Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Trigonometría: una propuesta didáctica para 4º de ESO

Trigonometry: a didactic proposal for 4th year of ESO

Autor

Jorge Muro Guerrero

Director

Rubén Vigara Benito

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2020-2021

Contenido

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático sobre el que trata la propuesta didáctica presente en este trabajo es la trigonometría. Etimológicamente, la palabra *trigonometría* significa *medición de triángulos* y se puede definir como el área de las matemáticas que tiene como objetivo establecer las relaciones entre las medidas de los lados de un triángulo y las amplitudes de sus ángulos.

La propuesta didáctica sobre trigonometría que se realiza en este trabajo está pensada para la asignatura de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO. Este es el primer curso del sistema educativo en el que se estudia trigonometría. Veamos ahora la lista de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje referidos a la trigonometría que aparecen en el currículo actual de la asignatura, que pertenece a la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la ESO y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón:

<u>Contenidos</u>

- Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.
- Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.
- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes
- Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.

<u>Criterios de calificación y estándares de aprendizaje</u>

- Crit.MAAC.3.1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.
  - ✓ Est.MAAC.3.1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos.
- Crit.MAAC.3.2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.
  - ✓ Est.MAAC.3.2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas.
  - ✓ Est.MAAC.3.2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones.

- ✓ Est.MAAC.3.2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.

A continuación, se presenta la lista de campos de problemas, técnicas y tecnologías que se pretenden enseñar con la propuesta de este trabajo:

Campos de problemas

- Campo de problemas 1: Problemas de resolución de triángulos rectángulos.
  - Campo de problemas 1.1: Problemas de medida indirecta, un triángulo.
  - Campo de problemas 1.2: Problemas de doble observación.
- Campo de problemas 2: Problemas de resolución de triángulos no rectángulos.
- Campo de problemas 3: Cálculo de longitudes, perímetros y áreas.

Técnicas

- Técnica 1: Conversión de medidas angulares.
- Técnica 2: Relaciones trigonométricas fundamentales.
- Técnica 3: Utilizar las definiciones de las razones trigonométricas.
- Técnica 4: Reducción al primer cuadrante.
- Técnica 5: Resolución de triángulos rectángulos.
- Técnica 6: Resolución de triángulos no rectángulos.

Tecnologías

- Tecnología 1: Medidas angulares y relación entre ellas.
- Tecnología 2: Razones trigonométricas.
- Tecnología 3: Demostraciones de las relaciones trigonométricas fundamentales.
- Tecnología 4: Demostraciones de las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, que difieren en 180º y que suman 360º.
- Tecnología 5: Estrategia de la altura.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría.

Para realizar un estudio sobre cómo se enseña habitualmente la trigonometría, se van a analizar tres libros de texto de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º de ESO de tres editoriales diferentes: SM, Anaya y Marea Verde.

B.1. Justificación habitual de la introducción escolar de la trigonometría.

En cada libro de texto, se introduce la trigonometría de una manera diferente. En este apartado se detalla cómo la introduce cada editorial, en orden de menor a mayor grado de justificación de la introducción de la trigonometría.

En el libro de SM, al introducir la trigonometría se define esta como la rama de las matemáticas que estudia las medidas de ángulos y se menciona simplemente que se aplica a otras ramas como la geometría y la astronomía. A continuación, ya se procede directamente a definir las razones trigonométricas y demás contenidos teóricos como las identidades trigonométricas. Las aplicaciones de la trigonometría, que son la resolución de triángulos y el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, no aparecen hasta la siguiente unidad.

En el libro de Marea Verde, aparece un pequeño apartado al principio de la unidad donde se explica el significado, el objetivo y la historia de la trigonometría. Se dice que el significado de la palabra *trigonometría* es *medición de triángulos* y que su objetivo es relacionar los lados de un triángulo con sus ángulos para poder calcular los unos mediante los otros. Sobre su historia, se dice que su origen se remonta a la época babilónica y que su aplicación histórica ha sido "en agrimensura, navegación y astronomía, ya que permite calcular distancias que es imposible obtener por medición directa".

En el libro de Anaya, al comienzo de la unidad se hace un repaso por el desarrollo de la trigonometría, históricamente ligado al de la astronomía. El libro comienza hablando de dos grandes astrónomos de la antigua Grecia, Hiparco de Nicea, considerado el inventor de la trigonometría y del astrolabio, y Ptolomeo, autor del mayor libro de astronomía, el Almagesto. Se menciona que "la esencia de la trigonometría es sustituir medidas angulares por medidas lineales" y que por ello Hiparco elaboró tablas asociando la medida de cada ángulo con la longitud de su cuerda. Finalmente, se habla de la labor de los matemáticos indios y árabes en la trigonometría y de su extensión por Europa a partir del siglo XII. A continuación, se dice que "la trigonometría se basa en la semejanza de triángulos rectángulos" y se muestra un ejemplo de cómo se relacionan. En este ejemplo, se quiere saber la altura de un árbol, y para ello se clava una estaca de $163\ cm$ en el suelo y se miden las sombras del árbol y de la estaca, que son $237\ cm$ y $76\ cm$ respectivamente. Se resuelve por semejanza y, a continuación, se relaciona con la trigonometría para introducirla de la siguiente manera: “La altura del árbol se podría haber obtenido multiplicando la longitud de su sombra por $163/76 = 2.145$. Este número es el resultado de dividir los catetos de cualquier triángulo rectángulo con un ángulo de $65°$”, ya que son semejantes. “Es, por tanto, un número asociado a este ángulo. Se llama tangente de $65°$. […] Estos números, actualmente, los obtenemos con la calculadora.” Después de este ejemplo, ya se definen las razones trigonométricas y los demás contenidos de la unidad.

B.2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente.

En general, los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan en los tres libros de texto son los mismos. Como se muestra en este apartado, las principales diferencias entre los libros se encuentran en los teoremas del seno y del coseno, que solo los presentan SM y Marea Verde, y en los problemas con más de un triángulo no rectángulo, los ejercicios de triángulos no rectángulos con dos o ninguna solución, los problemas de volúmenes y algunas fórmulas geométricas obtenidas mediante trigonometría, que solo se enseñan en SM.

Los campos de problemas que aparecen en los libros de texto son:

1. <u>Problemas de resolución de triángulos.</u>
   Son problemas en los que se pide calcular una o más distancias, longitudes o ángulos y hay que resolverlos aplicando técnicas de resolución de triángulos. Se pueden clasificar en:
   1.1. Problemas de resolución de triángulos rectángulos.
   - Problemas de medida indirecta, en los que se pide calcular una o más distancias, longitudes o ángulos y hay que resolver un triángulo rectángulo.
   - Problemas de doble observación, en los que hay que calcular alturas o longitudes inaccesibles a partir de dos medidas de ángulos, realizadas al visualizar distintos puntos desde el mismo lugar o el mismo punto desde distintos lugares, y una longitud como dato adicional. Aparece más de un triángulo rectángulo para resolver.

   1.2. Problemas de resolución de triángulos no rectángulos.
   - Problemas de medida indirecta, en los que piden calcular una o más distancias, longitudes o ángulos y hay que resolver un triángulo no rectángulo. No aparece ninguno en el libro de SM.
   - Problemas de cálculo de distancias entre puntos inaccesibles. También requieren realizar una doble observación, por lo que habrá que resolver más de un triángulo no rectángulo. Estos problemas solo aparecen en el

libro de SM; en Anaya se simplifica en un problema para que solo haya que resolver un triángulo no rectángulo y dos rectángulos.

2. Problemas de cálculo de longitudes, perímetros, áreas y volúmenes.
   Son problemas en los que se pide calcular longitudes, perímetros, áreas o volúmenes de figuras geométricas, pero hay que resolver triángulos previamente para obtener todos los datos necesarios. Solo en el libro de SM se piden volúmenes.

Las técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente son:

1. Sistemas de medidas de ángulos.

En los tres libros aparece la definición de radián y se define como el ángulo tal que cualquier arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado. También en los tres libros se relaciona esta nueva medida con el sistema sexagesimal para realizar la conversión entre grados y radianes, $360° = 2\pi\, rad$ o $180° = \pi\, rad$. En los libros de SM y Anaya se dice además explícitamente cómo cambiar de unidades. La definición de grado sexagesimal solo aparece en los libros de SM y Marea Verde.

En cuanto a las tecnologías, la introducción del radián se justifica en el libro de Anaya como una manera de poder representar las funciones trigonométricas con la misma escala en los dos ejes y para ello se define como medida de un ángulo la longitud de su arco en la circunferencia goniométrica, que luego resulta ser el número de radianes. SM, en cambio, lo justifica en una nota al margen diciendo que la ventaja en la utilización del radián es que es una unidad natural, que no depende de un número arbitrario de divisiones de la circunferencia. Además, tanto en SM como en Marea Verde, se menciona que el radián es la unidad de medida en el Sistema Internacional. Por otro lado, la tecnología que justifica la técnica del cambio de unidades es la relación entre ellas, $360° = 2\pi\, rad$, que se demuestra en todos los casos utilizando la definición de radián y la longitud de la circunferencia.

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

En los tres libros de texto se definen el seno, el coseno y la tangente de un ángulo. Se definen mediante las correspondientes proporciones de los lados de un triángulo rectángulo construido sobre dicho ángulo, aunque SM también define la tangente como el cociente entre el seno y el coseno. La cosecante, la secante y la cotangente de un ángulo solo se definen en los libros de SM y Marea Verde. Anaya además enseña cómo realizar un cálculo gráfico (aproximado) de las razones trigonométricas de un ángulo y cómo medirlas utilizando papel milimetrado.

La tecnología que justifica estas definiciones es la semejanza de triángulos rectángulos. En los tres libros de texto se demuestra mediante semejanza de triángulos rectángulos que las razones trigonométricas dependen solo del ángulo, de la amplitud, y no del triángulo elegido para medirlas, y que por lo tanto están bien definidas.

3. Relaciones trigonométricas fundamentales.

En los tres libros de texto aparecen las dos relaciones fundamentales,

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1) \quad \text{y} \quad \tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad (2),$$

y la siguiente identidad trigonométrica más conocida,

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \quad (3).$$

Excepto en Anaya, también aparece la siguiente relación:

$$1 + \operatorname{cotan}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (4).$$

En todos los libros se muestra mediante ejemplos cómo utilizar las relaciones fundamentales para calcular las razones trigonométricas de un ángulo conociendo solo una de ellas. También se utilizan, principalmente en el libro de SM, para resolver ejercicios de demostrar otras identidades trigonométricas.

Las tecnologías que justifican estas identidades son sus demostraciones, utilizando las definiciones de las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras, o las dos primeras relaciones fundamentales para demostrar las demás. Cabe señalar que la editorial SM no demuestra (2), ya que no la da como identidad trigonométrica sino como definición de tangente. Además, la demostración de (3) en Anaya y de (4) en Marea Verde se dejan como ejercicio para que sea el alumno el que construya estas tecnologías.

4. Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

En los tres libros se enseñan las razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º. En cuanto a sus tecnologías, las razones del ángulo de 45º se calculan utilizando un triángulo rectángulo isósceles y las razones de los ángulos de 30º y 60º, utilizando un triángulo equilátero dividido en dos triángulos rectángulos por su altura. Estos triángulos contienen los ángulos mencionados. Como se pueden escoger los triángulos de cualquier tamaño para calcular las razones trigonométricas, cada editorial elige diferentes longitudes de los lados, 1 o L. Después, se aplica el teorema de Pitágoras y las definiciones de las razones trigonométricas para calcularlas.

5. <u>Resolución de triángulos rectángulos.</u>

Esta técnica se enseña en los tres libros de texto explicándola como sigue a continuación y mediante ejemplos. Resolver un triángulo es hallar sus elementos desconocidos a partir de los conocidos. Se pueden distinguir dos casos:

5.1. Se conocen dos lados.

El otro lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras. Uno de los ángulos agudos se calcula despejándolo de la ecuación planteada a partir de la definición de la razón trigonométrica que lo relaciona con los dos lados conocidos. Por último, el otro ángulo se halla como el anterior o, más rápidamente, mediante la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo.

5.2. Se conoce un ángulo y un lado.

El otro ángulo agudo se calcula usando la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo. Cada uno de los dos lados que faltan se calcula despejándolo de la ecuación planteada mediante la definición de la razón trigonométrica que lo relaciona con el ángulo y el lado conocidos. Marea Verde menciona también la posibilidad de calcular el último lado con el teorema de Pitágoras.

Las tecnologías de estas técnicas son el teorema de Pitágoras, la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo y las definiciones de las razones trigonométricas.

6. <u>Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.</u>

En los tres libros de texto, se define la circunferencia goniométrica y se utiliza para definir las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera mediante las coordenadas del punto P de la circunferencia que determina el ángulo cuando se sitúa sobre ella. El seno de un ángulo se define como la ordenada de su punto P; y el coseno, como la abscisa. La tangente de un ángulo se puede definir de dos formas. En el libro de SM y Marea Verde se define la tangente como el cociente entre el seno y el coseno, o equivalentemente, entre la ordenada y la abscisa del punto P. En el libro de Anaya, se define la tangente como el segmento de la recta t tangente a la circunferencia goniométrica en $(1,0)$ que va desde $(1,0)$ hasta la intersección entre t y la prolongación del lado OP del ángulo, siendo O el origen. Esta representación geométrica de la tangente también aparece en el libro de Marea Verde, junto con la de la cotangente.

También se habla en los tres libros de las razones trigonométricas de los ángulos mayores que $360°$ y del significado de los ángulos negativos y se calculan las razones trigonométricas de $0°$, $90°$, $180°$ y $270°$ (en Anaya como ejercicio). Por último, SM y Anaya indican también el signo de las razones trigonométricas según el cuadrante en el que se sitúe el ángulo.

La tecnología que justifica estas definiciones, aparte de la circunferencia goniométrica, solo aparece en los libros de texto de Anaya y Marea Verde. En ellos se menciona que esta definición de las razones trigonométricas es compatible con la definición anterior para ángulos agudos, es decir, se conserva la definición para ángulos agudos y se amplía a ángulos de cualquier signo y amplitud.

7. Relaciones entre las razones trigonométricas de ciertos ángulos o reducción al primer cuadrante. Aplicación a la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Los cuatro tipos de ángulos cuyas razones trigonométricas se pueden relacionar son: complementarios, suplementarios, que difieren en $180°$ y que suman $360°$. Estas relaciones, excepto la primera, se utilizan para la técnica de reducción al primer cuadrante. Esta técnica consiste en relacionar las razones trigonométricas de un ángulo del segundo, tercer o cuarto cuadrante con las razones de un ángulo del primer cuadrante. En el libro de SM, se enseñan todas las relaciones anteriores. En el libro de Marea Verde, se explica la reducción al primer cuadrante, pero sin mencionar las relaciones que hay entre los ángulos. En el libro de Anaya, en lugar de explicar estas técnicas, plantean un problema para que sea el alumno el que descubra las relaciones anteriores.

Después, en todos los libros, estas técnicas se aplican en algún ejercicio de reducir ángulos al primer cuadrante o de resolver ecuaciones trigonométricas. Solo en SM se explica cómo dar todas las soluciones de las ecuaciones trigonométricas; en Anaya y Marea Verde solo se piden las dos soluciones que hay en un intervalo de $360°$ de longitud.

Las tecnologías con las que justifican los libros estas técnicas son las definiciones de las razones trigonométricas para cualquier ángulo utilizando la circunferencia goniométrica.

8. Resolución de triángulos cualesquiera.

Al explicar esta técnica, SM y Marea Verde utilizan los teoremas del seno y del coseno. En cambio, Anaya resuelve los triángulos mediante la estrategia de la altura. SM es el único libro que estudia los casos en los que puede haber dos o ninguna solución.

8.1. Mediante la estrategia de la altura.

Consiste en trazar una de las alturas del triángulo, de modo que resultan dos triángulos rectángulos que se pueden resolver por separado o simultáneamente. Se resuelven por separado cuando se pueden hallar elementos en uno y luego se utilizan para obtener los elementos del otro. Se resuelven conjuntamente cuando es necesario plantear un sistema de ecuaciones aplicando razones trigonométricas en cada triángulo. Las tecnologías que se enseñan en este caso serían la estrategia de la altura y la resolución de triángulos rectángulos, que tiene a su vez sus propias tecnologías vistas anteriormente.

8.2. Mediante los teoremas del seno y del coseno.

Los teoremas del seno y del coseno son dos técnicas que solo se enseñan en los libros de texto de SM y Marea Verde; en el de Anaya solo se sugiere buscarlos en la web como ampliación teórica. En cuanto a sus tecnologías, SM demuestra los dos teoremas después de enunciarlos y Marea Verde solo demuestra el del seno.

Para resolver triángulos, la técnica consiste en aplicar dos veces uno de estos teoremas y una vez la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo. El teorema que se utiliza se elige dependiendo de los elementos del triángulo que se conozcan. Si se conocen dos ángulos y un lado o dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se aplica el teorema del seno. Si se conocen los tres lados o dos lados y el ángulo que forman, se aplica el teorema del coseno. Las tecnologías de esta técnica son los dos teoremas y la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo.

9. Utilización de la calculadora en trigonometría.

En una sección del libro de Anaya y en notas al margen del libro de SM, se explican técnicas para utilizar la calculadora en trigonometría. Se enseña cómo seleccionar el modo para trabajar con grados o con radianes, poner los grados en forma decimal o en forma sexagesimal, hallar las razones trigonométricas o cómo calcular las razones trigonométricas inversas. La tecnología es la propia calculadora.

En el libro de SM se enseñan también las siguientes técnicas, justificadas con sus demostraciones utilizando las razones trigonométricas:

10. Expresión del radio, r, y la apotema, a, de un polígono regular en función del número de lados, n, y de la longitud de cada lado, l.

$$r = l/(2\,\mathrm{sen}(180°/n)), \qquad a = l/(2\tan(180°/n))$$

11. Fórmula del área, A, de un triángulo en función de dos lados, a y b, y el ángulo comprendido entre ellos, $\hat{C}$.

$$A = \frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,\hat{C}$$

B.3. Efectos que produce esta enseñanza sobre el aprendizaje del alumno.

En resumen, las tres editoriales tienen una forma de explicar la trigonometría bastante similar. En general, primero se institucionalizan las técnicas, justificándolas mediante sus tecnologías; en segundo lugar, se muestran ejemplos durante la explicación de la técnica o inmediatamente después; y, por último, se proponen ejercicios o problemas para trabajar la técnica. No suele haber un momento del primer encuentro o exploratorio donde el alumno se encuentre por primera vez con un tipo de problema y tenga que buscar o construir personalmente, con ayuda del profesor y de sus compañeros, las técnicas para resolverlo.

De esta manera, si se sigue fielmente la enseñanza de los libros de texto se produce lo que Brousseau identifica en su Teoría de Situaciones Didácticas como efecto Topaze, que sucede cuando se le sugiere al alumno la forma de afrontar los problemas propuestos y el estudiante llega a la solución, pero no ha sido por sus propios medios, lo que impide la construcción de conocimientos por parte del alumno y un aprendizaje significativo (Chavarría, 2006). Teniendo en cuenta esta teoría y los principios del aprendizaje socio-constructivista, es positivo favorecer la autonomía en el aprendizaje y que haya momentos en que los estudiantes asuman la responsabilidad del aprendizaje y sean protagonistas en la construcción de los conocimientos (Godino, 2013). Además, según la concepción constructivista de las matemáticas, es importante mostrar a los alumnos la necesidad de cada parte de las matemáticas antes de que les sea presentada, que las aplicaciones precedan y sigan a la creación de las matemáticas y que se construyan las estructuras matemáticas a partir de algunos problemas iniciales (Godino, Batanero y Font, 2004). Todo esto haría que el alumno se sintiera motivado, adquiriera conocimiento matemático para resolver problemas y construyera adecuadamente los conceptos matemáticos. Sin embargo, en los libros de texto las aplicaciones de la trigonometría se suelen dejar para el final y las técnicas se explican con tanto detalle (por ejemplo, la resolución de triángulos) que no se deja nada al alumno por descubrir.

En los tres libros de texto analizados, lo más próximo a un momento del primer encuentro es la introducción de la trigonometría que realiza el libro de Anaya, en el que aparece un ejemplo de problema de trigonometría resuelto por semejanza y que sirve para introducir las definiciones de las razones trigonométricas y justificar su definición y su uso, pero no es el propio alumno el que descubre estas técnicas. Además, esta editorial permite que el alumno construya la técnica de reducción al primer cuadrante mediante unos ejercicios (aunque no queda clara desde el principio la finalidad de esta técnica) y es el único libro que explica la resolución de triángulos no rectángulos sin utilizar los teoremas del seno y del coseno. De esta manera se favorece más el pensamiento reflexivo en lugar de la memorización de fórmulas y la mecanización, al contrario de lo que sucede en los otros dos libros o con las técnicas 10 y 11 del libro de SM.

Por otro lado, en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la ESO y del Bachillerato se dice:

> La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico. (p. 389)

Sin embargo, la resolución de problemas no parece ser el eje principal en el que se basan los libros de texto, sino más bien las técnicas y los ejercicios que las trabajan.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno.

En esta sección, trataremos la cuestión de los conocimientos previos que necesita el alumnado antes de su primera toma de contacto con la trigonometría y su adquisición.

C.1. Conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar el aprendizaje de la trigonometría.

- Clasificación de triángulos.
- Propiedades geométricas como la suma de los ángulos de un triángulo o la longitud y los grados que tiene una circunferencia.
- Teorema de Pitágoras.
- Teorema de Tales.
- Semejanza de triángulos.
- Fórmulas de áreas y volúmenes de figuras geométricas.
- Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

C.2. Enseñanza anterior.

