

Trabajo Fin de Máster

Una propuesta de estadística
unidimensional para 4º de E.S.O.

A one-dimensional statistical design for 4th
year of the secondary school

Autora

Sara Coscolluela López

Director

Pablo Beltrán Pellicer

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2021

Índice

A.	Sobre la definición del objeto matemático a enseñar	1
1.	Nombra el objeto matemático a enseñar	1
2.	Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.....	2
3.	¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?	4
B.	Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático ..	7
1.	¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?	12
2.	¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?	15
3.	¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumnado?	21
C.	Sobre los conocimientos previos del alumnado.....	23
1.	¿Qué conocimientos previos necesita el alumnado para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?	23
2.	La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumnado adquiriera esos conocimientos previos?	25
3.	¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que el alumnado posea esos conocimientos previos?	26
D.	Sobre las razones de ser del objeto matemático.....	29
1.	¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?	29
2.	¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?	30
3.	Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.	30
4.	Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	33
E.	Sobre el campo de problemas	34
1.	Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.	34
2.	¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?	59
3.	Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	60
F.	Sobre las técnicas	61

1.	Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.	61
2.	¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?	66
3.	Dichas técnicas, ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?	70
4.	Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	70
G.	Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)	71
1.	¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?	71
2.	¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?	72
3.	Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.	72
4.	Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	74
H.	Sobre la secuencia didáctica y su cronograma	75
I.	Sobre la evaluación	77
1.	Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.	78
2.	¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?	81
3.	¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?	83
4.	¿Qué criterios de calificación vas a emplear?	86
J.	Conclusiones	87
K.	Bibliografía	89
Anexo		92
1.	Preguntas restantes del <i>Kahoot</i>	92
2.	Examen de cuaderno	96
3.	Guion del proyecto	98
4.	Rúbrica proyecto (evaluación a pares)	99
5.	Algunas respuestas de la prueba inicial: <i>One Minute Paper</i>	99

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar

En esta memoria se van a tratar diferentes aspectos sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático escogido para desarrollar. Este objeto se trata de la *estadística unidimensional* para la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas del curso 4º E.S.O. Se intentará realizar una propuesta basada en una metodología activa y en la enseñanza a través de la resolución de problemas.

En primer lugar, se debe buscar la definición concreta a nivel curricular de 4º E.S.O. sobre el concepto de estadística. Para ello, se presentan diversas definiciones:

Definición 1– *Estadística*, Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística*.

La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final.

Definición 2– *Estadística*, Moore, D. S. (1991). *Teaching Statistics as a respectable subject*.

La estadística es la ciencia de los datos. Con más precisión, el objeto de la estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos. La estadística es una disciplina científica autónoma, que tiene sus métodos específicos de razonamiento. Aunque es una ciencia matemática, no es un subcampo de la Matemática. Aunque es una disciplina metodológica, no es una colección de métodos.

Una vez vistas estas definiciones del objeto matemático estadística, se plantea una tercera definición que se ajuste y se comprenda por un alumnado de 4º E.S.O.

Definición 3– *Estadística*

La estadística es la ciencia que se encarga de recoger, organizar, estudiar, representar y analizar conjuntos de datos, principalmente empíricos, y, posteriormente, trabajar estos datos para buscar conclusiones de los mismos y llevar a cabo la toma de decisiones correspondiente tras su análisis.

Dependiendo del problema a estudiar y del objetivo de este, se clasifica la estadística en dos tipos: estadística descriptiva y estadística inferencial.

Por un lado, se puede considerar que la estadística *descriptiva* se encarga de la toma de los datos de un conjunto, organizarlos en tablas, representarlos gráficamente, y calcular los parámetros estadísticos correspondientes que informen de forma global el conjunto estudiado.

Por otro lado, la estadística *inferencial* estudia una muestra bien definida que pueda representar correctamente a la población. Para ello, a través de lo obtenido a partir

de una muestra, realiza conclusiones para la población y aporta el grado de fiabilidad de estas conclusiones.

En el curso de 4º E.S.O., no se considera la estadística inferencial debido a la complejidad que requiere el escoger la muestra más representativa posible, el análisis de sus datos, así como la toma de decisiones, aunque tal vez podría ser posible una comprensión informal de la inferencia, pero en este estudio solo se centrará la enseñanza en la parte descriptiva de la estadística unidimensional.

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático

Como se ha mencionado anteriormente, el objeto matemático elegido es la estadística unidimensional para la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas del cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria.

En la *Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón* se establecen los contenidos exigibles en 4º de la E.S.O. sobre la enseñanza de estadística en los contenidos del Bloque 5: Estadística y probabilidad.

Se han realizado diversos estudios sobre el currículo español en lo que concierne a la estadística de Educación Secundaria Obligatoria, como por ejemplo en Batanero, Gea, Arteaga y Contreras (2014).

Contenidos 4º E.S.O. – Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas – Bloque 5: Estadística y probabilidad:

- Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación.
- Interpretación, análisis y utilidad de las medidas de centralización y dispersión.
- Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
- Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.
- Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio.
- Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.
- Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagramas de árbol.

De todos los contenidos que se trabajan en el bloque 5, para el objeto matemático que se ha seleccionado en esta memoria, estadística unidimensional, se trabajarán los tres primeros del listado anterior. Aunque se les sumará a estos contenidos la interpretación, análisis y utilidad de las medidas de posición.

Por otro lado, respecto a los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje se van a seleccionar del currículo solamente los relacionados con el objeto matemático que se ha seleccionado.

Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de 4º E.S.O. – Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas – Bloque 5: Estadística y probabilidad:

- Crit.MAAP.5.1. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación.
 - Est.MAAP.5.1.1. Utiliza el vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística.
 - Est.MAAP.5.1.3. Emplea el vocabulario adecuado para interpretar y comentar tablas de datos, gráficos estadísticos y parámetros estadísticos.
- Crit.MAAP.5.2. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales en distribuciones unidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo), valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.
 - Est.MAAP.5.2.1. Determina si los datos recogidos en un estudio estadístico corresponden a una variable discreta o continua.
 - Est.MAAP.5.2.2. Elabora tablas de frecuencias a partir de los datos de un estudio estadístico, con variables discretas y continuas.
 - Est.MAAP.5.2.3. Calcula los parámetros estadísticos (media aritmética, recorrido, desviación típica, cuartiles, ...), en variables discretas y continuas y es capaz de obtener conclusiones sencillas basándose en ellos.
 - Est.MAAP.5.2.4. Representa gráficamente datos estadísticos recogidos en tablas de frecuencia, mediante diagramas de barras e histogramas.

Tanto para el alumnado que el curso anterior a 4º E.S.O. cursara la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas como para el alumnado que cursara Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, según el currículo vigente, respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático que se quiere analizar, estadística unidimensional, habrían adquirido los conocimientos necesarios para poder conseguir los objetivos de 4º E.S.O. En estas asignaturas de 3º E.S.O. se estudian las fases y tareas de un estudio estadístico (población, muestra, variables estadísticas, ...), gráficas estadísticas, frecuencias absolutas, relativas y acumuladas, parámetros de centralización, posición y dispersión, etc. Por tanto, se considera que, si el alumnado ha obtenido los objetivos del curso anterior, puede proseguir adquiriendo conocimientos sobre estadística unidimensional como el análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación o la interpretación, análisis y utilidad de las medidas de centralización y dispersión, pues tiene consolidadas las bases de la estadística, las nociones generales básicas.

Además, en este curso se consolidan los conceptos adquiridos anteriormente para poder proseguir con la estadística bidimensional en Bachillerato.

Tras este breve recorrido sobre los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, que se realizan para el objeto de estadística unidimensional, se ha

reflexionado sobre ello llegando a la siguiente conclusión. Considero que, dado que la asignatura se denomina Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de 4º E.S.O., y que existen diversas posibilidades sobre hacia dónde se dirigirá este alumnado (bachillerato, ciclos, ...), se debería enfatizar más el saber analizar datos y gráficos estadísticos en medios de comunicación, redes sociales, prensa, etc. Se crea entonces la necesidad de proporcionar al alumnado las técnicas, saberes y conocimientos necesarios para poder enfrentarse de forma individual a una noticia y poder analizar e interpretar si esa noticia estadística es correcta o errónea, por qué, cómo debería ser, si la representación gráfica es adecuada o no, según el tipo de variable estadística que sea, etc. Para ello podría realizarse, por ejemplo, un proyecto sobre falacias estadísticas, donde se podría recoger todas estas incertidumbres que aparecen al pensar si el alumnado de verdad sabe interpretar esos datos y gráficos cuando finaliza la unidad didáctica de estadística unidimensional.

3. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

A continuación, se muestra de forma breve, ya que se verá detallado más adelante, los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se tiene intención de trabajar con esta propuesta didáctica.

Respecto a los *campos de problemas* que se trabajarán, se abarca un amplio abanico del currículo. Se van a renombrar mediante siglas para su posterior uso en otras secciones.

- Campos de problemas sobre nociones generales del objeto matemático:
 - C.P.N.G.: Elección adecuada de una variable a estudiar, así como de los elementos característicos que componen una población.
- Campos de problemas sobre medidas de centralización:
 - C.P.C.1: Elección de un representante adecuado: valoración de una medida de centralización frente a otras en diferentes condiciones.
 - C.P.C.2: Construcción de muestras estadísticas que presenten unos parámetros determinados.
- Campos de problemas sobre medidas de dispersión:
 - C.P.D.1: Elección de las medidas adecuadas para cuantificar la dispersión, medir la regularidad, de un conjunto de datos.
 - C.P.D.2: Diferenciar conjuntos de datos a partir de la dispersión.
- Campos de problemas sobre medidas de posición:
 - C.P.P.1: Elección de un representante adecuado que permita dividir la población en los grupos necesarios para la toma de decisiones de su estudio, así como para posibles categorizaciones de dicha población o estudio.
- Campos de problemas sobre medidas/parámetros estadísticos de forma general (centralización, dispersión, posición).

- C.P.M.1: Resumir la información de una muestra empleando de forma adecuada los parámetros estadísticos de centralización, dispersión y posición.
- C.P.M.2: Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
- Campos de problemas sobre representaciones gráficas.
Se intentará que estos campos abarquen los cuatro niveles definidos por Friel *et al.* (2001), así como las técnicas asociadas: leer los datos, leer entre los datos, leer más allá de los datos y leer detrás de los datos.
 - C.P.G.1: Elección correcta del gráfico dependiendo de qué parámetros estadísticos se quieren representar y el tipo de variables estadísticas.
 - C.P.G.2: Analizar distintos tipos de gráficos y responder cuestiones sobre ellos.
 - C.P.G.2.1: Extraer las frecuencias absolutas de los valores en un diagrama de barras (leer los datos).
 - C.P.G.2.2: Extraer las frecuencias absolutas de los datos representados en un histograma (leer los datos).
 - C.P.G.2.3: Obtener la moda interpretando un histograma u otro tipo de gráfico (leer entre los datos).
 - C.P.G.2.4: Obtener la mediana interpretando un diagrama de caja y bigotes (leer entre los datos).
 - C.P.G.2.5: Determinar la simetría de una distribución a partir de su diagrama de caja (leer más allá de los datos).
 - C.P.G.2.6: Interpretar y justificar los cambios producidos entre dos diagramas de barras realizados en distintos tempos, por ejemplo, pero que representen la misma variable estadística (leer detrás de los datos).
 - C.P.G.3: Reconocimiento de falacias estadísticas en prensa, televisión, etc.

En cuanto a las *técnicas* que se desarrollarán en este informe:

- T.1: Identificar los elementos que componen una población: individuo, muestra, población, etc.
- T.2: Reconocer la variable estadística a estudiar y su tipo: cualitativa o cuantitativa (discreta o continua).
- T.3: Cálculo correcto de medidas de centralización, dispersión y posición.
- T.4: Ejercicios y problemas contextualizados para hallar parámetros estadísticos, así como su análisis, discusión, comparación e interpretación correcta de las medidas a través de tablas de frecuencias.
- T.5: Interpretación y representación gráfica de parámetros estadísticos dependiendo del gráfico correspondiente (diagrama de barras, histograma, diagrama de caja y bigotes, etc.).

- T.6: Construcción correcta de los distintos tipos de gráficos.
- T.7: Análisis de medidas de dispersión entendiéndolas como la concentración o la lejanía de los datos en torno a la media, variabilidad de los datos.
- T.8: Conocer los parámetros de posición no centrales como puntos también característicos de una distribución como lo son los valores centrales.
- T.9: Ser capaz de describir un gráfico o resumir la información que se pueda extraer de él (correspondería al nivel: leer los datos).
- T.10: Interpretar e integrar los datos de un gráfico encontrando relaciones entre subconjuntos de datos (leer entre los datos).
- T.11: Saber realizar predicciones relacionando datos u observando y comparando parámetros estadísticos que se hayan calculado (leer más allá de los datos).
- T.12: Integrar la información extraída para valorar el modo de recogida de los datos, así como el análisis que supone la toma de decisiones (leer detrás de los datos).
- T.13: Resolución de ejercicios o problemas contextualizados desde las TIC (en concreto, hojas de cálculo y Desmos). En el caso de las hojas de cálculo, se quiere que resuelvan las actividades, organizando en tablas de frecuencias y/o gráficos la información.
- T.14: Justificación de fórmulas si son necesarias aplicarlas.

Respecto a las *tecnologías* que justifican las técnicas anteriores:

- TG.1: Definiciones informales sobre nociones generales de estadística mediante argumentos, por parte del alumnado, que diferencie la parte (individuo) del todo (muestra o población). Así como la capacidad de razonar y estudiar los tipos de variables estadísticas relacionándolas con su día a día.
- TG.2: Definiciones coloquiales sobre las medidas de centralización, razonando y entendiendo las ventajas e inconvenientes de usar medidas centrales en un estudio estadístico.
- TG.3: Definiciones informales sobre las medidas de dispersión, comprendiendo y argumentando las diferencias con otros parámetros estadísticos y entendiendo la robustez de estas medidas frente a las de centralización o posición.
- TG.4: Definiciones coloquiales sobre las medidas de posición, y argumentación sobre las posibles comparaciones a la hora elegir correctamente un parámetro estadístico.
- TG.5: Relacionar el significado que toma una medida de dispersión con la concentración o la lejanía de los datos en torno a la media, variabilidad de los datos.
- TG.6: Interpretar la definición de las medidas de posición analizándolas verbalmente o gráficamente.
- TG.7: Considerar aspectos relevantes para la construcción de un gráfico estadístico (elección correcta del tamaño del intervalo, ...).

- TG.8: Construcción de los distintos gráficos según lo que se quiera representar y el tipo de variable estadística.
- TG.9: Razonamientos informales de carácter verbal que justifique la toma de decisiones, la elección de qué parámetros estadísticos utilizar, el reconocimiento de falacias estadísticas, la elección de la representación gráfica, entre otros.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Actualmente existe un gran número de publicaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística, no solo por parte de la comunidad de educación matemática sino también por los propios estadísticos/as. Pero el número de investigaciones sobre la didáctica de la estadística sigue siendo bajo en comparación con las existentes en otras ramas de las matemáticas (Batanero, 2001).

La estadística se enseña actualmente en todos niveles educativos debido a la importancia y la necesidad, generada por la UNESCO y otras instituciones, de proporcionar al alumnado una cultura estadística permitiendo a éste como ciudadano desarrollarse en su vida profesional y personal, así como, facilitando los conocimientos necesarios para que el estudiante pueda participar en la sociedad de la información como indica Batanero (2013).

Se ha realizado una revisión bibliográfica sobre la investigación de la estadística en educación matemática de Educación Secundaria Obligatoria y se detallarán algunos aspectos que se han considerado relevantes respecto a la enseñanza, aprendizaje o epistemología de la estadística.

Respecto al *aprendizaje*, en diversas investigaciones se ha descrito que, para el alumnado de secundaria, la estadística es fundamental, ya que le proporciona saberes necesarios para la vida cotidiana. La comprensión de las ideas estadísticas fundamentales se considera que se requieren, principalmente, en la resolución de problemas estadísticos y que pueden llevarse a cabo en varios niveles educativos (Batanero, 2013). A esto, como indica esta autora, se le suma la importancia de la competencia de análisis de datos, comprender los estudios estadísticos realizados por el alumnado más que realizar unos cálculos concretos. Por tanto, se puede deducir que, es totalmente necesario que el alumnado sepa interpretar todos esos resultados que obtiene al realizar los cálculos pertinentes, es decir, saber traducir el lenguaje matemático a la representación que éste tiene en el día a día.

Pero, la importancia no se encuentra toda en comprender esos estudios estadísticos, sino en comprenderlos bien, asimilarlos, interpretarlos y saber explicarlos, ya que numerosas investigaciones afirman que muchos estudiantes tienen concepciones incorrectas sobre estadística o no son capaces de interpretar de forma correcta los resultados estadísticos que obtienen, como citan, por ejemplo, Shaughnessy, Garfield y Greer (1996).

Según Batanero (2013), una explicación posible, de estas dificultades del alumnado, reside en la enseñanza rutinaria de la estadística que enfatiza las definiciones y fórmulas sin prestar la atención necesaria que requiere la interpretación de la actividad, así como el contexto del origen de los datos. Es decir, esta estadística rutinaria está alimentada de una estadística sin sentido, una estadística en la que no se tiene en cuenta la naturaleza de los datos o del estudio que se quiere realizar, que es una de las bases de la estadística.

Batanero (2013) cita a Moore (1991) indicando que la estadística es una disciplina científica autónoma, que tiene sus métodos específicos de razonamiento. Apoyando esta afirmación en que la estadística no ha surgido de la matemática, sino de una serie de ciencias que se han apoyado en la matemática. Más aún, afirma que la estadística toma conceptos matemáticos para el desarrollo de sus métodos, sin embargo, la matemática no usa conceptos estadísticos.

La mayoría de las investigaciones analizadas para este estudio, destacan la importancia de la estadística en el alumnado concretando, con especial interés, la aportación que la estadística da al alumnado permitiendo ser una persona crítica y capaz de analizar y entender qué se muestra en los medios de comunicación referente a gráficas o datos estadísticos. Para ello, principalmente, estas investigaciones se apoyan en el estudio de las dificultades que encuentra el alumnado en el aprendizaje de conocimientos estadísticos, como se observa en Batanero y Godino (2002) y que se detallará de forma más concreta en el apartado B.3 sobre las *dificultades y errores de los estudiantes*.

Por otro lado, respecto a la *enseñanza*, tal vez debamos preguntarnos no solo si el alumnado es capaz de comprender un estudio estadístico, sino si el docente es también capaz de ello. Esta misma pregunta se planteó Rivas (2014) observando que Watson (2001) ya había realizado distintas investigaciones con docentes de primaria y secundaria referente a la estadística. En sus resultados, conviene destacar la apreciación muy limitada que tenían algunos profesores sobre la forma en que su alumnado podía responder preguntas como encontrar un error en un gráfico de sectores o identificar un error en un informe relacionado con la media sobre el muestreo de una población. Este resultado le llevó más tarde a Watson (2005) a evaluar el conocimiento de los docentes para conseguir una alfabetización cuantitativa, es decir, la habilidad que tenían para conectar la matemática con aspectos de la vida cotidiana.

Cobo (2015) cita en su trabajo cómo Bakker y Gravemeijer, Konold y Higgins y Watson y Moritz, encontraron que el alumnado encontraba de forma intuitiva cómo comparar conjuntos de datos antes de introducirles las nociones generales de la estadística como la media, mediana, etc. Por lo que se veía la necesidad de que fuera el alumnado quien comparara los conjuntos de datos desde el principio de su educación estadística antes de ser introducida por los docentes.

Para una adecuada enseñanza de la estadística, Arce, Conejo y Muñoz-Escolano (2019a), destacan la importancia y la necesidad de que el docente conozca y reconozca los niveles descritos por Friel *et al.* (2001) respecto a la comprensión gráfica estadística: leer los datos, leer entre los datos, leer más allá de los datos y leer detrás de los datos (indicados de menor a mayor y descritos en Arce, Conejo y Muñoz-Escolano (2019a)). Estos autores consideran esa necesidad, y la justifican detallando que el docente no debe quedarse en tareas que requieran únicamente los niveles más bajos (Friel *et al.*, 2001), que aparecen con mayor frecuencia, sino que hay que introducir e incluir actividades que favorezcan los dos niveles más altos.

Por último, desde la *epistemología*, es decir, cómo se justifica y cómo se desarrolla la estadística, cuál es la naturaleza del conocimiento estadístico, se considera obvia la presencia de la estadística en el entorno del alumnado de secundaria.

Es importante que el alumnado conozca las bases de la estadística y entienda en todo momento qué se está haciendo y para qué, ya que después surgen diversos problemas basados en un marco epistemológico inadecuado, como ocurre frecuentemente cuando se considera que la estadística puede validar investigaciones o probar la veracidad de hipótesis (Méndez, 2012).

Es obvio que, la gran cantidad de recogida de datos y la realización de diversos estudios con esos datos recogidos, desde distintas instituciones y organismos, hace presente la estadística, de forma natural, en el día a día del alumnado. Esta presencia de la estadística en la vida cotidiana del alumnado se debe a la forma en que presentan actualmente la información los medios de comunicación, que son principalmente a través de tablas y gráficos estadísticos ya que se consideran herramientas muy potentes para poder mostrar información de forma rápida y concisa, como observan Arce, Conejo y Muñoz-Escolano (2019a).

Es por ello que se puede convertir esta información, presentada en estos medios, en una forma útil para aprender estadística en el aula, además de convertirse en imprescindible la enseñanza de la estadística en el aula construyendo un alumnado capaz de interpretar lo que ocurre en su día a día y de poder representar, a través del uso de nuevas tecnologías, por sí mismo, esa información.

Begué (2019) especifica que diversos autores mencionan el recorrido que ha tenido la estadística en la enseñanza y la importancia que tiene este objeto matemático en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado. Este hecho viene fundamentado en que las aplicaciones de la estadística son frecuentes tanto en el ámbito profesional como personal, por lo que se necesita una comprensión elemental para que el alumnado pueda desenredarse en este mundo repleto de información.

La escasa cultura estadística, traducida así por Batanero (2004), del inglés *statistical literacy* (alfabetización estadística), es una preocupación que los estadísticos

poseen pues sienten la necesidad de difundir la estadística, no solo como una técnica para tratar los datos de forma cuantitativa sino como una cultura, es decir, como capacidad de comprender la abstracción lógica que hace posible el estudio cuantitativo de los problemas colectivos. Esta preocupación ha desembocado en diversos estudios y artículos de investigación donde se considera la gran importancia que tiene la cultura estadística en el alumnado, siendo considerada, por diversos autores, como el conjunto de competencias, conocimientos y actitudes mínimas sobre estadística que un ciudadano debe poseer en esta sociedad de información, ya que estas nociones le permiten enfrentarse y afrontar los problemas estadísticos de su día a día y de la sociedad (Begué, 2019).

Respecto a las aportaciones de la innovación en Educación Matemática sobre el objeto a estudiar, se encuentra una gran cantidad de artículos donde se prioriza que una forma adecuada de presentar la estadística unidimensional es a través de proyectos. Por ejemplo, Batanero y Díaz (2011) presentan y defienden el aprendizaje de estadística basado en proyectos y proponen diversas ideas de éstos debidamente secuenciados, no solamente para el curso de 4º E.S.O., como interesa en este estudio, sino para todos los cursos desde primaria hasta bachillerato. Destacan que la historia de la estadística muestra como ésta recibe ideas desde distintas áreas ya que trata de resolver problemas desde la transmisión de caracteres hereditarios hasta la medida de la inteligencia, entre otros, y que para resolverlos se han creado métodos y nociones estadísticas generalizados como la correlación o el análisis factorial. Otro motivo, por el que defienden el aprendizaje basado en proyectos para la estadística, es que este objeto matemático es inseparable de sus aplicaciones como se verá detallado más adelante con Batanero (2013).

Cabe destacar los puntos positivos que muestran Batanero y Díaz (2011) del aprendizaje basado en proyectos, ya que, como indican que sugiere Holmes (1997) si el alumnado trabaja la estadística por medio de proyectos consigue:

- Los proyectos permiten contextualizar de forma natural la estadística y hacerla más relevante, ya que, al surgir los datos de un problema real y contextualizado, estos tienen significado y cobra sentido el tener que interpretarlos.
- Los proyectos refuerzan el interés, y más si es el propio alumnado el que elige el tema de su proyecto estadístico.
- Como se tratan datos reales recogidos por el alumnado, se aprende mejor el significado de datos reales y aparecen ideas, de forma natural, que no surgen en problemas descontextualizados, como la precisión, variabilidad, fiabilidad, sesgo, etc.
- Además, el estudiante comprende que la estadística no se reduce a contenidos únicamente matemáticos, sino que los conocimientos matemáticos le permiten afrontar problemas reales y usarlos para poder entender la estadística.

Estas autoras presentan un contenido de gran utilidad para cualquier docente de matemáticas pues de forma secuenciada muestran desde cómo elegir un proyecto y trabajar con él hasta fuentes de datos o herramientas informáticas útiles para trabajarlos.

Batanero (2013) considera que la mejor forma de que el alumnado pueda desarrollar su sentido estadístico es utilizando la metodología de aprendizaje basado en proyectos. Estos deben estar bien planteados por el profesorado o escogidos libremente por el alumnado. La razón de ser de esta idea, viene fundamentada por la necesidad de presentar diferentes fases de una investigación estadística que el propio alumnado puede elaborar: plantear un problema, decidir sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema estudiado. De esta manera, la estadística tradicional conocida por el alumnado basada en técnicas descontextualizadas, aplicaciones a problemas difíciles de encontrar en la vida real o empleo de fórmulas sin fundamento, se queda a un lado para hacer frente al estudio real de los datos que ellos mismos recogen sobre temas más actualizados y de su interés propio.

Batanero (2013) explicita que la estadística es inseparable de sus aplicaciones según Anderson y Loynes (1987). Además, recalca la necesidad de diferenciar entre conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La autora hace énfasis en que es mucho más difícil tener la habilidad para poder utilizar los conocimientos matemáticos que se tienen pues requiere, además de utilizar los conocimientos técnicos, como realizar gráficas o calcular una media, saber utilizar los conocimientos estratégicos para poder conocer en qué momento se debe utilizar un concepto o realizar un tipo de gráfico u otro. Así es como defiende su estrategia de poder realizar la estadística en secundaria a través de proyectos, dejando a un lado los problemas y ejercicios de los libros de texto. Ya que los primeros necesitan ambos tipos de conocimientos, mencionados anteriormente, mientras que en los libros de texto basta con utilizar los conocimientos técnicos.

Para niveles superiores de educación, nivel universitario, se han realizado estudios verificando que el uso de herramientas informáticas y tecnológicas favorecen el aprendizaje de la estadística. Ya que ayudan a entender y razonar qué ocurre con un conjunto de datos dado un problema contextualizado en la vida real como sucede en el estudio de Inzunza (2010), o como ocurre en el realizado por Organista y Cordero (2006) con tres cursos diferentes de estadística a nivel universitario.

Por tanto, es clara la necesidad de que el alumnado desde temprana edad tenga conocimientos o nociones generales sobre estadística debido a la presencia de esta en su vida diaria, creando un ciudadano crítico y con menos posibilidades de ser engañado en medios de comunicación o redes sociales. Pero más importante es que sepa razonar y entender lo que está ocurriendo, es decir, poder ir más allá de los conceptos básicos de estadística, que sea capaz de lo que puede suponer un estudio estadístico: analizar, interpretar, tomar decisiones y saber comunicarlas.

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

En la actualidad, se puede introducir la estadística unidimensional de forma natural, ya que se puede hacer referencia a la necesidad y utilidad de esta en la vida cotidiana. Es decir, en mayor proporción puede darse una finalidad ética, o sea aprender y entender estadística para crear unos ciudadanos críticos y con valores democráticos.

A continuación, se analizan tres libros de texto distintos de diferentes años y editoriales para el curso en el que se está desarrollando esta memoria, 4º E.S.O.

