Trabajo Fin de Máster

Nociones generales de funciones.
Una propuesta para 4º Educación Secundaria Obligatoria.

General notions of functions.
A proposal for 4º ESO (10º degree).

Autor

Eduardo Quintana García

Directores

Elena Gil Clemente

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas
FACULTAD DE EDUCACIÓN
2021

Resumen en español

Las funciones son uno de los objetos matemáticos que más importancia han cobrado a lo largo de la historia. Sirven para modelizar comportamientos y dependencias entre magnitudes y su estudio supone una de las grandes ramas de las matemáticas, el análisis. En este trabajo se estudia como introducir este objeto y sus características generales en el curso de 4º de ESO. Para ello primero se hablará del estado de la enseñanza analizando como se trata el tema “funciones y gráficas” en tres libros de texto de matemáticas. Después se presentara una propuesta didáctica para llevar al aula en la que sea el alumno quien, a través de la resolución de problemas, vaya trabajando las distintas herramientas propias del análisis de gráficas y funciones como el estudio de la continuidad, la monotonía, los extremos, las funciones definidas a trozos y la tasa de variación media. Esta propuesta busca dar una razón de ser a los objetos y conceptos matemáticos a la vez que cuida la manera de presentarlos, de forma que facilite el paso a unas matemáticas más avanzadas y un estudio más riguroso en bachiller.

Resumen en ingles

Functions are one of the most important mathematical objects. They serve to model behaviours and dependencies between magnitudes. Their study is one of the big branches of mathematics, mathematical analysis. In this master’s thesis, we study how to introduce functions and their general characteristics in the 4th year of secondary school (10º degree). In approaching this, we will first discuss the state of teaching, we’ll analyze how the topic “ functions and graphs ” is treated in three mathematics textbooks. Afterwards, we will present a didactic proposal in which it students who will work through problem solving. They will work with different tools (such that the study of continuity, monotony, the extremes, the piecewise functions, and the average rate of change) to analize graphs and functions. This proposal seeks to give mathematical objects and concepts a reason for being. At the same time, it takes care of the way of presenting them, in a way that facilitates the transition to more advanced mathematics and a more rigorous study in high school.

Índice

Capítulo 1: Introducción

El presente Trabajo final del Máster de Profesorado de Secundaria aborda la introducción y estudio de propiedades generales de las funciones y gráficas en la asignatura 'Matemáticas académicas de 4º de ESO". Busca exprimir al máximo las conexiones que tenga este objeto propio del análisis con otras ramas de las matemáticas como el álgebra y, sobre todo, con la utilidad que las funciones tienen como herramienta para modelar situaciones reales.

El poder comprender la correlación que se da lugar en los procesos funcionales enriquece la capacidad de analizar situaciones del día a día que una persona puede enfrentarse como adulto, es por esto que en la etapa secundaria obligatoria se estudia, no solo con el fin de conocerlo matemáticamente de cara a futuros estudios científicos, sino con el fin de asimilar su funcionamiento y comportamiento, permitiendo así hacer un análisis cuantitativo y cualitativo de lo que nos rodea, permitiendo estimar y prever situaciones.

Este trabajo está en sintonía pro tanto con la ley vigente (Orden ECD/489/2016), que especifica que la acción didáctica debe buscar el desarrollo en el alumno de competencias clave, definidas como las capacidades de poner en práctica de forma integrada conocimientos, habilidades, aptitudes, actitudes y rasgos de la personalidad que permitan a un individua afrontar exitosa y eficazmente situaciones diversas para la realización personal, la inclusión social y la vida laboral. Una de estas competencias clave es la competencia matemática, consistente en las aptitud para alcanzar razonamientos bien fundados, saber hace uso de las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano, así como identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo. El razonamiento matemático potencia la estructuración mental, favoreciendo un pensamiento ordenado, y dando la capacidad de crear y reconocer argumentos fundamentados a la hora de tomar y justificar decisiones.

Es por esto que la asignatura de matemáticas busca abordar aquellos contenidos que suponen la base del conocimiento de la disciplina, ya que son estos objetos junto a su comprensión y razonamiento los que contribuye al desarrollo intelectual de los individuos más allá del mero conocimiento de aritmética, geometría, análisis. . . . Uno de estos pilares de las matemáticas son las relaciones funcionales.

Tras el análisis del estado de la enseñanza-aprendizaje de este objeto matemático, se presentará una propuesta didáctica que se espera suponga un desarrollo del razonamiento matemático en los alumnos, trabajando capacidades como la visión espacial y la abstracción y que a la vez despierte interés acerca de las matemáticas mostrando la utilidad de las mismas.

1.1. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

Las funciones son un objeto matemático perteneciente a la rama del análisis. En el currículo español este objeto tiene su propio bloque de contenido (el bloque IV), quedando clara así la importancia que se le da su estudio. En este trabajo nos centraremos en el tema que habitualmente se denomina "Funciones y Gráficas" donde se introduce y desarrolla el concepto de función y sus características generales. Este trabajo no abordará el tema generalmente llamado "Funciones elementales" donde se trabajan detalladamente ejemplos concretos de funciones, ya que el estudio de funciones como la cuadrática, exponencial… debe tomar un enfoque distinto al estudio general, diferenciando de forma clara el concepto de función de casos particulares de funciones.

Los contenidos que incluye el currículo de la asignatura "Matemáticas académicas de 4º de ESO" correspondientes introducción y el estudio general de funciones son los siguientes:

– Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión algebraica.

– Análisis de resultados.

– La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

Estos contenidos se ven especificados mediante los estándares de aprendizaje, que detallan qué contenido y herramientas se espera que el alumno aprenda durante 4º de ESO:

– Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

– Comprender el concepto de función.

– Expresar una función de diferentes modos

- Obtener una tabla a partir de la gráfica de una función, y viceversa.
- Hallar el dominio y recorrido de una función, dadas su gráfica o su expresión algebraica.
- Trabajar con funciones definidas a trozos.
- Determinar si una función es continua o discontinua a través de su gráfica.
- Determinar el crecimiento o decrecimiento de una función y obtener sus máximos y mínimos.
- Calcular la tasa de crecimiento y la tasa de variación media de una función.

En los libros que se van a analizar posteriormente aparecen también otros contenidos como

- Distinguir las simetrías de una función.
- Reconocer si una función es periódica.
- Conocer los distintos tipos de traslaciones de funciones.

que no aparecen en el currículo oficial de Aragón. Sin embargo durante la propuesta que se presenta en este TFM no se van a tener en cuenta ya que se considera que son cualidades concretas de ejemplos concretos, y no características estudiables en funciones en general. Es decir, conceptos como la TVM o los máximos pueden observarse sobre cualquier función o gráfica, mientras que la simetría solo es aplicable a funciones pares o impares. Es por ello que de aparecer en un curso de 4º de ESO, este contenido formaría parte del tema de “funciones elementales” en alguna sección que verse acerca de las características de las funciones polinómicas.

La finalidad principal que presentan la asignatura “Matemáticas académicas de 4º de ESO” es formativa, es decir, la de ayudar a los estudiantes en el desarrollo cognitivo, y su capacidad de análisis y razonamiento, preparándolo asi para su salida de la enseñanza obligatoria, ya sea para la vida cotidiana como para sus futuros estudios.

Por otro lado, al tratarse de de una asignatura llamada “Matemáticas Académicas” y ser 4º de ESO el último curso de educación obligatoria, se espera ver en estas cierto nivel ya avanzado de rigor y precisión propios de unas matemáticas más maduras, adaptadas a formar alumnos que ya han pasado por un momento de elección de materias y han escogido enseñanzas académicas frente a las aplicadas. Este paso de las matemáticas escolares hacia las matemáticas académicas se ve motivado además por el nivel de madurez del alumnado, que ya se encuentran en una adolescencia mas cercana a la vida adulta que a la niñez. En 4º de ESO la materia toma un papel funcional y social de cara a poder dar salto a otros estudios superiores.

1.2. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

En este capítulo se busca explorar cómo se trabajan las funciones en un curso de Matemáticas Académicas de 4° de ESO. Para ello se analizará cómo se ha abordado dicho objeto matemático en distintos libros de textos correspondientes a la enseñanza secundaria española. tomados de las editoriales Santillana, Anaya y Bruño. Estos libros de texto pertenecen a leyes educativas anteriores a la actual, lo que nos servirá analizar cuales son sus enfoques en cuanto a la razón de ser de las funciones y la manera de abordar su estudio mediante distintos campos de problemas, técnicas y tecnologías, y poder compararlos con lo que esperaríamos ver acorde con el currículum actual. No se espera ver un fuerte enfoque competencial de la materia en estos textos que vamos a analizar, sino que se espera uno más centrado en el contenido disciplinar que en las habilidades que su estudio desarrolla.

Si bien hoy en día no es nada despreciable la cantidad de profesores de matemáticas que prescinden de libros de texto, estos suponen un importante referente a la hora de analizar qué contenido se imparte y cómo se lleva a cabo esta enseñanza de contenido matemático. Es por eso que en este capítulo buscaremos responder a la pregunta "¿Qué enseñanza sobre el objeto matemático se realiza habitualmente en los libros de texto?" refiriéndonos al tema de funciones de 4º de ESO.

Para el análisis de los textos se partirá del marco teórico del enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero & Font, 2007) y lo aprendido durante el máster de profesorado. Trataremos así de identificar los siguientes tipos de entidades entre los elementos que conforman las redes de objetos en cada uno de estos libros:

- *Definiciones*: en forma de frases que realizan la descripción de un concepto. Pueden tener más o menos formalidad, pueden ser dadas o creadas por el alumno y supone la *definición conceptual*.
- *Proposiciones*: *tecnologías* como enunciados y propiedades de los conceptos. Los cuales pueden estar explicados o validados con mayor o menor argumentación.
- *Lenguaje*: expresiones y representaciones gráficas o textuales que ayuden a la comprensión de un concepto u objeto, alimentando la *imagen conceptual* que los alumnos tengan del mismo.

- *Situaciones*: también conocidas como *razón de ser*. Son aplicaciones extra matemáticas que motivan y dan sentido a la definición de objetos.
- *Procedimientos*: algoritmos operaciones o *técnicas* que nuevamente pueden estar más o menos justificadas y argumentadas en base a tecnologías.

Procederemos analizando la secuencia didáctica que sigue cada uno de los libros y remarcando los momentos donde aparece alguno de los elementos mencionados, destacando cuáles son los elementos aparecidos y cuáles son sus carencias, tanto respecto al contenido del currículo, los aspectos relevantes acerca a las *razones de ser*, *técnicas* y *tecnologías*, como los *campos de problemas* que presenta cada libro.

Qué definiciones y significados se esperan ver

Acorde con el currículo vigente, y teniendo en cuenta que los contenidos que abarca no han variado mucho con el paso de los años, se espera que los libros de texto aborden los contenidos curriculares acerca de las funciones ya mencionados previamente.

Además, para evitar la creación de una imagen conceptual de las funciones construida mediante "parcheado", sino mediante construcción, se espera que los libros traten también:

- Cambios entre distintos sistemas de representación.
- Comprensión las múltiples naturalezas que puede tener el dominio de una función.
- Diferenciación entre extremo relativo y extremo absoluto.

En cuanto a la manera de presentar el contenido, se espera que la secuencia didáctica parta de una situación real que hagas las veces de *razón de ser* de las funciones como una herramienta para modelizar y analizar situaciones. Por otro, la *definición* que se espera debería involucrar la idea de asignación a cada valor de una magnitud el valor de otra, y las representaciones que se presenten sean enunciado, tabla, gráfica y expresión algebraica.

De cara a hablar de dominio se espera que se estudie por un lado la incomputabilidad de la expresión algebraica de una función remarcando el porque de la misma, y por otro se justifiquen dominios acotados por el significado y el contexto real que define una función, siendo posibles dominios $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{N}$ (esta última ligada a un enunciado y mediante una tabla de valores),$\ldots$.

Se espera además que se explique el concepto de función centrado e la forma que tiene su grafo, y cómo la expresión algebraica define las coordenadas del mismo. Siendo así un primer acercamiento hacia la comprensión de las ecuaciones y la geometría analítica.

Para una mejor comprensión del concepto de función se espera que los libros no se queden en mostrar únicamente ejemplos de funciones de dominio real sino que exploren casos más generales, apareciendo las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para el estudio de la continuidad. Esta se espera sea tratada como la ausencia de saltos en el trazo (o más formalmente, mencionando que es el grafo de un solo trazo), reconociendo estos saltos como valores no "esperados". Esta descripción serviría de andamiaje del razonamiento que dará lugar en un futuro al estudio de la continuidad con límites.

El crecimiento y decrecimiento de una función se espera que se aborde principalmente de una forma visual mediante la representación gráfica, pero también mediante el reconocimiento de patrones en funciones de dominio natural, o incluso razonando sobre expresiones algebraicas sencillas. Los máximos y mínimos relativos se espera se definan como puntos con mayor o menor valor que sus puntos cercanos y no únicamente como cambio de tendencia. El estudio de máximos y mínimos en 4º de la eso se espera que solo se aborde para funciones discretas, o continuas mediante su gráfica.

Además la observación de la monotonía debe justificar el cálculo de la variación media y la introducción de la fórmula para su calculo con el fin de estudiar cuantitativamente el crecimiento o decrecimiento de una función.

El uso de funciones definidas a trozos se espera que tenga su *razón de ser* de nuevo en situaciones reales.

Se espera que las propiedades de simetría y periodicidad además de ser analizadas gráficamente se trabajen con las formulas derivadas de la expresión algebraica y la comprensión de su significado. Por último, este mismo significado de la formula analítica y su correspondencia con el grafo serán la *tecnología* que justifiquen las traslaciones de funciones como una transformación de los ejes de coordenadas, tanto el X como el Y, aunque no se espera que se mencione la idea de composición de funciones.

Respecto a los campos de problemas que se esperan ver:

- Interpretación de gráficas que representan sucesos observables (buscándoles el significado de la forma que toman).

- Interpretación de gráficas sin contexto (señalando máximos, mínimos y crecimientos, o reconociendo discontinuidades de manera visual)

– Paso de tabla o enunciado a gráfica

– Estudio de dominios dada una expresión algebraica y según el contexto.

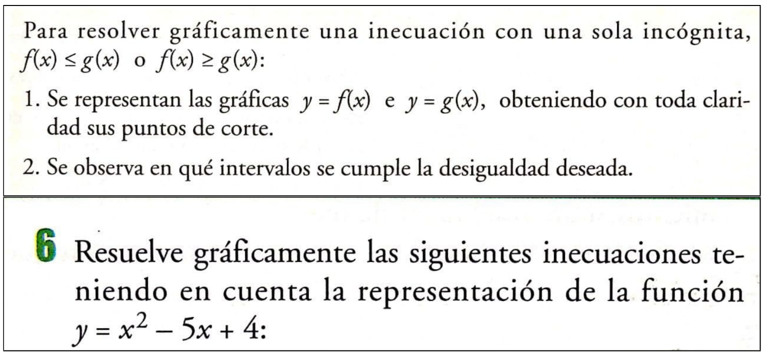
– Calculo de TVM y uso de la misma para comparar situaciones.

A continuación se presenta el análisis de los 3 libros de texto.

a) Anaya 2010

El libro de texto de la editorial Anaya (Colera, Oliveira, Gaztelu, & Martinez ,2010) que se analiza a continuación corresponde a la edición de 2010, es decir, ha sido editado bajo la legislación de la LOE de 2006. Se trata de un libro de texto para matemáticas de 4 ESO opción B (correspondientes a las actuales "Matemáticas Académicas") a nivel nacional.

Las funciones ocupan un bloque diferenciado en este libro, que se corresponde con los temas 4 y 5 (el primero dedicado al concepto de función, que será el que analizaremos, y el segundo al estudio de funciones elementales). Aparecen a continuación del bloque de Aritmética y Álgebra. Destacar que el tema 3 aborda las ecuaciones e inecuaciones, en el cual se utilizan funciones como rectas o parábolas a la hora de resolver gráficamente una inecuación.


Para resolver gráficamente una inecuación con una sola incógnita, $f(x) \leq g(x)$ o $f(x) \geq g(x)$:

1. Se representan las gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, obteniendo con toda claridad sus puntos de corte.
2. Se observa en qué intervalos se cumple la desigualdad deseada.

6 Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones teniendo en cuenta la representación de la función $y = x^2 - 5x + 4$:

Figura 1.1: Aparición de funciones en el tema de ecuaciones.

El libro de Anaya abre el bloque de Funciones con un ejemplo y una gráfica de un ejemplo basado en una situación real aunque no demasiado cercana al alumno

En una comarca hay una cierta especie de vegetal que se encuentra con frecuencia. Se ha estudiado la *cantidad media de ejemplares por hectárea* que hay a distintas *alturas*. El resultado se da en la gráfica siguiente:

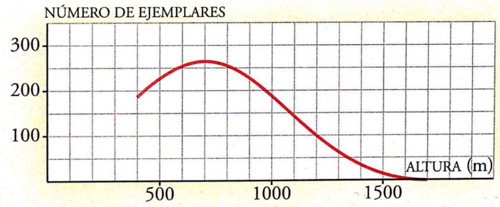


Figura 1.2: Primer ejemplo del tema de funciones.

Este ejemplo es la única *razón de ser* que se da antes de definir las funciones como la relación entre variable dependiente e independiente, sin detallar la naturaleza de dichas variables. Sin tomar más ejemplo que el gráfico anterior ni trabajar con nada expresable o computable, se definen los conceptos de recorrido y dominio y se dibujan sobre gráficas para alimentar la *imagen conceptual*.