Todos estos conocimientos previos deberían haber sido adquiridos por el alumno a través de la enseñanza anterior, según los contenidos que recoge el currículo de la ESO de Aragón de la LOMCE. La semejanza de triángulos se enseña por primera vez en 2º de ESO y se vuelve a estudiar en 4º de ESO, normalmente justo antes del tema de Trigonometría, por lo que los alumnos deberían tener recientes estos contenidos. El resto de contenidos comienza a estudiarse en 1º de ESO, o en 2º de ESO en el caso del teorema de Tales, y se van repasando y ampliando durante todos los cursos de la ESO, así que son contenidos que deberían tener ya asimilados. Aun así, se van a proponer dos actividades a los alumnos para que repasen y tengan presentes todos estos contenidos previos.

C.3. Actividades sobre los conocimientos previos.

Mediante las siguientes actividades se va a tratar de asegurar que los alumnos posean dichos conocimientos previos.

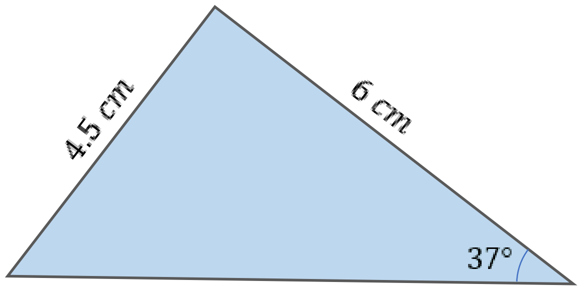
---

1. Responde a las siguientes cuestiones sobre el triángulo rectángulo de la imagen:
   a) Calcula los lados y los ángulos desconocidos del triángulo.
   b) Traza una altura del triángulo de manera que este se divida en dos triángulos. ¿Son semejantes los dos nuevos triángulos al triángulo

original? ¿Por qué? ¿Conoces alguna otra forma de obtener triángulos semejantes?

c) Calcula los lados desconocidos de los nuevos triángulos.

d) Para cada uno de los tres triángulos divide sus lados dos a dos, es decir, un cateto entre la hipotenusa, el otro cateto entre la hipotenusa y un cateto entre el otro cateto. ¿Qué observas? ¿Por qué sucede esto?



2. Dibuja las siguientes figuras geométricas y anota la fórmula de su área y/o volumen: triángulo, rombo, trapecio, polígono regular, cilindro y cono.

D. Sobre las razones de ser de la trigonometría.

La razón de ser que se va a tener en cuenta para la introducción escolar de la trigonometría va a ser el cálculo de medidas indirectas de longitud o de distancias entre puntos inaccesibles. Esta razón de ser es una de las razones de ser históricas que dieron origen a la trigonometría y que se presentan a continuación. Según Massa (2003), conocer la historia de las matemáticas proporciona una visión más completa de la materia tanto al profesor como al alumno y puede mejorar la enseñanza y aprendizaje de determinados conceptos.

D.1. Razones de ser históricas que dieron origen a la trigonometría.

A continuación, se hace un recorrido por la historia de la trigonometría y las razones de ser que le dieron origen, con la información recogida por Flores (2008) y Quintero (2015).

El primer registro que se conoce de la trigonometría es una tablilla de barro llamada Plimpton 322 (1600 a.C. - 1900 a.C.) encontrada en la antigua región de Babilonia, y que contiene una serie de ternas pitagóricas, es decir, ternas de números que son lados de un triángulo rectángulo. Los babilonios utilizaban las razones trigonométricas para realizar medidas en agricultura y para analizar el movimiento de los cuerpos celestes en astronomía. Al mismo tiempo, en Egipto utilizaron la medición de triángulos para la construcción de las pirámides o para la medición de las tierras y la recuperación de sus fronteras cuando había inundaciones. Por ejemplo, sabían calcular cuál tenía que ser la inclinación de una pirámide conociendo su altura y el lado de su base.

En la Grecia clásica, los datos astronómicos acumulados por los astrónomos babilonios de los siglos IV y V a.C. permitirían a los matemáticos de la época construir la trigonometría gradualmente. En el siglo III a.C., hallando las medidas de determinados triángulos, Aristarco de Samos calculó la distancia de la Tierra al Sol en relación a la distancia de la Tierra a la Luna y Eratóstenes midió las dimensiones de la Tierra. En el siglo II a.C., Hiparco de Nicea construyó una tabla de cuerdas, precursora de las tablas trigonométricas actuales, en la que se relaciona un ángulo con la longitud de la cuerda de su arco en una circunferencia de radio r. Otros matemáticos que contribuyeron a desarrollar la trigonometría más adelante fueron Menelao de Alejandría, alrededor del año 100 d.C., y Ptolomeo, alrededor del año 150 d.C., autor del Almagesto, la obra más importante de la trigonometría en la antigüedad. En esta obra se recogen los trabajos astronómicos de sus predecesores, y en ella aparece una tabla de cuerdas y se explica cómo construirla y cómo utilizarla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. Además, utilizaban la trigonometría para construir astrolabios y relojes de sol, y la trigonometría de Ptolomeo fue utilizada durante muchos siglos por los astrónomos como introducción básica.

Al mismo tiempo, matemáticos y astrónomos de la India como Aryabhata desarrollaron un sistema trigonométrico basado en un predecesor de la función seno en lugar de cuerdas como los griegos. Esta función seno no se definía mediante la proporción con la que se define el seno en la actualidad, sino que era la longitud del lado opuesto al ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada, por lo que dependía de la longitud de esta. Además del seno, también estudiaron otras funciones trigonométricas.

En la cultura árabe, fueron fundamentales dos libros griegos: el Almagesto de Ptolomeo, que les enseñaba a orientarse por las estrellas, y los Elementos de Euclides, con el que aprendieron a hacer dibujos que señalasen la dirección de La Meca desde cualquier parte de la Tierra. Esta civilización fue la que más contribuyó al desarrollo de la trigonometría, por ejemplo, estudiaron las seis funciones trigonométricas, las relaciones entre ellas y teoremas como las fórmulas del ángulo doble, del ángulo mitad, del ángulo suma o el teorema de los senos. Utilizaron la trigonometría en astronomía, para estudiar la variación de la distancia entre el Sol y la Tierra o calcular con mucha precisión el ángulo que forma el eje de la Tierra con el plano de su órbita.

En el siglo XII comienzan a aparecer en Europa traducciones de libros de matemáticas y astronomía árabes, hecho que lleva a la familiarización con la trigonometría. El primer trabajo significativo en este campo en Europa fue escrito por el matemático y astrónomo Johann Müller, que detalla y crea varias herramientas de gran utilidad, así como explica, analiza y muestra la obra de Ptolomeo. Además, el astrónomo Georges Joachim introdujo el concepto moderno de las funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de determinados lados.

A comienzos del siglo XVII, el matemático John Napier descubrió los logaritmos, lo que ayudó a realizar cálculos trigonométricos. A mediados del siglo XVII, Isaac Newton descubre el cálculo diferencial e integral y se introducen las funciones seno, coseno y tangente como series de potencias. De este modo, las funciones trigonométricas se incorporan al Análisis y adquieren un mayor rigor matemático. En el siglo XVIII, el físico y matemático Leonhard Euler, explicó que las propiedades de la trigonometría eran consecuencia de la aritmética de los números complejos y definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos.

Durante el siglo XX la trigonometría ha realizado muchos aportes en el estudio de los fenómenos de onda y oscilatorio, así como del comportamiento periódico, el cual se relaciona con las propiedades analíticas de las funciones trigonométricas. En astronomía se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, para la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación satelital.

D.2. Problema de introducción de la razón de ser de la trigonometría.

El siguiente problema pretende introducir las razones trigonométricas planteando desde el inicio una situación relacionada con la razón de ser de la trigonometría, de la que todavía no tienen la técnica para su resolución y van a ir construyéndola poco a poco.

Cuando los rayos de sol inciden formando un ángulo de 60º con el suelo, se mide la sombra que proyecta un edificio y la medida es de 10 metros.

a) Encuentra una manera de calcular la altura del edificio.
b) En el mismo instante, se mide la sombra que proyecta una persona de 1.72 metros y la sombra mide 0.99 metros. Con estos datos, calcula la altura del edificio. ¿Qué definiciones o resultados matemáticos has utilizado?
c) Dibuja un ángulo de 60º y varios triángulos rectángulos semejantes a partir de él. Realiza diferentes mediciones en los triángulos. ¿Qué medidas permanecen constantes en triángulos semejantes? ¿Dependen solo de un ángulo?
d) Utiliza el applet de GeoGebra que se encuentra en https://www.geogebra.org/m/Xw3vMM9C para comprobar tus respuestas.
e) Calcula ahora la altura del edificio utilizando una de estas razones.

D.3. Metodología

Como muestra Sánchez (2010), la estrategia didáctica utilizada por el profesor en la clase de trigonometría suele ser la exposición y los recursos que utiliza son los tradicionales, lo cual genera un alumno pasivo, cuyo aprendizaje no es significativo y que demuestra un conocimiento superficial de la trigonometría.

Por ello, se intentará que el aprendizaje del alumno sea significativo, que el alumno construya su propio aprendizaje a partir de sus conocimientos previos, relacionándolos con los nuevos conocimientos que intentará descubrir por sí mismo. De esta manera, las razones de ser de la trigonometría quedarán expuestas, para que el alumno vea una finalidad a lo que está aprendiendo. Se buscará transmitir no solo conocimientos procedimentales, sino también actitudinales.

Según Sánchez (2010), la integración de las TIC para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias tiene un gran potencial, ofreciéndole al estudiante la interacción y manipulación de contenidos y problemas matemáticos, permitiendo modificar condiciones, controlar variables y manipular fenómenos.

Por esta razón, además de los recursos tradicionales como la pizarra y el libro de texto, se utilizarán herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión de la trigonometría. Así mismo, se promoverá el aprendizaje cooperativo, que les permitirá adquirir competencias comunicativas y de transferencia de conocimientos.

Los momentos de estudio que se recogen en la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999) por los que pasarán los alumnos en esta fase de introducción serán los tres primeros: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio y el momento de constitución del entorno tecnológico-teórico.

La actividad la realizarán en parejas con un ordenador, si es posible, para manejar el applet de GeoGebra, y también habrá momentos de puesta en común para institucionalizar las razones trigonométricas o para comprobar, por ejemplo, que todos han obtenido las mismas razones trigonométricas del ángulo de 60º aunque hayan dibujado triángulos de diferentes tamaños.

E. Sobre el campo de problemas.

Los campos de problemas que se presentarán en el aula son los problemas de resolución de triángulos, rectángulos y no rectángulos, y los problemas de cálculo de longitudes, perímetros y áreas.

E.1. Problemas que se van a presentar en el aula.

Problemas de resolución de triángulos rectángulos

Primer caso: Se conoce un ángulo agudo y la hipotenusa.

1. Una cometa vuela de modo que su cuerda forma un ángulo de 50º con la horizontal. Si la cuerda mide 50 m, ¿a qué altura se encuentra la cometa?
2. Un cable de 35 m sujeta un poste vertical formando un ángulo de 34º con el suelo. ¿A qué distancia del poste se ha fijado el cable al suelo? ¿Qué altura tiene el poste?

