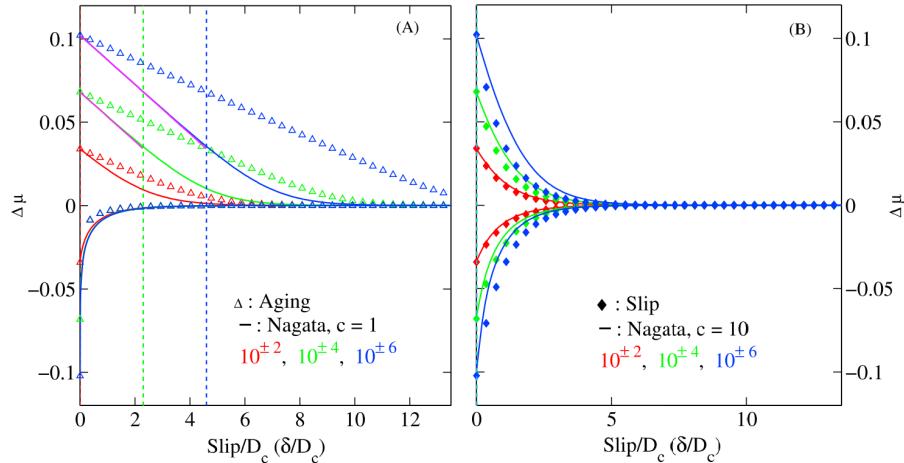


Figura 12: Comportamiento de la ley de Nagata en función de cuál sea el valor de c elegido. Se muestra el *frictional healing* $\Delta\mu$ para distintos saltos en la velocidad de arrastre (órdenes de $10^{\pm 2}$, $10^{\pm 4}$ y $10^{\pm 6}$). Gráfica obtenida de [12]

Además, aunque se crea que el valor de c depende del material, en [12] se observa que son necesarios distintos valores de c para experimentos iguales, en los que sólo se modifica el orden de magnitud del salto de velocidad. Esto arroja dudas sobre la dependencia de c con el material.

Por todo esto, parece que, aunque la ley de Nagata es un primer paso en el intento de formular una ley única que comprenda todos los datos experimentales hasta la fecha, su dependencia de un mayor número de variables la hace, a efectos prácticos, poco útil, siendo mejor una elección entre la ley de Dieterich o de Ruina en función del problema ante el que nos encontramos. Esta es la razón por la que estas dos leyes se sitúan por delante en popularidad.

5. Simulación del modelo descrito. Visualización del fenómeno *Stick Slip* y su comportamiento ante cambios en los parámetros elegidos.

Con el objetivo de entender mejor el efecto de la variable de estado ϕ en la fricción, así como su dependencia con la velocidad relativa entre las superficies \dot{x} , se ha implementado el modelo descrito en el capítulo anterior. En este considerábamos un bloque sometido a interacción elástica con un soporte que se mueve a velocidad de arrastre constante V , así como a una fuerza de rozamiento proporcional a la carga aplicada.

5.1. Adaptación de las ecuaciones para la implementación del modelo

Tal como se ha descrito en el capítulo anterior, la evolución del bloque en el tiempo vendrá dada por las ecuaciones (3) y (5). Así mismo, la variable de estado evolucionará según las ecuaciones (21) y (22), en función del caso que queramos estudiar. Estas ecuaciones describen bien la dinámica desde el punto de vista analítico. Sin embargo, al implementarlas no se obtiene el resultado esperado.

Esto sucede porque la integración de las ecuaciones del movimiento puede dar lugar a la presencia de velocidades negativas, en el caso de que el bloque retroceda al oscilar por la acción del muelle. Tal como está descrita la fuerza de fricción, es una fuerza que se opone al movimiento del bloque, y habremos de ajustar el signo de esta en función del signo de \dot{x} . Esto es posible corregirlo introduciendo en la ecuación del movimiento el signo de la velocidad (ec. 24) donde $\dot{x}/|\dot{x}| = \pm$ según la velocidad sea positiva o negativa .

$$M\ddot{x} = K(x_0(t) - x) + \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} W \mu_d \quad (24)$$

Además, tanto la variable de estado como el coeficiente de fricción son físicamente independientes del sentido movimiento; así, resulta necesario prescindir del signo de la velocidad del bloque cuando calculemos estos dos valores.

Para agilizar el funcionamiento del programa, así como asegurarnos de que el orden de las variables no se salen de aquel que es capaz de soportar el programa, será necesario adimensionalizar las ecuaciones. El espacio se pasa a medir en unidades de la longitud característica D_0 , y el tiempo se pasa a medir en unidades de un periodo T tal que $1/T = \omega_0 = \sqrt{K/M}$.

Así, la adimensionalización de las ecuaciones se hará de tal manera que

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{D_0} & \psi &= \omega_0 \phi & \tau &= \omega_0 t = \sqrt{\frac{K}{M}} t \\ \bar{x}' &= \frac{\dot{x}}{\omega_0 D_0} & \bar{W} &= \frac{W}{KD_0} & \psi_0 &= \frac{\omega_0 D_0}{v_0} \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones del movimiento quedan

$$\bar{x}'' = (\bar{v}\tau - \bar{x}) \pm \bar{W} \mu_d(\psi, \bar{x}') \quad (25)$$

$$\mu_d(\psi, \bar{x}') = \mu_0 + B \ln \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) + A \ln(\psi_0 |\bar{x}'|) \quad (26)$$

$$\psi' = 1 - |\bar{x}'| \psi \quad (\text{Ley de Dieterich}) \quad (27)$$

$$\psi' = -|\bar{x}'| \psi \ln(|\bar{x}'| \psi) \quad (\text{Ley de Ruina}) \quad (28)$$

5.2. Suponemos que $\mu_d = \mu_0 = cte$

Con objetivo de entender realmente qué supone la dependencia $\mu_d = \mu_d(\dot{x}, \phi)$, vamos a empezar considerando el caso de $A = B = 0$. En este caso, podemos considerar $\mu_d = cte$, de tal manera que la ecuación (3) pasaría a ser una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden, con solución analítica dada por

$$\Delta x(t) = \left(x_{ini} - x_{0,ini} + \frac{\mu W}{K} \right) \cdot \cos(w_0 t) + \frac{V - \dot{x}_{ini}}{w_0} \cdot \sin(w_0 t) + \frac{\mu W}{K} \quad (29)$$

Para encontrar la velocidad del bloque, podemos despejar su posición de tal manera que $x(t) = x_0(t) - \Delta x(t)$. Derivando esta expresión se obtiene:

$$\dot{x}(t) = V - \left[-\omega_0 \cdot \left(x_{ini} - x_{0,ini} + \frac{\mu W}{K} \right) \cdot \sin(w_0 t) + \omega_0 \cdot \frac{V - \dot{x}_{ini}}{w_0} \cdot \cos(w_0 t) \right] \quad (30)$$