El análisis se ha realizado con la intención de comparar la enseñanza del objeto elegido en el currículo vigente con el currículo de los libros de texto estudiados, así como la comparativa existente entre los propios libros. Se han seleccionado los siguientes:

- Amigo, C., Peña, P., Pérez, A., Rodríguez, A., y Sivit, F. (1995). *Matemáticas 4º E.S.O.* Madrid: McGraw-Hill / Interamericana de España.
- Anzola, M., Alcaide, F., Peralta, J., y Vizmanos, J. R. (2008). *Matemáticas 4º E.S.O.* Madrid: SM.
- Colera Cañas, R., Colera Jiménez, J., Gaztelu, I., y Oliveira, M. J. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas 4º E.S.O.* Madrid: Grupo Anaya.

Cuando se precise, para hacer referencia a estos libros, el libro de 1995 se nombrará como libro A, el del año 2008 como libro B y el más actual, del 2016, se denominará libro C, para mayor fluidez en el discurso.

Para elaborar este análisis se han consultado diversos artículos donde ya se ha estudiado con anterioridad libros de texto de secundaria sobre el objeto matemático en cuestión, es decir, la estadística (Ortiz, Albanese y Serrano (2016), Ortiz, Castro, Garzón, Albanese y Mohamed (2019), y Begué (2019)).

Dos de los artículos analizados realizan una comparación según el tipo de lenguaje presente en cada libro texto, distinguiendo por:

- Lenguaje verbal.
- Lenguaje numérico.
- Lenguaje simbólico.
- Lenguaje tabular.
- Lenguaje gráfico.

Para el análisis que se va a realizar, se hará una adaptación del análisis que ofrece Begué (2019) en su tesis doctoral sobre los objetos matemáticos relacionados con el muestreo en los Decretos de Enseñanzas Mínimas (Tabla 1.5.3.), ajustándose en este caso a la estadística unidimensional y a un análisis de campos de problemas, técnicas y tecnologías.

Veamos cuál es la principal razón de ser de cada uno de los libros analizados.

Libro A:

La razón de ser en el primer libro viene dada a través de un texto donde se enfatiza qué se va a estudiar en la unidad, qué procedimientos se practicarán, qué importancia tiene lo que se va a ver, qué contenidos se ven y qué se necesita conocer previamente, ver Figura 1.

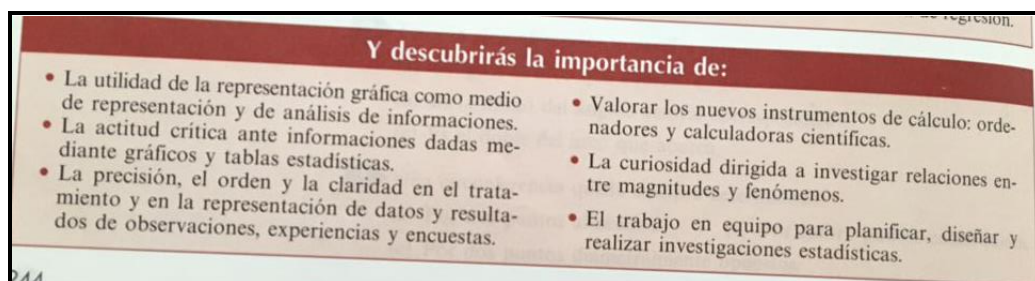


Figura 1: Razón de ser I, libro A.

Por otro lado, comienza con el objeto matemático mediante una introducción histórica. Comenta el contar diagonales de los polígonos regulares para obtener una tabla con una secuencia y así introducir el método de inducción y poder compararlo con la inferencia estadística ejemplificando mediante el botánico Mendel (1865). Y, con ello, representa a la estadística a través de la proporcionalidad enfatizando la importancia que ha tenido la estadística en la historia.

Por último, se introduce el objeto matemático mediante dos ejercicios que se deben resolver con los conocimientos de cursos anteriores para introducirse así, el alumnado, en las ideas de la nueva unidad. Ver uno de ellos en la Figura 2.

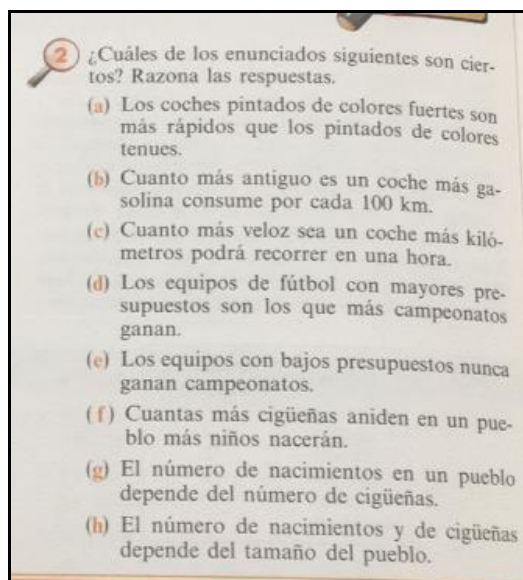


Figura 2: Razón de ser II, libro A.

Libro B:

En este libro de texto se introduce el objeto matemático de diversas formas:

- Mediante una contextualización de la vida real con un ejemplo de tratamiento de residuos, de forma verbalizada, sin datos, ni gráficos (ver Figura 3).

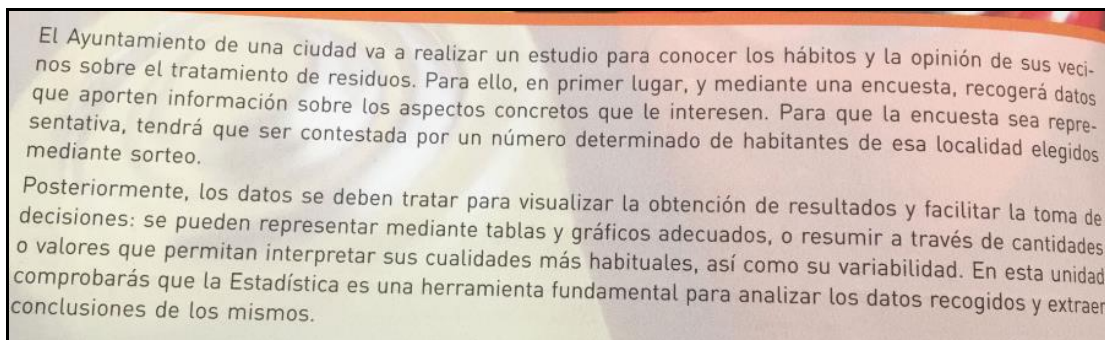


Figura 3: Razón de ser I, libro B.

- A través de un recordatorio sobre nociones generales de estadística.
- Con tres problemas, dos de ellos sin datos, problemas generalizados, y el otro a través de un gráfico. Este último presente en la Figura 4.

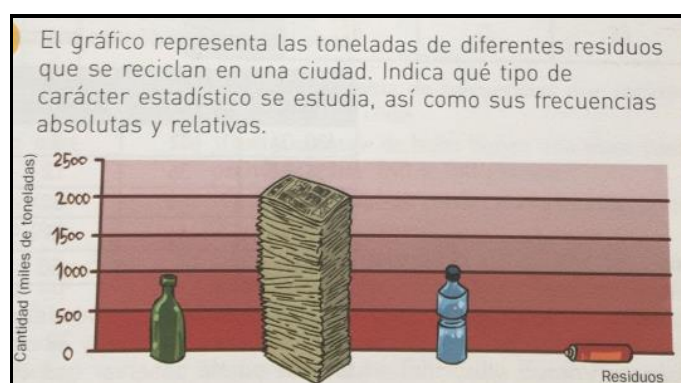


Figura 4: Razón de ser II, libro B.

Libro C:

Este es el libro más actual de los tres y la razón de ser de este se basa totalmente en una contextualización histórica (ver Figura 5). Presenta diferentes contextos históricos dando significado y explicando la utilidad de la estadística en la ciencia analizando su origen y evolución. Para ello, se presentan varios ejemplos: John Grant, Neumann, Quetelet, Ronald Fisher y Karl Pearson.

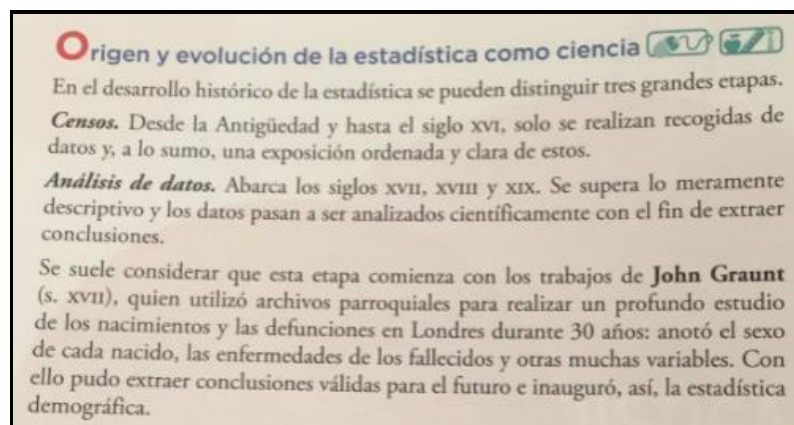


Figura 5: Razón de ser I, libro C.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

A continuación, se muestran los campos de problemas, técnicas y tecnologías para trabajar la estadística unidimensional que se ha analizado en los tres libros de texto.

Tras la lectura de Begué (2019) se realiza un mismo análisis sobre los *campos de problemas* para los tres libros de texto, indicando cuáles sí aparecen o cuáles no en cada uno de los libros. En la Tabla 1 se muestra, en la primera columna, los campos de problemas que se han observado que están presentes en alguno de los tres libros y, a continuación, se marca con una X si aparece en el libro A, B y/o C, y con un guion, -, si no aparece.

Campos de problemas	Libros de texto		
	Libro A	Libro B	Libro C
Reconocimiento de variables	X	X	X
Cálculo de parámetros de centralización	X	X	X
Cálculo de parámetros de dispersión	X	X	X
Cálculo de parámetros de posición	X	X	X
Aplicación de técnicas	X	X	X
Polígono de frecuencias	X	-	-
Representar distribución de frecuencias en tablas	X	X	X
Representar distribución de frecuencias en gráficas	X	X	X
Otros gráficos: pirámides de población	X	-	-
Relación entre áreas e histogramas	X	-	-
Interpretación de gráficos	X	X	X
Interpretación de datos a través de tablas dadas	X	X	-
Interpretación de parámetros estadísticos	X	X	X

Asociación de tablas o contextos a gráficos	X	-	X
Resolución de ejercicios descontextualizados	-	X	X
Resolución de ejercicios contextualizados	X	X	X
Resolución de problemas contextualizados	X	X	X
Actividades de calcular el porcentaje que ocupa una parte del total del conjunto de datos	-	X	-
Ejercicios de razonamiento	X	X	X
Ejercicios de comparación de resultados o de razonamiento sobre ventajas y desventajas que ofrece un estudio estadístico u otro	X	-	X
Utilizar herramientas tecnológicas	-	-	X
Instrucciones y ejercicios de manejo de la calculadora	X	-	-
Ejercicios de autoevaluación basados en aplicar técnicas	-	X	-
Actividades de autoevaluación basadas en el razonamiento a través de los saberes estadísticos	X	-	-

Tabla 1: Campos de problemas de los libros de texto analizados.

Una vez realizado este análisis sobre los campos de problemas se deben destacar alguno de ellos.

En primer lugar, el campo denominado como Utilizar herramientas tecnológicas, aunque ha sido señalado en el Libro C, el más actual, se debe mencionar que no se emplea en las actividades de forma explícita, es decir, no aparecen actividades, ejercicios o problemas donde explícitamente ponga que se deba realizar con alguna herramienta informática, sino que en algunas páginas de la unidad, se alude a que hay actividades de *Geogebra* en la web sobre el concepto estadístico que aparece en la página dada.

En segundo lugar, se observa que el libro más longevo, Libro A, es realmente el más completo y, concretar que, es el único que no contiene ni un solo ejercicio descontextualizado en el que se pida repetir unas técnicas para poder aprender una fórmula, como sí ocurre en los otros dos libros.

Debido a que, bajo mi punto de vista, el Libro A es el más completo y el que mayor razonamiento estadístico exige al alumnado, se adjunta, a continuación, algunos

de los ejercicios de autoevaluación que aparecen en los libros A y B para poder compararlo (Figuras 6, 7, 8 y 9).

1 Las desviaciones típicas de los pesos de dos grupos de alumnos, A y B, con 200 integrantes cada uno son, respectivamente, 2 y 5 kilogramos. ¿Qué tamaño de muestra consideras más adecuado para estudiar estas poblaciones?

(a) 20 alumnos para A y 40 para B.
 (b) 20 alumnos para A y otros 20 para B.
 (c) 40 alumnos para A y 20 para B.

Figura 6: Ejercicio autoevaluación I, libro A.

5 En la siguiente tabla figuran las medias y las desviaciones típicas de dos poblaciones:

	Población A	Población B
\bar{x}	11	11
σ	2	6

¿Cuál de las siguientes afirmaciones son ciertas?

(a) La media de B es más representativa que la de A.
 (b) La media de B es tan representativa como la de A.
 (c) La media de B es menos representativa que la de A.

Figura 7: Ejercicio autoevaluación II, libro A.

AUTOEVALUACIÓN

1 Se ha hecho un estudio para determinar el grupo sanguíneo de 40 personas, con los siguientes resultados.

A	A	O	B	O	A	O	A	B	O
A	B	A	B	A	B	B	AB	A	B
O	O	A	B	AB	O	A	B	AB	A
O	B	A	AB	A	B	A	B	A	A

Representa los datos mediante un diagrama de sectores.

Figura 8: Ejercicio autoevaluación I, libro B.

4 La siguiente tabla de datos indica el número de multas de tráfico impuestas a 200 conductores.

N.º de multas	0	1	2	3	4	5
N.º de conductores	90	40	35	20	12	3

a) Completa la tabla con las frecuencias absolutas acumuladas.
b) Calcula la media y la desviación típica.
c) Representa los datos mediante un diagrama de barras.

Figura 9: Ejercicio autoevaluación II, libro B.

Se observa claramente, que el Libro A presenta actividades de mayor razonamiento y pensamiento crítico estadístico, mientras que el Libro B se basa prioritariamente en repetición de técnicas para calcular parámetros estadísticos, ..., sin necesidad de tener que razonar nada.

Respecto a las *técnicas* empleadas en los libros de texto analizados, a continuación, se muestra por libro las más destacadas.

Libro A:

- Elaboración de tablas con datos agrupados en intervalos.
- Representación gráfica.
- Aplicación de pocas fórmulas siempre después de una justificación de éstas.
- Explicación del uso de la calculadora para ciertos parámetros estadísticos.
- La media y su representatividad (Figura 10).

10.3. LA MEDIA Y SU REPRESENTATIVIDAD

Ya has visto que la media de una distribución casi siempre está situada en el centro de la variable o muy próxima a él y, también, que se suele tomar como resumen de la totalidad de los datos de la distribución. Pero, frecuentemente, conocer este dato no es suficiente para describir la globalidad de una distribución, sino que es necesario averiguar, además, su grado de representatividad. Es decir, saber si el conjunto de datos de la distribución está o no bien representado por la media. Para ello, hay que ver si los datos están poco o muy concentrados alrededor de dicha media.

Resumiendo, en toda distribución estadística conviene estudiar conjuntamente la media y la dispersión de los datos respecto de la misma.

Figura 10: La media y su representatividad.

Libro B:

- Elaboración de tablas con datos aislados.
- Representación gráfica de caracteres cualitativos.
- Elaboración de tablas con datos agrupados en intervalos.
- Representación gráfica de caracteres cuantitativos.

- Aplicación de fórmulas (Figura 11).

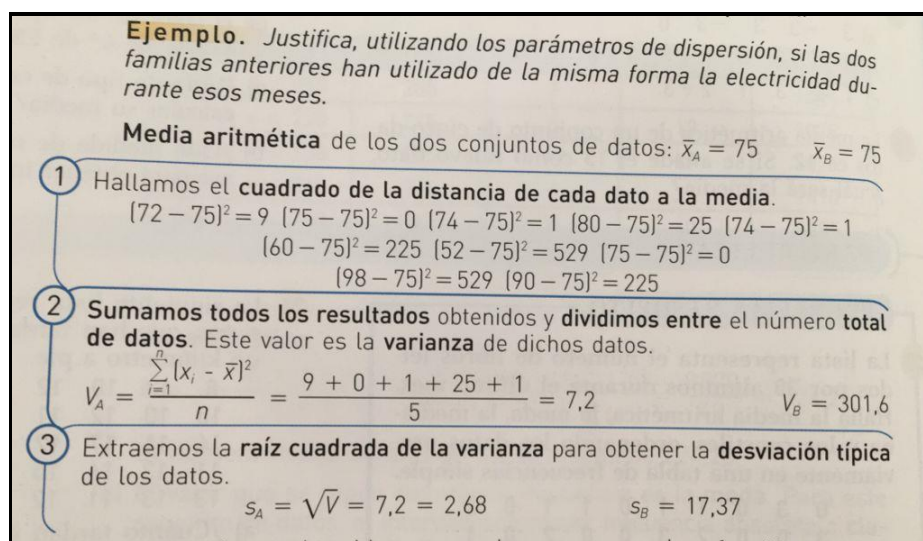


Figura 11: Aplicación de fórmulas.

Libro C:

Las técnicas principales que se emplean que resuelven los problemas son:

- Elaboración de tablas con datos aislados.
- Elaboración de tablas con datos agrupados en intervalos.
- Aplicación de fórmulas.
- Pasos para la construcción de diagramas de caja, como se observa en la Figura 12.

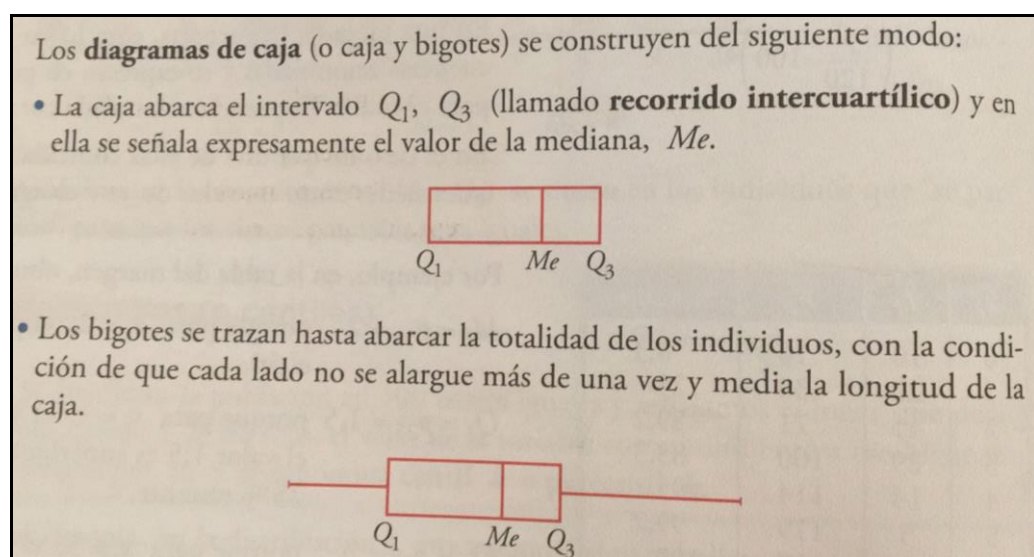


Figura 12: Construcción de diagramas de caja.

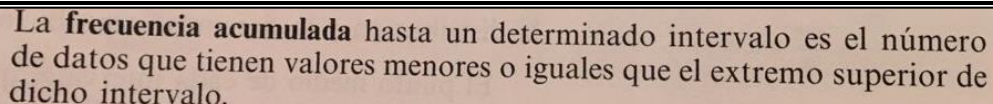
Comparando los tres libros de texto, se observa que en el libro A, se da por adquirido previamente todo lo referente a variables cualitativas (interpretación gráfica, ...), al contrario que en los otros dos. Por otro lado, se detallan en el libro A la realización de ciertos gráficos como el histograma con mayor precisión y conocimiento pues se utiliza el polígono de frecuencias que no es usado en ninguno de los otros dos libros. Además,

las pocas fórmulas que aparecen en el libro A, antes de proporcionarse se justifican de forma verbal.

Por último, se observa en el siguiente análisis, la decadencia, conforme pasan los años, de *tecnologías* que justifiquen esas técnicas de los libros de texto.

Libro A:

Se observan diversas teorías que justifican las técnicas, aparecen constantemente explicaciones sobre lo que se realiza en todo momento, consejos como “antes de agrupar los datos de una distribución deberás decidir el número de intervalos y la amplitud de los mismos”, así como definiciones varias (polígono de frecuencias, pirámides de población, media, marca de clase, moda, clase modal, mediana, frecuencia acumulada (Figura 13), cuartiles, cuartil inferior y superior, percentiles, recorrido intercuartílico, desviación típica – “la diferencia entre el percentil 84 y la mediana es, aproximadamente, la desviación típica”, etc).

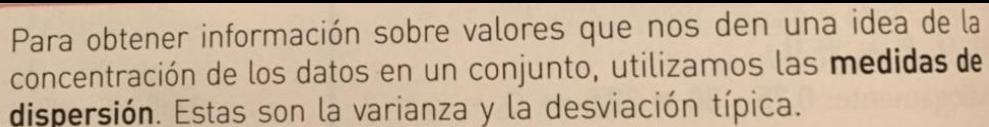


La **frecuencia acumulada** hasta un determinado intervalo es el número de datos que tienen valores menores o iguales que el extremo superior de dicho intervalo.

Figura 13: Definición de frecuencia acumulada.

Libro B:

Escasean las tecnologías o justificaciones de las técnicas que aparecen en este libro de texto, puntualmente se da un “intento” de definición de medidas de centralización y las de posición, así como de medidas de dispersión. Pero, aunque en el libro esté marcado como definición, se puede observar en la Figura 14 que está muy lejos de serlo.

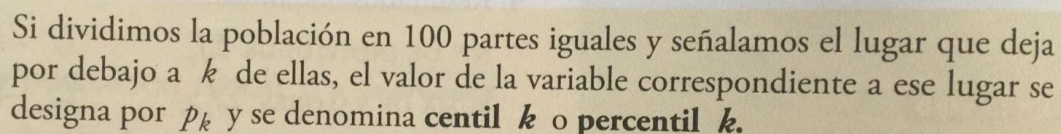


Para obtener información sobre valores que nos den una idea de la concentración de los datos en un conjunto, utilizamos las **medidas de dispersión**. Estas son la varianza y la desviación típica.

Figura 14: “Definición” de medidas de dispersión.

Libro C:

No se observa gran cantidad de teorías que justifiquen las técnicas, simplemente se dan las técnicas mediante ejemplos y presentando las fórmulas a aplicar. Puntualmente, se da la definición de algún concepto como el percentil k (ver Figura 15).



Si dividimos la población en 100 partes iguales y señalamos el lugar que deja por debajo a k de ellas, el valor de la variable correspondiente a ese lugar se designa por p_k y se denomina **centil k** o **percentil k** .

Figura 15: Definición de centil k o percentil k .

Para finalizar este análisis, de los tres libros de texto, se destacan los principales fenómenos o contextos observados en cada propuesta editorial.

En el libro A, todas las actividades o problemas de la unidad didáctica están contextualizados, desde pesos de chicos y chicas, hasta diámetros de manzanas pasando por número de asientos no ocupados en los vuelos entre Madrid y Sevilla. Además, en las actividades propuestas al comienzo de la unidad, se observa cómo el alumnado necesita adquirir conocimientos de estadística unidimensional para poder responder con seguridad a ciertas de las preguntas planteadas. Estas actividades al comienzo de la unidad sugieren una enseñanza a través de la resolución de problemas que intenta ser continuada a lo largo de toda la unidad, pero que termina siendo una enseñanza para resolver problemas.

Por otro lado, tanto en el libro B como en el C es clara la enseñanza para la resolución de problemas. En ambos se intenta contextualizar ciertos ejercicios con problemas de diversos contenidos para que intente asociar el alumnado a la vida cotidiana, pero considero que son bastante más realistas, respecto a lo que puede ocurrirle a un alumnado de secundaria, los contextos empleados en el libro A.

Por tanto, es claro que el libro A tiene una gran cantidad de puntos fuertes en comparación con los otros dos libros de texto.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumnado?

Se han realizado diversas investigaciones sobre dificultades y errores de los estudiantes en el objeto matemático de la estadística. A continuación, se mostrarán algunas de las más relevantes para esta memoria.

Como indican Arce, Conejo y Muñoz-Escolano (2019a) es importante que el docente conozca los errores más habituales y los posibles obstáculos que puedan presentarse en el razonamiento estadístico de su alumnado.

Algunos errores habituales en la estadística impartida en la Educación Secundaria Obligatoria subyacen del razonamiento inadecuado sobre medidas de tendencia central, cálculos o la falta de comprensión del significado de los conceptos (Batanero, Godino, Vallecillos, Green y Holmes, 1994). De estos errores que estudian los autores mencionados anteriormente, Arce, Conejo y Muñoz-Escolano (2019a) señalan los más habituales:

- En los cálculos, utilizar los datos de frecuencias absolutas para obtener la media, mediana o moda, en vez de usar los valores de los datos. Este error se potencia cuando los datos están agrupados en intervalos.
- Calcular las medias ponderadas ignorando la frecuencia de cada valor o del agrupamiento en un intervalo.
- Añadir de forma indebida propiedades a la media como considerar que ha de ser un valor del conjunto de datos, pues si no el alumnado encuentra dificultades para poder interpretar el resultado; en ocasiones no tienen en cuenta los valores nulos para calcular la media, como si el cero fuera un “elemento neutro”; o aplicar la

asociatividad para calcular la media a partir de varios grupos de datos, entre otros errores.

- Confundir la media y la mediana. Al ser las mismas en distribuciones simétricas el alumnado tiende a generalizar este concepto para todo tipo de distribución.
- Identificar la mediana con el valor central de los datos cuando la muestra no ha sido ordenada anteriormente, o identificar la mediana con el valor central en una tabla de frecuencias obviando las frecuencias de cada valor o de cada intervalo.

Para Batanero y Godino (2002) existen también diversos obstáculos relacionados con la comprensión de tablas y gráficos, medidas de tendencia central (no se comentarán pues ya se han añadido algunas anteriormente (Arce, Conejo y Muñoz-Escolano, 2019a)), conflictos en el entendimiento de la variabilidad y en las características de dispersión. Algunas dificultades o errores de los que destaca Cobo (2015) sobre estos conflictos señalados por Batanero y Godino (2002) son:

- La elaboración de una tabla de frecuencias o un gráfico supone una dificultad añadida para el alumnado ya que se realiza una reducción de la información, pasando de la información dada de forma individual en los datos a una información agrupada, es decir, dada en distribución de frecuencias.
- A la anterior dificultad, se añade que el alumnado debe entender el contexto del gráfico, así como tener conocimientos para distinguir el tipo de gráfico (barras, histograma, etc). El déficit de conocimiento sobre lo anterior supone que el alumnado realice un mal uso de las escalas a la hora de representar los datos gráficamente o la elección errónea del tipo de gráfico según la variable a estudiar, entre otros errores señalados por los autores, también estudiado por Curcio (1989) y MacGillivray (2005) (citados en Batanero y Díaz, 2005). Es necesario concienciar al estudiante de que un gráfico mal construido proporciona información falsa (Batanero, 2001).
- El alumnado tiende a ignorar la dispersión de los datos en la comparación de dos o más muestras o poblaciones.

Respecto a los errores más comunes del alumnado en representaciones gráficas, es importante que el docente fomente ese sentido gráfico haciendo que sean críticos frente a las posibles falacias estadísticas gráficas que podemos encontrar habitualmente en los medios de comunicación (Batanero y Díaz, 2005). Para Batanero y Díaz (2005) el razonamiento estadístico no solo se basa en el conocimiento matemático y en la comprensión de las nociones y técnicas, va más allá, el docente debe ayudar a conseguir en el alumnado razonamiento y métodos estadísticos que complementen los conocimientos matemáticos sobre estadística que adquieran.

Otros errores estudiados por Murillo y Castellanos (2011), no mencionados anteriormente, son:

- Falta de comprensión general de las nociones básicas, por ejemplo, cuando se realiza una pregunta sobre mediana y el alumnado halla la media aritmética. Se confunden los términos media aritmética y mediana.
- Error de comprensión del enunciado.
- Errores producidos al mezclar en el problema propiedades de la media con otras propiedades referidas a la divisibilidad de números.

