Trabajo Fin de Máster

Propuesta didáctica para la enseñanza de la estimación en 1º de la ESO

Didactic proposal for the teaching of estimation in 1st year of ESO

Autor:

Adrián Begué Gracia

Director:

Pablo Beltrán Pellicer

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2021

Contenido

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

El objeto matemático que se va a enseñar es la estimación en el curso de 1º de la ESO.

La palabra estimación tiene un significado coloquial extenso, el cual puede encontrarse en cualquier diccionario. Por ejemplo, el diccionario de la Real Academia Española (RAE) dice:

"Estimación: aprecio y valor que se da y en que se tasa y considera algo."

Sin embargo, en el diccionario María Moliner (Moliner, 2016) dice:

"Estimación: juicio del valor de un objeto en función de circunstancias individuales del que lo emite"

Lo que se aprecia de ambas definiciones es que la estimación está relacionada con juicios de valor sobre una cosa. Siendo estos juicios el grado de certeza o confiabilidad al hablar de esa cosa. Viendo estas definiciones tan generales vamos a centrarlas en el ámbito matemático. Al hablar de estimación en el ámbito matemático podemos utilizar la definición de Segovia et al. (1989) que dice:

"Estimación: juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que los emite."

Lo que comparte esta definición con las anteriores es que la estimación es un juicio de carácter personal en la que el sujeto hace la estimación en base a sus experiencias propias.

El concepto general de estimación tiene implícitas las características dadas por Reys (1984), las cuales son:

- Consiste en valorar una cantidad o el resultado de una operación aritmética.
- El sujeto que hace la valoración tiene alguna información, referencia o experiencia sobre la situación que debe enjuiciar.
- La valoración se realiza por lo general de forma mental.
- Se hace con rapidez y empleando números los más sencillos posibles.
- El valor asignado no es exacto, pero si adecuado para tomar decisiones.
- El valor asignado admite distintas aproximaciones dependiendo de quien realice la valoración.

Estas características que describen la estimación pueden relacionarse con el sentido numérico, el cual según define Bruno (2000) es:

"Sentido numérico: es la capacidad para apreciar diversos niveles de exactitud al manejar los números, localizar errores aritméticos, producir estimaciones razonables, saber elegir el procedimiento de cálculo más eficiente o reconocer modelos numéricos."

El trabajo de la estimación también debe hacerse desde el sentido numérico. Es necesario que el sujeto disponga de un buen sentido numérico para que sus estimaciones sean más precisas y pueda valorarlas con mayor eficacia.

La definición que da Segovia et al. (1989) está sustentada por sus dos campos de problemas: la estimación en cálculo y la estimación en medida.

a) Estimación en cálculo

Es la referida a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre sus resultados.

Ejemplo: una estimación sería decir que 2345 multiplicado por 52 es 120000

En los inicios de la investigación en estimación Reys et al. (1982) desarrollaron un test para evaluar las capacidades de estimación de los sujetos. En este test seleccionaron a los mejores estimadores de las 1200 personas que participaron en el estudio. Se realizó en Estados Unidos a estudiantes desde los 12 hasta los 17 años y también a un grupo de adultos. Se realizaron entrevistas a los 59 mejores estimadores para discernir cuál es el proceso mental que seguían para hacer las estimaciones en cálculo. En las entrevistas se catalogaron distintas estrategias y se agruparon para formar un modelo que determina los procesos de estimación. Este modelo consta de tres procesos cognitivos de alto nivel: reformulación, traducción y compensación. A este modelo se le conoce como RTC por las siglas de sus procesos cognitivos. Este modelo con definiciones ampliadas por Lefevre et al. (1993) y Segovia et al. (1989) es el siguiente:

1) Reformulación: cambiar los números usados para el cálculo

- Redondeo

Consiste en suprimir cifras de la derecha de un número y sustituirlas por ceros con el siguiente criterio: si la última cifra que se suprime es mayor o igual a 5 la que va a continuación se aumenta en una unidad (exceso); en otro caso se deja igual (defecto).

Ejemplo: 2346 redondeado a las decenas sería 2350 y redondeando a las centenas sería 2300.

- Truncamiento

Consiste en suprimir dígitos de un número, a partir de un determinado orden de unidades, y sustituirlos por ceros.

Ejemplo: 2400 es un truncamiento de 2469.

- De sustitución:

Cuando un dato resulta demasiado complicado para poder operar con él, entonces se sustituye por un dato próximo, con lo que desaparece la complicación para poder operar.

Ejemplo: la división $368/7$ se sustituye por $350/7 = 50$

2) Traslación: cambiar la estructura del problema.

En los procesos de traslación se produce un cambio sobre las operaciones.

Ejemplo: el cálculo $\frac{(1948 \cdot 47)}{8}$. Aplicando la traslación se podría resolver como $1948 \cdot \frac{47}{8}$. Se tomaría que 47/8 es aproximadamente 6; Se redondea 1948 a 2000 y como $2000 \cdot 6 = 12000$, entonces (1984·47)/8 aproximadamente es 12000.

3) Compensación: hacer ajustes durante o después del cálculo.

La compensación consiste en reducir el error producido en un sentido, al aproximar uno o varios datos, equilibrándolo con un error en sentido contrario, actuando bien sobre datos diferentes o bien sobre el resultado. La idea clave de la compensación consiste en neutralizar un error excesivo, debido a una Reformulación o Traslación, provocando un error en sentido contrario que le sirva de contrapeso.

Hay dos tipos de compensación:

- Compensación de los datos

Se dice así cuando se realiza durante el proceso de estimación.

- Compensación en el resultado

Se llama así cuando el ajuste se realiza al finalizar el cálculo.

El test de Reys et al. (1982) se ha repetido en diversos países del mundo a fin de generalizar los resultados y confirmar el modelo propuesto. En el estudio de Reys et al. (1991) se encuentran los mismos procesos generales de estimación en 177 alumnos mejicanos de 13-14 y 17-18 años. El rendimiento obtenido fue notablemente bajo en las respuestas. Este test lo repitió Reys et al. (1991) en Japón con 466 estudiantes de la misma edad que en México y volvieron a identificar los mismos procesos que en los alumnos mejicanos y estadounidenses. Además, los alumnos japoneses mostraron mayor cálculo mental que el resto.

Para el análisis de estrategias de estimación en cálculo ha tenido gran importancia el trabajo de Levine (1982). En este trabajo se analizan las estrategias de estimación de 89 estudiantes de primer ciclo universitario mediante un test. El test está compuesto por 20 cálculos descontextualizados (10 multiplicaciones y 10 divisiones) con números naturales y decimales. En el análisis de los resultados se obtienen como estrategias más frecuentes el redondeo de ambos números y la imitación de los algoritmos escritos. Hay que señalar que aquellos que utilizaron la imitación del algoritmo escrito obtuvieron los peores resultados en cuanto a estimación. Este test lo utilizó Dowker (1992) en una muestra de 44 matemáticos profesionales y en Dowker et al. (1996) se hizo en tres grupos formados por 44 contables, 44 estudiantes de psicología y 44 estudiantes de inglés. Los matemáticos hicieron las estimaciones más precisas y además emplearon mayor diversidad de estrategias que los otros grupos. Estas estrategias fueron la sustitución de números decimales por fracciones, el uso de números compatibles y la descomposición de números en factores. Estos matemáticos al contrario que los sujetos del estudio inicial de Levine (1982) usaban estrategias basadas en la comprensión de las propiedades aritméticas en vez de las técnicas usuales que se enseñan en el aula. El resto de grupos utilizaron una gran cantidad de estrategias inadecuadas para hacer las estimaciones.

La característica que une a todas estas investigaciones sobre estrategias de estimación en cálculo es que en ellas han aparecido estrategias para sustituir los datos iniciales por otros más manejables (redondeo, truncamiento, sustitución de un decimal por una fracción, uso de números compatibles, etc.). También se han tenido en cuenta los algoritmos de cálculo (imitación del algoritmo escrito), las propiedades de las operaciones (estrategia distributiva), los procesos generales de estimación (compensación), e incluso las actuaciones de los alumnos en las que se pone de manifiesto que no están realizando una estimación (tratar de hacer un cálculo mental exacto o imitar el algoritmo escrito) e incluso en las que no hay un procedimiento matemático (intentar adivinar el resultado).

En conclusión, puede asumirse que el modelo RTC (Reformulación, Traslación y Compensación) realizado por Reys et al. (1982) sirve como marco teórico general para tratar la estimación en cálculo.

b) Estimación en medida

Es la referida a los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad o bien la valoración que puede hacerse sobre el resultado de una medida. Dentro de la estimación en medida se distinguen dos grupos de magnitudes: continuas y discretas.

Ejemplo de estimación en medida continua: cuando se estima la altura de una persona mediante la comparación con nuestra propia altura; la longitud es una magnitud continua.

Ejemplo de estimación en medida discreta: cuando se quiere determinar de manera aproximada el número de personas que hay en una manifestación.

Las situaciones en las que se necesita estimar en medida quedan recogidas en la Tabla 1 con sus respectivos ejemplos.

		Objeto	
		Presente	Ausente
Unidad	Presente	Estimar qué parte de mi cuerpo mide unos 2 palmos	Estimar qué objeto puede tener 3 palmos de altura
	Ausente	Estimar qué parte de mi cuerpo mide unos 15 cm	Estimar qué objeto puede medir 60 cm de anchura

Tabla 1: Ejemplo de situaciones de estimación en medida

Los alumnos deberán perfeccionar estrategias que les permitan hacer estimaciones sobre las 4 situaciones posibles de estimación en medida. Para ello se tendrán que desarrollar las siguientes técnicas:

a) Interiorización

Una unidad, en nuestro caso el sistema métrico decimal, se encuentra interiorizada cuando el sujeto puede expresar la medida de un objeto mientras la unidad está ausente.

Ejemplo: Apreciación visual de longitudes próximas a 1 metro, ángulos de 45º o volúmenes de 1 litro.

b) Referentes

Conocer las longitudes de determinados referentes de la vida cotidiana para que puedan ser usados como unidad de medida a la hora de estimar la medida de otros objetos. Estos referentes nos permiten hacer estimaciones sobre objetos en los que no podemos hacer medidas directas.

Ejemplo: Usar nuestra altura para medir otras alturas, o usar el tamaño de una baldosa para medir las dimensiones del suelo.

Dentro de la estimación en medida se considera relevante tratar los problemas de Fermi. Este tipo de problemas tienen su origen en los problemas que resolvía el físico Enrico Fermi mentalmente. Son problemas que involucran el cálculo rápido de cantidades que parecen imposibles de estimar dada la limitada información disponible. Por ejemplo, calcular cuántos afinadores de piano hay en Chicago. Estos problemas hacen uso de estimaciones que deben estar bien fundamentadas. En ellas, tanto el objeto como la unidad están ausentes. El sujeto que hace el problema de Fermi debe tener interiorizados ciertos valores numéricos que le hagan ser capaz de utilizarlos matemáticamente hasta llegar a una solución que contemple las principales variables involucradas.

Al diseñar secuencias didácticas de estimación en medida se ha visto cómo los alumnos mejoran notablemente al aprender las estrategias propias de la estimación. En el trabajo de Castillo et al. (2011) se muestra la evolución de los estudiantes tras realizar 8 sesiones a lo largo de 8 meses. En la primera y última sesión se les evaluó en estimación en longitud y en área utilizando el mismo test para comprobar los cambios en las respuestas de los estudiantes.

Se comparó el error cometido en las estimaciones para determinar si la secuencia didáctica había logrado mejorar el aprendizaje de los alumnos. Los resultados obtenidos para estimaciones en longitud aparecen en la Tabla *2*.

Actividad	Evaluación Inicial	Evaluación Final
I.1.	22,5 %	14,84 %
I.3.	48,5 %	21,15 %
I.5.	34,1 %	22,38 %
I.7.	23,1 %	15,4 %

Tabla 2: Resultados de estimación en longitud del trabajo Castillo et al. (2011)

Y los resultados para estimación en área en la Tabla 3.

Actividad	Evaluación Inicial	Evaluación Final
II.1.	63,54 %	28,92 %
II.3.	174 %	69,09 %
II.5.	179 %	105,9 %
II.7.	3097,34 %	155,76 %

Tabla 3: resultados de estimación en longitud del trabajo Castillo et al. (2011)

El hecho de que, tanto para el caso de la estimación de cantidades de longitud como para el caso de las cantidades de área, haya disminuido el porcentaje medio de error, dice que el diseño instruccional fue efectivo en este sentido. Esta secuencia didáctica diseñada para ser incluida en diversos puntos del curso y agruparla con otros contenidos ha mostrado su eficacia. Para el desarrollo de la propuesta docente de este trabajo se tendrá en cuenta la posibilidad de no hacer la secuencia continua. Al separarla en el tiempo podrá introducirse la estimación como sesiones extra dentro la unidad didáctica especifica que se relacione.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Para comprender el estado actual de la enseñanza-aprendizaje de la estimación debemos atender a cómo se trata dentro de los cuatro tipos de currículo que identifica Alsina (2000):

- Currículo oficial: corresponde al conjunto de documentos oficiales propuestos por las autoridades educativas que elaboran los programas de las diferentes asignaturas, señalando los contenidos, objetivos, criterios de evaluación, etc.
- Currículo potencial: está determinado en diversas publicaciones docentes y materiales, donde se encuentran los libros de texto, y desarrolla el currículo oficial desde un punto de vista teórico y práctico
- Currículo impartido: es el que desarrolla el profesor a lo largo del curso.
- Currículo aprendido: es el adquirido por el alumnado.

a) La estimación en el currículo oficial

El currículo oficial en el cual se enmarca este trabajo, viene dado por la siguiente normativa:

- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.
- Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Se analizará específicamente la implementación de la estimación en la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, que es la que dicta los contenidos, criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.

Dentro de los objetivos previstos de la enseñanza matemática a los estudiantes puede apreciarse el siguiente:

Obj.MA.2. Reconocer, plantear y resolver situaciones de la vida cotidiana utilizando estrategias, procedimientos y recursos propios de la actividad matemática. Analizar la adecuación de las soluciones obtenidas y valorar los procesos desarrollados.

Este objetivo al hacer referencia a estrategias y procedimientos necesarios para resolver problemas de la vida cotidiana en la que hay que ver la adecuación de la solución obtenida, podría verse desde el contexto de la estimación. En estimación es necesario hacer juicios sobre problemas de la vida real en la que no se disponen de los datos exactos para hacer los cálculos. En esos casos hay que utilizar datos que a juicio del sujeto son plausibles y después operar con ellos para resolver el problema. Una vez obtenida la solución hay que valorarla según el sentido numérico del sujeto.

Para conseguir este objetivo del currículo parece razonable pensar que la estimación debería estar incluida dentro de los contenidos de a enseñar. Sin embargo, en el análisis del currículo se ha encontrado que la estimación no forma parte de los contenidos de ningún bloque especifico de ningún curso de la ESO (a excepción de la estimación en raíces cuadradas de 2º de la ESO). Para 1º de la ESO solamente se intuye en el Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, el cual es transversal. Para el resto de cursos de secundaria también sería válido este bloque ya que se repite.

Curso 1º, 2º, 3º y 4º ESO

Contenidos:

- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

Criterios de evaluación:

- Crit.MA.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

- Crit.MA.1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.

El contenido y criterios seleccionados están enfocados hacia la valoración del proceso utilizado y del resultado final. Esta valoración podría interpretarse dentro de la estimación ya que encaja dentro de las características de Reys (1984). Cuando se realiza un problema de matemáticas puede acotarse la solución dentro de unos límites plausibles que están determinados por el juicio del sujeto. Para poder valorar si el resultado final puede ser correcto o no, la primera prueba que debe superar es la de la estimación. Si el resultado se encuentra muy alejado de la estimación, es que ha habido algún fallo durante el proceso matemático y debería revisarse.

En cursos superiores pueden encontrarse nociones acerca de la estimación en el Bloque 2 dedicado a números y álgebra en los que se centra principalmente en su utilidad para estudiar la coherencia de las soluciones.

Curso 2º ESO

Bloque 2: Números y álgebra

Contenidos:

- Cuadrados perfectos. Raíces cuadradas. Estimación y obtención de raíces aproximadas.

Criterios de evaluación

- Crit.MA.2.4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.

Curso 4º ESO (Matemáticas aplicadas y académicas)

Bloque 2: Números y álgebra

Criterios de evaluación

- Crit.MAAP. (2.1 en aplicadas, 2.2 en académicas). Conocer y utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico recogiendo, transformando e intercambiando información.

Estándar de aprendizaje evaluable

- Est.MAAP. (2.1.3 en aplicadas, 2.2.2 en académicas) Realiza estimaciones y juzga si los resultados obtenidos son razonables.

Como puede apreciarse tras el análisis curricular, la estimación no tiene presencia en la secundaria más allá de una herramienta para saber si el resultado puede ser correcto o no. El currículo presenta la incoherencia de tener como objetivo que los estudiantes realicen un análisis y valoración de los resultados, pero si atendemos a los contenidos del currículo no se les va a enseñar cómo se hace. Por tanto, del currículo se extrae que consideran la estimación útil, pero no lo suficiente como para ser obligatoria su impartición en los centros de secundaria en Aragón.

A modo comparativo se analiza brevemente el currículo de matemáticas en Estados Unidos. Existen dos documentos que protagonizan la línea de desarrollo del currículo de matemáticas: los “Curriculum focal points”, en los que la estimación aparece como contenido transversal en todos los cursos, y los “Common core standards”, donde se relaciona con la notación exponencial y a la expresión aproximada de grandes cantidades. La estimación se imparte de una manera similar al sistema español. Se le otorga un carácter transversal que le hace perder entidad propia.

b) La estimación en el currículo potencial

Se ha visto cómo el currículo oficial no contempla la estimación como un contenido a enseñar en 1º de la ESO. El valor que tiene la estimación para emitir un juicio sobre el resultado de ejercicios y problemas sí que aparece contemplado en los criterios de evaluación del Bloque 1. Este bloque transversal, por norma general, no suele tratarse específicamente en los libros de texto. Así pues, el contenido que se prevé encontrar respecto a la estimación en libros de texto será mínimo en el caso de que lo haya.

Los libros de texto seleccionados para analizar son:

- Varios autores. (2015). *Matemáticas. Saber hacer 1º ESO.* Madrid: Santillana.
- Muñoz, M. C., de los Santos, M. I., Martínez, P., & Martínez, R. A. (2019). *Matemáticas 1º ESO.* Barcelona: Casals.
- Colera, J., Gaztelu, I., & Colera, R. (2015). *Matemáticas 1º ESO. Proyecto aprender es crecer en conexión.* Madrid: Anaya.

Estos libros cubren el currículo de la LOMCE. Se han seleccionado ya que pertenecen a editoriales ampliamente implementadas en España. A partir de ahora, para referirnos a ellos se utilizará el nombre de la editorial.

El análisis de los libros de texto se centrará en estudiar la manera en la que introducen la estimación tanto a nivel de contenido teórico, como a nivel práctico con ejercicios o problemas. Se mirarán todos los temas que componen el libro, ya que la estimación al considerarse transversal puede aparecer en cualquiera de ellos.