Segundo caso: Se conoce un ángulo agudo y un cateto.

3. Un avión a 10 km de altura va a aterrizar descendiendo con un ángulo constante de 3º con la horizontal. ¿Cuántos km recorrerá horizontalmente hasta llegar al suelo?
4. Calcula la profundidad de un pozo de 1.5 m de diámetro si, cuando está vacío, desde el borde vemos el borde opuesto del fondo bajo un ángulo de 70º con la horizontal. Si sube el agua y ahora vemos el borde opuesto del agua bajo un ángulo de 42º, ¿cuánto ha subido el agua? ¿Qué volumen de agua hay ahora en el pozo?

Tercer caso: Se conocen dos lados.

5. En una señal de tráfico se indica que la pendiente de la carretera es del 8%, es decir, por cada 100 m recorridos horizontalmente se asciendem 8 metros. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la carretera?
6. Un barco navegando en línea recta ha recorrido 200 m para cruzar un río de 150 m de anchura. ¿Con qué ángulo respecto a la línea de la orilla lo ha hecho?
7. Para llegar a la ventana de un octavo piso situado a 26 metros de altura, los bomberos van a utilizar una escalera que alcanza los 25 metros de longitud en su máxima extensión y que está situada sobre un camión de 2 metros de altura. Si lo más cerca que se puede situar el camión del edificio es a 6 metros, ¿podrán alcanzar la ventana? En caso afirmativo, ¿qué longitud tendrá la escalera y qué ángulo formará con la horizontal? ¿Cuál es la máxima distancia a la que se puede colocar el camión para poder alcanzar la ventana?
8. Una persona ha subido una cuesta andando 400 pasos y según el GPS en 2D del móvil ha recorrido 200 metros. Suponiendo que 1 paso de la persona equivale a 0.6 m, ¿qué ángulo de inclinación tenía la cuesta? ¿Cuál era su porcentaje de pendiente? ¿Cuántos metros ha ascendido?
9. Para medir las dimensiones de la Tierra, Eratóstenes realizó el siguiente procedimiento. En primer lugar, supongamos que la Tierra es una esfera

perfecta y que las ciudades de Siena y Alejandría se encuentran en el mismo meridiano y a 843 km de distancia. En el mismo instante en el que en la ciudad de Siena los rayos del sol inciden completamente verticales el día del solsticio de verano, en Alejandría la sombra de un poste vertical de 1 m mide 13 cm.

a) ¿Qué ángulo forman los rayos del sol con la vertical en Alejandría?
b) ¿Cuánto mide el ángulo central de la circunferencia de la Tierra que abarca el arco entre las dos ciudades?
c) ¿Cuánto mide la circunferencia de la Tierra y su radio?

Problemas de doble observación.

10. Se quiere saber la altura de un edificio a cuyo pie no podemos acceder. Tenemos un teodolito para medir ángulos y un metro para medir distancias, pero no podemos medir la distancia desde el lugar donde medimos el ángulo correspondiente hasta el pie del edificio.
    a) ¿Qué medidas podemos tomar para poder calcular la altura del edificio? ¿De qué manera podemos calcularla? Para ayudarte, haz un dibujo de la situación poniendo como incógnitas la altura del edificio, h, y una distancia desconocida desde el pie del edificio, x.
    b) Sigue las instrucciones de tu profesor para construir un teodolito casero y halla la altura de un edificio de tu alrededor realizando antes las mediciones oportunas.
11. El piloto de un helicóptero observa su destino con un ángulo de depresión de 30º y cuando ha recorrido 3 km el ángulo es de 50º. ¿A qué altura se encuentra el helicóptero? ¿Cuántos kilómetros le quedan para llegar a su destino?
12. En un punto de una calle de 7.5 m de ancho se sitúa una escalera de 6 m de longitud que se apoya sobre la fachada de un edificio a una altura de 4.75 m. Si se mueve la escalera hacia el otro lado de la calle girando sobre su base, ¿llegará a apoyarse sobre la fachada opuesta? En caso afirmativo, ¿a qué altura de la pared se apoyará y qué ángulo formará con el suelo?
13. Se quiere extender un cable que una los puntos más altos de una de las torres de la Basílica del Pilar y de la torre de la Catedral de La Seo, dos torres que distan 300 m la una de la otra. Una persona se sitúa a 100 m de la primera torre y ve su punto más alto con un ángulo de 42.6º y el punto más alto de la otra torre con un ángulo de 24.2º. ¿Cuánto miden las torres? ¿Cuántos metros de cable se necesitan?
14. Desde un globo a 70 m de altura se divisa al norte una ciudad con un ángulo de depresión de 60º y al oeste otra ciudad con un ángulo de 45º. ¿Qué distancia hay entre las dos ciudades?

Problemas de resolución de triángulos no rectángulos

15. El mástil de la pasarela del Voluntariado de Zaragoza apunta hacia el este formando un ángulo de 60º con el suelo. En el momento en el que los rayos del sol inciden desde el oeste con un ángulo de 20º respecto a la horizontal, la sombra del mástil alcanza los 258.5 m desde su base. ¿Cuál es la altura del mástil? ¿Qué longitud tiene? Cuando los rayos del sol incidan desde el este formando un ángulo de 45º con la horizontal, ¿cuánto medirá la sombra del mástil?
16. Las agujas del reloj del Big Ben miden 2.7 m, la de las horas, y 4.3 m, la de los minutos. Si el reloj marca las 10:10, ¿cuál es la distancia entre los extremos de las agujas?
17. La montaña rusa Dragon Khan tiene una subida de 54 m de longitud seguida de una bajada de 49 m de longitud. Si en total se han recorrido 76 m en horizontal, ¿qué ángulos forman las dos pendientes con la horizontal?
18. Plantea un problema que se resuelva mediante un triángulo no rectángulo ABC conociendo $\overline{AB}$ = 23 cm, $\overline{BC}$ = 35 cm y $\hat{A}$ = 53º y resuélvelo.
19. El reloj solar de Vadorrey se encuentra en Zaragoza y es el más grande del mundo, con un gnomon de 45.67 metros de longitud.
    a) El gnomon de un reloj solar se construye paralelo al eje de rotación de la Tierra. Sabiendo que la latitud del lugar es 41º 39’ 15” N, calcula el ángulo de inclinación del gnomon con respecto a la horizontal y hacia qué dirección apunta.
    b) Calcula cuánto mide la sombra del gnomon a las 12 h (hora solar) en función del ángulo α con el que inciden los rayos del sol con respecto a la horizontal en ese lugar y momento. Sabiendo que, a las 12 h, $\alpha = 71.78°$ en el día del solsticio de verano y $\alpha = 24.91°$ en el día del solsticio de invierno, ¿cuál es la máxima y la mínima longitud que proyecta la sombra del gnomon a las 12 h a lo largo del año?
    c) En los relojes solares, las líneas del suelo que marcan las horas se distribuyen en orden creciente de oeste a este y de manera que las 12 h se encuentren en la línea meridional del gnomon y las líneas formen ángulos de 15º con su línea contigua. Calcula como en b) la longitud de la sombra del gnomon para las 15 h (hora solar) en función del ángulo α, y la longitud máxima y mínima sabiendo que a esa hora $\alpha = 48.55°$ en el solsticio de verano y $\alpha = 12.28°$ en el de invierno.
    d) Si hacemos lo mismo para las 9 h, ¿cuáles serían los resultados?
    e) ¿En qué hora varía menos la longitud de la sombra a lo largo del año, 9 h, 12 h o 15 h?

Cálculo de longitudes, perímetros y áreas.

20. Halla la altura y el área de un parche con forma de triángulo obtusángulo sabiendo que dos de sus lados miden 13 cm y 28 cm y que el ángulo que forman estos es de 35º.
21. Para la confección de un balón de fútbol se necesitan doce pedazos de cuero de color negro con forma de pentágono regular y veinte pedazos de color blanco con forma de hexágono regular. Si el lado de estos pedazos mide $4.3\ cm$, ¿cuál es su radio? ¿cuánto cuero negro y cuánto cuero blanco lleva cada balón de fútbol?
22. Una parcela con forma de trapecio rectángulo tiene una base menor de 15 m y el lado que no es perpendicular a las bases mide 12 m. Si el ángulo que forma ese lado con la base menor es 146º 26', ¿cuánta superficie tiene? ¿cuál es su perímetro? ¿cuánto miden sus diagonales?

E.2. Modificaciones de la técnica inicial que va a exigir la resolución de los problemas.

Con los conocimientos previos, a la hora de resolver un triángulo como los que aparecen en estos problemas, se dibujaría sobre el papel un triángulo semejante al del problema con los datos que nos dan, y midiendo los lados y ángulos del triángulo dibujado se podrían saber los del triángulo del problema aplicando la proporcionalidad de los lados y la igualdad de ángulos de triángulos semejantes. Ahora, después de descubrir las razones trigonométricas y aprender a obtenerlas con la calculadora, podemos relacionar los ángulos agudos de un triángulo rectángulo con las proporciones de los lados sin tener que dibujar un triángulo semejante ni hacer mediciones, con los consiguientes errores de precisión o redondeo que se podrían cometer. De esta manera, se pueden hallar todos los elementos de un triángulo rectángulo conociendo dos de ellos, además del ángulo recto. Para resolver un triángulo no rectángulo, se traza una altura para dividirlo en dos triángulos rectángulos y se resuelven estos por separado o simultáneamente.

En los primeros problemas solo hay que aplicar una razón trigonométrica y resolver una ecuación, pero después los resultados cada vez serán menos inmediatos y habrá que resolver más de un triángulo, descomponer un triángulo no rectángulo en dos triángulos rectángulos, aplicar más de una razón trigonométrica o plantear y resolver un sistema de ecuaciones.

E.3. Metodología

La enseñanza de la trigonometría será a través de la resolución de problemas. Según Torres (2006), la enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente un método muy usado para poner en práctica el aprendizaje activo y significativo, ya que se centra en los procesos de pensamiento y aprendizaje y en el desarrollo o construcción de las ideas matemáticas por parte del alumno, fomentando así su autonomía, capacidad mental, creatividad y confianza. Para Brousseau (como se citó en Benítez y Benítez, 2014), a los alumnos se les plantea un problema para que adquieran un conocimiento nuevo, que es la propia resolución del problema, por lo que debe ser planteado al inicio de la lección. Además, es importante que el estudiante utilice todas sus capacidades y conocimientos para encontrar la solución, que sienta la responsabilidad de resolverlo y que el rol del profesor sea solo de guía mediador durante la resolución del problema (Benítez y Benítez, 2014). Por último, se fomentará el trabajo cooperativo, ya que favorece la construcción de conocimientos, la implicación en la tarea, el respeto por las percepciones distintas, el valor de la argumentación, el desarrollo cognitivo y el desarrollo social y, en consecuencia, mejora el rendimiento académico, la motivación y las relaciones interpersonales (López y Acuña, 2011; Pons, González-Herrero y Serrano, 2008).