Tras la revisión bibliográfica realizada sobre los principales errores y dificultades en el objeto matemático de la estadística en alumnado de secundaria, se finaliza con algunos errores descritos por Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos (1994) al comienzo de la investigación de la enseñanza en matemáticas del objeto de estadística.

- El principal obstáculo del alumnado es el conocimiento, ya que hay escasez de conocimiento sobre estadística. El bloque de estadística en el currículo de secundaria es el último bloque de cada curso de las asignaturas de matemáticas, por lo que, en general, existe una tendencia a seguir el orden de los bloques del currículo. Debido a la gran extensión de contenidos que componen el currículo, el profesorado difícilmente puede abarcar todos los contenidos por lo que el bloque de estadística tiende a verse rápido, poco trabajado o incluso, en los peores casos, no llega a verse.
- El alumnado tiende a ignorar las contradicciones que a veces se producen en el contexto estadístico que está analizando, resistiéndose a profundizar en su conocimiento y asimilando que los resultados por muy incoherentes que parezcan son correctos.

Por tanto, en el momento de elaborar una propuesta didáctica para llevarla al aula de secundaria sobre estadística, hay que tener en cuenta principalmente el conocimiento previo del alumnado ya que puede retrasar la propuesta si se trata de un alumnado sin base estadística. Y, por otro lado, tener presente los posibles errores y dificultades que pueden presentarse estudiados por la investigación educativa en matemáticas.

C. Sobre los conocimientos previos del alumnado

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumnado para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

El proceso de enseñanza – aprendizaje de la estadística unidimensional se lleva a cabo desde el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria, por lo que se podría suponer que el alumnado que se encuentra en este curso de 4º E.S.O., ya tiene una base sobre estadística y conoce los conceptos generales.

Como futura docente no puedo presuponer nada en el mundo de la educación. En este caso, por ejemplo, la estadística es el último bloque del currículo vigente y, como una gran mayoría de docentes tienden a seguir el currículo de los libros de texto que suele coincidir con el orden del currículo legislativo, es frecuente que el alumnado en su etapa educativa hasta 4º E.S.O. haya adquirido los conocimientos de estadística de forma breve

y rápidamente. Este hecho se debe a la larga extensión de contenidos que se deben tratar en los bloques anteriores, como se ha visto anteriormente en la revisión literaria.

Por tanto, si el alumnado en los cursos previos ha adquirido los conocimientos y objetivos mínimos, debería haber aprendido los contenidos de los cursos anteriores referidos a estadística. Para verlos, atendemos a la *Orden ECD/489/2016*, donde se establecen los contenidos y criterios de evaluación específicos en relación a este objeto matemático, por curso, del bloque 5: Estadística y Probabilidad:

Contenidos referidos a la estadística unidimensional	
1º y 2º E.S.O.	<ul style="list-style-type: none"> • Población e individuo. Muestra. Variables estadísticas. • Variables cualitativas y cuantitativas. • Frecuencias absolutas y relativas. • Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. • Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias. • Medidas de tendencia central. <p>En 2º E.S.O. además de lo anterior se añade:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Medidas de dispersión.
3º E.S.O. Son comunes los contenidos referidos a estadística para la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas y para las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas	<ul style="list-style-type: none"> • Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra. Variables estadísticas: cualitativas, discretas y continuas. • Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra. • Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. • Gráficas estadísticas. • Parámetros de posición: media, moda, mediana y cuartiles. Cálculo, interpretación y propiedades. • Parámetros de dispersión: rango, recorrido y desviación típica. Cálculo e interpretación. • Diagramas de cajas y bigotes. • Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.

Se debe atender también a los criterios de evaluación referidos a la estadística en los cursos 1º, 2º y 3º E.S.O.

Criterios de evaluación referidos a la estadística unidimensional	
1º y 2º E.S.O.	<ul style="list-style-type: none"> • Criit.MA.5.1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos. • Crit.MA.5.2. Utilizar herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada.
3º E.S.O. Uno de los criterios de evaluación referidos a estadística es común para la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas y para las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas	<ul style="list-style-type: none"> • Crit.MAAP.5.1. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación. • Crit.MAAP.5.2. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo), valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas. • Crit.MAAC.5.3. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación (prácticamente, como Crit.MAAP.5.1.). • Crit.MAAC.5.4. es el mismo que Crit.MAAP.5.2.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumnado adquiriera esos conocimientos previos?

Realizando un análisis de los contenidos que se abordan según el currículo legislativo, el alumnado de 4º E.S.O. habría superado y adquirido los siguientes conocimientos en los cursos anteriores.

- Dado un enunciado, el alumnado sabe definir que son:
 - Individuo.
 - Muestra.
 - Población.

- Variables estadísticas a estudiar. Si estas son:
 - Cualitativas.
 - Cuantitativas. En este caso, distinguir:
 - Discretas.
 - Continuas.
- Obteniendo o dado un conjunto de datos, el alumnado sabe cómo realizar:
 - Tablas de frecuencias (frecuencias absolutas, relativas y acumuladas):
 - Con datos aislados.
 - Con datos agrupados en intervalos.
 - Representar gráficamente.
 - Variables estadísticas cualitativas.
 - Diagrama de sectores.
 - Variables estadísticas cuantitativas.
 - Discretas: diagrama de barras.
 - Continuas: histograma, polígono de frecuencias.
 - Seleccionar una muestra que represente adecuadamente al conjunto de datos.
- Dada una situación, el alumnado sabe qué parámetro estadístico debe hallar y sabe cómo realizar, interpretar y las propiedades de las siguientes medidas estadísticas:
 - Parámetros de centralización: moda, mediana y media.
 - Parámetros de dispersión: rango, recorrido y desviación típica.
 - Parámetros de posición: cuartiles.
 - Representación gráfica de parámetros estadísticos. Diagrama de caja y bigotes.
 - Sabe relacionar los parámetros estadísticos e interpretar conjuntamente la media y la desviación típica.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que el alumnado posea esos conocimientos previos?

Para cerciorarnos de que el alumnado verdaderamente ha adquirido esos conocimientos previos, se plantea dos pruebas iniciales de metodología activa.

Por un lado, se comienza con una prueba *One Minute Paper*, donde el alumnado deberá responder a unas sencillas preguntas, de la forma más extensa posible, en un tiempo limitado de 3 minutos como máximo.

Algunas preguntas de esta prueba se realizaron, por parte de la autora de este documento, en un aula de 4º E.S.O en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas durante el Prácticum II y se pueden ver algunas de las proyecciones del alumnado en Anexo: 5. Algunas respuestas de la prueba inicial: *One Minute Paper*.

One Minute Paper

Actividad 1. ¿Qué podrías decirme sobre estadística de cursos anteriores? (conceptos, definiciones, ideas, etc).

Actividad 2. Valora del 1 al 10 cómo te gusta la estadística respecto al temario que hay en matemáticas aplicadas para este curso (siendo 1 lo más bajo y 10 lo que más te gusta) y di por qué. (Importante: es obligatorio razonar la respuesta).

Actividad 3. Valora del 1 al 10 cómo de útil crees que es la estadística en la vida diaria y di por qué (razona “un poco” tu valoración).

Actividad 4. Di (mínimo 2) utilidades de la estadística en la vida real. Te propongo preguntas que pueden ayudarte a contestar: ¿Para qué sirve en la vida cotidiana? ¿Dónde ves la estadística en el día a día? ¿Y en los deportes? ¿en medicina? ¿en promociones comerciales?

Por otro lado, se realiza, con el uso de herramientas informáticas, un *Kahoot*. Si el centro no dispone de tablets u ordenadores individuales para el alumnado, con anterioridad se habrá preguntado en el aula si todos/as tienen teléfonos móviles y, en caso negativo, se reservará la sala de informática para esta primera sesión. A continuación, se muestran recortes de las preguntas del *Kahoot* que se ha preparado para esta prueba inicial.

Kahoot

Se van a mostrar solamente algunas de las preguntas del *Kahoot*. Esta evaluación inicial ha sido diseñada de forma que en algunas preguntas hay más de una solución posible.

Pregunta 2

¿Qué es la estadística?

27

Omitir

0 Respuestas

▲ Sumar y restar

◆ Ciencia que utiliza conjuntos de datos empíricos

● Ciencia que utiliza funciones elementales


■ Ninguna de las anteriores



Pregunta 3

Selecciona alguna opción que sea un concepto estadístico

27



Omitir

0 Respuestas

▲ Población

◆ Dominio

● Muestra

■ Individuo

Pregunta 5

¿Es lo mismo MUESTRA que POBLACIÓN?

27



Omitir

0 Respuestas


◆ Verdadero

▲ Falso

Pregunta 6

¿Es lo mismo INDIVIDUO que un elemento de la POBLACIÓN?

26



Omitir

0 Respuestas

◆ Verdadero

▲ Falso

Pregunta 16



El resto de preguntas del *Kahoot*, son un total de 18 preguntas, se encuentran en el Anexo: Preguntas restantes del *Kahoot*.

Una de las principales ventajas del *Kahoot* es que se guardan las respuestas cada vez que se utiliza, por lo que la docente puede revisarlas más tarde para ver dónde tiene mayor dificultad el alumnado, además de reutilizarlo como autoevaluación final antes de la prueba escrita de la unidad.

Con estas dos pruebas iniciales, la docente puede hacerse una idea de cuál es el nivel del aula sobre estadística unidimensional, dónde hay que reforzar ciertos aspectos, realizar recordatorios y cómo puede redirigir la secuencia didáctica. La duración aproximada de estas pruebas iniciales será aproximadamente de 40 minutos, ya que algunas preguntas del *Kahoot* implican reflexión y puesta en común. El tiempo restante se dedicará a poner en común lo que el alumnado quiera compartir que sepa sobre estadística con el resto de estudiantes. También se realizará el dibujo de la Figura 16 en la pizarra para esclarecer algunas nociones generales antes de dar comienzo a la unidad en la siguiente sesión.

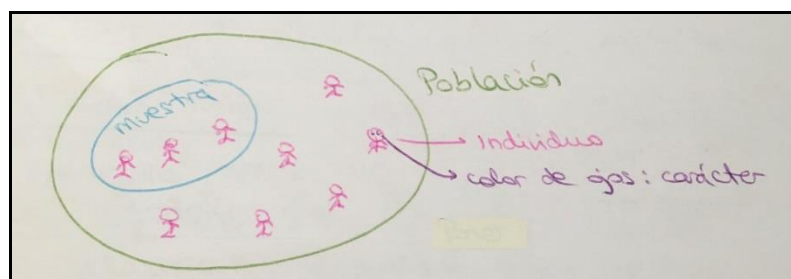


Figura 16: Idea gráfica sobre nociones generales.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón de ser principal del objeto matemático (estadística unidimensional) es el análisis y la interpretación adecuada de este en la vida cotidiana para poder conocer e

interpretar las características de una población, aprender a resumir la información estadística o permitir realizar una toma de decisiones adecuada. Así, se consigue que el alumnado sea capaz de ver por sí mismo la cercanía de las matemáticas en su día a día y aprender la utilidad que tiene la estadística en la vida.

Con esta propuesta didáctica, se pretende que el alumnado vea la necesidad de introducir este objeto matemático como nuevo conocimiento y que pueda emplearlo una vez finalizada la unidad. Existen diversos contextos de la realidad en los que puede aplicarse por lo que se hará uso de ellos para que el alumnado sea capaz de tomar decisiones y reflexionar sobre resultados, datos y procesos estadísticos.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

La razón de ser propuesta coincide, en parte, con las razones de ser históricos que dieron origen a la estadística, en el sentido de contextualización de problemas de la vida cotidiana.

En sus inicios, la estadística comenzó a utilizarse contextualizada en la vida real, pues tenía un carácter principalmente estatal. Los gobiernos necesitaban conocer las características de su población para poder organizarse y saber cómo debían gestionar los impuestos, el reparto de tierras o bienes, así como el reclutamiento de los soldados, entre otros. Así fue como se vieron involucrados por la estadística, ya que este hecho supuso que comenzaran a realizar recogida de datos y su posterior análisis sobre la población.

De ahí proviene el origen de la palabra estadística. Estadística tiene su origen en el alemán, *Statistik*, y significa *ciencia del Estado*.

De esta forma surgieron los censos, que podrían caracterizarse como los primeros estudios estadísticos, aunque supone un coste temporal y económico elevado, debido a que son estudios sobre toda la población. La necesidad de agilizar estos costos dio lugar a los registros (matrimonio, familiar, defunción, etc). Y, posteriormente, aparecieron alternativas a los censos y registros, que consistían en encuestas solo a una parte de la población, lo que hoy día denominamos muestra. Pero para poder generalizar los resultados que se obtenían en las muestras, a toda la población, fue necesario el desarrollo de la Teoría de la Probabilidad, el Muestreo y la Inferencia Estadística.

El uso de la estadística, para poder realizar conteos y estudios sobre características de la población, ya era habitual en civilizaciones antiguas como Babilonia, Egipto, o China, entre otros. Pero no fue hasta la Edad Moderna, de la mano de Neumann y Graunt, cuando la estadística dejó de tener un uso exclusivamente político.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

A continuación, se muestran dos problemas que abordan algunos de los campos de problemas que se han propuesto anteriormente.

Problema para introducir la elección de un representante adecuado

Con el siguiente problema, se abarcan distintos campos de problemas, ya que se basa en la elección de un representante adecuado del conjunto de datos. Es decir, el alumnado toma decisiones eligiendo de forma razonada la medida estadística adecuada para, posteriormente, decidir y argumentar sobre lo planteado.

Problema 1:

En las siguientes tablas se recogen las notas del último examen de matemáticas de dos clases del mismo curso, 4º E.S.O. Para que el alumnado supere la prueba escrita debe obtener una puntuación de 5 o más puntos. La docente afirma que en el grupo B, la última prueba escrita fue mejor que en el C, basándose en que la media en el grupo B fue de 6.62 y la del C fue de 6.25.

Pero, el alumnado de estos dos grupos es muy competitivo, por lo que los del grupo C, en desacuerdo total con la docente, deben tratar de convencerla de que no necesariamente es cierto lo que afirma.

Razona cómo pueden argumentar el grupo C su desacuerdo. Puedes emplear otros parámetros estadísticos, si quieres, para fundamentar tu argumento.

Grupo B	4.1	6.9	4.6	8.1	7.4	7	7.7	7.2	4	9.2
Grupo C	7.6	8.1	0.2	6.1	8.6	6	7.8	7.7	4.8	5.6

Solución: Existe un amplio abanico de soluciones en las argumentaciones del alumnado.

Por un lado, cabe la posibilidad de que cierta parte del alumnado no considere necesario el cálculo de otros representantes más adecuados del conjunto de datos. En este caso, el alumnado puede argumentar a través de que, el grupo C tiene un dato muy atípico que hace que la media baje mucho, pero que, si quitamos ese dato atípico, la media mejora respecto al otro grupo.

También puede argumentar fijándose en que hay más alumnos del grupo C que del B que aprobaron el examen. En este caso, vuelve a influir implícitamente el dato atípico del grupo C.

De nuevo, apareciendo de forma implícita el dato atípico del grupo C, pueden argumentar que hay más alumnos/as con más de un 7.5 en el grupo C que en el B.

Y, por otro lado, entre otras posibilidades, el alumnado puede hacer uso de otras medidas estadísticas que puedan representar mejor estos dos conjuntos de datos, como, por ejemplo, que el grupo C tiene un rango intercuartílico mayor que el B.

Problema para caracterizar una muestra, validar y decidir sobre ella

En el problema que se va a plantear, toma un papel relevante el campo de problemas asociado a las falacias estadísticas gráficamente ya que el alumnado debe saber interpretar lo que se resume en la gráfica y razonar por qué es una falacia y cómo se podría corregir.

Problema 2:

Es muy importante la información que se presenta a la población desde autoridades como son el cuerpo médico. En la siguiente gráfica se quiere mostrar el número de personas positivas por Covid19 en un pueblo de Zaragoza llamado Tauste en el mes de junio de 2021. ¿Crees que, estadísticamente hablando, representa los datos de forma adecuada? En caso afirmativo, razona por qué. En caso negativo, ¿qué gráfico crees que representaría mejor esta muestra? Si consideras que no lo representa bien este gráfico, dibuja uno que resuma la información de forma adecuada.



Figura 17: Gráfico sobre personas positivas de Covid.

Solución:

Se espera del alumnado que reconozca que se trata de una muestra que se refiere a toda la población. Por otro lado, se quiere que observen el tipo de variable que quiere mostrar el gráfico (discreta) por lo que, si se va a representar una variable que indica el número de personas positivas, se realice mediante un gráfico adecuado.

Se intentará que el alumnado razone todo lo posible con argumentos como: “no puede haber 0.2 personas positivas”, “un gráfico adecuado podría ser el diagrama de barras al tratarse de una variable cuantitativa discreta”, etc.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología en la resolución de los problemas planteados anteriormente, será activa, participativa y social, además de contener una parte de trabajo individual.

Se tratan de dos problemas de preguntas abiertas, donde se abarca un gran abanico de posibles respuestas intentando respetar los ritmos de aprendizaje de cada estudiante. De esta forma, con la posibilidad de distintas respuestas correctas, se intenta prestar atención a la posible diversidad de alumnado que pueda haber en el aula, ya que se debe tener en cuenta las necesidades, capacidades e intereses de todos ellos.

Por lo tanto, tras la realización de los problemas de forma individual y después de comparar y compartir las respuestas en grupos de 4 personas, utilizando la técnica 1-2-4, se realizará un debate o puesta en común con todos los compañeros de clase sobre lo que hayan observado. En este debate pueden aparecer dudas que les hayan podido surgir al compartir las ideas, aceptación sobre distintas respuestas a un mismo problema, etc. Así se intenta crear un *feedback* continuo con todo el alumnado, esencial en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

La técnica 1-2-4, se trata de una metodología activa donde tras plantearse un problema o una misma pregunta a todo el alumnado, cada uno piensa su respuesta (1), a continuación, analizan por parejas sus respectivas respuestas (2) y, finalmente, entre los 4 del grupo deciden la respuesta de todo el grupo complementando las suyas individuales (4). Es una metodología que ayuda a fomentar el trabajo cooperativo y la ayuda entre iguales.

Para el *problema 1* el alumnado dispondrá de 20 minutos para resolverlo de forma individual y realizar la comparación por parejas. Posteriormente, se dedicarán 5 minutos para la puesta en común con el resto del grupo de 4. Se finalizará la actividad con un pequeño debate con todo el grupo clase, donde todos los grupos de 4 deberán contar al resto su solución, anotando todas las ideas que aparezcan en la pizarra. El objetivo es que el alumnado acepte la diversidad de respuestas ante un mismo problema, así como comenzar a llevar a cabo la toma de decisiones para elegir un representante adecuado, es decir, qué parámetros estadísticos son los idóneos para resumir la información o resolver un problema estadístico.

Para el *problema 2* los estudiantes dispondrán de 10 minutos para resolver el problema planteado de forma individual. De nuevo, se realizará en primer lugar de forma individual, después se compartirá con la pareja de al lado para, finalmente, compararlo con el resto de grupo de 4, añadiendo 5 minutos más para finalizar la actividad. Una vez complementadas las respuestas de cada grupo se realizará una pequeña puesta en común con todo el grupo clase. El objetivo principal es que el alumnado adquiera conocimientos para caracterizar una muestra, validar la información y decidir sobre ella, para ello se observarán falacias en los medios de comunicación: prensa, televisión, etc. Posteriormente, se dedicará unos minutos para institucionalizar qué es una falacia

estadística, pues en ningún momento se ha presentado su significado, sin embargo, en el problema planteado es lo que hace el alumnado, detectarla.

E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Los problemas diseñados para esta sección abarcarán todos los campos de problemas planteados, de forma breve, en la sección A.3 de esta memoria.

Todos ellos estarán contextualizados dejando atrás el mero hecho de repetir técnicas o aprender fórmulas sin fundamento. Para la resolución de las actividades que se van a proponer serán necesarios diversos materiales como, por ejemplo, lápiz, goma de borrar, hojas cuadriculadas, fichas creadas por la docente, Hojas de Cálculo, entre otros.

Para el diseño de los problemas que se van a ver en esta sección, se ha intentado utilizar la idea principal que muestra Goss (2014). Esta es que las cuestiones que se planteen al alumnado en contextos reales sean, en general, de respuesta abierta, es decir, tengan más de una solución correcta o más de una vía para poder llegar a ella. Esta idea propicia un rico debate en el aula y ayuda a ejercitar la capacidad de razonar, comprender y comunicar las matemáticas más significativas por parte del alumnado. En la Tabla 2 (adaptada al castellano de Goss (2014)) se muestra un ejemplo que defiende esta idea.

CONVERSIÓN DE PREGUNTAS HABITUALES A “BUENAS” PREGUNTAS

PREGUNTAS HABITUALES	“BUENAS” PREGUNTAS ABIERTAS
Encuentra la media de estos tres números: 12, 16, 16.	La edad media de tres personas es de 18 años. ¿Qué años podría tener cada uno?
Halla el área de un rectángulo con 3 unidades de largo y 4 de ancho.	Dibuja un triángulo cuya área sea 6 unidades cuadradas.
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,1) y (1,3).	Escribe las ecuaciones de al menos cinco rectas que pasen por el punto (2,1).

Tabla 2: Adaptada de Goos (2014, p. 415).

Veamos, por tanto, las distintas actividades que se presentarán en el aula para cada uno de los campos de problemas mencionados anteriormente.

Se irá citando en cada actividad o grupo de actividades (si el objetivo es el mismo), qué se quiere conseguir y qué campos de problemas se trabajan.

Problema 1. Se quiere saber cómo se ha desplazado la gente a un concierto porque posteriormente se quiere analizar los accidentes de tráfico en la ida y vuelta de los conciertos, y así poder evitar este riesgo. Para ello, en la entrada de un concierto en la época de NO Covid, se pregunta a las personas que llevan gorra, sombrero o algo similar en la cabeza cómo se han desplazado hasta el concierto. Determina cuáles son:

- Población:
- Muestra:

- c. Individuo:
- d. Variable:
 - i. Tipo de variable:
 - ii. ¿Con qué tipo de gráfico se representaría?

Problema 2. El equipo directivo del IES Río Arba quiere saber qué destinos posibles tienen en la mente sus alumnos de 4º E.S.O. para la próxima excursión y así poder contar con su opinión (cuando lo permitan las medidas sanitarias). Para ello, realiza una encuesta al alumnado de 4º C. Determina cuáles son:

- a. Población:
- b. Muestra:
- c. Individuo:
- d. Variable:
 - i. Tipo de variable:
 - ii. ¿Con qué tipo de gráfico se representaría?

Problema 3. Se quiere saber cuántos adolescentes de las Cinco Villas consumen drogas según la edad de estos y poder tomar todas las medidas necesarias. Para ello, en el IES Río Arba se realiza una encuesta a todo su alumnado para saber cuántos de ellos consumen habitualmente cualquier tipo de drogas según la edad. Determina cuáles son:

- a. Población:
- b. Muestra:
- c. Individuo:
- d. Variable:
 - i. Tipo de variable:
 - ii. ¿Con qué gráfico se representaría?

Problema 4. Se va a realizar un estudio sobre las características principales de la población de un municipio. Para ello, han clasificado las siguientes variables en cualitativas o cuantitativas (discretas o continuas), pero, una doctora en matemáticas, tras ver las variables, ha afirmado que no se han clasificado correctamente. Ayuda a los trabajadores a averiguar cuáles están bien clasificadas y cuales mal, en este último caso indica cuál es el tipo correcto de variable.

Observa que lo han indicado de la siguiente manera:

V.CUAL. → variable cualitativa

V.C.D. → variable cuantitativa discreta

V.C.C. → variable cuantitativa continua

- | | |
|-------------------------------|------------------------|
| - Lugar de nacimiento: V.C.D. | - Peso: V.CUAL. |
| - Color de pelo: V.C.D. | - Edad: V.C.D. |
| - Nota de matemáticas: V.C.C. | - Estado civil: V.C.C. |
| - Deporte preferido: V.CUAL. | - Altura: V.C.C. |

Problema 5. Realiza tu primer diseño de problema/estudio: Inventa una situación en la que, dado un contexto (debes detallarlo) se necesite realizar un estudio estadístico y que sea necesario identificar los elementos característicos de tu población. ¿Cuál es la variable estadística que necesitas estudiar? ¿Qué tipo de variable es? ¿Podrías añadir o suprimir contexto para que si tu variable es cualitativa pase a ser cuantitativa o viceversa? Escribe cómo se modificaría el estudio. ¿Cuál sería ahora la variable y cómo la clasificarías? ¿Cuál de las dos variables mencionadas es más coherente analizar en un estudio veraz?

En los cinco problemas anteriores se puede apreciar que el campo de problemas predominante es el **C.P.N.G.**: *Elección adecuada de una variable a estudiar, así como de los elementos característicos que componen una población.*

A continuación, se presenta una actividad adaptada y ampliada de Guia Praxix, Carmen Azcárate y Jordi Deulofeu, donde se trabajarán diversos campos de problemas y se señalarán con las siglas de la sección A.3 en cada apartado de la actividad.

Problema 6 (contiene *diversas actividades*, por lo que corresponderá a varias sesiones). Unas jugadoras de basket no tan parecidas.

Se está jugando un gran partido de baloncesto. Queda un minuto y el entrenador, Fran, tiene que decidir a qué jugadora sacar. ¿A quién elegirá?

- Si va perdiendo el equipo de 8 puntos.
- Si van ganando de 2 puntos.

María, Clara, Alba, Sonia y Laura juegan en un equipo de baloncesto. Son las jugadoras que efectúan los lanzamientos exteriores. Su entrenador quiere analizar el porcentaje de aciertos de cada una de ellas en los últimos 10 partidos. Para ello ha recogido sus resultados en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
María	56	57	67	49	45	73	65	59	65	44
Clara	61	54	56	64	58	47	52	74	60	54
Alba	66	46	61	59	73	47	56	53	61	58
Sonia	57	53	66	59	56	52	59	61	45	72
Laura	49	70	57	65	52	46	60	58	73	50

- a) ¿En qué partidos ha conseguido Alba un porcentaje más alto que sus compañeras?

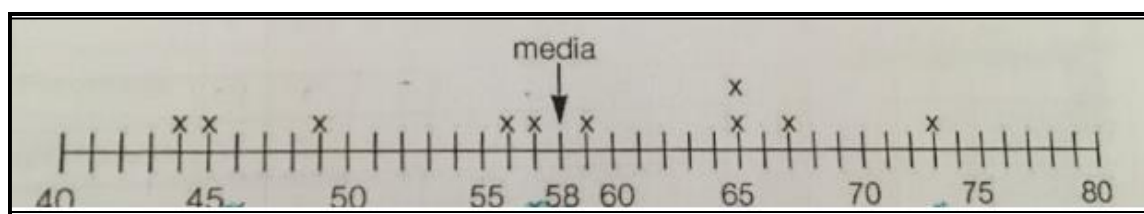
Una manera de controlar la eficacia de las jugadoras puede consistir en calcular la media de sus porcentajes de aciertos. Por tanto:

- b) Calcula, para cada jugadora, la media de sus porcentajes de aciertos. ¿Qué observas? ¿Puede ser posible siendo que aparentemente cada una tiene distintas puntuaciones en cada partido? Razona tu respuesta.

La intención principal del apartado b) es que el alumnado piense que calculando la media pueden responder a las preguntas iniciales sobre a qué jugadora sacar en el partido, sin embargo, al calcular la media, observan que la media de las 4 jugadoras coincide, por lo que no es suficiente esta medida estadística y, se crea la necesidad de un nuevo parámetro estadístico para poder tomar una decisión.

En este último apartado, el alumnado trabaja el **C.P.C.1: Elección de un representante adecuado respecto a medidas de centralización**, ya que irá valorando, en el progreso de los apartados de esta actividad, una medida de centralización frente a otras dependiendo de lo obtenido y de las condiciones.

- c) A la vista de los resultados, el entrenador se propone analizar la regularidad de sus jugadoras, es decir, calcular si se producen muchas diferencias entre los porcentajes de los distintos partidos. A tal fin construye unos diagramas de puntos. A continuación, se muestra el correspondiente a María.