Habíamos definido la fuerza lateral como aquella necesaria para mantener la velocidad de arrastre constante, es decir, aquella con la que se estira del soporte. Así, decíamos que $F_{lat}(t) = K \cdot \Delta x(t)$. Si sustituimos la expresión para la elongación (29), se tiene:

$$F_{lat}(t) = K \left[\left(x_{ini} - x_{0,ini} + \frac{\mu W}{K} \right) \cdot \cos(w_0 t) + \frac{V - \dot{x}_{ini}}{w_0} \cdot \sin(w_0 t) + \frac{\mu W}{K} \right] \quad (31)$$

Es fácil darse cuenta de que el último término corresponde con la fuerza de fricción $F_R = \mu W$, simplificando la constante elástica.

$$F_{lat}(t) = K \left[\left(x_{ini} - x_{0,ini} + \frac{\mu W}{K} \right) \cdot \cos(w_0 t) + \frac{V - \dot{x}_{ini}}{w_0} \cdot \sin(w_0 t) \right] + F_R \quad (32)$$

En la figura 13 se muestra la elongación del muelle, la velocidad del bloque y la fuerza lateral del sistema. El resultado en todos los casos son oscilaciones en torno a una constante. Cabe destacar que dichas constantes son, en el caso de la velocidad del bloque, el valor de V , en el caso de la fuerza lateral, el valor de F_R , y en el caso de la elongación, su valor medio. Esto será de gran importancia para entender la dinámica. Además, si observamos la figura, las oscilaciones de Δx y F_{lat} son proporcionales ($F_{lat}(N) = 0,1 \cdot \Delta x(\mu m)$, pues $K = 10^5 N/m$), tal como cabía esperar del análisis analítico realizado. Sin embargo, puesto que la velocidad es la derivada de la elongación más una constante, esta tiene un desfase $-\pi/2$ respecto a la elongación y fuerza lateral.

Cuando se comienza a estirar del muelle la velocidad de arrastre es mayor que la velocidad del bloque ($\dot{x} < V$), esto supone un aumento en la elongación y, por tanto, en la fuerza lateral. En este caso, la fuerza lateral supera a la fuerza de rozamiento ($F_{lat} > F_R$), dando lugar a una aceleración positiva en el bloque, cuya velocidad aumentará hasta alcanzar a V .

Si la velocidad del bloque y de arrastre son iguales ($V = \dot{x}$), la fuerza lateral alcanza su valor máximo ($F_{lat} = F_{lat,máx}$), y comienza a disminuir hasta ser igual que la fuerza de rozamiento ($F_{lat} = F_R$). A lo largo de este periodo de tiempo, el sumatorio de fuerzas sobre el bloque es positivo y, por tanto, la velocidad sigue aumentando ($\ddot{x} > 0$) hasta alcanzar su valor máximo ($\dot{x} = \dot{x}_{máx}$), coincidiendo con el instante en que las fuerzas lateral y de rozamiento se igualan ($\ddot{x} = 0$).

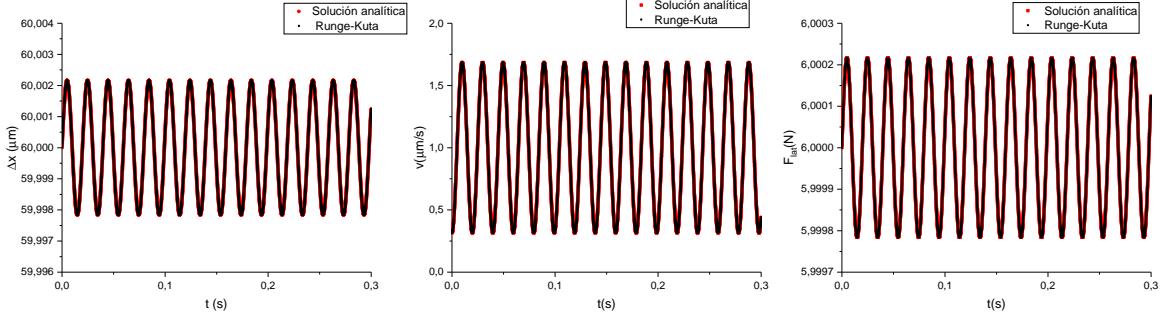


Figura 13: Evolución de Δx , velocidad del bloque \dot{x} y fuerza lateral F_{lat} ($A = B = 0$). Se presentan las soluciones analíticas de las ec. (29), (30) y (32), junto con las calculadas mediante el método de Runge-Kuta ($V = 1$, $V_0 = 9,5 \mu\text{m}/\text{s}$, $D_0 = 1 \mu\text{m}$, $\mu = \mu_0 = 0,6$, $M_{\text{bloque}} = 1 \text{kg}$, $W = 10 \text{N}$ y $K = 10^5 \text{N/m}$).

A partir de este momento, la fuerza lateral es superada por la fuerza de rozamiento ($F_{\text{lat}} < F_R$) y la velocidad del bloque disminuye hasta alcanzar de nuevo el valor de la velocidad de arrastre ($V = \dot{x}$). En este caso la fuerza lateral alcanza su valor mínimo ($F_{\text{lat}} = F_{\text{lat},\text{min}}$) y, mientras \dot{x} sigue disminuyendo, la fuerza lateral aumentará hasta alcanzar a la fuerza de rozamiento ($F_{\text{lat}} = F_R$). Es a partir de este momento que comienza el ciclo de nuevo.

Cabe notar que los resultados obtenidos con el método de Runge-Kuta coinciden perfectamente con la solución analítica obtenida del sistema. Esto nos da una pista para suponer que el modelo utilizado funciona correctamente o que, al menos, lo hace en la situación simplista de tener un coeficiente de rozamiento constante.

La dinámica observada son oscilaciones constantes de muy pequeña amplitud y periodo debido a la acción del soporte, y no se observa *Stick-Slip*. Para ello será necesario introducir un término en el coeficiente de rozamiento, dependiente de la velocidad, y que conduzca a inestabilidades ($A < 0$).

5.3. Añadimos un término dependiente de la velocidad ($A < 0$)

Con el objetivo de entender la naturaleza de la dinámica del modelo descrito, se va a asumir que la fuerza de fricción ya no es una constante, pero depende únicamente de la velocidad del bloque \dot{x} . Esto implica añadir un término al coeficiente de fricción, que vamos a considerar que tiene dependencia logarítmica con la velocidad y que además lo debilita. Este término será de la forma $\ln(1 + \dot{x}/V_0)$. El 1 añadido dentro del logaritmo es necesario para evitar que el coeficiente de fricción diverja para velocidades nulas, en cuyo caso se tendrá un valor de coeficiente de fricción estático tal que $\mu(\dot{x}) = \mu_0$. Además, puesto que μ es independiente de la dirección del movimiento, habremos de prescindir del signo de la velocidad.

$$\mu(\dot{x}) = \mu_0 - A \cdot \ln \left(1 + \frac{|\dot{x}|}{V_0} \right) \quad (33)$$

En la figura 14 se observa la forma funcional $F_R(\dot{x})$ de la fuerza de fricción donde $F_R = W\mu$.

