Máster Universitario en Profesorado de
Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas

Trabajo Fin de Máster

Especialidad de Matemáticas

"LA INTEGRAL DEFINIDA"

2º DE BACHILLERATO

Autor: **Francisco Gimeno Mauri**

Tutor: **D. Rafael Escolano Vizcarra**

Zaragoza, Junio de 2013

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La propuesta de enseñanza de la Integral Definida para alumnos de 2º de Bachillerato que se presenta en este documento se va a llevar a cabo como Trabajo Final en el marco del Máster de Profesorado de Secundaria de la Universidad de Zaragoza.

El concepto de Integral Definida es uno de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático. Sin embargo, las investigaciones sobre la Integral Definida revelan la existencia de dificultades en el aprendizaje y comprensión de este concepto y la necesidad de una mayor indagación en este campo del conocimiento.

A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO

A.1. Nombra el objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático que se va a estudiar es el de la Integral Definida, correspondiente al área de Análisis.

A.2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

Según el currículo aragonés, en la Orden de 1 de Julio de 2008, (BOA nº 105, del 17 de Julio de 2008), las integrales se enmarcan dentro del bloque de conocimiento de Análisis de la asignatura Matemáticas II cursada en 2º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Se transcriben a continuación los contenidos referidos al objeto matemático que se fijan en la legislación para este curso:

Integrales. El problema del área: aproximación intuitiva a la integral. Definición de integral definida de una función continua. La función área. Noción de primitiva. El teorema fundamental del cálculo integral. La regla de Barrow. Cálculo de integrales indefinidas inmediatas, por cambio de variable, por partes o racionales sencillas. Integrales definidas. Cálculo de áreas de regiones planas.

Así como los criterios de evaluación:

5. Calcular áreas de regiones limitadas por rectas y curvas sencillas fácilmente representables, y aplicar este cálculo a situaciones de la naturaleza o la tecnología.

Este criterio pretende evaluar la capacidad para aplicar algunas técnicas sencillas de búsqueda de primitivas: integración inmediata, por partes, descomposición en fracciones elementales y cambios de variables sencillos. También se trata de valorar si el alumnado comprende el significado de la integral definida y la relaciona con el cálculo de primitivas.

Con este criterio se desea averiguar si los alumnos son capaces de aplicar el cálculo de primitivas de funciones sencillas al cálculo de áreas, analizando la gráfica correspondiente a cada situación y tomando las decisiones que correspondan para una correcta delimitación del recinto objeto del estudio. También se valorará que sepan identificar, en contextos del mundo físico o tecnológico, situaciones problemáticas que sean susceptibles de resolverse usando el cálculo integral.

A.3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

El campo de problemas que se plantea en esta propuesta lo constituye, en primer lugar, el **cálculo de áreas**; y en segundo lugar, el **cálculo de la integral definida** de una función usando la relación entre integración y derivación de la función área. Queda fuera del estudio el cálculo de primitivas y profundizar en las aplicaciones del cálculo integral. Se pretenderá que la contextualización de los problemas sea a través de situaciones de la naturaleza o la tecnología donde sea necesario aplicar el cálculo integral; identificando así la integración no solo como cálculo directo de un área geométrica sino como cálculo de un área que representa una magnitud física determinada.

En el primer campo de problemas, para calcular el **área** $\boldsymbol{A = \int_a^b f(x)dx}$ de una función $f(x)$ continua en un intervalo $[a, b]$ las técnicas que se utilizarán serán en un comienzo y para funciones sencillas, la aplicación de los conocimientos geométricos que ya poseen (área de un rectángulo, triángulo, trapecio…); y posteriormente, para funciones más complejas, el **método de los rectángulos**. En cuanto a las tecnologías, se empleará el software de geometría dinámica *Geogebra* para justificar el método de los rectángulos, pudiendo visualizar las aproximaciones sucesivas conforme la anchura de los rectángulos se hace cada vez más pequeña.

En el segundo campo de problemas, para hallar la integral definida en un intervalo, la técnica que se utilizará será **regla de Barrow**, que se justifica gracias al **teorema fundamental del cálculo integral**. De nuevo, usaremos *Geogebra* como herramienta sobre la que nos apoyaremos para demostrar y justificar geométricamente las técnicas mencionadas.

B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

B.1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

La forma tradicional de introducir estos temas a los alumnos es comenzar con el cálculo de primitivas o anti derivadas para después, una vez que los alumnos tienen suficiente destreza en el cálculo de las mismas, continuar con el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow, es decir, las integrales definidas, convirtiéndose dichos conceptos en transparentes para los alumnos y sin llegar a ser asimilados correctamente (Llorens, 1997). Los efectos perniciosos que causa esta introducción se detallan en el apartado B.3.

Esta propuesta abordará la integración con un cambio de orden de los dos temas: primero se tratará intuitivamente el cálculo de áreas de forma gráfica como introducción al concepto de integral para ir poco a poco afinando los cálculos mediante el álgebra y terminar al final relacionando la integración y derivación mediante los teoremas propios del tema.

B.2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

El campo de problemas y técnicas que se enseñan habitualmente se corresponde con el que se pretende enseñar en esta propuesta. La diferencia radica fundamentalmente en el orden en el que se abordan. Cómo ya hemos mencionado, habitualmente la enseñanza de la integración comienza con el significado de integral como operación inversa a la derivación, y es de este significado de donde se suele partir para justificar e introducir las técnicas. En esta propuesta se trata precisamente de desvincular, inicialmente, la integración y la derivación, cuya relación aparecerá solo en última instancia; y tomar el significado de integral como área como la base sobre la que se construirán las tecnologías que empleemos y se justificarán las técnicas.

B.3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Recogemos a continuación algunas de las ideas principales que presenta Aldana (2011) con respecto a este punto:

"El aprendizaje del concepto de Integral Definida, de acuerdo con los resultados obtenidos en diversas investigaciones, presenta dificultades para los estudiantes que se manifiestan mediante la utilización mecánica, algorítmica y memorística de su definición; no logran establecer una conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico; tienen problemas para interpretar las gráficas de áreas bajo curvas cuando la gráfica de la función pasa de ser positiva a ser negativa o presenta discontinuidades; en otros casos piensan la integral sólo asociada al concepto de área pero aislada de otros contextos; y demuestran dificultades para aplicar las propiedades de la Integral Definida.

Resumiendo, los problemas en el aprendizaje del concepto de Integral Definida, se pueden sintetizar de la siguiente forma:

- *Generalmente los estudiantes identifican "Integral" con "primitiva". La integral para ellos no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco un aspecto geométrico. Es por tanto, un proceso puramente algebraico, más o menos complicado, de modo que un estudiante puede conocer diversas técnicas de integración e incluso saberlas aplicar, y al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlas al cálculo de un área o ignorar por completo qué son las sumas de Riemann. La primera imagen que evocan muchos* *estudiantes sobre integrar es la de "hallar una función de la que se conoce la derivada".*

- *Los estudiantes generalmente identifican las Integrales Definidas con la regla de Barrow, incluso cuando esta no pueda aplicarse. Es el caso de los resultados encontrados por Mundy (1984), donde un porcentaje alto de estudiantes no supo responder a la pregunta: ¿Por qué* $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx = [-x^{-1}]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$ *, es incorrecto? Esto pone en evidencia que el estudiante no sólo desconoce las condiciones para poder aplicar la regla de Barrow, sino que además muestra una desconexión entre la definición del concepto de Integral Definida y la imagen particular que tiene de este concepto matemático.*

- *Falta de relación entre el concepto de Integral Definida y el de área. Muchos estudiantes no distinguen entre la Integral Definida como área y la Integral Definida cómo cálculo algebraico, porque no establecen una conexión entre la representación gráfica y la representación algebraica de una función y no son capaces de calcular el área bajo una curva a partir de su gráfica. En otros casos porque el estudiante no tiene los conceptos previos necesarios para resolver la tarea satisfactoriamente. En este sentido, Mundy (1984) encontró también que un 95% de los estudiantes respondieron incorrectamente a la pregunta: Calcular la* $\int_{-3}^{3}|x+2|dx$*, en la que les planteó varias opciones de respuesta; porque no saben integrar la función valor absoluto y no han logrado establecer una relación entre la representación algebraica formal y la visualización gráfica de la función.*

Otros estudios, han demostrado el predomino del modo algebraico sobre el gráfico que tienen los estudiantes al resolver tareas de Cálculo Integral, hay un dominio de los procedimientos algorítmicos frente a los aspectos conceptuales. Al respecto, Orton (1980), (citado por Azcárate et al. 1996, p. 15) pone de manifiesto que existe "un nivel relativamente bueno en la manipulación de los algoritmos algebraicos que aparecen en los cálculos de primitivas de funciones y, sin embargo, dificultades en la conceptualización de los procesos de límite asociados al concepto de Integral Definida; por ejemplo, pocos alumnos fueron capaces de expresar de forma correcta que el valor exacto del área bajo *una parte de una parábola se podía obtener como el límite de sumas de franjas rectangulares". Asimismo, hablan de otras dificultades en el cálculo de áreas limitadas por curvas que presentan valores negativos o discontinuidades, y afirman que "en palabras de Orton muchos estudiantes demuestran saber lo que tienen que hacer, pero cuando se les pregunta acerca de su método no saben realmente por qué lo hacen de esta manera" (Azcárate et al. 1996, p. 15)."*

C. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

C.1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Para que los alumnos puedan afrontar el aprendizaje de la integral definida es necesario que previamente conozcan los conceptos de:

- Funciones y su representación gráfica.
- Límites y sucesiones.
- Derivadas.

El concepto de derivada no es necesario para calcular el área bajo una curva; es necesario posteriormente para demostrar la conexión entre derivada e integral definida.

C.2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Es de suponer que sí, dado que, según el currículo aragonés, en la Orden de 1 de Julio de 2008, (BOA nº 105, del 17 de Julio de 2008), los objeto matemáticos anteriormente citados en C.1 se fijan en la legislación para ser cursados previamente a la enseñanza de las integrales. A continuación se trascribe el bloque de Análisis que se presenta en la legislación:

Límites. Sucesiones. *Límite de una función en un punto: idea intuitiva. Límites laterales. Límites infinitos y límites en el infinito. Cálculo de límites: indeterminaciones. Límites asociados al número e. Noción de continuidad de una función en un punto:*

relación entre la continuidad y los límites. Interpretación gráfica. Estudio de la continuidad de funciones: determinación y clasificación de las discontinuidades. Propiedades de las funciones continuas.

Derivadas. *Derivada de una función en un punto. Relación entre la derivabilidad y la continuidad. Interpretación gráfica de la derivabilidad. Interpretación en el mundo de la ciencia del concepto de derivada de una función en un punto. Obtención de la recta tangente a una curva en un punto. Estudio de la derivabilidad de funciones. Cálculo de derivadas. Derivadas sucesivas. Crecimiento y decrecimiento: extremos. Aplicación a problemas de optimización. Algunas propiedades de las funciones derivables: el teorema del valor medio. Concavidad y convexidad: puntos de inflexión. Estudio de las propiedades locales y globales de una función sencilla para realizar su representación gráfica. Utilización de programas de representación de funciones para el estudio de sus propiedades y la interpretación de los resultados obtenidos en la resolución de los problemas planteados.*

Integrales. *El problema del área: aproximación intuitiva a la integral. Definición de integral definida de una función continua. La función área. Noción de primitiva. El teorema fundamental del cálculo integral. La regla de Barrow. Cálculo de integrales indefinidas inmediatas, por cambio de variable, por partes o racionales sencillas. Integrales definidas. Cálculo de áreas de regiones planas.*

C.3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Para asegurar que los alumnos posean los conocimientos previos que necesitan para afrontar el estudio de la integral definida se llevará a cabo una prueba de evaluación inicial. Realizar esta prueba supone, además, un medio eficaz para presentar a los alumnos los conceptos e ideas fundamentales que deben tener para abordar la secuencia didáctica.

Los ejercicios que aparecen en esta prueba van a permitir recordar conocimientos que los alumnos necesitarán en algunas de las actividades futuras que planteamos en esta propuesta y que se muestran en el apartado I. Entre estos conocimientos estarían el manejo de progresiones geométricas, el cálculo de límites, la regla de L'Hopital para calcular algunos de estos límites y la resolución de algunas derivadas sencillas.

EVALUACIÓN INICIAL

1. **Expresa la función $f(x) = |x-2| + |x+3|$ como una función definida a trozos.**

2. **Dada la siguiente progresión geométrica: 3, 6, 12, 24, 48…**
   a) Calcula la razón **r** de la progresión.
   b) Calcula el término a_n.
   c) Calcula la suma S_n de los n primeros términos.