Copia en una hoja cuadriculada el diagrama anterior. A continuación, construye los diagramas de puntos correspondientes a las/os otras/os jugadoras/es.

- d) Compara los diagramas. Recuerda cuál era la media de cada jugadora, ¿te ayuda este diagrama a decidir algo? ¿Qué jugadora crees que es la más regular? ¿En qué te has fijado para llegar a esta conclusión? Compara tu respuesta con la de tus compañeros/as.

Con estos dos últimos apartados, c) y d), se quiere que el alumnado construya los diagramas de puntos de cada jugadora para observar y analizar qué está ocurriendo y pueda ver y comparar, de forma visual, la dispersión de cada jugadora. De nuevo, no aclara demasiado este gráfico la decisión a tomar, por lo que se necesita un nuevo parámetro estadístico que ayude a decirse al alumnado.

Observar que entra en juego los campos de problemas sobre medidas de dispersión, **C.P.D.1: Elección de las medidas adecuadas para cuantificar la dispersión, medir la regularidad, de un conjunto de datos**; y, **C.P.D.2: Diferenciar conjuntos de datos a partir de la dispersión**. Estos campos de problemas sobre medidas de dispersión, también son trabajados desde el apartado e) hasta el m).

De nuevo, la finalidad es que el alumnado vaya creando interés y observe, por sí mismo, la necesidad de aprender nuevas medidas estadísticas porque no puede tomar decisiones con las que ha visto anteriormente. Esto sucede porque conforme va calculando una medida nueva, por ejemplo, cuando calcula el rango, observa que sí puede

descartar una jugadora, pero no el resto ya que cuatro de las chicas tienen el mismo rango y el mejor. Lo mismo ocurre con la desviación media, dos jugadoras, Clara y Sonia, coinciden en el valor y son las más regulares, es decir, las que menor dispersión tienen. Se crea así la necesidad de otros parámetros estadísticos (varianza y desviación típica) porque todavía no pueden decidir a través de la desviación media qué jugadora sacar al partido por coincidir el valor. Continuamos con la actividad:

Nota: habrás observado que comparar los diagramas no es tan sencillo. Sería más fácil disponer de algún valor numérico que midiera la regularidad de las jugadoras. Por ejemplo, se podría calcular los distintos rangos.

- e) Calcula, para cada jugadora, el rango de sus porcentajes de aciertos. ¿Qué observas?

Nota: Te recuerdo que el rango queda determinado por los valores máximo y mínimo, sin tener en cuenta los demás valores. Es decir, la diferencia entre el valor máximo y el mínimo.

- f) Imagina que una jugadora, distinta a las de la tabla inicial, durante 8 días encestara un 58% de sus tiros, un día encestara un 75% y otro día un 31%. ¿Cuál sería el rango de su porcentaje de aciertos? ¿Crees que es menos regular que las jugadoras del equipo? Haz su diagrama de puntos y compáralo, por ejemplo, con el de Sonia.

Está claro que necesitamos una medida mejor de la dispersión. No puede ser que una jugadora que tenga un rango de casi el doble sea más regular, fiable, menos dispersa. El rango se queda corto ya que solo tiene en cuenta los valores máximo y mínimo, sin tener en cuenta los demás valores. Sería mejor medir la dispersión teniendo en cuenta todos los valores.

Una manera podría ser calcular las diferencias entre cada uno de los porcentajes y la media, que en este caso es el 58%, para todas las jugadoras. La suma de estas diferencias dará la cantidad total de dispersión.

- g) Calcula la cantidad de dispersión en el caso de María. Para ello, completa la siguiente tabla. ¿Qué observas?

PARTIDOS

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	SUMA DE DIFERENCIAS
Porcentaje	56	57	67	49	45	73	65	59	65	44	
Diferencias	-2	-1	+9	-9	-13	15					

- h) Calcula la cantidad de dispersión para las demás jugadoras (hacer este ejercicio por parejas, dividiendo mitad de jugadores lo hace un compañero y mitad el otro). Utiliza tablas como la anterior. ¿Qué observáis? ¿Algo que comentar con el resto

de la clase? Si observas algo extraño al ver la suma de diferencias de todas las jugadoras, ¿por qué crees que puede ser?

Habrás observado que la suma de las diferencias siempre es 0. Esta es una propiedad que caracteriza a la media aritmética. De hecho, lo que interesa son las distancias a la media y no el sentido de estas. Para calcular las distancias se han de considerar las diferencias con el signo positivo, es decir, tomar su valor absoluto. La suma de estas distancias nos dará la cantidad total de dispersión.

- i) Aprovecha las tablas anteriores para calcular la cantidad de dispersión para cada una de las jugadoras. Ordena las jugadoras según su regularidad.

*Nota: Al finalizar los 10 partidos, la cantidad de dispersión de María es 78. La dispersión por partido es el cociente de esta cantidad entre el número de partidos jugados, es decir, $78/10 = 7,8\%$. Esta cantidad puede considerarse una medida de la regularidad de María. En estadística, este valor recibe el nombre de **DESVIACIÓN MEDIA**.*

- j) Calcula las desviaciones medias para las demás jugadoras (exprésalo en %).
k) Berta ha estado lesionada durante 2 partidos. La cantidad de dispersión que ha acumulado durante los 8 partidos jugados es de 67. ¿Es más regular que María? Explica claramente tu respuesta.

*Otra manera de anular los signos negativos es elevando las diferencias al cuadrado. La media de estas diferencias al cuadrado se llama **VARIANZA**.*

- l) Calcula la varianza del conjunto de porcentajes de acierto de María. Para ello, completa la tabla siguiente. En la última celda tienes que sumar todas las diferencias al cuadrado y dividir las entre el número de partidos, es decir, entre 10.

PARTIDOS

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	SUMA DE DIFERENCIAS
Porcentaje	56	57	57	49	45	73	65	59	65	44	
Diferencias	-2	-1	+9	-9	-13	+15					
Cuadrados	4	1	81	81	169	225					
										Varianza:	

*Observa que las unidades en que se mide la varianza son unidades al cuadrado. Así, en nuestro caso, serían porcentajes al cuadrado que, evidentemente, no tienen mucho sentido. Para recuperar las unidades originales, debemos anular el efecto de elevar al cuadrado y, por tanto, calcularemos la raíz cuadrada. En estadística, este valor recibe el nombre de **DESVIACIÓN TÍPICA**.*

- m) Calcula la desviación típica para cada una de las jugadoras. Ordénalas según su regularidad.

n) ¿Coincide esta ordenación con la anterior?

Y la pregunta inicial y final, ¿a qué jugadora elegirías?

Queda un minuto de partido y el entrenador tiene que decidir a qué jugador/a sacar. ¿A quién elegiría?

- Si va perdiendo de 8 puntos.
- Si va ganando de 2 puntos.

¿En qué te basas para cada decisión? ¿Coincides en la elección de jugadoras si va perdiendo de 8 puntos y si va ganando de 2?

Para poder tomar la decisión anterior, se observa que, todos los apartados previos estaban orientados a la toma de decisiones, es decir, se trabajaba implícitamente el campo de problemas **C.P.M.1: Resumir la información de una muestra empleando de forma adecuada los parámetros estadísticos.**

Observar que el alumnado, tras haber realizado, por pasos, el estudio de ciertas medidas estadísticas, debe resumir toda la información de la que dispone y saber utilizarla para responder a las preguntas planteadas en el anterior recuadro verde. Se trata de preguntas de respuesta abierta, ya que, aunque se podría pensar que si va perdiendo de 8 puntos, se sacaría a la jugadora más dispersa pues se necesita un “milagro” para ganar, otros alumnos pueden decidir en ambas preguntas sacar a la más estable, por seguridad, razonando que todas son igual de buenas pues recordamos que tenían la misma media.

- o) Compara la elección que crees que haría Fran, el entrenador, con la elección que cree tu compañero/a de al lado. ¿Coincide la elección? Si la respuesta es negativa, ¿cómo lo justifica tu compañero/a? ¿Crees que son válidos sus argumentos? Si es que no, ¿por qué? Y, en caso afirmativo, escribe en tu cuaderno sus argumentos.

A partir de ahora, comenzarán a intervenir los campos de problemas sobre representaciones gráficas.

- p) Dibuja el diagrama de barras correspondiente a cada jugadora para valorar la interpretación conjunta de la media y la desviación típica. ¿Qué puedes decir sobre su representación gráfica? Leyendo los datos a través del gráfico, ¿cuáles son las frecuencias absolutas de los valores?

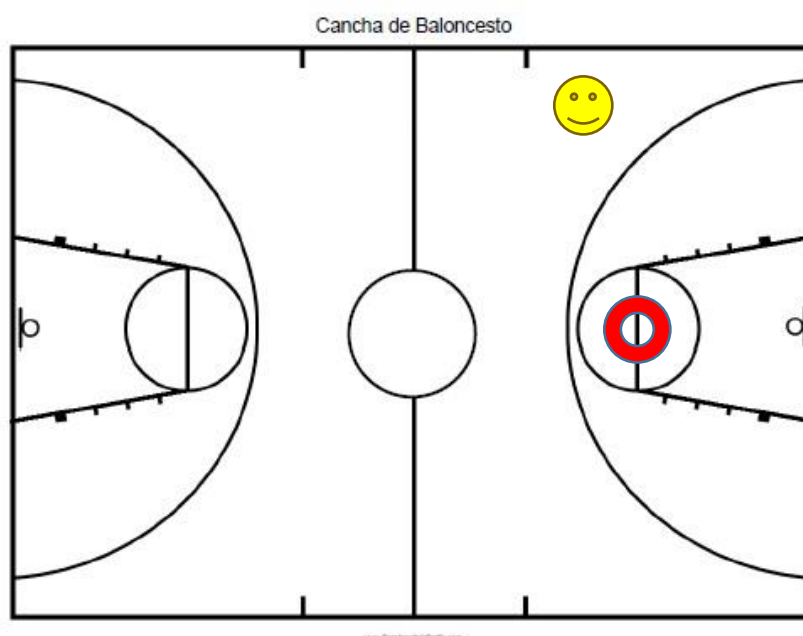
Anteriormente has observado una característica especial que le ocurre en este caso a la media, ¿qué es? Tras observar el gráfico, ¿sigues tomando la misma decisión que en el apartado del recuadro verde? Si cambias de opinión, razona por qué.

En el apartado p) se comienza a trabajar con gráficos estadísticos, pero no solo se emplean campos de problemas relacionados con gráficas, sino que implícitamente se comparan distintos tipos de parámetros estadísticos.

Por tanto, claramente se profundiza en el campo **C.P.G.2.1**: *Extraer las frecuencias absolutas de los valores en un diagrama de barras.*

- q) Esta representación gráfica que has realizado en el apartado anterior, ¿te sirve para valorar de forma cualitativa la dispersión? ¿Por qué?
- r) La decisión no está del todo tomada... quedan 5 segundos de partido y la posición de las jugadoras en la cancha es decisiva. Tiene la pelota la jugadora que has elegido en los apartados anteriores, es decir, la que has decidido en el recuadro en la condición de: Si va perdiendo de 8 puntos.

Si congelamos el tiempo, en los últimos 10 partidos, solo pudieron meter canasta las jugadoras cuya altura se encontraba entre el cuartil 1 y el cuartil 3 desde la posición en la que se encuentra la jugadora. Observa la siguiente imagen para ver dónde está la jugadora situada (ver la cara amarilla) y dónde tiene que encestar (ver la canasta roja).



Por tanto, es necesario que introduzcamos una nueva variable estadística, la altura de las jugadoras. En la siguiente tabla se recogen los datos necesarios, termina de completarla y añade, si lo necesitas, tantas columnas como quieras:

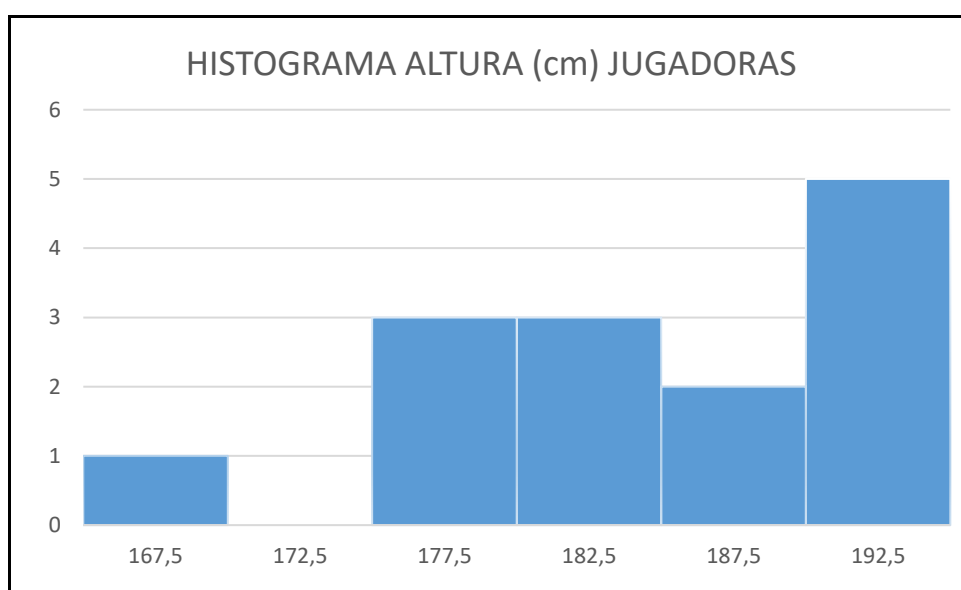
<i>Jugadoras</i>	INTERVALOS (estatura)	Frecuencias absolutas
<i>Alba</i>	[170, 180)	
<i>Clara, Sonia y Laura</i>	[180, 190)	
<i>María</i>	[190, 200)	

¿Encestará la jugadora que habías elegido anteriormente para la condición de ir perdiendo de 8 puntos? Es decir, ¿se encuentra entre el cuartil 1 y el 3? Si la

respuesta es negativa, ¿por cuál otra jugadora se puede decidir sacar el entrenador para que enceste desde esa posición?

Con el apartado anterior, el alumnado comienza a tomar contacto con las medidas de posición, de forma que se profundiza en el campo de problemas **C.P.P.1**: *Elección de un representante adecuado que permita dividir la población en los grupos necesarios para la toma de decisiones de su estudio, así como para posibles categorizaciones de dicha población o estudio.*

- s) A continuación, se muestran las alturas de todo el equipo de baloncesto mediante un histograma. Observa que en la parte inferior del histograma se muestran ciertos valores. A estos datos se les denomina *marca de clase* y se trata del punto medio de cada intervalo del histograma. Contesta a cada una de las siguientes cuestiones: ¿Cuántas jugadoras están en cada intervalo de medida? O lo que es lo mismo, ¿cuáles son las frecuencias absolutas de los valores observando el gráfico? ¿En qué te basas? Argumenta la respuesta. ¿Existe algún intervalo de estatura en que haya el mismo número de jugadoras? ¿Cuál? ¿Cómo lo has observado?

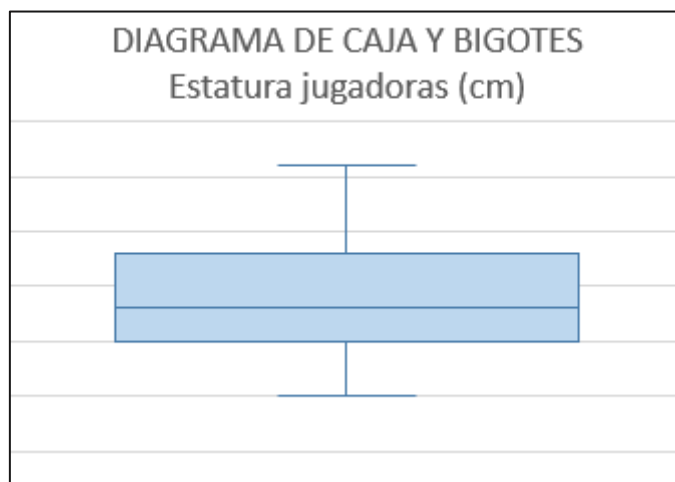


Continuamos observando el histograma... ¿podrías indicarme cuál es la moda? Razona tu respuesta.

Con este apartado que se acaba de presentar, se abarcan dos de los campos de problemas sobre representaciones gráficas.

Por un lado, con las preguntas referidas a las frecuencias absolutas se trabaja el **C.P.G.2.1** (“Leer los datos”). Y, por otro lado, con la pregunta relacionada con la moda se considera el **C.P.G.2.3** (“Leer entre los datos”).

- t) Observa el siguiente diagrama de caja y bigotes donde se representa la estatura de las jugadoras.



Predice a qué valor se aproxima la mediana de las jugadoras e indícalo justificando tu respuesta.

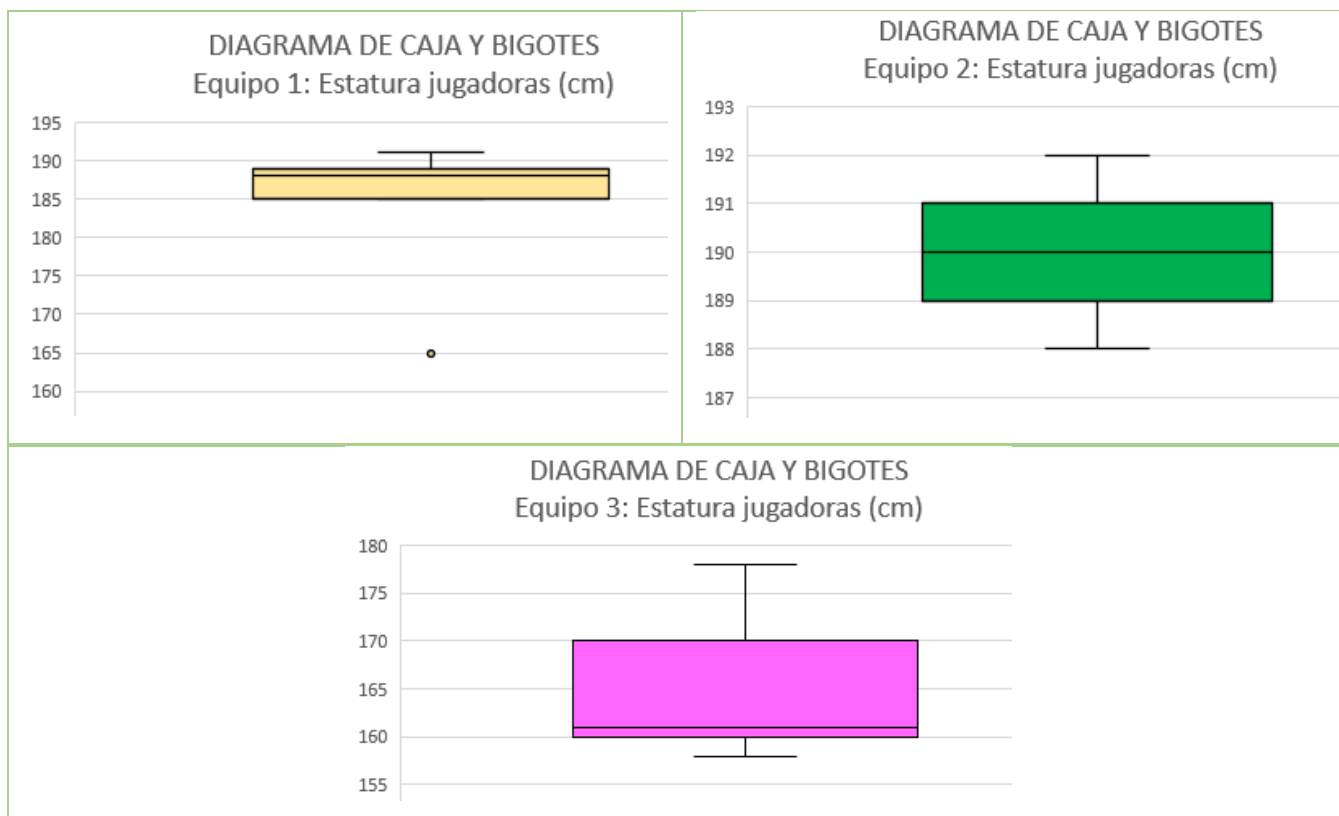
Pista: anteriormente has calculado el primer y tercer cuartil.

Observa de nuevo el gráfico, ¿consideras que la distribución de la estatura es simétrica? Define qué consideras como distribución simétrica y compara tu definición con la de tu compañero. ¿Consideras que merece la pena una distribución simétrica en este contexto de las alturas de las jugadoras? Razona por qué. En caso afirmativo, pon un ejemplo donde no tenga sentido tener una distribución simétrica y, en caso negativo, pon uno donde sí tenga sentido que la distribución sea simétrica.

¿Observas algún dato atípico? En caso afirmativo di cuál o cuáles. En caso negativo, pon un ejemplo de dato atípico en esta situación.

Se le muestra al alumnado un diagrama de caja y bigotes sin valores en los ejes, con la intención de que puedan predecir la mediana al observar en el gráfico que se acerca más al primer cuartil que al tercero, conociendo los valores de estos dos cuartiles ya que en el apartado r) han calculado el primer y tercer cuartil.

- u) En los siguientes diagramas de caja y bigote, se representa la estatura de cinco jugadoras de tres equipos distintos al que estamos trabajando en esta actividad.

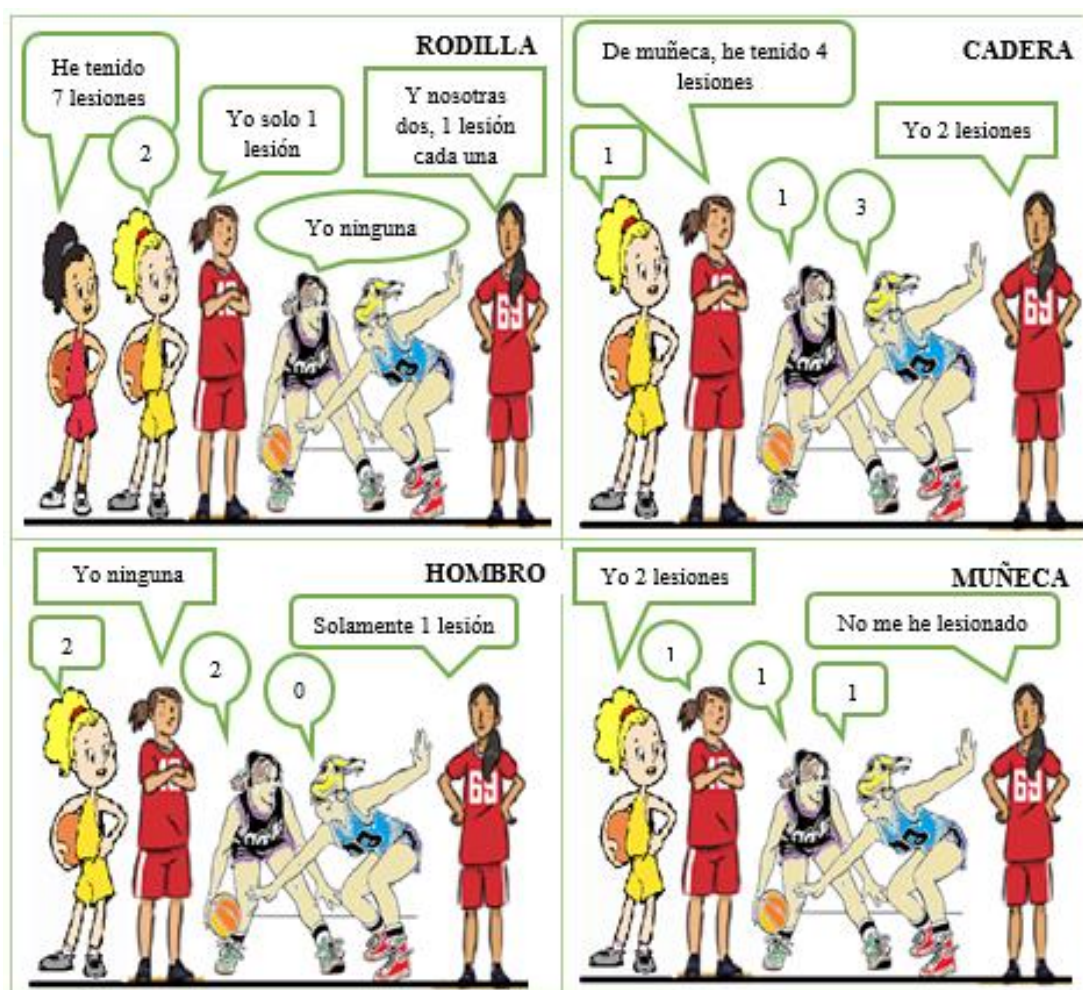


¿Cuál o cuáles de ellos es más simétrico? ¿Y más asimétrico? ¿Cómo has llegado a estas conclusiones? Compara el más simétrico con el de las jugadoras de basket de esta actividad, ¿qué diferencias encuentras?

Ahora ve un poco más allá, obsérvalos con detenimiento, en el eje vertical tienes marcados unos valores que representan la estatura de las jugadoras. ¿Observas datos atípicos? ¿Dónde? ¿Qué quiere decir esto? ¿Alguno de los gráficos podría corresponderse con otro/s deporte/s? En caso afirmativo, ¿con qué deporte/s? Justifica la respuesta.

En el apartado t), se trabajan los siguientes campos de problemas. Con la pregunta sobre el valor de la mediana, **C.P.G.2.4: Obtener la mediana interpretando un diagrama de caja y bigotes** (leer entre los datos); y, tanto en el apartado t) como en el u), con la cuestión de la forma que tiene la distribución de la estatura, **C.P.G.2.5: Determinar la simetría de una distribución a partir de su diagrama de caja** (leer más allá de los datos).

- v) A continuación, se muestra un WODB sobre algunas de las jugadoras. En él se representan las distintas lesiones que han sufrido en los últimos 20 partidos. Identifica por qué es un WODB estadístico.



Una posible solución:

LESIÓN	MUESTRA DE 6 ELEMENTOS	MEDIANA ≠ 1	MODA ≠ 1	MEDIA = MEDIANA = MODA
RODILLA	✓	✗	✗	✗
CADERA	✗	✓	✗	✗
HOMBRO	✗	✗	✓	✗
MUÑECA	✗	✗	✗	✓

w) Ahora eres tú el/la entrenador/a. Debes construir tu propio equipo de baloncesto en el que debe haber una jugadora más irregular que las demás. Di cuál es y por qué. Razona tus argumentos de forma consistente.