1) La estimación en libros de texto a nivel teórico

En el análisis de los tres libros de texto no se ha encontrado ninguna sección de ningún tema en la que se trate la estimación. No aparece su razón de ser, ni las técnicas ni las tecnologías asociadas a ella. Se esperaba que pudiera aparecer en las secciones finales de los temas en las que se introducen problemas cotidianos y técnicas alejadas de cálculos tradicionales para resolverlos, pero no ha sido así. Se considera que el hecho de que no aparezca tratada la estimación en los libros de texto hace que la concepción de los alumnos hacia este objeto matemático sea inexistente.

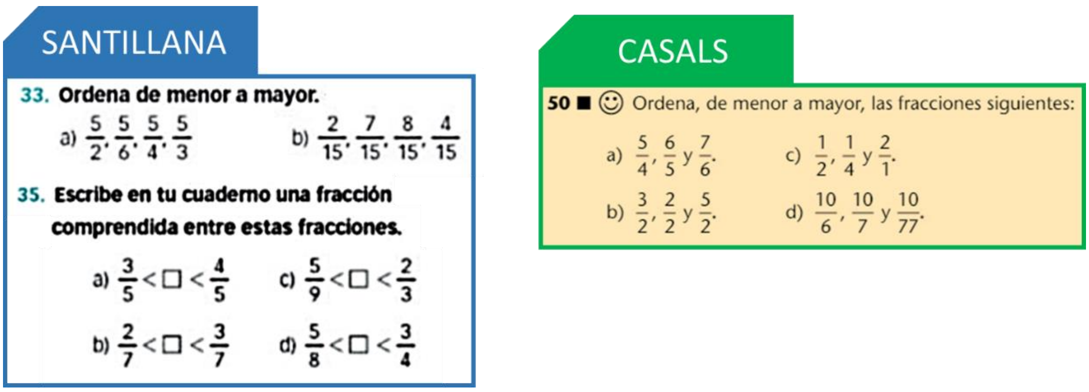
2) La estimación en libros de texto a nivel práctico

En el análisis de los libros de texto, a pesar de no ser tratada la estimación a nivel teórica, sí que se han podido encontrar unos pocos ejercicios y problemas en los que interviene en mayor o menor medida la estimación. Se clasificarán según el campo de problemas:

Estimación en cálculo

- Ordenar fracciones

En los temas de fracciones se plantean unos ejercicios en los que se pide ordenar las fracciones de menor a mayor. En la Figura 1 se muestran los ejercicios que se han encontrado en los libros de Santillana y Casals. Estos ejercicios están en la sección de común denominador. Para los autores del libro la manera de solucionar estos problemas se intuye que pasa por hacer el común denominador. Pero, también sería posible solucionarlos a través del sentido numérico. Los números de los ejercicios están seleccionados de tal forma que los numeradores o denominadores suelen coincidir. En esos casos sería más sencillo introducir el sentido numérico para que los estudiantes pudieran intuir si el resultado de esa fracción está más cerca de la unidad o de la mitad de unidad.


SANTILLANA

33. Ordena de menor a mayor.

a) $\frac{5}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{15}, \frac{7}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{15}$

35. Escribe en tu cuaderno una fracción comprendida entre estas fracciones.

a) $\frac{3}{5} < \square < \frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{9} < \square < \frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{7} < \square < \frac{3}{7}$ d) $\frac{5}{8} < \square < \frac{3}{4}$

CASALS

50 ■ ☺ Ordena, de menor a mayor, las fracciones siguientes:

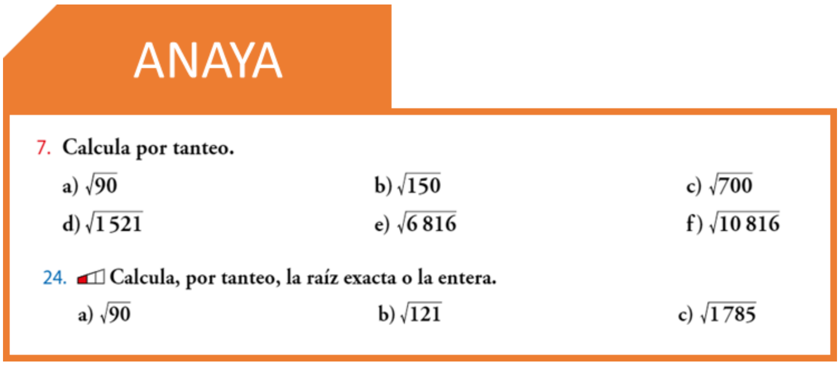
a) $\frac{5}{4}, \frac{6}{5}$ y $\frac{7}{6}$. c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ y $\frac{2}{1}$.

b) $\frac{3}{2}, \frac{2}{2}$ y $\frac{5}{2}$. d) $\frac{10}{6}, \frac{10}{7}$ y $\frac{10}{77}$.

Figura 1: Ejercicios del libro de Santillana (izquierda) y Casals (derecha) sobre ordenar fracciones.

- Cálculo aproximado de raíces

En el libro de Anaya se ha visto como en el tema de raíces aparece la palabra "tanteo" en dos de sus ejercicios (Figura 2). Estos ejercicios se basan en prueba y error hasta encontrar un número que al cuadrado se encuentre cercano, pero sin pasarse, del valor del interior de una raíz. Se encuentra en la sección en la que está el algoritmo de resolución de raíces. Este ejercicio es el paso previo a calcular raíces con varios decimales. Para resolverlo, los estudiantes en su primer intento deben estimar que valor a su juicio puede ser plausible que al elevarse al cuadrado se acerque a la solución. Con la experiencia adquirida de su primer resultado deben volver a refinar su estimación hasta encontrar el valor deseado. Para este segundo intento, deberán estimar cuánto aumentar o disminuir su número inicial para acercarse a la solución. Tras realizar sucesivas estimaciones de valores, les permite tener una idea intuitiva de cuanto es "aumentar mucho o poco" un número para que su cuadrado se acerque al valor que desean, trabajando así el sentido numérico. Además, este ejercicio muestra que la solución de un ejercicio de matemáticas puede ser una aproximación y no un valor exacto.


ANAYA

7. Calcula por tanteo.

a) $\sqrt{90}$ b) $\sqrt{150}$ c) $\sqrt{700}$

d) $\sqrt{1521}$ e) $\sqrt{6816}$ f) $\sqrt{10816}$

24. Calcula, por tanteo, la raíz exacta o la entera.

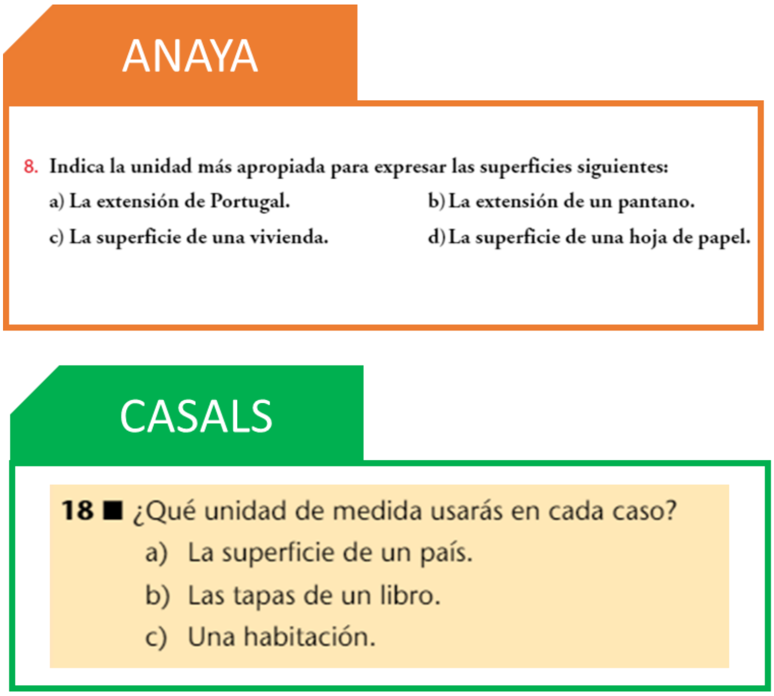
a) $\sqrt{90}$ b) $\sqrt{121}$ c) $\sqrt{1785}$

Figura 2: Ejercicio del libro de Anaya sobre el cálculo aproximado de raíces.

Estimación en medida

- Orden de magnitud

Se ha visto como en los libros de Anaya y Casals aparecen ejercicios de elección de las unidades más apropiadas para medir cosas. En la Figura 3 se muestran estos ejercicios. En el libro de Anaya aparece en el tema del sistema métrico decimal mientras que en el de Casals aparece en el de perímetro y áreas. El ejercicio evalúa la capacidad del alumno para relacionar cosas del mundo real con las unidades de medida. El problema de estos ejercicios es que las cosas tienen unos tamaños tan diferentes entre sí que tampoco se desarrolla el concepto de estimación en medida, más bien es unir, por ejemplo, una cosa con centímetros, otra con metros etc. Si se quisiera trabajar la estimación, estos ejercicios tendrían que desarrollarse hacía la comparación de cosas más similares entre sí y tangibles de la vida cotidiana, alejadas de concepciones alejadas del estudiante como puede ser la superficie de un país.


ANAYA

8. Indica la unidad más apropiada para expresar las superficies siguientes:

a) La extensión de Portugal.
b) La extensión de un pantano.
c) La superficie de una vivienda.
d) La superficie de una hoja de papel.

CASALS

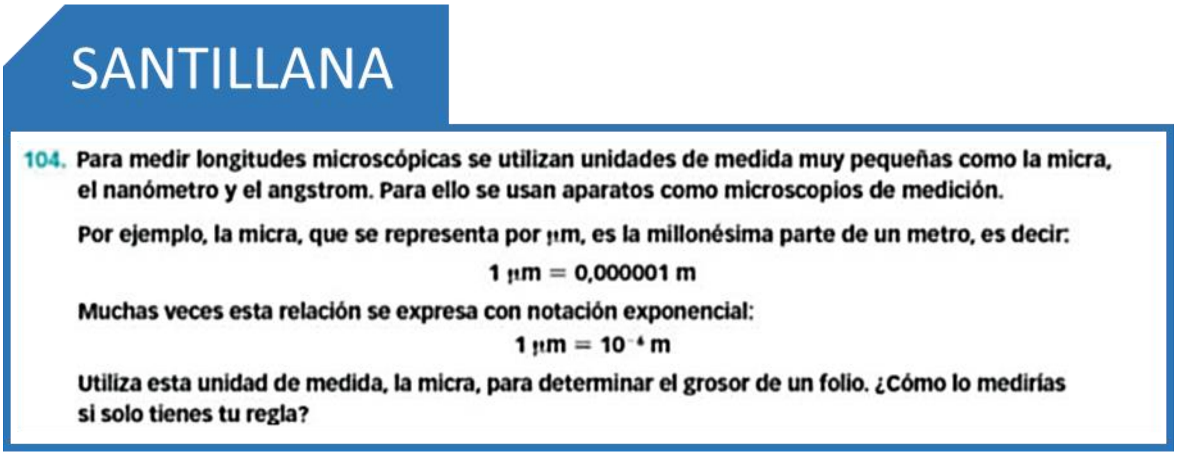
18 ■ ¿Qué unidad de medida usarás en cada caso?

a) La superficie de un país.
b) Las tapas de un libro.
c) Una habitación.

Figura 3: Ejercicios del libro de Anaya (arriba) y Casals (abajo) sobre orden de magnitud.

- Estimación en medida de magnitudes continuas

De todo el análisis de los libros de texto, este problema es el único que se ha encontrado que está planteado para ser resuelto únicamente mediante estimación. El problema de la Figura 4 se encuentra en el libro de Santillana en el tema del sistema métrico decimal. Se introduce a través de la definición de micra y se justifica para determinar el grosor de folios. A la hora de determinar el grosor de un folio, no puede utilizarse una regla puesto que los folios son más delgados que 1 mm. Los estudiantes deben desarrollar alguna estrategia para poder estimar el grosor de un folio, ya que no lo van a poder medir con exactitud. Una posible solución que podrían dar los alumnos es coger 100 folios y medir su espesor, y después a través de la proporcionalidad estimar el grosor de un único folio.



SANTILLANA

104. **Para medir longitudes microscópicas se utilizan unidades de medida muy pequeñas como la micra, el nanómetro y el angstrom. Para ello se usan aparatos como microscopios de medición.**

Por ejemplo, la micra, que se representa por µm, es la millonésima parte de un metro, es decir:

$$1\ \mu m = 0{,}000001\ m$$

Muchas veces esta relación se expresa con notación exponencial:

$$1\ \mu m = 10^{-6}\ m$$

Utiliza esta unidad de medida, la micra, para determinar el grosor de un folio. ¿Cómo lo medirías si solo tienes tu regla?

Figura 4: Ejercicios del libro de Santillana sobre estimación en medida continua.

Tras el análisis de libros de textos es evidente que la estimación no forma parte de este currículo potencial. No se explica de ninguna manera a los estudiantes y aparece en aproximadamente menos de 5 ejercicios en los que intervenga de alguna forma la estimación por libro. Los ejemplos más frecuentes en los libros se basan en ordenar fracciones, las cuales pueden hacerse desde el común denominador, y en establecer el orden de magnitud en medida de diversas cosas que tienen tamaños realmente distintos entre sí. Así pues, los libros de texto, en cuanto a la estimación, se ciñen al currículo y por tanto podría decirse que su presencia es anecdótica.

c) Efectos de la no enseñanza de la estimación sobre los estudiantes

Se ha visto como la estimación es prácticamente inexistente en el currículo oficial y el potencial. Esto es un obstáculo didáctico por parte de las leyes educativas que impiden que la estimación llegue hasta los estudiantes. Por ello, la estimación se deberá trabajar desde el currículo impartido. Los profesores deben motivar a los alumnos a abandonar el camino marcado por los libros de textos y crear un entorno de aprendizaje en el cual aparezcan de forma natural la razón de ser, las técnicas y tecnologías de la estimación.

En la actualidad es fácil ver las causas de no impartir estimación en las aulas de secundaria. Estas carencias pueden observarse tanto en los alumnos como en aquellos profesores que han sido educados sin recibir enseñanza en estimación. Este obstáculo generado desde el currículo oficial causa dificultades en los dos campos de problemas de la estimación: la estimación en cálculo y la estimación en medida.

En cálculo siempre se trabaja desde el punto de vista de encontrar el resultado exacto de una operación mediante algoritmos aritméticos. Una actividad habitual en estimación en cálculo es aproximar el resultado de una operación de cálculo tal como 49×82. Los profesores suelen estar de acuerdo en que debe inculcarse en los alumnos que realicen una estimación de la respuesta antes de empezar a hacer los cálculos ya que eso les permite contrastar la validez de su resultado. Para hacer la estimación del ejemplo la idea es que, por ejemplo, hagan el redondeo y multipliquen 50 por 80 para obtener 4000, y usen ese valor como referencia para comprobar la validez del resultado exacto. Como apunta Segovia et al. (1989), los estudiantes no comprenden por qué tienen que prescindir del método usual, el cual se realiza con papel, lápiz o calculadora. Al estudiante le resulta más fácil y correcto dar el resultado exacto antes que realizar una estimación, ya que han sido preparados para ello. Resulta complicado convencer al estudiante de que abandone el camino seguro y que haga un redondeo, sobre todo para este ejemplo, ya que es fácil calcular la respuesta exacta. Por ello, los profesores deben estar instruidos en la enseñanza de la estimación para hacerla valer sobre las dificultades que pongan los alumnos hacia su aprendizaje.

Respecto a los conocimientos de los profesores, se ha detectado falta de preparación en estimación en cálculo. En el estudio de Castro et al. (2014) se muestra los errores que cometen los profesores en multiplicación y división con números decimales menores que uno. La idea equivocada de que la “multiplicación aumenta” y la “división disminuye” son válidas para números enteros, pero que fallan al extrapolarse a los decimales menores que la unidad. Se les pedía a los profesores que estimasen el valor aproximado de operaciones como 0.46/0.66 o 852×0.048. Los resultados indicaron que el 55% de estimaciones realizadas fueron imprecisas (se alejaron en un valor mayor del 30% del exacto). Para paliar estas situaciones, estudios sobre estimación (Siegler & Booth, 2005) coinciden en señalar que la investigación en estrategias de estimación es uno de los campos de mayor interés dentro de la estimación. Esto es debido, en parte, a que los procesos y estrategias de estimación difieren en gran medida de los algoritmos de cálculo tradicionales. Para los profesores que no han sido instruidos en la estimación no tienen estrategias para abordar este tipo de operaciones. Además, verán dificultades al emprender alguna acción didáctica en el aula sin caer con facilidad en trivialidades o con dificultades excesivas para el nivel de los alumnos, ya que, debido a su instrucción, los planteamientos serán poco elaborados y resultarán poco convincentes para los estudiantes.

Respecto a la estimación en medida, tal y como apunta Mengual (2017), al examinar los libros de texto de primaria y secundaria se observa como en los temas relacionados con la medida se encuentran actividades que son exclusivamente cálculos. Hay un déficit de actividades en las que haya composición y recomposición de figuras. Tampoco hay de medición directa con unidades no convencionales, de estimación, o problemas complejos e interesantes que aumenten la motivación del alumno. En primaria, casi no se aborda la definición de unidad de medida para focalizarse en la manipulación numérica, donde prevalece el trabajo aritmético. En Secundaria la situación es muy similar, pero tratando con manipulaciones algebraicas tal y como señala Chamorro y Belmonte (1988):

"En la mayoría de los casos se identifica el aprendizaje de las magnitudes y su medida con el conocimiento y dominio del sistema métrico decimal y se considera que ha alcanzado los objetivos propuestos cuando el alumno efectúa conversiones con seguridad y rapidez."

Tras un paso por Primaria en el que no se han trabajado los conceptos y procedimientos básicos relativos a la medida se llega a Secundaria con una clara sustitución de saberes. Los problemas de medida se sustituyen por problemas aritméticos, y los procesos de medida por el empleo de fórmulas. El cambio de unidades se basa en un algoritmo alejado del concepto de cambio de unidades. Para superar estos obstáculos es necesario recurrir a la toma de medidas reales de objetos del entorno cotidiano del alumno, y a la realización de actividades manipulativas que aseguren el descubrimiento y la comprensión de las relaciones existentes entre unidades, tanto aritmética como geométricamente.

Para el caso particular de medida en áreas, la enseñanza también se basa en la aplicación de fórmulas que permiten hallar el área de las diferentes figuras (Corberán, 1996). Las actividades prácticas de medición son prácticamente inexistentes y cuando se llevan al aula se realizan con muchos obstáculos materiales (Chamorro, 2003). No se realizan actividades en las que tengan que medir el área de objetos cotidianos (Chamorro, 2001). Al usar objetos ideales matematizados se dificulta el reconocimiento en la realidad de las magnitudes. Además, es habitual usar áreas dibujadas en vez de recortadas, lo que supone otro obstáculo didáctico que impide identificar los perímetros y áreas. Si estos dibujos además no tienen en cuenta su tamaño real, se obtienen objetos de órdenes de magnitud diferentes, pero aparentemente iguales en tamaño. Por culpa de esta enseñanza en medida, se destruye la relación entre objetos y las estimaciones que podrían hacerse con ellos.