Los problemas propuestos serán realizados por los alumnos mediante trabajo cooperativo en grupos de cuatro personas, en los que tendrán que aprender y ayudar a aprender a sus compañeros, ya que cualquier miembro del grupo puede ser preguntado por la resolución de los problemas. Dentro de cada grupo intentarán primero realizarlos individualmente y después pondrán en común las técnicas que han utilizado para resolverlos. De este modo, todos los miembros tendrán la oportunidad de descubrir por sí mismos la resolución de los problemas y después, en la puesta en común, podrán aprender otras técnicas o estrategias de resolución de sus compañeros. Una vez los grupos hayan resuelto uno de los problemas de cada campo, se organizará una puesta en común y debate con toda la clase para que surjan todas las estrategias posibles de resolución y el profesor institucionalice la técnica utilizando las producciones de los alumnos. Después realizarán el resto de problemas para consolidar el conocimiento de la técnica y se pondrán en común las resoluciones de cada grupo.

F. Sobre las técnicas.

En esta sección, se diseñan y analizan los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula para trabajar las técnicas asociadas a la trigonometría.

F.1. Ejercicios que se van a presentar en el aula.

<u>Técnica 1: Conversión de medidas angulares.</u>

1. Realiza las siguientes conversiones de medidas angulares sin calculadora y después comprueba tus soluciones con la calculadora:
   a) Escribe en radianes 90º, 180º, 270º y 360º.
   b) Escribe en grados $\pi/6$ rad, $\pi/4$ rad y $\pi/3$ rad.
   c) Escribe 135º en radianes y $2\pi/3$ rad en grados.

d) Escribe 64º 50’ en radianes y 1 rad en grados.

Se trabaja la técnica de conversión de medidas angulares y del uso de la calculadora. Esta técnica es adecuada para cualquier problema en el que aparezcan unidades angulares distintas y haya que convertirlas para trabajar con las mismas unidades.

Técnica 2: Relaciones trigonométricas fundamentales.

2. Calcula las razones trigonométricas de α, ángulo agudo, si $\operatorname{sen}\alpha = 0.2$.
3. Demuestra las dos relaciones fundamentales $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y $\tan\alpha = \operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha$.
4. Demuestra las siguientes relaciones trigonométricas:
   a) $1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$.
   b) $1/\cos\alpha - \cos\alpha = \tan\alpha\ \operatorname{sen}\alpha$
   c) $\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = \cos^2\alpha$
5. Calcula las razones trigonométricas de α, ángulo agudo, sabiendo en cada caso que:
   a) $\tan\alpha = \sqrt{3}/3$
   b) $\operatorname{sen}\alpha = 1/3$
   c) $\cos\alpha = 1/3$

   ¿Cuánto suman los ángulos de los apartados b) y c)?
6. Calcula las razones trigonométricas de α sabiendo que $\cos\alpha = 1/3$ y que no es un ángulo agudo.
7. Comprueba si son ciertas estas afirmaciones:
   a) Si $\operatorname{sen}\alpha = 0.4$, entonces $\cos\alpha = 0.6$.
   b) Si $\tan\alpha = 1$, entonces $\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha$.
   c) Si $\tan\alpha = 2/3$, entonces $\operatorname{sen}\alpha = 2$ y $\cos\alpha = 3$.
   d) Si $\cos\alpha = (\operatorname{sen}\alpha)/n$, entonces $\tan\alpha = n$.
   e) Si $\cos\alpha = 0.6$, entonces $\tan\alpha > 1$.
8. Razona si hay un ángulo α que cumpla $\cos\alpha = 3/5$ y $\tan\alpha = 4/3$.
9. Si $\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha$, α ángulo agudo, halla las razones trigonométricas de α.

Estos ejercicios sirven para trabajar la técnica de utilizar las relaciones trigonométricas fundamentales para demostrar otras identidades trigonométricas o para calcular las restantes razones trigonométricas de un ángulo conociendo una de ellas y el cuadrante en el que se sitúa el ángulo en la circunferencia goniométrica. Estas relaciones no suelen utilizarse para resolver los problemas de trigonometría.

Técnica 3: Utilizar las definiciones de las razones trigonométricas.

10. En un triángulo rectángulo cuyos lados miden $\overline{BC} = 100$ cm, $\overline{AC} = 60$ cm y $\overline{AB} = 80$ cm:
    a) Calcula las razones trigonométricas del ángulo $\hat{B}$.
    b) Si la altura que divide al triángulo en dos triángulos rectángulos mide 48 cm, calcula las razones trigonométricas del ángulo $\hat{B}$ en uno de los nuevos triángulos. ¿Coinciden con las razones halladas en a)? ¿Por qué?
    c) Calcula las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$ y compáralas con las del ángulo $\hat{B}$. ¿Qué observas? ¿Bajo qué condiciones sucede esto?
11. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos? Calcula sus razones trigonométricas.
12. Dibuja un triángulo equilátero. ¿Cuánto miden sus ángulos? Calcula sus razones trigonométricas y las de su ángulo mitad.
13. Calcula las razones trigonométricas de 0º, 90º, 180º, 270º y 360º y halla el signo de cada una en cada cuadrante.
14. Si α y α' son ángulos agudos tales que $\alpha < \alpha'$, compara sus razones trigonométricas. Haz lo mismo para cada cuadrante.

Con estos ejercicios se trabaja el cálculo de las razones trigonométricas, y a la vez descubren las razones de los ángulos 30º, 45º y 60º y las de los ángulos de los ejes de coordenadas, así como el crecimiento y decrecimiento de las razones trigonométricas. Es necesario aprender a calcular las razones trigonométricas para todos los campos de problemas de trigonometría.

Técnica 4: Reducción al primer cuadrante.

15. Halla los ángulos comprendidos entre 0º y 360º sabiendo en cada caso que:
    a) $\cos x = 1/2$ b) $\cos x = -1/2$
16. Conociendo las razones trigonométricas de 60º, calcula las de 120º, 240º y 300º. ¿Qué relación tienen estos ángulos con el de 60º?
17. Busca la relación existente entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo α y las razones de los ángulos $180º - \alpha$, $180º + \alpha$ y $360º - \alpha$. Para ayudarte, dibuja cada uno de ellos sobre la circunferencia goniométrica junto a un ángulo agudo α de razones $\cos\alpha = x$ y $\operatorname{sen}\alpha = y$. Comprueba tus soluciones con el applet de GeoGebra https://www.geogebra.org/m/rxptud6u
18. A partir de las razones trigonométricas de 45º, halla las de 135º, 225º y 315º.
19. Halla las razones trigonométricas de estos ángulos, reduciéndolas a otras conocidas de ángulos del primer cuadrante: a) 150º b) 600º c) -405º

20. Halla los ángulos comprendidos entre 0º y 360º que verifican las siguientes ecuaciones:
    a) $2\cos \mathrm{x} = \sqrt{3}$
    b) $\tan 5\mathrm{x} = -1$
    c) $\cos \mathrm{x} = \mathrm{sen}\, 38º$
    d) $4\,\mathrm{sen}^2 x - 1 = 0$

Con estos ejercicios se descubren y trabajan las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, que difieren en 180º y que suman 360º, así como la técnica de reducción al primer cuadrante o la resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas. Estas técnicas no suelen utilizarse para los campos de problemas.

<u>Técnica 5: Resolución de triángulos rectángulos.</u>

21. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos en $\hat{A}$, conociendo:
    a) $\overline{BC}$ = 120 m y $\hat{B}$ = 40º.
    b) $\overline{AC}$ = 55 cm. y $\hat{B}$ = 14º.
    c) $\overline{AC}$ = 7 m y $\hat{C}$ = 58º.
    d) $\overline{AC}$ = 4 cm y $\overline{AB}$ = 3 cm.
    e) $\overline{BC}$ = 17 m y $\overline{AC}$ = 8 m.
22. Tenemos dos triángulos ABD y BDC rectángulos en D y con un lado común $\overline{BD}$ que cumplen que $\hat{A}$ = 65º, $\overline{AB}$ = 18 cm y $\overline{AD}$ + $\overline{DC}$ = 32 cm. Calcula $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$.

En el primer ejercicio, cada apartado da como dato distintos elementos del triángulo. El segundo ejercicio es una primera aproximación de cara a los ejercicios de resolución de triángulos no rectángulos o una adecuación de la técnica para los problemas en los que aparecen dos triángulos rectángulos. De esta manera se ejercita esta técnica, que se utiliza para el campo de problemas de resolución de triángulos rectángulos.

<u>Técnica 6: Resolución de triángulos no rectángulos.</u>

23. Resuelve los siguientes triángulos ABC, conociendo:
    a) $\overline{BC}$ = 3 cm, $\hat{B}$ = 47º, $\hat{C}$ = 25º
    b) $\hat{B}$ = 85º, $\overline{AB}$ = 12 m, $\overline{BC}$ = 8 m
    c) $\hat{A}$ = 50º, $\overline{AB}$ = 17 cm, $\overline{BC}$ = 29 cm
    d) $\overline{AB}$ = 20 m, $\overline{BC}$ = 22 m, $\overline{CA}$ = 30 m
    e) $\overline{AC}$ = 70 cm, $\hat{B}$= 28º, $\hat{C}$= 53º

En cada apartado se conocen elementos distintos del triángulo y hay una única solución. De esta manera se ejercita esta técnica, que se utiliza para el campo de problemas de resolución de triángulos no rectángulos.

F.2. Metodología

Estos ejercicios están pensando para ejercitar las técnicas, por lo que deberán ser realizados individualmente por cada alumno para que adquiera la habilidad de aplicar las técnicas de la trigonometría. Una vez realizados, se corregirán los ejercicios en clase para que todos vean los errores que han cometido y aprendan de ellos. Para la corrección de cada ejercicio o apartado, saldrá a la pizarra un alumno para explicar a sus compañeros su resolución. Los ejercicios 2, 3, 11, 12, 15, 16 y 17 sirven para institucionalizar técnicas, por lo que se realizarán en grupo y se pondrán en común antes de que realicen el resto de ejercicios de la técnica correspondiente.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

En esta sección se van a tratar las tecnologías que se van a enseñar en el aula, esto es, las justificaciones de las técnicas que se han desarrollado anteriormente en este trabajo.

En el ámbito educativo es importante enseñar las demostraciones matemáticas y es uno de los procesos que los estudiantes deberían conocer y ser capaces de usar (Fiallo, Camargo y Gutiérrez, 2013). A través de las demostraciones y argumentaciones lógicas, se evita el aprendizaje mecánico de fórmulas y su aplicación de manera rutinaria y se ayuda a los alumnos a comprender la necesidad de validar el conocimiento científico (Crespo, 2005).

Para de Villiers (como se citó en Fiallo et al., 2013), las funciones de la demostración que se deben enseñar en este nivel educativo son la verificación, la explicación, y principalmente, el descubrimiento y la comunicación.