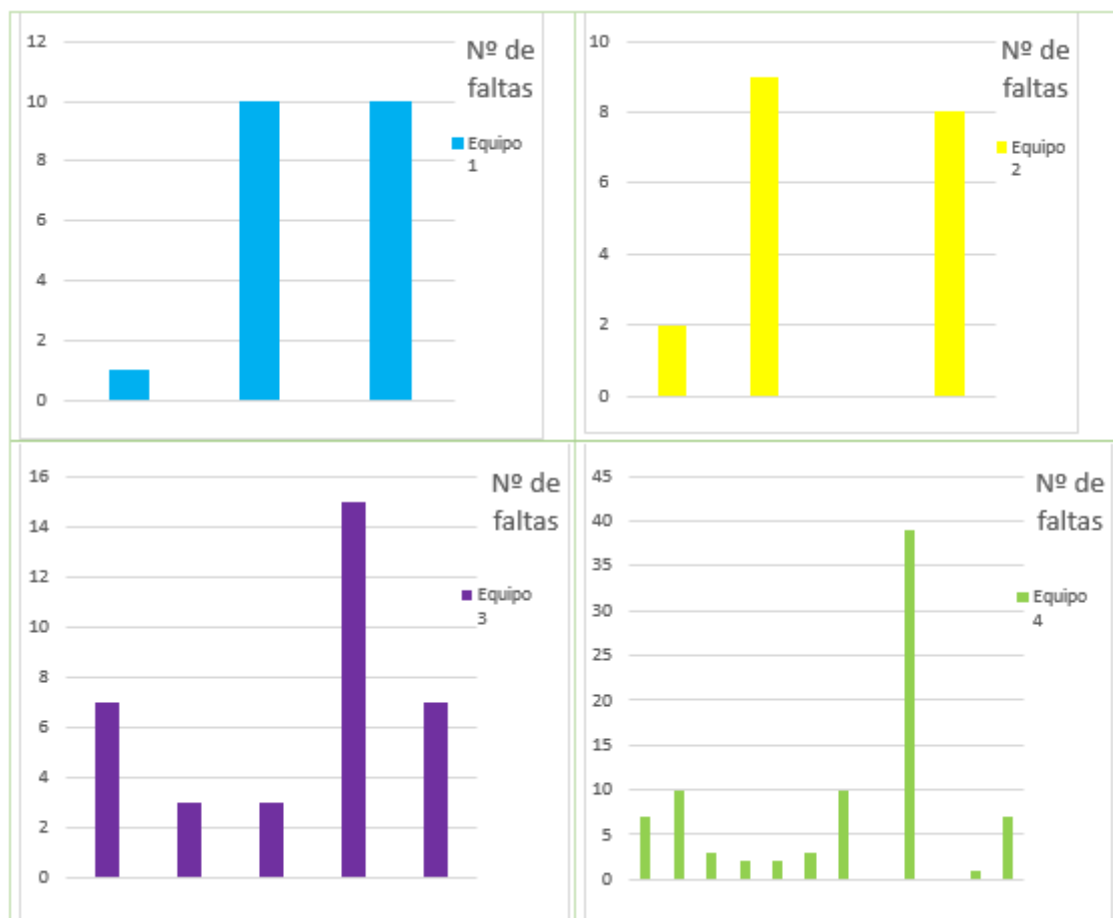
Con este último apartado, se intenta que el alumnado sea capaz de construir muestras estadísticas que presenten unos parámetros determinados y que vean las características principales de la muestra construida. Es decir, se profundiza en el campo

de problemas **C.P.M.1:** *Resumir la información de una muestra empleando de forma adecuada los parámetros estadísticos de centralización, dispersión y posición.*

Problema 7. Continuando con deportes... Se han escogido los 4 primeros equipos de segunda división de fútbol de España, y se han seleccionado solamente a los futbolistas que han cometido faltas en el último año en cualquier partido.

En el siguiente WODB, se muestran los diagramas de barras por equipo. Identifica y explica por qué se trata de un WODB, es decir, qué tiene de especial cada gráfico que no tenga el resto.

Nota y pista: Cada barra representa a un jugador. Si necesitas hacer uso de lápiz y papel para calcular otros parámetros estadísticos que no puedas ver a simple vista, adelante.



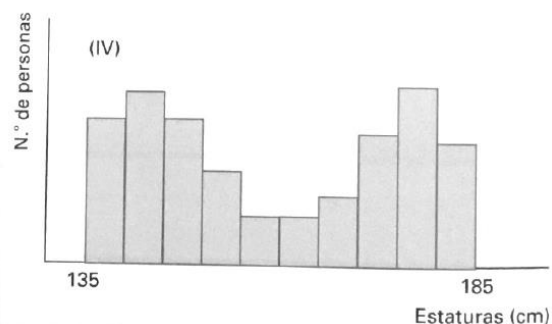
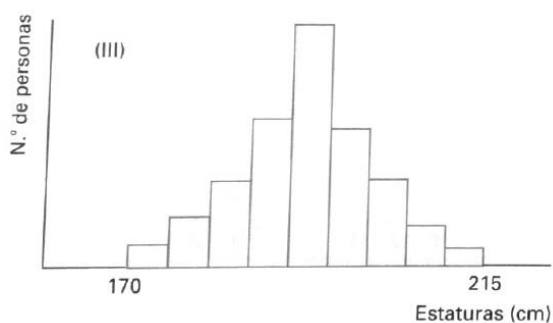
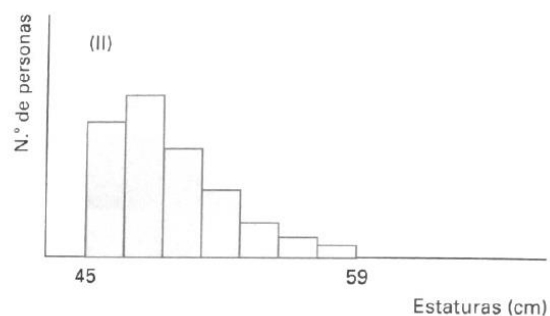
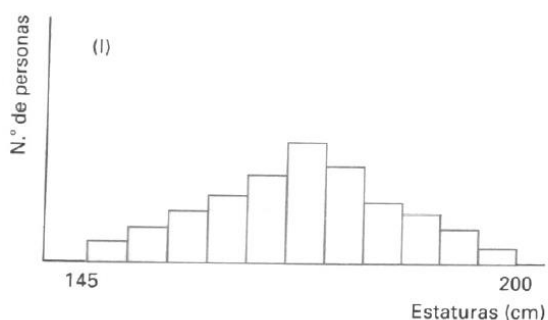
Una posible solución:

EQUIPO	ÚNICA MODA	MEDIA \neq 7	MEDIANA = MEDIA	DESVIACIÓN TÍPICA > MEDIA
1	✓	✗	✗	✗
2	✗	✓	✗	✗
3	✗	✗	✓	✗
4	✗	✗	✗	✓

Problema 8. Los siguientes histogramas representan las alturas de 4 grupos distintos de personas, que son:

- Grupo A: Los hombres y mujeres adultos de un pueblo de 1500 habitantes.
- Grupo B: Las jugadoras de baloncesto de la Liga Española.
- Grupo C: Los alumnos de Educación Primaria de un colegio, junto a sus padres y madres.
- Grupo D: Los recién nacidos en una maternidad a lo largo del último año.

Relaciona cada grupo con su gráfica correspondiente.



A continuación, invéntate tres contextos y represéntalos gráficamente para que tu compañero/a razone qué gráfica corresponde con cada enunciado. Nota: deben ser las tres variables estadísticas del mismo tipo (o bien tres variables cualitativas, o bien tres cuantitativas discretas o continuas).

El Problema 8, ha sido extraído y adaptado del libro de texto Amigo, Peña, Pérez, Rodríguez y Sivit (1995). En él se trabajan los campos de problemas sobre representaciones estadísticas, en concreto, **C.P.G.1: Elección correcta del gráfico dependiendo de qué parámetros estadísticos se quieren representar y el tipo de variables estadísticas a estudiar**, así como el **C.P.G.2.6: Interpretar y justificar los cambios producidos entre dos diagramas de barras realizados en distintos tempos, por ejemplo, pero que representen la misma variable estadística**.

Problema 9. Mediante una hoja de cálculo representa de todas las formas posibles (tabla de frecuencias, gráficamente) los siguientes datos:

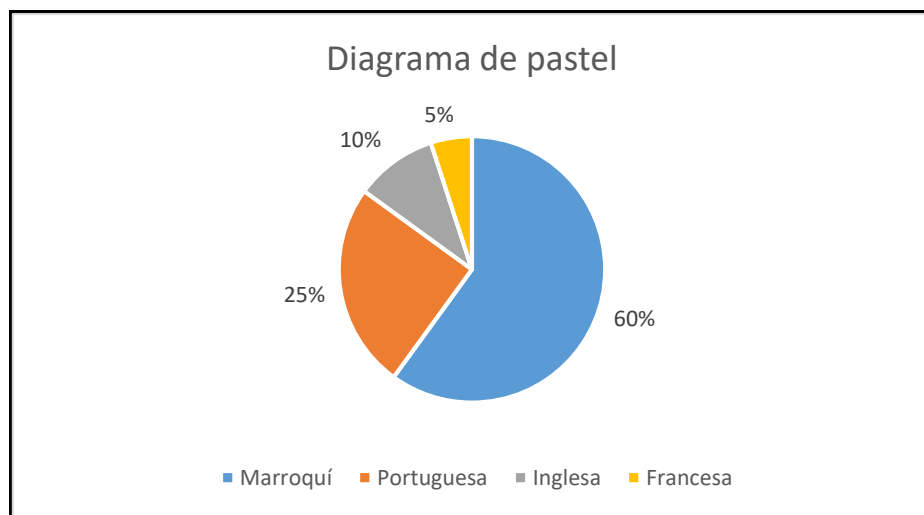
Se quiere realizar un estudio sobre nacionalidades en un instituto. Para ello, se ha ido a la clase de español para extranjeros y se ha recogido una muestra en la siguiente tabla donde se observa la nacionalidad de un grupo de 20 estudiantes de esta aula.

Nacionalidad	Marroquí	Portuguesa	Inglesa	Francesa
Nº de estudiantes	12	5	2	1

¿Qué observas? ¿Podrías decir, a través del gráfico, cuál es la moda?

Se espera del alumnado que realice tablas de frecuencias y diagrama de pastel a través de una hoja de cálculo, y contesten a las preguntas indicadas. De esta forma, utilizan herramientas tecnológicas y aprender a utilizarlas adecuadamente en el aula.

2						
3	NACIONALIDAD	Marroquí	Portuguesa	Inglesa	Francesa	
4	Nº de ESTUDIANTES	12	5	2	1	
5						
6	Hacemos una tabla de frecuencias:					
7	Nacionalidad	fi (frecuencia absoluta)	%	hi (frecuencia relativa)	Grados = hi*360º	
8	Marroquí	12	60	0,6	216	
9	Portuguesa	5	25	0,25	90	
10	Inglesa	2	10	0,1	36	
11	Francesa	1	5	0,05	18	
12		20				
13						



Observar que, en este problema, el campo de problemas predominante es el **C.P.G.2.3**: *Obtener la moda interpretando un histograma u otro tipo de gráfico (leer entre los datos).*

Problema 10. El siguiente enlace de Desmos presenta una serie de actividades para entender y saber representar diagramas de puntos.

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/59de90d78526091104d9cdd9?collections=featured-collections%2C5da8a6474d5c010a4455b470&lang=es>

First Name	Plot a Point
<p>¿Cuántas letras tiene tu nombre?</p> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px; margin-bottom: 5px; width: 100%;">4</div> <p style="text-align: right; font-size: small; color: #888;">✎ Editar mi respuesta</p> <p>Ejemplo: Sara tiene 4, por lo que aquí pondríamos → 4</p>	<div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> <p style="text-align: center; font-size: small;">Plot a Point</p> <p style="text-align: center; font-size: x-small;">Letters in First Name</p> </div> <div style="padding-left: 10px;"> <p>Has dicho que hay 4 letras en tu nombre.</p> <p>Arrastra el punto para mostrarlo en el gráfico.</p> </div>

Como se observa en la anterior imagen, la actividad está construida de forma que el alumnado, de forma continuada y autónoma, va aprendiendo cómo representar un diagrama de puntos.

Otras cuestiones que se plantean en la actividad son del tipo:

- Se muestra una gráfica con el punto que ha representado anteriormente el alumno, y un punto sin colocar todavía, y se pregunta: ¿Dónde debería colocar el punto Aimee? Se pide justificación en las respuestas.
- En otro, se observa el gráfico que tiene el alumnado hasta ahora, y se pregunta por otro nombre cuya longitud en letras es la misma que la del alumno, ¿dónde debe colocarlo?

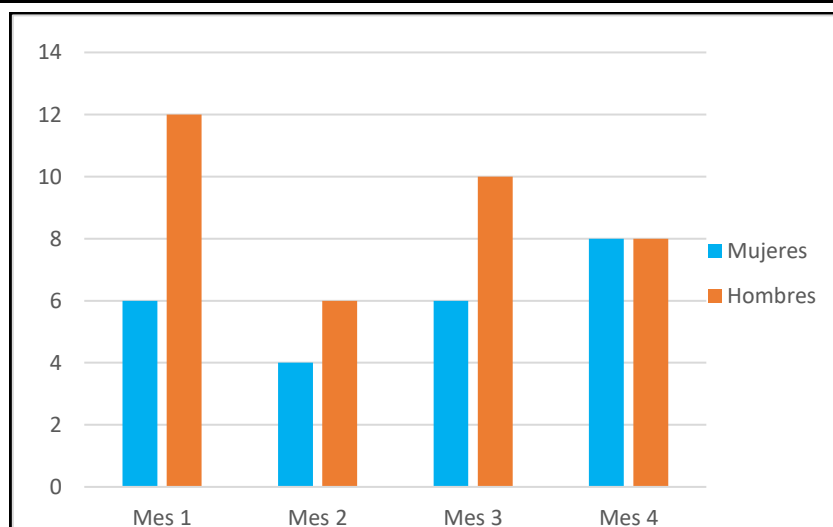
Problema 11. La siguiente tabla recoge el número de conductores, diferenciando el sexo, que han sufrido un accidente en el mismo tramo de carretera durante los últimos 4 meses.

MES	MES 1	MES 2	MES 3	MES 4
HOMBRES	6	4	6	8
MUJERES	12	6	10	8

- Representa los datos de la tabla gráficamente. ¿Qué observas a simple vista?
- Justifica si el cambio de sexo influye en el número de accidentes. ¿Necesitarías alguna otra variable para verificarlo? ¿De qué tipo? ¿Cuál podrías necesitar? Razona tu respuesta.
- Los gráficos que has obtenido. ¿Qué te indican? ¿Qué observas? Fíjate en el periodo de tiempo en que se recoge este estudio, ¿realizarías alguna recomendación a la dirección general de carreteras? ¿Cuál? ¿Por qué?

Con este problema número 11, se quiere que el alumnado conteste y razone todas sus respuestas. Por otro lado, que represente de forma adecuada mediante tablas de frecuencias y de forma gráfica los datos aportados. Además, en la última pregunta, se pretende que observen que en tan solo 4 meses han sucedido muchísimos accidentes en el mismo tramo, por lo que debe existir algún problema en esa carretera y que tal vez habría que arreglarla. Se intenta conseguir que justifiquen qué representan los datos obtenidos en la vida real. Alguno de los campos de problemas reflejados en el apartado b) de este es **C.P.G.2.6: Interpretar y justificar los cambios producidos entre dos diagramas de barras realizados en distintos tiempos, por ejemplo, pero que representen la misma variable estadística** (leer detrás de los datos).

2					
3	MES	Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
4	MUJERES	6	4	6	8
5	HOMBRES	12	6	10	8
6					



Problema 12. Una vez sabemos representar variables cualitativas discretas, ¿qué ocurre con las continuas? Para ello, accedemos al siguiente enlace de Desmos.

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5a4fce73b473640e051f9199?collections=featured-collections%2C5da8a6474d5c010a4455b470&lang=es>

Which Is Most Helpful?

Select an option to see if it's helpful.

Qué representación es la más adecuada para contestar a la siguiente pregunta:

¿Cuál es la finalista a Mejor Película más larga de nuestro conjunto?

HISTOGRAMA TABLA

Al seleccionar una de las dos opciones, se le muestra a la izquierda la representación escogida y aparece un nuevo recuadro donde a través de esta representación debe responder a la cuestión que se le plantaba.

Esta actividad se contextualiza en películas comparando mediante histogramas las mejores películas con las mejores películas de dibujos animados. Es interesante puesto que ayuda a que el alumnado diferencie cuándo es más útil tener la información en forma de tabla y cuándo en forma gráfica.

Problema 13. Se ha realizado un estudio sobre la productividad y eficiencia de los empleados de una fábrica. La directora ha observado que la gran mayoría, de la muestra recogida, están desmotivados en el trabajo. Por lo que decide realizar un segundo estudio para ver si influye en esta desmotivación, el número de años trabajados en esta empresa o si se trata de algo ajeno a esta, un suceso externo. Para ello, recoge la antigüedad en el puesto de trabajo de la misma muestra, es decir, un grupo de 36 operarios y se obtienen los siguientes datos sobre antigüedad en años:

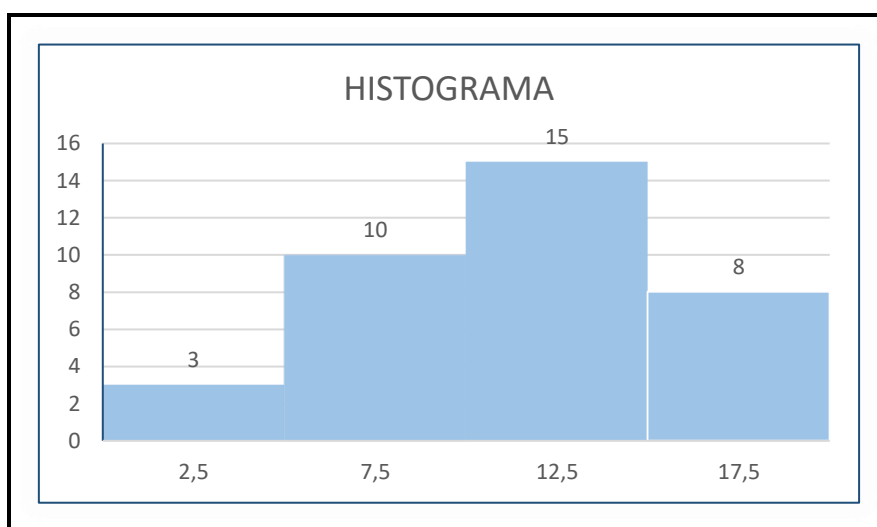
11	19	3	5	17	1
14	12	11	16	2	6
6	18	10	6	5	14
10	9	11	14	8	9
14	10	18	6	16	12
13	19	12	11	7	18

Representa en forma de tabla y gráficamente los datos de la muestra de forma que puedas comentar a la directora de la fábrica lo que observas ante su planteamiento inicial. ¿Qué le dirás a la directora sobre si influye o no la antigüedad de los trabajadores en la fábrica? ¿Necesitarías alguna otra variable para cerciorarlo? En caso afirmativo, di cuál y explica el porqué de la elección.

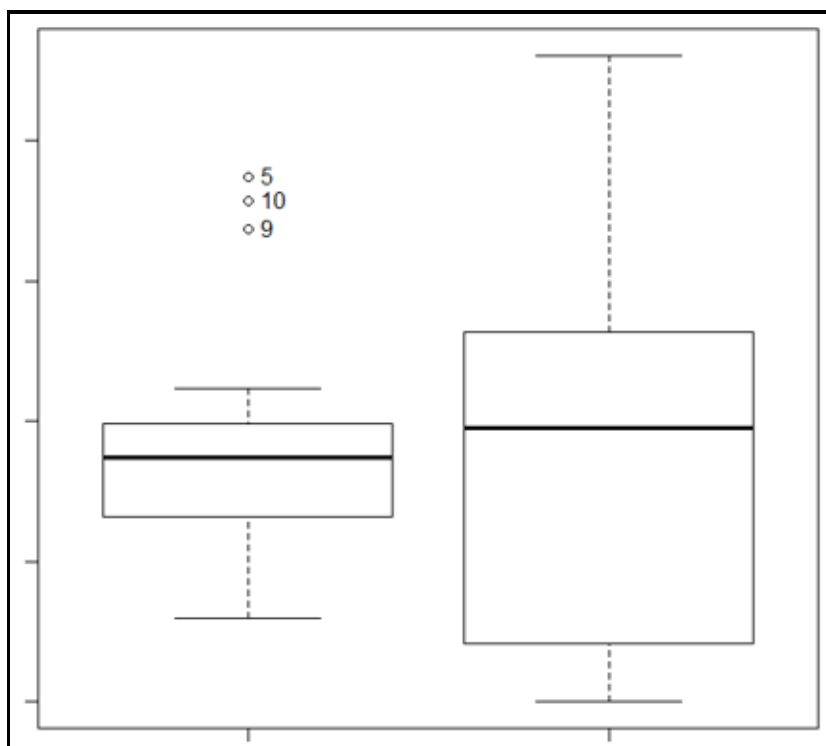
Ayuda: agrupa la antigüedad en intervalos de cinco años, tomando el mínimo de cada intervalo cerrado y el máximo abierto.

2					
3	Antigüedad (años)	[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)
4	Nº de operarios	3	10	15	8
5					
6					
7	INTERVALOS	MARCA DE CLASE	f_i		
8	[0,5)	2,5	3		
9	[5,10)	7,5	10		
10	[10,15)	12,5	15		
11	[15,20)	17,5	8		
12					
13					
14	NOTA: En un histograma, las áreas de los rectángulos				
15	que se forman son proporcionales a las frecuencias absolutas f_i				
16					

En este problema, se intenta que el alumnado pueda llegar a conclusiones y a una toma de decisiones por sí mismo a través de la estadística. El alumnado deberá realizar correctamente la anterior tabla de frecuencias y el siguiente histograma, así como contestar a las preguntas planteadas. Es decir, **C.P.G.2:** *Analizar distintos tipos de gráficos y responder cuestiones sobre ellos.*



Problema 14. Contextualiza el siguiente gráfico, es decir, observándolo, plantea un enunciado para cada diagrama de caja de forma que sea coherente y contextualizado según tus intereses, preferencias, hobbies de tu vida real, etc. Una vez planteado el problema en lenguaje verbal, razona cada parte de los enunciados que inventes, es decir, analiza detenidamente el por qué son correctos los enunciados según el gráfico dado.



En este ejercicio, se observa que se profundiza en el **C.P.M.2: Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión**, y en el **C.P.G.2: Analizar distintos tipos de gráficos y responder cuestiones sobre ellos**.

Problema 15. Como ya sabemos realizar estudios estadísticos y representarlos gráficamente de forma adecuada, ahora nos toca identificar cuándo un gráfico está mal representado, por qué, dónde está el fallo.

En estadística cuando hay alguna gráfica mal representada, o un texto o tabla que no representa la realidad de los datos de forma correcta, decimos que se trata de una *falacia estadística*.

A continuación, se muestra tres cuartas partes de un WODB, pero como puedes observar, un ratón se ha llevado la parte que falta. Observa que se complica un poco la dinámica de los WODB que hemos trabajado hasta ahora en clase... Fíjate, ahora hay un hueco en blanco, seguro que eres capaz de crear una falacia estadística que haga de este conjunto de imágenes un WODB. Además, debes razonar por qué son falacias estadísticas cada gráfico que se muestra.



Una vez completado el WODB, realizamos grupos de 4 y nos lo intercambiamos para encontrar la falacia de los compañeros.

Con este último problema se realiza, en particular, el campo de problemas, **C.P.G.3: Reconocimiento de falacias estadísticas en prensa, televisión, etc.**

Se trata de un problema abierto, en el que todo tipo de alumnado es capaz de completar el WODB con una falacia estadística, ya que se trata de respuesta libre y abierta, es decir, existen muchas posibilidades.

En las falacias que se presentan, los errores cometidos son:

1. No puede ser que, si la Zona Euro tiene un 10,1% de paro y España un 20,5%, gráficamente España no sea el doble que la Zona Euro.
2. Se trata de que el alumnado identifique que se está representando una variable estadística discreta (casos positivos, es decir, número de personas), por lo que el gráfico que se ha representado para ello no es el más adecuado. Se intenta que el alumnado razone y comente que un diagrama de barras sería mucho más adecuado para esa representación gráfica.
3. De nuevo, la prensa vuelve a “jugar” con el sentido de la vista. En este gráfico, el alumno debe plantearse cómo es posible que haya más distancia entre los dos primeros que entre los dos segundos, cuando la diferencia en números es mayor en el segundo gráfico. Ya que en los dos primeros (El País: 4879, El Mundo: 4704) la diferencia es de 175, mientras que en los

últimos (El País: 5443, El Mundo: 5660) la diferencia es de 217, sin embargo, gráficamente parece que sea mayor la distancia entre los dos primeros.

4. Aquí debe representar el alumnado la falacia estadística que quiera. Puede ser inventada o pueden buscarla en televisión, prensa, redes sociales, etc. Se trata de una respuesta libre, algunas posibilidades son: error en la representación de los ejes, por ejemplo, empezar por 50 y después ir de 5 en 5 sin haberlo indicado en el gráfico de la forma más habitual (dos rayas en dirección contraria al eje, una raya y una curva, etc); una tabla y gráfico asociado donde no se represente adecuadamente los datos con el gráfico (moda dibujada en otro valor, ...); obtención de parámetros estadísticos de forma errónea a través de los valores del gráfico; diagramas de caja y bigotes mal dibujados, etc.

Problema 16. Se está realizando un estudio en el que, mediante una muestra, se pueda recoger el grado de satisfacción del alumnado del IES Río Arba con las actividades extraescolares que el centro propone. Este estudio viene incentivado al hecho de que se han recogido diversas quejas sobre el número de las diferentes actividades ofertadas y la poca innovación y variedad.

1. ¿Cuál de las siguientes opciones consideras que es la más correcta para recoger dicha muestra?
 - a. Elegir al azar una clase y realizar el estudio con esa muestra.
 - b. En la entrada al IES, elegir a los primeros 28 alumnos/as que entren.
 - c. En la salida del IES, elegir a los primeros 28 alumnos/as que salgan.
 - d. Elegir al azar 4 alumnos por grupo del alumnado de 1º E.S.O.
 - e. Elegir al azar 4 alumnos por grupo de todo el centro.
2. En una segunda muestra, se quiere recoger las actividades que propone el alumnado mantener y las que quiere añadir, una de cada por estudiante. ¿Cogerías la misma muestra de antes con el mismo alumnado? ¿Por qué? Si escogieras otra muestra, detalla cómo sería y justifica la respuesta.

Una vez tomada la muestra sobre las actividades existentes y propuestas por el alumnado, se ha separado por sexo y los datos obtenidos se han recogido en las siguientes tablas de frecuencias:

<i>Actividades existentes a mantener</i>	Frecuencias absolutas MASCULINO	Frecuencias absolutas FEMENINO	Frecuencias absolutas INDEFINIDO
<i>Baloncesto</i>	12	16	0
<i>Fútbol</i>	11	1	1
<i>Tenis</i>	3	6	0

<i>Informática</i>	2	10	12
--------------------	---	----	----

<i>Actividades propuestas</i>	Frecuencias absolutas	Frecuencias absolutas	Frecuencias absolutas
	MASCULINO	FEMENINO	INDEFINIDO
<i>Balonmano</i>	12	11	0
<i>Escalada</i>	5	3	1
<i>Dibujo</i>	4	5	0
<i>Teatro</i>	1	3	1
<i>Natación</i>	6	3	0
<i>Zumba</i>	1	4	1
<i>Bailes (bachata, salsa, etc)</i>	0	3	0

Se necesita saber, en media, sin diferenciar por sexo, si merece la pena continuar con las actividades que ofrecía el centro o si se han de actualizar. ¿Qué medida estadística usarías para saberlo? ¿Por qué? Calcula los parámetros estadísticos necesarios para poder escoger 4 actividades que presente el centro para este curso, según las respuestas del alumnado y siendo dos de ellas ya implantadas y las otras dos, nuevas. ¿Qué parámetros/s te ha ayudado a decidir las actividades? ¿Cuáles no? ¿Por qué?

Puedes crear una cuarta columna en las anteriores tablas de frecuencias, donde quede representada la suma de frecuencias de cada actividad, independientemente del sexo. ¿Coincide en suma el número de personas que quieran realizar alguna actividad? ¿Cuál? ¿Genera un problema para poder elegir solo 4 actividades? Explica por qué sí o por qué no.

3. A continuación, calcula el rango de las dos distribuciones que se muestran a continuación y que representan la edad del alumnado del sexo masculino o femenino de los anteriores apartados. ¿Qué observas? ¿Puedes indicar cuál de las dos muestras el rango representa mejor la realidad de los datos? ¿Por qué? ¿Puede haber algún dato erróneo? Si es que sí, ¿cuál o cuáles? En caso contrario, ¿existen datos atípicos? Razona tu respuesta.

<i>Sexo</i> MASCULINO	Frecuencias absolutas	<i>Sexo</i> FEMENINO	Frecuencias absolutas
12	1	12	18
13	2	13	1
14	11	14	1
15	13	15	2
45	1	45	11

¿Cómo adaptarías esta última representación para convertirla en una falacia estadística que pudiera salir en la televisión?

La intención con la primera pregunta sobre muestreo es que el alumnado sea capaz de identificar que, a mayor aleatoriedad más representativa será la muestra, por lo que sería idóneo tomar la opción e, pues se elige alumnado de todos los grupos y niveles del centro.