Respecto al conocimiento de profesores a la hora de tratar este tipo de problemas, se destaca el trabajo de Segura y Ferrando (2021) en el que se estudia a 224 estudiantes de profesorado de primaria. En el estudio se les plantea diversos problemas de Fermi, como, por ejemplo, ¿Cuánta gente cabe en el porche de la facultad cuando llueve? ¿Cuántas baldosas hay entre la facultad de educación y el gimnasio? ¿Cuántas briznas de hierba hay en el césped la imagen? El resultado arroja que 166 estudiantes cometieron 1 error o más en la resolución de los problemas. El 37.31% de los errores fueron respecto a la simplificación del problema, y el 39.91% a la matematización. A la vista de estos resultados, se plantea conseguir que con la inclusión de problemas de Fermi en la secuencia didáctica los alumnos puedan mejorar su capacidad de simplificar problemas y matematizar objetos del mundo real.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

a) La estimación en Primaria

Para poder afrontar la secuencia didáctica de estimación en 1º de la ESO es necesario saber cuál es el punto de partida de los estudiantes. Por ello, es necesario conocer los contenidos impartidos durante los cursos anteriores, que en este caso corresponden a primaria. Como ya se ha visto, el currículo de secundaria no considera la estimación como un contenido propio a ser enseñado. Por esa razón se tratará de aclarar si la estimación es tratada con entidad propia en primaria y, además, se analizarán los contenidos que puedan estar relacionados con la estimación y puedan facilitar a los estudiantes el desarrollo de estrategias para poder afrontarla en secundaria.

El marco legal en el cual se ha estudiado la estimación en primaria corresponde a la siguiente normativa:

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.
- ORDEN ECD/850/2016, de 29 de julio, por la que se modifica la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón

En el análisis de la orden ECD/850/2016 hay una sección en la que dice lo siguiente:

"Para la consecución de los objetivos del área es imprescindible la construcción del pensamiento lógico que requiere el desarrollo paulatino a lo largo de la etapa de las siguientes habilidades intelectuales:

[…]

La estimación, que es una habilidad que permite dar una idea aproximada de la solución de un problema, anticipando resultados antes de hacer mediciones o cálculos, y se optimizará cuanto mejor sea la comprensión del sistema de numeración decimal y de los conceptos y procedimientos que se manejen, favoreciendo a su vez tanto el sentido numérico como el de orden de magnitud."

Además, dentro de los objetivos pueden encontrarse los siguientes:

- Obj.MAT2. Utilizar procesos de deducción, inducción, estimación, aproximación, probabilidad, precisión, rigor… en situaciones de la vida cotidiana, formulándolas mediante sencillas formas de expresión matemática, obteniendo respuesta a sus planteamientos con una o varias soluciones, valorando la coherencia de los resultados, y justificando el proceso seguido.
- Obj.MAT4. Identificar y resolver problemas mediante estrategias personales de estimación, cálculo y medida, así como procedimientos geométricos, de orientación en el espacio, de azar, probabilidad y representación de la información comprobando en cada caso la coherencia de los resultados obtenidos y aplicando los mecanismos de autocorrección que conlleven, en caso necesario, un replanteamiento de la tarea.

Para el caso de currículo de primaria, la estimación sí que es un objeto matemático con entidad propia. Se encuentra definido, y además forma parte claramente de los objetivos de la enseñanza matemática. Aparece reflejada en ambos casos respecto a sus campos de problemas: cálculo y medida. Además, se le busca la utilidad, como en la ESO, para valorar los resultados obtenidos de problemas y ejercicios.

El hecho de que la estimación tenga presencia en primaria para después desaparecer en secundaria lleva hacia la pregunta ¿la estimación es totalmente aprendida por los estudiantes en primaria? Por ello, se analizará el currículo de todos cursos de primaria para discernir el aprendizaje realizado por los estudiantes durante este periodo. En base a este análisis, se estudiará como puede extenderse su conocimiento hacia la realización de estimaciones más precisas, sencillas y con mayor grado de dificultad.

Curso 1º y 2º de primaria

Bloque 3: Medida

Contenidos:

- Desarrollo de estrategias para medir longitudes, capacidades y masas.

Criterios de evaluación:

- Crit.MAT.3.1. Seleccionar instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones y expresando con precisión medidas de longitud, capacidad y peso/masa en el entorno escolar.

Curso 3º y 4º de primaria

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

Contenidos:

- Planificación del proceso de resolución de problemas de la vida cotidiana y entorno inmediato: análisis y comprensión del enunciado, estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc., reflexión sobre el proceso, revisión de las operaciones y las unidades de los resultados, comprobación de la coherencia de las soluciones y análisis de forma cooperativa de otras estrategias de resolución, elaboración de estimaciones y conjeturas sobre los resultados contrastando su validez. coherencia y valorando su utilidad.

Criterios de evaluación:

- Crit.MAT.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas del entorno escolar y familiar y la vida cotidiana, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

Estándares de aprendizaje:

- Est.MAT.1.2.4. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de problemas a resolver del entorno escolar, familiar y la vida cotidiana, contrastando su validez

Bloque 2: Números

Contenidos:

- Estimaciones en cálculos

Criterios de evaluación:

- Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6. Operar con los números aplicando las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (cálculo mental, tanteo), usando el más adecuado.

Estándares de aprendizaje:

- Est.MAT.2.5.3. Estima y comprueba la coherencia del resultado de un problema mediante diferentes estrategias (cálculo mental y tanteo).

Bloque 3: Medida

Contenidos:

- Comparación y estimación de longitudes, capacidades y masas.
- Desarrollo de estrategias para medir longitudes, capacidades y masas.

Criterios de evaluación:

- Crit.MAT.3.1. Seleccionar instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones y expresando con precisión medidas de longitud, capacidad y peso/masa en el entorno escolar y familiar y la vida cotidiana.

Curso: 5º y 6º de primaria

El texto expuesto aquí es el correspondiente al currículo de 5º de primaria. El currículo de 6º de primaria expone similares contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, pero haciendo uso de distinto vocabulario. Con el fin de aligerar esta sección se va a tomar que el currículo de 6º expone sustancialmente lo mismo que el de 5º de primaria.

Bloque 1:

Contenidos:

- Planificación del proceso de resolución de problemas del entorno inmediato: análisis y comprensión del enunciado, estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc., reflexión sobre el proceso, revisión de las operaciones y las unidades de los resultados, comprobación e interpretación de la coherencia de las soluciones, búsqueda de otras formas de resolución, elaboración de estimaciones y conjeturas sobre los resultados contrastando su validez, coherencia y valorando su utilidad y eficacia, identificación de patrones, regularidades y leyes matemáticas.

Criterios de evaluación:

- Crit.MAT.1.3. Describir y analizar situaciones de cambio en el entorno inmediato, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones.
- Crit.MAT.1.7. Identificar y resolver problemas relacionados con situaciones del entorno inmediato estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados para la resolución de problemas.

Estándares de aprendizaje:

- Est.MAT.1.3.2. Realiza predicciones sobre los resultados esperados en la resolución de situaciones problemáticas del entorno inmediato, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen identificando posibles variables no controladas y elementos extraños.
- Est.MAT.1.7.1. En el tratamiento de situaciones problemáticas del entorno inmediato realiza estimaciones sobre los resultados esperados y contrasta su validez, valorando los pros y los contras de su uso, teniendo en cuenta las características de las informaciones o datos iniciales y el contexto de la situación.

Bloque 2: Números

Contenidos:

- Estimaciones y redondeos en cálculos

Criterios de evaluación:

- Crit.MAT.2.3. Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas del entorno inmediato.

Estándares de aprendizaje:

- Est.MAT.2.3.2 Redondea mentalmente números decimales a la décima o centésima más cercana en situaciones de resolución de problemas del entorno inmediato.
- Est.MAT.2.3.3. Ordena fracciones en las que el numerador es mayor que el denominador aplicando la relación entre fracción y número decimal.

Bloque 3: Medida

Contenidos:

- Estimación de longitudes, capacidades, masas. Medición de longitudes, capacidades y masas

Criterios de evaluación:

- Crit.MAT.3.1. Seleccionar instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones y expresando con precisión medidas de longitud, capacidad, peso/masa y superficie en el entorno inmediato.
- Crit.MAT.3.2. Escoger los instrumentos de medida adecuados para realizar mediciones de longitudes, capacidades y masas en el entorno inmediato, estimando previamente la medida de forma razonable.

Estándares de aprendizaje:

- Est.MAT.3.2.1. Estima longitudes, capacidades, masas en situaciones del entorno inmediato, eligiendo la unidad y los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida y explicando de forma oral el proceso seguido y la estrategia utilizada.

En el estudio del currículo oficial, puede verse como la estimación forma parte de todos los cursos de primaria. En 1º y 2º se encuentra dirigida hacia la estimación en medida, en la cual los estudiantes pueden hacer valoraciones de cuál es la longitud, capacidad o peso de un objeto para después corroborarlo mediante un método exacto. Aquí ya empieza la emisión de juicios de los estudiantes sobre medidas de las cuales no tienen a priori información. A partir de las experiencias que vayan generando podrán afinar su juicio para saber cuánto es “mucho” o “poco” en medida. En 3º y 4º se amplían los contenidos de estimación en medida y además se introduce la estimación en cálculo. La estimación en cálculo está planteada para utilizarse como método para valorar las soluciones obtenidas de ejercicios y problemas, pero además introduce el elemento de poder hacerse mental. Dentro del cálculo mental la estimación juega un papel muy importante, ya que existen operaciones que son fácilmente realizables con papel y lápiz, pero mentalmente es fácil equivocarse. Por eso, los estudiantes necesitan aprender estrategias que les permitan bajar el grado de dificultad de esas operaciones para que puedan realizarlas mentalmente y obtener resultados que se encuentren en un rango de confianza aceptable. En 5º y 6º los contenidos sobre la estimación se siguen expandiendo, tanto en medida como en cálculo.

La conclusión que se puede extraer del análisis curricular de primaria es que los estudiantes han recibido enseñanza acerca de la estimación continuada en el tiempo. Siempre y cuando, el currículo impartido por el profesor se haya adecuado a lo que dicta el currículo oficial. Por ello, se considera que los alumnos van a tener nociones sobre la estimación, aunque se diseñará una propuesta didáctica que intente cubrir las posibles deficiencias que la educación primaria pueda haber acarreado sobre los estudiantes.

b) Conocimientos previos en estimación

Para la presente propuesta de estimación en 1º de la ESO los estudiantes deberían de poseer los siguientes conocimientos y competencias:

- Sumar, restar, multiplicar y dividir con números cuyas cifras alcancen los millares con especial énfasis en las técnicas de cálculo mental.
- Redondeo y truncamiento de números cuyas cifras alcancen los millares.
- Orden de magnitud en unidades de longitud, peso y medida del sistema internacional.
- Desarrollo de estrategias para afrontar problemas matemáticos en los que intervenga la estimación.
- Haber realizado experiencias de medidas directas sobre objetos físicos.

Tras el análisis del currículo de primaria, los estudiantes deberían haber adquirido los conocimientos asociados a los algoritmos numéricos (suma, resta, multiplicación y división). El conocimiento está directamente asociado al cálculo. Los algoritmos aprendidos están basados en lápiz y papel. Para nuestra secuencia didáctica se pretende fortalecer el cálculo mental a través del modelo RTC, el cual dista de la aritmética usual que se aprende en primaria.

Los estudiantes pueden presentar dificultades respecto a las estrategias necesarias para afrontar problemas matemáticos en los que intervenga la estimación y, en las medidas directas de objetos del mundo real.

Una falta de estrategia en la resolución de problemas de estimación hace que los estudiantes no sepan ni como empezar a plantear el problema matemático. Por tanto, va a resultar fundamental asegurar que sean capaces de identificar la estrategia idónea para cada tipo de estimación.

Respecto a las medidas directas del mundo real, es necesario que los estudiantes puedan tener como referencia las medidas que tienen los objetos de su entorno. Así podrán ser capaces de valorar si la magnitud de un objeto es similar a la de otro con el que ya hayan experimentado en el pasado. Puesto que no se puede garantizar que todos los estudiantes hayan adquirido ese conocimiento interno, se optará por iniciar la secuencia con objetos manipulables para que puedan crear sus referencias internas.

c) Actividades previas a la estimación

Los conocimientos matemáticos necesarios para poder afrontar la secuencia didáctica pasan por dominar correctamente las operaciones aritméticas. Por ello se van utilizar las siguientes tablas de cálculo de la web http://docentes.educacion.navarra.es/jjimenei/ para preparar a los alumnos a hacer la transición de los algoritmos verticales a los horizontales. En la Figura 5, aparece la tabla a realizar. En el anexo se incluye la tabla a mayor resolución.

	A	B	C	D	E	F
1	5 + 2 · 3	9 + 3 · 4	7 · 2 + 5	5 + 5 · 3	2 + 4 · 7	8 + 2 · 6
2	3 · (4 + 3)	5 · 3 + 9	4 + 6 · 3	(3 + 5) · 7	8 · 4 + 6	7 · 5 + 5
3	9 + 3 · 2	8 · 6 + 7	4 · (3 + 6)	3 · (7 + 3)	3 · 4 + 5 · 8	5 + 3 + 7
4	4 · 7 + 9	6 · (5 + 2)	4 + 9 · 3	6 · 8 + 2	7 · (3 + 6)	3 · 2 + 4 · 5
5	4 + 3 + 7	5 · 6 + 3	2 · (7 + 2)	8 + 3 + 7	8 · 4 + 7	5 + 3 · 5
6	3 · 6 + 2 · 5	7 · (3 + 1)	6 · 3 + 2	5 · (4 + 3)	9 + 2 · 6	4 · (3 + 5)
7	8 + 3 · 4	9 + 4 + 6	4 · 5 + 2 · 3	6 · 3 + 2	5 · 4 + 9	6 + 4 · 7
8	4 · (3 + 5)	7 + 3 · 5	3 · 4 + 5	2 · 5 + 6 · 7	5 + 4 · 4	6 · (7 + 1)
9	7 · 5 + 5	8 + 2 + 3 · 7	7 + 2 + 8	7 · (2 + 3)	2 · 6 + 5	4 · 9 + 3
10	4 + 3 · 2	5 · (3 + 3)	4 · 8 + 2	8 + 4 · 3	9 · (2 + 4)	7 · 4 + 6
11	6 · 4 + 7	2 + 3 + 7 · 5	7 + 5 · 4	3 · 2 + 5 · 8	2 · 5 + 3 · 6	3 · 6 + 4 · 3
12	8 · (6 - 2)	15 - 5 · 2	12 - (3 + 5)	15 - 3 - 2	14 - 2 · 5	(9 - 5) · 4
13	6 - 4 : 2	12 - 8 : 4	8 - 6 : 2	(10 - 4) : 2	(12 - 4) : 2	18 - 10 : 2
14	7 · 4 - 2	(7 - 3) · 8	(8 - 5) · 9	6 · 8 - 8	8 : 2 · 3	9 - (3 + 4)
15	6 · 5 : 5	10 - 8 : 2	15 : 3 · 3	3 · 6 : 2	10 - 4 : 2	12 : 3 · 2
16	10 - 4 : 2	4 · 6 : 2	10 - 6 : 3	8 - 6 : 2	6 · 4 : 2	20 - 6 : 2
17	6 · 4 - 4	(10 - 5) · 3	5 · 4 : 2	3 · (15 : 5)	(9 - 5) · 9	6 · (8 - 5)
18	8 - (6 - 2)	9 - (2 · 3)	8 - (12 : 4)	7 · (6 - 6)	10 : (7 - 5)	4 + 12 - 2
19	7 + 5 - 3	9 + 6 - 5	8 - 4 + 7	9 + 3 - 2	7 - 4 + 6	8 - 5 + 4
20	9 · (5 + 2)	(4 – 2) · 8	(5 + 3) · 4	(9 – 2) · 3	6 · (7 – 3)	3 · (7 – 2)

Figura 5: Tabla de cálculo utilizada como actividad previa.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

Popularmente, las matemáticas son concebidas como una rama del conocimiento que permite obtener resultados inequívocos, tal y como la define el diccionario de la Real Academia Española (RAE):

"matemático, ca: Exacto, preciso."

Por esta razón tratar de enseñar a los estudiantes la estimación puede ser una tarea dificultosa. Durante su educación se les enseña técnicas exactas y precisas para solucionar ejercicios y problemas. Para conseguir que dejen a un lado estás técnicas y tomen otras vías alternativas, debe hacerse bajo la perspectiva de que el estudiante está totalmente convencido de que esa es la manera adecuada de tratar el problema. Además, se añade la complicación de tener que tratarlas sin un currículo oficial sobre la que se sustente la propuesta. Los alumnos no dispondrán de secciones de estimación en sus libros de texto que les permita trabajarla de forma orgánica con el resto de contenido. Recaerá sobre el profesor la inclusión de problemas de estimación relacionados con el temario. Se deberá tratar de tal forma que los estudiantes no sientan que es algo irrelevante al verse fuera de su objeto habitual de estudio, que es el libro de texto. Por ello, justificar la razón de ser de la estimación desde varias perspectivas es esencial para que los estudiantes muestren intención hacia su aprendizaje.

Las razones de ser que justifican la utilización de la estimación por encima de otros métodos son las siguientes:

a) Imposibilidad de un valor exacto

Existen gran variedad de situaciones en las que no se pueden conocer los valores exactos de las cantidades en las que intervienen. Para tratar estas situaciones, sólo puede hacerse desde la estimación. Esta imposibilidad surge respecto a tres tipos de causas:

1) Valor desconocido:

Cuando no puede obtenerse el valor exacto por falta de información. Esto ocurre sobre todo cuando se pretende predecir razonablemente hechos del futuro o del pasado.

Ejemplos:

- La subida de temperatura del planeta en el año 2050 debido a las emisiones de CO_2.
- El año en el que se produjo la extinción de los dinosaurios.

2) Valores variables:

Para el caso anterior existen variables que pueden extrapolarse como constantes para hacer la estimación, pero existen situaciones en las que una cantidad puede variar su valor a lo largo del tiempo o posición. En estos casos se toma el conjunto total de datos y se estima sobre la variabilidad de sus variables para tratarlas como constantes.

Ejemplos:

- La temperatura que dice el telediario que hace hoy en Zaragoza.
- La velocidad media de un nadador en los juegos olímpicos.

3) Limitaciones de las medidas:

Las medidas físicas son inexactas por naturaleza. Los objetos que se utilizan para medir tienen imperfecciones y defectos surgidos durante su fabricación. Cuanto menores sean estas imperfecciones, más preciso será el instrumento de medida. Pero no puede conseguirse hacer una medida con el 100% de precisión, siempre tendrá un error asociado. Además, hay que añadir los errores humanos que se cometen al hacer estas medidas.

Ejemplos:

- Saber lo que pesa exactamente una persona. Si se utilizan dos básculas distintas, pueden ofrecer diferencias de unos gramos entre sus medidas.
- Cronometrar el tiempo que le cuesta caer un bolígrafo desde la mesa. Aunque se pongan 10 personas a medirlo, no habrá dos tiempos iguales.

b) Imposibilidad de tratamiento numérico exacto

Existen situaciones en las que puede conocerse el valor exacto que soluciona el problema, pero debido a las limitaciones de la situación, es más conveniente estimarse.

1) Dominio limitado

Hay valores que solo tienen sentido al ser expresados como números naturales, y por ello hay que ajustar el resultado exacto a uno que tenga sentido en la vida real.