En la figura 15 podemos ver la evolución de la posición del bloque para diferentes valores de A . Para valores pequeños, como es el caso de $A = 0,001$, el bloque desliza de manera casi continua. Sin embargo, conforme A aumenta, se observa *Stick-Slip*; es decir, el bloque se mantiene deslizando muy lentamente (velocidades del orden de $10^{-2} \mu\text{m}/\text{s}$) durante periodos de tiempo

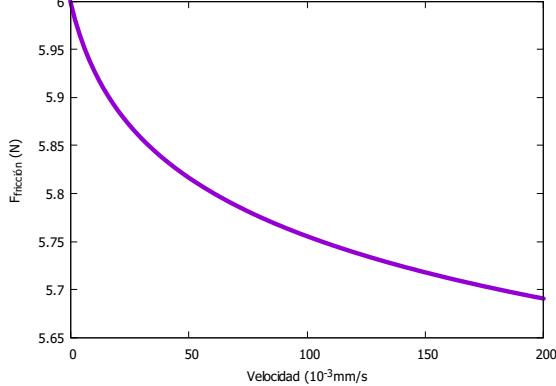


Figura 14: Forma funcional $F(\dot{x}) = W \cdot \mu(\dot{x})$ de la ley de fricción logarítmica. Parámetros utilizados: $F_0 = 6\text{N}$, $A = 0,01$, $W = 10\text{N}$, $V_0 = 9,5\mu\text{m/s}$

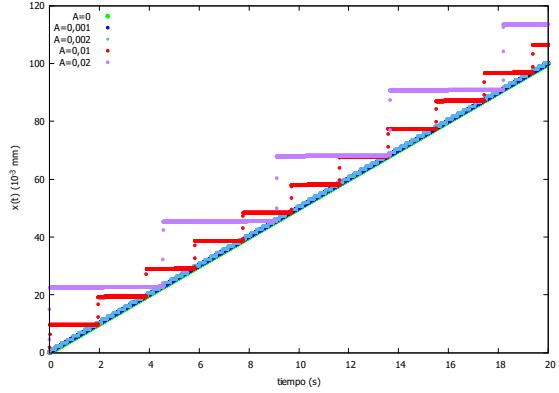


Figura 15: Posición frente al tiempo del bloque en función del valor de A . Simulación realizada con el método de Runge-Kuta. En todos los casos velocidad de arrastre $V = 5\mu\text{m/s}$ y constante de elasticidad $K = 10^5\text{N/m}$. Se considera una masa del bloque de $M = 1\text{kg}$.

tras los cuales salta para volver a deslizarse y comenzar de nuevo el ciclo. Estos saltos son cada vez más evidentes conforme consideramos valores de A más grandes.

Para entender mejor la dinámica conviene analizar las fuerzas que actúan en el sistema. Estas son la fuerza lateral y la fuerza de rozamiento, de tal manera que

$$F_{lat} = K(x_0 - X(t)) \quad (34)$$

$$F_R = F_0 - W \cdot A \ln(1 + |\dot{x}|/V_0) \quad (35)$$

Hemos visto que para valores de A suficientemente altos se observan períodos de lento deslizamiento seguidos de saltos. Si observamos la figura 16, nos damos cuenta de que, durante los períodos de deslizamiento, la fuerza de fricción es prácticamente constante $F_{fricción} \sim F_0 = W\mu_0$ pues el término dependiente de la velocidad se hace prácticamente nulo, debido a las pequeñas velocidades de deslizamiento del bloque (ver ec. (35)). Sin embargo, como la velocidad de arrastre es mucho mayor que la velocidad del bloque ($\dot{x} \ll V$), la elongación aumenta con el deslizamiento de manera lineal. Así, la fuerza lateral, que es proporcional a la elongación, aumentará de la misma manera, hasta alcanzar a la fuerza de fricción $F_{lat} = F_0$, tal como se ve en la figura 17. En el momento en que la fuerza lateral supera a la fuerza de rozamiento, el bloque se ve sometido a una aceleración positiva. Al principio, la velocidad del bloque sigue siendo menor que la velocidad de arrastre $\dot{x} < V$, lo que supone que la fuerza lateral siga aumentando. A su vez el aumento en la velocidad del bloque implicará un decaimiento en la fricción que, debido a la dependencia logarítmica existente con la velocidad, será abrupto. Es en este momento que tiene lugar el salto. El avance del bloque tras dicho salto da lugar a que la elongación disminuya y, con ella, la fuerza lateral, repitiéndose el proceso.

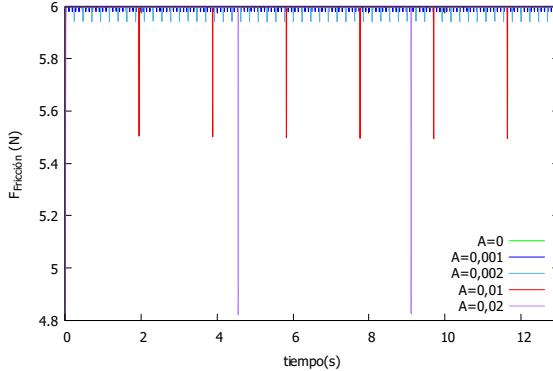


Figura 16: Fuerza de fricción frente al tiempo, donde $F_{Fricción} = F_0 - 10A \cdot \ln(1 + v/V)$.

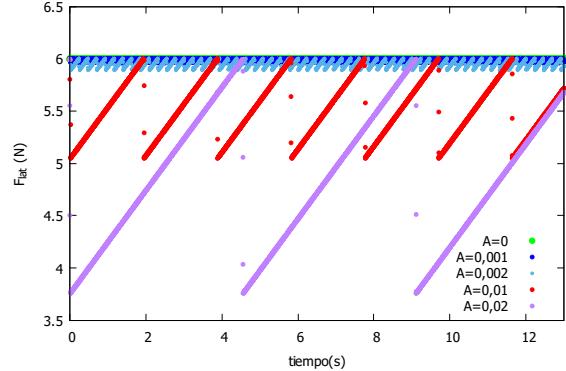


Figura 17: Fuerza elástica frente al tiempo, donde $F_{lat} = K(x_0 - x(t))$.