G.1. Razonamientos mediante los que se van a justificar las técnicas y su proceso de institucionalización.

A continuación, se van a detallar para cada tecnología las técnicas que justifican y la manera en la que se van a institucionalizar los distintos aspectos de esta unidad didáctica en el aula.

La responsabilidad de justificar las técnicas será del profesor, que es el que posee los conocimientos necesarios, pero en lugar de impartirlos en una clase expositiva, se tratará de que antes los estudiantes intenten construir las técnicas o justificarlas siguiendo un razonamiento.

Tecnología 1: Medidas angulares y relación entre ellas.

La Técnica 1: Conversión de medidas angulares se va a justificar mediante las definiciones de grado sexagesimal y de radián y mediante la relación entre las dos unidades y su demostración.

En primer lugar, se dará a los alumnos la definición de grado y de radián de la siguiente manera:

"Un grado sexagesimal se define como el ángulo cuyo arco de circunferencia mide 1/360 de la longitud de la circunferencia."

"Un radián se define como el ángulo cuyo arco de circunferencia mide lo mismo que el radio de la circunferencia."

A continuación, sabiendo que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi r$, se pedirá a los alumnos que averigüen cuántos radianes hay en una circunferencia de radio r, 2π. A partir de este resultado, se hará notar a los alumnos que como el número de radianes que hay en una circunferencia no depende del radio, hay el mismo número de radianes en cualquier circunferencia, 2π. Por lo tanto, el radián es un único ángulo bien definido, lo cual puede no ser visto a partir de la definición.

Después, se pedirá a los alumnos que relacionen ambas unidades sabiendo que la circunferencia tiene 360º y que intenten aplicar esta relación para averiguar a cuántos grados equivale un radián. Por último, se pondrá en común la resolución de este ejercicio para institucionalizar la técnica de conversión de medidas angulares, que se podrá hacer mediante una regla de tres o un factor de conversión.

Tecnología 2: Razones trigonométricas.

En primer lugar, se introducen las razones trigonométricas de un ángulo agudo y se justifica que están bien definidas mediante semejanza de triángulos rectángulos a través del problema inicial de la unidad en el que también se pone de manifiesto la razón de ser de la trigonometría. A partir de la puesta en común de este problema se institucionalizarán las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Más adelante, se ampliarán al resto de ángulos utilizando la circunferencia goniométrica con ayuda del applet de GeoGebra que se encuentra en https://www.geogebra.org/m/pyPGsGVc.

A su vez, las definiciones de las razones trigonométricas forman parte de las tecnologías del resto de técnicas. Las razones de los ángulos de 30º, 45º y 60º las calcularán los alumnos realizando los ejercicios 11 y 12. La Técnica 5: Resolución de triángulos rectángulos, que necesita además de la resolución de ecuaciones, la irán desarrollando los alumnos con la guía del profesor conforme vayan realizando los problemas y ejercicios relacionados, que contienen ejemplos de todos los casos posibles.

Tecnología 3: Demostraciones de las relaciones trigonométricas fundamentales.

Para demostrar las relaciones trigonométricas fundamentales se utilizan las definiciones de las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. Las demostraciones las realizarán los alumnos, pero con la ayuda del profesor, que les guiará cuando no sepan continuar. Previamente, los alumnos pueden descubrir estas relaciones y estas serán institucionalizadas por el profesor a través de la resolución del ejercicio 2, que es un primer encuentro con el tipo de ejercicios de esta técnica.

Tecnología 4: Demostraciones de las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, que difieren en 180º y que suman 360º.

Para justificar la Técnica 4: Reducción al primer cuadrante, los alumnos descubrirán por sí mismos estas relaciones a través de los ejercicios 15, 16 y 17. El primer ejercicio es un primer encuentro con el tipo de ejercicios en los que se utilizan estas relaciones, las cuales se descubren en el ejercicio 16, para el caso particular del ángulo de 60º, y en el ejercicio 17, para el caso general de un ángulo agudo α. En primer lugar, se dibuja sobre la circunferencia goniométrica un ángulo agudo y sus ángulos relacionados de los otros cuadrantes. Después, se calculan las razones trigonométricas de los ángulos mediante sus definiciones y, por último, se relacionan con las razones del ángulo agudo. Estos ejercicios se pondrán en común conforme los vayan haciendo para así institucionalizar estas relaciones y que puedan realizar el resto de ejercicios de la técnica.

Tecnología 5: Estrategia de la altura.

La Técnica 6: Resolución de triángulos no rectángulos se justificará mediante la estrategia de la altura, que consiste en trazar una de las alturas del triángulo de manera que aparezcan dos triángulos rectángulos, lo que permite resolver el triángulo resolviendo los dos triángulos rectángulos bien por separado o bien simultáneamente mediante un sistema de ecuaciones. Cuando los alumnos ya hayan aprendido a resolver triángulos rectángulos, se les pedirá que piensen cómo resolver un problema en el que aparece un triángulo no rectángulo y den con la idea de trazar una de las alturas y así obtener dos triángulos rectángulos. Este primer ejemplo será con un triángulo que se pueda resolver por separado. Posteriormente, se les dará otro ejemplo en el que se encuentren con la dificultad de no poder resolverlo por separado y tengan que pensar en plantear un sistema de ecuaciones para resolver los dos triángulos rectángulos de manera simultánea, siempre con la guía del profesor para que todos puedan seguir la explicación.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma.

A continuación, se presenta la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores. Estas actividades se reparten en doce sesiones de 50 minutos.

Sesión 1: Conocimientos previos e introducción a la trigonometría y las razones trigonométricas.

Contenidos de la sesión:

- C.3. Actividades sobre los conocimientos previos.
- D.2. Problema de introducción de la razón de ser de la trigonometría.
- Tecnología 2: Razones trigonométricas (de un ángulo agudo)
- Técnica 3: Utilizar las definiciones de las razones trigonométricas. Ej. 10

En esta sesión los alumnos realizarán en grupos las actividades sobre los conocimientos previos y el problema de introducción de la razón de ser de la trigonometría. A partir de sus resoluciones, el profesor institucionalizará las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Para terminar, los alumnos realizarán el ejercicio 10 con GeoGebra para que aprendan también algunas de las herramientas con las que se construyen los applets que se utilizan en clase. Con la guía del profesor, aprenderán a construir en GeoGebra un triángulo rectángulo con las medidas de los lados deseadas, a medir ángulos y a realizar cálculos como los de las razones trigonométricas.

Sesión 2: Medidas angulares.

Contenidos de la sesión:

- Tecnología 1: Medidas angulares y relación entre ellas.
- Técnica 1: Conversión de medidas angulares.

Una vez que ha quedado de manifiesto en la sesión anterior la necesidad de medir ángulos para calcular distancias, se van a estudiar las diferentes unidades de medida de ángulos, el grado sexagesimal y el radián, y la relación que existe entre ellas para poder realizar la conversión de unidades. Para terminar, los alumnos construirán por grupos un teodolito vertical casero para que aprendan una manera de medir ángulos en el mundo real. El teodolito se puede construir con un transportador de ángulos, un tubo fino como, por ejemplo, el de un bolígrafo, celo, hilo y un objeto que actúe como plomada. Cuando lo terminen pueden intentar utilizarlo para calcular, por ejemplo, la altura del aula con ayuda también de un metro.

Sesión 3: Problemas de resolución de triángulos rectángulos I.

Contenidos de la sesión: - Campo de problemas 1: Problemas de resolución de triángulos rectángulos. - Técnica 5: Resolución de triángulos rectángulos.

En esta sesión los alumnos realizarán por grupos problemas de resolución de triángulos rectángulos para seguir aprendiendo a través de la resolución de problemas y consolidar el conocimiento de la técnica.

Sesión 4: Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º e identidades trigonométricas.

Contenidos de la sesión: - Técnica 3: Utilizar las definiciones de las razones trigonométricas. Ejs. 11 y 12. - Tecnología 3: Demostraciones de las relaciones trigonométricas fundamentales. - Técnica 2: Relaciones trigonométricas fundamentales.

En la cuarta sesión descubrirán más conocimientos sobre las razones trigonométricas: hallarán las razones de los ángulos de 30º, 45º y 60º y demostrarán las relaciones trigonométricas fundamentales. Después aplicarán estas identidades en la resolución de los ejercicios de la Técnica 2.

Sesión 5: Problemas de resolución de triángulos rectángulos II.

Contenidos de la sesión: - Campo de problemas 1: Problemas de resolución de triángulos rectángulos. - Técnica 5: Resolución de triángulos rectángulos.

En esta sesión terminarán los problemas de resolución de triángulos rectángulos, centrándose principalmente en los problemas de doble observación. En el problema 10 se introducen este tipo de problemas y tendrán que realizar mediciones desde el patio del instituto con los teodolitos construidos en la sesión 2 y hallar la altura de un edificio real.

Sesión 6: Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera y reducción al primer cuadrante.

Contenidos de la sesión:

- Tecnología 2: Razones trigonométricas (ampliación)
- Técnica 3: Utilizar las definiciones de las razones trigonométricas. Ejs. 13 y 14.
- Tecnología 4: Demostraciones de las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, que difieren en 180º y que suman 360º.
- Técnica 4: Reducción al primer cuadrante.

En la sexta sesión se definen las razones trigonométricas para cualquier ángulo y los alumnos estudian su signo y su crecimiento o decrecimiento en cada cuadrante. También descubren la técnica de la reducción al primer cuadrante y la aplican en los ejercicios de la Técnica 4. Esta sesión será en el aula de informática para que puedan manipular los applets de GeoGebra de la circunferencia goniométrica y de la reducción al primer cuadrante.

Sesiones 7 y 8: Problemas de resolución de triángulos no rectángulos.

Contenidos de la sesión:

- Campo de problemas 2: Problemas de resolución de triángulos no rectángulos.
- Tecnología 5: Estrategia de la altura.
- Técnica 5: Resolución de triángulos no rectángulos.

En estas sesiones realizarán los problemas de resolución de triángulos no rectángulos. También se les presentará una herramienta para que puedan comprobar las soluciones de los ejercicios que realicen de manera individual. Se trata de este applet de GeoGebra en el que pueden comprobar las soluciones de las resoluciones de triángulos para cualesquiera sean los elementos conocidos del triángulo a resolver: https://www.geogebra.org/m/cbx5dUeC

Sesión 9: Problemas de cálculo de longitudes, perímetros y áreas y repaso del resto.

Contenidos de la sesión: - Campo de problemas 3: Cálculo de longitudes, perímetros y áreas. - Contenidos anteriores.

En la novena sesión, se realizarán los problemas correspondientes al segundo campo de problemas, así como también se deja tiempo para repasar el resto de contenidos, corregir ejercicios no hechos en clase o dar algo de holgura por si no ha dado tiempo a dar todos los contenidos en las sesiones previas.

Sesión 10: Repaso antes de la prueba escrita.

Esta sesión se dedicará a repasar los contenidos de cara al examen y resolver las dudas que planteen los alumnos que les han podido surgir al estudiar esta unidad.

Sesión 11: Prueba escrita.