A continuación el libro explica cómo representar funciones mediante gráficas, enunciados, tablas y expresiones algebraicas. No se ve mención de la expresión $(x, f(x))$ de coordenadas que definen una gráfica de una función. De cada representación muestra un único ejemplo excepto de expresiones algebraicas de la que se muestran formulas como el volumen de una esfera o otras tal vez desconocidas por el alumno como el aumento de una lupa.

Se presentan *problemas* de interpretación de gráficas y tablas y de evaluación de fórmulas que modelizan situaciones reales como la distancia de frenada en función de la velocidad o el periodo de un péndulo en función de su longitud.

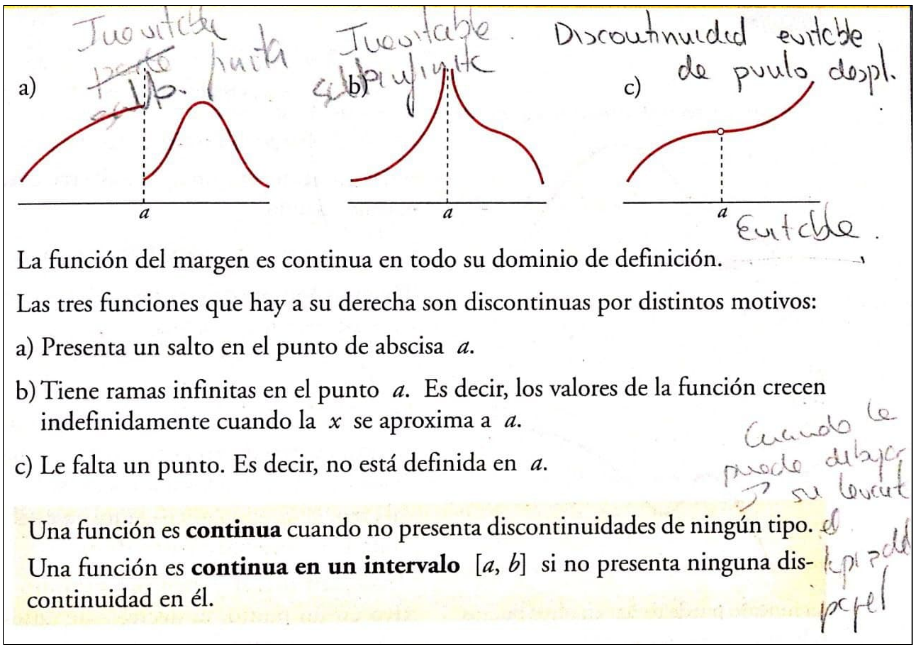
De cara a calcular el dominio usando la expresión algebraica, se dan las *técnicas* como $dom(\sqrt{x}) = (0, \infty)$ pero no se justifica el porque de la misma. Al dominio fruto del contexto del problema lo lama "voluntad de quien propone la función". Notar que las funciones que presenta este libro son todas con dominio $\mathbb{R}$ o intervalos de $\mathbb{R}$.

En la función $y = x^2$ podemos dar a x un valor cualquiera y obtendremos el correspondiente valor de y. Decimos que esta función **está definida en todo $\mathbb{R}$** o bien que su **dominio de definición es $\mathbb{R}$** o $(-\infty, +\infty)$.

Figura 1.3: Definición de dominio.

Se pierden las situaciones reales en los *problemas* de estudio de dominio, no apareciendo ningún problema que haga uso de contexto.

La continuidad se define después de presentar ejemplos de gráficas con discontinuidades sin contexto ni explicación detrás, sino una definición corta y poco clara, para definir posteriormente la continuidad como ausencia de discontinuidad. Destacar como se ve en la figura 1.4 que el ejemplar analizado presenta comentarios al margen escritos por un alumno donde explica lo que no se explica claramente en el libro. Esto muestra que, al menos en este caso, el libro da más importancia al contenido en forma de definición, que a la comprensión del mismo. Este último hecho da a entender que se trata de un libro que conserva gran parte del modelo docente de la enseñanza para la resolución de problemas.



La función del margen es continua en todo su dominio de definición.

Las tres funciones que hay a su derecha son discontinuas por distintos motivos:

a) Presenta un salto en el punto de abscisa a.

b) Tiene ramas infinitas en el punto a. Es decir, los valores de la función crecen indefinidamente cuando la x se aproxima a a.

c) Le falta un punto. Es decir, no está definida en a.

Una función es **continua** cuando no presenta discontinuidades de ningún tipo.

Una función es **continua en un intervalo** $[a, b]$ si no presenta ninguna discontinuidad en él.

Figura 1.4: Anotaciones a lápiz hechas por un alumno.

La definición de función creciente se hace únicamente sobre un ejemplo de una función en forma de gráfica continua, tratando la *definición* como un “porqué”. De esta manera se confunde la definición de la *propiedad* con la *argumentación* de la misma. Los máximos y mínimos se definen únicamente para funciones continuas tanto como puntos de mayor valor que puntos próximos como un cambio de crecimiento, mostrando mas énfasis en el segundo y sin aparecer diferenciación entre extremo relativo y absoluto. De nuevo se ve la importancia que el texto da a proporcionar herramientas al alumno para “solucionar” por encima de la necesidad de proporcionarle conocimientos para que comprenda los objetos.

La tasa de variación media (TVM) es definida mediante la fórmula del cociente de incrementos. Se introduce su importancia como una manera de medir la “varianza” de una función, sin explicar a qué se refiere con esto. En este punto el libro retoma las situaciones (razones de ser) reales en un *problema* de calculo de TVM donde una función representa la altura de una piedra que cae donde la TVM mide su velocidad.

Por último el libro de Anaya menciona la existencia de tendencias hablando de “ramas” sin haber definido qué son.

> Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarán lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.

Figura 1.5: Mención de tendencia y ramas.

Y finalmente define periodicidad después de mostrar una gráfica como ejemplo que representa la altura de un cestillo de una noria que gira. Los *problemas* que plantea son de reconocimiento de patrones y graficado de funciones periódicas a partir de una porción de gráfico dada.

El tema siguiente a este será el estudio de las funciones elementales como polinómicas radicales, exponenciales y logarítmicas, no volviéndose a utilizar las funciones en ningún otro punto del libro. Los temas de trigonometría y geometría analítica son también posteriores al tema de funciones, aunque en estos las funciones trigonométricas serán tratadas únicamente como operadores y las rectas como ecuaciones.

Conclusión

Como *puntos fuertes* destacan que define función como correlación genérica sin concretizar en valores numéricos reales. Utiliza funciones analíticas que modelizan situaciones reales. Expone gráficas donde se puedan observar las propiedades que menciona. Muestra un primer acercamiento al concepto de límite y ejemplo de movimiento periódico que resultará ser una función trigonométrica.

Como *puntos débiles*, la secuencia sitúa el estudio de funciones después del estudio de ecuaciones. No se menciona la expresión $(x, f(x))$. Solo trabaja ejemplos de funciones cuyos dominios son intervalos de $\mathbb{R}$.

No se hace mención a simetrías ni traslaciones de funciones. Tampoco aparecen funciones definida a trozos ni cambios de sistemas de representación.

Para concluir, se trata de un libro basado en el modelo de enseñanza para la resolución de problemas. El tema comienza contextualizando y dando una *razón de ser* al objeto función, pero esta se diluye conforme se ahonda en su estudio.

Si bien busca representar gráficamente para que el alumno alcance una mayor comprensión del cómo utilizar las *técnicas*, por lo general este libro no explica las *tecnologías* que justificarían el porque de que estas técnicas funcionen.

b) Santillana 2011

La edición de 2011 del libro de texto de la editorial Santillana (Escoredo, & Pérez, 2011) a analizar corresponde por fecha, al igual que el de Anaya, a la legislación de la LOE de 2006. De nuevo se trata de un libro de texto para matemáticas de 4 ESO opción B a nivel nacional.

Las funciones aparecen en los temas 9, 10 y 11, siendo los dos últimos dedicados al estudio de funciones elementales. El bloque de Funciones aparece a continuación de los bloques de Álgebra y Geometría, donde se trabaja con ecuaciones, funciones trigonométricas y geometría analítica, aunque se hace sin mencionar en ningún momento el concepto de función.

La editorial Santillana introduce las funciones destacando los conocimientos previos que deben tenerse, mencionando en qué momentos del libro se tratan estos conocimientos. Estos son la ecuación explicita de la recta, los puntos pertenecientes a una gráfica y simetrías y traslaciones. Tras esta presentación se define función como la relación entre dos magnitudes que denota X e Y y llama variable dependiente e independiente destacando la unicidad del valor y para cada valor x. Remarca esta última característica comparando gráficas de funciones con gráficas de curvas que no son funciones A partir de este momento las gráficas que se dibujen los ejes coordenados aparezcan nombrados como X e Y.

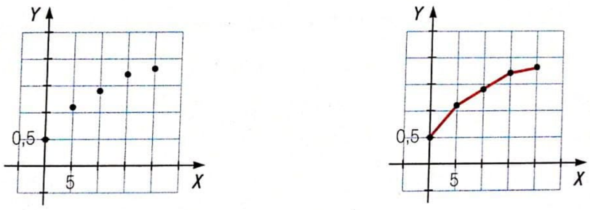
Los sistemas de representación como enunciado, expresiones algebraicas, tablas de valores y gráficas los presenta mediante un ejemplo. Los *problemas* que plantea son tanto de cambio de sistema de representación como de reconocimiento de funciones frente a gráficas o situaciones reales que no son funciones. Se menciona la expresión $(x, f(x))$ que define el gráfico de una función.

Destacar que antes de definir dominio, se remarca que a la hora de graficar una tabla de valores se debe justificar el completado de puntos. Presenta un ejemplo de paso de tabla a gráfica donde “unir puntos”, es decir, extender la función a un dominio continuo, tiene sentido. Deja la invención de un caso donde esto no se pueda hacer, es decir, donde el dominio sea discreto, como problema a resolver.

3 **Realiza la gráfica de la función definida por esta tabla de valores:**

Edad (años)	0	5	10	15	20
Estatura (m)	0,5	1,1	1,4	1,7	1,8

En el eje de abscisas marcamos los valores de la variable x, y en el eje de ordenadas, los de la variable y. Así, obtenemos los puntos de la gráfica.



Además, comprobamos si podemos unir los puntos. En este caso, los puntos se pueden unir porque, aunque no aparezcan los valores de las estaturas para todas las edades, en cualquier edad siempre habrá una estatura.

Figura 1.6: Extensión de dominio discreto a continuo.

Las *definiciones* de dominio y recorrido se introducen sin motivación (razón de ser) pero las *técnicas* de obtención del mismo sí se justifican mediante las propiedades de las operaciones división y raíz cuadrada.

De nuevo a partir de este punto los *problemas* que aparecen de estudio de dominios ya no representan situaciones reales que contextualicen el estudio de funciones con ninguna *razón de ser* intra matemática y extra matemática.

El libro plantea problemas de obtención del dominio de funciones presentadas con representaciones tanto gráficas, analíticas o textuales.

Las funciones definidas a trozos son presentadas como un caso particular de funciones pero se les da ninguna razón de ser ni se utilizan en otras secciones. El *campo de problemas* asociado que se plantea es la representación de funciones definida a trozos y la obtención de fórmulas a partir de gráficas. Al aparecer el tema de Funciones

Calcula el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

DOMINIO: La función no existe para $x = 0$, porque no podemos dividir entre cero. Como podemos dividir entre cualquier otro número, el dominio es todos los números reales menos el cero: Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

RECORRIDO: En esta función, la variable y nunca toma el valor 0, porque no hay ningún valor de x que cumpla que: $\dfrac{1}{x} = 0$. Como de esa división podemos obtener cualquier otro número, el recorrido es cualquier valor excepto el cero: Im $f = \mathbb{R} - \{0\}$

Figura 1.7: Problema descontextualizado.

y Gráficas después de Geometría Analítica se pueden plantear estos problemas. Sin embargo no se menciona en ningún momento que ecuación de la recta es una función.

Puntos de corte con los ejes, continuidad, crecimiento, simetría y periodicidad se engloban en una misma sección llamada “propiedades de funciones”. Por lo general todos estos términos aparecen únicamente definidos sin explicación ni justificación tras ellos.

Destacar que se define la continuidad como unicidad del trazo de una gráfica para posteriormente clasificar las discontinuidades en: inexistencia de valor y salto. Aparece la definición de función constante pero los extremos los define solo como puntos de cambio de la monotonía sin tener en cuenta posibles discontinuidades ni diferenciar entre relativo y extremo.

Aparecen *problemas* de interpretación de gráficas sin contexto, así como de interpretación de expresiones algebraicas.

Se definen sobre las fórmulas $f(X)$ las simetrías axial y central y la periodicidad. De nuevo sin contextualizar ningún ejemplo ni problema en situaciones reales.

Una **función** es **periódica** cuando los valores de $f(x)$ se repiten cada cierto intervalo.

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \dots = f(x + k \cdot T)$$

La amplitud, T, del intervalo es el **período**, siendo k un número entero.

Figura 1.8: Definición funciones periódicas.

En los temas siguientes se estudiarán algunas funciones elementales como polinómicas radicales, exponenciales y logarítmicas, y se dará paso al bloque de Estadística y probabilidad, no volviendo a utilizarse las funciones.

Conclusión

Como *puntos fuertes* destacar que relaciona el tema de funciones con otros temas del libro, creando así una *imagen conceptual* más amplia del objeto y dándole una *razón de ser* intra matemática muy fuerte. Muestra ejemplos de funciones con dominio discreto, y justifica la *tecnología* detrás del calculo de dominios de expresiones algebraicas.

Como *puntos débiles*, la secuencia del libro sitúa el estudio de funciones después del estudio de ecuaciones, incluso de geometría analítica. No aparece *razón de ser* para el estudio de funciones más allá de alguna aplicación intra matemática.

No se hace mención a tasa de variación media, traslaciones de funciones ni dominios de distinta naturaleza.

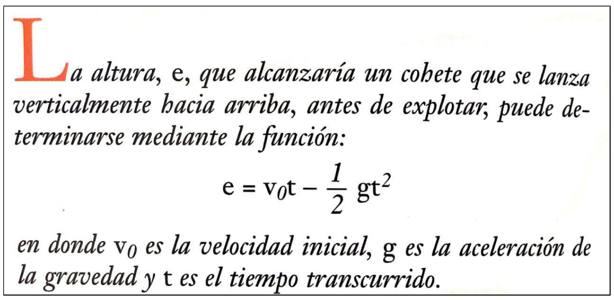
Para concluir, al introducir las funciones en un punto tan avanzado del temario, el libro de Santillana puede permitirse utilizar contenidos ya vistos en geometría analítica, permitiendo que el alumno obtenga una *imagen conceptual* más amplia de las funciones. Además, muestra justificaciones de algunas de las *técnicas* que presenta y plantea ejercicios donde el alumno pueda alcanzar conclusiones que el libro no explicita, acercándose así a un modelo de enseñanza a través de resolución de problemas, aunque no se ven indicios de un momento de institucionalización posterior al razonamiento de dichos ejercicios.

c) Bruño 1999

El libro de Bruño es algo más antiguo que los anteriores analizados. Su fecha corresponda con la ley LOGSE (En concreto las modificaciones de la LOGEP). También corresponde a la materia matemáticas de 4º ESO opción B, y es un libro de texto a nivel nacional.

El bloque de Funciones ocupa los temas 9 y 10. Se analizaremos el tema 9, siendo el 10 el correspondiente a los casos concretos de funciones exponenciales y trigonométricas. En los bloques anteriores se estudia Números, Álgebra y Geometría. En estos temas anteriores, a pesar de estudiarse a fondo ecuaciones y fórmulas trigonométricas, no se menciona el concepto función.

El bloque de Funciones se abre con un ejemplo de un caso real donde se modeliza la altura de un cohete. Aunque pareciera que está orientado a alumnos que tienen cierta soltura con el concepto de función, podemos considerar que se trata de una *razón de ser* de las funciones.


La altura, e, *que alcanzaría un cohete que se lanza verticalmente hacia arriba, antes de explotar, puede determinarse mediante la función:*

$$e = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

en donde v_0 *es la velocidad inicial,* g *es la aceleración de la gravedad y* t *es el tiempo transcurrido.*

Figura 1.9: Ejemplo que abre el tema.

De hecho la editorial Bruño en su libro de 4º de ESO no introduce las funciones mediante ningún tipo de definición. Comienza *definiendo* las funciones cuadráticas como aquellas donde la variable independiente aparece multiplicada por si misma y deduce, sin argumentar, que son aquellas de la forma $f(x) = ax^2$. Presenta su representación gráfica y la llama parábola. Los ejes aparecen nombrados como X e Y.

La definición de continuidad es claramente heredada de la definición formal de continuidad de funciones entre espacios normados.

> **Continuidad de una función**
>
> Una función es **continua** cuando, para pequeños incrementos de la variable independiente, se producen pequeños cambios de la variable dependiente. Su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Figura 1.10: Definición de continuidad.

Esta definición parece, junto a la definición de crecimiento y decrecimiento estricto,al margen de la página, dejando el centro para el estudio de máximos y mínimos de funciones cuadráticas. En este caso las definiciones de crecimiento... etc, hacen las veces de *tecnología* para justificar hechos como que $f(x) = ax^2$ tiene un mínimo en $(0,0)$ si $a > 0$. Solo menciona que a los extremos de las parábolas se les llama vértices.

Los *problemas* que se plantean son de obtención de gráfico y tablas de valores a partir de una fórmula, y estudio de monotonía de la función.

Sin definir ni explicar por que se llaman traslaciones, el libro de Bruño representa gráficamente y en forma de tablas parábolas de la forma $y = ax^2 + m$, $y = a(x+n)^2$ y $y = a(x+n)^2 + m$, estudiando donde se encuentran sus vértices.