3. **Desarrolla estas sumas:**

$$a)\ \sum_{i=1}^{4}(5-i)^2 \qquad b)\ \sum_{i=1}^{6}(1+i)\,(x_i - x_{i-1})$$

4. **Calcular los límites:**

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+2}{4n^4-5} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{-2n^4-3n+2}{4n^3-5}$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{-2n^4-3n+2}{4n^4-5} \qquad d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^2-3n^2+3}{n^3-5}$$

5. **Calcular los límites por L'Hopital:**

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n^2+5} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-e^{\frac{2}{n}}\right)$$

6. **Calcula la derivada de las siguientes funciones:**

$$a)\ f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = \frac{x^4+2}{3}$$

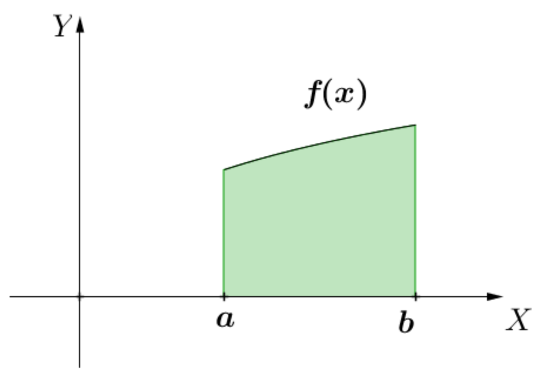
$$c)\ f(x) = \frac{1}{3x^2} \qquad d)\ f(x) = e^{3-x^2}$$

D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

D.1. Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático.

La razón de ser que voy a tener en cuenta será la del cálculo de áreas, siguiendo la propuesta de Turégano (1994) sobre la introducción de la Integral Definida:

"La idea es presentar la integral como una continuación de la noción de área, que los estudiantes conocen desde los primeros días de la escuela. Lo que empezó para los estudiantes de educación primaria con la medición de áreas de figuras en general, rectilínea o curvilíneamente limitadas, debe continuar en secundaria con el estudio de clases muy especiales: a saber, aquéllas que están limitadas por una curva sólo por arriba o por abajo. De hecho, estas figuras no son otra cosa que representaciones gráficas de una función $f(x)$ *en un intervalo* $a \leq x \leq b$*."*



D.2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Efectivamente la aparición primera del concepto de integral va surgiendo poco a poco como método para calcular áreas.

La primera figura que indagó en lo que hoy se conoce como cálculo integral fue Arquímedes. El matemático griego (287 a.C.) trató de calcular el área de curvas geométricas como el círculo, la parábola o la elipse. También elaboró un ingenioso método para calcular el volumen del segmento recto de paraboloide de revolución (Escudero, 1997). Realizó cálculos cuantitativos del área de figuras geométricas, basándose en propiedades características de estas curvas.

En los siglos XVII y XVIII se produce el gran auge del cálculo. Galileo y Newton se encargaron de estudiar los sistemas de transformación que permiten pasar de los valores de las variables en el estado inicial a los valores que adquieren éstas en cualquier otro instante. Se pasó de la estática a la dinámica. Esto significó uno de los pilares más sólidos de la evolución de la matemática y su relación con el mundo de los fenómenos físicos.

Por otra parte, Pierre Fermat (1601-1665) estudió las curvas geométricas de la forma *¿cómo se puede obtener la cuadratura de diferentes familias de curvas?* o, lo que es lo mismo, cómo se calcula el área bajo la curva. Así, calculó el área bajo la curva $y = x^n$ en el intervalo $[0, a]$ empleando un procedimiento de troceado del intervalo en forma de progresión geométrica.

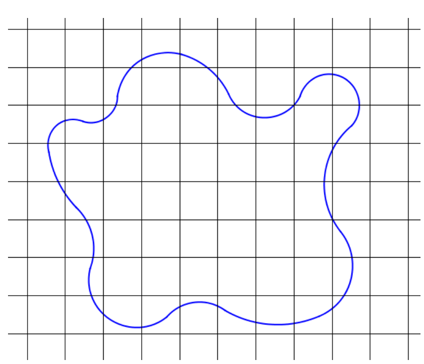
Pero fue Isaac Barrow (1630-1677) quien por primera vez puso en conexión los conceptos de derivada e integral, al darse cuenta de que la derivada de la función que proporciona el área bajo una curva es la función misma que representa dicha curva.

D.3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Este problema sirve para repasar el concepto de área y para motivar el cálculo de áreas mediante aproximaciones sucesivas.

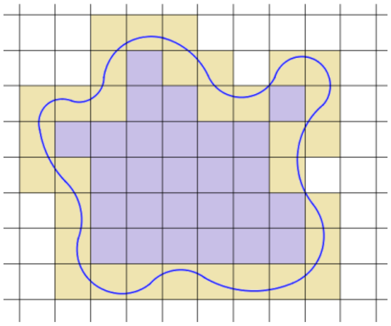
<u>PROBLEMA INTRODUCTORIO DEL CÁLCULO DE ÁREAS</u>

El gráfico de la figura representa el contorno de una isla dibujada en un papel cuadrícula, con cuadrados de lado unidad.



Se pide:

a) Realiza una aproximación del área de la isla, acotándola entre las regiones formadas por los cuadrados totalmente contenidos en la isla y los cuadrados que contienen la isla.



Área interior: 27 ud^2

Área exterior: 27 + 32 = 59 ud^2

27 ud^2 *< Área de la isla < 59 ud*^{2}

b) Calcula el error máximo cometido si aproximamos el valor del área de la isla por el valor medio de los dos valores obtenidos en el apartado anterior.

Área isla aproximada $= \frac{27+59}{2} = 43\ ud^2$

Error máximo = 59 – 43 = 43 – 27 = 16 ud^2

c) Si contamos los cuadrados que no caen totalmente dentro de la isla como medio cuadrado ¿cuál es la aproximación del área obtenida? ¿y el error máximo cometido?

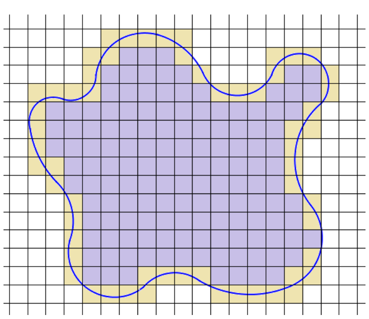
Área interior: 27 ud^2

Área exterior = 27 + 32/2 = 43 ud^2

Área isla aproximada $= \frac{27+43}{2} = 35\ ud^2$

Error máximo = 43– 35= 35 – 27 = 8 ud^2

d) Si subdividimos cada cuadrado unidad en cuatro cuadrados de área ¼ , calcula la aproximación del área y el error máximo cometido, igual que en el apartado b). ¿Disminuye el error máximo cometido?



*Área interior: 140*1/4 = 35 ud*^{2}

*Área exterior: (140 +56)*1/4 = 49 ud*^{2}

35 ud^2 *< Área de la isla < 49 ud*^{2}

Área isla aproximada $= \frac{35+49}{2} = 42\ ud^2$

Error máximo = 49 – 42= 42 – 35 = 7 ud^2

Con este problema se introduce al alumno en la problemática del cálculo de áreas de recintos encerrados por una curva no regular y cómo puede ayudarnos el método de aproximaciones sucesivas de cuadrados cada vez más pequeños. *Azcárate (1996, p.128)*

E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

El campo de problemas que se presentan en esta propuesta didáctica es el que hemos presentado en el apartado A.3, y que se corresponden con:

1. Cálculo de áreas y su relación con el concepto de suma de infinitos rectángulos.
2. Conexión de la integración y la derivación a través de la función área.

Los tipos de problemas concretos se pueden ver en la secuencia didáctica completa que se muestra en el apartado I de esta propuesta.

F. SOBRE LAS TÉCNICAS

Las técnicas que se van a enseñar son las que hemos nombrado con anterioridad en el apartado A.3.

Para el cálculo de áreas:

- La aplicación de los conocimientos geométricos elementales (área de un rectángulo, triángulo, trapecio…)
- El método de los rectángulos. En el cuál se aproxima el área del recinto mediante aproximaciones sucesivas de rectángulos cada vez más estrechos.

Para el cálculo de la integral definida a través de su conexión con la derivada:

- La regla de Barrow, que se justifica por el teorema fundamental del cálculo integral.

Igualmente, los tipos de ejercicios que se van a presentar están reflejados en la secuencia didáctica del apartado I.

G. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS

Las técnicas que hemos nombrado en el apartado anterior se justificarán en un primer momento a un nivel geométrico, utilizando el software *Geogebra*, y en segunda instancia se corroborarán a nivel analítico.

Las actividades y procedimientos concretos dedicados a justificar las diferentes técnicas están bien detallados a lo largo de la secuencia didáctica que se presenta en el apartado I.

En estas actividades se tratará que los alumnos traten de explorar la solución a los problemas siendo ellos los que intenten deducir las técnicas y su justificación, aunque será el profesor el que sirva de guía en el proceso y el que en última instancia institucionalice y formalice cada técnica.

H. SOBRE LA METODOLOGÍA

Se optará por una metodología sustentada en la resolución de problemas. Ésta se concretará del siguiente modo: el profesor planteará una situación problemática y se dejará a los alumnos que piensen y traten de resolver el problema; cuando los conocimientos que tienen no sean suficientes será el profesor el que tenga que orientar y dar pistas para buscar un camino alternativo, surgiendo de este modo los conceptos y técnicas que más tarde el profesor institucionalizará.

En resumen, se procurará que en todo momento sean los alumnos los que se enfrenten a las situaciones planteadas, siendo ellos mismos los que se planteen preguntas y empleen diferentes alternativas para resolver los problemas. La labor del profesor no será la de realizar exposiciones para transmitir saberes, sino que consistirá en diseñar y plantear problemas y actividades que potencien el aprendizaje y que sean adecuadas para que surja el conocimiento en el aula. Una vez que hayan trabajado de modo autónomo, será el profesor el encargado de realizar el proceso de institucionalización.

Mención especial en la metodología del aula es el uso del software de geometría dinámica *Geogebra*.

Geogebra es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo, por lo que puede ser usado también en otras disciplinas como física.

Con *Geogebra* pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas, etc., mediante el empleo directo de herramientas operadas con el ratón o la anotación de comandos en la barra de entrada, con el teclado o seleccionándolos del listado disponible. Todo lo trazado es modificable en forma dinámica: es decir que si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, B pasa a ajustarse y actualizarse para mantener las relaciones correspondientes con A.

Geogebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

I. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

I.1. Cronograma.

La propuesta didáctica que aquí presentamos se va a desarrollar a lo largo de aproximadamente 12 sesiones de 55 min. Mostramos a continuación la secuenciación de las actividades:

SESIÓN	APARTADO	ACTIVIDADES
1	EVALUACIÓN INICIAL	– **Evaluación inicial** (apartado C.3)
2	JUSTIFICACIÓN DEL CÁLCULO DE ÁREAS	– **Justificación histórica** – **Problema introductorio** (apartado D.3)
3	**CAMPO 1**: CÁLCULO DE ÁREAS. PROCEDIMIENTOS GEOMÉTRICOS	– **Actividad 1 , 2 y 3:** Funciones constante, lineal y afín
4	**CAMPO 1**: CÁLCULO ÁREAS. SUMA DE RECTÁNGULOS.	– **Actividad 4:** Función cuadrática
5	**CAMPO 1:** CÁLCULO ÁREAS. SUMA DE RECTÁNGULOS. SUMAS DE RIEMANN E INTEGRAL DEFINIDA	– **Actividad 5:** Función exponencial – **Institucionalización:** Sumas de Riemann e integral definida
6	**CAMPO 1:** PROPIEDADES INTEGRAL DEFINIDA	– **Institucionalización:** Propiedades integral definida – **Actividad 6:** Problemas de propiedades
7	**CAMPO 1:** PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS	– **Actividad 7:** Problemas de aplicación
8	**CAMPO 2:** FUNCIÓN ÁREA. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.	– **Actividad 8 y 9:** Función lineal – **Institucionalización:** Función área F(x)
9	**CAMPO 2:** TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.	– **Actividad 10:** Función proporcionalidad inversa
10	**CAMPO 2:** TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.	– **Actividad 11:** Función coseno. – **Institucionalización:** Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow.
11	**EVALUACIÓN**	– **Prueba escrita**
12	**EVALUACIÓN**	– **Prueba práctica** – **Corrección pruebas.**

I.2. Secuencia didáctica

Siguiendo la idea principal ya propuesta por Turégano (1997) de introducir el concepto de integral como una continuación de la noción de área ya conocida por los estudiantes, la estructura de esta propuesta didáctica tiene dos puntos que corresponden con los dos campos de problemas que se pretenden enseñar.

1. Cálculo de áreas y su relación con el concepto de suma de infinitos rectángulos. Notación de la integral definida. Propiedades de la integral.
2. Conexión de la integración y la derivación mediante la función área (teorema fundamental del cálculo). Regla de Barrow.

En el primer campo de problemas se comienza abordando el cálculo de áreas desde un enfoque totalmente **aritmético y geométrico.** De alguna forma es una especie de que los alumnos busquen procedimientos conocidos para calcular áreas. En esta etapa se le da sentido **conceptual** al cálculo de áreas. No es sólo el cálculo de un área geométrica lo que se halla, sino que ésta puede significar cualquier magnitud física que esté expresada como producto de otras dos magnitudes. Posteriormente, cuando los conocimientos aritméticos no sean suficientes para hallar el área se introducirá la técnica de la suma de rectángulos. Por último se terminará identificando la expresión del sumatorio con la notación de la integral definida.

El segundo campo de problemas se ocupará del **teorema fundamental del cálculo.** Éste relaciona la derivación con la integración a través de la función área, llevándonos a la **regla de Barrow**, de manera que a partir de este momento se pueden calcular áreas conociendo la primitiva de la función que representa dicha área, sin tener que recurrir a resolver costosos sumatorios.