Por otro lado, en la segunda cuestión, al realizar la suma de frecuencias independientemente del sexo, el alumnado observará que no puede decidir dos actividades nuevas ya que una estará clara, balonmano, por ser la que aparece más veces (máxima frecuencia). Pero, para la segunda opción, hay tres actividades (escalada, dibujo y natación) que coinciden en suma de frecuencias. De esta forma, se exige que el alumnado use sus herramientas estadísticas para calcular otros parámetros y poder decidir solo una actividad. Por ejemplo, puede calcular el rango de cada deporte, considerando los sexos, y así poder decantarse por dibujo. Aunque, se debe recalcar al alumnado que no hay un único parámetro que ayude a decidir, pues existen otras alternativas y todas ellas válidas.

En el apartado 3, el rango de ambas distribuciones es coincidente, que es un valor alto, por lo que indica una dispersión grande de los datos que es mucho más real en la distribución del sexo femenino que en la del sexo masculino, ya que, en general, en estos últimos están muy poco dispersos.

Además, se observa que hay un dato erróneo, el valor 45, ya que la variable es la edad del alumnado de secundaria, por lo que 45 años es el dato erróneo que se pide. Pero, existe la posibilidad, que cierto alumnado no lo viera como erróneo, por lo que al menos debe identificarlo como un dato atípico. Por otro lado, respecto a la falacia estadística, existen también varias posibilidades, por ejemplo, representándolo gráficamente sin poner los valores de la variable, de esta forma no se apreciaría que se trata de un dato erróneo.

En el problema 14 se trabajan también diversos campos de problemas: **C.P.C.1**, **C.P.D.1**, **C.P.D.2**, **C.P.M.2**, **C.P.G.2**, entre otros. Resumiendo, campos de problemas

desde elección de una muestra hasta representación gráfica de falacias, pasando por elección de parámetros adecuados de centralización, dispersión, ...

Problema 17. Plantea un problema estadístico en el que el lugar donde vives sea representativo para tu estudio. Además, se debe cumplir las siguientes condiciones:

$$\text{moda} = \text{media} = 3$$

$$\text{mediana} = 5$$

Cambiando un solo dato de la muestra que ofrezcas en el enunciado, las condiciones deben variar a:

$$\text{moda} = 3$$

$$\text{media} = 15$$

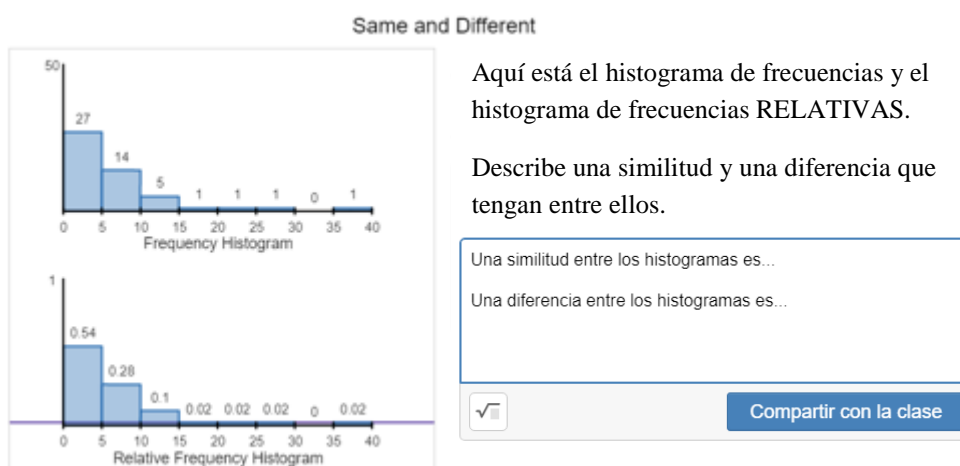
$$\text{mediana} = 5$$

Ahora déjale los datos de la segunda parte del ejercicio a tu compañero, debe tratar de adivinar cuál es el dato que has cambiado de la muestra inicial.

En este último problema se utilizan varios campos de problemas, pero es importante destacar **C.P.C.2: Construcción de muestras estadísticas que presenten unos parámetros determinados**. Además de enfatizar los cambios que puede generar en un estudio estadístico los datos atípicos.

Problema 18. El siguiente enlace muestra una actividad interactiva con Desmos. En ella vamos a trabajar diversos aspectos de la estadística que hemos visto en el aula.

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5a66721dc0333231f16a3a20?collections=featured-collections%2C5da8a6474d5c010a4455b470&lang=es>



El alumnado debe tratar de encontrar las diferencias y las similitudes entre un histograma de frecuencias y un histograma de frecuencias relativas. Otro ejercicio de esta actividad es encontrar en un conjunto de histogramas cuál no puede ser cierto, ya que sumando sus frecuencias relativas supera el 100% de la población.

Problema 19. Tras un documental que ha visto el alumnado en la clase de Historia, han estado discutiendo sobre la dispersión del peso de los hipopótamos y de los periquitos.

En el documental han escuchado algunos datos sobre los pesos de estos animales y los han debido anotar en su cuaderno.

El docente de Historia ha puesto la oreja con los comentarios del alumnado y se lo ha contado a la profesora de Matemáticas para saber su opinión y saber si alguien está en lo cierto o están diciendo disparates. Las afirmaciones que ha escuchado eran las siguientes:

- a) Hay mucha más dispersión en la población de los hipopótamos.
- b) Está claro que no podemos saberlo porque no podemos comparar gramos con kilogramos, es una locura.
- c) Pues yo creo que sí que se podrá comparar, pero habrá que utilizar otro parámetro estadístico.

¿Hay alguno de los alumnos que esté en lo cierto? En caso afirmativo, di cuál o cuáles. En caso negativo, razona por qué.

Problema 20. Tras lo sucedido en el problema anterior, la profesora de Matemáticas decide ir al aula con ciertos datos y comenta al alumnado:

- En una población de hipopótamos su peso medio es de 1600 kg y su desviación típica de 120 kg.
- En una población de periquitos su peso medio es de 35 g y su desviación típica de 10 g.

¿Qué población es más dispersa a priori? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

Ahora ayúdate de otras medidas de dispersión que te ayuden a comparar dos poblaciones, ¿sigues pensando que la población que has elegido antes es más dispersa? ¿Por qué?

En los últimos problemas, predominan los campos de problemas dirigidos a las medidas de dispersión (cálculo del coeficiente de variación, interpretación de este y diferencias con la desviación típica, etc), por lo que predominan los siguientes campos de problemas: **C.P.D.1:** *Elección de las medidas adecuadas para cuantificar la dispersión, medir la regularidad, de un conjunto de datos*, **C.P.D.2:** *Diferenciar conjuntos de datos a partir de la dispersión*, **C.P.M.1:** *Resumir la información de una muestra empleando de forma adecuada los parámetros estadísticos de centralización, dispersión y posición*, y **C.P.M.2:** *Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión*.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Tras la revisión de los campos de problemas y las actividades que se han diseñado para ellos, son claras las diferencias que se presentan respecto a las actividades que se observan en el análisis de libros de texto. En el análisis realizado en la sección

correspondiente, predominan las actividades de aplicar fórmulas para hallar parámetros estadísticos. Sin embargo, con estos problemas que se han diseñado, se crea la necesidad de que el alumnado se pregunte qué está buscando, para qué, por qué, cuál es el estudio, si la muestra que le ofrecen está bien definida o si debe buscar otra que represente mejor los datos del estudio, si está mal representado gráficamente, etc.

Es decir, se trata de una propuesta totalmente contraria a aplicar una serie de fórmulas. Se intenta conseguir que todo el alumnado sea capaz de interpretar la información que se le muestre de forma cualitativa, mediante gráficas, tablas o cualquier medida estadística. Para conseguir esto, se han diseñado los problemas para que todos puedan responder a las cuestiones que se plantean ya que existe variedad de opciones de respuesta posible, sin necesidad de conocer una fórmula de memoria.

Además, en todas las actividades se incita a que el alumnado reflexione, justifique qué está haciendo, por qué ha elegido hacerlo así, si no sabe continuar con un problema, se trata de que piense por qué y lo comente. El alumnado con esta propuesta comparte información entre compañeros, discute, razona y aprende a construir y tomar decisiones.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La estadística es una unidad didáctica que suele dejarse de lado en la educación secundaria obligatoria, ya que se tiende a dejarlo para final del tercer trimestre y debido a la extensión del temario y al poco tiempo disponible, acaba esta unidad en el olvido o se enseña rápidamente o viendo solo conceptos puntuales sin profundizar en ella.

Sin embargo, es una unidad muy útil para el alumnado, para su vida diaria, para entender con una mirada crítica la información de la prensa, entre otros medios en los que aparece diariamente la estadística.

Esta propuesta está basada principalmente en una metodología activa y en la enseñanza a través de la resolución de problemas.

Se intenta que todo el alumnado adquiera una autonomía suficiente para poder entender de forma cualitativa los conceptos estadísticos que puedan aparecer en su día a día y aprenda de forma continua, sin excluir a ningún estudiante.

Para ello, el grado de dificultad de las actividades planteadas se lo ponen ellos mismos, ya que se incita constantemente a la reflexión y al razonamiento de lo que realizan y de las decisiones que toman. Así se intenta conseguir que el aprendizaje de la estadística unidimensional en este alumnado sea significativo. Las fórmulas se pueden olvidar, pero el aprendizaje que pueden adquirir entendiendo lo que sucede en cada situación es mucho más eficaz, útil y reconfortante para ellos mismos.

Se le entregará al alumnado todas las actividades fotocopiadas que se irá trabajando en el aula convencional, así como todo el material que se necesite inusual. Además, se aprovecharán lo máximo posible los recursos tecnológicos de los que se disponga, si el alumnado no dispone de tablet individual o portátiles en el aula, se

reservará previamente la sala de informática del centro para las sesiones que sea necesaria esta (Desmos, Excel, *Kahoot*, etc).

En las sesiones que se precise trabajar por grupos, se organizará el aula de forma adecuada para poder realizar las actividades. En estas clases se intenta promover el aprendizaje cooperativo, pues ayuda a fortalecer o entender conceptos ya que las explicaciones entre iguales pueden ser a veces menos confusas. Las sesiones donde el alumnado trabaje por parejas o de forma individual, no se realizarán cambios en el aula.

F. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

En este apartado se van a ver distintos ejercicios que se presentarán en el aula y que sirven para practicar las técnicas asociadas a los campos de problemas vistos en la anterior sección.

Ejercicio 1:

Di si consideras que serían correctas o no las siguientes afirmaciones. Justifica tu respuesta. En caso de ser incorrecto, ¿cómo modificarías la frase para que fuera correcta?

- a) Un laboratorio está realizando controles de calidad para una posible vacuna contra el Covid y decide tomar como muestra un número determinado de personas cuyas edades se comprenden entre 50 y 60 años.
- b) Para elaborar un censo se necesita a toda la población.
- c) Para elaborar un censo se necesita a todos los individuos.
- d) En un laboratorio se toma una muestra de 10 tubos de sangre para saber si influye la cantidad de glóbulos blancos en sangre en la resistencia frente al Covid. La muestra que se ha tomado pertenece a un grupo de edad de 26 años y el laboratorio afirma que la muestra es representativa.

Ejercicio 2:

Se quieren utilizar diversas variables estadísticas para realizar un estudio sobre los hobbies de los adolescentes en Zaragoza. Para ello, necesitan tu ayuda y debes decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas y corrige la afirmación en caso de ser falsa.

- Es útil para este estudio la edad de los individuos que compongan la muestra.
- Es necesario que una variable sea el número de hermanos de cada individuo.
- El tiempo de duración de la bombilla del cuarto donde duerme cada individuo es una variable cualitativa importante para este estudio.
- El color de pelo es una variable cuantitativa discreta.
- La velocidad de navegación de Internet de sus ordenadores es una variable cualitativa continua.
- El número de actividades extraescolares por individuo es una variable cuantitativa continua.

- Qué deportes practica cada uno es una variable cualitativa.
- Qué lugar suelen visitar los fines de semana no es una variable interesante para este estudio, pero se trata de una variable cuantitativa discreta.

Ejercicio 3:

Se está realizando un estudio sobre a qué años dejar de tomar leche entera. Y se recoge la siguiente muestra que representa la edad de cada individuo:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

- Calcula la media, moda y mediana. ¿Observas algo al calcular estas medidas? ¿El qué? Si al realizar los cálculos no observas nada particular, explica que crees que debería ocurrir justificado al observar el conjunto entero, así como se te presenta.
- Fíjate ahora en el conjunto de datos, ¿tiene algo especial? ¿el qué? Pon un ejemplo de un conjunto de números que tenga esa misma característica especial.

Ejercicio 4:

Se vuelve a tomar una muestra para el estudio del ejercicio anterior, pero esta vez es más pequeña. ¿El siguiente conjunto de números es simétrico? Razona tu respuesta.

2, 5, 5, 6, 7

Este conjunto de números tiene algo especial, su media, mediana, moda y rango coinciden, pues todos ellos son 5.

Encuentra otro conjunto de 5 números enteros positivos tales que:

$$\text{media} = \text{moda} = \text{mediana} = \text{rango}$$

Si no encuentras ningún conjunto, razona qué propiedades debería cumplirse para que sucediera lo anterior.

Ejercicio 5:

Dados los siguientes valores de una muestra de ocho individuos pero que solamente conocemos estos seis:

3, 4, 6, 6, 6, 11,

—, —

- Completa la muestra de forma que tenga la misma media que sin esos dos números de más, pero la desviación típica aumente.
- Completa la muestra de forma que de nuevo tengan la misma media, pero la desviación típica disminuya.
- ¿Tiene alguna particularidad el conjunto que daban inicialmente de 6 elementos? Si no ves nada a simple vista, puedes probar a calcular la moda, la mediana y la media. ¿Ves ahora algo? ¿El qué?

Ejercicio 6:

¿Puede ser que el valor de la media no coincida con ningún valor de la variable? ¿Y el de la moda? Justifica tus respuestas.

Ejercicio 7:

La profesora de matemáticas ha tomado algunas de las notas del último examen de esta clase.

- a) Primero ha tomado los 4 primeros de la lista y ha calculado la media de estos, que es 6.1, ¿cuánto es la suma de las cuatro notas? Razona la respuesta. Da un ejemplo, de cuatro notas que cumplan lo anterior.
- b) Después ha tomado los 6 siguientes de la lista, y la media es 5.2, ¿cuánto es la suma de las seis notas tomadas en esta última muestra? Da una posible mediana de este subconjunto de 6 números. Razona tus respuestas.
- c) Una vez llegado a este punto, veo que entiendes bien el concepto de media y mediana. Realizamos una pausa para compartir con el resto de compañeros las posibles soluciones que aparecen en los dos apartados anteriores.
- d) A continuación, toma todas las notas de clase y observa que la mediana es 6. ¿Qué quiere decir esto? ¿Cómo lo interpretas?
- e) Por último, da la media de todos los números juntos, es decir, la media de los números que suman el apartado a) con el b).

¿Ya se tienen los datos suficientes para poder representarlo gráficamente mediante un diagrama de caja y bigotes? En caso afirmativo, dibújalo. En caso negativo, realiza todo lo necesario para poder representarlo (tablas de frecuencias, cuartiles, ...) y hazlo.

Una vez dibujado, compara tu diagrama con el de tu compañero de al lado. ¿Se diferencian mucho? ¿Cuál es más simétrico? ¿Y más asimétrico? ¿Por qué crees que es así? ¿Alguno tiene datos atípicos? Si es que sí, ¿se han representado correctamente en la gráfica?

Ejercicio 8:

En el telediario comentan que la economía en el país vuelve a fracasar, pero el alumnado de esta clase no está conforme con lo que dicen y piensan que se trata de una falacia, por lo que han decidido realizar un mini estudio de si es esto cierto.

Para ello, cada uno al volver hoy a casa deberéis anotar tres cantidades sobre ingresos mensuales, ya sea a familiares, vecinos, conocidos, etc.

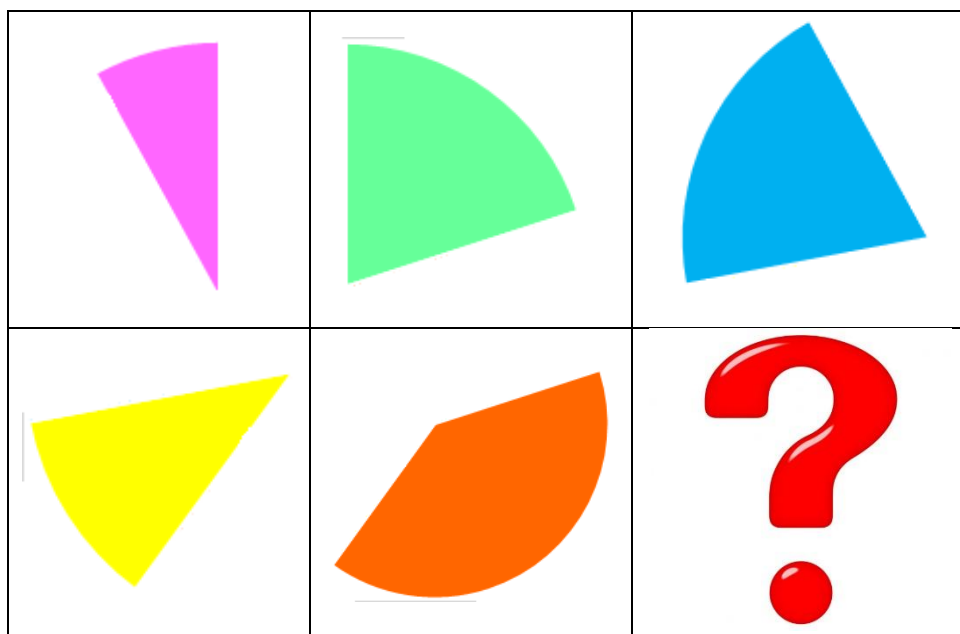
El próximo día seguiremos los siguientes pasos:

1. Juntamos todos los datos que hemos recopilado.
2. Contestamos a las siguientes preguntas:
 - a. ¿Cuánto es en media el ingreso mensual de la muestra?
 - b. ¿Cuánto es el 25% de ingresos más altos de la muestra?

- c. ¿Entre qué cantidad está el 75% de la serie de datos?
 - d. ¿Estás de acuerdo con lo que han comentado en el telediario? Razona tu respuesta.
3. Representa gráficamente este estudio para que el telediario pueda publicar dicha gráfica que represente los datos de una muestra de la población.

Ejercicio 9:

Al preguntar la docente a su alumnado en una clase de 25 alumnos qué animales tienen de mascota, 10 de ellos contestan que un perro. ¿Qué sector del diagrama de sectores que se formaría con toda la muestra pertenece al valor 10 de la variable “perro”? Justifica tu respuesta.



Ahora da posibles datos y nombres de variable para el resto de sectores circulares que formarían el gráfico entero.

Ejercicio 10:

En las siguientes imágenes se refleja las compras que han realizado en el supermercado Inés y Sara.

COMPRA INÉS

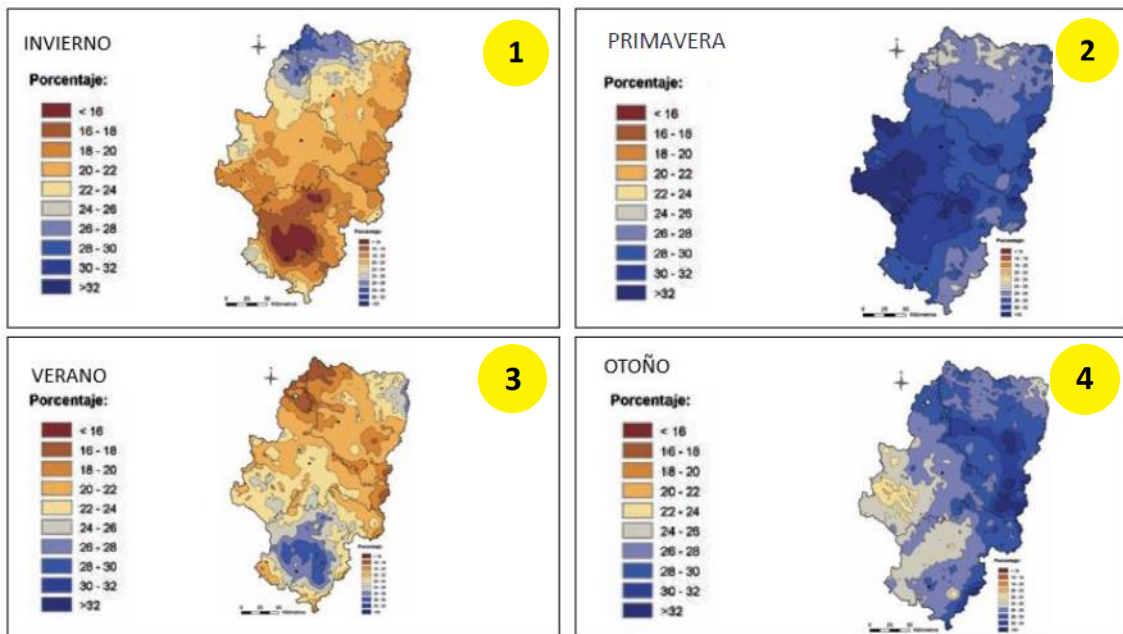
COMPRA SARA



- ¿Qué puedes decir sobre la compra? ¿Tienen alguna medida estadística en común? En caso afirmativo, ¿cuál/es? ¿En qué te basas? En caso negativo, justifica tu respuesta.
- A continuación, representa gráficamente con ayuda de una hoja de cálculo la compra de ambas en una misma gráfica.
 - ¿Qué tipo de variables son?
 - ¿Qué tipo de gráfico sería el adecuado en este caso?
- Observando el gráfico, ¿cuáles son las frecuencias absolutas? ¿Y la moda? ¿Alguna de estas preguntas responde a la primera sobre qué puedes decir sobre la compra? Explícalo detalladamente.
- ¿Se tratan de dos distribuciones simétricas? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Gráficamente podrías decir que son iguales las compras si no supieras los valores del eje horizontal? ¿Es correcto representar las dos gráficas en una sola? Razona tu respuesta.

Ejercicio 11:

Las siguientes gráficas estadísticas representan el porcentaje de la precipitación estacional respecto al total anual.



- ¿Existe en alguno de ellos una moda bien definida y clara a simple vista? ¿De qué moda se trata y en qué gráfico/s?
- ¿Cuál es la mediana en el gráfico de la estación de invierno?
- ¿Observas grandes variaciones entre algunos de los gráficos? ¿Entre cuáles? ¿A qué se debe? Justifica tus respuestas.

La agencia estatal de meteorología (AEMET) ha comentado en televisión que este verano ha llovido menos que de costumbre, para ello ha comparado el gráfico 2 con el 3. ¿Se trata de una falacia estadística? ¿Está en lo cierto? ¿Por qué? ¿Qué le recomendarías a AEMET estadísticamente hablando?

Ejercicio 12:

Escribe en un papel todas las palabras, definiciones, lo que se te ocurra, todo lo que sepas referido a la estadística. Una vez escrito, realizaremos en la pizarra una lluvia de ideas entre todos para ver qué sabemos que antes no supiéramos.

Vemos el siguiente vídeo para resumir lo aprendido (hasta minuto 4:36):

<https://www.youtube.com/watch?v=QditfY6P8uc>

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Las técnicas en esta propuesta didáctica van estrechamente relacionadas con los campos de problemas que se han visto anteriormente.

A continuación, se muestra una breve explicación de las técnicas empleadas en los ejercicios propuestos en el apartado anterior, y en el siguiente apartado se verá la mención a los campos de problemas que van asociadas estas técnicas.

T.1: *Identificar los elementos que componen una población: individuo, muestra, población, etc.*

Dado un problema, actividad o ejercicio, el alumnado debe ser capaz, mediante las definiciones que conoce de los conceptos generales sobre estadística, poder diferenciar distintos aspectos como son: los individuos de una población, la muestra recogida, la población a la que pertenecen esos individuos y esa muestra, los caracteres, es decir, los aspectos que se quieren estudiar de los individuos de una población, etc.

En el *ejercicio 1* del apartado anterior se refleja adecuadamente el uso de esta técnica.

T.2: *Reconocer la variable estadística a estudiar y su tipo: cualitativa o cuantitativa (discreta o continua).*

De nuevo, dado un ejercicio, estudio estadístico o problema contextualizado, el alumnado debe detectar cuál es la variable estadística de interés a estudiar. Una vez detectada, debe distinguir qué valores toma y así poder clasificar de qué tipo es y con ello, analizar y resumir la información que se puede conocer de ella.

Esta técnica se emplea claramente en el *ejercicio 2* de técnicas.

T.3: *Cálculo correcto de medidas de centralización, dispersión y posición.*

Además de conocer los parámetros estadísticos disponibles para poder extraer información de un estudio estadístico o una muestra de una población, el alumnado debe saber calcularlos correctamente. Aquí no es de especial interés cómo calcule esas medidas estadísticas, sino que, sea por el camino que sea, el alumnado las calcule correctamente y sepa justificar por qué sabe que está bien o está mal.

De forma implícita esta técnica aparece en todos los ejercicios propuestos, pero en concreto en los *ejercicios 3, 4, 5 y 7*, es clara la aplicación de dicha técnica.

T.4: *Ejercicios y problemas contextualizados para hallar parámetros estadísticos, así como su análisis, discusión, comparación e interpretación correcta de las medidas a través de tablas de frecuencias.*

Interesa que el alumnado sea capaz de forma autónoma de realizar todo el proceso que conlleva un estudio estadístico. Debe saber interpretar más allá los parámetros estadísticos que calcule, debe saber cómo interpretarlos, qué quiere decir esa interpretación que haga, comparar medidas estadísticas para llegar a ciertas conclusiones y/o decisiones.

Algunos ejercicios donde el alumnado puede desarrollar esta técnica son los *ejercicios 4 y 7*.

T.5: *Interpretación y representación gráfica de parámetros estadísticos dependiendo del gráfico correspondiente (diagrama de barras, histograma, diagrama de caja, etc.).*

Dada una variable estadística y su conjunto de datos presentados en forma tabular, verbal, o mediante tablas de frecuencias, el alumnado debe adquirir las capacidades para

saber representar toda la información de la que disponga o que haya calculado mediante gráficos estadísticos.

Dependiendo del tipo de variable estadística, tiene que saber qué gráfico es el que puede utilizar para esa variable (diagrama de sectores si es variable cualitativa, por ejemplo).

Además, también debe conocer la información de forma viceversa, es decir, dado un gráfico estadístico, según el tipo de gráfico, a qué variable puede pertenecer, aunque no conozca los valores de los datos de dicha variable.

Un ejemplo de aplicación de esta técnica se ve en el *ejercicio 7*.

T.6: *Construcción correcta de los distintos tipos de gráficos.*

El alumnado debe conocer cómo se representa cada gráfico, qué elementos, datos o medidas estadísticas necesita para construir cada uno de ellos, así como hacerlo correctamente.

En todos los ejercicios donde se deba realizar una representación gráfica aparece esta técnica, por ejemplo, en el *ejercicio 7*.

T.7: *Análisis de medidas de dispersión entendiéndolas como la concentración o la lejanía de los datos en torno a la media, variabilidad de los datos.*

Esta técnica se basa en la comprensión profunda de los parámetros estadísticos, es decir, entender qué le ocurre a la variable, su dispersión, la variabilidad de los datos, cómo se comporta según se acercan o se alejan a la media.

En el *ejercicio 5* se hace uso de esta técnica.

T.8: *Conocer los parámetros de posición no centrales como puntos también característicos de una distribución como lo son los valores centrales.*

Entender que los cuartiles 1 y 3, a pesar de no ser valores centrales de una distribución, también ayudan a definir cómo se comporta la variable y que, gracias a ellos, se pueden realizar agrupaciones de la muestra.

El *ejercicio 8* es un ejemplo de aplicación de esta técnica.

T.9: *Ser capaz de describir un gráfico o resumir la información que se pueda extraer de él (correspondería al nivel de Friel et al. (2001), leer los datos).*

Dado en el enunciado un gráfico estadístico o realizado por el alumnado, debe saber extraer la información visible de éste, como, por ejemplo, cuáles son las frecuencias absolutas en un histograma.

Algunos ejemplos de aplicación de esta técnica son el *ejercicio 9* y el *ejercicio 10* (frecuencias absolutas).

T.10: *Interpretar e integrar los datos de un gráfico encontrando relaciones entre subconjuntos de datos (leer entre los datos (Friel et al., 2001)).*

Consiste en saber analizar un gráfico, es decir, además de los datos visibles, observar cuál es la moda o la mediana, por ejemplo, sin tener que calcularlas.