En una siguiente generalización define, de nuevo al margen, una función cuadrática, ahora como una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

> Una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ es una **función cuadrática** cuya gráfica es una **parábola.**

Figura 1.11: Definición de función cuadrática.

Explica las *técnicas* a seguir para calcular sus elementos como puntos de corte, ejes de simetría (sin definir ninguno de los dos) y vértice. No aparece ninguna *razón de ser* ni *tecnología* que justifique el porqué ni para qué de estas *técnicas*.

A continuación, de cara a estudiar la posición relativa entre recta y parábola, da por conocida la función de una recta y presenta una situación real que da una *razón de ser* al estudio de puntos de corte entre funciones como modelización de dos objetos que pueden estar o no a la misma altura. El proceder parte de la fórmula analítica y, mediante una tabla de valores se argumenta que en efecto las trayectorias son una recta y una parábola. De cara a la resolución se “convierten” las funciones en ecuaciones.

La determinación de los puntos de corte de la parábola y de la recta se puede hacer **analíticamente** mediante la resolución del sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} h = 5t \\ h = -t^2 + 20t - 36 \end{array}\right\}$$

Figura 1.12: Puntos de corte entre funciones.

Las *definiciones* de simetrías (función par e impar) aparecen al margen de una página que trata el caso de funciones de la forma $f(x) = ax^n$ y se estudian sin justificar qué simetría se cumple para cada valor de n. Los *problemas* que plantea son de nuevo representar gráficamente expresiones algebraicas.

Presenta una nueva situación real (razón de ser) para calcular la tasa de variación de una gráfica que representa los ahorros durante un año. Se define primeramente la tasa de variación $f(b) - f(a)$ (relacionándola con el crecimiento o decrecimiento) para posteriormente definir la tasa de variación media $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. De nuevo los *problemas* planteados consisten en graficar funciones para posteriormente estudiar su TVM. Notar que el primer problema expone una función de primer grado y plantea el hecho de que su TVM es constante.

1. Representa gráficamente la función $y = 2x - 3$ y determina la tasa de variación media en los intervalos:

a) $[-2, 1]$ **b)** $[0, 2]$ **c)** $[-1, 4]$ **d)** $[0, 4]$

e) ¿Con qué valor coincide siempre la tasa de variación media?

Figura 1.13: Tasa de variación media de una función de primer grado.

Por último estudia las funciones de proporcionalidad inversa sin dar una *razón de ser* para su introducción. Gráfica la función $f(x) = \frac{k}{x}$ y llama "hipérbola equilátera" y estudia su discontinuidad argumentando que no tiene sentido determinar $\frac{1}{0}$. Menciona otros aspectos como asíntotas argumentando tendencias mediante el calculo de valores de $f(x)$ cuando x se acerca a 0 o a $\pm\infty$.

Más problemas de representación gráfica, en este caso de funciones inversas cierran este tema.

En el siguiente tema aparecen al margen, mientras se trabaja con funciones exponenciales y trigonométricas, las definiciones de dominio y recorrido

Conclusión

Como *puntos fuertes*, notar que hace uso, aunque tangencialmente, de la idea de gráfica de función como un caso concreto de ecuación. Relaciona la tasa de variación media con la monotonía, facilitando una posible futura comprensión del concepto de derivada. La tasa de variación media aparece como respuesta a una situación real y diferencia entre tasa de variación y tasa de variación media.

Como *puntos débiles*, no se define de ninguna manera el concepto de función sino que solo se presentan ejemplos de funciones reales de variable real. No predominan las situaciones reales que justifiquen y den *razón de ser* a lo estudiado, ni explicación de las *tecnologías* que validen ninguna *técnica*.

No se hace mención a la interpretación de fenómenos o el análisis de resultados, no se considera el dominio como algo dependiente del contexto real detrás de una función. No se presentan funciones que no sean los 5 tipos mencionados.

En forma de conclusión, se trata de un libro que introduce la teoría general conforme se trabaja con casos concretos. Se podría decir, salvado las distancias y desde cierto punto de vista, que se trata de un modelo de enseñanza sobre la resolución de problemas, aunque claramente da mas importancia a dotar al alumno de la capacidad de analizar los casos concretos presentados que a la comprensión global del concepto de función. Como consecuencia del enfoque tomado la *imagen conceptual* de función que se crea en el alumno se concretizara demasiado en los ejemplos de función dados, mientras que la *definición conceptual* será nula.

Conclusiones finales

Los tres libros introducen las funciones después de haber trabajado las ecuaciones, pero solo en el libro de la editorial Anaya se mencionan las funciones en el tema de ecuaciones.

El libro de Anaya presenta el tema Trigonometría y Geometría Analítica después del de Funciones, mientras que Bruño y Santillana lo hace antes. Ninguno de estos utiliza el concepto funciones en temas no dedicados expecíficamente. Esta diferencia en el orden de aparición del temario permite nombrar los ejes X e Y en el libro de Santillana y Bruño, notación que no aparece en el libro de Anaya.

Entre el libro de Anaya y Santillana, este último presenta una mayor presencia de justificaciones de *técnicas* mediante *tecnologías*, además de hacer más conexiones con otros conceptos del temario. Por otro lado el libro de Bruño presenta los conceptos de manera disconexa y asociando cada definición a un ejemplo concreto, dificultando la visión global del concepto función y sus propiedades, es decir, no muestra buscar la creación de una *imagen conceptual* rica en el alumno sino simplemente dotarle de herramientas más propias de un trabajo ingeniero que de un quehacer matemático.

De cara a continuar con la formación matemática, ninguno menciona la idea de valor esperado a la hora de hablar de continuidad, aunque en Anaya y Bruño si se hace referencia a la idea de tendencia hacia el infinito. El mayor rigor podría parecer que lo encontramos en el libro de Bruño debido a su uso del lenguaje, sin embargo el restringir las definiciones al estudio de casos concretos podría dificultar una futura generalización del concepto de función.

Capítulo 2: Propuesta didáctica

2.1. Conocimientos previos y forma de evaluarlos

Acorde con el currículo de Aragón de la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, en el curso anterior 3º de ESO los alumnos han trabajado lo siguientes contenidos relacionados con las funciones:

- Análisis y descripción cualitativa de gráficas de fenómenos cotidianos.
- Estudio de características de la gráfica asociada a una situación.
- Análisis de situaciones de dependencia funcional en tablas y enunciados.
- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones mediante la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Expresiones de la ecuación de la recta.
- Funciones cuadráticas. Gráficas y uso para representar situaciones cotidianas.

Entre los contenidos curriculares de 1º y 2º de ESO destacan en relación al objeto a trabajar en esta propuesta:

1º ESO
- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos
- El concepto de función, variable dependiente e independiente. Formas de presentación: lenguaje habitual, tabla, gráfica, y fórmula.

2º ESO
- Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
- Funciones lineales: Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.

La aparición en estos cursos anteriores de gran parte del concepto de función (junto con los conceptos de variable dependiente e independiente y sus formas de representación, así como el trabajo con coordenadas cartesianas) supone que en 4º de ESO el alumno debe tener formada una primera imagen conceptual de que es una función. Los esfuerzos por tanto deben centrarse en reforzar y enriquecer estos conocimientos ya estudiados. La tasa de variación media y las funciones a trozos son los único contenido que, acorde al currículo, son nuevos en el curso de 4º. Para introducirlos son esenciales ciertos conocimientos acerca del concepto de función que los alumnos deberían tener previamente:

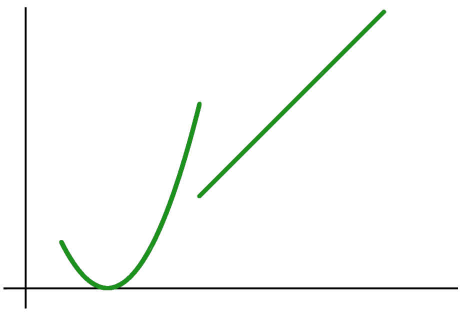
Antes de comenzar a trabajar, interesa saber si el alumnado esta suficientemente familiarizado con las relaciones funcionales como para proceder a la ampliación de la imagen conceptual que tienen de las funciones hacia un mayor rigor. La evaluación inicial ha de servir como diagnóstico general de la situación en la que se encuentran los alumnos. Se expone a continuación la prueba diseñada para ello.

Prueba de evaluación inicial

Se realizarán una serie de cuestiones abiertas para responder por parejas. No se pretende buscar respuestas correctas ni respuestas erróneas, sino que se pretende que mediante la conversación entre los integrantes de cada grupo vayan apareciendo los distintos conocimientos que se espera los alumnos ya tengan.

Cuestión 1. Tengo un medidor de cercanía que me graba como de lejos estoy de mi casa, pero últimamente creo que no va del todo bien. Esta es la información de la distancia a mi casa en función del tiempo de las tres últimas grabaciones. ¿Qué está mal en las funciones que ha generado ni medidor?

a)



b)

hora	distancia
8 : 00	$0m$
9 : 30	$2000m$
9 : 30	$3000m$
15 : 00	$3000m$

c) Por la mañana me alejé hasta estar a $2km$ y después por la tarde me acerqué a mi casa hasta estar a $3km$.

Cuestión 2. Como habéis visto, las dos últimas grabaciones el medidor ni siquiera pudo dibujar la gráfica. Dibujad vosotros la función que ha medido mi medidor roto.

Cuestión 3. ¿Cómo debería ser la función de la distancia a casa durante el día?

1. Dibujad una gráfica posible que tenga altibajos.
2. Haced una tabla con los momentos que consideres destacables de la misma marcándolos también sobre la gráfica.

Las preguntas planteadas hacen referencia en primera instancia comprobar si los alumnos comprenden el concepto de función, sirviendo como indicador de la capacidad por parte del alumnado de relacionar una función con la situación que representan. Las tres funciones presentadas y las preguntas sobre las mismas tocan tres aspectos que los alumnos deberían conocer: continuidad, definición y monotonía. Se evalúa además su familiaridad con la materia haciendo una última pregunta abierta que involucra creación e interpretación de gráfico, paso a tabla de valores, y los conceptos de monotonía y extremos que se espera que muestren al preguntar por "momentos destacables".

Esta evaluación inicial se realizará a los alumnos sin mencionar previamente que el tema que comienza es "Funciones y Gráficas". Tendrá una duración aproximada de $30/35$ minutos. Una vez realizada tendrá lugar un primer momento de institucionalización donde, tras preguntar a los alumnos que creen que van a trabajar en este nuevo tema, se introduce las definiciones de función, dominio y rango tal y como se explica en la sección Sección 2.6 Institucionalización, definiciones y tecnologías.

No se hace en esta prueba mención a calcular dominio de definición de una función ya que, si bien es un concepto que los alumnos han trabajado en cursos anteriores, en la propuesta toma un protagonismo suficiente como para no considerarlo como un conocimiento previo necesario. En compensación de esta ausencia estos conceptos se refrescarán al alumnado en el momento de institucionalización previamente mencionado.

2.2. Metodología

Esta sección engloba la metodología que se va a usar a lo largo de toda la propuesta. Se ha optado por explicarlo globalmente ya que se trata de una metodología homogénea a lo largo de la propuesta, independiente del campo de problemas que se este trabajando, favoreciendo así un ambiente de trabajo al que los alumnos puedan acostumbrarse y sentirse cómodos.

El aprendizaje de las matemáticas requiere de una metodología que haga al alumno participe y protagonista de los razonamientos realizados sobre los objetos que se quieren trabajar. Esto significa que tiene que ser él quien en la medida de lo posible llegue a las conclusiones, observe las propiedades, siga los argumentos y justificaciones… En definitiva, el alumno no puede ser un elemento pasivo, sino participe del quehacer matemático mediante el diálogo entre iguales y con ayuda de la guía del profesor.

Es por esto que los ejercicios de clase, ya sean problemas o actividades, que se expondrán en la propuesta de este TFM están diseñadas para llevarse a cabo mediante una metodología activa a la vez que cooperativa.

Los **problemas** que se plantean durante esta propuesta se trabajarán en parejas o grupos de tres que previamente hayan sido creados, preferiblemente con ayuda del tutor del grupo clase.

La implementación de los problemas partirá de una reflexión en la que cada pareja trate de enfrentarse a la situación utilizando aquello que libremente consideren necesario. De esta manera se fomenta la comunicación y el intercambio de ideas al mismo tiempo que se evitan grupos demasiado grandes donde unos alumnos aporten y participen sustancialmente más que otros.

El docente servirá de guía para que sean los propios alumnos quienes resuelvan los problemas que se les planteen y obtengan una respuesta. Estas respuestas en todo momento deberá ir acompañada de un razonamiento que la justifique y del planteamiento y el razonamiento seguido. Independientemente de si las respuestas dadas son las correctas o no, se hará una puesta en común a la clase de las mismas, en la que las parejas o ternas argumentarán sus decisiones.

Además de los problemas por parejas se plantean también una serie de **actividades**. Las actividades son en esencia problemas, generalmente de mayor duración, pero que han sido guionizados con más detalle. Suelen contar con una componente de cooperación mayor que los problemas normales, involucrando a toda la clase en la obtención de un mismo resultado común. Para algunas actividades se divide la clase en grupos de 4 alumnos, lo cual puede hacerse simplemente juntando parejas.

Estas puestas en común generarán un debate en clase acerca de lo trabajado y de las distintas opciones de abordar una misma cuestión si es que las hay. Una vez explorados los diversos enfoques surgidos en el aula se buscará alcanzar un consenso que englobe a todos. Será el profesor quien tome el protagonismo, convirtiendo ese consenso en una institucionalización de los conceptos utilizados. Los alumnos anotarán en sus cuadernos, preferiblemente de manera separada a las actividades, problemas y ejercicios realizado, la institucionalización. Al final del tema cada alumno debería disponer, además de unos ejercicios con todos los razonamientos realizados, unas pocas hojas donde se condensa todo lo aprendido y utilizado de manera ordenada con relaciones establecidas. Estas hojas constituirán un documento físico de lo que debería ser su imagen conceptual del objeto función, al cual pueden recurrir cuando quieran consultarlo, revisarlo y trabajarlo.

Mediante esta metodología se espera maximizar tanto la comprensión de los contenidos tratados en clase como la motivación ante los mismos y la participación e interés por el aprendizaje.

2.3. Motivación para la introducción del concepto de función

Las matemáticas han sido utilizadas para representar, ordenar y analizar de manera rigurosa y en la medida de lo posible objetiva el mundo.

Las funciones, como objeto matemático, cumplen su papel como herramienta que matematiza situaciones reales facilitando su estudio y análisis. Esta matematización suele llamarse modelado. Se dice generalmente que las funciones sirven modelan situaciones de dependencia. Esta propuesta hace uso de estas situaciones para dotar de razón de ser al objeto función. Se les da de esta manera una aplicación extra matemática las funciones que veremos que es la razón histórica por la que se introduce este objeto (y en general por la que aparecen las matemáticas).

Las funciones surgen como herramienta para profundizar en como es la relación de dependencia entre dos variables cuales quiera. Las expresiones algebraica o fórmulas que relacionan magnitudes, ya sea propia de intra-matemáticas (ej: fórmulas geométricas) como extra-matemáticas (fórmulas físicas). Conforme avanzaba la ciencia a lo largo de la historia iban apareciendo correlaciones en forma de fórmulas que modelizaban un comportamiento, y estas correlaciones terminaron por definirse como funciones. De igual manera en la etapa escolar aparecen fórmulas en distintas materias y contenidos, las cuales en matemáticas analizamos tratándolas como funciones, centrando la atención en la variación de una magnitud con respecto a la otra.

Además en esta propuesta las funciones también serán utilizadas para estudiar comportamientos y hacer predicciones y suposiciones sobre el comportamiento tanto a corto y a largo plazo de un valor ante el cambio de otro.

2.3.1. Breve historia de las funciones

Las matemáticas surgen como herramienta para resolver problemas que la humanidad se ha ido encontrando a lo largo de la historia, así como para expresar situaciones reales. David Darling (2004) argumenta que las 29 marcas que aparecen en el hueso de Lebombo de hace 40000 años contaban los días que duraba el ciclo lunar, siendo este el primer valor numérico del que se tiene consciencia. También aparecen .[a]ctos embrionarios geométricos.[en] la simetría presente en algunas las herramientas del paleolítico superior (Gil, 2020) y en símbolos aparecidos en pinturas rupestres .

De igual manera, las funciones surgen de la necesidad de simplificar, organizar y sintetizar información o sucesos de la vida real para poder analizarlo.

El concepto de función definido formalmente como objeto matemático independiente no aparece hasta el siglo XVII con los inicios del cálculo y el cálculo infinitesimal. La primera idea de función como relación de dependencia entre dos cantidades variables nació de manos de matemáticos como René Descartes (1596-1650), Isaac Newton (1643-1727) o Gottfried Leibniz (1646-1716). Este último en concreto fue quien acuñó el término "función" junto a otros términos relacionados: "variable", "constante" y "parámetro".

Sin embargo la historia de las funciones tiene origen mucho antes (Ponte, 1992). Desde la antigüedad se pueden encontrar ejemplos particulares de funciones como:

- *Tablas de valores:* Utilizadas para contar cantidad, representan una correspondencia entre un conjunto de objetos dados y una secuencia de conteo números.
- *Tablas Babilónicas:* Tablillas esculpidas en arcilla que datan de finales del milenio IV antes de Cristo que asignan a cada valor numérico su recíproco, cuadrado, raíz cuadradas, cúbicas…
- *Operaciones aritméticas:* Las operaciones elementales como la suma o el producto son funciones de dos variables.