CAMPO 1: CÁLCULO DE ÁREAS

Para introducir el concepto de integral como cálculo de áreas el primer paso será presentar situaciones donde hallar el área de un recinto tenga una utilidad práctica. Los alumnos tienen que ver, incluso antes de nombrar la palabra integración, como calcular un área puede ser una herramienta muy útil que nos simplifique el cálculo de una magnitud determinada. Una vez que entiendan la utilidad de calcular áreas, el cómo hacerlo irá apareciendo poco a poco.

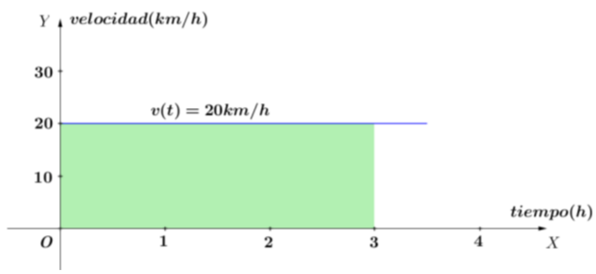
Todos los estudiantes en secundaria conocen el cálculo de áreas de figuras planas sencillas como el rectángulo, el triángulo, el trapecio, etc. En los primeros pasos, estos conocimientos serán suficientes, pero progresivamente irán surgiendo situaciones donde estos conocimientos no bastarán y será en este momento cuando aparezca la suma de infinitos rectángulos como solución a estas situaciones.

Actividad 1: Función constante

Un ciclista se desplaza a una velocidad constante de 20 km/h.

a) *¿Qué espacio habrá recorrido al cabo de 3 horas?*

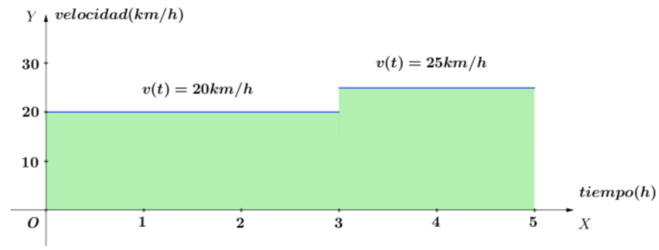
b) *Represента la gráfica de la función velocidad $v(t)$ en unos ejes cartesianos.*



c) *Halla el área limitada entre la recta $y = 20$, el eje OX, y las rectas $x = 0$, $x = 3$. ¿Qué relación existe entre el área y el espacio recorrido?*

d) *¿Qué representa el área bajo la función $v(t)$ de la figura? ¿En qué unidades de medida se expresa?*

e) *Supón ahora que el ciclista a las 3 horas sube su velocidad a 25 km/h durante las 2 horas siguientes. Representa la gráfica de la función $v(t)$.*



f) *Calcula el área bajo la función $v(t)$ a partir de la gráfica.*

g) *¿Cuál es el espacio recorrido por el ciclista en el intervalo [3, 5]? ¿en qué intervalo de tiempo recorre mayor distancia?*

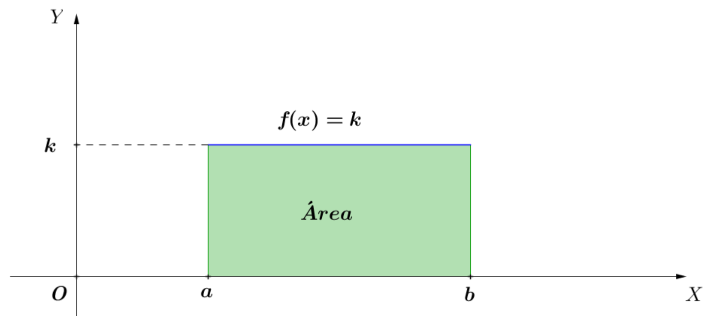
En esta primera actividad quizás los alumnos no ven todavía la necesidad de calcular el área para hallar la magnitud ‘espacio recorrido’, puesto que se trata de un ejercicio muy simple que se resuelve de forma inmediata utilizando la conocida formula de espacio igual a velocidad por tiempo: $e = v \cdot t$. Sin embargo esta actividad nos ha permitido que aparezca el concepto de área bajo la curva de una función y relacionar esta área con una magnitud (‘espacio recorrido’), que es lo que pretendíamos en primera instancia.

Se pueden plantear otros ejemplos en los que el área represente otras magnitudes. Por ejemplo:

- *La cantidad de tejido que produce una determinada empresa textil por unidad de tiempo, sabiendo que la producción es constante a r m^2/minuto.*
- *El volumen de agua que obtenemos de un grifo abierto en un tiempo t, sabiendo que el agua fluye de forma constante a razón de 12 m^3/minuto.*
- *La cantidad de luz que recibe una planta en un intervalo de tiempo t, suponiendo que la luz es recibida de forma constante a 1000 lux/hora;*

Para finalizar la actividad comprobamos geométricamente que el área bajo la curva de una función constante $f(x) = k$ en el intervalo $[a, b]$ viene dada como:

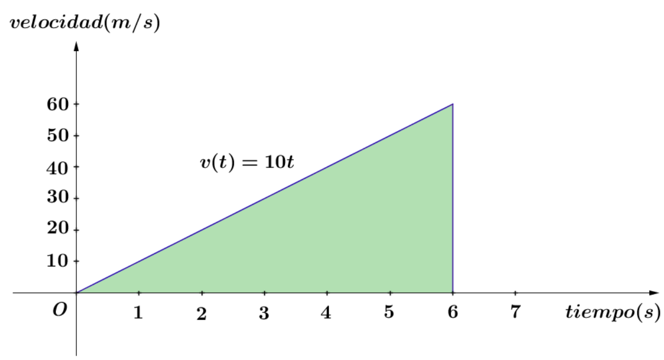
$$\boldsymbol{f(x) = k \qquad \rightarrow \qquad A = k \cdot (b - a)}$$



Actividad 2: Función lineal

Se dejar caer una piedra desde una azotea de la que no conocemos su altura. Pero hemos cronometrado que la piedra ha tardado 6 segundos en llegar al suelo. *<u>Ayuda:</u>* $v = v_0 + a \cdot t$*, donde* v_0 *es la velocidad inicial que en este caso es igual a 0 m/s y* a *es la aceleración de la gravedad que aproximamos a 10 m/s*^{2}*.*

a) *Representa la gráfica de la velocidad en función del tiempo.*



b) *¿Qué magnitud representa el área encerrada por la función v(t) en el intervalo [0, 6] en este problema?*

c) *¿Qué altura tiene la azotea?*

En esta actividad es bastante posible que muchos de los alumnos no recuerden la fórmula para calcular el espacio recorrido en un movimiento uniformemente acelerado: $e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$. En este caso, hallar el área del triangulo puede ser un recurso más sencillo que nos permite calcular la altura de la azotea con la misma precisión que la fórmula:

$$Fórmula \rightarrow altura\ azotea = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 0 + \frac{1}{2} 10 \cdot 6^2 = 180\ metros$$

$$Área\ triangulo \rightarrow altura\ azotea = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 60}{2} = 180\ metros$$

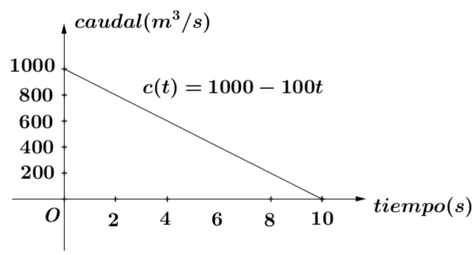
Comprobamos que, como en la actividad 1, el área bajo la curva tiene el significado de 'espacio recorrido':

$$\frac{metros}{segundos} \times segundos = metros$$

Actividad 3: Función afín

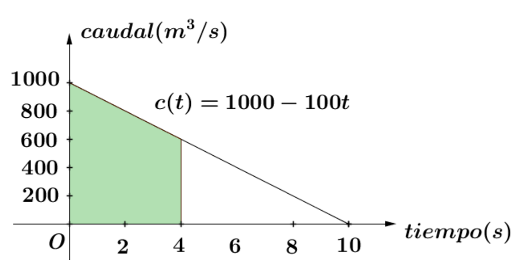
En un embalse que está casi al 100% de su capacidad se ha abierto la presa y el agua sale a una velocidad de 1000 m^3/s. Cuando el embalse se ha vaciado un poco se decide cerrar la presa. Las compuertas tardan en cerrarse 10 segundos, de modo, que el caudal de agua que sale disminuye con el tiempo. El caudal del agua (m^3/s) en este periodo sigue la siguiente función: $c(t) = 1000 - 100t$

a) *Representa la gráfica del caudal en función del tiempo.*



b) *¿Qué magnitud representa el área encerrada por la función c(t) en el intervalo [0, 10] en este problema?*

c) *Representa el área bajo la curva en el intervalo [0,4]*



d) ¿Qué volumen de agua se ha expulsado 4 segundos después de empezar a cerrar las compuertas?

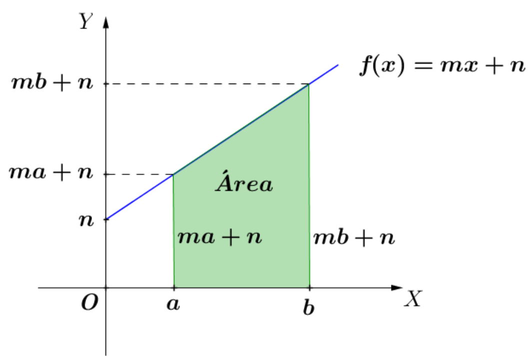
En este caso, para hallar el volumen total de agua que ha salido a los 4 segundos, los alumnos tendrán que calcular el área del trapecio:

$$\text{Área trapecio} \rightarrow \text{volumen de agua} = \frac{1000+600}{2}\cdot 4 = \ 3200\, m^3 \ (\,m^3/s \times \ s = m^3),$$

Para finalizar la actividad comprobamos geométricamente que el área bajo la curva de una función afín $f(x) = mx + n$ en el intervalo $[a, b]$ viene dada como:

$$\boldsymbol{f(x) = mx + n}$$

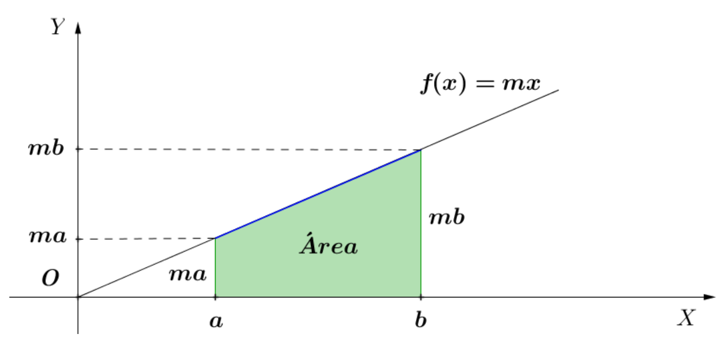
$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\cdot(ma + mb + 2n)\cdot(b - a)}$$



Si la función es de tipo lineal $f(x) = mx$, entonces:

$$\boldsymbol{f(x) = mx}$$

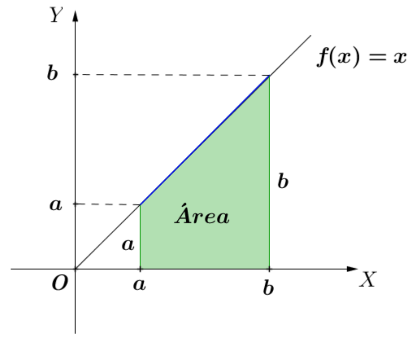
$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\cdot(ma + mb)\cdot(b - a) = \frac{1}{2}\cdot m\cdot(b + a)\cdot(b - a) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\cdot m\cdot(b^2 - a^2)}$$



Y si se trata de la función identidad $f(x) = x$, entonces:

$$\boldsymbol{f(x) = x}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot (b-a) = \frac{1}{2} \cdot (b+a) \cdot (b-a) = \boldsymbol{\frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2)}$$



Actividad 4: Función cuadrática

Un avión acelera de 0 a 100m/s (360 km/h) en 5 segundos. Notamos que la variación de la velocidad entre 0 y 100 no es lineal, sino que cada vez la aceleración es mayor y la velocidad aumenta más rápidamente. La velocidad del avión en cada instante viene dada por la siguiente ecuación: $v(t) = 4 \cdot t^2$*. ¿Qué espacio habrá recorrido el avión en esos 5 segundos?*

– Para calcular el espacio recorrido por el avión en esos 5 segundos no conocemos ninguna fórmula que nos pueda ayudar; pero sabemos que, en este contexto, el área encerrada bajo la curva de la parábola representa la magnitud 'espacio recorrido'. Aún así, seguimos teniendo el problema de que no sabemos calcular dicha área con los conocimientos geométricos que hemos estado utilizando hasta el momento. Recordando el problema inicial de la isla, proponemos atacar el problema considerando una aproximación al área buscada. –

a) Representa la función $v(t) = 4t^2$ *en el eje de coordenadas.*

b) Subdivide el intervalo [0,5] en 5 subintervalos de longitud 1 y calcula el máximo y el mínimo de la función $v(t) = 4t^2$ *en cada subintervalo.*