Una pregunta que nos podemos hacer es cómo se comporta el sistema en función de los valores de la velocidad de arrastre V elegidos. En la figura 18 se muestra la fuerza lateral para velocidades de arrastre en el rango de 2 a $100 \mu\text{m}/\text{s}$, a un valor de $K = 10^5 \text{ N/m}$ dado. En todos los casos se obtiene dinámica de *Stick-Slip*, siendo la estabilidad del sistema independiente de V .

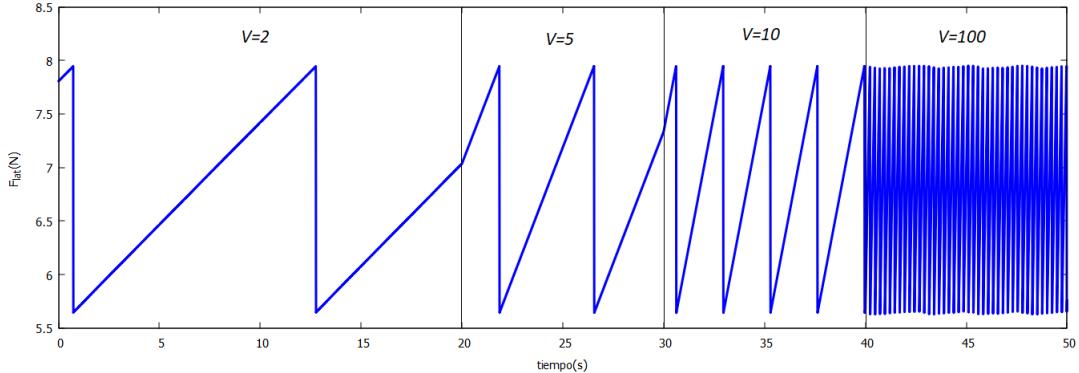


Figura 18: Evolución temporal de la fuerza lateral ante saltos en la velocidad de arrastre. Para $t < 20\text{s}$ se tiene $V = 2\mu\text{m}/\text{s}$, para $20 < t < 30\text{s}$ se tiene $V = 5\mu\text{m}/\text{s}$, para $30 < t < 40\text{s}$ se tiene $V = 10\mu\text{m}/\text{s}$ y para $40 < t < 50\text{s}$ se tiene $V = 100\mu\text{m}/\text{s}$. En todos los casos $A = 0,01$, $M = 1\text{kg}$, $K = 10^5 \text{ N/m}$, $V_0 = 9,5\mu\text{m}/\text{s}$.

5.3.1. Otras formas funcionales.

Es posible considerar otro tipo de dependencias $F_R(v)$ con las que visualizar *Stick-Slip*. Esto es lo que hace Persson en el capítulo 7.6 de [15], donde considera leyes más ‘simples’, añadiendo un término de amortiguamiento en la fuerza de fricción (ver figura 19). En los casos a, b, d y e, este término de amortiguamiento es lineal, pudiéndose escribir la fuerza de fricción de la forma $F(v) = F_0 + g \cdot v$. En los casos c y f no se tienen formas tan sencillas.

A la izquierda de la figura 19, se muestra la expresión utilizada para la fricción en función de la velocidad de deslizamiento. A la derecha, se muestra la fuerza lateral $F_{lat} = K(Vt - x)$ a una velocidad de arrastre V dada, que se aumenta de manera abrupta a $t = 50\text{s}$, pudiéndose conocer así el comportamiento de las leyes ante cambios en V . Observando lo obtenido para F_{lat} , vemos que algunos casos dan lugar a *Stick-Slip*, mientras que otros no.

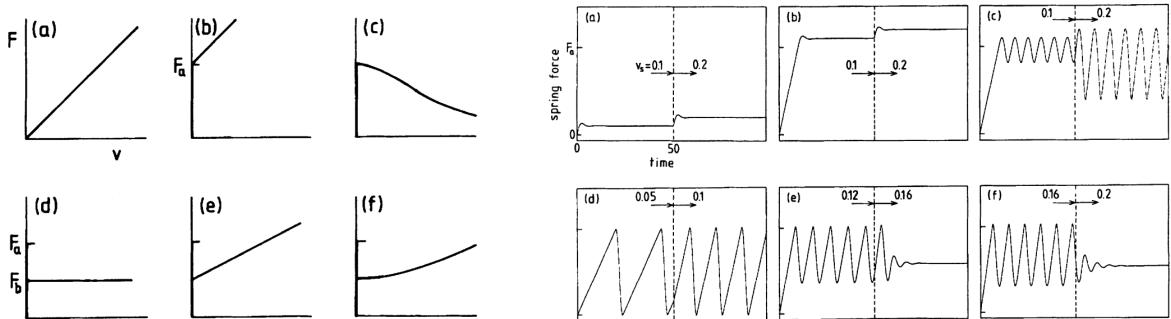


Figura 19: Posibles leyes de fricción a considerar. A la izquierda se representa la fuerza de fricción en función de la velocidad $F(v)$ y a la derecha se representa la fuerza lateral $F_{lat}(t) = K(v_s t - x(t))$ frente al tiempo y ante cambios en la velocidad de estiramiento. Sea $F_a > F_b$, las leyes de fricción presentadas son (a) $F = F_a v / v_0$, (b-f) $F \leq F_a$ si $v = 0$ y si $v > 0$ entonces (b) $F = F_a(1 + v/v_0)$, (c) $F = F_a/[1 + (v/v_0)^2]$, (d) $F = F_b$, (e) $F = F_b(1 + v/v_0)$, (f) $F = F_b[1 + (v/v_0)^2]^{1/2}$. Gráficas obtenidas de [15].

Deslizamiento estable:

En los casos (a) y (b) se obtiene deslizamiento estable para cualquier valor de V . En ambos se considera que la fuerza de fricción dinámica es mayor o igual a la fuerza de fricción estática, que en el primero de los casos será nula y en el segundo será igual a F_a .

En el caso de (a) la fuerza estática es nula, es decir, el bloque desliza desde el instante $t = 0$. Al comienzo, el bloque se mueve de manera muy lenta y, como la velocidad de arrastre es mayor que la del bloque ($\dot{x} < V$), la fuerza lateral aumenta (ver el pico al inicio de la gráfica de la fuerza lateral), quedando por encima de la fuerza de fricción ($F_{lat} > F_R$). Esto lleva a que el bloque acelere positivamente. Así, debido a la dependencia $F_R \propto \dot{x}$, la fuerza de fricción también aumenta con la velocidad, hasta igualarse a la fuerza lateral, que a su vez disminuye ($F_{lat} = F_R$). A partir de este momento la aceleración sobre el bloque se hace nula y las velocidades de arrastre y del bloque se igualan $\dot{x} = V$, manteniéndose así la fuerza lateral constante en el tiempo, y dando lugar a un deslizamiento estable.