En el siglo XIV Nicolás Oresme (1323-1382) introdujo un método para mostrar gráficamente distintas dependencias entre cantidades como las velocidades con el que representó el movimiento uniformemente acelerado. Estas representaciones (Freixenet, 2017) pueden considerarse como las precursoras de la geometría analíticas que relaciona funciones con su gráfica.

Estas gráficas de Oresme no representaban expresiones algebraicas del tipo $f(x)$ como si sucede en la actualidad. Fue Leonard Euler quién introdujo el concepto de "expresión algebraica"(Ponte, 1992) en sustitución de otros términos utilizados hasta entonces por sus predecesores. Entre estos predecesores destacan los ya mencionados matemáticos del siglo XVII y Jean Bernoulli (1667-1748), de quien Euler (1707-1793) fue alumno, cuya definición de función como "cantidad que se compone de alguna manera de esa variable y constantes" introdujo definitivamente el término "función" en el léxico matemático.

Hasta este punto de la historia, las funciones vienen motivadas por la asociación de valores mediante expresiones algebraicas (a excepción de las tablas de valores). Sin embargo estas expresiones no pueden representar todas las relaciones de dependencia existentes. Dirichlet (1805-1859) generalizó la definición moderna de función numérica: Una función es una correspondencia cualquiera entre dos conjuntos de números, que asocia a cada número en el primer conjunto un único número del segundo.

Con esta definición de Dirichlet el término función, motivado originalmente por el estudio de gráficas curvas y expresiones algebraicas que modelan procesos físicos de dependencia entre dos magnitudes, se desliga completamente de sus representaciones y cobra significado matemático por si mismo.

En las matemáticas de los siglos XIX y XX, con la aparición de la teoría de conjuntos, las funciones terminarían por desligarse además del sistema de numeración empleado incluso de la condición de que la entrada y salida sean valores numéricos. Actualmente los matemáticos hacen uso de funciones de todo tipo, desde las más sencillas hasta las más generales:

- Funciones booleanas: asignan “si” o “no” a elementos según cumplen o no una característica (ej: puerta lógica AND que solo devuelve un “si” cuando todos los elementos que recibe son “si”).

- Funtores que llevan objetos de una categoría a objetos de otra (ej: funtor olvido que “convierte” espacios topológicos en conjuntos, desprendiéndoles de su estructura)

En esta propuesta se adopta la razón de ser histórica del concepto de función.

2.3.2. Problemas que motiven los distintos aspectos de las funciones a trabajar

Se busca presentar al alumnado situaciones en forma de problemas, las cuales puedan resultarles cercanas y den sentido y utilidad a la interpretación y análisis de funciones, así como las funciones definidas a trozos y la tasa de variación media.

A continuación se proponen tres problemas y una actividad donde surgen de manera informal conceptos que más tarde institucionalizaremos en nuestra propuesta. La finalidad de estos problemas es plantear cuestiones que hagan pensar y que sirvan de motivación para la introducción e institucionalización de los conceptos nuevos a trabajar en 4º de ESO.

Los dos primeros problemas mostrarán relaciones funcionales, una en el ámbito de la biología y otra en una situación realista. Se estudiará el comportamiento de una variable que depende de otra.

El primer problema muestra situaciones donde esta variable aumenta o disminuye y se producen saltos en sus valores. Además se dan situaciones de periodicidad y surgen también los conceptos de máximo y mínimo.

Problema 1. *Nos planteamos analizar la evolución de una población salvaje de lince ibérico. Crea una representación visual que permita ver las consecuencias sobre la población de linces que tiene cada una de estas situaciones explicando brevemente por qué crees que sería así. Señala en que momento/momentos de cada una de estas situaciones la población de linces se encuentra en su mejor y peor momento.*

a) *Caza no controlada: Durante un periodo se permitió a los cazadores matar libremente linces ibéricos.*

b) *Repoblación: En un momento dado se libera en el territorio un grupo de linces ibéricos que estaban en un zoo.*

c) *Aumento de conejos: Se introduce en un momento dado una gran cantidad de conejos, animales de los que los linces se alimentan.*

d) *Situación normal: en temporada de cría aumentan los nacimientos, los fallecimientos se producen de manera constante durante todo el año.*

La resolución de este problema puede verse en el Anexo 1.

A la hora de resolver este problema se espera que los alumnos dibujen una curva como representación visual y que hagan uso (nombrándolos o no) de los conceptos como: decrecimiento (cuanto se trata de una situación de caza no controlada), salto en la continuidad (en el momento de repoblación), crecimiento y tendencia (cuando se introducen conejos)....

En este segundo problema se pide conocer tanto los valores que puede alcanzar una variable (siendo estos el dominio y rango) de la modelización realizada de una situación. Surge también la expresión algebraica de una función como herramienta que permite conocer todos sus valores.

Problema 2. *Tenemos 10 piezas de dominó que sabemos que miden 4cm de largo y 2cm de ancho. Al colocarlas una detrás de otra se crea una fila, pudiendo estar cada pieza colocada a lo largo o a lo ancho.*

- *¿Qué longitudes puede tomar esta fila?*
- *¿Cuántas fichas puede haber a lo ancho?¿Cómo puedo saber cuánto mide esta fila según el número de piezas a lo ancho?*

La correcta resolución de este ejercicio desemboca en la observación de que se pueden obtener longitudes de entre 20 y 40 cm (puede ser que los alumnos especifiquen que solo se pueden obtener valores pares). La segunda cuestión está pensada para que los alumnos razonen el dominio de la función longitud según las piezas a lo ancho y concluyan con la expresión algebraica de la misma.

El tercer problema plantea una situación de la vida cotidiana donde el uso de la tasa de variación media facilita el análisis a la hora de extraer las conclusiones requeridas.

Problema 3. *Eres ciclista y todos los días sales a pedalear, tienes una tabla donde apuntas cada día cuantos kilómetros recorre. Con ayuda de Excel puedes ver la siguiente gráfica de los 101 días que lleva entrenando.*

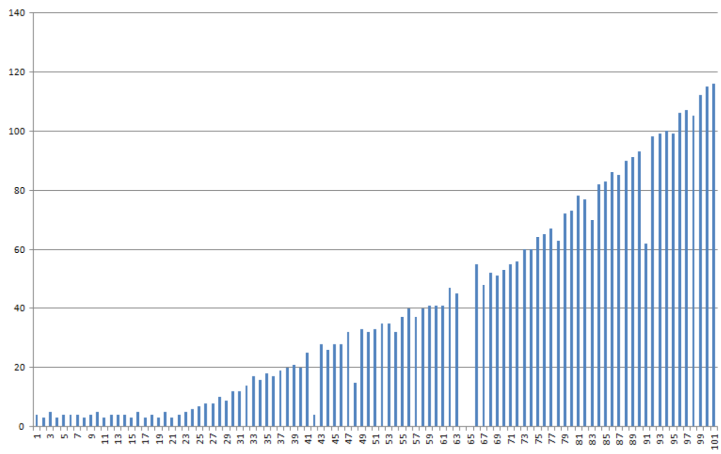


Figura 2.1: Gráfica de elaboración propia.

- *¿Cuánto ha mejorando desde que empezó? ¿y los últimos 20 días? ¿y en los 20 primeros?*
- *¿Cuánto dirías que corre más cada día respecto al anterior?*
- *¿Cuándo ha mejorado más? sin contar días anómalos donde por razones externas no haya podido ir tanto en bici.*
- *¿Cuándo podrá, aproximadamente, recorrer 150 kilómetros en bici?*

Este problema esta pensado para que alumno haga uso sin nombrarlo de tasas de variación, para a continuación forzar el uso de algún tipo media entre las diferencias, la cual será la tasa de variación media. Se espera que el problema sirva de justificación de su utilidad no solo para el análisis sino para la predicción. Además, para realizar esta predicción una manera de proceder es dividiendo la funciones en distintos trozos.

Por último, la siguiente actividad busca dar una razón de ser a las funciones definidas a trozos.

Actividad 1. *Esta actividad se realizará en grupos de 4 alumnos. A cada grupo se le da un tótem mágico que puede ser físico (como un rollo de cartón con cara) o metafórico.*

La actividad se ambienta en el cuidado del tótem, el cual requiere de atención constante, por lo que deben llevarlo siempre encima. Para ello se pone a los alumnos en la situación de que durante los últimos 40 días se han ido repartiendo la tarea de cuidar al tótem entre los 4 miembros del grupo. De esta manera cada miembro del grupo ha tenido el tótem durante 10 días.

Resulta que este tótem mágico tiene la capacidad de registrar cada día la velocidad máxima a la que ha estado durante ese día el alumno que lo porta. Queremos dibujar una gráfica que represente esta velocidad. Como no podemos esperar 40 días a realizar la actividad cada miembro del grupo elegirá una fórmula que será la función que dará la velocidad del tótem en cada uno de los 10 días que ha estado con él.

Cada alumno dibujará y escribirá la fórmula de sus 10 días y se la mostrará a su grupo. El objetivo de la actividad es unir las gráficas de los 4 alumnos en una única gráfica que contenga la información de las velocidades máximas del tótem mágico durante los 40 días. Una vez dibujada esta gráfica, cada alumno con un color distinto para poder diferenciar las "partes" de la misma, y escrito sobre cada parte la fórmula correspondiente, se pedirá a los alumnos que la expongan al resto de clase. Se les pedirá que expliquen en voz alta la forma que tiene la función que han obtenido entre los 4 miembros del grupo.

Esta actividad obliga a compactar la información de la gráfica obtenida y expresarla de manera oral haciendo uso conjunto de lenguaje algebraico y coloquial. Se espera que de esta necesidad aparezcan maneras de expresarse de la forma "la función es x^2+3 entre el día 1 y el día 10…". Se contempla además la posibilidad de que algún grupo haya contado los días como $1,2,\dots,10,1,2,\dots,10$ dando pie a preguntar si lo obtenido al juntar las funciones así es una función o es necesario que los días se cuenten como $1,2,\dots,10,11,12,\dots,40$.

2.4. Campos de problemas

En un curso como es 4º de ESO los objetos matemáticos y el estudio que se hace de los mismos alcanzan una mayor complejidad. En el caso de las funciones, estas requieren de un desarrollo progresivo que parta de las nociones más familiares y vaya profundizando en los nuevos conceptos.

Tall y Vinner (1981) diferencian dos maneras de abordar la complejidad de cualquier objeto matemático, por un lado la *imagen conceptual* y por otro la *definición* *conceptual*. La definición conceptual corresponde a un momento de institucionalización y su naturaleza es la teoría pura, mientras que la imagen conceptual es subjetiva y esta condicionada a como ha percibido y trabajado cada individuo un objeto. Es en esta imagen conceptual donde radica la comprensión, y es esta la que debemos explotar y enriquecer en los alumnos.

En la actividad matemática llevada a cabo a la hora de introducir un nuevo objeto y aprender sobre el mismo, se van agregando contenidos que se estructuran en una red. Esta red de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

Es esta red, junto con la imagen conceptual lo que, secuenciando los problemas a plantear en cinco distintas fases, se pretende enriquecer de manera ordenada. Será el alumno quien a través del planteamiento y la resolución de las situaciones y problemas que se le presenten, vaya construyendo la complejidad de las funcionas, estableciendo relaciones entre las distintas propiedades, definiciones, procedimientos, situaciones, representaciones, herramientas…

Estas fases corresponden con cinco distintos campos de problemas que se establecen en esta propuesta como esenciales para que el estudio de las funciones y gráficas de 4º de ESO se realice de manera progresiva y satisfactoria.

C1 **Interpretación de gráficas:** Un primer paso a dar en la comprensión de cualquier objeto matemático es conectarlo con aquello que nos resulta más intuitivo, cercano, o sencillo. En el caso de las funciones, sobre todo llegados a 4º de ESO, esto son las gráficas. A través de la gráfica de una función pueden observarse visualmente la mayoría de las características y propiedades de la misma, tanto como objeto matemático como herramienta que modeliza una situación. También se incluyen en este campo de problemas cambios de representación sencillos que parten de una gráfica, ya sea la extracción de una tabla de valores a partir de una gráfica o la interpretación de una gráfica dada mediante la invención de un enunciado para la misma.

Se diferencian aquí tres tipos de problemas de interpretación de gráficas:

a) Buscar significado y explicación a las características observadas en una gráfica que modeliza un suceso observable.

b) Extracción de características y propiedades interpretando gráficas descontextualizadas.

c) Interpretación no inmediata de gráficas donde el gráfico presentado no corresponde exactamente con el trazo continuo de puntos $(x,(f(x)))$.

La interpretación de gráficas supone un primer acercamiento a la relación entre gráficas y otras representaciones y que da pie al siguiente campo de problemas.

C2 **Cambio de representación:** Una vez exploradas y explotada representaciones gráficas, el siguiente paso lógico es trabajar con otras representaciones de funciones menos visuales. Combinar distintas maneras de expresar un mismo objeto enriquece y sofistica la imagen conceptual que se tiene del mismo. Este campo de problemas engloba los cambios de representación que requieren un trabajo mas elaborado que interpretar una gráfica.

a) Paso de tabla o enunciado a gráfica. Donde ya no se limita al alumnado al análisis de gráficas dadas, sino que se le pide que las cree, familiarizándolo mucho más con este objeto.

b) Paso de enunciado a expresión algebraicas. Las expresiones algebraicas pueden ser tanto fórmulas únicas como funciones a trozos.

c) Relación entre gráfica y expresión algebraica. Donde se explota un primer paso hacia la geometría analítica.

C3 **Estudio de dominios:** Habiendo introducido ya las expresiones algebraicas, las funciones a trozos y otras representaciones de funciones, se pueden abordar estudios del dominio de las mismas. Se distinguen dos tipos de situaciones ante las que estudiar el dominio de una función

a) En situaciones contextualizadas.

b) Dada una expresión algebraica. Trabajaremos estos problemas con Desmos, haciendo que sea el alumno quién observe y obtenga conclusiones.

C4 **Tasa de variación media:** La tasa de variación media o TVM es el contenido principal, por novedoso, de esta propuesta didáctica. El campo de problemas se divide en dos tipos distintos

a) Tasa variación: en estos ejercicios se busca explotar simplemente la diferencia de valores entre dos puntos de una función, dándole significado en un contexto real.

b) Tasa variación media: haciendo uso de la idea de tasa de variación, en estos problemas se plantea la necesidad de usar la media de los crecimientos de una función.

A continuación se plantean una serie de problemas correspondiente a cada uno de los campos explicados.

C1. Interpretación de gráficas

a) Modelizando sucesos observables

El siguiente problema busca explotar el concepto de función como herramienta matemática que sirve para representar situaciones del mundo real y poder analizarlos.

Problema 4. *Aquí puede verse la gráfica de la evolución de la temperatura de Javier cuando estuvo enfermo y en observación:*

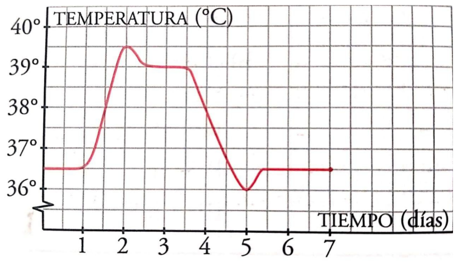


Figura 2.2: Gráfica temperatura (Colera et al., 2010).

a) *¿Cuánto tiempo estuvo en observación?*

b) *¿Que día tiene más fiebre? ¿y cuando alcanza un mínimo la temperatura?*

c) *¿En que intervalo de tiempo empeora la fiebre? ¿cuándo mejora?*

d) *¿Qué temperatura tendría los próximos días?*

e) *Haz un pequeño informe de la enfermedad que ha sufrido.*

El siguiente problema tiene dos claros objetivos. El primero es mostrar que una gráfica puede tomar distintas formas, no únicamente la de una curva, y no tiene porque necesariamente corresponder exactamente a una función. El segundo objetivo es desarrollar más general del pensamiento matemático, relacionando el tema de funciones con la utilidad de las mismas como modelado no exacto de la realidad, es decir, con la estadística.