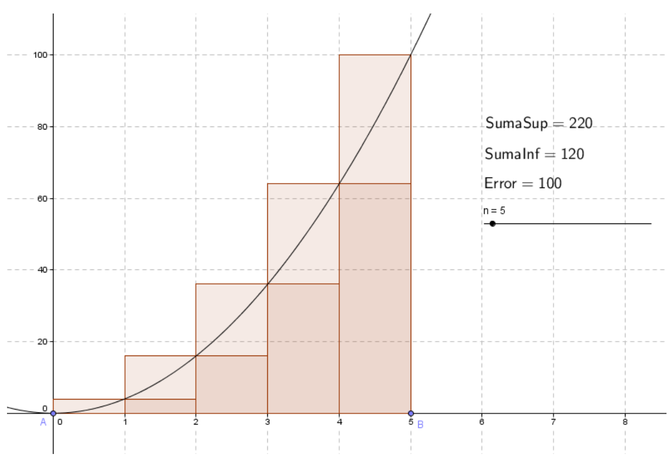
c) *Dibuja los rectángulos que tienen por base la amplitud del subintervalo y por altura el máximo de la función en el subintervalo. Se denominarán* ***rectángulos superiores.***

d) *Dibuja los rectángulos que tienen por base la amplitud del subintervalo y por altura el mínimo de la función en el subintervalo. Se denominarán* ***rectángulos inferiores.***

e) *Calcula la suma de las áreas de los rectángulos superiores y la suma de las áreas de los rectángulos inferiores*

f) *El área bajo la gráfica de la función será un número comprendido entre la suma de los rectángulos inferiores y superiores. Calcula dicha aproximación.*

– En este momento, para seguir contestando a las siguientes cuestiones, vamos a utilizar la herramienta *Geogebra* para facilitar los cálculos y visualizar mejor los resultados. Para ello, se les proporcionará a los alumnos un guión que les permita construir su propio applet de *Geogebra* y representar la situación del problema. Este guión aparece en el Anexo I de este trabajo de forma detallada, pero en la siguiente figura podemos ver la construcción a la que deben llegar los alumnos en este punto. –



g) *Considera ahora 10, 20, 40, 60, 80 y 100 subdivisiones, rellena la siguiente tabla y analiza lo que veas.*

n	***Suma Superior***	***Suma Inferior***	***Error***
5			

10			
20			
40			
60			
80			
100			

h) *Considera una subdivisión en 5n subintervalos de longitud* $h = \frac{1}{n}$. *Calcula el área de los rectángulos superiores e inferiores en función de n.* ***Ayuda:*** *Se verifica la fórmula:* $1^2 + 2^2 + \cdots + +(n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

i) *Toma límites cuando* $n \to \infty$ *y comprueba que las sumas superiores e inferiores convergen ambas al mismo valor. Este valor es el área bajo la curva de la función, esto es, el área que estamos buscando:*

$$\lim_{n\to\infty} S_{\inf}(n) = \lim_{n\to\infty} S_{sup}(n) = Área\ bajo\ la\ curva$$

j) *Introduce con el teclado la orden: Integral[v(t), x(A), x(B)]. El comando Integral[] está predefinido, el programa coloreara el recinto determinado bajo la curva de la función v(t) y las rectas verticales determinadas por los puntos A y B. Comprueba que este valor se corresponde con el hallado en el punto anterior. En el contexto del problema, ¿qué significado tiene el área bajo la curva?*

– En este punto introducimos la definición de integral, para nombrar al área bajo la curva; intervalo de integración, cómo los valores de x entre los que vamos a calcular el área; y la representación algebraica de la integral como:

$$Area\ bajo\ la\ curva = \int_a^b f(x)dx$$

El signo $\int$ significa la suma (una S degenerada) y significa en este caso, la suma de los infinitos rectángulos de altura $f(x)$ y base infinitesimal dx –

k) *Con ayuda de Geogebra calcula la integral de la función v(t) para diferentes intervalos de integración. Rellena la siguiente tabla. Intenta hallar la relación del valor de la integral con los valores de a y b.*

a	***b***	***Integral*** $\int_a^b f(x)dx$
0	*5*	$\frac{4}{3}5^3$
0	*4*	
0	*3*	
1	*5*	
2	*5*	
2	*4*	
1	*3*	

Los alumnos deben poder llegar por sí mismos a la siguiente expresión:

$$v(t) = 4t^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A = \int_a^b f(x)dx = \frac{4}{3} \cdot (b^3 - a^3)}$$

Por tanto, la integral de una función cuadrática de expresión general $\boldsymbol{f(x) = kx^2}$ en un intervalo [a, b] cualquiera será:

$$\boldsymbol{f(x) = kx^2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \int_a^b \mathrm{f(x)dx} = \boldsymbol{\frac{k}{3} \cdot (b^3 - a^3)}$$

Y para el caso de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ en un intervalo [a, b] tendremos que:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \int_a^b \mathrm{f(x)dx} = \boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot (b^3 - a^3)}$$

Hasta ahora hemos visto como calcular el espacio recorrido para diferentes situaciones: con velocidad constante, con velocidad que aumenta linealmente y con velocidad que aumenta cuadráticamente. Para cada tipo de función hemos hallado el área en el intervalo $[a, b]$, y hemos institucionalizado que a éste área se le llama Integral.

$f(x)$	Área entre $[a,b] = \int_a^b f(x)dx$
$k = k \cdot x^0$	$k \cdot (b^1 - a^1)$
$kx = k \cdot x^1$	$\frac{k}{2} \cdot (b^2 - a^2)$
$k \cdot x^2$	$\frac{k}{3} \cdot (b^3 - a^3)$

Observando atentamente la tabla, es fácil que los alumnos puedan conjeturar la integral de una función de tipo $f(x) = k \cdot x^n$ en un intervalo $[a, b]$

$$\boldsymbol{f(x) = k \cdot x^n} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \int_a^b f(x)dx = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n+1}} \cdot (\boldsymbol{b^{n+1} - a^{n+1}})$$

A continuación vamos a intentar hallar la integral (área bajo la curva) de otras funciones elementales.

Actividad 5: Función exponencial

A las nueve de la mañana surge un rumor en el instituto que se difunde a un ritmo de $f(t) = 10e^t$ *personas/hora. Sabiendo que t representa el número de horas transcurridas desde la aparición del rumor, calcular el número de personas que lo habrán oído a las 11 de la mañana.*

a) *Representa la función* $f(t) = 10e^t$ *en el eje de coordenadas.*

b) *Subdivide el intervalo [0,2] en 2 subintervalos de longitud 1 y calcula el valor de la función* $f(t) = 10e^t$ *en el punto medio de cada subintervalo.*

c) *Dibuja los* **rectángulos medios** *(que tienen por base la amplitud del subintervalo y por altura el valor de la función en el punto medio del subintervalo)*

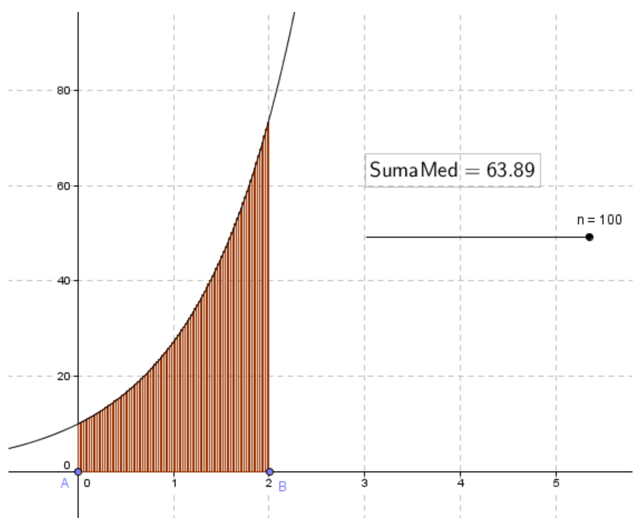
d) *Calcula la suma de las áreas de los rectángulos medios.*

e) Subdivide ahora el intervalo [0,2] en 4 subintervalos de longitud ½ y vuelve a realizar el apartado c y d.

f) Halla la expresión de la suma de rectángulos medios si subdividimos el intervalo [0,2] en 2n subintervalos de longitud 1/n. ***Ayuda:*** *La suma de una expresión geométrica de razón r se halla como:* $S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$

g) Halla el límite cuando $n \to \infty$ *de la suma hallada en el apartado anterior. Interpreta el valor obtenido según el contexto del problema.*

En este momento, el profesor puede mostrar utilizando un applet de *Geogebra* como el resultado obtenido por los alumnos coincide con el valor mostrado en *Geogebra* cuando n toma valores cada vez mayores. También se puede optar porque sean los alumnos los que construyan de nuevo, por sí mismos, el applet; de tal modo que además refuercen el aprendizaje de esta herramienta tan útil.



Sobre el applet de *Geogebra* se hallará el valor de la integral para distintos límites de integración, de tal modo que sean los alumnos los que tras unos cuantos ejemplos puedan conjeturar la expresión de la integral de un función de tipo exponencial $f(x) = k\,e^x$ para un intervalo $[a,b]$ como:

$$\boldsymbol{f(x) = k \cdot e^x} \quad \rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \boldsymbol{k \cdot \left(e^b - e^a\right)}$$

En el ejemplo anterior, para la función $\boldsymbol{f(t) = 10 \cdot e^{t}}$ $\boldsymbol{personas/hora,}$ la integral en el intervalo [0,2], o lo que es lo mismo, el número de personas que oyen el rumor en las dos horas siguientes a iniciarse es igual a $\boldsymbol{10 \cdot (e^{2} - e^{0}) = 10 \cdot (e^{2} - 1) \approx}$ $\boldsymbol{63\ personas}$.

Institucionalización:

<u>Sumas de Riemann</u>

Sea $\boldsymbol{f(x)}$ una función continua y no negativa en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$; en general, una forma de calcular el **área encerrada por la gráfica de $\boldsymbol{f}$, el eje horizontal y las rectas verticales $\boldsymbol{x = a}$, $\boldsymbol{x = b}$** es:

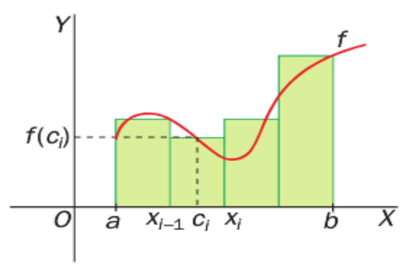
- Dividir el intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ en $\boldsymbol{n}$ subintervalos que, para facilitar cálculos, se toman de la igual longitud $\boldsymbol{h = \frac{b-a}{n}}$, con los puntos $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b}$

- En cada subintervalo $[\boldsymbol{x_{i-1}}, \boldsymbol{x_i}]$ se toma un punto $\boldsymbol{c_i}$ y se obtiene la suma $\boldsymbol{S_n}$ de las áreas de los rectángulos de base $\boldsymbol{h = \Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}}$, y altura $\boldsymbol{f(c_i)}$**:**

$$\boldsymbol{S_n = f(c_1) \cdot \Delta x + f(c_2) \cdot \Delta x + \cdots + f(c_n) \cdot \Delta x}$$

  Estas sumas se suelen escribir como:

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)}$$



  y son conocidas como **sumas de Riemann**

- Se toma como área **A**, el límite cuando $n \to \infty$ de $\boldsymbol{S_n}$

$$\boldsymbol{A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)}$$

Integral definida

Para una función continua f(x) en el intervalo $[a, b]$, hemos calculado el área A en dicho intervalo como:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} (f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x)$$

El área, y por lo tanto, el límite del sumatorio, es la integral definida de f de a hasta b, y se representa por $\int_a^b f(x)dx$.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Si existe este límite, decimos que f es integrable en [a, b]

Integral definida y área bajo una curva

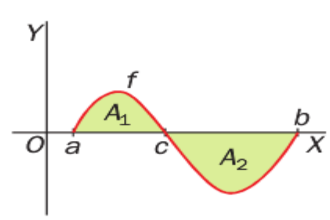
Si f es no negativa en el intervalo $[a, b]$, la definición de $\int_a^b f(x)dx$ coincide con el área encerrada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

- Si $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ en $[a, b]$, $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ es el **área bajo la curva** desde a hasta b.

Si f es negativa en $[a, b]$, entonces la función $-f$ es positiva en $[a, b]$ y como $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = -\sum_{i=1}^{n}(-f)(c_i)\Delta x$, resulta que $\int_a^b f(x)dx$ será el número opuesto al que mide el área encerrada por la curva $y = -f(x)$ desde a hasta b . Es decir:

- Si $\boldsymbol{f(x) \leq 0}$ en $[a, b]$, $-\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ es el **área entre el eje de abscisas y la curva** $y = f(x)$ desde a hasta b.