Realización de la prueba escrita que se detalla en la sección *I. Sobre la evaluación*.

Sesión 12: Comunicación de resultados de la prueba y aprovechamiento.

En esta última sesión se entregará a los alumnos la prueba corregida y con feedback y se pondrá en común su resolución para que todos aprendan de los errores cometidos.

I. Sobre la evaluación.

En esta sección, se diseña la prueba escrita que evalúa el aprendizaje realizado por los alumnos y se analiza cada pregunta según los aspectos del conocimiento de los alumnos que se pretenden evaluar con ella, las respuestas esperadas y los criterios de calificación.

I.1. Prueba escrita.

La siguiente prueba escrita está diseñada para tener una duración aproximada de una hora y una puntuación sobre 10. Los tres primeros ejercicios de la prueba están pensados para resolverlos sin calculadora y los cuatro últimos con calculadora.

1) (1 punto) Expresa todos los ángulos de un triángulo isósceles tanto en grados como en radianes sabiendo que su ángulo desigual mide: a) $\pi/6\,rad$ b) $120°$
2) (0.75 puntos) Escribe la medida de los tres lados de un triángulo de manera que formen un triángulo rectángulo y calcula las razones trigonométricas del ángulo menor del triángulo.
3) Responde a las siguientes cuestiones:
   a) (0.5 puntos) Demuestra la siguiente igualdad:
   $$(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$$
   b) (1.25 puntos) ¿Cuántos ángulos entre $0°$ y $360°$ tienen como tangente $2\sqrt{10}/3$? ¿En qué cuadrantes se encuentran y cuál es la relación entre ellos? Calcula el seno y el coseno de cada uno de ellos.
   c) (1 punto) Encuentra todos los ángulos entre 0 y 2π radianes que verifican la ecuación $2\cos x \tan x = -\sqrt{2}$.
4) La nueva tirolina de Fiscal tiene una longitud de $2036\ m$ y $400\ m$ de desnivel.
   a) (0.5 puntos) Calcula el ángulo de inclinación que forma la tirolina con la horizontal.
   b) (0.5 puntos) Calcula el porcentaje de pendiente e interpreta el resultado.
5) (1.5 puntos) Desde un punto a la orilla del río Gállego se observa con un ángulo de $60°$ a un grupo de personas haciendo puénting. Cuando se tiran del puente, el punto más bajo al que llegan se observa con un ángulo de $19°$. Si la caída es de 20 metros, ¿a qué altura se quedan sobre el nivel del suelo? ¿A qué distancia nos encontramos de la vertical de la caída?
6) Resuelve estos tres problemas en los que el observador se sitúa en el mismo lugar:
   a) (0.5 puntos) Desde un punto A en lo alto de un acantilado se divisa un barco B bajo un ángulo de depresión de $7°$ con respecto a la horizontal. Si el barco está situado a $0.54\ km$ de la base del acantilado, calcula la altura del acantilado y la distancia $\overline{AB}$.
   b) (0.5 puntos) Desde el mismo punto A, se observa con un ángulo de elevación de $55°$ un globo aerostático C que vuela a 560 metros de altura sobre el nivel del mar. Calcula la distancia $\overline{AC}$.
   c) (1 punto) Si el ángulo $\widehat{CAB}$ mide $45°$, calcula la distancia $\overline{BC}$ entre el barco y el globo aerostático.
7) (1 punto) Calcula el perímetro y el área de un rombo sabiendo que un ángulo mide $118°$ y la diagonal menor mide $34\ cm$.

I.2. Aspectos del conocimiento de los alumnos sobre la trigonometría que se pretenden evaluar con cada pregunta.

Pregunta 1

- ➢ Técnica 1: Conversión de medidas angulares.
- ❖ Tecnología 1: Medidas angulares y relación entre ellas.
- ✓ Est.MAAC.3.1.1., Est.MAAC.3.2.1.

Pregunta 2

- ➢ Técnica 3: Utilizar las definiciones de las razones trigonométricas.
- ❖ Tecnología 2: Razones trigonométricas.
- ✓ Est.MAAC.3.1.1.

Pregunta 3

- ➢ Técnica 2: Relaciones trigonométricas fundamentales.
- ➢ Técnica 4: Reducción al primer cuadrante.
- ❖ Tecnología 2: Razones trigonométricas.
- ❖ Tecnología 4: Demostraciones de las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, que difieren en 180º y que suman 360º.
- ✓ Est.MAAC.3.1.1.

Pregunta 4

- Campo de problemas 1: Resolución de triángulos rectángulos. (1.1)
- ➢ Técnica 5: Resolución de triángulos rectángulos.
- ✓ Est.MAAC.3.1.1., Est.MAAC.3.2.1., Est.MAAC.3.2.2.

Pregunta 5

- Campo de problemas 1: Resolución de triángulos rectángulos. (1.2)
- ➢ Técnica 5: Resolución de triángulos rectángulos.
- ✓ Est.MAAC.3.1.1., Est.MAAC.3.2.1, Est.MAAC.3.2.2.

Pregunta 6

- Campo de problemas 1: Resolución de triángulos rectángulos. (1.1)
- Campo de problemas 2: Resolución de triángulos no rectángulos.
- ➢ Técnica 5: Resolución de triángulos rectángulos.
- ➢ Técnica 6: Resolución de triángulos no rectángulos.
- ❖ Tecnología 5: Estrategia de la altura.
- ✓ Est.MAAC.3.1.1., Est.MAAC.3.2.1, Est.MAAC.3.2.2.

Pregunta 7

- Campo de problemas 3: Cálculo de longitudes, perímetros y áreas.
- Técnica 5: Resolución de triángulos rectángulos.
- Est.MAAC.3.1.1., Est.MAAC.3.2.1, Est.MAAC.3.2.2., Est.MAAC.3.2.3.

I.3. Respuestas esperadas en cada pregunta.

A continuación, se describen las respuestas que se esperan en cada pregunta en función del conocimiento de los alumnos, tanto las respuestas correctas como los posibles errores que podrían cometer.

Pregunta 1

a) Si el ángulo desigual mide $\pi/6\,rad$.

Primero, se calculan los ángulos iguales: $\frac{\pi}{6}\,rad + 2\mathrm{x} = \pi\,rad \Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{6}\,rad \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{5\pi}{12}\,rad$. Y después, se convierten los radianes en grados: $\frac{\pi}{6}\,rad \cdot \frac{180°}{\pi\,rad} = 30°$ y $\frac{5\pi}{12}\,rad \cdot \frac{180°}{\pi\,rad} = 75°$.

La solución es $\frac{\pi}{6}\,rad, \frac{5\pi}{12}\,rad, \frac{5\pi}{12}\,rad$ en radianes y $30°, 75°, 75°$ en grados.

b) Si el ángulo desigual mide 120º.

Primero, se calculan los ángulos iguales: $120° + 2\mathrm{x} = 180° \Rightarrow 2x = 60° \Rightarrow \mathrm{x} = 30°$. Y después, se convierten los grados en radianes: $120° \cdot \frac{\pi\,rad}{180°} = \frac{2\pi}{3}\,rad$ y $30° = \frac{\pi}{6}\,rad$.

La solución es $120°, 30°, 30°$ en grados y $\frac{2\pi}{3}\,rad,\ \frac{\pi}{6}\,rad,\ \frac{\pi}{6}\,rad$ en radianes.

Otras respuestas correctas que se esperan:

- Convertir primero el ángulo conocido, calcular después con la nueva unidad los ángulos iguales y por último convertir estos.
- Convertir los ángulos iguales mediante la propiedad de que los ángulos de un triángulo suman 180º o $\pi\,rad$ después de convertir el ángulo desigual en lugar de con la equivalencia entre grados y radianes.
- Conocer ya que $\pi/6$ radianes son $30°$ sin necesidad de realizar cálculos.
- Dar las soluciones anotando los ángulos en un dibujo.

Errores que podrían cometer:

- Utilizar distintas unidades en la misma ecuación.
- Utilizar al revés la relación entre unidades al hacer la conversión o no recordarla bien.
- Errores aritméticos o algebraicos.

Pregunta 2

En primer lugar, hay que construir un triángulo rectángulo. Para ello se escoge la medida de dos de los lados y se calcula el tercero utilizando el teorema de Pitágoras. Después, hay que calcular las razones trigonométricas del ángulo menor. Se puede razonar que el ángulo menor es el que forma la hipotenusa con el cateto mayor de diferentes maneras: argumentando que el ángulo menor es el de menor seno o el de mayor coseno y utilizando sus definiciones o simplemente con un dibujo del triángulo. A continuación, se calculan las razones trigonométricas del ángulo utilizando sus definiciones:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}};\ \cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}};\ \tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Errores que podrían cometer:

- Escoger los tres lados del triángulo rectángulo arbitrariamente.
- Confundir el ángulo menor.
- Confundir las definiciones de las razones trigonométricas o los lados del triángulo.

Pregunta 3

a) $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha +$ $+\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \stackrel{\star}{=} 1 + 1 = 2.$ En $\stackrel{\star}{=}$ también podrían responder $2\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos^2\alpha = 2(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2$.

b) Para cada número real existen dos ángulos entre 0º y 360º cuya tangente tiene ese valor. Como es un número positivo, estos dos ángulos se encuentran en el primer y el tercer cuadrante. La relación entre los dos ángulos es que se diferencian en 180º o, equivalentemente, que $\alpha' = 180º + \alpha$. Para calcular el seno y el coseno de los ángulos, hay que plantear un sistema de ecuaciones mediante las relaciones trigonométricas fundamentales.

$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2\sqrt{10}}{3} \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

Por la primera ecuación, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{3}\cos\alpha$. Sustituyendo esto en la segunda ecuación, $\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$. Si resolvemos esta ecuación resulta que $\cos\alpha = \frac{3}{7}$. Y, por lo tanto, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$.

Para el ángulo del primer cuadrante, seno y coseno son positivos: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ y $\cos\alpha = \frac{3}{7}$. Para el ángulo del tercer cuadrante, seno y coseno son negativos: $\operatorname{sen}\alpha' = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$ y $\cos\alpha' = -\frac{3}{7}$.

c) $2\cos x\tan x = -\sqrt{2} \Rightarrow 2\operatorname{sen} x = -\sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Como sabemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, una solución es $x = -\frac{\pi}{4}\ rad$. Existe otro ángulo que tiene el mismo seno que $-\frac{\pi}{4}$, está en el tercer cuadrante y se calcula como $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}\ rad$. Para resolver este ejercicio se espera que los alumnos dibujen los ángulos sobre la circunferencia goniométrica.

Errores que podrían cometer:

- No recordar bien las relaciones trigonométricas fundamentales.
- Confundir los signos de las razones trigonométricas según el cuadrante.
- Confundir o aplicar mal las relaciones de la reducción al primer cuadrante.
- No tener en cuenta los signos negativos.
- No recordar que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- No utilizar radianes en el apartado c).
- Errores aritméticos o algebraicos.