En el caso (b) la dinámica desde que comienza el movimiento es la misma que en (a). Sin embargo, el movimiento no tiene lugar hasta que la fuerza lateral no se iguala con la fuerza de rozamiento estático, que en este caso no es nula, sino igual a F_a . El resultado es la misma dinámica con la salvedad de que en el caso (b) la fuerza lateral debe aumentar en el tiempo hasta alcanzar el umbral estático, y no es hasta este momento que comienza el deslizamiento.

Stick-Slip:

En los casos (c) y (d) se obtiene *Stick-Slip* para cualquier valor de la velocidad de arrastre .

En el caso (d) consideramos que la fuerza de fricción dinámica es constante y menor que la fuerza de fricción estática ($F_{estática} = F_a$, $F_{dinámica} = F_b$, donde $F_a > F_b$). Inicialmente el bloque se encuentra en reposo y, conforme el tiempo avanza, el muelle se estira, aumentando así la fuerza lateral. Cuando ésta alcanza el umbral F_a , las superficies comienzan a deslizar y la fricción decae a su valor dinámico F_b . Este decaimiento abrupto en la fricción, supone una aceleración positiva hacia la derecha (la fuerza lateral sigue siendo igual a F_a), que lleva al bloque a describir un salto, tras el cual se vuelve a encontrar en reposo y repitiéndose así la dinámica descrita.

En el caso (c), en lugar de considerar un cambio abrupto entre la fricción estática y dinámica, se considera un cambio continuo hasta alcanzar un mínimo. Esto implica que la aceleración del bloque en el momento en que se alcanza el umbral no es tan abrupta, sino que comienza siendo pequeña y poco a poco aumenta. El resultado son oscilaciones en el muelle, en lugar de los saltos que describía el caso (d).

Cabe destacar la similitud existente entre la ley descrita en el caso (c) y la descrita en la figura 14. Como se ha podido comprobar en la figura 18, el sistema descrito por la ley de fricción logarítmica, mostrada en la ecuación (35), describe dinámica de *Stick-Slip* para cualquier valor de la velocidad de arrastre V . Debido a la similitud de la forma funcional de ambas leyes, no es de extrañar que suceda lo mismo en el caso (c).

Dinámica variable según la velocidad de arrastre:

En los casos (e) y (f) se obtiene *Stick-Slip* para ciertos valores de la velocidad de arrastre V por debajo de un umbral $V < V_c$ y deslizamiento estable por encima de este $V > V_c$.

En el caso (e) se considera un cambio abrupto en la fuerza de fricción cuando el bloque pasa del reposo al movimiento, exactamente igual que se había considerando en el caso (d). Ahora bien, una vez alcanzado el umbral, la fuerza de fricción dinámica aumenta con la velocidad. Para velocidades bajas, la fuerza de fricción dinámica siempre queda por debajo de la fuerza de fricción estática ($F_R < F_a$), dando lugar a *Stick-Slip*, igual que ocurría en el caso (d). Sin embargo, para velocidades altas, la fuerza de fricción dinámica se hace mayor que la fuerza de fricción estática ($F_R > F_a$), obteniéndose así una dinámica similar a los casos (a) y (b), donde teníamos deslizamiento estable.

El caso (f) es el más complejo. De nuevo, al igual que en el caso (e), la fuerza de fricción decrece de manera abrupta cuando comienza el movimiento y aumenta con la velocidad, pudiéndose distinguir entre las dos posibles dinámicas según la fuerza de fricción dinámica supere la fuerza de fricción estática o no. En contraste con el caso (e), la dependencia de la fuerza de fricción con la velocidad no es lineal sino que, para velocidades pequeñas, es prácticamente constante y, si consideramos velocidades mayores, la fuerza de fricción aumenta con una pendiente pronunciada. Como resultado, la transición entre las dos dinámicas tiene lugar a velocidades mayores que en el caso (e).

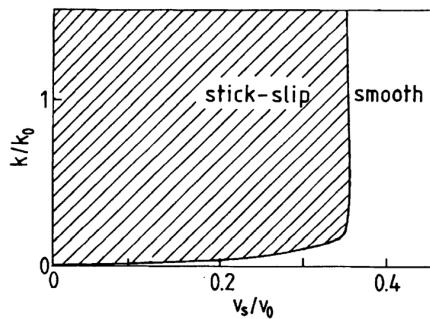


Figura 20: Diagrama de fases (K, V) para la ley de fricción descrita en la figura 19(f). La zona rayada muestra dinámica de *Stick-Slip* y la zona blanca muestra deslizamiento estable. Imagen obtenida de [15].

En [15] se hace un análisis de la estabilidad de esta forma funcional y se calcula el diagrama de fases que se observa en la figura 20, mediante integración numérica de la ecuación del movimiento.

Tal como se muestra en la figura, la estabilidad del sistema depende claramente de la velocidad de arrastre, resultado que, tal como se comentó en el capítulo anterior, coincide lo observado experimentalmente (figura 8). Sin embargo, la dependencia de la estabilidad con la constante de elasticidad K , no es la observada experimentalmente. De hecho, según este modelo, por encima de un valor muy bajo de elasticidad K , la estabilidad de la dinámica es independiente de ella, contrariamente a lo mostrado en la figura 8, donde se puede ver que siempre hay un valor de K_c donde la dinámica cambia. Así, se manifiesta la necesidad de introducir otro término a la fricción, que sea dependiente de la variable estado ϕ , y entre en juego el concepto de *envejecimiento*.

5.4. Consideramos la dependencia $\mu_d = \mu_d(\dot{x}, \phi)$

A estas alturas debe quedar ya clara la necesidad de introducir en la fuerza de fricción una dependencia no sólo con la velocidad relativa entre las superficies de fricción, sino también con la variable estado ϕ , que nos medía el tiempo efectivo de contacto entre dichas superficies. Así, se procede a visualizar la ya descrita ley de fricción de *Rice-Ruina* al completo, es decir, considerando no sólo $A \neq 0$ (como se hacía en el apartado anterior), sino que también $B \neq 0$.

En el capítulo 4.1.1 se hizo un análisis de la estabilidad del modelo, y se explicó que, para poder visualizarse *Stick-Slip*, debía cumplirse que $(A - B) < 0$ y a su vez darse las condiciones necesarias de V y K . También se comentó que el término dependiente de la velocidad de arrastre, que establecía la relación de esta con la estabilidad del sistema, era despreciable para velocidades de arrastre pequeñas $V \lesssim 100\mu\text{m}/\text{s}$ (ver ecuación (20), que se recuerda a continuación).

$$\frac{K_c}{W} \approx \frac{(B - A)}{D_0} \quad (36)$$

Así, realmente sólo podremos hablar de una constante de elasticidad crítica K_c y nunca de velocidad de arrastre crítica V_c . A continuación se va a proceder a comprobar estos resultados.