- Por último, si $\boldsymbol{f}$ **es positiva o cero en** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ **y negativa en** $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]$**,** $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ valdrá $\boldsymbol{A_1 - A_2}$ siendo A_1 y A_2 las áreas de las regiones indicadas en la figura



Propiedades de la integral definida

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

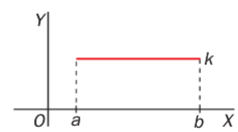
En la definición de $\int_a^b f(x)dx,$ se ha supuesto que a < b. Pero ésta sigue teniendo sentido si b < a. En este caso, Δx cambia de $\frac{b-a}{n}$ a $\frac{a-b}{n}$, es decir, las sumas cambian de signo, por lo que $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Análogamente a la propiedad 1, si a = b, Δx = 0, y por tanto $\int_a^a f(x)dx = 0$

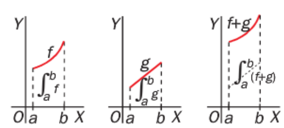
3. $\int_a^b kdx = k(b-a), \quad k \in R$

Se justifica analíticamente observando que la igualdad se cumple de forma obvia para las sumas de Riemann, y gráficamente →



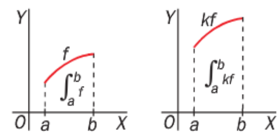
4. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Se justifica analíticamente observando que la igualdad se cumple de forma obvia para las sumas de Riemann, y gráficamente →



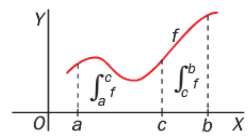
5. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad k \in R$

Se justifica analíticamente observando que la igualdad se cumple de forma obvia para las sumas de Riemann, y gráficamente →



6. $\int_a^c \boldsymbol{f(x)dx} + \int_c^b \boldsymbol{f(x)dx} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$

Se justifica analíticamente observando que la igualdad se cumple de forma obvia para las sumas de Riemann, y gráficamente →



7. $\boldsymbol{Si\ f \geq 0\ en\ [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0}$

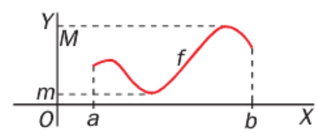
Se justifica analíticamente observando que la igualdad se cumple de forma obvia para las sumas de Riemann.

8. $\boldsymbol{Si\ f \geq g\ en\ [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx}$

En consecuencia de las propiedades 7, 5 y 4, $f(x) \geq g(x) \rightarrow f(x) - g(x) \geq 0$, por lo que $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$, es decir, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

9. $\boldsymbol{Si\ \ m \leq f \leq M\ en\ [a,b] \rightarrow\ m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)}$

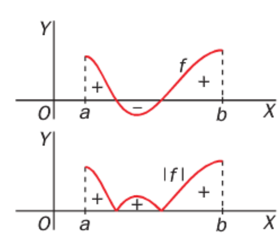
Es consecuencia inmediata de las propiedades 8 y 3



10. $\boldsymbol{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx}$

Por la propiedad 8: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx}$ y por 3: $\boldsymbol{-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -f(x)dx \leq \int_a^b |-f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx}$

Así, $\boldsymbol{\int_a^b |f(x)|dx}$ es mayor o igual que el número $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ y que su opuesto. $\boldsymbol{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx}$



Actividad 6: Propiedades de la integral definida

Con la ayuda de Geogebra, representa gráficamente las funciones $y = x^2,\ y = x,$ $y = -x,\ y = 3, y\ las\ funciones\ suma\ y = 2x + 3$ *e* $y = x^2 + 2x + 3$. *Comprueba que:*

a) $\int_0^b (2x+3)dx = \int_0^b 2xdx + \int_0^b 3dx$

b) $\int_0^b 2xdx = 2 \cdot \int_0^b xdx$

c) $\int_0^b (x^2+2x+3)dx = \int_0^b x^2dx + \int_0^b 2xdx + \int_0^b 3dx$

d) $\int_0^b (-x)dx = -\int_0^b xdx$

e) $\int_0^a xdx + \int_a^b xdx = \int_0^b xdx$

Actividad 7: Problemas de aplicación

1.- Circulandia, una típica ciudad, está muy poblada cerca del centro pero su población decrece cuando nos alejamos de él. En efecto, su densidad de población es $\rho(r) = 10000(3 - r)\ habitantes/km^2$ *siendo* r *la distancia al centro en km.*

a) Si la densidad de población en los confines de la ciudad es 0, ¿cuál es el radio de la zona en la que viven?

b) Calcula el número total de habitantes de la ciudad.

2.- La densidad de coches ρ(x) (en coches por km) en los primeros 20 km de una autovía de salida de una gran ciudad viene dada por la función $\rho(x) = 600 - 5x - x^2$ *siendo* x *la distancia en km al comienzo de la autovía.*

a) Escribe una suma de Riemann para hallar el número de coches en esos 20 km con cinco intervalos de igual longitud tomando como punto muestra el extremo derecho del intervalo.

b) *Calcula el número de coches en esos 20 km mediante una suma de Riemann con n intervalos de igual longitud tomando como punto muestra el extremo derecho del intervalo.* ***Ayuda:*** *Se verifican las siguientes ecuaciones.*

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1))}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + +(n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

c) *Calcula el número total de coches en esos 20 km utilizando las propiedades de la integral definida y las expresiones de la integral que ya conoces. Compara este resultado con el obtenido en el apartado anterior.*

CAMPO 2: CONEXIÓN DE LA INTEGRACIÓN Y LA DERIVACIÓN

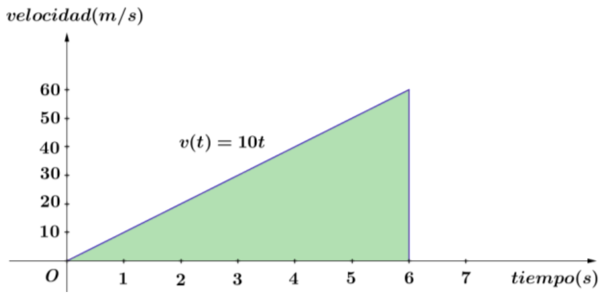
Hasta aquí, hemos estado calculando integrales definidas, bien por argumentos geométricos o bien calculando límites de sumas de Riemann; procedimiento este último que, como ya hemos, visto puede ser muy engorroso. La búsqueda de una manera sencilla de calcular la integral es lo que llevó a Newton y a Leibniz a establecer las bases de lo que hoy conocemos como Cálculo Infinitesimal.

Actividad 8: Función área

Vamos a tomar de nuevo el problema que planteamos en la actividad 2:

Se dejar caer una piedra desde una azotea de la que no conocemos su altura. Pero hemos cronometrado que la piedra ha tardado 6 segundos en llegar al suelo. Ayuda: $v = v_0 + a \cdot t$, *donde* v_0 *es la velocidad inicial que en este caso es igual a 0 m/s y* a *es la aceleración de la gravedad que aproximamos a 10 m/s*^{2}.

a) *Representa la gráfica de la velocidad en función del tiempo.*



b) *Calcula la integral definida* $\int_0^6 \boldsymbol{v(x)dx}$. *¿Qué representa este valor en el contexto del problema?*

c) *Calcula el espacio recorrido por la piedra cuando han transcurrido 1, 2, 3, 4, 5 segundos. Dibuja los valores sobre la gráfica y trata de hallar la función del espacio recorrido en función del tiempo.*

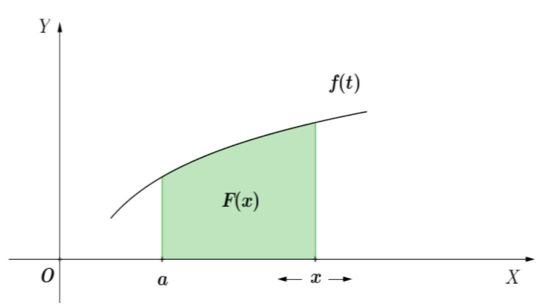
Institucionalización:

Función área o función integral F(x)

Hasta ahora hemos calculado la integral definida de una función f de a hasta b como el área de una región concreta delimitada por la función $f(x)$, el eje horizontal y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Si dejamos un punto del intervalo fijo, a, y variamos el valor del otro extremo, b, de manera que pueda tomar cualquier valor de x, tendremos una función que nos dará el valor de la integral definida para cada uno de los intervalos [a, x]. A esta función se le llama **función integral o función área** $\boldsymbol{F(x)}$, y se representa como:

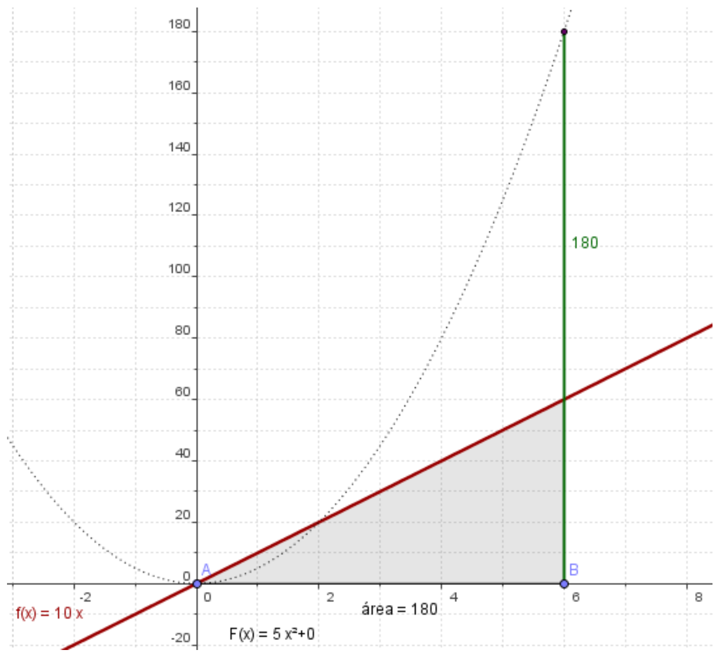
$$\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(t)dt}$$



Actividad 9: Conexión integración y derivación a través de la función área.

En esta actividad continuamos con el problema anterior, pero visualizándolo con un applet de *Geogebra*.

Abre el programa de Geogebra de Sada (2007) y redefine la función como $f(x) = 10x$ *. Contesta a las siguientes cuestiones:*



a) *¿Qué representa el área sombreada en el intervalo [0,6]? ¿Cómo se representa?*

b) *¿Qué relación hay entre el valor del área y el segmento vertical verde?*

c) *Al mover el punto B se traza una curva. Compara los valores que toma la curva con los obtenidos en la actividad anterior.*

d) *¿Cómo definirías a la función que dibuja la curva? ¿Cuál es su expresión analítica?*

e) *Derívala y compárala con la función f(x).*

f) *Resume tus conclusiones.*

– Sobre este mismo applet podemos dibujar cualquier otra función f(x) y su función área F(x); y además obtener la derivada de esta función para comprobar la relación entre la derivada de F(x) y f(x). Proponemos visualizar algunas de las funciones elementales que hemos visto hasta ahora, como la función cuadrática o exponencial. –

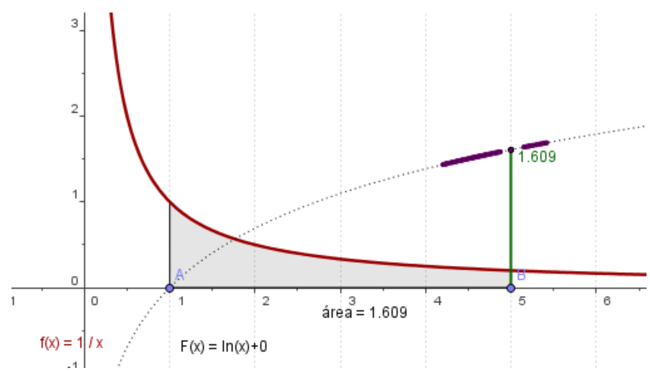
Antes de institucionalizar el teorema fundamental del cálculo se plantearán algunos problemas más para distintas funciones.

Actividad 10: Conexión integración-derivación: función de proporcionalidad inversa

Considera la función $f(x) = \frac{1}{x}$ *en el intervalo genérico [1, x]. Se pide:*

a) *Dibuja la función f(x) con lápiz y papel.*

b) *Utiliza Geogebra visualizar gráficamente la función área* $F(x) = \int_1^x f(x)dx$ *bajo la curva f(x.)*



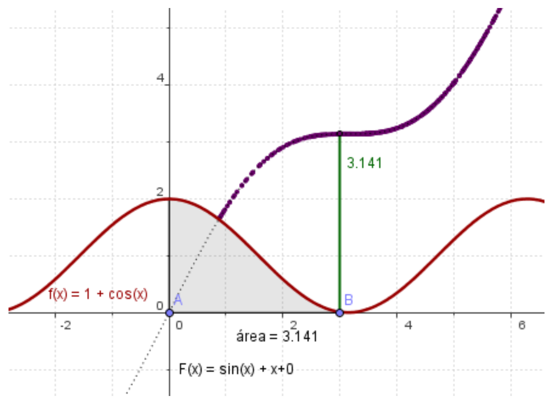
c) *Calcula la derivada de la función área* $F(x) = ln(x)$ *bajo la curva f(x) y verifica que se obtiene la función* $f(x) = \frac{1}{x}$ *de partida.*

Actividad 11: Conexión integración-derivación: función coseno

En un cable ideal, supuesta resistencia nula, se aplica un campo eléctrico en dirección longitudinal de valor $e(x) = 1 + cos(x)$*. Se sabe que el trabajo realizado por el campo eléctrico para mover una carga q desde un punto A hasta otro punto B viene dado por* $W_{AB} = q\int_A^B e(x)dx$ *donde q es la carga, que esta uniformemente repartida de* *forma constante a lo largo del cable; mientras que el potencial viene expresado por* $V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q}$*. Se pide:*

a) *¿Que representa la función área E (x) de la función campo eléctrico?*

b) *Utiliza el programa de Geogebra Sada (2007) con la función f(x) = 1 + cos(x) para visualizar graficamente la función área.*



c) *Calcula la diferencia de potencial entre dos puntos distantes un periodo* π*.*

Institucionalización:

<u>El teorema fundamental del cálculo.</u>

Vamos a repasar alguna de las funciones que hemos estudiado y de las cuales ya hemos hallado su función área $F(x)$. Además también hemos comprobado que para estas funciones se cumple que:

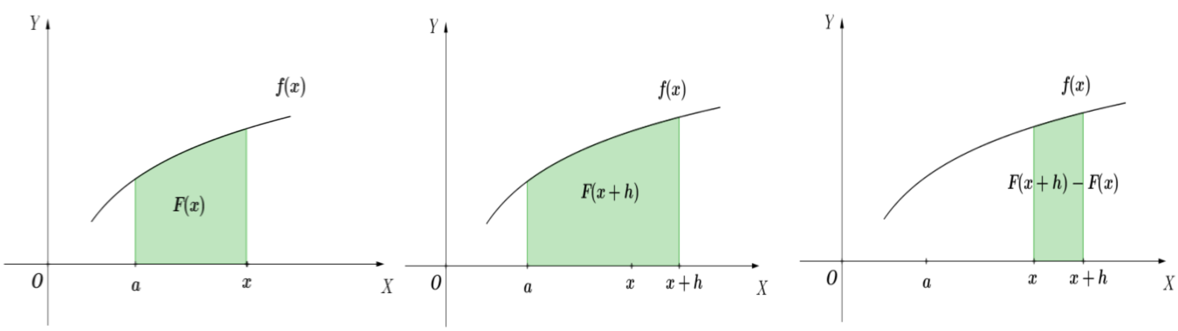
$$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$$

Es decir, que dada una función $f(x)$, la derivada de su función área $F(x)$ es dicha función $f(x)$.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(t)dt}$	$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

$\boldsymbol{f(x)=1}$	$\boldsymbol{F(x)}=\int_a^x f(t)dt = x-a = \boldsymbol{x+C}$	$\boldsymbol{F'(x)=1}$
$\boldsymbol{f(x)=x}$	$\boldsymbol{F(x)}=\int_a^x f(t)dt = \frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{2}=\boldsymbol{\frac{x^2}{2}+C}$	$\boldsymbol{F'(x)=x}$
$\boldsymbol{f(x)=x^2}$	$\boldsymbol{F(x)}=\int_a^x f(t)dt = \frac{x^3}{3}-\frac{a^3}{3}=\boldsymbol{\frac{x^3}{3}+C}$	$\boldsymbol{F'(x)=x^2}$
$\boldsymbol{f(x)=x^n}$	$\boldsymbol{F(x)}=\int_a^x f(t)dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}=\boldsymbol{\frac{x^{n+1}}{n+1}+C}$	$\boldsymbol{F'(x)=x^n}$
$\boldsymbol{f(x)=e^x}$	$\boldsymbol{F(x)}=\int_a^x f(t)dt = e^x-e^a=\boldsymbol{e^x+C}$	$\boldsymbol{F'(x)=e^x}$
$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{F(x)}=\int_a^x f(t)dt = ln(x)-ln(a)=\boldsymbol{ln(x)+C}$	$\boldsymbol{F'(x)=\frac{1}{x}}$
$\boldsymbol{f(x)=cos(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}=\int_a^x f(t)dt = sen(x)-sen(a)=\boldsymbol{sen(x)+C}$	$\boldsymbol{F'(x)=cos(x)}$

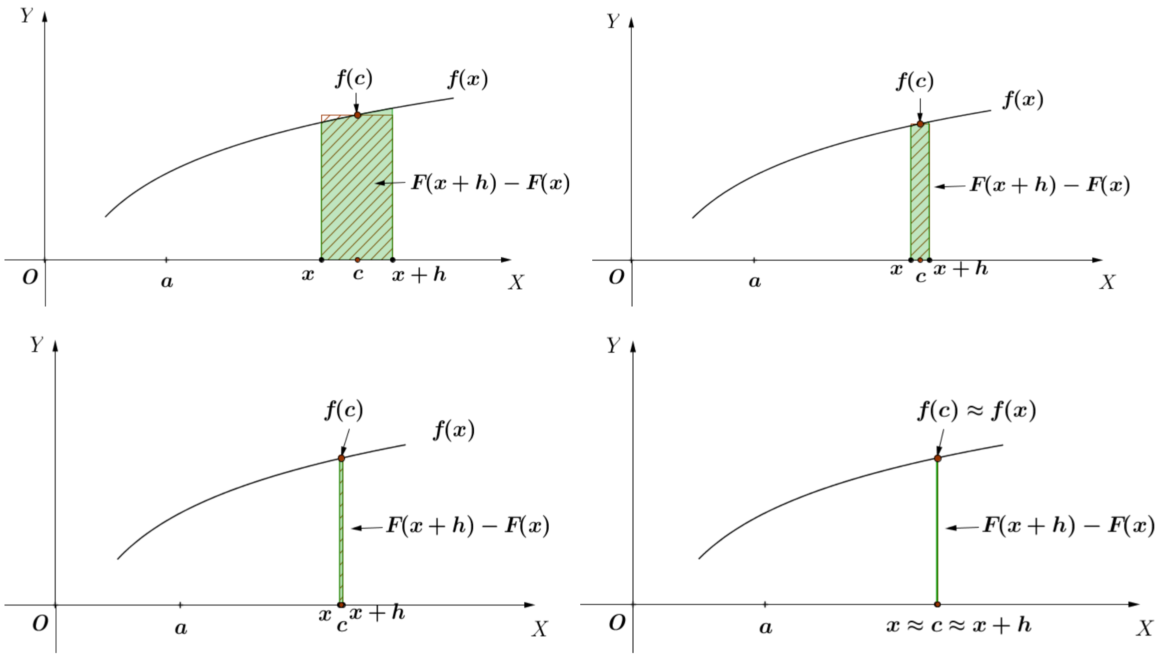
Pero ésta relación que vemos para estas funciones, ¿se cumplirá para cualquier tipo función? Vamos a comprobar de forma gráfica que esta relación siempre se cumple:



Construimos ahora el rectángulo de base h $(x+h-x)$ y altura $f(c)$, siendo $c=\frac{x+x+h}{2}=\frac{2x+h}{2}=x+\frac{h}{2}$ el punto medio del intervalo $[x, x+h]$; de tal manera que el área de este rectángulo se aproxime al área de la región: $F(x+h)-F(x)$.

Por lo tanto, tendremos que: $F(x+h)-F(x)\cong f(c)\cdot h \quad \rightarrow \quad f(c)\cong\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

Utilizando *Geogebra* podemos comprobar gráficamente que cuanto más pequeño se hace h, el punto c está cada vez más cerca y más cerca de x, de tal manera que $f(c) \cong f(x)$.



Podremos escribir entonces que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f\left(x + \frac{h}{2}\right) = f(x)$$

Como por la definición de derivada

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

se tiene que:

$$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$$

El **teorema fundamental del cálculo integral** afirma que:

La función integral $F(x)$ asociada a una función $f(x)$ continua y derivable cumple:

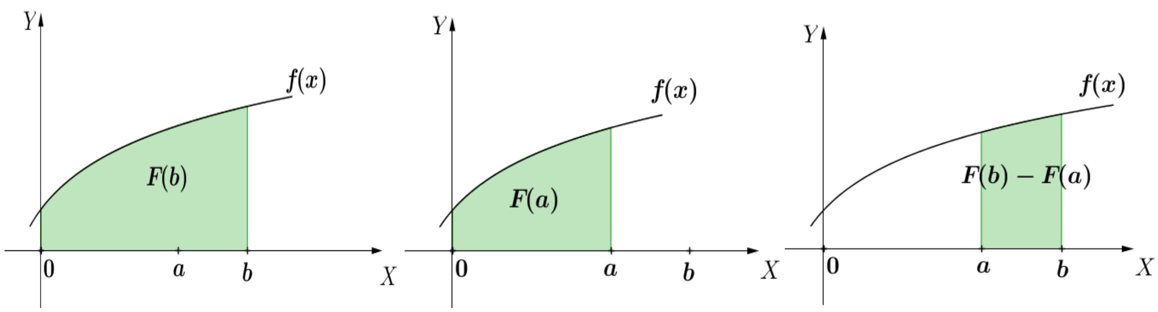
$$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$$

En consecuencia, el problema de calcular el área bajo una curva de una función continua se reduce a la búsqueda de una función F(x) de la función f, de forma que $F'(x) = f(x)$. Es decir el problema geométrico del área se ha reducido a un problema analítico.

Regla de Barrow.

Tal como hemos visto, es fácil comprobar que:

$$\boldsymbol{F(b) = \int_0^b f(t)dt} \qquad \boldsymbol{F(a) = \int_0^a f(t)dt} \qquad \boldsymbol{F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt}$$



Utilizando ahora el teorema fundamental del cálculo integral que establece la relación existente entre derivación e integración, se establece un método para calcular $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ siguiendo estos pasos:

1. Buscamos una función $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$
2. Calculamos $F(a)\ y\ F(b)$
3. $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Este método se conoce con el nombre de **Regla de Barrow**

J. SOBRE LA EVALUACIÓN

La evaluación de esta unidad va a constar de una prueba escrita de 1 hora de duración y de una prueba práctica que se llevará a cabo en la sala de ordenadores haciendo uso de la herramienta *Geogebra*. La prueba escrita supondrá el 70% de la nota global mientras que la prueba práctica tendrá un valor del 25%. El 5 % restante será evaluado mediante la observación en clase del trabajo y actitud de los alumnos.

PRUEBA CON GEOGEBRA

Como hemos comentado a lo largo del trabajo, el uso de applets con el software *Geogebra* es fundamental, tanto para introducir los conceptos como para entender y justificar las técnicas. En este sentido, consideramos algo positivo que, siguiendo la dinámica de la unidad, se evalúe a los alumnos la capacidad de usar una herramienta útil para la resolución de problemas. La prueba se desarrollará en 30 min y constará de dos problemas, referidos a los dos campos de problemas que hemos planteado en este trabajo.

Problema 1: Cálculo de áreas. Construcción de un applet de *Geogebra*.

De un grifo el agua sale con una velocidad dada por la siguiente función: $v(t) = \frac{1}{5} \cdot t^2 \ litros/segundos$. *Se pide:*

a) *Representa la función* $v(t) = \frac{1}{5} \cdot t^2$.

b) *¿Qué representa el área el encerrada entre la función v(t), el eje OX y dos rectas cualquiera* $x = a$ *y* $x = b$*? ¿Qué significado físico tiene el área en este problema?*

c) *Acota superiormente e inferiormente el área bajo la curva de la función v(t) en el intervalo [0,10]. Para ello divide el intervalo en 10 subintervalos.*

d) *Realiza una tabla con la suma superior y la suma inferior y el error de aproximación para n =10, 20, 40 y 60.*

e) *Calcula el número de particiones del intervalo necesarias para que el error de aproximación sea menor o igual a 2,5.*

f) *Calcula el valor exacto del área y comprueba que este valor se encuentra entre las cotas inferiores y las cotas superiores halladas en el apartado anterior.*

Criterio de evaluación:

- *Dar significado físico al área bajo la curva*
- *Saber utilizar Geogebra para hallar sumas de Riemann superiores e inferiores.*
- *Comprobar la convergencia de las sumas de Riemann al valor de la integral cuando n tiende a infinito.*

Criterio de calificación:

- *El problema supondrá 1,5 puntos sobre 2,5 que vale la prueba práctica. Los apartados a) y b) valdrán 0,15 puntos cada uno y los otros cuatro apartados c), d), e) y f) valdrán 0,3 puntos.*

Problema 2: Teorema fundamental del cálculo.

En este problema se les proporcionará un applet equivalente a los desarrollados por Sada y que hemos utilizado durante la unidad didáctica. La modificación principal será que el punto A sobre el eje X no se podrá desplazar. El motivo de esta modificación quedará explicado en las siguientes cuestiones. Se continuará con la contextualización del problema 1.

a) *Redefine la función para tener* $v(t) = \frac{1}{5} \cdot t^2$

b) *Escribe la expresión analítica de la función área.*

c) *Enuncia y comprueba el teorema fundamental del cálculo.*

d) *Desplazando únicamente el extremo de integración B sobre el eje X, halla la cantidad de litros totales que han salido del grifo entre los instantes 2 y 7 segundos.*

e) *Calcula el volumen total de agua que habría salido en el intervalo de tiempo [2,7] si hubieran habido dos grifos en vez de uno.*

Criterio de evaluación:

- *Enunciar y comprobar el teorema fundamental del cálculo.*
- *Utilizar la propiedad aditiva y la propiedad multiplicativa de la integral.*

Criterio de calificación:

- *El problema supondrá 1 punto sobre 2,5. Los apartados a) y b) valdrán 0.125 puntos cada uno, y los apartados c), d) y e) valdrán 0,25 puntos cada uno.*

PRUEBA ESCRITA

La prueba escrita tendrá una duración de una hora y constará de 4 problemas.

Problema 1: *(2 puntos)*

Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ *:*

a) *Halla la integral definida en el intervalo [0, 4] haciendo el límite de sumas de Riemann. Para ello toma como punto de cada subintervalo el extremo derecho.*

Ayuda: $1^2 + 2^2 + \cdots + +(n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

b) *A partir del resultado anterior, calcula:*

- $\int_{-4}^{4} \frac{1}{2}x^2 dx$
- $\int_{0}^{4} (x^2 + 5) dx$

Criterio de evaluación:

- *Hallar la suma Riemann en un intervalo [a,b] de una función lineal.*
- *Entender el significado conceptual y geométrico de la integral.*

Criterio de calificación:

- *El apartado a) valdrá 1 punto, de los cuales, plantear correctamente la suma de Riemann valdrá 0,75 y resolver el límite 0,25.*
- *El apartado b) valdrá 1 punto, 0,5 cada subapartado.*

<u>Problema 2:</u> *(3 puntos)*

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 4, & si \quad x \leq -3 \\ 1-x\,, & si \quad -3 < x \leq 2 \\ \frac{-2}{x}, & si \quad 2 < x \end{cases}$

Dibuja la función y calcula el área total encerrada bajo la curva de la función en el intervalo [-5, 2e].