Problema 5. *Hemos medido la altura y el peso de unos 100 hombres y mujeres de entre 0 y 50 años y hemos obtenido esta gráfica de puntos:*

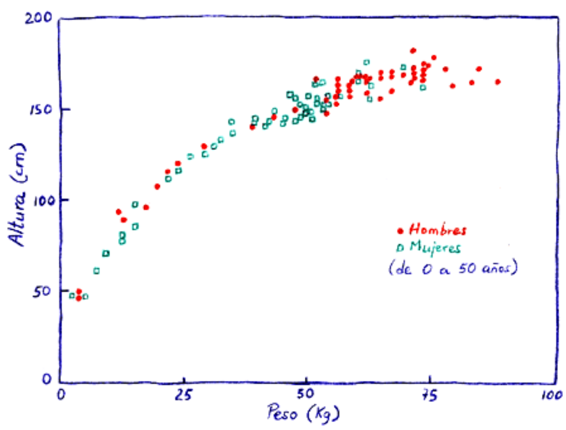


Figura 2.3: Gráfica Altura-Peso (Rodríguez, 2004)

a) *¿Cuanto mide la persona más alta de esta medición? ¿y la mas baja?*

b) *¿En que rango de peso se encuentran nuestras personas?*

c) *¿Es esta gráfica una función?*

d) *Dibuja una gráfica que permita saber a aproximadamente el peso de una persona sabiendo su altura.*

e) *¿Que rango y dominio tiene esta función?*

f) *Describe la "forma" de la gráfica que han hecho explicando su significado.*

Problema 6. *En estas gráficas se muestran los distintos tipos de estrellas y la relación entre su temperatura y su luminosidad:*

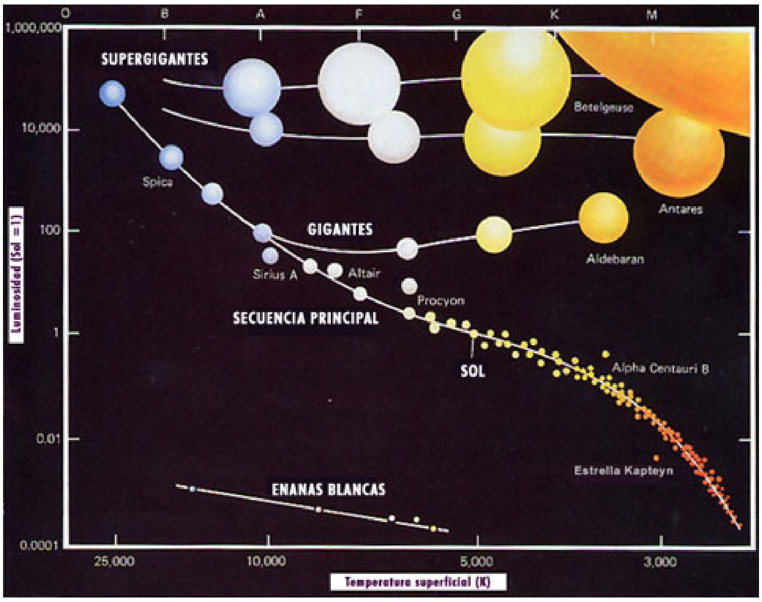


Figura 2.4: Gráfica estrellas (Rodríguez, 2004)

a) *La secuencia principal muestra una gran cantidad de estrellas, entre ellas el sol. ¿Que temperatura y luminosidad tiene el sol? Si el sol se enfriase ¿brillaría más o menos?*

b) *¿Como describirías a alguien la relación temperatura-luminosidad de la secuencia principal?*

c) *¿Qué tipo de estrellas son las más luminosas?¿Porque has elegido esas y no otras?*

d) *¿Qué tipo de estrellas es el más peculiar según estas gráficas? ¿porque?*

La resolución de este problema puede verse en el Anexo 1.

b) Interpretando gráficas descontexcualizadas

Al perder el carácter intuitivo de relacionar una gráfica con un hecho real, el siguiente problema conecta más con el estudio meramente matemático de una gráfica. Trabajando una función como objeto matemático independiente del uso que se le de.

Problema 7. *Dada la siguiente gráfica de una función:*

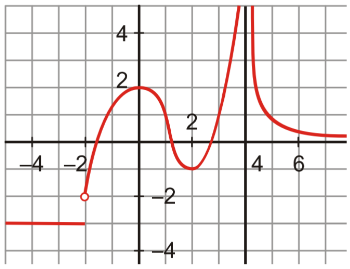


Figura 2.5: Función discontinua (Escoredo, & Pérez, 2011)

a) Cuál es su dominio de definición.

b) Es continua ¿cuándo si y cuándo no?

c) ¿En qué intervalos crece y en cuales decrece? ¿tiene algún máximo? ¿cómo es en el intervalo $(-\infty,-2]$*?*

Con el fin de hacer ver la importancia del contexto detrás de una gráfica y función se presenta la siguiente actividad.

Actividad 2. *Trabajando en grupos de 4 alumnos, se les dará total libertad para que cada grupo cree una situación, una historia, una relación... y dibuje la gráfica de la misma.*

Es importante que cada grupo lo haga sin que el resto de grupos lo vea ya que a continuación se intercambiarán las gráficas resultante entre grupos. Estas gráficas no tendrán leyenda ni nombres ni valores en los ejes, no debe aparecer ninguna letra ni número.

Cada grupo tratará de adivinar que representa la gráfica que ha recibido, creando una contextualización para la misma. Estas contextualización se expondrá ante toda la clase para posteriormente ser comparada con el contexto original pensado por el grupo que ha dibujado la gráfica. Se discutirá acerca de la validez de ambas conextualizaciones.

c) Interpretación no inmediata de gráficas

El siguiente problema hace preguntas acerca de una función que resulta no ser exactamente la que se representa en la gráfica. Sin introducir ningún contenido al respecto, los alumnos al resolver este problema estarán realizando una composición de funciones (concretamente la composición que da lugar al valor absoluto).

Problema 8. *La siguiente gráfica representa la oscilación de un péndulo:*

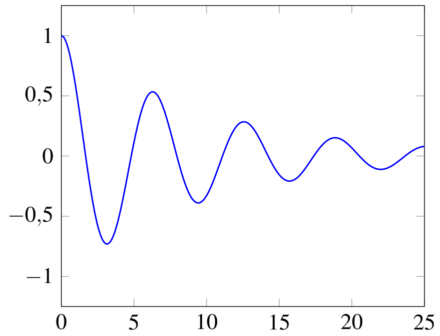


Figura 2.6: Gráfica de elaboración propia.

a) *Dibuja el péndulo en la posición que tiene en el segundo 0 y en el segundo 25, ¿Qué le está pasando al movimiento de este péndulo?¿Qué hará el péndulo a partir del segundo 25?*

b) *Observando la gráfica y considerando la función que da la distancia del péndulo al punto medio: Di (aproximadamente) cual es su dominio, rango, máximos, mínimos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

c) *¿En que momento estará más lejos de punto de partida?*

d) *Repite en apartado 2. para la función distancia al punto de partida. Trata de dibujar la gráfica*

De cara a comprender más en profundidad el significado general de función y el alcance que tiene el trabajo con las mismas, es necesario introducir cuestiones que rompan con lo trabajado hasta este curso. Ha de tenerse en cuenta que interpretar gráficas es un campo de problemas que lleva presente para los alumnos de 4º ya durante tres años. El siguiente problema presenta una gráfica de una función discreta oculta tras un diagrama de barras, herramienta más propia de la probabilidad y la estadística.

Problema 9. *La siguiente gráfica representa cuántas personas tienen cada color como color favorito:*

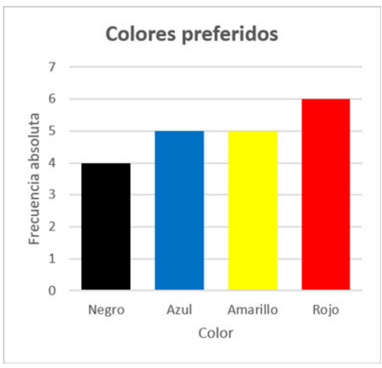


Figura 2.7: Diagrama de MateMovil (s.f).

a) *¿Cuál es el dominio de la función que representa esta gráfica?*

b) *¿Dónde tiene un máximo y un mínimo?*

c) *¿Se puede decir si esta función es continua o discontinua.?*

Se espera en este problema que contesten que el dominio de la función son los colores {Negro, Azul, Amarillo, Rojo}. No se espera que haya mucha dificultad con los extremos y que la pregunta acerca de la continuidad de pie al correspondiente momento de institucionalización donde se formalice el significado de continuidad.

C2. Cambio de representación

a) Paso de tabla o situación contextualizada a gráfica

Además de combinar una representación en tabla con el enunciado con palabras, el siguiente problema puede abordarse tanto como una función con variable independiente numérica como no numérica. De nuevo el trabajo con estas representaciones no es algo que aparezca por primera vez este curso, luego los planteamientos que se realicen deben estar enfocados a fortalecer un conocimiento que ya deben tener los alumnos, y ampliarlo con nuevos tipos de problemas.

Problema 10. *Hemos medido la lenteja que hemos plantado en casa a lo largo de los últimos meses:*

Mes	*Feb*	*Mar*	*Abr*	*May*	*Jun*	*Jul*	*Ago*	*Sep*
cm	*0*	*0*	*1*	*3*	*5*	*8*	*10*	*11*

A partir de entonces no creció más, al enero siguiente perdió un centímetro y siguió perdiendo cada mes un cm más de lo que perdió el mes anterior hasta que se marchitó del todo.

a) *¿Cuándo murió definitivamente la lenteja?*

b) *Representa gráficamente la altura de la lenteja en función del tiempo transcurrido.*

c) *¿Cuál es el dominio y el rango de la altura en función de los meses?*

d) *¿Es continua esta función? ¿Puede hacerse continua de alguna manera?*

El hecho de preguntar primero por cuando muere busca que el alumnado o bien trate de trabajar con la expresión verbal, o bien que complete la tabla, o bien que decida responder a las cuestiones en desorden.

b) De enunciado a expresión algebraica

En el siguiente problema en un principio no se dará dibujo alguno con la intención de forzar la comprensión lectora de los alumnos.

Problema 11. *Tengo un cuarto lleno de baldosas cuadradas para hacer un mosaico con ellas.*

El mosaico quiero que sea cuadrado, de manera que los bordes de las baldosas formen una cuadrícula. Para poder unir las baldosas voy a pegar los bordes de dos en dos con una tira de adhesivo.

a) ¿Cuántas tiras de adhesivo necesitaré si quiero un mosaico cuadrado de 3 baldosas de lado? ¿y 4?

b) ¿Cuántas tiras de adhesivo necesitaré en función de como de grande es mi mosaico de baldosas? ¿Y en función del número de baldosas?

c) Si ahora quiero un mosaico rectangular ¿Cuantas tiras necesitare según cuantas baldosas de largo y alto tiene el rectángulo? ¿Puedo saber ahora cuántas necesito en función del número de baldosas?

La posible resolución de este problema de un alumno puede verse en el Anexo 1.

Con este problema de baldosas se acerca la idea de función a la idea de fórmula, además, aunque no se institucionalice nada al respecto, en este problema los alumno obtendrán la expresión algebraica de una función en varias variables y trabajado con la inyectividad de una función.

El problema siguiente busca el desarrollo por parte del alumno de algún método que le permita representar una función definida a trozos.

Problema 12. *Desde que se invento la silla levitadora y se vendieron 10 en 2034, sus ventas se han duplicado cada año, pero en 2040 empezaron a disminuir y cada año se vendían 5 menos que el anterior hasta que llego 2056 y la venta se estabilizó.*

- *Dibuja y escribe la fórmula de la función que representa la cantidad de sillas levitadoras vendidas por año.*

La actividad que se detalla a continuación busca desarrollar la capacidad del alumnado de reconocer patrones y obtener una expresión algebraica que los represente.

Actividad 3. *Actividad hecha por Desmos que puede verse en el siguiente enlace: https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5e54200051afec695ca0a71a.*

Esta actividad consiste en una "máquina" a la que le das unos valores y te devuelve otros. Los alumnos deben ir introduciendo valores y tratar de obtener cual es la regla es la que sigue esta "máquina", las cuales son las funciones $f(x) = x - 10$ *y* $f(x) = 7$.

A continuación aparecen dos maquinas sobre las que hacer ingeniería inversa. Una función que tiene por entrada una palabra o frase y devuelve la siguiente letra a la última (ej: f("Eduardo")=P). La última maquina resulta no ser una función ya que no devuelve valores iguales para entradas iguales.

La actividad de Desmos se cortará en la diapositiva 9 para dar paso al trabajo por grupos de 4. Cada alumno debe crear una función numérica y una regla que resulte ser una función que no tenga como dominio valores numéricos. El objetivo de los otros 3 miembro será ir pidiendo valores e intentar adivinar en el menor numero de peticiones de que regla o función se trata.

c) Relación entre gráfica y expresión algebraica

Problema 13. *Cada pareja recibirá dos sobres, uno de ellos tiene 10 tarjetas plastificadas con gráficas de funciones, el otro tiene otras 10 tarjetas plastificadas con fórmulas correspondientes. El objetivo de este problema es emparejar las gráficas con las fórmulas. Para ello se pueden ayudar de GeoGebra para visualizar puntos, pero solo podrán escribir en GeoGebra los valores numéricos (a,b) y mostrarlos en la pantalla. No pueden dibujar trazos de funciones ni utilizar el software como herramienta para calcular $f(x)$ sino que deben hacer los cálculos sobre el papel siempre que sea posible.*

Las tarjetas para el desarrollo de este problema pueden verse en el Anexo 2. Estas gráficas corresponden a operaciones algebraicas sencillas que los alumnos ya han trabajado anteriormente. El ejercicio esta planteado para cotejar valores $(x, f(x))$ obtenidos de las fórmulas con puntos concretos de las gráficas que contienen ejemplos de gráficas continuos y discretos.

C3. Estudio de dominios

a) En situaciones contextualizadas

Problema 14. *Cuales son las limitaciones del dominio de las siguientes funciones. Razona tu respuesta.*

a) Altura sobre el nivel del mar en función de la distancia recorrida.

b) Área de rectángulos hecho con la misma cuerda en función de la altura de los rectángulos.

c) Casilla a la que llega una ficha en función del valor que sale en un dado.

d) Dinero ahorrado en función de la edad.

e) Kilos de pasta que hay que comprar en función de jugadores que han jugado un partido de baloncesto.

f) Superficie de terreno que corresponde a cada uno en función del número de herederos.

Una posible resolución de este problema de un alumno puede verse en el Anexo 1.

b) Dada una expresión algebraica

La siguiente actividad tiene como objetivo que el alumnado observe como se dibujan distintas funciones con las que ya ha trabajado y vea cuales son sus dominios. La actividad empieza con funciones lineales o cuadráticas con las que ya deberían tener cierta familiaridad. Estas fórmulas tienen como dominio toda la recta real. Posteriormente se presentan ordenadamente ejemplos de fórmulas que no tienen por dominio la recta real.

Poder visualizar los gráficos gracias a la aplicación Desmos permite que sean los alumnos quienes obtengan mediante observación y razonamiento el procedimiento y método para saber cuando existe y no existe dominio de definición de una expresión algebraica. De esta forma se evita que estos problemas se conviertan en meros ejercicios algorítmicos de aplicar una técnica dada.

Actividad 4. *Cada pareja abrirá una cuadrícula en blanco la aplicación Desmos y se les pedirá que vayan dibujando las siguientes funciones. Se preguntará sobre que forma tiene cada una de ellas y si su dominio es toda la recta real.*

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = x + 2$

c) $f(x) = 3x + 2$

d) $f(x) = 3x^2 + 2$

e) $f(x) = 3x^2 - \frac{4}{3}x + 2$

f) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{3} + 2$

A continuación dibujan la ecuación $f(x) = \sqrt{x}$

b) ¿Observas algo extraño esta gráfica? ¿Porqué no hay gráfica a la izquierda?

c) ¿Cuál es el dominio de esta función?

d) ¿Que sucede si cambio la función por $f(x) = \sqrt{x^2}$*? ¿Porque ahora el dominio si es toda la recta real?*

e) Sin dibujarla, como crees que sería la gráfica de $f(x) = \sqrt{x+2}$

Dibujan ahora la función genérica $f(x) = \sqrt{x+k}$*, k se convertirá en un un deslizador que pueden mover para observar el comportamiento del dominio.*

f) Escribe una fórmula cuyo dominio sea $[2,\infty)$ *y otra que sea* $(-\infty,2]$. *Si lo necesitas vuelve a pintar* $f(x)=\sqrt{x}$ *busca antes una que tenga dominio* $(-\infty,0]$.

Por último se repite un proceso similar partiendo de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$

h) ¿Qué punto no esta en el dominio de esta función? ¿Porqué?

i) ¿Que dominio tendrá la función $f(x)=\dfrac{1}{x-k}$*? ¿y* $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$*?*

Problema 15. *Dibuja en Desmos y di cual es el dominio y por que de las siguientes funciones*

a) $f(x)=\sqrt{6+x^2}$

b) $f(x)=\dfrac{3x}{6+5x+x^2}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6+5x+x^2}}$

d) $f(x)=\dfrac{7}{3x-2}+\sqrt{6+5x}$

Las funciones seleccionados para este problema engloban cuatro situaciones distintas. Dos de ellas sencillas que utilizan directamente lo observado en el problema anterior. Las dos últimas requieren un razonamiento para combinar dominios de fracciones y radicales, una por composición y otra por suma de fracciones.

Problema 16. *Cual sería el dominio de las siguientes funciones:*

$$f(x)=\sqrt{x+5} \qquad g(x)=\frac{15x}{x-3} \qquad h(x)=\frac{2}{10x-24-x^2}$$

A continuación dibuja las tres en Desmos sobre los mismos ejes. Con las gráficas hechas por Desmos delante dibuja en el papel la gráfica de las siguientes funciones:

a) $F(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } -\infty<x<0 \\ g(x) \text{ si } 0\le x<4 \\ h(x) \text{ si } 4\le x<\infty \end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases} g(x) \text{ si } -\infty<x<1 \\ h(x) \text{ si } 1\le x<2 \\ f(x) \text{ si } 2\le x<\infty \end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases} g(x) \text{ si } -\infty<x<-1 \\ f(x) \text{ si } -1\le x<1 \\ g(x) \text{ si } 1\le x<\infty \end{cases}$

d) $F(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } -\infty<x<1 \\ g(x) \text{ si } 0\le x<2 \\ h(x) \text{ si } 4\le x<\infty \end{cases}$

Di cual es el dominio de cada una de estas funciones definidas a trozos explicando como lo has obtenido sabiendo los dominios de f, g *y* h.

Notar que la última función de las planteadas en este problema no esta bien definida ya que para x entre 0 y 1 tiene dos valores distintos.

Las fórmulas f, g y h dadas tienen dominio en $[-5,\infty)$, $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ y $\mathbb{R} \setminus \{6,10\}$ respectivamente. Las funciones definidas a trozos que se plantean toman distintas fórmulas en distintos intervalos de manera que: 1. tenga dominio la interacción de todos los dominios de f, g y h; 2. tenga dominio $\mathbb{R}$; 3. tenga la misma fórmula en dos intervalos separados y su dominio se la interacción de algunos dominios de f, g y h; 4. combina dominios de f, g y h y además no tiene dominio en $[2,4)$ por definición.