En la figura 21 podemos visualizar cómo, dado un valor de la velocidad de estiramiento V , la dinámica varía en función de la constante elástica K . Podemos ver que, para $K = 10^5\text{N}/\text{m}$, la dinámica es claramente inestable, mientras que para $K = 1,05 \cdot 10^5\text{N}/\text{m}$, el sistema ya es un atractor, y llega antes a la estabilidad conforme mayor es K . Esto sucede para los dos casos contemplados, con velocidades de arrastre $V = 1\mu\text{m}/\text{s}$ y $V = 10\mu\text{m}/\text{s}$. Podemos calcular el valor teórico de la constante elástica crítica K_c mediante la expresión (36), utilizando los parámetros introducidos en la simulación. Estos son $D_0 = 1\mu\text{m}$, $W = 10\text{N}$, $A = 0,01$ y $B = 0,02$. Se obtiene un valor crítico de $K_c = 10^5\text{N}/\text{m}$, que coincide justamente con el único valor contemplado de K en la figura 21 que da lugar a *Stick-Slip*. Esto concuerda con lo analizado, de nuevo, en el capítulo 4.1.1, donde se dijo que se obtendrían inestabilidades para $K \leq K_c$ y dinámica estable para $K > K_c$.

Así mismo, podemos, a un valor dado de K , ver si cambia el tipo de dinámica ante cambios en la velocidad de arrastre V . En la figura 22(a) se muestran saltos en la velocidad de arrastre, barriendo velocidades dentro del intervalo $1 - 100\mu\text{m}/\text{s}$. Puesto que el valor de la constante K utilizada es el valor crítico $K_c = 10^5\text{N}/\text{m}$, se obtiene *Stick-Slip* para todas las velocidades de arrastre consideradas. Por el contrario, en la figura 22(b) se utiliza una constante elástica $K = 1,2 \cdot 10^5\text{N}/\text{m} > K_c$, obteniéndose deslizamiento estable en todos los casos. Así se comprueba la independencia de la dinámica con la velocidad de arrastre.

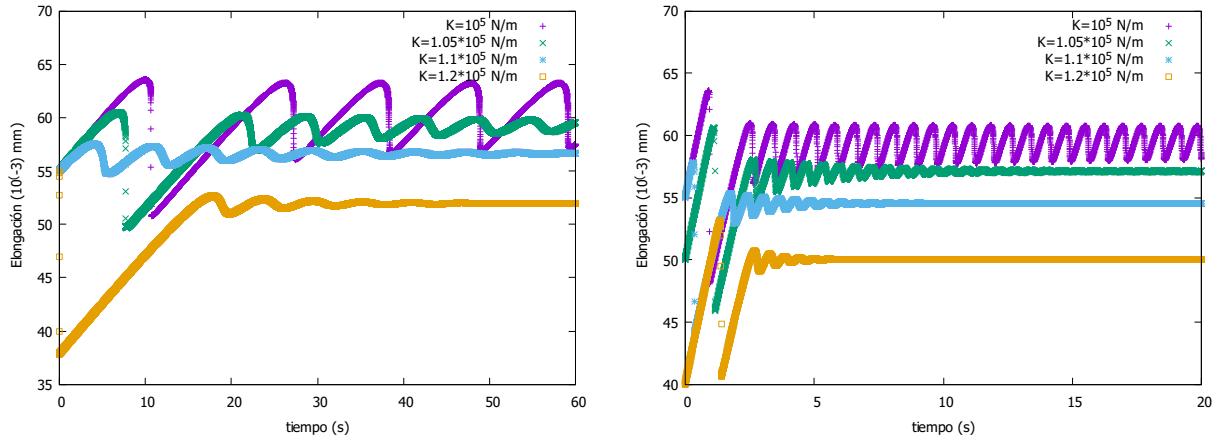


Figura 21: Evolución de la elongación para diferentes valores de la constante elástica K . En la figura de la izquierda se muestran resultados para velocidad de estiramiento del muelle de $V = 1\mu\text{m}/\text{s}$, mientras que en la figura de la derecha tenemos $V = 10\mu\text{m}/\text{s}$. Evolución realizada mediante el método de Runge-Kuta. Evolución de ϕ descrita por la Ley de Ruina. Parámetros utilizados: $A = 0,01$, $B = 0,02$, $V_0 = 9,5\mu\text{m}/\text{s}$, $D_0 = 1\mu\text{m}$, $\mu_0 = 0,6$, $M_{\text{bloque}} = 1\text{kg}$, $W = 10N$.