Ejemplo:

- Hay 3 pintores que pintan 2 casas en un día. ¿Cuántos pintores se necesitan para pintar 1 casa?

La solución exacta a este problema es 1.5 pintores, pero no tiene sentido que existan medias personas. Por eso hay que estimar mediante un redondeo al alza. Se van a tener que contratar a 2 pintores si se quiere pintar la casa en un día o menos.

2) Limitaciones del sistema decimal y de los algoritmos

Debido al sistema decimal, no pueden escribirse todos números exactamente con lápiz y papel ya que muchos contienen infinitas cifras decimales. Para hacer operaciones con ellos es necesario estimarles un valor que minimice el error en el resultado final.

Ejemplo:

- ¿Cuánta tela se necesita para cubrir una mesa de 1 metro de radio?

Aplicando la fórmula $A = \pi r^2$ se obtiene que se necesitan π metros cuadrados de tela, el cual es un número irracional. Se deberá hacer una aproximación hacia un valor de 3.25 o 3.5 m^2 ya que no es habitual que en las tiendas se vendan telas de 3.14 m^2.

3) Facilitar el desarrollo del sentido numérico

Los cálculos se realizan principalmente con calculadora, en papel o mentalmente. En el caso del cálculo mental no es posible trabajar con la misma precisión que en papel, pero permite comprobar la validez de ese resultado. Existen estrategias que permiten discernir si el resultado de una operación matemática puede ser la solución del problema, o si inequívocamente no puede serlo.

Ejemplo:

- Si hay que elegir entre dos artículos de un supermercado que están de oferta, estimar cuál es el más económico.

4) Limitación temporal

Cuando es necesario dar una respuesta matemática en un breve periodo de tiempo. Suele realizarse mediante cálculo mental y al no ser posible trabajar con las cifras exactas, es necesario usar la estimación para trabajar con cifras más fácilmente manejables.

Ejemplo:

- Al traer el camarero la cuenta después de cenar en un restaurante poder estimar si el precio final es aceptable o ha habido un error por parte del restaurante.

c) Razones históricas de la estimación

Las razones de ser históricas a partir de las cuales surge la estimación se corresponden con las anteriormente mencionadas. Puesto que la estimación puede hacerse desde la aritmética, no fue necesaria una matemática desarrollada durante siglos para que hiciera su aparición. Apareció de forma natural al plantearse problemas que no podían ser resueltos de manera exacta. Por ello, se van a mostrar dos ejemplos correspondientes a la antigua Grecia en los que se puso de manifiesto que la estimación era realmente útil.

1) Estimación de Arquímedes sobre el valor de π

En el libro de los elementos de Euclides (300 a.C.) se dice que las áreas de los círculos son proporcionales al cuadrado de sus radios. Dicho de otra forma, si se divide el área de un circulo cualquiera entre el cuadrado de su radio, siempre se obtiene el mismo número. Hoy en día a ese número lo llamamos π y sabemos que es irracional. Pero, un siglo después de la publicación de Euclides, Arquímedes, en su afán de obtener un valor para π utilizó una estrategia de estimación para poder acotar su valor.

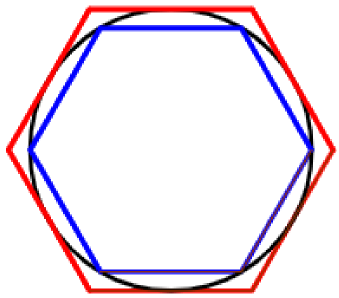


Figura 6: Ejemplo de estrategia para calcular el área de un círculo.

La estrategia se basa en el uso de polígonos regulares inscritos y circunscritos a un circulo tal y como muestra la Figura 6. El área del circulo será menor que la del polígono circunscrito (en rojo), y mayor a la del polígono inscrito (en azul). De esta manera puede acotarse π. Se puede aumentar su precisión con un mayor número de lados en el polígono regular. En el caso de Arquímedes llegó a utilizar polígonos regulares de 96 lados y obtuvo que $3.141031 < \pi < 3.142714$

Este es un ejemplo histórico en el que su razón de ser es la de imposibilidad de tratamiento numérico exacto, y concretamente sobre las limitaciones del sistema decimal y de los algoritmos. Arquímedes no podía obtener el valor de π de manera exacta y por ello tuvo que recurrir a hacer una estimación sobre su valor. La estrategia seleccionada le permitía, a su juicio, obtener una precisión lo suficientemente buena en π como para poder utilizar ese valor como si se tratase de un valor exacto.

2) Estimación de la circunferencia de la Tierra

La mayoría de la comunidad de sabios de Grecia de la época de Aristóteles (384-322 a.C.) estaban de acuerdo en que la Tierra era una esfera, pero no sabían sus dimensiones. Llegaron a esta conclusión tras observar como los mástiles de los barcos permanecían visibles mientras que el resto de barco no lo era cuando se iban alejando de la costa. También, a través de la observación de la sombra curvada que aparece en la luna durante los eclipses lunares.

Eratóstenes fue el que realizó una estimación de la circunferencia de la Tierra mediante geometría y trigonometría con un error muy bajo. Durante el solsticio de verano, en un pozo de Siena, los rayos de sol iluminaban únicamente el agua del fondo, no los laterales del pozo. De esta manera se probaba que el Sol se encontraba perfectamente perpendicular al pozo durante ese día. Ese mismo día, Eratóstenes con su cayado en Alejandría pudo observar que proyectaba sombra lateral, indicando que el Sol no estaba perfectamente perpendicular sobre Alejandría. De esta manera había probado que la Tierra tenía una cierta curvatura, ya que, en Siena en el mismo momento el Sol se encontraba perpendicular. En la Figura 7 aparece el planteamiento geométrico del problema. Con la medida de la longitud de la sombra de su cayado fue capaz de obtener la circunferencia de la Tierra. Al dividir la longitud de la sombra entre la altura del cayado, pudo obtener que el ángulo de desviación de los rayos del Sol respecto a la vertical era 7.2 grados. Las matemáticas del problema implicaban la siguiente razón:

$$\frac{360\ grados}{7.2\ grados} = \frac{circunferencia\ de\ la\ Tierra}{distancia\ entre\ Siena\ y\ Alejandría}$$

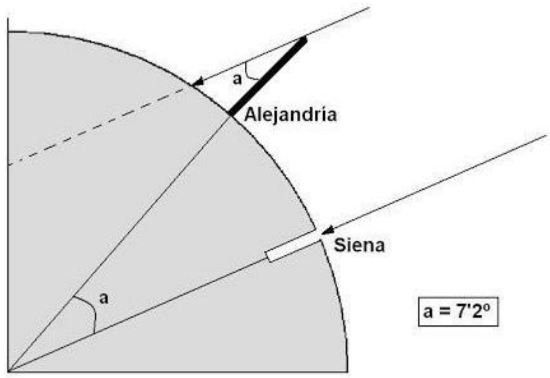


Figura 7: Esquema de la argumentación geométrica de Eratóstenes.

Para calcular la distancia entre Siena y Alejandría se utilizaron caminantes que debían utilizar zancadas de la misma longitud durante todo el trayecto. Así se obtuvo que la distancia entre ambas ciudades eran 800 kilómetros. Al resolver la ecuación obtuvo que la circunferencia de la Tierra es de 40 000 kilómetros siendo el valor que tenemos hoy día calculado como 40 075 kilómetros.

Puesto que en esa época era imposible hacer una medida directa de la circunferencia de la Tierra, la razón de ser de esta estimación radica en la imposibilidad de obtener valor exacto. Concretamente, estaríamos ante un caso de valores variables, ya que la estimación final está sustentada por otras estimaciones intermedias. Eratóstenes hace las siguientes suposiciones para llegar a su solución: 1) La Tierra es perfectamente esférica. 2) El tamaño de zancada utilizada por los caminantes es constante a lo largo de todo el trayecto entre ciudades, y además en trayectoria perfectamente recta. 3) El ángulo de la sombra de su cayado, al ser tan pequeño, permite la aproximación de la tangente al ángulo. Básicamente, el único valor exacto que posee es el de la altura de su cayado. A pesar de tener que realizar varias estimaciones, el valor final es muy cercano al real (error del 0.18%). Este es un claro ejemplo de como una buena estrategia en estimación es capaz de llevar a resultados más que satisfactorios en un problema que a priori parece difícilmente resoluble.

d) Problemas que constituyen su razón de ser

A continuación, se muestran dos problemas que sirven para introducir la razón de ser de la estimación en los estudiantes:

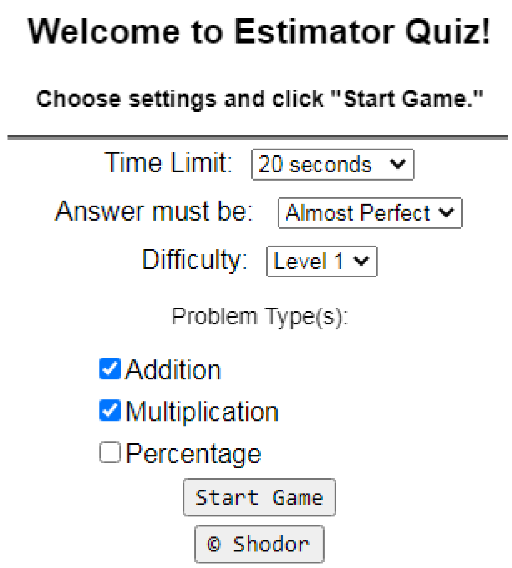
Actividad: Razón de ser – 1

Objetivo:

- Que los alumnos contemplen la estimación con una vía útil cuando tienen que realizar operaciones pero hay una limitación temporal que les impide hacerlas con exactitud.

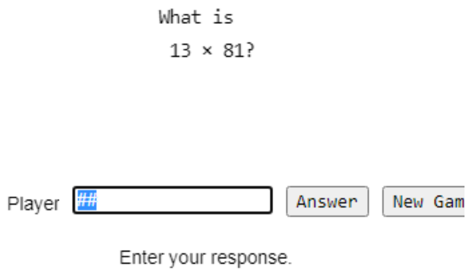
Metodología:

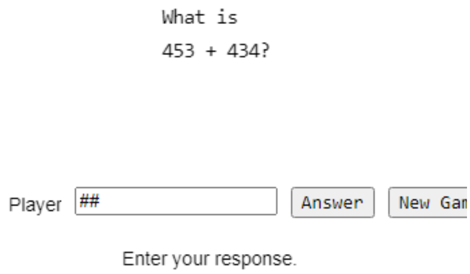
- Se realiza con ordenador/Tablet de forma individual
- La actividad es http://shodor.org/interactivate/activities/EstimatorQuiz/
- Se debe configurar el juego bajo las siguientes opciones:



- Los alumnos deben contestar a operaciones que implican sumas y multiplicaciones.
- Se empieza con 60 segundos de limite. Al cabo de un rato se baja a 45 segundos. Finalmente, el limite se pondrá a 20 segundos para hacer las operaciones.

Ejemplo:





- El juego indica si el resultado final se encuentra cercano al exacto.

Actividad: Razón de ser – 2

Objetivo:

- Que los estudiantes comprendan que ante la dificultad de obtener el valor exacto, la estimación permite dar resultados satisfactorios a través de argumentaciones debidamente justificadas.

Metodología:

- Después de la ficha de la actividad aparece en detalle cómo se puede llevar a cabo la actividad a través de la experiencia propia de haberla realizado.

Enunciado:

a) En el vaso que tienes enfrente de ti hay una cierta cantidad de granos de arroz. Sin tocar el vaso ¿Cuántos granos de arroz estimas que hay?

b) Ahora puedes tocar el vaso, pero no derramar el arroz que hay en su interior. ¿Cuántos granos de arroz estimas que hay?

c) Puedes vaciar todo el contenido del vaso y utilizar el método que creas conveniente para contar los granos de arroz. ¿Cuántos granos de arroz estimas que hay?

Esta actividad ha sido extraída del artículo Beltrán-Pellicer (2020). Durante el periodo de prácticas del presente máster, se ha llevado a cabo esta actividad en el IES Joaquín Costa (Cariñena, Zaragoza) con los alumnos de 1º de la ESO para estudiar si es útil como actividad para introducir la razón de ser de la estimación en el alumnado. La experiencia en el aula ha sido la siguiente:

La actividad se ha realizado en una clase de 15 alumnos con edades comprendidas entre 13 y 14 años, siendo 8 alumnas y 7 alumnos. Los alumnos de la muestra no tienen ni dificultades de aprendizaje ni tampoco presentan altas capacidades.

Se ha dividido la clase en 5 grupos de 3 alumnos cada uno, los cuales se han puesto un nombre diferenciador. La actividad se encuentra dividida en 3 fases. Cada grupo al finalizar cada fase debe realizar una estimación de los granos de arroz.

- Fase 1: El profesor va enseñando el vaso con arroz por las mesas. Los alumnos sin poder tocarlo deben hacer una estimación.
- Fase 2: Se entrega a cada grupo un vaso con arroz. Los alumnos pueden tocarlo, pero no derramarlo para hacer la estimación.
- Fase 3: Pueden vaciar el vaso y hacer lo que quieran con el arroz para poder estimarlo.

Las estimaciones de cada grupo tras cada fase aparecen recogidas en la Tabla 4.

Grupo	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Error Fase 3
Los arroceros	602	900	3020	11.8 %
Los muskhenun	420	901	3500	29.6 %
Herrera	612	715	3225	19.4 %
Liga estelar	350	575	2250	16.6 %
Teletubies	485	898	2600	3.7 %

Tabla 4: Resultados obtenidos de la estimación en medida discreta de granos de arroz

Para analizar los resultados hay que tener en cuenta que la cantidad de granos de arroz por vaso es 2700 aproximadamente. Puede apreciarse como en la Fase 1 estiman que hay en torno a 500 granos de arroz. Al pasar a la Fase 2 aumentan notablemente la cantidad de granos de arroz. En general, aumentan su estimación en un factor de $\times 1.5$. Los alumnos se han percatado como hay mucho más arroz del observado inicialmente, pero son reacios a pasar la barrera de que hay más de 1000 granos de arroz.

En la Fase 3 es donde los alumnos empiezan a desarrollar estrategias para estimar. Al principio, al vaciar los vasos de arroz, todos grupos empezaron a contar los granos uno por uno. Al darse cuenta de que es una tarea tediosa, aburrida y que no iban a ser capaces de completarla antes de finalizar la clase decidieron abandonarla. En ese momento es en el que optan por debatir en grupo estrategias para dar una solución. Todos los grupos encontraron una estrategia sin ayuda del profesor. Esta estrategia está basada en la proporcionalidad. Han obtenido una cantidad que ellos consideran fija y después han visto cuantas veces se repite esa cantidad hasta utilizar todo el arroz. Aunque todos grupos hayan usado la proporcionalidad, la cantidad fija que usaban como referencia era distinta en cada grupo.

- Los arroceros:

Cantidad fija: Capacidad hasta una marca en el vaso

Han contado manualmente 300 granos de arroz. Han echado esos 300 granos en el vaso y le han hecho una marca con rotulador. Después, han vaciado el vaso y lo han vuelto a llenar hasta la marca. Han repetido la operación 10 veces. Por tanto, han multiplicado 10 por 300 para obtener el resultado final.

- Los mushkenun:

Cantidad fija: Capacidad de un puño

Han contado la cantidad de arroz que le cabe en el puño a uno de sus miembros. Esta cantidad cada vez era distinta según si abría más o menos el puño al coger el arroz. Han multiplicado la cantidad de arroz que le cabe en el puño por el número de veces que ha cogido arroz. Al llegar al último puño y no poder llenarlo han contado manualmente ese sobrante de arroz. Según ellos en cada puño caben unos 500 granos de arroz.

- Herrera:

Cantidad fija: Capacidad hasta una marca en el vaso

Han utilizado la misma estrategia que el grupo de los arroceros.

- Liga estelar:

Cantidad fija: Granos de arroz por capa

Este grupo ha desarrollado dos técnicas de estimación para hacer el cálculo final. Han partido del número de capas de arroz que hay cuando todo el arroz está en el vaso. En primer lugar, han hecho estimación en medida diciendo que en cada capa caben unos 150 granos de arroz. Esto se puede hacer contando los granos si miras el vaso desde arriba. Después, han multiplicado por el número de capas de arroz, que según ellos se podía obtener con la regla. Han estimado que en promedio un grano de arroz mide 3 mm. Como la altura del arroz en el vaso es 3.5 cm, entonces hay 15 capas de arroz en el vaso. Para obtener el valor de 15 capas han hecho estimación en cálculo ya que la división 3.5/0.3 no la han realizado en papel, aunque parece ser un error ya que si fuera 4.5/0.3 sí que serían 15 capas. Al final han multiplicado su estimación de 150 granos en cada capa por su estimación de las 15 capas.

- Teletubies:

Cantidad fija: Capacidad de un tape de subrayador

Han cogido el tape de un subrayador y han contado cuantos granos de arroz caben hasta que rebosa. Les ha salido que caben unos 100 granos. Para vaciar el vaso han necesitado rellenar 26 veces el tape. Al realizar la multiplicación han obtenido el resultado final.

Puede verse como la fluctuación en sus resultados se basa en la cantidad fija elegida. De las elegidas, la más robusta es la de la capacidad del tape de un subrayador. Es un objeto externo que puede cuantificarse con facilidad, ya que, de los elegidos es en el que caben menos granos (el error neto cometido al llenarlo será menor) y es fácil de definir cuando está lleno. En cambio, los que hacen marcas en el vaso de arroz y lo usan como medida tienen mayor error neto ya que hay que prensar el arroz siempre por igual y para saber si ha llegado bien a la marca hay que tener en cuenta el error de paralaje. Después estarían los que estiman el arroz por capa. Han dividido un problema grande en dos más pequeños, en vez de estimar todo el vaso, solamente tienen que estimar una capa y el número de capas. El problema de realizar esto es que si cualquiera de las dos estimaciones es errónea, el resultado final puede ser disparatado. En su caso, han hecho muy bien las dos estimaciones y se han acercado al valor exacto. Por otro lado, la cantidad fija más volátil es la del puño, con la cual se obtiene una estimación con un error del 29%.

Durante la actividad los alumnos han tomado conciencia sobre la utilidad de la estimación para calcular con mayor facilidad y rapidez respecto al método exacto de contar uno por uno los granos de arroz. Ha surgido en ellos de forma natural, sin tener que darles pautas previas sobre como resolver el problema.

Respecto a las estrategias utilizadas por estos alumnos, se encuentran en concordancia con los resultados de Beltrán-Pellicer (2020). En ambos casos los alumnos utilizan cantidades fijas como referencia y después utilizando la lógica proporcional acaban realizando una estimación. Con este tipo de actividades se muestra que puede introducirse la estimación desde otros contextos que sí están recogidos en los libros de texto, como por ejemplo la proporcionalidad.

E. Sobre el campo de problemas, técnicas y tecnologías: diseño de la secuencia didáctica

La estimación tiene que estar ligada a debate, ya que las respuestas a los problemas son abiertas. Los campos de problemas diseñados están propuestos para que los alumnos tengan que razonar por qué sus estimaciones son correctas mediante argumentos de peso. El aprendizaje será realizado a través de problemas siguiendo los dos campos principales de estimación: cálculo y medida.