En el *ejercicio 10*, en la pregunta de la moda se aplica esta técnica.

T.11: *Saber realizar predicciones relacionando datos u observando y comparando parámetros estadísticos que se hayan calculado (leer más allá de los datos (Friel et al., 2001)).*

Reconocer qué está comunicando el gráfico para poder predecir decisiones, ir más allá de los datos.

Esta técnica es usada en el *ejercicio 10* en la pregunta que concierne a la simetría de la distribución.

T.12: *Integrar la información extraída para valorar el modo de recogida de los datos, así como el análisis que supone la toma de decisiones (leer detrás de los datos (Friel et al., 2001)).*

De nuevo, respecto a gráficos estadísticos, esta técnica trata de ver mucho más allá, de observar, analizar y razonar qué información se puede extraer del gráfico para resumir toda ella y poder tomar decisiones.

El *ejercicio 11* es un ejemplo de aplicación de esta técnica.

T.13: *Resolución de ejercicios o problemas contextualizados desde las TIC (en concreto, hojas de cálculo y Desmos). En el caso de las hojas de cálculo, se quiere que resuelvan las actividades, organizando en tablas de frecuencias y/o gráficos la información.*

El objetivo principal de esta técnica es conseguir que el alumnado se dote de habilidad con el manejo de las TIC desde las Tecnologías de Apoyo a la Diversidad, valorando, en el caso de la hoja de cálculo, la capacidad de utilizarla de forma adecuada según el contexto estadístico que se presente.

Por ejemplo, el *ejercicio 10* emplea esta técnica.

T.14: *Justificación de fórmulas si son necesarias aplicarlas.*

Esta técnica intenta que el alumnado refuerce sus argumentaciones, la forma de razonar y/o definir sus pensamientos. Por ejemplo, si para resolver un problema al alumnado solo se le ocurre aplicar una fórmula se insta a que expliquen por qué creen que no saben resolverlo de otra manera. O si no saben resolver un ejercicio, o si al resolverlo cometen algún error o fallo en los cálculos, pero se dan cuenta, esta técnica refuerza que el alumnado se explique. Se quiere que identifiquen el fallo y que expliquen y razonen como seguirían resolviendo el problema si los cálculos fueran correctos.

Se puede ver reflejada en los *ejercicios 3* (última parte del apartado a)) y 6.

3. Dichas técnicas, ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Las técnicas y los campos de problemas presentados en esta propuesta didáctica están totalmente relacionados.

Dichas técnicas no solo se ponen en práctica en los ejercicios propuestos para estas, sino también en los problemas y actividades planteados para el desarrollo de los campos de problemas, así como en los propuestos como razón de ser del objeto matemático.

El fin tanto de las técnicas como de los campos de problemas es que el alumnado pueda desarrollar de forma crítica y autónoma sus capacidades para adquirir los conocimientos necesarios y así poder tomar decisiones respecto a la enseñanza sobre la estadística que se le propone. Así pues, las actividades que se plantean se relacionan con la vida cotidiana del estudiante en su mayoría permitiendo acercar el interés del alumnado con el objeto matemático tratado.

A continuación, se van a relacionar, mediante la Tabla 3, las técnicas con los campos de problemas, mostrados anteriormente, para ver su estrecha conexión.

TÉCNICAS	CAMPOS DE PROBLEMAS
T.1, T.2	C.P.N.G
T.3, T.4	C.P.C.1, C.P.C.2, C.P.D.1, C.P.D.2, C.P.P.1, C.P.M.1, C.P.M.2
T.5, T.6	C.P.G.1
T.7	C.P.D.1, C.P.D.2
T.8	C.P.P.1
T.9	C.P.G.2.1, C.P.G.2.2
T.10	C.P.G.2.3, C.P.G.2.4
T.11	C.P.G.2.5
T.12	C.P.G.2.6
T.13	Implícitamente o explícitamente en todos los campos de problemas

Tabla 3: Relación entre las técnicas y los campos de problemas.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Los ejercicios que se han propuesto en esta sección para el desarrollo de las técnicas, serán intercalados con las actividades planteadas para el desarrollo de los campos de problemas.

El orden a seguir a priori será el que se ha estipulado en los ejercicios, recordando que será intercalado con las actividades de los campos de problemas y siempre iniciado un objeto matemático nuevo mediante un problema del estilo que se ha

planteado en el apartado de razón de ser. Este orden no será permanente, ya que siempre habrá que adecuarse a las necesidades que surjan en el aula por parte del alumnado, así como sus intereses.

Si las necesidades del alumnado lo precisan, se pueden emplear contextos con problemas similares a los realizados para ejercitar las técnicas.

Para poner en práctica las técnicas, el alumnado dispondrá de las fotocopias necesarias con las actividades creadas, así como de todo el material que se necesite en cada ejercicio.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

En esta propuesta didáctica aparecen ciertas tecnologías como justificación de las técnicas definidas en la sección anterior. Es totalmente necesario mostrar estas tecnologías en el aula para facilitar la comprensión de conceptos novedosos o incluso ya estudiados anteriormente.

Las tecnologías que se definen a continuación, vistas brevemente en la primera sección, se basan principalmente en definiciones de conceptos generales sobre estadística, así como de parámetros estadísticos y, por otro lado, métodos para la construcción de gráficos.

TG.1: *Definiciones informales sobre nociones generales de estadística mediante argumentos, por parte del alumnado, que diferencie la parte (individuo) del todo (muestra o población). Así como la capacidad de razonar y estudiar los tipos de variables estadísticas relacionándolas con su día a día.*

TG.2: *Definiciones coloquiales sobre las medidas de centralización, razonando y entendiendo las ventajas e inconvenientes de usar medidas centrales en un estudio estadístico.*

TG.3: *Definiciones informales sobre las medidas de dispersión, comprendiendo y argumentando las diferencias con otros parámetros estadísticos y entendiendo la robustez de estas medidas frente a las de centralización o posición.*

TG.4: *Definiciones coloquiales sobre las medidas de posición y argumentación sobre las posibles comparaciones a la hora elegir correctamente un parámetro estadístico.*

TG.5: *Relacionar el significado que toma una medida de dispersión con la concentración o la lejanía de los datos en torno a la media, variabilidad de los datos.*

TG.6: *Interpretar la definición informal de las medidas de posición analizándolas verbalmente o gráficamente.*

TG.7: *Considerar aspectos relevantes para la construcción de un gráfico estadístico (elección correcta del tamaño del intervalo, ...).*

TG.8: *Construcción de los distintos gráficos según lo que se quiera representar y el tipo de variable estadística.*

TG.9: *Razonamientos informales de carácter verbal que justifique la toma de decisiones, la elección de qué parámetros estadísticos utilizar, el reconocimiento de falacias estadísticas, la elección de la representación gráfica, entre otros.*

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

La responsabilidad de llevar a cabo las tecnologías principalmente es del alumnado, pero con la docente siempre de guía. Es decir, es el alumnado el que constantemente en cada problema crea la necesidad de justificar qué está haciendo y por qué, ya que las actividades están orientadas en este sentido.

Por tanto, principalmente es el alumnado quien tiene la responsabilidad de justificar las técnicas, pero no en todo momento, ya que en el aula se creará la necesidad, sobre todo en conceptos nuevos, de que sea la docente quien defina o explique estos. En otros casos, según lo precise el momento en el aula, estas tecnologías se verán mediante una puesta en común entre iguales o un debate entre alumnado y docente.

Mediante las tecnologías se intentará que el alumnado sea capaz de analizar el estudio estadístico y de razonar todas las acciones que necesite realizar para resolver el problema.

Con esta propuesta se intenta evitar el trabajo limitado a la aplicación de fórmulas, así como su aprendizaje memorístico. Intentando favorecer e incrementar la capacidad de razonamiento mediante las definiciones y propiedades de las medidas estadísticas que el alumnado aprende. Es decir, se quiere conseguir una comprensión profunda sobre el significado de cada objeto matemático a tratar.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Al igual que ocurre en la sección anterior con las técnicas, la justificación de estas, es decir, las tecnologías, vendrán intercaladas con las razones de ser, los campos de problemas y con las técnicas, adecuándose a las circunstancias momentáneas.

Tal como se ha podido apreciar en esta propuesta, sobre todo en las actividades planteadas para los campos de problemas, la institucionalización no se realizará nunca antes de haber visto el alumnado la razón de ser del objeto matemático a tratar.

El diseño de las actividades ha sido pensado para que el alumnado de forma autónoma cree la necesidad de introducir un objeto matemático nuevo para resolver una cuestión, un problema o, en general, poder seguir con su proceso de estudio estadístico.

Siempre se ofrecerá el tiempo necesario en las actividades planteadas para que todo el alumnado sea capaz de crear ese conocimiento, y la institucionalización se realizará a posteriori de esa adquisición del saber matemático del objeto tratado.

Así pues, como se ha indicado previamente, los campos de problemas, técnicas y tecnologías están estrechamente unidos, por lo que la institucionalización de las tecnologías se realizará tras realizar las actividades y ejercicios planteados en los campos de problemas y en las técnicas, y en el momento adecuado en el orden que se aprecia en la siguiente tabla de conexión (ver Tabla 4):

CAMPOS DE PROBLEMAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
C.P.N.G	T.1	TG.1, TG.9
	T.2	
	T.14	
C.P.C.1	T.3	TG.2, TG.9
	T.4	
	T.14	
C.P.C.2	T.3	TG.2, TG.9
	T.4	
	T.14	
C.P.D.1	T.3	TG.2
	T.4	
	T.7	TG.3
	T.14	TG.9
C.P.D.2	T.3	TG.2
	T.4	
	T.7	TG.3
	T.14	TG.9
C.P.P.1	T.3	TG.2
	T.4	
	T.8	TG.6
	T.14	TG.9
C.P.M.1	T.3	TG.2, TG.9
	T.4	
	T.14	
C.P.M.2	T.3	TG.2, TG.9
	T.4	
	T.14	
C.P.G.1	T.5	TG.7, TG.8, TG.9
	T.6	
	T.14	

C.P.G.2	T.9	TG.7, TG.8, TG.9
	T.10	
	T.11	
	T.12	
	T.13	
	T.14	
C.P.G.2.1	T.9	TG.7, TG.8, TG.9
	T.14	
C.P.G.2.2	T.9	TG.7, TG.8, TG.9
	T.14	
C.P.G.2.3	T.10	TG.7, TG.8, TG.9
	T.13	
	T.14	
C.P.G.2.4	T.10	TG.7, TG.8, TG.9
	T.14	
C.P.G.2.5	T.11	TG.7, TG.8, TG.9
	T.14	
C.P.G.2.6	T.12	TG.7, TG.8, TG.9
	T.14	
C.P.G.3	T.5	TG.9, TG.9

Tabla 4: Técnicas y tecnologías asociadas a cada campo de problemas.

El orden indicado es el elegido por la autora, pero se recomienda realizar un orden propio para cada aula ya que depende de las necesidades del grupo clase.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Las tecnologías necesarias para esta secuencia didáctica se verán forzadas a aparecer en el transcurso de la resolución de las actividades planteadas en los campos de problemas y de los ejercicios propuestos para las técnicas. En ellos, se le pide al alumnado razonar constantemente lo que hace o deja de hacer, debe justificar las respuestas que da, por tanto, es ahí cuando aparecen esas tecnologías que justifican cada técnica.

De esta manera, la metodología empleada es esencialmente activa, continua, formativa y, casi en su totalidad, autónoma. El transcurso a seguir para implementarlo en el aula viene dado principalmente por el siguiente orden:

En primer lugar, el alumnado comienza a realizar las actividades propuestas en campos de problemas. En cada una aparece la necesidad de un nuevo objeto matemático que el alumnado desconoce, y es él mismo quien va descubriendo cómo conocerlo y adquirirlo. Seguidamente, se refuerza el concepto mediante los ejercicios planteados en la sección de técnicas. Y, por último, se institucionalizan las tecnologías que justifican las técnicas que han asociado, pero estas tecnologías ya le han ido apareciendo al

alumnado en la resolución de la actividad, unas veces de forma implícita y otras de forma explícita.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

Se trata de una secuencia didáctica que abarca una unidad didáctica entera (estadística unidimensional). Además, como se quiere profundizar en todos y cada uno de los conceptos que el alumnado va a ir adquiriendo, va a tener una extensión considerada.

Como se trata de un aula de 4º E.S.O de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas y cursan esta asignatura cuatro veces a la semana, con una duración de 50 minutos cada día, se estima que aproximadamente la duración de esta secuencia será de cuatro semanas.

En la Tabla 5 se recoge un posible cronograma para esta secuencia didáctica donde se muestran los problemas de razón de ser, las actividades de campos de problemas y los ejercicios sobre la aplicación de técnicas. Principalmente las tareas para casa será puntualmente acabar actividades que no haya dado tiempo a terminar en el aula.

En dicha tabla no se recoge en las sesiones los momentos de institucionalización, ya que se desarrollarán en el aula a la par que se realizan las actividades, problemas o ejercicios. Los problemas diseñados dan lugar, por sí mismos, al momento adecuado para la institucionalización siempre que sea necesaria que se sabrá gracias al *feedback* continuo con el alumnado.

SESIÓN	CONTENIDOS	PROBLEMAS DE RAZÓN DE SER	ACTIVIDADES DE CAMPOS DE PROBLEMAS	EJERCICIOS DE TÉCNICAS
1	Evaluación de contenidos previos → Prueba inicial: <i>One Minute Paper</i> + <i>Kahoot</i> . Gráfica sobre nociones generales.			
2	Se comenzarán a trabajar las actividades referidas a conceptos generales de estadística unidimensional.	Problema 1 con técnica 1-2-4	1, 2, 3, 4, 5	1, 2
3				
4	Se iniciará la actividad clave de esta propuesta: Actividad jugadoras de basket. En esta sesión se trabajará: medidas de		6 (a, b, c, d, e)	

	centralización y de dispersión.			
5	Se continua con la actividad del día anterior: continuamos con la regularidad.		6 (f, g, h, i, j)	
6	Actividad jugadoras de basket: finalizamos el enfoque profundo del concepto de dispersión.		6 (k, l, m, n, pregunta clave encuadrada, o)	
7	Afianzamos los conceptos aprendidos hasta ahora: medidas de centralización, dispersión y posición.			3, 4, 5, 7 (a, b, c, d, e)
8	Continuamos con la actividad de las jugadoras de basket para comenzar a desarrollar conocimientos sobre los gráficos estadísticos.		6 (p, q, r, s)	
9	Finalizamos la actividad de las jugadoras con el análisis y razonamiento que hay detrás de gráficos estadísticos y con un WODB.		6 (t, u, v, w)	
10	Fortalecemos los conocimientos adquiridos mediante otros WODB, gráficos, etc.		7, 8	7, 9, 10
11	Realizaremos gráficos estadísticos, así como el cálculo de medidas estadísticas, mediante herramientas tecnológicas (Hojas de Cálculo, Desmos)		9, 10, 11, 12, 13, 14	
12	Aprendemos el concepto de falacia	Problema 2	15	11

	estadística y se realiza explicación detallada del mini-proyecto que deben realizar.			
13	Repaso de todo lo aprendido y resolución de dudas.		16, 17, 18, 19, 20	6, 12
14				
15	Exposición del mini-proyecto, examen de cuaderno y <i>Kahoot</i> .			
16	Prueba escrita		Se trabajan todos los campos de problemas, técnicas y tecnologías.	
17	Entrega de exámenes, debate en el aula y corrección en la pizarra.			

Tabla 5: Secuenciación didáctica.

I. Sobre la evaluación

Respecto a la evaluación, como se va a tratar una unidad didáctica completa (objeto matemático: estadística unidimensional), se evaluará y calificará, no solamente con una prueba escrita, sino que intervendrán otros aspectos.

Debido a la mención, en anteriores apartados, de la importancia sobre que el alumnado sea capaz de analizar, reconocer e interpretar el empleo de la estadística en los medios de comunicación, el alumnado deberá realizar un mini-proyecto denominado: Falacias estadísticas.

Para evaluar al alumnado, será importante el trabajo diario en el aula, ya que la docente constantemente tomará nota de lo que esté sucediendo ahí.

Por otro lado, la prueba escrita que se presenta más adelante, reflejará el trabajo diario realizado en el aula, siendo actividades similares, incluso iguales a las que ha hecho el alumnado en clase.

La nota final de esta unidad y, con ello, de este objeto matemático, se verá implicada mediante los siguientes porcentajes:


- 15 % → trabajo en el aula. Se valorará todo lo que se haga o se mande hacer en el aula (evaluación inicial, *One Minute Paper*, *Kahoot*, trabajo diario anotado en el cuaderno del profesor, actitud matemática, etc).
- 5 % → examen de cuaderno. Como todos los días se trabajarán actividades en el aula, ningún alumno/a tendrá problema en superarlo. Ver un posible examen de cuaderno diseñado para esta unidad en Anexo: Examen de cuaderno. Todas las actividades serán muy similares a lo que han realizado en el aula y tienen en su

cuaderno. Se realizarán las adaptaciones oportunas dependiendo del debate que haya surgido en el aula.

- 40 % → mini-proyecto: Búsqueda de falacias estadísticas. Se expondrá en clase qué tendrá que hacer cada alumno/a y se enviará un guion para la realización del proyecto mediante el *classroom*. De este porcentaje, 30% será el informe que habrá que entregar a la docente y el 10% restante una mini presentación en el aula de 2-5 minutos (un 5% de este 10% será calificado mediante una evaluación entre iguales con una rúbrica que será entregada a cada estudiante - ver Anexo: Rúbrica proyecto). Un posible guion se muestra en Anexo: Guion del proyecto.
- 40 % → prueba escrita, examen. Se verá en el siguiente apartado.

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

Para la elaboración de la primera actividad de la prueba escrita, la docente se habrá coordinado con el profesorado de Educación Física del aula, para coincidir esta unidad con baloncesto. El objetivo principal es poder emplear las canastas del propio alumnado en la actividad 1 de la prueba escrita.

	MATEMÁTICAS APLICADAS 4º ESO	FECHA
	ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL	
GRUPO	NOMBRE Y APELLIDOS	NOTA

Actividad 1:

En la clase de educación física de 4º C, se ha pedido a los estudiantes que apuntaran las canastas metidas en 4 partidos de basket. Se quiere realizar un estudio estadístico para ver a quién de ellos sacaría el entrenador, Fran, en un partido en el que van perdiendo de 5 puntos y queda medio minuto. En la siguiente tabla se recoge algunos de los datos obtenidos:

	Partido 1	Partido 2	Partido 3	Partido 4
Imanol	4	1	3	4
Chema	5	0	4	3
Alberto	1	1	3	7
Jairo	6	3	2	1

- a) Determina la población, muestra, individuo y variable estadística a estudiar. ¿Qué tipo de variable es? ¿En qué te basas para decidir ese tipo de variable? Decidido el tipo de variable que es, si tuvieras que representarlo gráficamente,

¿cuál crees que es el gráfico más adecuado para esta variable estadística? Pon un ejemplo de variable estadística que pueda aparecer en el estudio de estos jugadores de baloncesto pero que sea de distinto tipo e indica de qué tipo es. Para esta variable nueva, indica qué tipo de gráfico podría representar mejor sus datos. ¿Por qué? ¿Coincide con el tipo de gráfico elegido para la variable estadística del enunciado inicial? **(3 puntos)**

- b) ¿Cuál es la media de cada jugador? ¿Qué observas? Dados los resultados obtenidos, ¿puedes tomar alguna decisión sobre a qué jugador sacar ese último medio minuto? **(2 puntos)**
- c) ¿Todavía no has decidido a qué jugador sacar? Valora la regularidad de estos gráficamente. Para ello, argumenta de forma verbal cuál es más disperso, cuál menos y en qué te basas.

Calcula las medidas de dispersión que te permitan decidir a qué jugador sacar el último medio minuto. ¿Quién es más regular? ¿Por qué? ¿Y el menos? ¿Por qué? ¿A quién sacarás según lo que has razonado? **(2 puntos)**

Actividad 2:

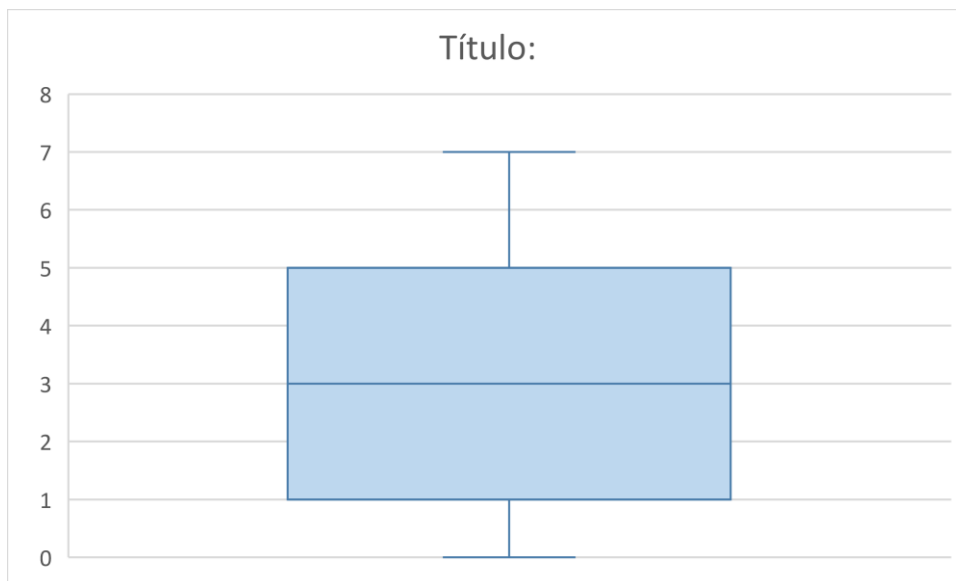
Las notas del último examen de matemáticas de los alumnos de 4º ESO, se recogieron en una tabla y de esa tabla se ha recogido la siguiente muestra:

1,5	6,2	8,55	9,2	2,6	3	4,5	5,55
7,6	8	8,8	5,3	5	9,5	9,2	8,1

- a) ¿Cuál dirías que es el número de intervalos ideal según el número de datos de esta muestra? ¿Por qué? **(1 punto)**
- b) Tomando 4 intervalos desde el valor mínimo de la muestra hasta el valor máximo, determina la longitud de cada intervalo. Realiza la tabla de frecuencias correspondiente (intervalos, marca de clase, frecuencia absoluta). **(3 puntos)**
- c) Dibuja el gráfico estadístico correspondiente. ¿Observas algo que se debería destacar? ¿El qué? Da tus argumentos. **(1 punto)**

Actividad 3:

Anoche estaba en mi casa viendo las noticias desde una TV que está algo rota, pues no funciona el sonido. Fue entonces cuando mostraron el siguiente gráfico estadístico, pero no pude enterarme de la noticia al completo debido al problema del audio.



Da una opción de estudio estadístico (inventate un enunciado, un título y escríbelo con todo detalle) que encaje a la perfección con el gráfico que vio tu docente en las noticias, a ver si consigues despistarla y que crea que tu noticia es una posibilidad al gráfico que vio. Además, la profesora se ha enterado que la media, la mediana y la moda del estudio coinciden. ¿Hay simetría en el gráfico? Razona tu respuesta.

Nota: debes razonar qué observas en el gráfico respecto a parámetros estadísticos, en qué te basas para elegir el enunciado que describes y por qué consideras que tu profesora lo daría como válido. **(5 puntos)**

Pregunta extra (solo se corregirá y puntuará si se ha obtenido un 5 sobre 10 en los anteriores ejercicios)

- ¿Se trata de una falacia estadística el siguiente gráfico? Razona la respuesta. **(1 punto)**



PUNTUACIÓN TOTAL PRUEBA ESCRITA: 17 PUNTOS (+ EXTRA)

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Para cada una de las actividades propuestas en la prueba escrita, se va a presentar a continuación los estándares de aprendizaje correspondiente a dicha unidad que se trabajará en cada uno, así como los campos de problemas, técnicas y tecnologías, y los tipos de tareas que se van a considerar para la corrección que se realizará mediante el *modelo de tercios* elaborado por Gairín, Muñoz-Escolano y Oller (2012).

Antes de continuar, recordamos los estándares de aprendizaje que se abordan en este curso y asignatura respecto a la unidad de estadística unidimensional, visto en el apartado A. Además, mencionar que los estándares de aprendizaje relacionados con el bloque 1 están presentes, implícitamente o explícitamente, de forma continua en las actividades y problemas. Esto se debe gracias a la forma en que se han diseñado las actividades, pero no los comentaremos en esta sección.

- Est.MAAP.5.1.1. Utiliza el vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística.
- Est.MAAP.5.1.3. Emplea el vocabulario adecuado para interpretar y comentar tablas de datos, gráficos estadísticos y parámetros estadísticos.
- Est.MAAP.5.2.1. Determina si los datos recogidos en un estudio estadístico corresponden a una variable discreta o continua.
- Est.MAAP.5.2.2. Elabora tablas de frecuencias a partir de los datos de un estudio estadístico, con variables discretas y continuas.
- Est.MAAP.5.2.3. Calcula los parámetros estadísticos (media aritmética, recorrido, desviación típica, cuartiles, ...), en variables discretas y continuas y es capaz de obtener conclusiones sencillas basándose en ellos.
- Est.MAAP.5.2.4. Representa gráficamente datos estadísticos recogidos en tablas de frecuencia, mediante diagramas de barras e histogramas.

Actividad 1: Jugadoras/es de basket.

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
C.P.N.G, C.P.C.1, C.P.D.1, C.P.M.1, C.P.G.1, C.P.G.2	T.1, T.2, T.3, T.4, T.5, T.6, T.7, T.9, T.10, T.11, T.12, T.13, T.14	TG.1, TG.2, TG.3, TG.7, TG.8, TG.9

Tareas para el Modelo de Tercios		
TAREAS	Principales	<ul style="list-style-type: none"> - Identificar los elementos de una población. - Conocer qué variable estadística se ha de estudiar. - Gráfico correspondiente al tipo de variable estadística.

		<ul style="list-style-type: none"> - Llegar a una conclusión única sobre qué jugador/a sacaría el entrenador en el partido. - Razonamientos y argumentación.
	Auxiliares específicas	<ul style="list-style-type: none"> - Comprensión de la tabla y uso adecuado de los datos proporcionados en ella.
	Auxiliares generales	<ul style="list-style-type: none"> - Realización de operaciones aritméticas.

Estándares de aprendizaje			
Est.MAAP.5.1.1.	Est.MAAP.5.1.3.	Est.MAAP.5.2.1.	Est.MAAP.5.2.3.

Actividad 2: Notas de matemáticas.

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
C.P.N.G, C.P.M.1, C.P.G.1, C.P.G.2	T.1, T.2, T.3, T.4, T.5, T.6, T.9, T.10, T.11, T.12, T.13, T.14	TG.1, TG.2, TG.3, TG.7, TG.8, TG.9

Tareas para el Modelo de Tercios		
TAREAS	Principales	<ul style="list-style-type: none"> - Identificar los elementos de una población. - Conocer qué variable estadística se ha de estudiar. - Gráfico correspondiente al tipo de variable estadística. - Razonamientos y argumentación.
	Auxiliares específicas	<ul style="list-style-type: none"> - Realización correcta de gráficos estadísticos utilizando la información de forma adecuada. - Interpretación de los datos.
	Auxiliares generales	<ul style="list-style-type: none"> - Realización de operaciones aritméticas.

Estándares de aprendizaje				
Est.MAAP.5.1.1.	Est.MAAP.5.1.3.	Est.MAAP.5.2.1.	Est.MAAP.5.2.2.	Est.MAAP.5.2.4.

Actividad 3: La TV sorda.

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
C.P.N.G, C.P.C.2, C.P.M.1, C.P.G.2, C.P.G.2.4, C.P.2.5	T.1, T.2, T.3, T.4, T.9, T.10, T.11, T.12, T.13, T.14	TG.1, TG.2, TG.7, TG.8, TG.9

Tareas para el Modelo de Tercios		
TAREAS	Principales	<ul style="list-style-type: none"> - Crear un enunciado acorde al gráfico representado y con sentido estadístico. - Saber leer entre los datos, es decir, identificar la mediana interpretando el gráfico. - Saber leer más allá de los datos, es decir, determinar la simetría de una distribución. - Interpretar cómo es una muestra cuya media = mediana = moda. - Razonamientos y argumentación.
	Auxiliares específicas	<ul style="list-style-type: none"> - Cálculo correcto de los parámetros estadísticos necesarios.
	Auxiliares generales	<ul style="list-style-type: none"> - Realización de operaciones aritméticas.