<u>Criterio de evaluación:</u>

- *Resolver integrales definidas en las que haya que utilizar la propiedad de aditividad de intervalo y en las que, cuando f(x) es negativa, haya que tomar el valor del área como el opuesto al valor de la integral.*
- *Resolver la integral mediante métodos geométricos en los dos primeros intervalos y mediante la regla de Barrow en el último intervalo.*

<u>Criterio de calificación:</u>

- *Calcular el área de los dos primeros intervalos: 1 punto*
- *Calcular el área del tercer intervalo: 1 punto*
- *Aplicar las propiedades de la integral para hallar el área total: 1 punto*

<u>Problema 3:</u> *(1 punto)*

Se trasplanta un árbol y se observa que su tasa de crecimiento a los x años es de $1-\frac{1}{(x+1)^2}$ *metros/año. Calcula los metros que ha crecido el árbol del segundo al quinto año.*

<u>Criterio de evaluación:</u>

- *Resolver, mediante la integral definida y utilizando la regla de Barrow, problemas contextualizados.*

<u>Criterio de calificación:</u>

- *Plantear la integral definida: 0,25 puntos*
- *Resolver la integral utilizando la regla de Barrow: 0,75 puntos*

Problema 4: *(1 punto)*

Un resorte elástico situado en un plano horizontal tiene un extremo fijo a una pared. Se tira del extremo libre hasta alargarlo 10 cm. Halla el trabajo (W) que realiza el muelle cuando su extremo libre pasa desde los 10 cm hasta los 5 cm respecto de la posición de equilibrio. La constante elástica del muelle es k = 2000 N/metro.

Ayuda: $W_{1\to 2}\ (Julios) = \int_{x1}^{x2} F(x)dx = \int_{x1}^{x2} (-kx)dx$

Criterio de evaluación:

- *Resolver, mediante la integral definida y utilizando la regla de Barrow, problemas relacionados con la Física.*

Criterio de calificación:

- *Plantear la integral definida con las unidades correctas: 0,25 puntos*
- *Resolver la integral utilizando la regla de Barrow: 0,75 puntos*

K. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

ALDANA BERMÚDEZ, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE". *Tesis doctoral.* Universidad de Salamanca.

ARANDA, C.; CALLEJO, M.L. (2011). Un experimento de enseñanza con applets de geometría dinámica. *Investigación en Educación Matemática XV*, pp. 247-256. Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

AZCÁRATE C., CASADEVALL M., CASELLAS E., BOSCH D. (1996). Cálculo Diferencial e Integral. *Educación Matemática en Secundaria* Editorial Síntesis, S.A

ESCUDERO BAYLÍN, M. (1997). Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. *Suma*, 24, pp. 77-79.

LLORENS FUSTER, JOSÉ L. y SANTOJA GÓMEZ, FRANCISCO J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones matemáticas*, v.5, No. 1/2, pp. 61-76.

GUTIERREZ, I.A. (2013). La integral definida. *Trabajo Fin de Máster en Profesorado de Educación Secundaria.* Universidad de Zaragoza.

SADA ALLO, M. Webs Interactivas de Matemáticas
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/derivadas.htm

TURÉGANO MORATALLA, P. (1997). El aprendizaje del concepto de integral. *Suma*, 26, pp. 39-52.

TURÉGANO MORATALLA, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias, 16 (2)*, pp. 233-249.

ANEXOS

ANEXO I: GUIÓN PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN APPLET DE GEOGEBRA

A continuación se presenta un guión (Gutiérrez, 2013) que se les proporcionará a los alumnos para la construcción de un applet de *Geogebra*. El guión que aquí se muestra está adaptado para el desarrollo de la actividad 4 de este trabajo, pero se podrá adaptar fácilmente para cualquier otro tipo de ejercicio, ya que presenta las nociones básicas del manejo de *Geogebra* que se necesitarán para el estudio de la integral definida.

- *Abre un nuevo documento Geogebra en el que estén habilitados los ejes de coordenadas. Introduce con el teclado la función* $v(t) = 4t^2$ *. El programa dibuja la gráfica de la función. Para una mejor visualización, con el botón derecho del ratón selecciona una relación Eje X: Eje Y = 1:20.*

- *Introduce con la función "nuevo punto" del menú dos puntos que el programa denotará A y B, y sitúalos en el eje de abscisas, en x = 0 y x = 5. Dichos puntos representan los límites del intervalo donde queremos hallar el área. Puede comprobarse que dichos puntos pueden desplazarse fácilmente con el ratón.*

- *Crea un "deslizador" con la ayuda del menú. Introduce un rango de variación desde 1 a 100, con un salto de 1 unidad y una anchura de 200 (al pinchar en deslizador con el ratón, se abre una ventana donde se pueden introducir fácilmente dichos parámetros).*

- *Podemos situar el deslizador a la derecha de la gráfica de la función, renombrarlo con la letra n y comprobar que pinchando con el ratón podemos variar el parámetro n a cualquier valor entre 0 y 100. Colocamos el deslizador en n = 5.*

- *Introduce con el teclado la orden: SumaInferior[v(t), x(A), x(B) n]. El comando SumaInferior[] está predefinido, el programa dibujará los rectángulos inferiores de amplitud la longitud del intervalo dividido por n, y guardará en una variable el valor numérico de las sumas inferiores que representan las sumas de las áreas de dichos rectángulos. Podemos renombrar la variable y denominarla SumasInf.*

- *Introduce con el teclado la orden: SumaSuperior[f(x), x(A), x(B) n]. El comando SumaSuperior[] también está predefinido, el programa dibujará los rectángulos superiores de amplitud la longitud del intervalo dividido por n, y guardará en una variable el valor numérico de las sumas superiores que representan las sumas de las áreas de dichos rectángulos. Podemos renombrar la variable y denominarla SumasSup.*

- *Introduce con el teclado la orden: SumaSuperior[f(x), x(A), x(B) n], SumaInferior[f(x), x(A), x(B), n]*

- *El programa guardará en una variable el valor numérico de la diferencia entre las sumas superiores y las sumas inferiores. Podemos renombrar la variable y denominarla Error.*

- *En el menú podemos activar el apartado vista algebraica y podemos visualizar el valor de todas las variables que aparecen en el programa. Alternativamente, con el botón derecho del ratón podemos ir a "propiedades del objeto" activar la opción "mostrar nombre y valor" y dichas variables aparecerán escritas junto a la gráfica con su nombre y valor.*

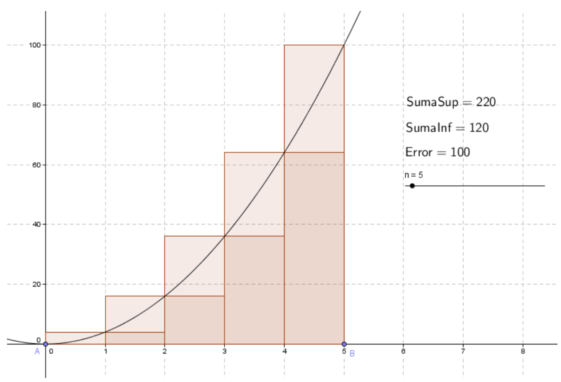
- ***Solo una vez llegado al apartado i) de la actividad:** Introduce con el teclado la orden: Integral[v(t), x(A), x(B)]. El comando Integral[] está predefinido, el programa coloreara el recinto determinado bajo la curva de la función v(t) y las rectas verticales determinadas por los puntos A y B.*

ANEXO II: SOLUCIONES PROBLEMAS

En este anexo no aparecen las soluciones de todas y cada una de las actividades, sino que se muestran solo aquellos problemas y apartados de mayor complejidad y que consideramos oportuno añadir en este anexo.

Actividad 4: Función cuadrática

Un avión acelera de 0 a 100m/s (360 km/h) en 5 segundos. Notamos que la variación de la velocidad entre 0 y 100 no es lineal, sino que cada vez la aceleración es mayor y la velocidad aumenta más rápidamente. La velocidad del avión en cada instante viene representada en la siguiente gráfica, dada por la siguiente ecuación: $v(t) = 4 \cdot t^2$. *¿Qué espacio habrá recorrido el avión en esos 5 segundos?*



h) *Considera una subdivisión en 5n subintervalos de longitud* $h = \frac{1}{n}$. *Calcula el área de los rectángulos superiores e inferiores en función de n.* ***Ayuda:*** *Se verifica la fórmula:*

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Solución:

El área de los rectángulos superiores vendrá dada como:

$$S_{sup} = h \cdot v(t_1) + h \cdot v(t_2) + \cdots + h \cdot v(t_{5n})$$

El área de los rectángulos inferiores vendrá dada como:

$$S_{inf} = h \cdot v(t_0) + h \cdot v(t_1) + \cdots + h \cdot v(t_{5n-1})$$

$$con\ h = \frac{1}{n}, \qquad y \quad 0 = t_0 < t_1 = \frac{1}{n} < t_2 = \frac{2}{n} < \cdots < t_{5n-1} = \frac{5n-1}{n} < t_{5n} = \frac{5n}{n}$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{S_{sup}} = h \cdot [v\left(\frac{1}{n}\right) + v\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + v\left(\frac{5n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \left[4 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + 4 \cdot \left(\frac{5n}{n}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{4}{n^3} \cdot [1^2 + 2^2 + \cdots + (5n)^2] = \frac{4}{n^3} \cdot \frac{5n(5n+1)(10n+1)}{6} = 4 \cdot \frac{250n^3 + 75n^2 + 5n}{6n^3} =$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{125}{3} + \frac{25}{2n} + \frac{5}{6n^2}\right] = \boldsymbol{4 \cdot \left[\frac{5^3}{3} + \frac{5^2}{2n} + \frac{5}{6n^2}\right]}$$

$$\boldsymbol{S_{inf}} = h \cdot [v(0) + v\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + v\left(\frac{5n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \left[0 + 4 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + 4 \cdot \left(\frac{5n-1}{n}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{4}{n^3} \cdot [1^2 + \cdots + (5n-1)^2] = \frac{4}{n^3} \cdot \frac{(5n-1)5n(10n-1)}{6} = 4 \cdot \frac{250n^3 - 75n^2 + 5n}{6n^3} =$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{125}{3} - \frac{25}{2n} + \frac{5}{6n^2}\right] = \boldsymbol{4 \cdot \left[\frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2n} + \frac{5}{6n^2}\right]}$$

i) *Toma límites cuando $n \to \infty$ y comprueba que las sumas superiores e inferiores convergen ambas al mismo valor. Este valor es el área bajo la curva de la función, esto es, el área que estamos buscando:*

$$\lim_{n\to\infty} S_{\text{inf}}(n) = \lim_{n\to\infty} S_{sup}(n) = Área\ bajo\ la\ curva$$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} S_{sup} = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \left[\frac{5^3}{3} + \frac{5^2}{2n} + \frac{5}{6n^2}\right] = 4 \cdot \frac{5^3}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{inf} = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \left[\frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2n} + \frac{5}{6n^2}\right] = 4 \cdot \frac{5^3}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{\text{inf}}(n) = \lim_{n\to\infty} S_{sup}(n) = Área\ bajo\ la\ curva = 4 \cdot \frac{5^3}{3}$$

<u>Demostración</u>: $\mathbf{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

La suma $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$ se puede hallar a partir de la siguiente tabla en donde la última fila representa la suma de las dos columnas externas.

$1^3 = 1$

$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$

$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$

...