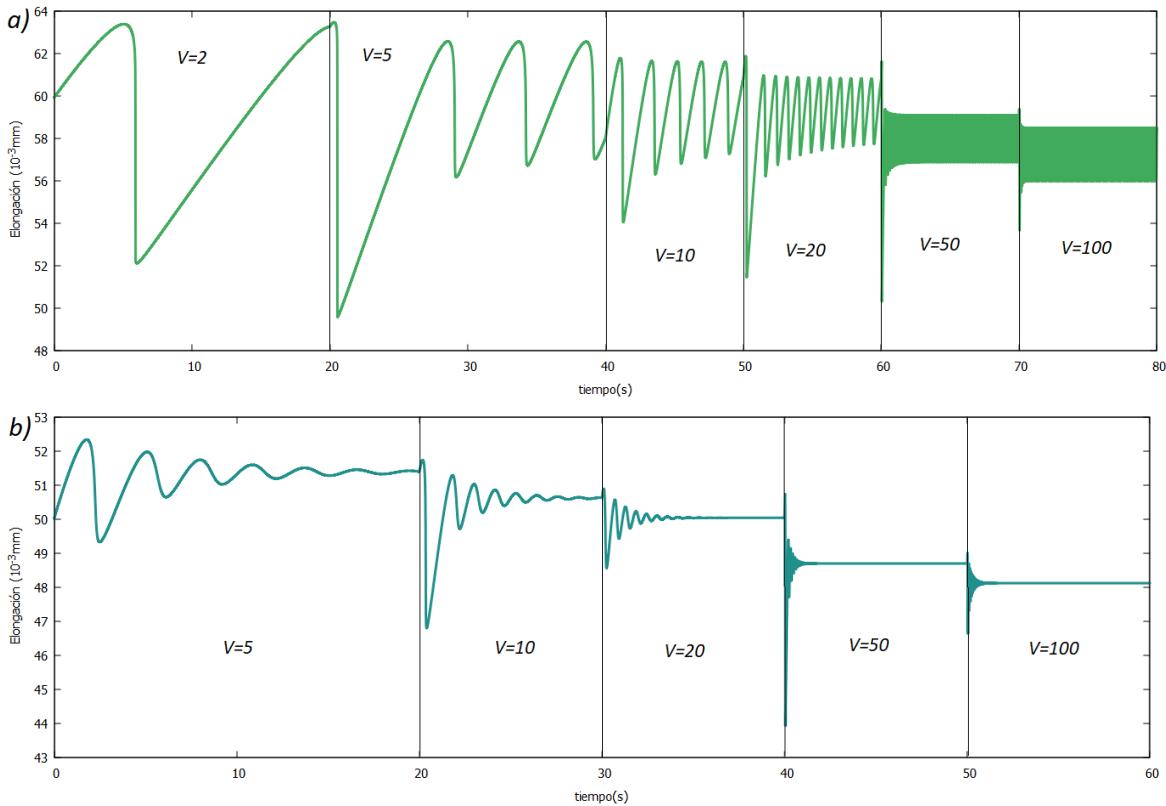


Figura 22: Evolución temporal de la elongación del muelle Δx ante saltos en la velocidad de arrastre V . En el caso (a) se introduce una constante de elasticidad $K = 10^5\text{N}/\text{m} = K_c$, observándose dinámica inestable. En el caso (b) $K = 1,2 \cdot 10^5\text{N}/\text{m} > K_c$, observándose dinámica estable. Las velocidades de arrastre contempladas son (a) $V = 2, 5, 10, 20, 50, 100\mu\text{m}/\text{s}$, (b) $V = 5, 10, 20, 50, 100\mu\text{m}/\text{s}$. En ambos casos las oscilaciones descritas para $V = 50, 100\mu\text{m}/\text{s}$ tienen un periodo tan pequeño que no se aprecian en la escala de tiempo utilizada. Se han utilizado los mismos parámetros y leyes de evolución que en la figura 21.

Cabe destacar que, a pesar de que en las figuras 21 y 22 la evolución de la variable estado ϕ viene dada en todos los casos por la ley Ruina, haber utilizado alguna otra de las leyes de evolución existentes, como la ley de Dieterich, nos hubiera dado los mismos resultados cualitativos. En la figura (23) se muestran todas las variables de evolución (Δx , ϕ , \dot{x} , \ddot{x} , μ_d y $\dot{\phi}$), utilizando tanto la ley de Ruina (en rojo) como la ley de Dieterich (en azul). Cualitativamente se comprueba que la dinámica es la misma, aunque cuantitativamente los resultados varíen de una ley a otra, debido a sus diferentes formas funcionales.

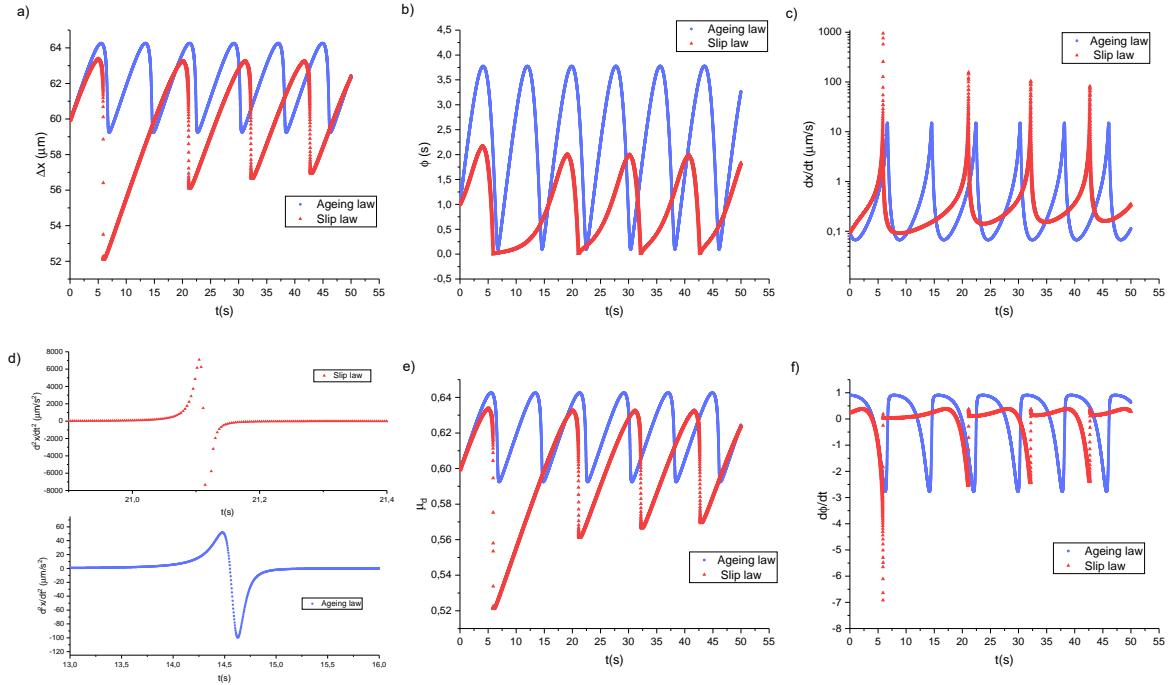


Figura 23: Evolución temporal del bloque mediante el método de Runge-Kuta. La línea roja corresponde a la Ley de Ruina y la línea azul corresponde a la Ley de Dieterich. Se muestran: (a) ($x - x_0$) , (b) ϕ , (c) \dot{x} , (d) \ddot{x} , (e) μ_d y (f) $\dot{\phi}$.

6. Conclusión

La fricción seca entre sólidos es clave en estudios tan importantes como la fricción entre rocas en fenómenos sísmicos ([16], [17]) o como el fenómeno de envejecimiento de contacto, presente en experimentos de fricción en la nanoescala utilizando un microscopio de fuerza atómica ([18], [19], [2]).

En el presente trabajo se han estudiado las teorías más recientes hasta la fecha, las teorías de *rate and state*, y las evidencias que han motivado que fueran formuladas. Estas teorías se basan en introducir en la fuerza de fricción términos dependientes, tanto de la velocidad relativa entre las superficies que deslizan, como de una nueva variable ϕ llamada *variable de estado*, que depende del tiempo de contacto entre dichas superficies. Fueron motivadas por observaciones experimentales que sugerían, entre otras evidencias, un fortalecimiento del coeficiente de rozamiento estático con el tiempo que dos superficies se encontraban en reposo relativo, una clara dependencia del coeficiente de rozamiento dinámico con la velocidad de deslizamiento relativo, y la incapacidad de distinguir un experimento de rozamiento estático de un experimento de

rozamiento dinámico a velocidades bajas.

Sin embargo, a lo largo del trabajo se ha visto que, tanto la dependencia de la fricción con la velocidad y el estado, como la evolución temporal de esta última variable, se pueden describir de diversas maneras.