Las actividades están presentadas en formato de ficha. En ella aparece el título de la actividad, técnica que se pretende trabajar, metodología para implementar la actividad en el aula, y el enunciado que verán los alumnos. En algunas actividades se incluye además la respuesta esperada por parte de los alumnos.

a) Campo de problemas: Estimación en cálculo

Actividad: EC–1
Técnica: ▪ Utilización de la descomposición/recomposición en sumas ▪ Utilización de las propiedades conmutativas y asociativas de la suma
Metodología: ▪ Ficha a realizar de manera individual ▪ El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades ▪ Al finalizar puesta en común
Enunciado: Realiza sumas descomponiendo los términos difíciles en otros que te resulten más fáciles para poder hacer las sumas Ejemplo: 33 + 18 = (30 + 3) + (10 + 8) = (30 + 10) + (3 + 8) = 40 + 11 = 51

a) Aplícalo a las siguientes operaciones:

11 +27 =	78 + 11 =
45 + 33 =	27 + 59 =

b) Realiza las siguientes sumas usando la técnica de descomposición:

327 + 425 =	687 + 301 =
123 + 624 =	422 + 220 =

c) Realiza las siguientes sumas usando la técnica de descomposición:

13845 + 746 =	986 + 4537 =
423 + 4528 =	67458 + 2354 =

Actividad: EC–2

Técnica:

- Utilización de la descomposición/recomposición en restas
- Utilización de las propiedades conmutativas y asociativas de la resta

Metodología:

- Ficha a realizar de manera individual
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar puesta en común

Enunciado:

Realiza restas utilizando la descomposición de sus términos para que te resulte más fácil

Ejemplo:

46 – 32 = (40 + 6) – (30 + 2) = (40 – 30) + (6 – 2) = 10 + 4 = 14

a) Aplícalo a las siguientes operaciones:

84 – 17 =	32 – 21 =
46 – 34 =	89 – 67 =

b) Realiza las siguientes restas usando la técnica de descomposición:

326 – 178 =	698 – 784 =
845 – 632 =	246 – 57 =

c) Realiza las siguientes restas usando la técnica de descomposición:

6452 – 145 =	8524 – 3654 =
96478 – 85 =	85421 – 3217 =

Actividad: EC–3

Técnica:

- Utilización de la descomposición/recomposición en sumas y restas
- Utilización de las propiedades conmutativas y asociativas de suma y resta

Metodología:

- Ficha a realizar de manera individual
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar puesta en común

Enunciado:

Utiliza la descomposición para realizar las siguientes operaciones:

Ejemplo:

28 – 18 + 44 = (20 + 8) – (10 + 8) + (40 + 4) = (20 – 10 + 40) + (8 – 8 + 4) =

Realiza las siguientes operaciones

49 – 23 + 15 =	98 – 37 + 23 – 15 =
85 – 24 – 30 + 62 =	74 + 32 – 69 – 14 =
132 + 26 – 84 =	254 – 136 + 345 =

Solución:

49 – 23 + 15 = (50 – 1) – (20 + 3) + (10 + 5) = (50 – 20 + 10) + (– 1 – 3 + 5) =

= 40 + 1 = 41

85 – 24 – 30 + 62 = (80 + 5) – (20 + 4) – 30 + (60 + 2) = (80 – 20 – 30 + 60) +

+ (5 – 4 +2) = 90 + 3 = 93

132 + 26 – 84 = (100 + 30 + 2) + (20 + 6) – (80 + 4) = 100 + (30 + 20 – 80) +

+ (2 + 6 – 4) = 100 – 30 + 4 = 70 + 4 = 74

98 – 37 + 23 – 15 = (100 – 2) – (40 – 3) + (20 + 3) – (10 + 5) = 100 +

+ (– 40 + 20 – 10) + (– 2 + 3 + 3 – 5) = 100 – 30 – 1 = 70 – 1 = 69

74 + 32 – 69 – 14 = (70 + 4) + (30 + 2) – (70 – 1) – (10 + 4) = (70 + 30 – 70 – 10) +

+(4 + 2 + 1 – 4) = 20 + 3 = 23

254 – 136 + 345 = (200 + 50 + 4) – (100 + 40 – 4) + (300 + 40 + 5) =

= (200 – 100 + 300) + (50 – 40 + 40) + (4 + 4 + 5) = 400 + 50 + 13 = 463

Actividad: EC–4
Técnica: ▪ Utilización de la descomposición/recomposición en sumas y restas ▪ Utilización de las propiedades conmutativas y asociativas de suma y resta
Metodología: ▪ Se proyectan los precios de diversos objetos (pertenecientes a los naturales) ▪ Se realiza por parejas, uno actúa como vendedor y el otro como comprador ▪ Es un juego en el que existen 3 fases: Fase 1: El comprador debe elegir tres productos a comprar y calcula el precio total. Fase 2: El comprador deberá pagar con 2 billetes ajustándose lo máximo al precio total. Fase 3: El vendedor devuelve el dinero sobrante de la compra. ▪ Puntuación: Si al hacer las operaciones en las distintas fases el resultado no es exacto, se sumarán tantos puntos como se haya alejado del valor exacto. Gana el que obtiene menos puntos tras dos rondas.

Actividad: EC–5
Técnica: ▪ Utilización de la descomposición/recomposición en multiplicaciones de unidades por decenas ▪ Utilización de las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas en multiplicación y suma
Metodología: ▪ Ficha a realizar de manera individual

- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar puesta en común

Enunciado:

Realiza las multiplicaciones tras descomponer los factores en otros que consideres más fáciles de operar

Ejemplo:

$7 \cdot 35 = 7 \cdot (30 + 5) = (7 \cdot 30) + (7 \cdot 5) = 210 + 35 = 245$

a) Resuelve las siguientes multiplicaciones:

$3 \cdot 24 =$	$4 \cdot 42 =$
$6 \cdot 46 =$	$7 \cdot 55 =$
$9 \cdot 12 =$	$7 \cdot 86 =$

Actividad: EC–6

Técnica:

- Utilización de la descomposición/recomposición en multiplicaciones de decenas por decenas
- Utilización de las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas en multiplicación y suma

Metodología:

- Ficha a realizar de manera individual
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar puesta en común

Enunciado:

Busca que los números puedan descomponerse en 2 y 5 para utilizar que su multiplicación de 10 y facilitar las cuentas

Ejemplo:

$42 \cdot 35 = (2 \cdot 21) \cdot (5 \cdot 7) = (2 \cdot 5) \cdot (21 \cdot 7) = 10 \cdot ((20 + 1) \cdot 7) = 10 \cdot (140 + 7) =$

$= 10 \cdot 147 = 1470$

Resuelve las siguientes multiplicaciones con este método

$36 \cdot 45 =$	$55 \cdot 12 =$
$40 \cdot 45 =$	$24 \cdot 65 =$
$75 \cdot 20 =$	$90 \cdot 74 =$

Actividad: EC–7

Técnica:

- Utilización de la descomposición/recomposición en divisiones de decenas por unidades
- Utilización de las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas en división y suma

Metodología:

- Ficha a realizar de manera individual
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar puesta en común

Enunciado:

Busca descomponer el dividendo en suma de múltiplos del divisor

Ejemplo:

48 : 3 = (30 + 18) : 3 = (30 : 3) + (18 : 3) = 10 + 6 = 16

Realiza las siguientes divisiones:

54 : 3 =	64 : 4 =
85 : 5 =	114 : 6 =
98 : 7 =	112 : 8 =

Solución:

54 : 3 = (30 + 24) : 3 = (30 : 3) + (24 : 3) = 10 + 8 = 18

85 : 5 = (50 + 35) : 5 = (50 : 5) + (35 : 5) = 10 + 7 = 17

98 : 7 = (70 + 28) : 7 = (70 : 7) + (28 : 7) = 10 + 4 = 14

64 : 4 = (40 + 24) : 4 = (40 : 4) + (24 : 4) = 10 + 6 = 16

114 : 6 = (60 + 54) : 6 = (60 : 6) + (54 : 6) = 10 + 9 = 19

112 : 8 = (80 + 32) : 8 = (80 : 8) + (32 : 8) = 10 + 4 = 14

Actividad: EC–8
Técnica: ▪ Utilización de la descomposición/recomposición en multiplicaciones y divisiones ▪ Utilización de las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas en multiplicación, división y suma
Metodología: ▪ Ficha a realizar de manera individual ▪ El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades ▪ Al finalizar puesta en común
Enunciado: Aplica todo lo aprendido en descomposición respetando el orden de operaciones Ejemplo: $13 \cdot 8 : 2 = 13 \cdot 4 = (10 + 3) \cdot 4 = (10 \cdot 4) + (3 \cdot 4) = 40 + 12 =52$ Realiza las siguientes operaciones $56 : 4 \cdot 3 =$ $\quad\quad$ $16 \cdot 64 : 4$ $81 : 9 \cdot 22 =$ $\quad\quad$ $36 \cdot 33 : 11 =$

Actividad: EC–9
Técnica: ▪ Utilización de la aproximación ▪ Utilización de la reformulación en operaciones aritméticas

Metodología:

- Ficha a realizar de manera individual
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar puesta en común

Enunciado:

Elige la aproximación que te parezca más cercana al valor exacto (A, B o C). En la columna Estimación anota el valor que estimas como resultado de la opción elegida mediante cálculo mental.

	A	B	C	Estimación
13 + 64	10 + 70	15 + 60	15 + 65	
47 + 21	45 + 20	50 + 20	50 + 25	
91 – 42	95 – 45	90 – 45	90 – 40	
84 – 32	80 – 30	85 – 30	80 – 35	
41 · 16	45 · 10	40 · 15	40 · 10	
33 · 64	30 · 60	30 · 65	35 · 65	
99 : 11	100 : 10	80 : 10	100 : 1	
45 : 6	50 : 10	50 : 5	45 : 5	

Solución:

	A	B	C	Estimación
13 + 64	10 + 70	15 + 60	15 + 65	75
47 + 21	45 + 20	50 + 20	50 + 25	70
91 – 42	95 – 45	90 – 45	90 – 40	50
84 – 32	80 – 30	85 – 30	80 – 35	55
41 · 16	45 · 10	40 · 15	40 · 10	600

$33 \cdot 64$	$30 \cdot 60$	$30 \cdot 65$	$35 \cdot 65$	2275
99 : 11	100 : 10	80 : 10	100 : 1	10
45 : 6	50 : 10	50 : 5	45 : 5	9

Actividad: EC–10

Técnica:

- Utilización de la aproximación
- Utilización de la reformulación en operaciones aritméticas
- Uso de calculadora

Metodología:

- Ficha a realizar de manera individual
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar puesta en común

Enunciado:

Te encuentras de vacaciones viajando en autobús.

a) El recorrido del autobús es:

Zaragoza – Teruel = 171 km

Teruel – Cuenca = 147 km

Cuenca – Ciudad Real = 268 km

Ciudad Real – Puertollano = 42 km

Puertollano – Cádiz = 402 km

Aproximadamente ¿Cuántos kilómetros ha recorrido el autobús?

b) Has quedado con amigo que ha salido desde Burgos. Su autobús ha realizado el siguiente recorrido:

Burgos – Valladolid = 134 km

Valladolid – Córdoba = 584 km

Córdoba – Málaga = 158 km

Málaga – Cádiz = 235 km

Aproximadamente ¿Cuántos kilómetros ha recorrido su autobús?

c) ¿Quién crees que ha realizado el recorrido más corto?

d) Haz el cálculo exacto con la calculadora ¿Tu estimación se ha acercado al resultado?

Actividad: EC–11
Técnica: ▪ Utilización de la aproximación ▪ Utilización de la reformulación en operaciones aritméticas ▪ Uso de calculadora
Metodología: ▪ Ficha a realizar de manera individual ▪ El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades ▪ Al finalizar puesta en común

Enunciado:

Realiza las operaciones aproximando con anterioridad. Apunta ese resultado en la columna de Aproximación. En la columna que dice Exacto, apunta el valor tras calcularlo con calculadora. En Diferencia, anota cuanto se diferencia el valor de Aproximación respecto al Exacto.

Ejemplos:

$45 + 36 \approx 45 + 40 = 85$

$64 - 42 \approx 65 - 40 = 25$

$11 \cdot 12 \approx 10 \cdot 12 = 120$

$33 : 4 \approx 32 : 4 = 8$

	Aproximación	Exacto	Diferencia
87 + 33			
14 + 69			
96 – 57			
63 – 48			
13 · 15			
39 · 61			
97 : 6			
63 : 8			

Solución:

	Aproximación	Exacto	Diferencia
87 + 33	90 + 30 = 120	120	0
14 + 69	15 + 70 = 85	83	2
96 – 57	95 – 60 = 35	39	4
63 – 48	65 – 50 = 15	15	0

13 · 15	15 · 15 = 225	195	30
39 · 61	40 · 60 = 2400	2379	21
97 : 6	100 : 5 = 20	16.166	3.833
63 : 8	64 : 8 = 8	7.875	0.125

Actividad: EC–12

Técnica:

- Utilización de la aproximación
- Utilización de la reformulación y compensación en operaciones aritméticas

Metodología:

- Ficha a realizar de manera individual
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar puesta en común

Enunciado:

Diseña sumas, restas, multiplicaciones y divisiones cuya aproximación debe ser la dada por la primera columna. NO debe ser el resultado exacto.

Aproximación	Suma	Resta	Multiplicación	División
65				
25				
120				
250				

Actividad: EC–13

Técnica:

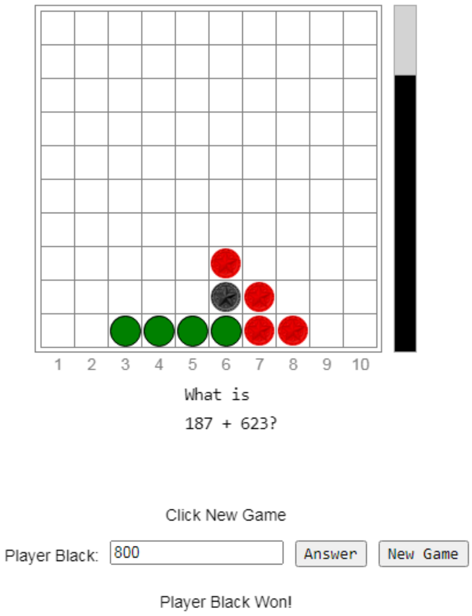
- Utilización de la aproximación
- Utilización de la reformulación y compensación en operaciones aritméticas

Metodología:

- Se realiza con ordenador/Tablet por parejas
- La actividad es http://shodor.org/interactivate/activities/EstimatorFour/
- El procedimiento del juego es similar al de EC–9

En este caso se une la estimación con el juego 4 en raya. Un miembro de la pareja debe hacer la estimación en cálculo en menos de 20 segundos. Si su respuesta está razonablemente cerca de la solución, podrá poner una ficha en el tablero. Se repite este procedimiento hasta que algún alumno haga 4 en raya.

Ejemplo:



Tecnologías y proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático

Los campos de problemas están diseñados bajo el modelo RTC (Reformulación, Traslación y Compensación). Cada uno de estos procesos se trabaja en los siguientes problemas:

- Reformulación: EC–10, EC–11, EC–12, EC–13, EC–14
- Traslación: EC–1, EC–2, EC–3, EC–4, EC–5, EC–6, EC–7, EC–8, EC–11
- Compensación: EC–13, EC–14

El aprendizaje adquirido en RTC será aplicado posteriormente en los campos de problemas de estimación en medida, por tanto, no es único de este campo de problemas.

La institucionalización se producirá de una manera orgánica mientras se resuelven los problemas y van surgiendo en los debates las estrategias que ha ido utilizando cada alumno para resolver los problemas.

Se pretende que sin conocimientos previos acerca de RTC los alumnos sean capaces de desarrollar sus propias estrategias para alcanzarlos. En aquellos problemas que son más introductorios se incluyen ejemplos para guiarlos en la dirección de la técnica que se desea aplicar. Asimismo, el profesor durante la mayoría de las actividades va a estar observando el trabajo de los alumnos para ayudarles cuando se encuentren algún obstáculo que no sean capaces de superar por sí mismos. La comparación de estimaciones con los valores exactos les permitirá entender que las estimaciones realizadas tienen cierto grado de exactitud. En el momento en el que empiezan a utilizar la compensación son capaces de hacer estimaciones más finas. Podrán ver como se acercan más al valor exacto de una operación, pero a través de una ruta distinta a la que están acostumbrados. Al llegar a este punto serán capaces de comprender que la ruta matemática elegida para solucionarlos es la correcta.

b) Campo de problemas: Estimación en medida

Dentro del campo de estimación en medida lo vamos a subdividir en subcampos de medida: longitud, peso, medida discreta, área y problemas de Fermi.

1) Estimación en longitud:

Actividad: EM.Longitud–1

Técnica:

- Realizar medidas directas
- Desarrollo de referentes en medidas de longitud

Metodología:

- Se realiza por parejas
- Se proporciona cinta métrica a cada pareja
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades

Enunciado:

a) Utilizando la regla mide las siguientes partes de tu cuerpo y escríbelas en centímetros:

Mano: Antebrazo:

Pie: Pierna:

b) Con ayuda de un compañero mide

Altura:

Distancia entre las puntas de los dedos en esta posición:

¿Observas alguna relación entre las dos medidas?

Actividad: EM.Longitud–2

Técnica:

- Desarrollo de estrategias de estimación en longitud para objeto presente y unidad ausente
- Desarrollo de referentes en medidas de longitud

Metodología:

- Se realiza por grupos
- En el apartado b) los grupos rotaran ordenadamente por cada objeto del aula
- Al finalizar la actividad se pone en común

Enunciado:

a) Estima cuanto miden los siguientes objetos de clase en centímetros:

	Largo (cm)	Ancho (cm)
Mesa		
Pizarra		
Puerta		
Ventana		
Suelo de la clase		

b) Utilizando las partes de tu cuerpo mide los siguientes objetos de tu clase, pero dando la medida en centímetros:

	Largo (cm)	Ancho (cm)
Mesa		
Pizarra		
Puerta		
Ventana		
Suelo de la clase		

c) Valora tus estimaciones iniciales

Actividad: EM.Longitud–3
Técnica: ▪ Desarrollo de estrategias de estimación en longitud para objeto presente y unidad ausente ▪ Utilización de referentes en medidas de longitud
Metodología: ▪ Se realiza por grupos ▪ Se proyectan una serie de imágenes las que deben estimar las longitudes que pida el profesor ▪ Cada grupo, tras un cierto periodo de tiempo debe dar una estimación ▪ Se realiza debate grupal tras cada imagen
Imágenes:  

Solución:

Una persona de media se considera que mide 1.70 metros. En la imagen hay que repetir 4 veces la altura de la persona para hacer la altura del árbol. Por tanto, $1.7 \cdot 4 = 6.8$ metros

En la imagen aparece una persona, aunque se vea muy pequeña. Su altura hay que repetirla unas 55 veces. Eso da una altura para la secuoya de 93.5 metros

Para la cúpula central hay que repetir unas 35 veces la altura de una persona, lo que hace 60 metros aproximadamente.

La cúpula central realmente mide 80 metros, lo que introduce el concepto de perspectiva.

La altura de una habitación puede ser unos 2.5 metros. Al haber 8 plantas nos queda 40 metros. Además, hay que añadir la altura de los bajos, que será mayor de 2.5 metros. Por ejemplo 3.5 metros. El total sale 43.5 metros para el edificio entero.