C4. Tasa de variación media

Todas las actividades de este campo de problemas están contextualizadas en situaciones hipotéticas donde cada grupo de 4 alumnos ha diseñado una nave espacial que puede tanto volar como bucear. Los prototipos de dichas naves ha sido puestos a prueba con un primer vuelo desde una plataforma marítima, de manera que cada nave ha recorrido ciertas alturas, ya sean positivas volando o negativas buceando.

Esta ambientación da pie a que cada grupo de alumnos reciba una relación distinta que representa la altura sobre el nivel del mar de su nave. Esta relación puede venir dada por una tabla o por una gráfica ya hecha en Desmos en la cual se ven marcados los puntos notables (extremos relativos y cortes con los ejes) y además pueden consultar valores escribiendo simplemente "$f(a)$". Las gráficas de Desmos estás hechas mediante expresiones algebraicas de una complejidad mucho mayor a la de un nivel de 4º de ESO, centrándose así el razonamiento sobre el concepto de función y no el de fórmula.

Las actividades a continuación van enfocadas a que los alumnos analicen y comparen el desempeño de su nave con el resto de su clase. Se considera que esta ambientación da pie a una motivación extra a la hora de realizar las actividad ya que genera una intriga hacia el resultado a obtener.

a) Tasa variación

Actividad 5. *Los grupos reciben las siguientes relaciones, donde la variable independiente son segundos y la dependiente la altura sobre el nivel del mar:*

1. *https://www.desmos.com/calculator/1wcdx3k5dn*

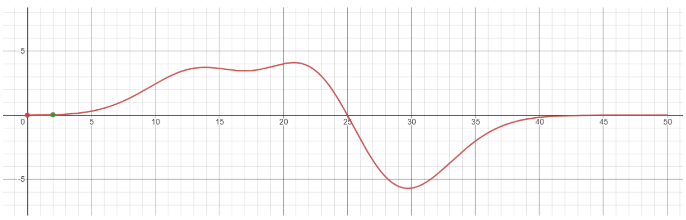


Figura 2.8: Gráfica de elaboración propia.

2. *https://www.desmos.com/calculator/yhll6qnn46*

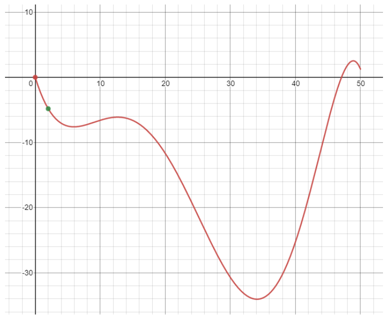


Figura 2.9: Gráfica de elaboración propia.

3. *https://www.desmos.com/calculator/ri3j6nztnl*

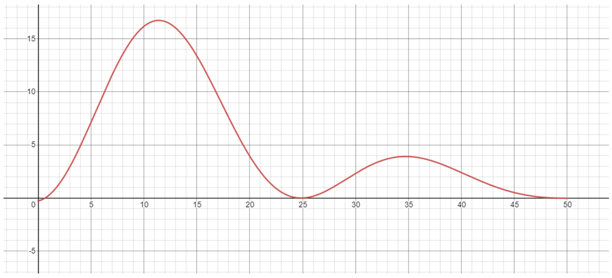


Figura 2.10: Gráfica de elaboración propia.

4.

Segundo	*0*	*10*	*15*	*21*	*28*	*35*	*40*	*45*	*50*
Metros	*0*	*8*	*-1*	*-4*	*-10*	*0*	*0*	*2*	*0*

5.

Segundo	*0*	*2*	*10*	*18*	*19*	*22*	*35*	*40*	*50*
Metros	*10*	*12*	*4*	*16*	*18*	*10*	*2*	*2*	*2*

6.

Segundo	*0*	*5*	*10*	*12*	*20*	*27*	*32*	*40*	*45*
Metros	*0*	*6*	*1*	*-3*	*4*	*10*	*0*	*-2*	*0*

Se les pedirá en primer lugar que grafiquen la tabla o tabulen la gráfica y que analicen la monotonía marcando cuando la nave asciende (crece), desciende (decrece) y cuando alcanza extremos.

A continuación para comparar el desempeño de cada nave cada pareja expondrá a la clase el comportamiento de la suya dando los siguientes datos:

a) ¿Cuánto ha durado su vuelo?

b) ¿Qué altura máxima y mínima ha alcanzado la nave?

c) Durante los 10 primeros segundos ¿cuánto ha ascendido o descendido tu nave?

d) Durante los otros 20 segundos.

e) *En los intervalos de tiempo en los que la nave ha descendido, ¿cuántos metros han sido estos descensos?*

f) *¿Cuánto se ha ascendido o descendido en los últimos 5 segundos? ¿Y entre el segundo 10 y el 35?*

Actividad 6. *Como continuación del anterior, en esta ocasión se pregunta acerca de qué nave ha hecho la ascensión continuada más larga, tanto en tiempo como en distancia.*

Para ello cada pareja debe observar sobre la gráfica o la tabla del comportamiento de su nave y tomar los intervalos donde la nave asciende, calcular su longitud y su tasa de variación (tiempo y distancia ascendida), y finalmente comparar sus resultados con el resto de parejas para obtener la nave ganadora en esta categoría.

Se espera en esta actividad que las parejas utilicen como valores de inicio y final de una ascensión los extremos relativos correspondientes sin necesidad de especificar en voz alta comentarios como "donde empieza a subir" o "cual es ese punto donde pasa de estar bajando a estar subiendo" haciendo alusión a la técnica de obtención de mínimos.

b) Tasa de variación media:

En esta última actividad se intercambiarán las funciones entre los grupos argumentando que si analizan su propia nave podrían hacer trampa porque le han cogido cariño. La razón real es que los alumnos que han analizado gráficas de Desmos ahora analicen tablas de valores y viceversa.

Actividad 7. *Se busca saber qué nave ha sido la que más rápido ha hecho una ascensión. Para ello se especifica que nos referimos a la velocidad de una ascensión completa, desde el momento en el que empieza a subir hasta el momento en el que llega a una máxima.*

Se irán dando pistas para la obtención de estas velocidades:

a) *Marcad primero cuales son los periodos de tiempo concretos en los que la nave asciende.*

b) *¿Cuánto tiempo dura cada ascensión? ¿Cuántos metros se ha ascendido del tirón?*

c) *¿A qué velocidad ha ascendido sabiendo el tiempo y la altura?*

Después de estas pistas cada grupo tendrá que comparan los intervalos de ascensión de la nave que están analizando. Una vez obtenido el momento donde *asciende más rápido, solo queda poner las conclusiones en común al resto de clase y compararán las naves entre si.*

Este próximo problema trabaja con la tasa de variación media sin hacer uso de la fórmula ya conocida de la velocidad. Se espera que habiendo trabajado la actividad anterior no resulte muy complicado ver la similitud entre $\frac{\text{metros}}{\text{segundo}}$ y $\frac{\text{euros}}{pulpos}$. El problema tiene además una componente propia del campo de problemas C2, ya que se pide la deducción de una expresión algebraica a partir de unos datos dados. No se descarta que los alumnos hagan un esbozo de la gráfica como manera de visualizar mejor la situación, aunque no se pida explícitamente.

Problema 17. *Tenemos a la venta peluches de pulpo reversibles en oferta. Si compras 1 cuesta 10€, si compras 4 cuestan 20€, 9 cuestan 30€, 16 cuestan 40€, 25 50€...*

a) Con que fórmula estamos utilizando para determinar el precio en función de la cantidad de pulpos.

b) Si alguien compra 4 pulpos, ¿a cuánto le sale el pulpo? ¿y 36 pulpos? ¿y 50 pulpos?

c) ¿Cuanto sube el precio si en lugar de 16 pulpos me compran 25? ¿Y de 25 a 50?

d) ¿a cuanto sale cada pulpo entre los pulpos 16 y 25?¿y entre el 50 y el 100?

2.5. Procedimientos, algoritmos y técnicas

La interpretación de gráficas con un significado real no necesita de técnicas concretas, ya que su análisis debe ser fruto de la contextualización de una gráfica. Tanto este tipo de ejercicios como los problemas de motivación no buscan explícitamente la aparición de técnicas sino explotar la capacidad de comprensión del alumnado y proporcionarles situaciones que den sentido al estudio posterior.

Las técnicas aparecen a la hora de realizar el análisis de una función que ha sido desligada de la situación que representa. Estas técnicas o procedimientos aparecen en las actividades planteadas en los distintos campos de problemas, y nacen como un soporte y herramienta para la resolución de los mismos. Estas actividades se trabajarán en clase con la metodología especificada en Sección 2.2 Metodología.

Con el fin de afianzar las destrezas necesaria para la resolución de algunos problemas, se plantean a continuación una serie de ejercicios donde prima la ejecución y el ejercitado de las técnicas. El objetivo de esta práctica es que la ejecución de técnicas no suponga ningún impedimento ni dificultad a la hora de abordas los problemas y actividades propuestas. La resolución de estos ejercicios será, salvo que dé tiempo a empezar al final de una sesión, una tarea individual para realizar en casa, y serán corregidos en clase. Esta corrección podrá ser en voz alta o sobre la pizarra, y o mediante revisión por pares donde los alumnos comparen y se evalúen los ejercicios entre iguales.

A continuación se detallan estas técnicas y se presenta un ejercicio de cada una de ellas como ejemplo. Los demás ejercicios serían similares.

T1 Reconocimiento de características de funciones dadas en forma de gráfica:

T1.1 Obtención de dominios y rangos en una gráfica: Dada una gráfica, deberán ser capaces de identificas sobre que valores del eje de abcisas existe trazo. Igualmente deberán reconocer visualmente que valores alcanza una función viendo para que alturas del eje de ordenadas existe trazo.

Esta técnica requiere además del uso de convenios como el uso de pequeños círculos coloreados o blancos que representan valores existentes ausentes.

Ejercicio 1. *Expresa usando intervalos el dominio de la gráfica*

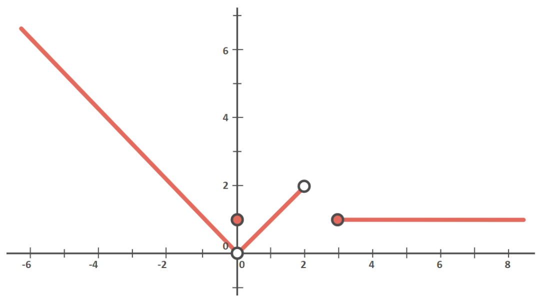


Figura 2.11: Gráfica discontinua (Sangaku Maths, s.f.).

T1.2 Estudio de continuidad de una gráfica: Una función es continua en un intervalo si su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel, es decir de un solo trazo.

Ejercicio 2. *¿Son continuas estas funciones? ¿Porqué?*

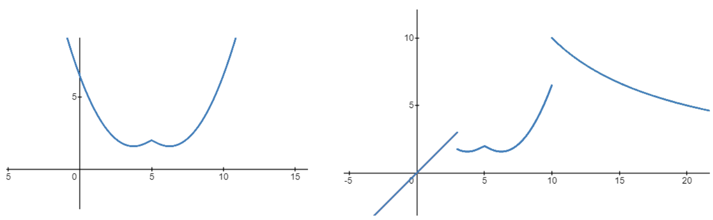


Figura 2.12: Gráficas de elaboración propia.

T1.3 Estudio de monotonía en una gráfica: Dada una gráfica los alumnos deben poder interpretar visualmente los tramos crecientes o decrecientes e identificar los máximos como puntos donde hay un cambio de tendencia creciente a decreciente (análogamente los mínimos). Además en caso de tratarse de una función discontinua deben saber reconocer máximos o mínimos si lo hay, en los extremos de los distintos trazos de la gráfica.

Ejercicio 3. *Di en que intervalos crece, decrece y cuales son los máximos y mínimos de estas funciones:*

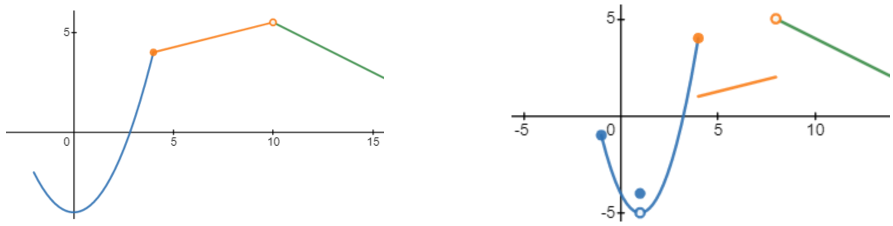


Figura 2.13: Gráficas de elaboración propia.

T2 Cambios entre tabla, fórmula y gráfica: Dada alguna de las tres representaciones de funciones los alumnos deben ser capaces de obtener alguna de las otras dos.

T2.1 De gráfica o fórmula a tabla: Observando o tomando valores y escribiendo esos valores (x,y) en forma de tabla.

Ejercicio 4. *Realiza una tabla de valores de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{4+x^2}+5$

b)

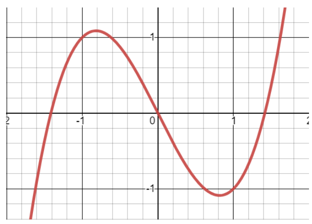


Figura 2.14: Gráfica Propia

T2.2 De gráfica o tabla a fórmula: Realizando suposiciones a partir de algunos valores y comprobando estas suposiciones en otros valores.

Ejercicio 5. *Escribe una fórmula que corresponda a las siguientes funciones:*

a)

x	*1*	*2*	*3*
y	*0*	*2*	*4*

b)

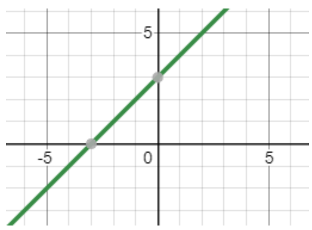


Figura 2.15: Gráfica propia.

T2.1 De fórmula o tabla a gráfica: Tomando algunos pares de valores $(x, f(x))$ y dibujando esos puntos sobre el plano coordenado donde x es el valor en el eje vertical y $f(x)$ el valor en el horizontal. Se trabajarán ejercicios en los que proceda unir los puntos obtenidos en un mismo trazo de la gráfica.

Ejercicio 6. *Dibuja estas funciones:*

a)

x	1	3	5	6
y	10	2	8	10

b) $f(x) = x^3 + 2^x - 3$

T3 Cálculo del dominio de una función dada por una expresión algebraica: Dada una función dada como una fórmula, los alumnos deben ser capaces de identificar si se trata de una función puramente polinómica, cuyo dominio serán todos los números reales, o de otro de función donde el dominio puede fallar. Se trabajarán funciones racionales y funciones con radicales con polinomios en numeradores, denominadores o radicandos.

Estas técnicas para el cálculo del dominio cobran gran importancia en futuros cursos, a la hora de representar funciones y encontrar puntos singulares como asíntotas.

T3.1 Calculo de dominios en funciones con un denominador: Se iguala cero el denominador y el dominio es toda la recta real excepto ese valor o valores de x que hace cero el denominador.

Ejercicio 7. *Calcula el dominio de:*

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2+x}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x^2-5} \cdot \dfrac{2}{3} + x$

c) $f(x) = \dfrac{61}{3-6x}$ *d)* $f(x) = \dfrac{x+1}{2+x} + \dfrac{1}{x^2-5}$

T3.2 Calculo de dominios de funciones con un radicando: El dominio es el intervalo donde el radicando es mayor o igual que cero. Para resolverlo es necesario resolver una inecuación de primer y segundo grado, contenido que se aborda este mismo curso.

Ejercicio 8. *Calcula el dominio de:*

a) $f(x) = 7 - \sqrt{x+1}$ *b)* $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

c) $f(x) = 3x + \sqrt{3-6x}$ *d)* $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2} + 5}$

T3.3 Calculo de dominios de funciones que combinan radicandos y denominadores: Calculados los dominios de cada uno de radicandos y denominadores por separado, sobre una recta real se marcan los puntos e intervalos de ambos casos. El dominio de la función será únicamente aquellos intervalos y puntos que pertenezca al dominio en todos los casos.

Ejercicio 9. *Di cual es el dominio y por que de las siguientes funciones*

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6+5x}}{3x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{3x-2}{\sqrt{6+5x}}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+4}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+4}}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{(x+1)^2}$

f) $(2x+6)^{-\frac{1}{2}}$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}$

h) $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{4}{9-x^2}$

i) $f(x) = 3 + \sqrt{\dfrac{1}{3-6x}}$

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}} - \dfrac{3}{-x+6}$

T3.4 <u>Calculo de dominios de funciones definidas a trozos:</u> Se procede de igual manera que los casos anteriores para obtener los dominios de cada una de las expresiones que aparecen. El dominio resultante será la unión de los dominios truncados en cada uno de los intervalos de definición

Ejercicio 10. *Di cual es el dominio y por que de las siguientes funciones*

a) $f(x) = \sqrt{6+x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{6+5x+x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6+5x+x^2}}$

d) $f(x) = \dfrac{7}{3x-2} + \sqrt{6+5x}$

Las funciones seleccionados para este ejercicio engloban cuatro situaciones distintas. Dos de ellas sencillas que utilizan directamente lo observado en el ejercicio anterior. Las dos últimas requieren un razonamiento para combinar dominios de fracciones y radicales, una por composición y otra por suma de fracciones.