Por un lado, introducir en la fricción un término dependiente de la velocidad manteniendo una independencia con el estado, puede dar lugar a dinámicas muy diversas ante formas funcionales de $\mu(v)$ distintas. Con alguna de las leyes para la fricción $\mu(v)$ estudiadas, se ha observado que, al aplicarlas a un modelo sencillo formado por un bloque y un soporte, la estabilidad de la dinámica presenta una dependencia con la velocidad con la que estira del muelle, comportamiento afín a observaciones experimentales como las vistas en la figura 8. Sin embargo, la introducción de ϕ en la fricción es necesaria para entender el fortalecimiento de las superficies de contacto cuando estas se encuentran en reposo relativo (*healing*) y su debilitamiento cuando deslizan (*ageing*).

La ley de *Rice-Ruina* es la más utilizada actualmente para describir la fricción basada en las teorías de *rate and state*. Sin embargo, al aplicarla al modelo sencillo descrito (compuesto por un bloque y un soporte) y estudiar la estabilidad del sistema resultante, se ha mostrado no ser del todo correcta. El resultado del estudio realizado ha sido una bifurcación, donde la constante elástica crítica K_c determina si la dinámica es estable o inestable. Pese a que este resultado coincide con lo observado en la figura 8, es incompleto, pues no se observan dependencias en el tipo de dinámica con la velocidad de arrastre V , como cabría esperar. A pesar de este contraste de resultados, actualmente no existe ninguna formulación teórica que describa la dinámica de mejor manera. Algunos estudios como [10] han explorado la idea de añadir términos del tipo \ln^2 , pero sigue siendo una pregunta abierta en la actualidad.

Por otro lado, existen diversas leyes para la evolución de ϕ . En el presente trabajo se han estudiado las 3 más famosas (Dieterich, Ruina y Nagata). Todas ellas tienen características interesantes, existiendo datos experimentales que verifican aspectos de cada una de ellas. Sin embargo, no existe una forma funcional única, que verifique todos los datos experimentales existentes a la vez (como la fricción en fenómenos sísmicos para diferentes materiales o experimentos de laboratorio de *slide-hold-slide* [12]). De nuevo es una cuestión abierta encontrar una ley única para la evolución temporal de la variable estado $\dot{\phi}$.

Así, es claro que todavía queda pendiente formular una teoría microscópica, capaz de explicar todas las observaciones experimentales hasta la fecha. Cabe destacar que, aunque queda un largo camino que recorrer, no ha sido hasta recientemente que se han dejado atrás las leyes clásicas de la fricción para formular las leyes actuales más completas. En 30 años se ha avanzado más en el campo de lo que se había conseguido en más de dos siglos. Esto arroja cierta esperanza en la posibilidad de que esta supuesta teoría microscópica universal aparezca próximamente.

Referencias

- [1] Tristan Baumberger y Christiane Caroli. “Solid friction from stick-slip down to pinning and aging”. En: *Advances in Physics*, 55: 3-4, 279-348 (2006).
- [2] Valentin L. Popov. *Principios y aplicaciones de la mecánica de contacto en tribología, fricción y adherencia*. Publicacions de la Universitat d'Alacant, (2008).
- [3] J.H. Dieterich y B.D. Kilgore. *Pure Appl. Geophys.* 143: 283. (1994).

- [4] F. Heslot, T. Baumberger, B. Perrin, B. Caroli y C. Caroli. “Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics: Experiments and a heuristic model.” En: *Physical Review E*. 49(6): 4973-4988 (1994).
- [5] Thibaut Putelat, Jonathan H.P. Dawes y John R. Willis. “Regimes of frictional sliding of a spring-block system”. En: *J. of the Mechanics and Physics of Solids* 58: 27-53 (2010).
- [6] H. Perfettini y A. Molinari. “A micromechanical model of rate and state friction: 1. Static and dynamic sliding”. En: *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 122: 2590–2637 (2017).
- [7] A. Molinari y H. Perfettini. “A micromechanical model of rate and state friction: 2. Effect of shear and normal stress changes”. En: *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 122: 2638–2652 (2017).
- [8] K. Ranjith y J.R. Rice. “Stability of quasistatic slip in a single degree of freedom elastic system with rate and state dependent friction”. En: *J. of the Mechanics and Physics of Solids* 47:1207-1218 (1999).
- [9] James R.Rice y Simon T.Tse. “Dynamic Motion of a Single Degree of Freedom System Following a Rate and State Dependent Friction Law”. En: *J. of Geophysical Research* 91: 521-530 (1986).
- [10] Kyungjae, Demian Saffer, Chris Marone y Jean-Philippe Avouac. “Slip-rate-dependent friction as a universal mechanism for slow slip events”. En: *Nature geoscience* (2020).
- [11] K. Im, D. Elsworth, C. Marone y J. Leeman. “The impact of frictional healing on stick-slip recurrence interval and stress drop: Implications for earthquake scaling.” En: *J. of Geophysical Research: Solid Earth*, 122: 10,102–10,117 (2017).
- [12] P. Bhattacharya, A. M. Rubin, E.Bayart, H M. Savage y C. Marone. “Critical evaluation of state evolution laws in rate and state friction: Fitting large velocity steps in simulated fault gouge with time-, slip,- and stress-dependent constitutive laws”. En: *J. of Geophysical Research:Solid Earth* 120: 6365–6385 (2015).
- [13] Behrooz Ferdowsi y Allan M.Rubin. “Slide-hold-slide experiments and frictional healing in a1simulated granular fault gouge”. En: *Earth and Space Science Open Archive*: 27 (2021).
- [14] Nagata, M. Nakatani K. y S. Yoshida. “A revised rate- and state-dependent friction law obtained by constraining constitutive and evolution laws separately with laboratory data”. En: *J. of Geophysical Research:Solid Earth*, 117: B02314 (2012).
- [15] Bo N. J. Persson. *Sliding Friction: Physical Principles and Applications*. Springer, (2000).
- [16] Christopher H.Scholz. “Earthquakes and friction laws”. En: *Nature* 391: 37-42 (1998).
- [17] C Marone y D.M Saffer. “The Mechanics of Frictional Healing and Slip Instability During the Seismic Cycle”. En: *Treatise on Geophysics*: 111-138 (2015).
- [18] Juan J. Mazo, Dirk Dietzel, Andre Schirmeisen, J. G. Vilhena y Enrico Gnecco. “Time Strengthening of Crystal Nanocontacts”. En: *Physical Review Letters* 118: 246101 (2017).
- [19] Kaiwen Tian, Nitya N. Gosvami, David L. Goldsby, Yun Liu, Izabela Szlufarskaand y Robert W. Carpick. “Load and Time Dependence of Interfacial Chemical Bond-Induced Friction at the Nanoscale”. En: *Physical Review Letters* 118: 076103 (2017).