La anchura de hombros de una persona suele estar en 60 cm aproximadamente. Esa medida hay que repetirla 9 veces para cubrir el coche. El total es 540 cm.

Se pide calcular la largura del avión. La anchura de un coche es 2 metros aproximadamente. Un carril al ser más ancho podrá ser de unos 3.5 metros. En la foto aparecen 7 carriles. A esos carriles hay que sumar un extra por la mediana y los bordes de la carretera, que se estiman 20 metros. El cálculo es $7 \cdot 3.5 + 20 = 44.5$ metros.

Un avión de estas características puede tener unos 60 metros de largo.

Actividad: EM.Longitud–4
Técnica: ▪ Estimación para unidad y objeto ausente en longitud ▪ Desarrollo de referentes en medidas de longitud
Metodología: ▪ Se realiza por parejas ▪ El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
Enunciado: Debes dar pistas a tu compañero sobre el objeto en el que estas pensado. Debes darle los siguientes datos: Alto, largo y ancho Si no es capaz de adivinarlo con esas pistas, puede preguntarte otras y deberás contestarle con SI o NO hasta que lo acierte

2) Estimación en peso:

Actividad: EM.Peso–1
Técnica: ▪ Desarrollo de estrategias de estimación en peso para unidad ausente y objeto presente ▪ Interiorización y desarrollo de referentes en peso
Metodología: ▪ Se realiza por grupos ▪ Se lleva una báscula y pelotas que puede disponer el centro ▪ Se le da a cada grupo un objeto y cada cierto tiempo van rotando ▪ El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades

- Al finalizar las estimaciones se ponen en común
- Se pesan los objetos para valorar las estimaciones

Enunciado:

a) ¿Cuánto crees que pesan estos objetos?

Pelota de tenis:	Balón de fútbol:
Balón de baloncesto:	Balón medicinal:

b) Tras ver el peso exacto, valora tus estimaciones

Actividad: EM.Peso–2

Técnica:

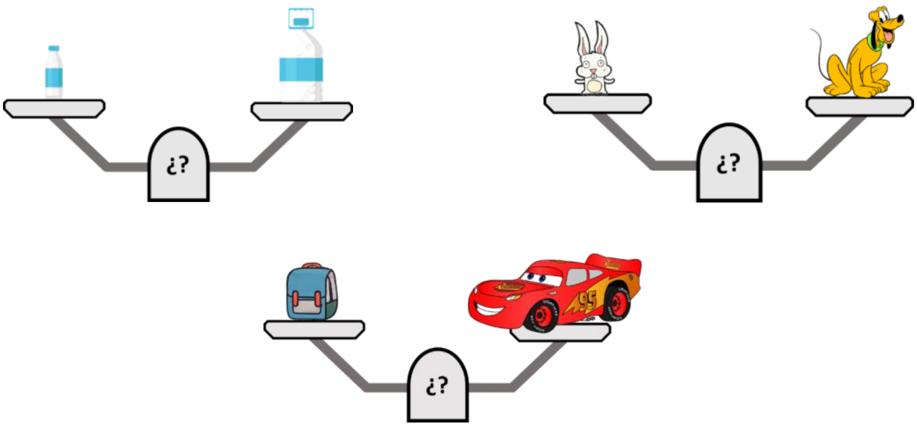
- Desarrollo de estrategias de estimación para unidad ausente y objeto presente mediante comparación

Metodología:

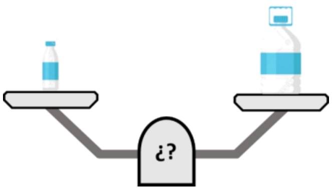
- Se realiza por grupos
- Se lleva una báscula y diferentes objetos
- Cada grupo dispondrá de las pelotas de la actividad EM.Peso–1 para usarlas como comparadores en peso
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar las estimaciones se ponen en común
- Se pesan los objetos para valorar las estimaciones

Enunciado: a) Utilizando los anteriores objetos como referencia, estima cuanto pesan los siguientes objetos: Bolsa naranjas: Mochila con los libros: Estuche: Mesa: b) Comparando con el valor real, valora tu estimación.

Actividad: EM.Peso–3
Técnica: ▪ Desarrollo de estrategias de estimación en peso para unidad y objeto ausente   ▪ Uso de las desigualdades   ▪ Pensamiento algebraico
Metodología: ▪ Ficha a realizar de manera individual   ▪ El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades   ▪ Al finalizar puesta en común
Enunciado: a) ¿Hacia dónde crees que se va a inclinar la balanza?   b) ¿Cuántos objetos habría que colocar a cada lado para que se equilibrase la balanza?

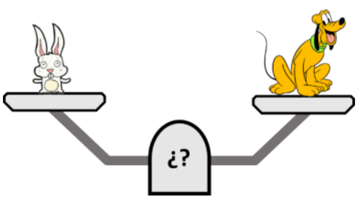


Solución:



a) Hacia la derecha porque una garrafa de agua contiene más agua que una botella.

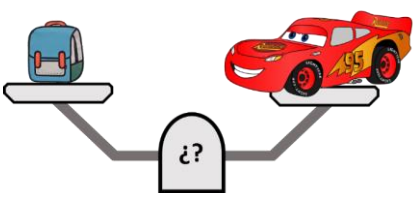
b) Si una garrafa pesa 5 kg y una botella 0.5 kg, harán faltan 5 : 0.5 = 10 botellas para equilibrar la balanza.



a) Se inclinará hacia la derecha porque un perro pesa más que un conejo.

b) Un conejo puede pesar 1 kg y un perro (depende de la raza) unos 10 kg. Entonces la balanza se equilibra con

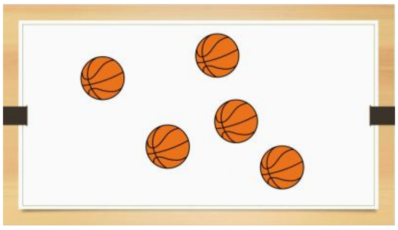
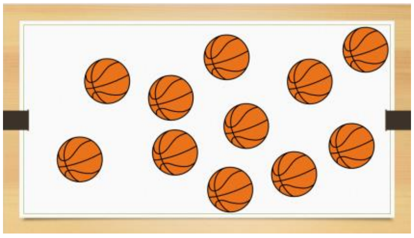
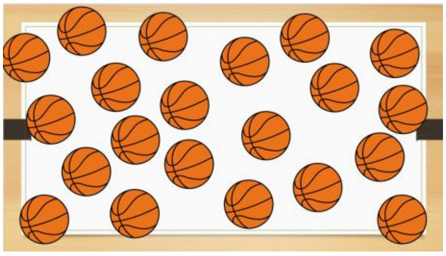
10 : 1 = 10 conejos.



a) Se inclina hacia la derecha porque un coche pesa más que una mochila.

b) Una mochila puede pesar 2 kg con libros. Un coche vamos a suponer que 800 kg. Harán falta 800 : 2 = 400 mochilas para igualar la balanza.

3) Estimación en medida discreta:

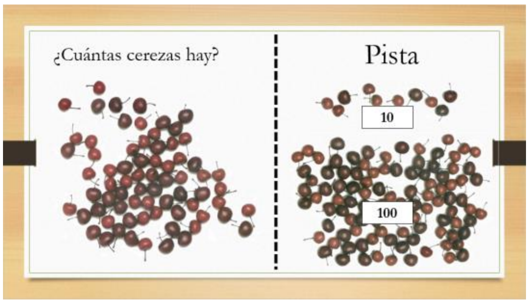
Actividad: EM.Discreta–1
Técnica: ▪ Uso de la subitización
Metodología: ▪ Se proyectan imágenes durante 2 segundos ▪ Los alumnos deben decir de manera grupal cuantas había ▪ La última diapositiva no da tiempo a contar y deberán estimarla
Imágenes: Tienes 2 segundos para decirme cuantas pelotas hay en la siguiente diapositiva   

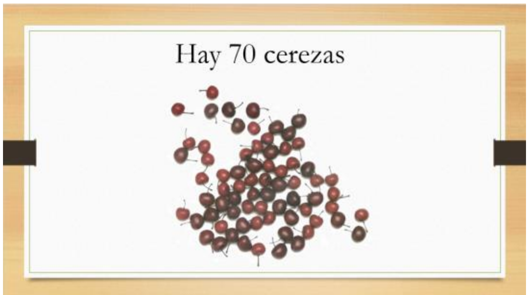
Actividad: EM.Discreta–2
Técnica: ▪ Desarrollo de estrategias de estimación discreta mediante uso de referentes por comparación

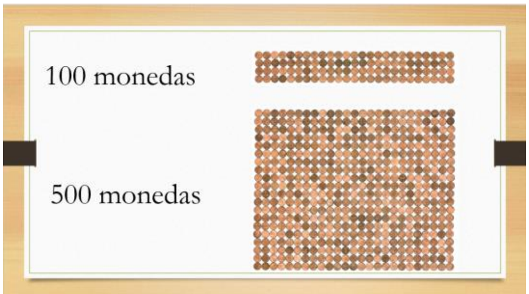
Metodología:

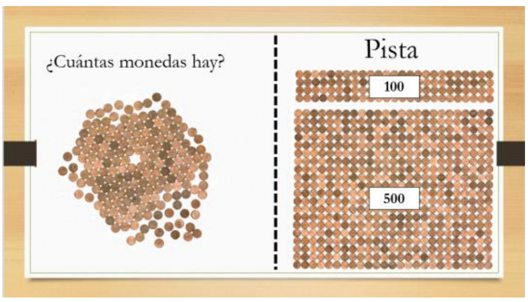
- Se proyectan imágenes en una secuencia
- Se debe dar tiempo a que hagan estimaciones cuando no hay referentes y después cuando puedan compararlos
- Se hace de manera grupal

Imágenes:









Actividad: EM.Discreta–3

Técnica:

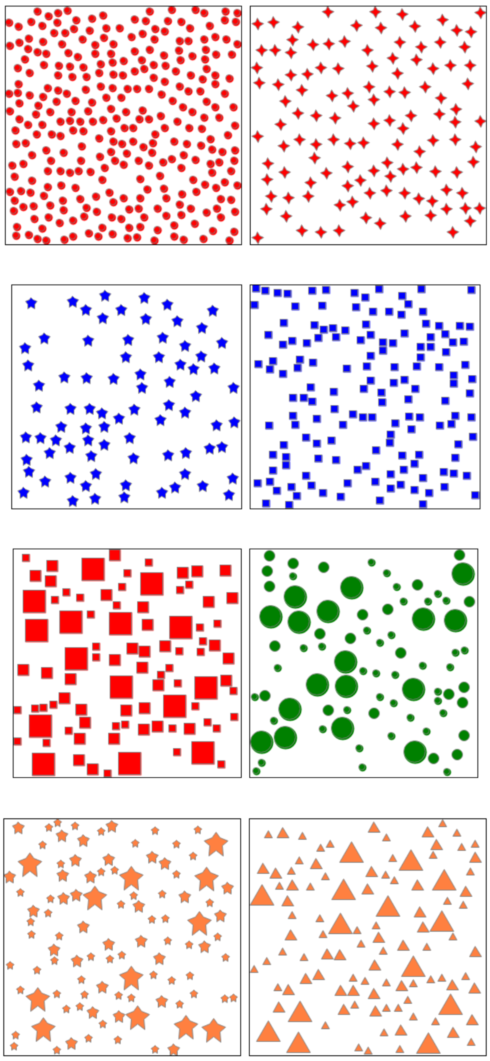
- Desarrollo de estrategias de estimación discreta por comparación

Metodología:

- La ficha se realiza por parejas
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar puesta en común

Enunciado:

¿Hay más figuras en la izquierda o en la derecha? Razona la respuesta



Actividad: EM.Discreta–4

Técnica:

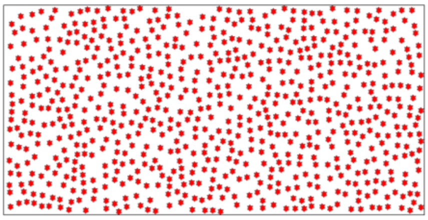
- Desarrollo de estrategias de estimación discreta mediante proporcionalidad

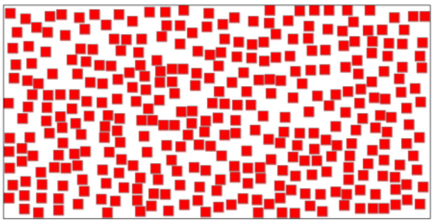
Metodología:

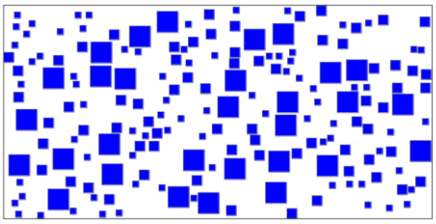
- La ficha se realiza individualmente
- El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades
- Al finalizar puesta en común

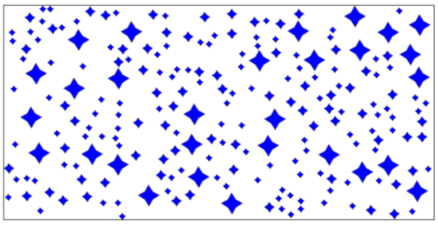
Enunciado:

¿Cuántas figuras hay en cada imagen?









Actividad: EM.Discreta–5

Técnica:

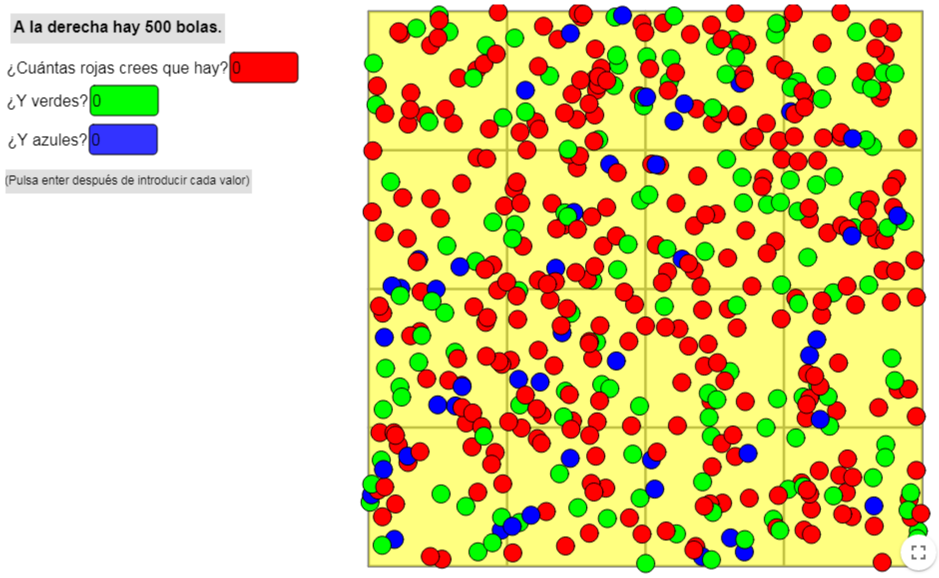
- Desarrollo de estrategias de estimación discreta mediante proporcionalidad

Metodología:

- Se realiza por parejas con ordenador/tablet
- La actividad se encuentra en https://www.geogebra.org/m/BjKByN2q
- La pareja debe colaborar para dar una respuesta conjunta
- Al acabar la estimación pueden empezar otra nueva

Enunciado:

¿Cuantas bolas rojas, verdes y azules hay en la imagen?



Solución:

En un cuadro se estima que hay:

15 bolas rojas, 9 bolas verdes y 4 bolas azules

Al haber 16 cuadros nos da un total de:

240 bolas rojas, 144 bolas verdes y 64 bolas azules

Esto nos da un total de 448 bolas. En el enunciado se nos dice que hay 500 bolas, así que se aumentan las cantidades de bolas hasta que su suma haga 500. 270 bolas rojas, 160 bolas verdes y 70 bolas azules Finalmente se comprueba la solución en la aplicación. El resultado es: 309 bolas rojas, 144 bolas verdes y 47 bolas azules. El error cometido es del 15.6%

Actividad: EM.Discreta–6
Técnica: ▪ Desarrollo de estrategias de estimación discreta mediante proporcionalidad ▪ Uso de referentes en estimaciones de longitud
Metodología: ▪ Se realiza por grupos ▪ El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades ▪ Al finalizar puesta en común
Enunciado: En la gran vía de Madrid ha habido una gran manifestación. Trabajamos en un periódico y se nos pide el número de manifestantes para ponerlo en la portada. Lo único que sabemos es que la gran vía estaba llena a lo largo de sus 1.36 km y la siguiente foto que obtuvo un reportero nuestro. ¿Cuántas personas estimas que hay? 

Actividad: EM.Discreta–7

Técnica:

- Desarrollo de estimación para valores desconocidos

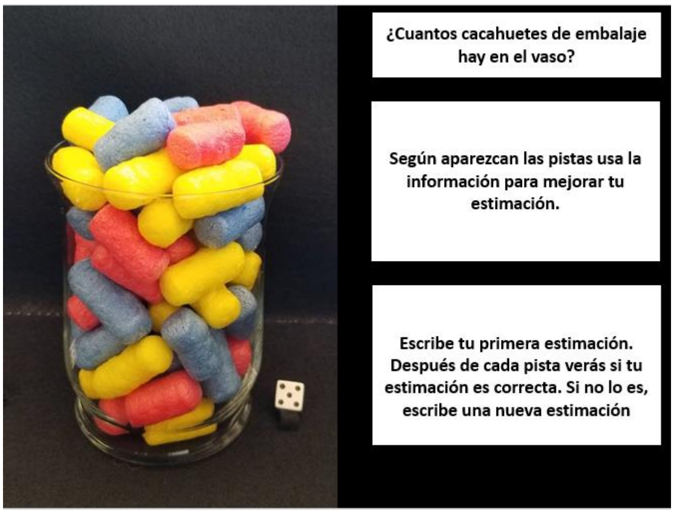
Metodología:

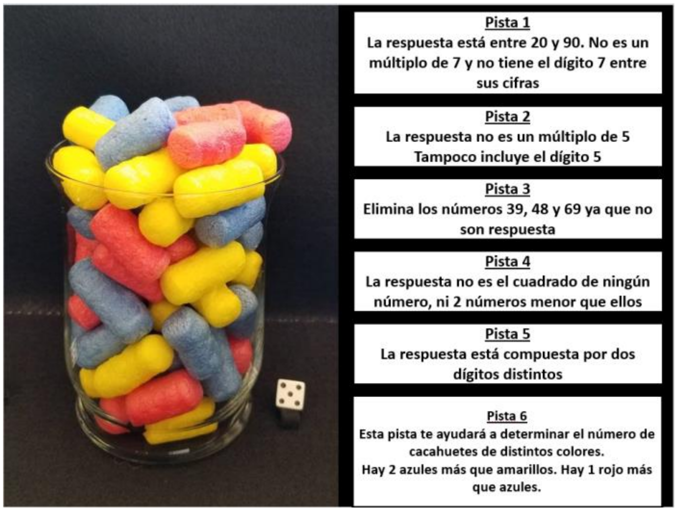
- Es una actividad de carácter individual, aunque habrá debate grupal durante toda su realización.
- Ha sido adaptada de https://stevewyborney.com/2019/09/51-esti-mysteries/
- Se proyecta una serie de diapositivas en las que los alumnos deben estimar la cantidad de cacahuetes de embalaje de la foto.
- Tras una estimación inicial, se irán dando pistas para que refinen su estimación hasta llegar a la solución final.
- Se les dará a los alumnos una tabla con los números del 1 al 100 para que vayan tachando aquellos no sean posibles por las condiciones de las pistas.