Ejercicio 11. *Di cual es el dominio de cada una de estas funciones definidas a trozos, explicando como lo has obtenido:*

1) $\begin{cases} \frac{15x}{x-3} & -\infty < x < 4 \\ \sqrt{x+5} & 4 \le x \le 10 \\ \frac{5x^2}{2x+3} & 10 < x < \infty \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{2x+3} & -\infty < x < 0 \\ x^2-3x+2 & 0 \le x \le 4 \\ \frac{6}{x^2-25} & 4 < x < \infty \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}}{2x} & -\infty < x \le -2 \\ \frac{3}{x}+3 & 1 < x < 10 \\ \sqrt{6x} & 10 \le x < \infty \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x-10)^{-1} & -\infty < x \le -6 \\ \sqrt{5-x} & -6 < x < 1 \\ \frac{x}{x-3} & 1 \le x < \infty \end{cases}$

Notar que la segunda función no falla en $[0,4]$ ya que es un polinomio y su dominio es $\mathbb{R}$. La segunda tiene una expresión que se anula en -5 y 5 sin embargo solo este último afecta al dominio. Además la última función no esta bien definida ya que para x entre 0 y 1 tiene dos valores distintos.

T.4 **Uso de las fórmulas de tasa de variación:**

T4.1 Tasa de variación: Dada una función f los alumnos deben saber calcular la tasa de variación del valor de la función entre dos puntos a y b mediante la fórmula

$$TV_{[a,b]} = f(b) - f(a)$$

Este cálculo puede hacerse sobre la expresión algebraica de la función sustituyendo x en la expresión $f(x)$ o sobre una gráfica o tabla, observando cual es el valor que toma la función en los puntos requeridos.

Ejercicio 12. *Dibuja y obtén la tasa de variación en los intervalos* $[0,2]$, $[-2,1]$, $[-2,-1]$ *y* $[1,4]$ *de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x^2 - x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

c)

x	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
y	*0*	*2*	*4*	*5*	*6*	*5*	*4*	*2*	*3*

d) $f(x) = 3 - \sqrt{20 - x^2}$

T4.2 Tasa de variación: Deben conocer la fórmula de la tasa de variación media

$$TVM_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Deben saber aplicar correctamente esta fórmula sobre las distintas representaciones de funciones como sucedía con la tasa de variación.

Ejercicio 13. *Para las funciones del ejercicio 29, calcula la tasa de variación media en los intervalos* $[3,5]$, $[1,4]$, $[-1,1]$ *y* $[-3,-1]$.

2.6. Institucionalización, definiciones y tecnologías

Gran parte de las técnicas a trabajar en esta propuesta didáctica estas avaladas y justificadas mediante definiciones, propiedades y argumentaciones realizadas sobre las mismas. Estas argumentaciones hacen la vez de demostración de la validez de un enunciado. No se pretende realizar demostraciones rigurosas pero si dar una explicación a las técnicas que aparecen para que estas no sean consideradas por los alumnos como una "verdad absoluta" sin origen alguno.

Estas tecnologías aparecen o bien en la puesta en común de la resolución de los distintos problemas planteados, o bien durante los ejercicios de aplicación de las técnicas. Compete al profesor la institucionalización de los contenidos de la unidad conforme estos vayan surgiendo en los campos de problemas.

La institucionalización puede suponer tanto la definición formal de un elemento, concepto o propiedad, como un argumento que relacione una técnica con una tecnología que la justifique. Como se ya se ha adelantado en Sección 2.2 Metodología, esto se hará en forma de clarificación en la pizarra y tendrá lugar después de la aparición de los conceptos. Antes de los momentos institucionalización es importante que los conceptos ya tengan una razón de ser y su funcionamiento haya sido comprendido por los alumnos.

A continuación se especifican las tecnologías que el alumno irá aprendiendo en los distintos los momentos de institucionalización que tendrán lugar durante la propuesta didáctica:

M0 **Definición de función**: *una función es una relación entre dos magnitudes tales que cada valor de la variable independiente llamado* ***entrada*** *devuelve un único valor de una variable dependiente llamado* ***salida****.*

$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

Esta definición del objeto sobre el que vamos a estudiar todos los conceptos de este tema debe ser lo primero que se institucionalice. Después de la evaluación inicial es el momento apropiado para dar esta definición, suponiendo una apertura al nuevo tema. Se espera que los alumnos den una definición similar si el profesor pregunta "¿qué es una función", la cual ha de ser guiada y modificada mediante un dialogo entre profesor y clase para construir la definición como aquí esta escrita. Entre las modificaciones que se espera que haya que realizar destacan:

- El uso de la palabra relación como manera de expresar que existe una dependencia.
- El valor de las variables no tiene porque ser un número.
- Los nombres de la entrada y salida puede variar según el bagaje del grupo. Es una buena práctica que se respeten los términos que vienen utilizando los alumnos en cursos anteriores siempre que estos no sean erróneos o puedan generar confusiones.

Acompañando a la definición de función se remarca la diferencia entre la idea de función y la idea de representación de la misma, para a continuación introducir las distintas representaciones que los alumnos ya conocen de años anteriores. Tablas, enunciados y fórmulas no requieren gran explicación y es enriquecedor que su definición sea fruto de los propios alumnos a través de un diálogo abierto en clase.

Las gráficas se definirán como: *una gráfica de una función es el trazo que asocia cada entrada con su salida en unos ejes de coordenadas.*

$$\text{Los puntos del trazo son } (x, f(x))$$

Estas definiciones de función y gráfica acercan la imagen conceptual que los alumnos tiene de las funciones y la enfocan hacia un estudio más profundo y riguroso tanto de las funciones como la geometría analítica. Durante este curso su contacto con esta rama son las técnicas T2 que se ven justificadas por estas definiciones.

Dominio y rango: *El dominio de de una función es el conjunto de valores que puede tomar la entrada, su rango es el conjunto de valores que puede tomar la salida..*

Al no tratarse de palabras propias del vocabulario cotidiano es bastante que, aunque se hayan trabajado en cursos anteriores, es probable que no todos alumnos recuerden a que hacían referencia estos términos. Serán los alumnos quienes den esta definición en voz alta tras ser preguntados por el profesor acerca de los términos.

M1 **Definición de continuidad**: *Una función es continua si pequeñas va variaciones en la entrada x suponen pequeñas variaciones en el valor de salida $f(X)$.*

Esta definición se traduce en que las discontinuidades son puntos donde se producen saltos en el valor $f(x)$. Justifica la técnica T1.2.

Definición de crecimiento: *Una función es creciente si conforme aumenta la variable independiente lo hace la variable dependiente.*

$$\text{Si } x_1 < x_2 \text{ entonces } f(x_1) < f(x_2)$$

Definición de máximo: *Un valor de salida de una función es un máximo absoluto si es mayor que los demás valores de la función. Si solo es mayor que todos los valores cercanos se llama máximo relativo.*

A estas definiciones les acompañan sus análogas de descrecimiento y mínimo. Con una simple argumentación sobre los propios problemas, sobre todo aquellos de funciones continuas, se justifica la técnica T1.3

Este momento tiene lugar después del campo de problemas C1.

M2 **Definición de función definida a trozos:** El definir una función definida a trozos es una herramienta por si misma que permite representar una función que no puede ser presentada mediante una única fórmula. El concepto función definida a trozos no deja lugar a dudas en cuanto a su significado. La labor del docente en este momento de institucionalización consiste únicamente en presentar esta manera de organizar la información en corchetes de la forma

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ si } \dots \\ f_2(x) \text{ si } \dots \\ f_3(x) \text{ si } \dots \end{cases}$$

como un convenio sobre la manera de escribir una función definida a trozos. Es enriquecedor comparar este convenio con otras posibles maneras de escribir una función definida a trozos que puedan haber utilizado los alumnos en la resolución de los problemas correspondientes de C2.

M3 **Propiedades de operaciones:** de cara a justificar las técnicas T3 es necesario argumentar sobre las operaciones que aparecen en las expresiones. La actividad 3 de C3 esta diseñada para que sean los alumnos quienes reconozcan las propiedades que intervienen en el estudio de los dominios de expresiones algebraicas.

Argumentar y justificar que funciones con denominador no tienen dominio cuando el denominador se anula solo requiere de reconocer el denominador como una división y saber que no se puede dividir entre cero. Igualmente no existen raíces cuadradas reales de número negativos. Validar las técnicas T3.1 y T3.2 a través de las propiedades de las operaciones será tarea del docente, así como recordar si hiciera falta que es un polinomio remarcando que su dominio es toda la recta real.

Dar validez al método de composición de dominios requiere de un razonamiento sobre el significado del hecho "no ser computable". Argumentando que los puntos donde falla una parte de una expresión hacen fallar a la expresión completa se puede concluir fácilmente que pertenecerán al dominio solo aquellos puntos que no fallen en ninguna de las partes de la expresión algebraica. Este momento de institucionalización incluirá una explicación por parte del profesor de como realizar la técnica T3.3, ya que facilita el orden a la hora de resolver problemas.

Con respecto a justificar la técnica de unir dominios presentada en T3.4, se ha de recurrir a la definición de función definida a trozos y argumentar que lo que se esta haciendo es un dominio a trozos.

En este momento de institucionalización se explicará también de la notación para expresar intervalos e unión de los mismos, y la notación $\mathbb{R} \setminus \{\dots\}$.

M4 **Fórmula de la tasa de variación media:** Es del procedimiento de descubrimiento que realiza el alumno durante las actividades del que se obtiene que la variación es $f(b) - f(a)$. La institucionalización por parte del docente de este hecho consiste únicamente en dar nombre a esta herramienta que surge de manera inmediata de la definición de función y del significado de la palabra "variación".

El razonamiento del por qué de la fórmula $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para la tasa de variación media en esta propuesta didáctica tiene lugar conforme se construye la misma fórmula. Al preguntar en los problemas C4 por la velocidad de una variación los alumnos simplemente aplican sus conocimientos acerca de la fórmula velocidad $= \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$.

Para reforzar la justificación de la fórmula se pregunta en otro problema acerca de una TVM que no esta relacionada con distancia y tiempo sino con la idea de repartir el crecimiento. De nuevo la labor de docente en este momento de institucionalización no es tanto justificar una fórmula dada, sino darle nombre una vez los alumnos la hayan obtenido y hayan trabajado con ella.

2.7. Secuencia didáctica

En esta sección se presenta una tabla con una secuenciación teórica para llevar a un aula de 4º de ESO el tema de Funciones y Gráficas. Este tema tendría lugar a principio del curso, a continuación de los temas “Números Reales”, “Potencias y Raices” y “Ecuaciones e Inecuaciones”, y precediendo al tema de “Funciones Elementales” y el resto de temas de los bloques de Álgebra y Geometría Analítica, donde se explota el paso de expresión a grafo apareciendo el concepto de ecuación.

Para secuenciar los ejercicios y momentos explicados previamente se ha buscado que a lo largo de las sesiones los distintos contenidos se trabajen en el siguiente orden:

- Aparecerá un problema de motivación que de razón de ser al nuevo objeto matemático que se va a introducir.
- Resolución de problemas y actividades del campo de problemas a realizar mediante el trabajo cooperativo en clase.
- Momento (M0, M1, ...) de institucionalización donde se sacan conclusiones de los ejercicios hechos y se presenta la teoría que se extrae de los mismos.
- Tareas (T1, T2, ...) individuales para realizar en casa que servirán de repaso de las técnicas que han aparecido.

El primer día se realizará una evaluación inicial que servirá como diagnóstico de los conocimientos previos de los alumnos. A través de esta prueba inicial se espera que los alumnos deduzcan sin necesidad de introducirlo nosotros cual es el objeto matemático a tratar en el tema que comienza. Se da así a un primer momento de institucionalización con definiciones formales de conceptos que no deberían ser nuevas pero si tal vez modificadas con respecto a cursos anteriores.

Durante las siguientes sesiones trabajarán los tres primeros campos de problemas y se hará una primera prueba de evaluación concerniente a la interpretación de gráficas con contexto real y extracción de conclusiones a través de las mismas.

Por último se abordará el campo de problemas de la tasa de variación media y se hará una segunda prueba que en esta ocasión evaluará el desempeño de los alumnos respecto al cálculo de dominios de expresiones algebraicas, el trabajo con funciones definida a trozos, y la TVM. Se cerrará la propuesta con una puesta en común y una corrección de esta prueba de contenido.

Sesión	**Contenido**	**Actividad**
1	Prueba de conocimientos previos de los alumnos.	Evaluación inicial. Institucionalización M0.
2	Introducción al tema y razón de ser de las funciones.	Problemas 1 y 2 de motivación.
3	Problemas de interpretación de gráficas.	Campo de problemas C1.
4	Problemas de interpretación de gráficas	Campo de problemas C1. Institucionalización M1.
5	Cambio de representación.	Problemas 10,11 y 13 de C2. Tarea T1
6	Funciones definida a trozos.	Actividad 1 de motivación. Problema 12 de C2. Institucionalización M2. Tarea T2
7	Funciones definidas a trozos. Estudio de dominios.	Actividad 3 de C2. Actividad 4 de C3.
8	Estudio de dominios.	Problemas 14, 15 y 16 de C3. Institucionalización M3. Tareas T3.1 y T3.2

Sesión	Contenido	Actividad
9	Evaluación. Tasa de variación.	*Prueba de evaluación de 1* Problema 3 de motivación. Tareas T3.3 y T3.4
10	Tasa de Variación Media.	Corrección Prueba Ev. 1. Actividades 5, 6 y 7 de C4. Tareas T4
11	Tasa de Variación Media.	Problema 17 de C4. Institucionalización M4.
12	Evaluación	*Prueba de evaluación 2*
13	Evaluación.	Corrección y puesta en común de la prueba de evaluación.

2.8. Evaluación

La evaluación diseñada para esta propuesta didáctica consta de dos pruebas de evaluación realizadas en momentos distintos, una de aproximadamente 20 minutos y otra de unos 40. La primera se realizarán durante el desarrollo de las sesiones y la segunda tendrá lugar al final de la propuesta.

Cada una de estas pruebas será calificada sobre 10 puntos siguiendo unos criterios basados en un sistema de evaluación de tercios mediante el cual se establecen tres tipos de tareas (Gairín, Muñoz-Escolano & Oller, 2012):

– Tareas Principales: Consistentes en la razón por la cual se plantea el ejercicio. Podrán penalizar hasta un 100 % de la calificación, considerando la no correcta realización de las mismas puede ser motivo para no dar valor alguno a la respuesta dada.

– Tareas auxiliares específicas: Relacionadas con la principal pero no son el motivo de la evaluación. Pueden penalizar un máximo del 65 % de la respuesta, evitando así que su incorrecta ejecución suponga una calificación completamente nula.

– Tareas auxiliares generales: Tareas matemáticas no relacionadas con la tarea principal. La penalización por su mala ejecución no superará el 35 % de igual manera que las tareas auxiliares específicas.

La calificación final correspondiente una media ponderada entre las calificaciones de las dos pruebas. La primera prueba más corta valdrá un tercio de la nota, mientras que la segunda dos tercios.

En la sesión después de cada uno de estos momentos de evaluación tendrá lugar una puesta en común y una corrección de los ejercicios planteados que favorezca el feedback con los alumnos y asegure que la evaluación sea formativa y no únicamente calificativa.

Se destallan a continuación cuales son estas dos pruebas que evalúan el aprendizaje realizado por los alumnos.

2.8.1. Prueba de evaluación 1

Conocimientos que evalúa

Acorde con el Bloque IV de currículo aragonés de 4º de ESO, se han repartido los distintos estándares de aprendizaje a evaluar entre los distintos ejercicios. Este primer ejercicio evalúa los siguientes:

- Est.MAAC. 4.1.4. Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla.
- Est.MAAC. 4.2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales.

Enunciado de la prueba

Estamos mirando el precio de los 100 gramos de percebe durante el año pasado.

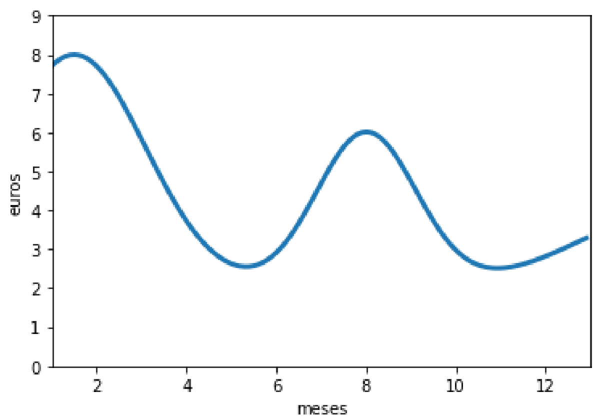


Figura 2.16: Gráfica de elaboración propia.

1. Completa la siguiente tabla:

Enero	Febrero	Abril		Agosto	Septiem.		Noviem.
7	8		5	6			

2. ¿Cuándo ha sido el mejor y el peor momento para comprar percebe?

3. ¿En que épocas del año crees que ha habido escasez de percebes?

4. Dibuja una gráfica que corresponda a una situación del mercado en la que el precio del percebe en Junio suba 2€ de golpe y no se vendan percebes en otoño. Explica como la has dibujado y di cuál es el dominio de la función correspondiente.

Respuesta esperada

1.

Enero	Febrero	Abril	Julio	Agosto	Septiem.	Octubre	Noviem.
7	8	3.5	5	6	5	3.5	3.5

2. El mejor para comprar percebe ha sido entre Mayo y Junio porque era cuando más barato estaba, el peor ha sido entre Enero y Febrero.

3. A principio de año y en verano ha habido escasez de percebes, lo se porque ha sido cuando el precio ha alcanzado valores máximos.

4. Es una función continua expecto el 1 de julio que tiene una discontinuidad porque vale 2 euros más que el 31 de mayo. El dominio de la función es $[1,7'7]\cup[11'7]$, porque el otoño va del 21 de sept. al 21 de novi.