$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$

$$\boxed{1^3 + \cdots + (n+1)^3 = (1^3 + \cdots + n^3) + 3 \cdot (1^2 + \cdots + n^2) + 3 \cdot (1 + \cdots + n) + (n+1)}$$

En la última fila se puede simplificar y sustituir $(1 + \cdots + n)$ por $\frac{n(n+1)}{2}$, ya que se trata de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética $a_n = n$. Despejando:

$$\boxed{(\mathbf{1^2} + \cdots + \boldsymbol{n^2}) = \frac{(n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)}{3} = \frac{(n+1)\big(2(n+1)^2 - (3n+2)\big)}{6} = \\ = \boldsymbol{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}$$

Actividad 5: Función exponencial

A las nueve de la mañana surge un rumor en el instituto que se difunde a un ritmo de $f(t) = 10e^t$ *personas/hora. Sabiendo que t representa el número de horas transcurridas desde la aparición del rumor, calcular el número de personas que lo habrán oído a las 11 de la mañana.*

a) Halla la expresión de la suma de rectángulos medios si subdividimos el intervalo [0,2] en 2n subintervalos de longitud 1/n. ***Ayuda:*** *La suma de una expresión geométrica de razón r se halla como:* $S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$

Solución:

El área de los rectángulos medios será:

$$S_{medios} = h \cdot f(t_1) + h \cdot f(t_2) + \cdots + h \cdot f(t_{2n})$$

$$con\ h = \frac{1}{n}, \qquad y \quad 0 < t_1 = \frac{1}{2n} < t_2 = \frac{3}{2n} < \cdots < t_{2n} = \frac{4n-1}{2n} < 2$$

Por tanto,

$$S_{medios} = h \cdot [f\left(\frac{1}{2n}\right) + f\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + f\left(\frac{4n-1}{2n}\right) = \frac{10}{n} \cdot \left[e^{\frac{1}{2n}} + \cdots + e^{\frac{4n-1}{2n}}\right] =$$

La expresión entre [] es la suma de 2n primeros términos de una progresión geométrica de razón $r = e^{\frac{2}{2n}}$, con primer término $a_1 = e^{\frac{1}{2n}}$, y último término $a_{2n} = e^{\frac{4n-1}{2n}}$. Esta suma vale:

$$S_{2n} = \frac{a_{2n}r - a_1}{r-1} = \frac{e^{\frac{4n-1}{2n}} \cdot e^{\frac{2}{2n}} - e^{\frac{1}{2n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{e^{\frac{4n+1}{2n}} - e^{\frac{1}{2n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{e^{\frac{1}{2n}} \cdot (e^2 - 1)}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e^2 - 1)\frac{e^{\frac{1}{2n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

$$S_{medios} = \frac{10}{n} \cdot (e^2 - 1)\frac{e^{\frac{1}{2n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

b) *Halla el límite cuando $n \to \infty$ de la suma hallada en el apartado anterior. Interpreta el valor obtenido según el contexto del problema. 0*

$$\lim_{n\to\infty} S_{medios} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \cdot (e^2 - 1)\frac{e^{\frac{1}{2n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = 10 \cdot (e^2 - 1)\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)} =$$

$$= \left\{Por\ L'Hopital\text{: } \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left[n^2 \cdot \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}\right] = 1\right\} = \mathbf{10} \cdot (\boldsymbol{e^2} - \mathbf{1})$$

Actividad 7: Problemas de aplicación

1.- Circulandia, una típica ciudad, está muy poblada cerca del centro pero su población decrece cuando nos alejamos de él. En efecto, su densidad de población es $\rho(r) = 10000(3 - r)\ habitantes/km^2$ *siendo r la distancia al centro en km.*

a) *Si la densidad de población en los confines de la ciudad es 0, ¿cuál es el radio de la zona en la que viven?*

Solución:

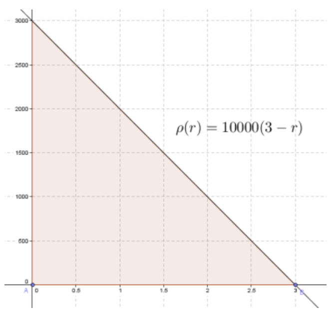
$Si\ \rho(r) = 0 \rightarrow\ 10000(3 - r) = 0 \rightarrow \boldsymbol{r = 3}.$

$\boldsymbol{El\ radio\ de\ la\ zona\ en\ la\ que\ vive\ la\ población\ es\ de\ 3\ km}$

b) *Calcula el número total de habitantes de la ciudad.*

Solución:

El número total de habitantes será igual a la integral definida de 0 hasta 3 de $\rho(r)$, o lo que es lo mismo, al área bajo la curva de la función $\rho(r)$ en el intervalo [0, 3]:



$$Nºhabitantes = \int_0^3 \rho(r)dr = \frac{30000 \cdot 3}{2} = \boldsymbol{45000\ habitantes}$$

2.- La densidad de coches ρ(x) (en coches por km) en los primeros 20 km de una autovía de salida de una gran ciudad viene dada por la función $\rho(x) = 600 - 5x - x^2$ siendo x la distancia en km al comienzo de la autovía.

a) *Escribe una suma de Riemann para hallar el número de coches en esos 20 km con cinco intervalos de igual longitud tomando como punto muestra el extremo derecho del intervalo.*

Solución:

$$S_n = h \cdot \rho(x_1) + h \cdot \rho(x_2) + h \cdot \rho(x_3) + h \cdot \rho(x_4) + h \cdot \rho(x_5)$$

$$con\ h = \frac{20}{5} = 4, \qquad y \quad 0 < x_1 = 4 < x_2 = 8 < x_3 = 12 < x_4 = 16 < x_5 = 20$$

$$S_n = 4 \cdot \sum_{i=1}^{5} (600 - 5x_i - x_i{}^2) = 4 \cdot \sum_{i=1}^{5} 600 + 4 \cdot \sum_{i=1}^{5} (-5x_i) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{5} (-x_i{}^2)$$

$$4 \cdot \sum_{i=1}^{5} 600 = 4 \cdot 5 \cdot 600 = 12000$$

$$4 \cdot \sum_{i=1}^{5} (-5x_i) = -4 \cdot 5 \cdot (4 + 8 + 12 + 16 + 20) = -1200$$

$$4 \cdot \sum_{i=1}^{5} (-x_i{}^2) = -4 \cdot (4^2 + 8^2 + 12^2 + 16^2 + 20^2) = -3520$$

$$\boldsymbol{S_n = 12000 - 1200 - 3520 = 7280 \ \ coches}$$

b) *Calcula el número de coches en esos 20 km mediante una suma de Riemann con n intervalos de igual longitud tomando como punto muestra el extremo derecho del intervalo.*

Ayuda:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + +(n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Solución:

$$S_n = h \cdot \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i),$$

$$con\ h = \frac{20}{n}, \qquad y \quad 0 < x_1 = \frac{20}{n} < x_2 = \frac{40}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{20(n-1)}{n} < x_n = \frac{20n}{n}$$

$$S_n = \frac{20}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{20i}{n}\right) = \frac{20}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} 600 + \sum_{i=1}^{n} \left(-5\frac{20i}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(-\left(\frac{20i}{n}\right)^2\right)\right]$$

$$\frac{20}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 600 = \frac{20}{n} \cdot 600 \cdot n = 12000$$

$$\frac{20}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(-5\frac{20i}{n}\right) = -\frac{2000}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = -\frac{2000}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = -1000 - \frac{1000}{n}$$

$$\frac{20}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{20i}{n}\right)^2 = -\frac{8000}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = -\frac{8000}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) = -\frac{8000}{3} - \frac{4000}{n} - \frac{4000}{3n^2}$$

$$S_n = 12000 - 1000 - \frac{1000}{n} - \frac{8000}{3} - \frac{4000}{n} - \frac{4000}{3n^2} = \frac{25000}{3} - \frac{5000}{n} - \frac{4000}{3n^2}$$

$$\boldsymbol{N^{\text{o}}\ de\ coches} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{25000}{3} - \frac{5000}{n} - \frac{4000}{3n^2}\right) = \frac{25000}{3} = \mathbf{8333}\ \boldsymbol{coches}$$

c) *Calcula el número total de coches en esos 20 km utilizando las propiedades de la integral definida y las expresiones de la integral que ya conoces. Compara este resultado con el obtenido en el apartado anterior.*

Solución:

$$\boldsymbol{N^{\text{o}}coches} = \int_0^{20} (600 - 5x - x^2)dx = \int_0^{20} 600dx - 5\int_0^{20} xdx - \int_0^{20} x^2dx =$$

$$= 20 \cdot 600 - 5 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{20} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{20} = 12000 - 5 \cdot [200 - 0] - \left[\frac{8000}{3} - 0\right] = \mathbf{8333}\ \boldsymbol{coches}$$

ANEXO III: SOLUCIONES PRUEBA ESCRITA

<u>Problema 1</u>

Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ *:*

a) *Halla la integral definida en el intervalo [0, 4] haciendo el límite de sumas de Riemann. Para ello toma como punto de cada subintervalo el extremo derecho.*

Ayuda: $1^2 + 2^2 + \cdots + +(n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

Solución:

$$S_n = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

$$con\ h = \frac{4}{n}, \qquad y \quad 0 < x_1 = \frac{4}{n} < x_2 = \frac{8}{n} < \cdots < x_n = \frac{4n}{n}$$

$$\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{\frac{4}{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{4i}{n}\right) = \frac{4}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4i}{n}\right)^2 = \frac{32}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{32}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{16}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{3} = \boldsymbol{\frac{32}{3}} + \boldsymbol{\frac{16}{n}} + \boldsymbol{\frac{16}{3n^2}}$$

$$\int_0^4 \boldsymbol{\frac{1}{2} x^2 dx} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{32}{3} + \frac{16}{n} + \frac{16}{3n^2}\right) = \boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

b) *A partir del resultado anterior, calcula:*

- $\int_{-4}^{4} \frac{1}{2}x^2 dx$
- $\int_0^4 (x^2 + 5) dx$

Solución:

$$\int_{-4}^{4} \frac{1}{2}x^2 dx = \int_{-4}^{0} \frac{1}{2}x^2 dx + \int_0^4 \frac{1}{2}x^2 dx \to f(x)\ simétrica\ respecto\ a\ x = 0 \to$$

$$\to \int_{-4}^{4} \boldsymbol{\frac{1}{2} x^2 dx = 2 \cdot} \int_0^4 \boldsymbol{\frac{1}{2} x^2 dx = 2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{3}}$$

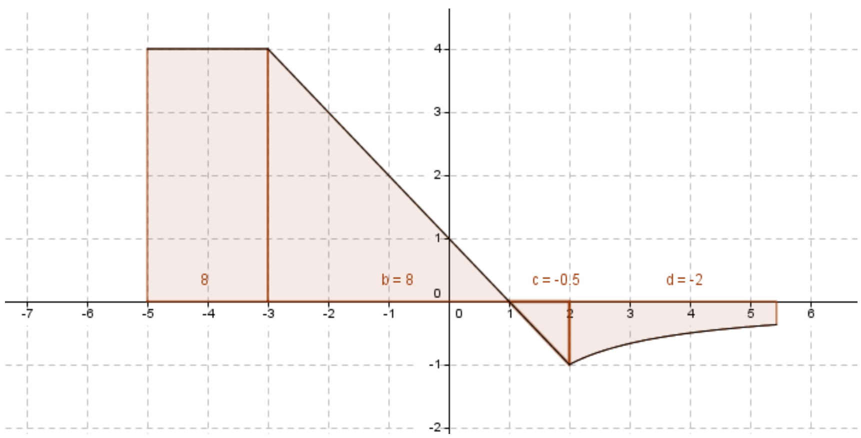
$$\int_0^4 (\boldsymbol{x^2+5})\boldsymbol{dx} = 2\cdot\int_0^4 \frac{1}{2}x^2dx + 5\cdot 4 = 2\cdot\frac{32}{3} + 20 = \boldsymbol{\frac{124}{3}}$$

<u>Problema 2:</u> *(3 puntos)*

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4, & si \quad x \le -3 \\ 1-x\,, & si \quad -3 < x \le 2 \\ \frac{-2}{x}, & si \quad 2 < x \end{cases}$

Dibuja la función y calcula el área total encerrada bajo la curva de la función en el intervalo [-5, 2e].

Solución:



$$Área = 4\cdot(5-3) + \frac{4\cdot 4}{2} + \frac{1\cdot 1}{2} + \int_2^{2e}\frac{2}{x}dx = \frac{33}{2} + \int_2^{2e}\frac{2}{x}dx$$

$$\int_2^{2e}\frac{2}{x}dx = 2\cdot[ln\,(x)]_2^{2e} = 2\cdot[ln(2e) - ln(2)] = 2\cdot[ln(2) + ln(e) - ln(2)] = 2$$

$$Á\boldsymbol{rea} = \frac{33}{2} + 2 = \frac{37}{2} = \boldsymbol{18,5\ u^2}$$

<u>Problema 3:</u> *(2 puntos)*

Se trasplanta un árbol y se observa que su tasa de crecimiento a los x años es de $1 - \frac{1}{x+1}$ *metros/año. Calcula los metros que ha crecido el árbol del segundo al quinto año.*

Solución

$$Metros\ que\ ha\ crecido\ el\ \text{á}rbol\ del\ 2º\ al\ 5º\ a\text{ñ}o = \int_2^5 (1 - \frac{1}{(x+1)^2})\, dx$$

$$\int_2^5 \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \int_2^5 1\, dx - \int_2^5 \frac{1}{(x+1)^2} dx = 3 - \int_2^5 \frac{1}{(x+1)^2} dx = 3 - \left[\frac{1}{x+1}\right]_2^5 =$$

$$= 3 - \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right] = 3 + \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{Metros\ que\ ha\ crecido\ el\ \text{á}rbol\ del\ 2º\ al\ 5º\ a\text{ñ}o = 3{,}17\ metros}$$

<u>Problema 4:</u> *(2 puntos)*

Un resorte elástico situado en un plano horizontal tiene un extremo fijo a una pared. Se tira del extremo libre hasta alargarlo 10 cm. Halla el trabajo (W) que realiza el muelle cuando su extremo libre pasa desde los 10 cm hasta los 5 cm respecto de la posición de equilibrio. La constante elástica del muelle es k = 2000 N/metro.

Ayuda: $W_{1\to 2}\ (Julios) = \int_{x1}^{x2} F(x)dx = \int_{x1}^{x2} (-kx)dx$

Solución

$$\boldsymbol{W_{1\to 2}\ (Julios)} = -2000 \int_{0,10}^{0,05} x dx = -2000 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0,10}^{0,05} = -1000 \cdot (0{,}05^2 - 0{,}1^2) = \boldsymbol{7{,}5\ J}$$