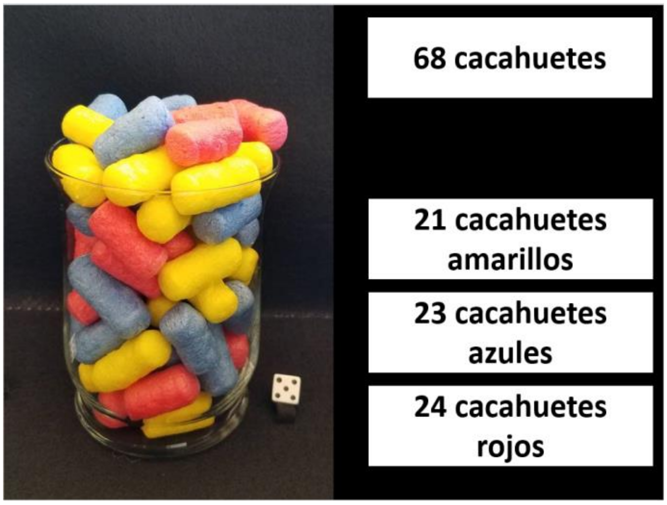
Material para el alumno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Diapositivas importantes:


¿Cuantos cacahuetes de embalaje hay en el vaso?
Según aparezcan las pistas usa la información para mejorar tu estimación.
Escribe tu primera estimación. Después de cada pista verás si tu estimación es correcta. Si no lo es, escribe una nueva estimación


Pista 1
La respuesta está entre 20 y 90. No es un múltiplo de 7 y no tiene el dígito 7 entre sus cifras
Pista 2
La respuesta no es un múltiplo de 5 Tampoco incluye el dígito 5
Pista 3
Elimina los números 39, 48 y 69 ya que no son respuesta
Pista 4
La respuesta no es el cuadrado de ningún número, ni 2 números menor que ellos
Pista 5
La respuesta está compuesta por dos dígitos distintos
Pista 6
Esta pista te ayudará a determinar el número de cacahuetes de distintos colores.
Hay 2 azules más que amarillos. Hay 1 rojo más que azules.


68 cacahuetes
21 cacahuetes amarillos
23 cacahuetes azules
24 cacahuetes rojos

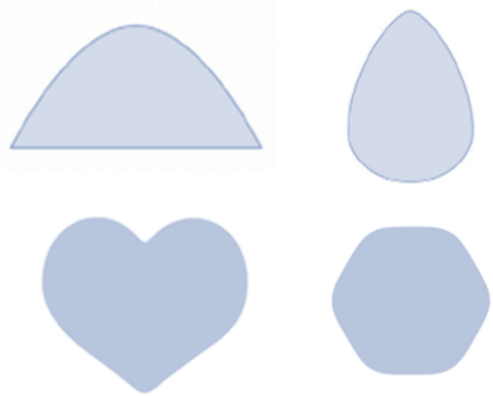
4) Estimación en área:

Actividad: EM.Área–1
Técnica: ▪ Desarrollo de referentes en medidas de área ▪ Desarrollo de estrategias de estimación en área para objeto y unidad presente
Metodología: ▪ Se realiza individualmente ▪ Se entrega a cada alumno un único Post-it ▪ El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades ▪ Al finalizar puesta en común
Enunciado: Mide tu mesa utilizando Post-it a) ¿Cuántos Post-it se necesitan? b) Mide el Post-it con la regla. ¿Cuál es el área de la mesa en cm^2?

Actividad: EM.Área–2
Técnica: ▪ Desarrollo de referentes en medidas de área ▪ Desarrollo de estrategias de estimación en área para objeto presente y unidad ausente

Metodología: ▪ Se realiza individualmente ▪ El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades ▪ Al finalizar puesta en común
Enunciado: Usando como referencia el Post-it pegado en la pizarra decirme a) ¿Cuántos Post-it caben en la pizarra? b) ¿Cuál es el área de la pizarra en m^2?

Actividad: EM.Área–3
Técnica: ▪ Desarrollo de estrategias de estimación en área para objeto presente y unidad ausente ▪ Desarrollo de estrategias de estimación en área para objeto y unidad presente
Metodología: ▪ Se realiza individualmente ▪ El profesor va pasando por las mesas para evaluar el trabajo de los alumnos y ayudar a aquellos que presenten dificultades ▪ Al finalizar puesta en común
Enunciado: a) ¿Qué figura tiene mayor área? ¿Y menor? Ordénalas b) Puedes doblar o recortar las figuras. Ordénalas según su área.



c) Si el siguiente cuadrado representa 1 unidad cuadrada, ¿Cuántas unidades cuadradas tiene cada figura?

 = 1 unidad cuadrada

Solución:

a) El orden de menor área a mayor a simple vista parece ser este:

Corazón > Arco > Hexágono > Huevo

b) Se va a realizar mediante comparación

El corazón tiene mayor área que el arco.

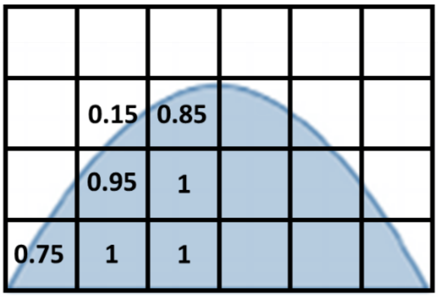
El hexágono tiene mayor área que el huevo.

Para el caso de diferenciar entre el hexágono y el arco es necesario doblarlos y cortarlos. En verde se marca el hexágono. En este caso tiene mayor área el arco.

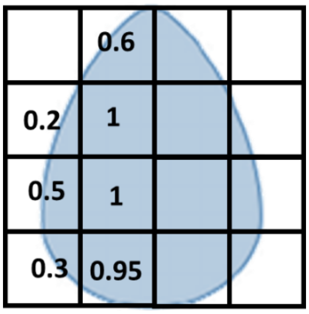
A través de estas comparaciones se llega a que el área es:

Corazón > Arco > Hexágono > Huevo

c) Para calcular el área se divide cada figura en una cuadricula igual a la figura patrón. Después, se considera que porcentaje de cuadricula está ocupado por el área. Todas figuras tienen simetría, por ello solo se va a contar la mitad del área y se multiplicará por dos.



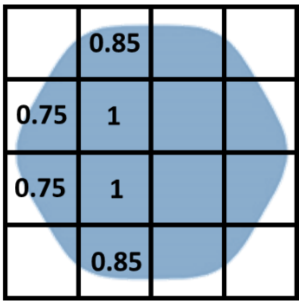
Área total = 2 · (0.75 + 1 + 1 + 0.95 + 1 + 0.15 + 0.85) = 11.4 unidades cuadradas



Área total = 2 · (0.3 + 0.95 + 0.5 + 1 + 0.2 + 1 +0.6) = 9.1 unidades cuadradas

Área total = 2 · (0.1 + 0.7 + 0.1 + 0.9 + 1 + 0.4 + 1 + 1 + 0.2 + 0.95 + 0.9) =

= 14.5 unidades cuadradas



Área total = 2 · (0.85 + 0.75 + 1 + 0.75 + 1 + 0.85) = 10.4 unidades cuadradas

Las figuras ordenadas por su área son:

Corazón (14.5 u^2) > Arco (11.4 u^2) > Hexágono (10.4 u^2) > Huevo (9.1 u^2)

Actividad: EM.Área–4
Técnica: ▪ Desarrollo de referentes en medidas de área ▪ Desarrollo de estrategias de estimación en área para objeto presente y unidad ausente
Metodología: ▪ Se realiza por grupos en el patio del IES ▪ No se les dará ningún material para medir ▪ Al finalizar la actividad se pondrán en común los resultados en el aula

Enunciado:

Rellena la siguiente tabla utilizando la estimación

	Largo (m)	Ancho (m)	Área (m^2)
Pista de fútbol			
Pista de baloncesto			
Patio			
Fachada del IES			

5) Problemas de Fermi:

Actividad: EM.Fermi–1

Técnica:

- Desarrollo de estimación para valores desconocidos
- Desarrollo de estimación en medida para objeto y unidad ausente
- Uso de la proporcionalidad

Metodología:

- Se realiza por parejas.
- Se proyectan las preguntas una a una para generar debate con cada una de ellas.
- Los alumnos pueden preguntar al profesor que busque algún dato en internet que les pueda ayudar a estimar mejor.

Enunciado:

Responde a las siguientes preguntas haciendo estimaciones:

a) ¿Cuántos alumnos tiene el instituto?

b) ¿Cuántos Whatsapps envían los zaragozanos en un día?

c) ¿Cuántas gotas de agua se necesitan para llenar una botella de agua?

d) ¿Cuántas monedas de 1€ se necesitan para llenar la clase hasta el techo?

Solución:

a) Suponemos un instituto que da clase hasta 2º de bachillerato. Eso hace un total de 6 cursos. En los primeros cursos suele haber más alumnos que en los últimos. En cada clase caben 18 alumnos. Se estima que hay 4 clases en 1º y 2º de la ESO, 3 clases en 3º y 4º de la ESO. En 1º y 2º de bachillerato hay 2 clases. El resultado es: $18 \cdot (4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2) = 324$ alumnos

b) Dato necesario: Población de Zaragoza 700 000 personas

De la población de Zaragoza, el 90% pueden disponer de teléfono móvil con Whatsapp. En una conversación promedio se pueden intercambiar 15 mensajes. Si cada persona tiene una conversación al día con 5 personas distintas tenemos que la respuesta puede ser: $700000 \cdot 0.9 \cdot 15 \cdot 5 = 47\,250\,000$ Whatsapps al día

c) En un mililitro se estima que caben 20 gotas. Si una botella de agua tiene 500 ml entonces hay $20 \cdot 500 = 10\,000$ gotas.

d) La clase ya ha sido medida en una actividad anterior, por tanto, es un dato conocido. Suponemos que la clase es de 100 metros cuadrados con una altura de 4 metros. Una moneda de 1€ estimamos que mide 2 cm de diámetro y 0.2 cm de altura. Para llenar el suelo de clase se necesitan $1\,000\,000 / 4 = 250\,000$ monedas. Hasta el techo se necesitan $400 / 0.2 = 2000$ capas de monedas.

En total se necesitarán $250\,000 \cdot 2000 = 500\,000\,000$ monedas de 1€

Tecnologías y proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático

Dentro del campo de problemas de estimación en medida los alumnos aprenden a través de la resolución de problemas. La institucionalización de las estrategias más relevantes ocurrirá durante la fase de debate que ocurre en cada actividad. En las actividades que sea posible comparar con un valor exacto se promocionarán las estrategias de aquellos estudiantes que hayan sido más satisfactorias. Así el resto de la clase podrá mejorar sus propias estrategias en base a lo aprendido de sus compañeros. En el caso de que ningún alumno de clase sea capaz de encontrar la estrategia de estimación deseada, el profesor podrá guiarlos a través de la resolución de las actividades.

F. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

La secuencia didáctica propuesta no va a desarrollarse de manera continua. Las sesiones están diseñadas para ser introducidas dentro de diversas unidades didácticas.

Una posible secuencia de unidades didácticas en 1º de la ESO puede ser la siguiente:

- Números naturales
- Potencias y raíces
- Divisibilidad
- Números enteros
- Fracciones
- Operaciones con fracciones
- Números decimales
- Sistema métrico decimal
- Proporcionalidad
- Álgebra
- Rectas y ángulos
- Figuras geométricas
- Áreas y perímetros
- Graficas de funciones
- Estadística y probabilidad

La estimación es un objeto matemático que se podría enseñar en cada una de las unidades didácticas anteriormente descritas. Para el caso de este trabajo hemos realizado una selección de unidades didácticas para implantar actividades de estimación que se apoyen y enriquezcan sus contenidos propios.

A continuación, se enumeran las sesiones localizándolas dentro de la unidad didáctica correspondiente en la que deben incluirse:

Unidad didáctica: Números naturales		
Sesiones	Objetivo	Actividades
Sesión 1	Evaluación inicial	Evaluación (50 minutos)
Sesión 2	Traslación aplicada a sumas y restas	EC–1 (10 minutos) EC–2 (10 minutos) EC–3 (10 minutos) EC–4 (20 minutos)
Sesión 3	Traslación aplicada a multiplicaciones y divisiones	EC–5 (10 minutos) EC–6 (15 minutos) EC–7 (10 minutos) EC–8 (15 minutos)
Sesión 4	Reformulación en aritmética	Razón de ser – 1 (20 minutos) EC–9 (10 minutos) EC–10 (10 minutos)
Sesión 5	Compensación en aritmética	EC–11 (15 minutos) EC–12 (15 minutos) EC–13 (20 minutos)

Tabla 5: Sesiones de estimación dentro de la UD de números naturales.

En la UD de números naturales se pretende trabajar todo el campo de problemas de estimación en cálculo (Tabla 5). El contenido de las sesiones de estimación consta de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números naturales. Todo ello encaja con el contenido de esta unidad didáctica y permite ampliaciones a números enteros y decimales usando el mismo esquema de sesiones.

Unidad didáctica: Sistema métrico decimal		
Sesiones	Objetivo	Actividades
Sesión 6	Estimación en medidas de longitud	EM.Longitud–1 (10 minutos) EM.Longitud–2 (25 minutos) EM.Longitud–3 (15 minutos)

Tabla 6: Sesiones de estimación dentro de la UD de sistema métrico decimal.

En el sistema métrico decimal se considera relevante hacer estimaciones en medidas de longitud (Tabla 6). Los alumnos podrán los metros y centímetros con objetos del mundo real alejados de los típicos cálculos de cambio de unidades en los que están enfocados los libros de texto.

Unidad didáctica: Proporcionalidad		
Sesiones	Objetivo	Actividades
Sesión 7	Estimación en medida discreta	EM.Discreta–1 (10 minutos) EM.Discreta–2 (10 minutos) Razón de ser – 2 (30 minutos)
Sesión 8		EM.Discreta–3 (10 minutos) EM.Discreta–4 (15 minutos) EM.Discreta–5 (15 minutos) EM.Discreta–6 (10 minutos)
Sesión 9	Estimación en problemas de Fermi	EM.Longitud–4 (10 minutos) EM.Discreta–7 (20 minutos) EM.Fermi–1 (20 minutos)

Tabla 7: Sesiones de estimación dentro de la UD de proporcionalidad.

En la UD de proporcionalidad se pretende trabajar los campos de problemas de medida discreta y problemas de Fermi (Tabla 7). Ambos están basados en la proporcionalidad y permiten ser una herramienta para trabajar la proporcionalidad aplicada a contextos reales.

Unidad didáctica: Álgebra		
Sesiones	Objetivo	Actividades
Sesión 10	Estimación en peso	EM.Peso–1 (10 minutos) EM.Peso–2 (20 minutos) EM.Peso–3 (15 minutos)

Tabla 8: Sesión de estimación dentro de la UD de álgebra.

La sesión propuesta sirve como introducción al álgebra (Tabla 8). Es muy común trabajar el álgebra desde el modelo de balanzas equilibradas. Para los alumnos hacer medidas de peso y experimentar ser una balanza ellos mismos puede servirles para interiorizar mejor el concepto del equilibrio buscado en ecuaciones.

<table>
<tr><th colspan="3">Unidad didáctica: Áreas y perímetros</th></tr>
<tr><th>Sesiones</th><th>Objetivo</th><th>Actividades</th></tr>
<tr><td>Sesión 11</td><td rowspan="2">Estimación en medida de áreas</td><td>EM.Área–1 (15 minutos)
EM.Área–2 (15 minutos)
EM.Área–3 (20 minutos)</td></tr>
<tr><td>Sesión 12</td><td>EM.Área–4 (50 minutos)</td></tr>
<tr><td>Sesión 13</td><td>Evaluar el aprendizaje</td><td>Evaluación (50 minutos)</td></tr>
</table>

Tabla 9: Sesiones de estimación dentro de la UD de áreas y perímetros.

De igual forma que en el sistema métrico decimal, se pretende introducir las sesiones de estimación en área (Tabla 9) para alejar a los alumnos del cambio de unidades y que realicen medidas directas en área. Además, que sean capaces de valorar cuanto es el área que tienen distintos objetos y lugares del mundo real a través de sus experiencias.

G. Sobre la evaluación

En la evaluación se espera ver como los resultados de los alumnos han mostrado una notable mejoría tras impartir la secuencia didáctica. Por ello, se pretende utilizar esta evaluación como evaluación inicial y también como evaluación final. Se comparará el desempeño del estudiante en su primer intento de hacer estimaciones con el obtenido tras aprender sus respectivas estrategias. Las preguntas son lo suficientemente abiertas como para que los alumnos tras realizar la evaluación inicial no sean capaces de conocer las respuestas correctas. Además, el periodo de tiempo entre la evaluación inicial y final será de semanas o meses, como veremos a continuación, y los alumnos habrán olvidado las preguntas de la evaluación inicial.

La evaluación está diseñada para ser una prueba escrita individual. El formato expuesto aquí puede sufrir variaciones debido a la no-continuidad de la secuencia didáctica a lo largo del curso. La evaluación final puede realizarse de estas 2 formas:

- Todas preguntas en una única sesión. Debería realizarse tras dar la unidad didáctica de áreas y perímetros.
- Cada pregunta está asociada a un campo de problemas, por lo que puede integrarse en la evaluación final de la unidad didáctica correspondiente. En este caso los alumnos evaluarían sus conocimientos en estimación de manera continua tras cada unidad didáctica con contenido relacionado.

a) Preguntas de la evaluación

Pregunta 1 (4 puntos)

Realiza el siguiente test en el cual debes dar mentalmente la respuesta más próxima a la correcta.