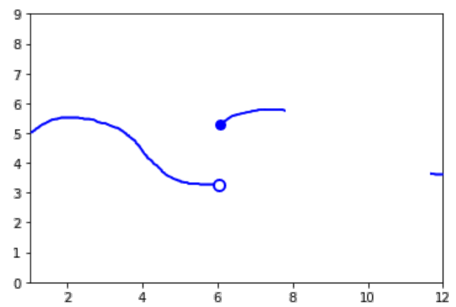


Figura 2.17: Gráfica de elaboración propia

Tareas a realizar

Tareas principales: Penalización máxima 10/10

– Extraer valores de y dados los valores de x en una gráfica.

– Extraer valores de x dados los valores de y en una gráfica.

– Interpretar “buen momento para comprar” como el momento de mínimo precio (y viceversa).

– Reconocer gráficamente máximos y mínimos.

– Diferenciar máximos y mínimos relativos de absolutos.

– Graficar una discontinuidad de salto de medida $+2$.

– Reconocer el dominio como los valores de 1 al 12 excepto un intervalo correspondiente a otoño.

Tareas auxiliares específicas: Penalización máxima 6.5/10

– Reconocer que los valores $1, 2, \ldots, 11, 12$ corresponden a los 12 meses.

– Reconocer que la escasez de producto supone aumento de precio.

– Dibujar en la discontinuidad los círculos (coloreado el superior y blancos el inferior) que reflejan que el precio del percebe el 1 de junio ya es 2 euros superior.

– Utilizar el lenguaje de conjuntos e intervalos para describir el dominio.

Tareas auxiliares generales: Penalización máxima 3.5/10

– Conocer el orden de los meses y reconocer que entre septiembre y noviembre está únicamente octubre.

– Reconocer el otoño, entendido como octubre noviembre y diciembre.

– Reconocer que el otoño va del 21 de septiembre ($7+21/30 \approx 7'7$) al 21 de diciembre ($11+21/31 \approx 11'7$).

2.8.2. Prueba de evaluación 2

Conocimientos que evalúa

Este ejercicio evalúa los siguientes estándares de aprendizaje:

– Est.MAAC. 4.1.5. Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica.

– Est.MAAC. 4.2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas.

– Est.MAAC. 4.2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.

Enunciado del ejercicio

1. ¿Cual es el dominio de las siguientes tres funciones?

$$\text{a) } f(x) = x+2 \qquad \text{b) } g(x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad \text{c) } h(x) = \sqrt{-2x+x^2-3}$$

2. De las funciones del ejercicio 1 ¿Cual tiene mayor tasa de variación media?

$$f(x) \text{ en } [1,3] \qquad g(x) \text{ en } [-1,5] \qquad h(x) \text{ en } [4,6]$$

3. ¿Cual tiene la menor tasa de variación entre 1 y 4?

4a. ¿Que dominio tiene la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{175}{x^2-4x+3} & \text{si} \quad 0 \le x \\ \sqrt{2x} - x\sqrt{36-2x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

4b. Haz una tabla que tome dos valores negativos y tres positivos de la variable independiente y dibuja un esbozo de como sería su gráfica.

Respuesta esperada

1. a) Es un polinomio y su dominio es toda la recta real.

   b) Es una fracción y su dominio es toda la recta excepto cuando el denominador vale cero, es decir, cuando $x^2+1=0$. Pero $x^2=-1$ no tiene soluciones, así que su dominio es también toda la recta real.

   c) Es una raíz cuadrada y su dominio es cuando el radicando es positivo o cero, es decir, cuando $-2x+x^2-3 \geq 0$.

   $$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot(-3)}}{2} = \cdots = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

	-1		3	
+	0	-	0	+

   El dominio de $h(x)$ es $(-\infty,-1] \cup [3,\infty)$.

2. $$\text{TVM}_{f(x)} = \frac{3+2-(1+2)}{3-1} = \cdots = 1$$

   $$\text{TVM}_{g(x)} = \frac{\dfrac{2\cdot 5}{5^2+1} - \dfrac{2\cdot(-1)}{(-1)^2+1}}{5-(-1)} = \cdots = \frac{3}{13}$$

   $$\text{TVM}_{h(x)} = \frac{\sqrt{-2\cdot 6+6^2-3} - \sqrt{-2\cdot 4+4^2-3}}{6-4} = \cdots \approx 1'17$$

   La tasa de variación media de $f(X)$ es 1. Como $\frac{3}{13}$ es más pequeño que 1 y $1'17$ más grande que 1, la mayor tasa de variación la tiene $h(x)$, que es $\dfrac{\sqrt{21}-\sqrt{5}}{2}$.

3. $$\text{TV}_{f(x)} = 4+2-(1+2) = \cdots = 3$$

   $$\text{TV}_{g(x)} = \frac{2\cdot 4}{4^2+1} - \frac{2\cdot 1}{1^2+1} = \cdots = -\frac{1}{9}$$

$$\mathrm{TV}_{h(x)} = \sqrt{-2\cdot 4+4^2-3}-\sqrt{-2\cdot 1+1^2-3} = \cdots = \sqrt{5} =\approx 2'24$$

La menor tasa de variación la tiene g porque es la única negativa.

4. Tengo que mirar primero cual es el dominio de cada una de las fórmulas:

   – El dominio de $\dfrac{175}{x^2-4x+3}$ es:

   $$\mathbb{R}\setminus\{x^2-4x+3=0\} = \mathbb{R}\setminus\{x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 3}}{2}\} = \mathbb{R}\setminus\{-3,-1\}$$

   – El dominio de $\sqrt{2x}-x\sqrt{36-2x}$ será cuando $2x\geq 0$ y $36-2x\geq 0$, es decir, cuando $x\geq 0$ y $x\leq 18$, es decir, el dominio es $[0,18]$

   Así el dominio de $f(x)$ será $\begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{-3,-1\} & \text{si} \quad 0\leq x \\ \\ [0,18] & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

   Es decir, será $\{x\leq 0\}\setminus\{-3,-1\}$ y $(0,18]$. Se pueden juntar en $\{x\leq 18\}\setminus\{-3,-1\}$.

5.

x	-4	-2	2	10	18
y	5	11’7	-9’3	-35’5	6

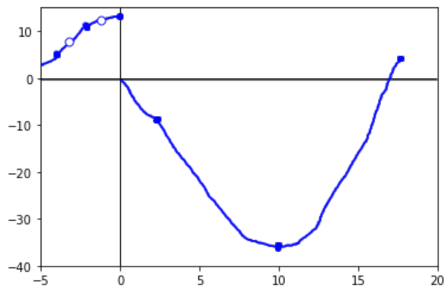


Figura 2.18: Gráfica de elaboración propia

Tareas a realizar

Tareas principales: Penalización máxima 10/10

– Aplicar correctamente la fórmula de la TVM.

– Aplicar correctamente la fórmula de la tasa de variación.

– Saber que el dominio de un polinomio es toda la recta real.

– Conocer cuando una fracción y una raíz cuadrada no tienen dominio de definición.

– Calcular los dominios de dos funciones que se suman.

– Calcular el dominio de una función a trozos haciendo un dominio a trozos.

– Evaluar una función a trozos.

– Representación de puntos $(x, f(x))$ sobre un sistema de coordenadas.

– Reflejar en la gráfica el dominio de una función.

Tareas auxiliares específicas: Penalización máxima 6.5/10

– Colocar correctamente los paréntesis en la fórmula de la TVM cuándo a es negativo.

– Evaluar expresiones algebraicas en valores de x concretos.

– Reconocer un polinomio.

– Resolver una igualdad o desigualdad polinómica.

– No tomar valores para la tabla donde no exista dominio.

– Esbozar una curva a partir de unos puntos concretos.

Tareas auxiliares generales: Penalización máxima 3.5/10

– Calcular el valor de operaciones que incluyen sumas restas productos

– Comparar valores racionales e irracionales y determinar cual es el mayor.

– Unir e intersecar conjuntos e intervalos para dar un resultado más “estilizado”.

– Tomar dos valores negativos y tres positivos y no cualquier otra configuración.

– Reflejar de alguna manera (como por ejemplo una discontinuidad) la diferencia entre los trozos en la gráfica de una función definida a trozos

Capítulo 3: Conclusiones y cuestiones abiertas

Las funciones así como otros contenidos de matemáticas, acostumbran a ser tratan de manera demasiado mecánica, dando una serie de técnicas para la resolución de problemas. Hemos visto que estos problemas a menudo tratar de conectar los objetos matemáticos con situaciones reales, sin embargo estas situaciones vienen dadas en forma de ejemplo.

En este trabajo se plantea una propuesta didáctica para 4º de ESO en la que se ha buscado que estas situaciones sean el punto de partida del proceso de aprendizaje. Para ello se han planteado problemas y actividades a partir de las cuales se pueda recrea en el aula el mismo desarrollo histórico que ha dado lugar a la aparición de las funciones y matemáticas, haciendo a los alumnos participes de este proceso. Se ha buscado crear un ambiente cooperativas, planteando cuestiones que despierten el interés del alumno ante un reto. De esta manera técnicas como la fórmula de la tasa de variación media aparecen por primera vez de manos de los alumnos durante la resolución de problemas.

Además, en esta propuesta se tratan cuestiones teóricas con un mayor grado de formalidad con respecto al cursos anteriores, enfocando así las matemáticas hacia ese carácter académico que un 4º de ESO solicita. Esta teoría aparece en forma de institucionalización a posteriori, involucrando al alumno en el desarrollo de la misma y guiándolo en un razonamiento matemático superior, que desarrolle su competencia matemática de cara a su salida de la educación obligatoria.

La propuesta que presenta este trabajo ha sido concebida de manera que pueda ser continuada para futuros cursos de Bachiller. Se han desarrollado y explicado la razón de ser de objetos y conceptos de manera que puedan surgir de forma natural y coherente conceptos como límites y derivadas indagando más en cuestiones como la continuidad, la tendencia, la tasa de variación media o la obtención de extremos. Además se ha tratado de dar a las funciones un carácter amplio más allá del caso $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiendo función como un proceso de entrada y salida de valores que conecta con el uso de funciones en la informática, o introduciendo ejemplos propios de la probabilidad y la estadística.

Referencias

(1985). *The Language of Functions and Graphs*. Shell Center.

Calvo, C, Deulofeu, J, Jareño, J & Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Síntesis.

Colera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I. & Martinez, M. (2010). *Matemáticas 4. Opción B*. Anaya, Madrid.

Darling, D. (2004). *The Universal Book of Mathematics: From Abracadabra to Zeno's Paradoxes (1.a ed.)*. Wiley (TP).

Determinación gráfica del dominio y de la imagen. (s. f.). Sangaku Maths. Recuperado 28 de junio de 2021, de https://www.sangakoo.com/es/temas/determinacion-grafica-del-dominio-y-de-la-imagen

Diagrama de barras, gráfico circular y polígono de frecuencias. (s. f.). MateMovil. Recuperado 28 de junio de 2021, de https://matemovil.com/diagrama-de-barras-grafico-circular-y-poligono-de-frecuencias/

Escoredo, A. & Pérez, C. (2011). *MAtemáticas 4 ESO. Opción B*. Santillana.

Freixenet, J. T. (2017). Matemática y movimiento en el siglo XIV. *Pensamiento Matemático,* 7(2), 87-99.

Gairín, J. M., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller, A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261-274). Jaén, España: SEIEM.

Gil Clemente, E. (2020). *Matemáticas que suman. Didáctica para la iniciación de los niños con discapacidad intelectual*. Honrosi.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del cnocimiento y al introducción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*, 127-135.

Moya, P. (2021). *4ºB de ESO de Matemáticas. LOMCE.* Marea Verde

Ponte, J. P. d. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*, 3–8.

Rodríguez, I. (2004, 3 febrero). *La familia de Carlos IV y la visita del ET*. caosyciencia. http://www.caosyciencia.com/ideas/articulo.php?id=030204

Shell Centre for Mathematical Education. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Ministerio de Educación y Ciencia y Universidad del País Vasco.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169. https://doi.org/10.1007/bf00305619

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado. 25, de 29 de enero de 2015.*

Índice de figuras

Anexos

Anexo 1: Resolución de algunos problemas

A continuación pueden verse resoluciones exitosas de algunos problemas hechas desde el punto de vista de un hipotético alumno al que haya ido dirigida la propuesta didáctica que presenta este trabajo.

Se ha seleccionado el problema que se ha considerado más interesante de cada uno de los apartados motivación y los distintos campos de problemas.

Problema 1

a) El mejor momento es antes de que se empiecen a cazar, porque después decrece el número de linces y al final del periodo de caza se encuentran en el peor momento, pues hay muchos menos ejemplares.

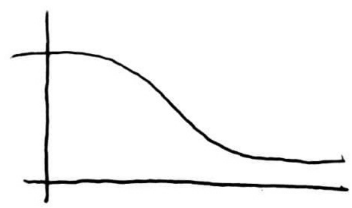


Figura 1: Gráfica de elaboración propia

b) Su peor momento es antes de la repoblación, después la población de lince da un salto y se encuentra en su mejor momento.

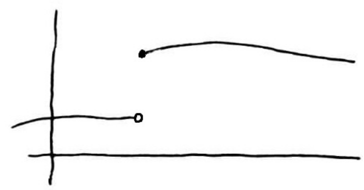


Figura 2: Gráfica de elaboración propia

c) El mejor momento es un poco después del aumento de conejos, porque al haber más comida ha crecido más la población. Después se va agotando la comida y desciende la población, pero no tanto como para estar como el principio. Así que el peor momento es al principio.

Figura 3: Gráfica de elaboración propia

d) La población de linces sube y baja cada año pero no crece ni decrece bruscamente. Es una función periódica.

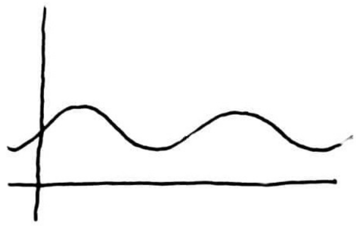


Figura 4: Gráfica de elaboración propia

Problema 6

a) El sol tiene temperatura 5000K y luminosidad 1, si se enfriase brillaría más.

b) Las estrellas de la secuencia principal tienen temperaturas entre menos de 3000K y 25000K. La estrella más fría de la secuencia principal tiene menos de 3000K es la que menos brilla y brilla entre 0.01 y 0.0001 soles, conforme aumenta la temperatura aumenta el brillo hasta llegar a la más caliente que es la más brillante y brilla entre 10.000 y 100.000 soles.

c) Las súper gigantes son las estrellas más luminosas porque además de brillar más que las demás, no pierden brillo cuando pierdan temperatura.

d) Las estrellas gigantes son las mas peculiares porque entre 3000K y 10000K su brillo decrece cuando crece su temperatura.

Problema 11

a) Para el cuadrado 3×3 necesitaré 2 filas de 3 adhesivos en horizontal y 2 filas de 3 adhesivos en vertical, es decir, 12 adhesivos.

Para el cuadrado de 4×4 necesitaré 24 adhesivos.

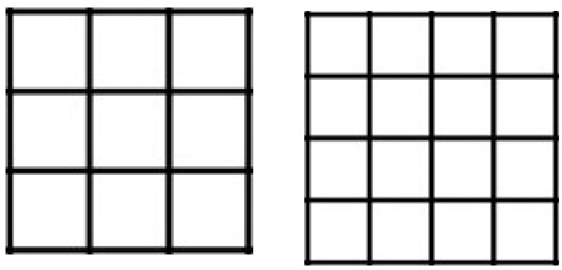


Figura 5: Dibujo de elaboración propia

b) Para un cuadrado que tenga x baldosas a cada lado necesitaré $x - 1$ filas de x adhesivos horizontales, y las mismas verticales. Entonces la cantidad de adhesivos que necesitaré es $f(x) = 2x(x-1) = 2x^2 - 2x$.

Si tengo x baldosas en el cuadrado tendré $\sqrt{x}$ baldosas a cada lado y entonces el número de adhesivos es $f(x) = 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = 2x - 2\sqrt{x}$.

c) Para un rectángulo que mide x baldosas de alto y y de largo necesitaré $x-1$ filas de y adhesivos en horizontal y $y-1$ filas de x adhesivos en vertical, es decir, $f(x) = y(x-1)+x(y-1)$

No se puede saber cuánto adhesivo si solo me dicen cuántas baldosas tengo porque puedo hacer muchos rectángulos distintos. Si tengo 12 baldosas puedo hacer un rectángulo de 6×2 y necesitar 16 baldosas o uno de 3×4 y necesitar 18.

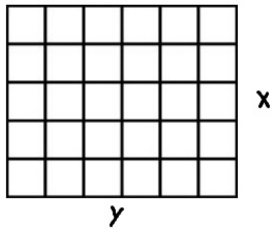


Figura 6: Dibujo de elaboración propia

Problema 14

a) La distancia recorrida solo puede ser positiva porque cuanto más ando más recorro aunque vaya marcha atrás.

b) La altura de los rectángulos tiene que ser mayor que cero y además no puede ser más grande que la mitad de lo que mide la cuerda porque sino no puedo hacer el rectángulo.

c) El dominio son lo números enteros de 1 al 6 que son los valore que puede salir en un dado.

d) La edad tiene que ser positiva, no hay una edad máxima pero a partir de 150 años no tiene sentido.

e) Cada equipo de baloncesto puede llevar a un partido 5 jugadores y 5 suplentes, así que jugarán un número entero de personas que serán por lo menos 5 personas y como mucho 10.

f) El número de herederos tiene que ser un número entero y ser por lo menos 1 porque sino no hay a quien repartir nada.

Anexo 2: Material para el problema 13

- $f(x) = x$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = 3x + 5$
- $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = sen(x)$
- $f(x) = 2$
- $f(x) = \sqrt{2x}$
- $f(x) = 5 + 6x - x^2$
- $f(x) = 1/x$