Estándares de aprendizaje			
Est.MAAP.5.1.1.	Est.MAAP.5.1.3.	Est.MAAP.5.2.3.	Est.MAAP.5.2.4.

Actividad extra: ¿Falacia estadística?

Campos de problemas	Técnicas	Tecnologías
C.P.G.3	T.12	TG.9

Tareas para el Modelo de Tercios		
TAREAS	Principales	<ul style="list-style-type: none"> - Reconocimiento de que el gráfico se corresponde con una falacia estadística. - Razonamiento y argumentación.
	Auxiliares específicas	<ul style="list-style-type: none"> - Identificación correcta de la falacia.
	Auxiliares generales	--
Estándares de aprendizaje		
Est.MAAP.5.1.3.		

3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Principalmente el objetivo de la prueba escrita es valorar e intentar calificar la capacidad de analizar, estudiar y tomar decisiones sobre diferentes contextos a nivel estadístico por parte del alumnado.

Como se trata en su gran mayoría de preguntas de respuesta abierta, para la evaluación sobre lo que se espera del alumnado en cada pregunta, se ha realizado una adaptación de los procesos definidos en la sección de Evaluación de las preguntas de

examen del capítulo de Material de Apoyo del Shell Center for Mathematical Education (1985).

Los procesos que se pretenden evaluar en esta prueba escrita son los siguientes:

1. Interpretación y comprensión de la información presentada en un estudio estadístico de forma tabular, y su posterior traducción en palabras, argumentos, justificaciones, y viceversa. Es decir, saber leer el contexto matemático y poder llevarlo a una representación habitual, así como entender el problema verbal y coloquial, y poder representarlo en forma estadística para su estudio.
2. Uso de parámetros estadísticos para resolver problemas y/o situaciones contextualizados/as en situaciones realistas.
3. Elección adecuada de parámetros estadísticos para la toma de decisiones, basándose en los conocimientos profundos del alumnado sobre la idea de variabilidad de los datos, simetría de una distribución, etc.
4. Traducción de gráficas estadísticas a enunciado verbal y a otros métodos de representación de los datos.
5. Explicación de los procedimientos utilizados para resolver las actividades y justificación de la coherencia en los resultados obtenidos.

Actividad 1:

- En el primer apartado, se quieren conseguir varios aspectos:
 - Por un lado, que el alumnado, dado un enunciado sobre una variable estadística cuantitativa discreta, sepa distinguir cada elemento que compone la muestra, la población, la propia muestra y la variable estadística que se quiere estudiar interpretándola a través del enunciado: “ver a quién de ellos sacaría el entrenador, Fran, en un partido en el que van perdiendo de 5 puntos y queda medio minuto”. Pero además de esto, que sepa argumentar por qué se trata de una variable cuantitativa discreta, es decir, que analice cómo son los datos que se le ofrece y cree sus propios argumentos.
 - Por otro lado, se evalúa qué gráfico representa bien a una variable cuantitativa discreta, por ejemplo, el diagrama de barras.
 - Y, por último, se insta a que el alumnado sea partícipe del estudio estadístico que se está realizando. Para ello, se pregunta por una segunda variable que encaje en el contexto, siendo una posible respuesta la altura de los/as jugadores/as. Aquí la respuesta es abierta, ya que, aunque la idea de la docente es que cambien el tipo de variable, es decir, que elijan una variable cuantitativa continua y razonen el tipo de gráfico que se adecuaría más a esta nueva variable, puede ocurrir que ciertos alumnos consideren otra variable cuantitativa discreta, por ejemplo, el número de calzado. En

ambos casos, siempre que el razonamiento sea consistente y adecuado, la respuesta sería igualmente válida.

Es por ello que una vez elegida la nueva variable, se cuestiona si coincide el tipo de gráfico de la variable dada por el contexto del enunciado con el de la nueva variable. Si han elegido de nuevo una variable discreta, el gráfico que decidan para dicha variable, coincidirá con el anterior.

- En el apartado b), se evaluará que sepan identificar el problema que puede conllevar la mala elección de una medida estadística para tomar decisiones sobre un estudio estadística.

No se valorará el procedimiento por el que calculen la media, siempre que esté justificado, sino que lleguen a la conclusión de que la media en todos jugadores es la misma, 3, por lo que no pueden tomar una decisión.

- En el último apartado, se pide que analicen la dispersión de los datos gráficamente, sin indicar qué tipo de gráfico. De nuevo, la respuesta es abierta, siempre que la elección del gráfico sea correcta y pueda ayudarles a valorar esa regularidad. En este sentido, deberán ordenar correctamente a los jugadores según su regularidad gráfica.

A continuación, se anima a que valoren y elijan otro parámetro estadístico más robusto en esta situación que les ayude a poder tomar decisiones. Para ello, se les guía hablando de las medidas de dispersión. Pueden elegir el que crean que más se ajusta a sus datos, por ejemplo, si escogen el rango o la desviación media, los datos obtenidos serán:

	Imanol	Chema	Alberto	Jairo
Rango	3	5	6	5
Desv. Media	4	6	8	6

Por tanto, podrían decidir claramente que el más regular es el que menos dispersión tiene, o el de valor del rango más pequeño, por lo que dirían que es Jairo. Por otro lado, la respuesta para el menos regular sería Alberto. Y a quién sacaría da lugar a una respuesta abierta siempre que esté bien justificada.

Actividad 2:

- En el apartado a), se valorará la calidad de las reflexiones o argumentos que aparezcan en la justificación de la respuesta, aunque el número idóneo ya se habría visto en el aula que es raíz cuadrada de n , siendo n el tamaño de la muestra.
- El apartado b), es, tal vez, la única cuestión de pregunta más cerrada, se evaluará que se realiza correctamente, que el alumnado tiene la idea de lo que supone una tabla de frecuencias y que sepa tomar los datos del enunciado.
- En el último apartado, se evaluará en primer lugar, que el alumnado identifique que se trata de una variable estadística cuantitativa continua por lo que su gráfico asociado sería representar los datos mediante un histograma. Al representarlo, con la pregunta de si observan algo y que lo justifiquen, pueden aparecer diversas

opciones, por ejemplo: que al representarlo tengan que añadir dos barritas en el eje horizontal para poder comenzar en un valor elevado y que esté a escala, o que hay mayor frecuencia en el último intervalo, entre otras respuestas posibles.

Actividad 3:

Este ejercicio es del tipo *problem-posing* para ayudar a enfatizar el pensamiento crítico del alumnado.

Las posibles respuestas son variadas, es decir, se trata de nuevo de un problema de respuesta abierta. El alumnado puede contextualizar el problema y relacionarlo con su vida cotidiana o ser creativo y no realizar ninguna similitud con la vida real.

Se exige que el alumnado cree una población, muestra, individuos y variable estadística que en su conjunto tenga sentido realizar un estudio estadístico. Además, los datos que debe ofrecer como muestra tienen que cumplir las condiciones que el enunciado da: media, mediana y moda coincidentes, lo que no será ningún problema para resolver por parte del alumnado, pues ha trabajado anteriormente con los ejercicios de técnicas con actividades de este estilo.

El alumnado, debe saber representar lo que dice el gráfico, cuál es la mediana, qué valor toma observando el diagrama de caja y bigotes proporcionado; cuáles son los cuartiles, si le sirven o no para dar una muestra; si la muestra debe ser simétrica pues es lo que indica la gráfica, por qué; si hay datos atípicos o no los hay; ayudarse de los datos que muestra el gráfico en el eje vertical, etc.

Obviamente, todo ello bien argumentado como se recalca en varias ocasiones en el ejercicio.

Pregunta extra:

Principalmente se valorará en primer lugar, que reconozcan que efectivamente se trata de una falacia estadística. Se espera que el alumnado justifique por qué se trata de una falacia estadística. Algunas de las posibles respuestas serían: “porque se está considerando como variable continua una variable que es discreta”, “porque no puede representarse con este tipo de gráfico el número de personas positivas ya que no puede haber 2,5 personas, pues se trata de una variable cuantitativa discreta el número de personas positivas”, entre otros.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Los criterios de calificación respecto a la prueba escrita se basarán, como se ha mencionado anteriormente, en el *modelo de tercios* de Gairín, Muñoz-Escolano y Oller (2012).

Se trata de un modelo de penalización más objetivo que la corrección tradicional. Para llevarlo a cabo, es necesario definir los tipos de tareas a realizar en cada ejercicio y/o actividad, señalando los errores que penalizarán en cada tipo de cada actividad. Estos tipos se dividen en tres: tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales.

Para la prueba escrita diseñada en esta sección, ya se ha determinado cada tipo de tarea en cada ejercicio (ver apartado I.2).

Las tareas principales pueden penalizar hasta el total de la puntuación, de forma que cabe la posibilidad de que en la corrección de esta tarea finalice la calificación del ejercicio. Las tareas auxiliares específicas pueden crear un conjunto de errores que reste hasta el $\frac{2}{3}$ de la puntuación del ejercicio en cuestión. Pero, a pesar de penalizar según los errores, en esta se puede continuar calificando. Y, por último, las tareas auxiliares generales, el conjunto de errores a penalizar no puede superar el $\frac{1}{3}$ de la puntuación de la actividad, también se continúa corrigiendo.

En el diseño de la prueba escrita se ha indicado, en cada apartado de cada ejercicio, la puntuación total para su corrección. Debido a la diversidad de cuestiones que se plantean en la prueba escrita y al interés e importancia que se le da en esta propuesta al razonamiento y argumentación, se penalizará como un error mayor el hecho de no justificar las respuestas, al menos siempre que se pida a pesar, ya que se trata de un aspecto importante reflejado en el contrato didáctico instaurado en el aula.

J. Conclusiones

La propuesta didáctica que se ha diseñado se basa principalmente en llevar al aula un enfoque de enseñanza-aprendizaje, sobre la estadística unidimensional, a través de la resolución de problemas y el abordaje de diferentes situaciones y proyectos, lo cual es diferente al que se efectúa habitualmente en los centros educativos.

Tras una revisión bibliográfica específica sobre el objeto matemático tratado, se ha llegado a la conclusión que, la estadística es una buena candidata para elaborarla haciendo uso del aprendizaje basado en proyectos. Es por ello que parte de la evaluación de esta propuesta sea un proyecto sobre falacias estadísticas en la prensa, televisión, etc, que deberá elaborar el alumnado y presentar posteriormente al resto de compañeros en el aula.

Además, todo el contenido que se aborda en la secuencia se realiza mediante problemas y actividades que dan lugar por sí solos a adquirir conocimientos sobre estadística. En ningún momento de la secuencia se instauran fórmulas al alumnado, ya que consideramos que el mero hecho del aprendizaje memorístico de fórmulas conduce posteriormente, tarde o temprano, al olvido. Por el contrario, la forma en que se aprenden las ideas y los conceptos con esta propuesta, crea un aprendizaje significativo de la estadística en el alumnado. Consiste en ir más allá de las fórmulas estadísticas, es decir, encontrar el sentido que tienen los parámetros para saber interpretarlos y compararlos, entendiendo el significado que tienen estos dependiendo del contexto estadístico a estudiar. Ocurre de forma análoga con la interpretación y comprensión de la información que aportan los gráficos estadísticos.

Esta idea de evitar notaciones y fórmulas para la enseñanza de la estadística, viene fundamentada, entre otros motivos, en el hecho de que, tras realizar el Prácticum II en un

aula de 4º E.S.O en la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, la autora pudo observar que cuando el alumnado no tiene motivación por la asignatura, incluso queriendo titular 4º E.S.O., toda el aula, con matemáticas suspensas, se debe enseñar de otra manera muy distinta a la habitual. Al acabar la unidad se quería conseguir que el alumnado pudiera defenderse en su día a día, estadísticamente hablando. Es decir, pudiera comprender gráficos, datos presentados en forma tabular o noticias en prensa representadas de forma verbal, etc.

Se trata de una propuesta activa, continua, formativa y, sobretodo, cuasi-autónoma. En ella se abarcan diferentes niveles, o lo que más comúnmente se denomina, se cubren todas las necesidades e intereses de los estudiantes, llegando desde el alumnado de “suelo bajo” hasta el de “techo alto”. Además, todas las actividades pueden ser readaptadas según las necesidades del alumnado, dependiendo del nivel que nos encontremos en el aula con las pruebas iniciales que se han desarrollado en esta secuencia didáctica.

Esta propuesta aporta una nueva visión de la estadística unidimensional en el aula, dejando a un lado la clase magistral y siendo el protagonista principal el alumnado, que es quien debe serlo en esta maravillosa etapa.

Las actividades están diseñadas para que el alumnado pueda expresarse libremente y todos ellos puedan decir algo sobre cada actividad, ya que se exige muchos razonamientos y justificaciones informales en todos ellos.

La actividad sobre las jugadoras de basket (Problema 6 de los campos de problemas, hasta el apartado n) fue llevada al aula en el Prácticum II, considerando los resultados como satisfactorios. El alumnado al principio se encontraba confuso, pues no estaban habituados a ser ellos los protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje, ni acostumbrados a trabajar de forma constante, protestaban continuamente sobre lo mucho que se les hacía escribir porque decían que no estaban acostumbrados. Sin embargo, como futura docente, creo que aprendieron una estadística de forma significativa a pesar de que, en la prueba escrita que se les realizó, algunos de ellos la realizaron mediante fórmulas que se habían aprendido de memoria del libro, sin haberles mencionado en ningún momento el libro de texto.

Por tanto, esta propuesta didáctica, tal vez se haya realizado en un cronograma secuencial algo optimista ya que surgen imprevistos, dificultades y errores en cada aula, pero es una idea diferente que puede encajar en cualquier aula y nivel educativo. Especialmente porque se tratan temas cotidianos, donde los ejercicios, problemas o actividades están contextualizados en situaciones del día a día del alumnado.

K. Bibliografía

- Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019a). Aprendizaje y enseñanza de la probabilidad y la estadística. *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 327-347). Madrid: Síntesis.
- Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019b). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria. *Evaluación en Matemáticas* (pp. 221-246). Madrid. Síntesis.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales, *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 76, 55-67.
- Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. *Granada: Universidad de Granada*.
- Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, 1(1), 27-37.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. Granada. Universidad de Granada.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2005). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. VII Congreso Gallego de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Granada.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo, *Números* 83, 7-18.
- Batanero, C., Gea, M., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2014). La estadística en la educación obligatoria: *Análisis del currículo español. Revista Digital Matemática: Educación e Internet* 14(2). Recuperado de: <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1663>
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros* (pp. 726-729). Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
- Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Begué, N. (2019). *Comprensión del muestreo y la distribución muestral en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato* (Tesis doctoral. Universidad de Granada). Recuperado de: <https://digibug.ugr.es/handle/10481/58243>

- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: P. P. U.
- Cobo, A. (2015). *Estadística para cuarto de E.S.O.* (Trabajo fin de máster. Universidad de Jaén). Recuperado de: <http://tauja.ujaen.es/bitstream/10953.1/2660/1/ALFONSO%20COBO%20YER A.pdf>
- Departamento de Educación, Cultura y Deporte (2013). *Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA 02/06/2016)*. Aragón: Departamento de Educación, Cultura y Deporte.
- Fernández, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y matemáticas*. Madrid: Síntesis.
- Gairín, J.M., Muñoz-Escolano, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, y F.J. García, *Investigación en educación matemática XVI* (pp. 261-274). Jaén: SEIEM.
- Godino, J. D., Batanero, M. C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Goss, M. (2014). Mathematics Classroom Assessment. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 413-417). Dordrecht: Springer.
- Inzuna, S. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje. Un enfoque alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística. *Revista mexicana de investigación educativa*, 15(45), 423-452. Recuperado de: <http://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v15n45/v15n45a5.pdf>
- Méndez, I. (2012). Método científico, aspectos epistemológicos y metodológicos para el uso de la estadística. *SaberEs* 4, 3-15.
- Ministerio de Educación y Cultura (2013). *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, Educación – LOE (BOE 04/05/2006)*. España: Ministerio de Educación y Cultura.
- Ministerio de Educación y Cultura (2013). *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa – LOMCE (BOE 10/12/2013)*. España: Ministerio de Educación y Cultura.
- Ministerio de Educación y Cultura (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, que establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (BOE 03/01/2015)*. España: Ministerio de Educación y Cultura.
- Murillo, J. y Castellanos, R. (2011). Interactividad y atención a la diversidad en el aprendizaje de la estadística. *Enseñanza de las ciencias* 29(3), 381-402.

Recuperado

de:

https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2011v29n3/02124521v29n3p381.pdf

- Organista, J. y Cordero, G. (2006). Estadística y objetos de aprendizaje. *Una experiencia in vivo*. *Apertura* 6(5), 22-35.
- Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). *El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de educación secundaria obligatoria*.
- Ortiz, J.J., Castro, F., Garzón, J., Albanese, V. y Mohamed, N. (2019). La dispersión en estadística unidimensional: Análisis del lenguaje en libros de texto de bachillerato. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Recuperado de: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Rivas, H. R. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria* (Tesis doctoral, Universidad de Granada). Recuperado de: <https://digibug.ugr.es/handle/10481/34606>
- Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (v.1, pp. 205-237). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Shell Center for Mathematical Education. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. England: University of Nottingham.

Anexo

1. Preguntas restantes del Kahoot

Pregunta 1

ESTADÍSTICA

21

¿PREPARADOS?

Omitir

0 Respuestas

▲ let's go!

◆ No

● Si

■ Por supuesto que sí

Pregunta 7

Ordena de conjunto más pequeño a más grande

56

Omitir

0 Respuestas

▲ Variable a estudiar, muestra, individuo, población

◆ Individuo, variable a estudiar, población, muestra

● Variable a estudiar, individuo, muestra, población

■ Variable a estudiar, muestra, individuo, población

Pregunta 8

¿Sabes la diferencia entre variable estadística CUANTITATIVA y CUALITATIVA?

17

Omitir

0 Respuestas

▲ Si

◆ No

Pregunta 9

¿Podrías dar una definición de variable estadística CUANTITATIVA?



27



Omitir

0
Respuestas

▲ No

◆ Podría intentarlo

● Si, pero no una definición precisa

■ Si

Pregunta 10

¿Podrías dar una definición de variable estadística CUALITATIVA?



27



Omitir

0
Respuestas

▲ No

◆ Si pero con dificultad

● Podría intentarlo

■ Si

Pregunta 11

Observando la siguiente imagen, escribe una definición de variable CUALITATIVA y otra de variable CUANTITATIVA



88

<u>Variables cualitativas</u>	<u>Variables cuantitativas</u>
Miedo	Peso
Hambre	Temperatura
Belleza	Velocidad
Ignorancia	Densidad

Omitir

0
Respuestas

▲ Escribiendo...

◆ Escribiendo...

● Escribiendo...

■ Escribiendo...

Pregunta 12

¿Sabes lo que son las MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN?



Omitir

20

0
Respuestas

▲ No

◆ Si

Pregunta 13

¿Sabes qué son las MEDIDAS DE DISPERSIÓN?



Omitir

17

0
Respuestas



▲ No

◆ Sí

Pregunta 14

¿Sabes qué son las MEDIDAS DE POSICIÓN?



Omitir

17

0
Respuestas



▲ No

◆ Si

Pregunta 15

¿Cuáles son MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN?



29

Omitir

0
Respuestas

▲ Mediana, varianza y media

◆ Mediana, desviación típica y media

● Mediana, moda y media

■ Todas son incorrectas

Pregunta 16

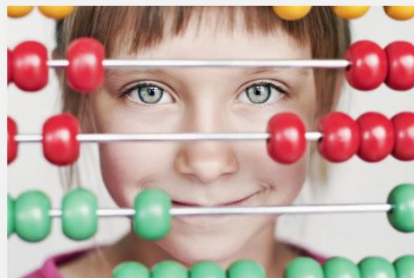
¿Cuáles son MEDIDAS DE DISPERSIÓN?



27

Omitir

0
Respuestas



▲ Desviación típica, varianza y rango

◆ Desviación típica, varianza y coeficiente de variación

● Rango, varianza y coeficiente de variación

■ Todas son correctas

Pregunta 17

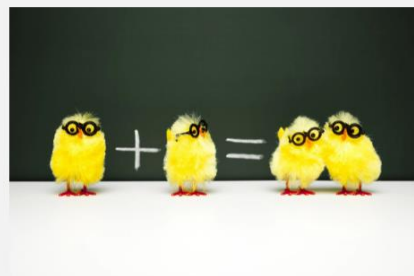
¿Conoces alguna MEDIDA DE POSICIÓN?



27

Omitir

0
Respuestas



▲ No

◆ No se la definición de medida de posición

● Creo que si

■ Si

Pregunta 18

Decimos todas las palabras que nos vengan a la mente al escuchar la palabra ESTADÍSTICA

86



Omitir

0
Respuestas

▲ Escribimos

◆ en

● la

■ pizarra

2. Examen de cuaderno

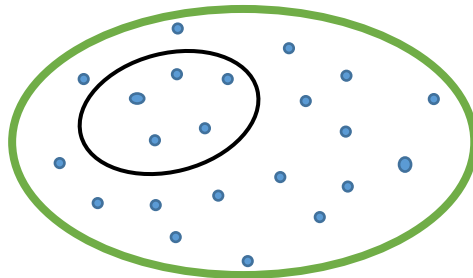
EXAMEN DE CUADERNO

GRUPO:

FECHA:

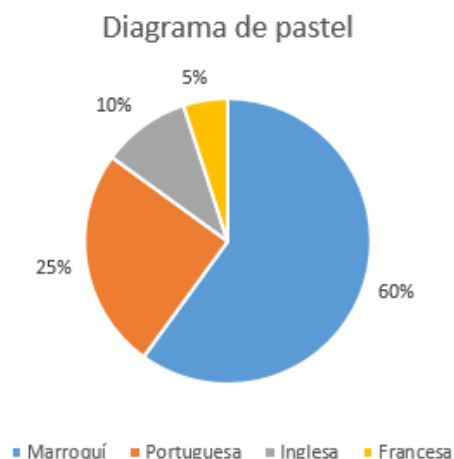
Nombre y apellidos:

Ejercicio 1: Indica en la siguiente imagen qué es población, qué es muestra y qué individuo. Y contesta a la siguiente pregunta: ¿cuántos individuos componen la muestra? (1'5 ptos)



Ejercicio 2: Escribe tres ejemplos de variables estadísticas que se podrían estudiar en esta aula. Estos ejemplos deben ser: uno cualitativo, otro de variable cuantitativa discreta y, el tercero, de variable cuantitativa continua. (1 pto)

Ejercicio 3: Escribe un enunciado y una tabla de frecuencias (con variable, frecuencias absolutas y relativas) para el siguiente gráfico. (1,5 ptos)



Ejercicio 4: De la actividad de las jugadoras de basket ordena a las jugadoras de mayor a menor dispersión. ¿Cuál es la más regular? ¿Por qué? **(1,5 ptos)**

Ejercicio 5: Dada la siguiente tabla de frecuencias, ¿cuánto es su media, desviación típica y coeficiente de correlación? Pista: ayúdate del ejercicio 3 de la página – (ejercicio hecho en el aula, terminado en casa). **(1,5 ptos)**

Datos	Frecuencias absolutas
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3
	40

Ejercicio 6: Indica cuál es el cuartil 1, 2 y 3 (Q1, Q2, Q3) de la siguiente muestra: 2, 5, 3, 6, 7, 4,9 **(1 pto)**

Ejercicio 7: Indica cuál es el percentil 35, el percentil 61 y el percentil 86 de la siguiente tabla de frecuencias: **(2 ptos)**

Datos	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas	% ACUM.
1	1	1	12,5
2	1	2	25
4	2	4	50
5	1	5	62,5
6	1	6	75
7	1	7	87,5

9	1	8	100
---	---	---	-----

3. Guion del proyecto

GUIÓN - MINI PROYECTO ESTADÍSTICA: detección de falacias 40%

Nombre y apellidos:

OBJETIVO: Plantear un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos (calcular todo lo que hayas aprendido en esta unidad) y obtener conclusiones sobre el problema inicial. La fase de recogido y análisis de datos no será realizada con detalle, ya que lo que interesará será la búsqueda de la falacia estadística gráficamente y, a partir de ahí, se elaboraran los datos.

En nuestro caso, el problema será buscar una noticia falsa relacionada con estadística en la prensa (periódicos, revistas, ...) o medios de comunicación, y contesta a las siguientes preguntas en un editor de textos (word, ...). Recuerda adjuntar un recorte de la noticia, foto, etc.

1. ¿Qué puedes decir sobre la noticia que has encontrado? ¿Por qué es una falacia? ¿Qué harías/modificarías para que dejara de ser una falacia?
2. Si tu noticia no contiene datos concretos para poder elaborar una tabla de frecuencias y calcular las medidas oportunas, búscalos o invéntatelos pero que tengan coherencia con la noticia que has adjuntado y añádelos a continuación. Si fuese necesario y el gráfico no diera toda la información oportuna, invéntate un contexto y escríbelo donde tenga significado la falacia que has buscado.
3. De tu noticia distingue cuál es la población, muestra, individuo, caracteres y variable o variables a estudiar. Si no lo tuvieras claro, indica por qué.
4. Halla todas las medidas de centralización, de dispersión y de posición vistas en clase que te permitan extraer información de tu noticia.
 - Medidas de centralización (media, mediana, moda):
 - Medidas de dispersión (rango, desviación típica, varianza, etc).
 - Medidas de posición (mediana, cuartiles, etc).
5. Realiza el gráfico que más se ajuste a la variable de tu noticia (según sea variable cualitativa o cuantitativa (discreta o continua)). Para ello utiliza una hoja de cálculo (Excel) o bien otra herramienta tecnológica. Si se hace a mano tiene que ser con la mayor claridad y precisión posible (recomendado usar herramientas informáticas). ¿El gráfico que más se ajusta coincide con el tipo de gráfico de tu noticia? Si la respuesta es afirmativa, haz el gráfico correctamente y no como en la falacia.
6. ¿Qué conclusiones obtienes una vez estudiadas las medidas de centralización, dispersión y posición? ¿Por qué observas lo que indicas? ¿Se te ocurre otra variable estadística a estudiar con el contexto de tu noticia? ¿Cuál?

4. Rúbrica proyecto (evaluación a pares)

	Insuficiente	Regular	Bien	Excelente
<i>Preparación</i>	Improvisa, no se lo ha preparado	Duda, rectifica constantemente	Exposición fluida con algunos errores	Domina la falacia, no comete errores ni duda
<i>Interés</i>	No despierta interés en el resto del alumnado	Le cuesta mantener la atención de los compañeros/as en él/ella	Monótono pero consigue despertar interés	Mantiene el interés durante toda la exposición
<i>Actitud</i>	Nervioso, desconcentrado, pasivo, no mira al resto de estudiantes	Controla los nervios verbalmente pero no mediante el lenguaje corporal	Correcta actitud y lenguaje corporal, pero mejorable	La actitud y lenguaje corporal ayuda a entender el mensaje


5. Algunas respuestas de la prueba inicial: *One Minute Paper*

ONE MINUTE PAPER – 4º C

Nombre y apellidos:

1. ¿Qué podrías decirme sobre estadística de cursos anteriores?
(conceptos, definiciones, ideas, etc).

Estadística es algo de numeros y probabilidad



1. ¿Qué podrías decirme sobre estadística de cursos anteriores? (conceptos, definiciones, ideas, etc).

~~Para~~ Para localizar las subidas de un producto o de cualquier otra cosa

1. ¿Qué podrías decirme sobre estadística de cursos anteriores? (conceptos, definiciones, ideas, etc).

- Nada, porque no he sido estadístico en la vida

2. Valora del 1 al 10 cómo te gusta la estadística respecto al temario que hay en matemáticas aplicadas para este curso (siendo 1 lo más bajo y 10 lo que más te gusta) y di por qué.

No podría evaluarlo porque ni siquiera sé que es.