32125 + 46164 =				
50000	60000	70000	80000	90000
32125 + 40164 =				
65000	70000	75000	80000	85000
52137 + 64215 =				

<table>
<tr><td>112000</td><td>114000</td><td>116000</td><td>118000</td><td>120000</td></tr>
<tr><td colspan="5">81215 + 92107 =</td></tr>
<tr><td>160000</td><td>170000</td><td>180000</td><td>190000</td><td>200000</td></tr>
<tr><td colspan="5">39203 + 29107 =</td></tr>
<tr><td>63000</td><td>65000</td><td>67000</td><td>69000</td><td>71000</td></tr>
<tr><td colspan="5">34107 + 57209 =</td></tr>
<tr><td>80000</td><td>85000</td><td>90000</td><td>95000</td><td>100000</td></tr>
<tr><td colspan="5">85206 + 69105 =</td></tr>
<tr><td>110000</td><td>120000</td><td>130000</td><td>140000</td><td>150000</td></tr>
<tr><td colspan="5">73107 + 68310 =</td></tr>
<tr><td>135000</td><td>140000</td><td>145000</td><td>150000</td><td>155000</td></tr>
<tr><td colspan="5">37102 + 28015 + 16007 =</td></tr>
<tr><td>75000</td><td>77000</td><td>79000</td><td>81000</td><td>83000</td></tr>
<tr><td colspan="5">19106 + 29001 + 16003 =</td></tr>
<tr><td>60000</td><td>65000</td><td>70000</td><td>75000</td><td>80000</td></tr>
<tr><td colspan="5">61121 + 83003 + 93111 =</td></tr>
<tr><td>233000</td><td>235000</td><td>237000</td><td>239000</td><td>241000</td></tr>
<tr><td colspan="5">60121 + 81321 + 91107 =</td></tr>
<tr><td>200000</td><td>210000</td><td>220000</td><td>230000</td><td>240000</td></tr>
<tr><td colspan="5">76325 – 44103 =</td></tr>
<tr><td>25000</td><td>30000</td><td>35000</td><td>40000</td><td>45000</td></tr>
<tr><td colspan="5">59763 – 21212 =</td></tr>
<tr><td>31000</td><td>33000</td><td>35000</td><td>37000</td><td>39000</td></tr>
<tr><td colspan="5">71875 – 19621 =</td></tr>
<tr><td>30000</td><td>40000</td><td>50000</td><td>60000</td><td>70000</td></tr>
<tr><td colspan="5">57645 – 39134 =</td></tr>
</table>

15000	20000	25000	30000	35000
84643 – 77132 =				
5000	6000	7000	8000	9000
4018 · 6 =				
23000	24000	25000	26000	27000
4915 · 4 =				
16000	17000	18000	19000	20000
4213 · 4 =				
15000	16000	17000	18000	19000
4312 · 7 =				
28000	29000	30000	31000	32000
295 · 406 =				
80000	90000	100000	110000	120000
59314 : 3 =				
10000	20000	30000	40000	50000
34568 : 7 =				
4000	5000	6000	7000	8000
83745 : 19 =				
5000	6000	7000	8000	9000
42750 : 19 =				
1000	2000	3000	4000	5000
43000 : 21 =				
5000	4000	3000	2000	1000

Pregunta 2 (1.5 puntos)

a) Nombra 2 objetos que midan lo siguiente

1 centímetro:

10 centímetros:

50 centímetros:

1 metro:

3 metros:

10 metros:

b) Nombra 2 objetos que pesen lo siguiente:

50 gramos:

500 gramos:

1 kilogramo:

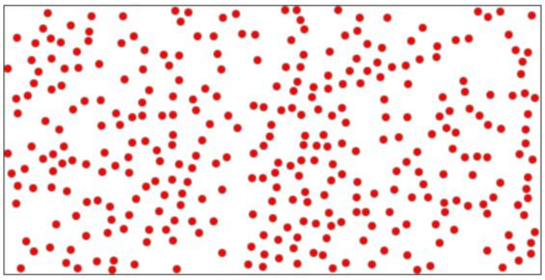
3 kilogramos:

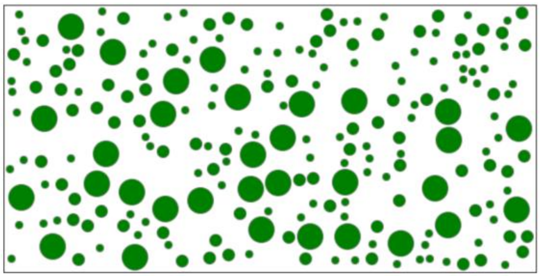
12 kilogramos:

50 kilogramos:

Pregunta 3 (1.5 puntos)

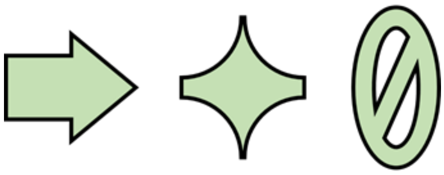
¿Cuántos círculos hay aproximadamente en cada imagen? Razona tu respuesta



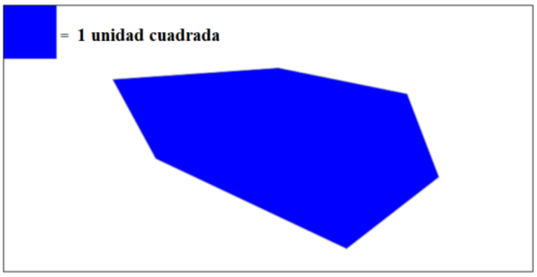


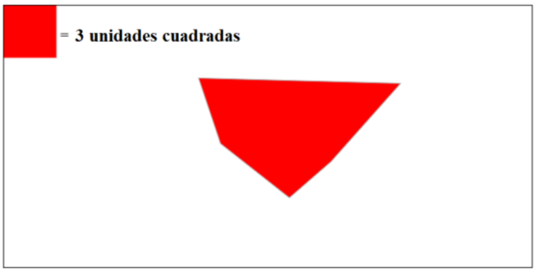
Pregunta 4 (1.5 puntos)

a) Ordena las siguientes figuras de menor a mayor área. Razona tu respuesta.



b) Estima el área de las siguientes figuras. Razona tu respuesta.





Pregunta 5 (1.5 puntos)

a) Explica como intentarías contar lo siguiente:

- Arboles de un bosque:

- Coches en una ciudad:

- Abejas en una colmena:

b) Obtén un valor para las siguientes cantidades explicando tu razonamiento:

- Número de veces que parpadeas al día:

- Número de alumnos zurdos del IES:

- Kilos de basura que una familia de 4 miembros genera en una semana:

b) Objetivos y respuestas esperadas a las preguntas

- Pregunta 1:

Esta pregunta está obtenida del test de (Segovia, 1986) para evaluar la estimación en cálculo del alumno. El test considera la suma, resta, multiplicación y división. Se espera que los alumnos tras haber sido instruidos con las técnicas de traslación, reformulación y compensación sean capaces de estimar el resultado correcto o el inmediatamente siguiente.

- Pregunta 2:

Esta pregunta pretende evaluar la estimación del alumno en longitudes y pesos. Se encuentra dentro de la categoría de estimación en medida con objeto y unidad ausente. En la evaluación inicial permitirá conocer qué medidas tienen más interiorizadas que otras. Para la evaluación final se espera que los alumnos hayan interiorizado mejor las unidades y objetos del mundo cotidiano pudiendo dar respuestas razonablemente aceptables.

- Pregunta 3:

Esta pregunta se encuentra en el campo de problemas de estimación en medida discreta. El uso de la estrategia de dividir el problema en una cuadricula para estimar les permitirá realizarlo en un tiempo corto y con unos resultados satisfactorios. En la evaluación inicial es muy probable que cuenten uno a uno los círculos y les lleve mucho tiempo realizarlo, a costa de no poder finalizar el examen a tiempo. En cambio, se espera que en la evaluación final ningún alumno los cuente uno a uno y hagan estimaciones.

- Pregunta 4:

Esta pregunta pretende evaluar los conocimientos de estimación en áreas. Se espera que en el apartado a) sean capaces de identificar la figura con mayor y menor área. En el apartado b) se espera que dividan la figura en una cuadricula igual a la de la unidad dada. Entonces podrán estimar en cada cuadrado de la cuadricula que porcentaje de área está pintado y finalmente sumarlos.

- Pregunta 5:

Esta pregunta evalúa los conocimientos acerca de la resolución de problemas de Fermi. Se espera que los argumentos sobre los que construyan el desarrollo matemático sean razonablemente sensatos.

c) Criterio de calificación

Pregunta 1 (4 puntos):

Esta pregunta consta de 27 apartados. Cada apartado es de tipo multi-respuesta. La calificación se realizará según la proximidad al mejor valor de estimación en cada apartado.

- (1 punto) Aproximación más certera
- (0.5 puntos) Siguiente aproximación más certera
- (0 puntos) Las otras dos opciones

La calificación de este ejercicio se calcula de la siguiente forma: se suma el total de puntos, ese dato se multiplica por 4 y después se divide para 27. Esto se realiza para normalizar el valor de las preguntas a una puntuación total de 4 puntos.

Para el resto de preguntas se empleará el modelo de tercios (Gairín, Muñoz , & Oller, 2012). Este modelo se basa en lo siguiente:

- Los errores en tareas principales de la pregunta penalizarán con la totalidad del valor de la pregunta y no se continuará corrigiendo.
- Los errores en tareas auxiliares especificas no penalizarán más de dos tercios del valor de la pregunta y se continuará corrigiendo.
- Los errores cometidos en tareas auxiliares generales no penalizarán más de un tercio del valor de la pregunta y se continuará corrigiendo

A continuación, se indican las tareas principales y tareas auxiliares específicas de cada pregunta que serán valoradas para la calificación. Las tareas auxiliares generales consideradas para todas las preguntas serán las operaciones aritméticas.

Pregunta 2 (1.5 puntos):

Tarea principal:

- Nombrar objeto en el orden de magnitud adecuado.

Tarea auxiliar específica:

- Acotar a objetos que tengan un rango amplio de valores en los cuales puede encontrarse la respuesta.

Pregunta 3 (1.5 puntos):

Tarea principal:

- Aplicar la proporcionalidad

Tarea auxiliar específica:

- Estimación aceptable de la cantidad de bolas que hay en cada sector de la cuadricula a la hora de subdividir el problema en una cuadricula para aplicar proporcionalidad

Pregunta 4 (1.5 puntos):

Tarea principal:

- Apartado a) Aplicar estrategia de estimación en área justificada.
- Apartado b) Uso del patrón que representa la unidad cuadrada.

Tarea auxiliar específica:

- Apartado a) Utilización de simetrías o medidas aproximadas para simplificar el problema.
- Apartado b) Estimación aceptable del porcentaje de área en cada sector de la cuadricula a la hora de subdividir el problema en una cuadricula con el patrón dado.

Pregunta 5 (1.5 puntos):

Tarea principal:

- Apartado a) y b) Plantear una secuencia lógica de razonamientos con sus respectivas operaciones que permitan obtener una estimación aceptable.

Tarea auxiliar específica:

- Apartado a) Plantear diversas variables relevantes a la hora de hacer los cálculos.
- Apartado b) Plantear diversas variables relevantes a la hora de hacer los cálculos en un orden de magnitud adecuado a la realidad.

H. Conclusiones

En este trabajo se ha abordado la enseñanza de la estimación desde sus dos mayores campos de problemas: en cálculo y en medida. Ninguno de estos campos aparecen reflejados en el currículo oficial de ningún curso de la ESO. Eso implica que los libros de texto no traten la estimación como un ente con entidad propia que deba ser aprendido. Por ello, los alumnos no llegan a aprender cómo tratar problemas de estimación y acaban cometiendo numerosos errores que siguen acarreando incluso cuando están formándose para ser profesores.

Aunque los alumnos hayan recibido cierta instrucción durante su etapa en Primaria, se prevé que será necesario preparar una serie de ejercicios para asegurar esos conocimientos. A partir de estos conocimientos, se construirá la secuencia didáctica expuesta. Es muy importante que los alumnos puedan llegar a comprender la utilidad de estimar. Tratar las distintas razones de ser que tiene la estimación desde varias perspectivas será esencial.

La estimación es tan amplia que puede trabajarse en cada unidad didáctica, así que se tratará de manera continua a lo largo del curso. Se prevé enseñar la estimación en cálculo durante los números naturales, aunque puede ampliarse a enteros y decimales siguiendo el modelo RTC. La estimación en medida se ha detallado para las unidades didácticas de sistema métrico decimal, proporcionalidad, álgebra y áreas. Los alumnos se beneficiarán obteniendo referencias e interiorizando las medidas de diversos objetos que serán de utilidad en mejorar sus estimaciones. Durante la secuencia los alumnos aprenderán a través del aprendizaje basado en problemas y, además, debido a lo abierta que es la estimación, a través de los debates que se generarán en el aula. Mejorando notablemente su capacidad crítica al análisis de datos y a defender hipótesis propias.

La evaluación del aprendizaje de los alumnos se hará de manera continua en el aula y a través de una prueba final. Por otro lado, la evaluación de la secuencia didáctica se realizará a través de una evaluación inicial y otra final. Ambas constan de las mismas preguntas, y así podrá verse como ha influido la secuencia en el aprendizaje del alumno hacia la estimación.

I. Referencias

- Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En J. M. Goñi (Ed.), El currículo de matemáticas en los inicios de siglo XXI. Barcelona: Graó.
- Beltrán-Pellicer, P. (2020). Una actividad para trabajar la estimación en clase de Matemáticas con arroz. En P. Usán, & C. Salavera, *Gamificación educativa: Innovación en el aula para potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje* (págs. 257-266). Zaragoza: Pregunta Ediciones.
- Bruno, A. (2000). Sentido numérico. Las matemáticas del siglo XX. Madrid, España: Libros y Ediciones Nivola, 267-270.
- Castillo, J. J., Segovia, I., Castro, E., & Molina, M. (2011). Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: longitud y superficie. En J. L. Lupiañez, M. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, & A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (págs. 165-172). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Castro, C., Castro, E., & Segovia, I. (2014). Estimación en cálculo multiplicativo con números decimales. *Enseñanza de las ciencias*, 171-190.
- Chamorro, M. C. (2001). Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas. Madrid: MEC.
- Chamorro, M. C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M. C. Chamorro, *Didáctica de las matemáticas* (págs. 221-244). Madrid: Pearson.
- Chamorro, M. C., & Belmonte, J. M. (1988). El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. Madrid: Síntesis.
- Colera, J., Gaztelu, I., & Colera, R. (2015). *Matemáticas 1º ESO. Proyecto aprender es crecer en conexión.* Madrid: Anaya.
- Corberán, R. (1996). El área: Recursos Didácticos Para Su Enseñanza En Primaria. En O. Mourut, *Procesos de transferencia de resultados de investigación de aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas* (págs. 1-87). Distrito Federal: CINVESTAV.

- Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal from Research in Mathematics Education, 23*(1), 45-55.
- Dowker, A., Flood, A., Griffiths, H., Harris, L., & Hook, L. (1996). Estimation strategies of four groups. *Mathemical Cognition, 2*(2), 113-135.
- Gairín, J., Muñoz , J., & Oller, A. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en educación matemática XVI,* (págs. 261 - 274). Granada.
- Lefevre, J., Greenham, S. L., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction, 11*(2), 95-132.
- Levine, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 350-359.
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 4 de mayo de 2006, núm. 106.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 10 de diciembre de 2013, núm. 295.
- Mengual, E. (2017). Caracterización del contenido matemático subyacente al libro de texto en medida. [Tesis doctoral] Universidad Autónoma de Barcelona.
- Moliner, M. (2016). *Diccionario del uso del español.* Madrid: Gredos.
- Muñoz, M. C., de los Santos, M. I., Martínez, P., & Martínez, R. A. (2019). *Matemáticas 1º ESO.* Barcelona: Casals.
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 29 de enero de 2015, núm. 25.
- Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón.* Zaragoza, 2 de junio de 2016, núm. 105.

- ORDEN ECD/850/2016, de 29 de julio, por la que se modifica la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón.* Zaragoza, 12 de agosto de 2016, núm. 156.
- Real Academia Española. (s.f.). *Diccionario de la lengua española.* Obtenido de https://dle.rae.es.
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 1 de marzo de 2014, núm. 52.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado.* Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3.
- Reys, B. J., Reys, R. E., & Flores, A. (1991). Estimation performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics, 22*(4), 353-375.
- Reys, R. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal, 84*(5), 547–557.
- Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J. F., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(3), 183-201.
- Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S., & Shimizu, K. (1991). Computational estimation performance and strategies used by fifth and eight-grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(1), 39-58.
- Segovia, I. (1986). *Estimación y cálculo aproximado en EGB.* Tesis. Universidad de Granada.
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Síntesis.
- Segura, C., & Ferrando, I. (2021). Classification and Analysis of Pre-Service Teachers' Errors in Solving Fermi Problems. education sciences, 11(451).

- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. En J. D. Campbell (ed), *Handbook of mathematical cognition* (págs. 197-212). Nueva York: Psychology Press.
- Varios autores. (2015). *Matemáticas. Saber hacer 1º ESO*. Madrid: Santillana.

J. Anexo

a) Tabla de cálculo de las actividades previas a la estimación

	A	B	C	D	E	F
1	5 + 2 · 3	9 + 3 · 4	7 · 2 + 5	5 + 5 · 3	2 + 4 · 7	8 + 2 · 6
2	3 · (4 + 3)	5 · 3 + 9	4 + 6 · 3	(3 + 5) · 7	8 · 4 + 6	7 · 5 + 5
3	9 + 3 · 2	8 · 6 + 7	4 · (3 + 6)	3 · (7 + 3)	3 · 4 + 5· 8	5 + 3 + 7
4	4 · 7 + 9	6 · (5 + 2)	4 + 9 · 3	6 · 8 + 2	7 · (3 + 6)	3 · 2 + 4 · 5
5	4 + 3 + 7	5 · 6 + 3	2 · (7 + 2)	8 + 3 + 7	8 · 4 + 7	5 + 3 · 5
6	3 · 6 + 2 · 5	7 · (3 + 1)	6 · 3 + 2	5 · (4 + 3)	9 + 2 · 6	4 · (3 + 5)
7	8 + 3 · 4	9 + 4 + 6	4 · 5 + 2 · 3	6 · 3 + 2	5 · 4 + 9	6 + 4 · 7
8	4 · (3 + 5)	7 + 3 · 5	3 · 4 + 5	2 · 5 + 6 · 7	5 + 4 · 4	6 · (7 + 1)
9	7 · 5 + 5	8 + 2 + 3 · 7	7 + 2 + 8	7 · (2 + 3)	2 · 6 + 5	4 · 9 + 3
10	4 + 3 · 2	5 · (3 + 3)	4 · 8 + 2	8 + 4 · 3	9 · (2 + 4)	7 · 4 + 6
11	6 · 4 + 7	2 + 3 + 7 · 5	7 + 5 · 4	3 · 2 + 5 · 8	2 · 5 + 3 · 6	3 · 6 + 4 · 3
12	8 · (6 - 2)	15 - 5 · 2	12 - (3 + 5)	15 - 3 - 2	14 - 2 · 5	(9 - 5) · 4
13	6 - 4 : 2	12 - 8 : 4	8 - 6 : 2	(10 - 4) : 2	(12 - 4) : 2	18 - 10 : 2
14	7 · 4 - 2	(7 - 3) · 8	(8 - 5) · 9	6 · 8 - 8	8 : 2 · 3	9 - (3 + 4)

15	6 · 5 : 5	10 - 8 : 2	15 : 3 · 3	3 · 6 : 2	10 - 4 : 2	12 : 3 · 2
16	10 - 4 : 2	4 · 6 : 2	10 - 6 : 3	8 - 6 : 2	6 · 4 : 2	20 - 6 : 2
17	6 · 4 - 4	(10 - 5) · 3	5 · 4 : 2	3 · (15 : 5)	(9 - 5) · 9	6 · (8 - 5)
18	8 - (6 - 2)	9 - (2 · 3)	8 - (12 : 4)	7 · (6 - 6)	10 : (7 - 5)	4 + 12 - 2
19	7 + 5 - 3	9 + 6 - 5	8 - 4 + 7	9 + 3 - 2	7 - 4 + 6	8 - 5 + 4
20	9 · (5 + 2)	(4 – 2) · 8	(5 + 3) · 4	(9 – 2) · 3	6 · (7 – 3)	3 · (7 – 2)