Pregunta 4

a) El ángulo de inclinación α cumple $\operatorname{sen}\alpha = \frac{400}{2036} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}\frac{400}{2036} = 11.33°$.

b) $\tan\alpha = \tan 11.33° = 0.2004$. El porcentaje de pendiente es del $20.04\,\%$, es decir, por cada 100 metros recorridos horizontalmente se descienden 20.04 metros.

Otra respuesta esperable es que hallen el cateto desconocido y calculen la pendiente dividiendo el cateto opuesto entre el cateto contiguo. También puede ser que den el ángulo en radianes o que redondeen a un número distinto de decimales.

Errores que pueden cometer:

- Interpretar mal el problema, confundir los datos del enunciado, no entender lo que se pregunta.
- Aplicar una razón trigonométrica no adecuada o de manera incorrecta.
- Interpretar mal la solución.

Pregunta 5

Tras hacer un dibujo de la situación e identificar las dos incógnitas que nos preguntan (aquí h y x, respectivamente), se plantea un sistema de ecuaciones de este tipo:

$$\begin{cases} \tan 19° = \dfrac{h}{x} \\ \tan 60° = \dfrac{20+h}{x} \end{cases}$$

Por la primera ecuación, $h = x \tan 19°$. Sustituyendo en la segunda, $x \tan 60° = 20 + x \tan 19° \Rightarrow x = 20/(\tan 60° - \tan 19°) = 14.41\ m$. Y, por lo tanto, $h = 4.96\ m$

Solución: Se quedan a $4.96\ m$ del nivel del suelo y nos separan $14.41\ m$ de la vertical de la caída.

Errores que pueden cometer:

- Interpretar mal el problema, confundir los datos del enunciado, no entender lo que se pregunta, representar mal la situación.
- Aplicar una razón trigonométrica no adecuada o de manera incorrecta.
- Errores aritméticos o algebraicos.

Pregunta 6

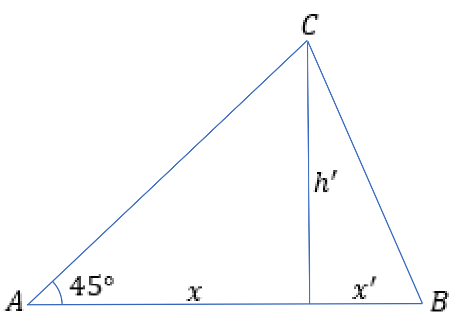
En cada apartado hay que representar la situación descrita en el enunciado y calcular las distancias pedidas mediante resolución de triángulos:

a) La altura del acantilado es $h = 540 \tan 7° = 66.30\ m$.

La distancia desde A hasta el barco es $\overline{AB} = 540/\cos 7° = 544.06\ m$.

b) La distancia desde A hasta el globo es $\overline{AC} = (560 - h)/\operatorname{sen} 55° = 602.70\ m$.

c) Dibujamos el triángulo ABC, trazando una de sus alturas para resolverlo:



Con los datos que conocemos, podemos resolver cada triángulo rectángulo por separado y obtener finalmente la distancia del barco al globo, $\overline{BC}$:

$$h' = \overline{AC}\,\mathrm{sen}\,45° = 426.17\ m$$

$$x = \overline{AC}\cos 45° = 426.17\ m$$

$$x' = \overline{AB} - x = 117.89\ m$$

$$\overline{BC} = \sqrt{h'^2 + x'^2} = 442.18\ m$$

Errores que pueden cometer:

- Interpretar mal el problema, confundir los datos del enunciado, no entender lo que se pregunta, representar mal la situación.
- Aplicar una razón trigonométrica no adecuada o de manera incorrecta.
- No tener en cuenta la altura h del acantilado en el apartado b).
- Errores aritméticos o algebraicos.

Pregunta 7

Tras representar el rombo, se calcula por resolución de triángulos el lado y la diagonal mayor, que son los datos que faltan para poder hallar el perímetro y el área. Los lados miden $l = 17/\cos 59° = 33\ cm$, luego el perímetro es $P = 4l = 132\ cm$. Calculamos ahora la diagonal mayor: $\frac{D}{2} = 17\tan 59° \Rightarrow D = 34\tan 59° = 56.6\ cm$. Luego el área es $A = \frac{Dd}{2} = 961.95\ cm^2$.

Errores que pueden cometer:

- Confundir los datos del enunciado, representar mal la situación.
- No recordar la fórmula del área del rombo.
- Aplicar una razón trigonométrica no adecuada o de manera incorrecta.
- Hacer los cálculos con el ángulo dado completo en lugar de con la mitad.
- Errores aritméticos o algebraicos.

I.4. Criterios de calificación.

Para corregir el examen se va a emplear el modelo de tercios, un modelo de penalización de errores creado por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Según este modelo, hay que distinguir las tareas necesarias para resolver un ejercicio en tareas principales, tareas auxiliares específicas y tareas auxiliares generales. A la hora de calificar, el conjunto de errores en las tareas auxiliares solo puede penalizar hasta el 67% de la puntuación y los errores en las tareas principales pueden hasta el 100%. Dentro de las tareas auxiliares, los errores en las tareas auxiliares generales solo pueden penalizar hasta el 33% de la calificación y las específicas hasta el 67%.

Para finalizar, se presenta a continuación la división de las tareas para cada pregunta de la prueba escrita:

Pregunta 1

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Conversión de medidas angulares.

Tareas auxiliares (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

- Utilizar la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo para calcular los ángulos de un triángulo isósceles conociendo el ángulo desigual.

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Operaciones aritméticas.
- Resolución de ecuaciones.

Pregunta 2

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Cálculo de las razones trigonométricas.

Tareas auxiliares (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

- Utilizar el teorema de Pitágoras para obtener las medidas de un triángulo rectángulo.

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Operaciones aritméticas.
- Resolución de la ecuación.

Pregunta 3a

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Demostrar la igualdad utilizando la primera relación fundamental.

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Operaciones aritméticas.

Pregunta 3b

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Conociendo la tangente, identificar los cuadrantes en los que se encuentran sus ángulos y la relación existente entre ellos. (30%)
- Calcular el seno y el coseno de cada ángulo. (70%)

Tareas auxiliares (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

- Plantear el sistema de ecuaciones con las relaciones trigonométricas fundamentales.

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Operaciones aritméticas.
- Resolución del sistema de ecuaciones.

Pregunta 3c

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Utilizar las relaciones de la técnica de reducción al primer cuadrante para hallar los ángulos que cumplen la ecuación dada.

Tareas auxiliares (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

- Utilizar la segunda relación fundamental. (32%)
- Utilizar radianes. (10%)
- Conocer que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (25%)

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Operación aritmética.
- Resolución de la ecuación, despejar $\operatorname{sen} x$.

Pregunta 4a

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Interpretar el enunciado, representar la situación, identificar incógnitas.
- Seleccionar y utilizar correctamente la razón trigonométrica adecuada para calcular el ángulo de inclinación.

Tareas auxiliares (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

- Utilizar y calcular la razón trigonométrica inversa para calcular el ángulo.

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Operación aritmética.

Pregunta 4b

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Interpretar el enunciado, representar la situación, identificar incógnitas.
- Calcular la tangente del ángulo y la pendiente.
- Interpretar el resultado de la pendiente. (40%)

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Operaciones aritméticas.

Pregunta 5

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Interpretar el enunciado, representar la situación, identificar incógnitas.
- Plantear el sistema de ecuaciones para hallar la altura y la distancia pedidas.

Tareas auxiliares (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

- Calcular razones trigonométricas.

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Operaciones aritméticas.
- Resolver el sistema de ecuaciones.

Pregunta 6a y 6b

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Interpretar el enunciado, representar la situación, identificar incógnitas.
- Seleccionar y utilizar correctamente las razones trigonométricas adecuadas para calcular las distancias requeridas.

Tareas auxiliares (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

- Calcular razones trigonométricas.

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Operaciones aritméticas.
- Resolver las ecuaciones.

Pregunta 6c

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Interpretar el enunciado, representar la situación, identificar la incógnita.
- Emplear la estrategia de la altura y seleccionar y utilizar correctamente las razones trigonométricas adecuadas para calcular la distancia requerida.

Tareas auxiliares (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

- Calcular razones trigonométricas.

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Resolver las ecuaciones.
- Operaciones aritméticas.

Pregunta 7

Tareas principales (penalización hasta el 100% y dejar de corregir):

- Interpretar el enunciado y representar la situación.
- Calcular el perímetro y el área.

Tareas auxiliares (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

Tareas auxiliares específicas (penalización hasta el 67% y seguir corrigiendo):

- Hallar el lado y la diagonal mayor mediante resolución de triángulos.

Tareas auxiliares generales (penalización hasta el 33% y seguir corrigiendo):

- Resolver las ecuaciones.
- Operaciones aritméticas.

J. Sobre la bibliografía y páginas web

Alcaide, F., Pérez, J. L., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., y Donaire, J. J. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4 ESO. Savia.* SM.

Benítez, S. B., y Benítez, L. M. (2014). La enseñanza a través de la resolución de problemas. Una experiencia de clase. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1215-1224). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5916/

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 1*(2), 1-10.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *19*(2), 221-266. Recuperado de https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Colera, J., Oliveira, M. J., Gaztelu, I., y Colera, R. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 4.* Madrid, España: Anaya.

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa*, (24), 23-29. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/23130/

Fiallo, J., Camargo, L., y Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Integración: Temas de matemáticas, 31*(2), 181-205. Recuperado de https://revistas.uis.edu.co/index.php/revistaintegracion/

Flores, F. L. (2008). *Historia y didáctica de la Trigonometría.* Jaén, España: www.publicatuslibros.com.

Gairín, J. M., Muñoz, J. M., y Oller, A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261-274). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/idoneidad.html

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En J. D. Godino (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Maestros* (pp. 5-154). Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/

López, G., y Acuña, S. (2011). Aprendizaje cooperativo en el aula. *Inventio, la génesis de la cultura universitaria en Morelos*, *7*(14), 29-38.

Massa, M. R. (2003). Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica. *Biaix, 21*, 4-9.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la ESO y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*, *105*, 2 de junio de 2016, 12640-13458.

Pons, R. M., González-Herrero, M. E., y Serrano, J. M. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido. *Anales de psicología*, *24*(2), 253-261. Recuperado de https://revistas.um.es/analesps/article/view/42761

Quintero, R. (2015). *La Trigonometría: Origen y Desarrollo* (tesis de maestría). Universidad de Panamá.

Ramos, F., y Latasa, M. (2021). Capítulo 8: Trigonometría. En *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 4ºB de ESO* (pp. 206-232). Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4B/08_Trigonometria.pdf

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la ESO y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, 3*, 3 de enero de 2015, 169-546.

Sánchez, A. A. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs. *Edutec. Revista Electrónica De Tecnología Educativa*, (31). doi: https://doi.org/10.21556/edutec.2010.31.443

Torres, M. M. (2006). Aprendizaje significativo a través de la resolución de problemas. *Aldadis.net. La revista de educación,* (10), 5-8. Recuperado de http://aldadis.net/revista10/documentos/03.pdf