Trabajo Fin de Máster

Introducción a la enseñanza de la derivada: Una propuesta didáctica

Introduction to the teaching of the derivative: a didactical proposal

Autor/es

Marta Ribas Corvinos

Directora

Carmen Julve Tiestos

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Año 2021

ÍNDICE

RESUMEN

En el presente documento se recoge el estudio didáctico del objeto matemático de **las derivadas**, en relación a su aparición en el ámbito académico al nivel de 1º de Bachillerato Científico en la asignatura de Matemáticas I.

Una vez expuestos los antecedentes, se incorpora una propuesta didáctica orientada a la introducción de las derivadas y su contextualización basándose en el análisis anterior.

INTRODUCCIÓN

Comenzaremos definiendo y contextualizando en el ámbito académico nuestro **objeto matemático** junto a sus campos de problemas, técnicas y tecnologías correspondientes.

Posteriormente, analizaremos cómo se trata este objeto en la actualidad realizando el estudio de tres **libros de este curso** de 1º de Bachillerato de Matemáticas I, y también se compararán con otro libro equivalente de la etapa de la LOGSE, y cómo afecta esto al alumnado ayudándonos del estudio de Contreras, Luque, y Ordoñez (2003).

Razonaremos sobre si el alumnado presenta o no los **conocimientos previos** necesarios para afrontar las derivadas, es decir, si las etapas anteriores le han proporcionado las habilidades requeridas.

Entraremos más en detalle sobre las **razones de ser**, comparando las escogidas con las históricas a través del estudio de Godino y Batanero (1994), también en el resto de **campos de problemas**, en las **técnicas** con las que se resuelven y en las **tecnologías** en las que se apoyan éstas. Para ello, se expresan a modo de ejemplo algunos ejercicios enfocados en éstos, indicando a su vez la metodología que se seguirá para su implementación en el aula.

Finalmente, se realiza una **propuesta didáctica** recopilando la secuencia completa y un método de evaluación de ésta.

A) SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

1. Objeto matemático a enseñar

El objeto matemático que se va a tratar en este trabajo son las derivadas, en concreto, la introducción al concepto de derivada de una función.

Es cierto que resulta útil mostrar sus aplicaciones a la hora de recalcar su funcionalidad, especialmente en relación a graficar y representar funciones. También sus relaciones con otros tantos objetos matemáticos, pero considero que, previo a esto, es necesario poseer una profunda comprensión del propio objeto matemático en sí. Es por ello, por lo que **en esta propuesta didáctica nos centraremos propiamente en el significado de derivada de una función en un punto, planteando situaciones contextualizadas que justifiquen la necesidad de definir este objeto matemático**. Posteriormente trataremos la función derivada, primero a través de la identificación de las gráficas de las funciones derivadas, y, posteriormente, a través de la forma clásica. Por lo tanto, sus distintas aplicaciones (crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, puntos de inflexión, y representación gráfica de funciones) sólo aparecerán en contadas ocasiones, dado que la extensión de esta propuesta no permite abarcar todos los contenidos señalados.

En la actualidad, hay una **concepción** casi puramente **algebraica** de las derivadas, es decir, su enfoque está orientado a aprender a derivar funciones de manera sistemática a través de la repetición de reglas de derivación, sin necesidad de llegar a comprender en plenitud lo que se está haciendo. Con este trabajo se busca conseguir una introducción contextualizada a la derivada de la función en un punto y sus aplicaciones/problemas consiguiendo una mejor comprensión el objeto como tal e incluso que sean los mismos alumnos los que deduzcan las reglas y propiedades de derivación en vez de aprenderlas de forma memorística.

2. Curso y asignatura en la que se sitúa el objeto matemático

Nuestro objeto matemático aparece por primera vez en el ámbito académico **en 1º de Bachillerato**, tanto en Matemáticas I como en Aplicadas a las Ciencias Sociales. Nosotros nos concretaremos más en su enfoque científico, es decir, **Matemáticas I.** Esta es la causa por la que se ha escogido este curso como estudio, para observar cómo se introduce desde el cero en la vida escolar este objeto matemático.

El currículo de Bachillerato queda recogido en la **Orden ECD/494/2016**, de 26 de mayo, en la que se aprueba y autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. En ella encontramos que, dentro de la asignatura de Matemáticas Científicas de 1º de Bachillerato, las derivadas pertenecen al bloque 3 (Análisis) dado que pertenece al campo de estudio de funciones. Es por ello, por lo que va acompañada de otros objetos y propiedades, como funciones, función inversa, límite, continuidad y representación gráfica de una función.

Los contenidos que nosotros vamos a abordar en este trabajo corresponden a:

- Derivada de una función en un punto.
- Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto.
- Recta tangente y normal.
- Función derivada.
- Cálculo de derivadas.

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías pretendes enseñar?

3.1 Campos de problemas

1. **C.P. 1: Aquellos que corresponden a su razón de ser:** recogen los problemas que dieron lugar a la aparición del objeto, y que, por lo tanto, se usaran en adelante para introducir el concepto de derivada. Éstos son:
    - Razones de magnitudes físicas y su medida (incrementos):
        - Tasa de variación media: obtención a través de una gráfica, de una tabla de valores y a partir de la expresión de su ecuación.
        - Tasa de variación instantánea: aproximación a ésta con la tasa de variación media escogiendo cada vez intervalos más pequeños, y obtención a partir de la definición de límite.
    - Razones de interpretación geométrica (pendiente de la recta tangente a una función en un punto):
        - Pendiente de una curva: concepto intuitivo.

    - Pendiente de una curva entre dos puntos: pendiente de la recta secante que uno esos dos puntos.
2. **C.P. 2:** Una vez introducido el objeto, será necesario profundizar en su significado, y el siguiente campo de problemas tratará el **cálculo por aproximación numérica** de la derivada de una función en un punto.
3. **C.P. 3:** Posteriormente pasaremos a plantear problemas donde el alumno deberá aplicar las conclusiones obtenidas en los dos primeros campos de problemas, centrándonos en problemas en **los que relacionen las expresiones graficas de las funciones y de sus funciones derivadas.**
4. **C.P. 4:** Una vez asentados el significado de la derivada, pasaremos a trabajar problemas que se encargan del **cálculo algebraico** de la derivada en un punto y de la función derivada.

3.2 Sobre las técnicas

- **Tasa de variación media e instantánea:**
    - Primero se trabajará a través del método de la **representación gráfica** de manera que el alumnado vea intuitivamente su significado como incremento y, de esta manera, comprenda en plenitud la idea de tasa de variación. Se les guiará de forma que obtengan por ellos mismos la expresión que rige las tasas de variaciones a partir de los incrementos de los ejes en las gráficas.
    - Después de ello, en vez de darles la representación gráfica y que de ella escojan y saquen los puntos de cálculo, se les dará directamente una **tabla de valores** con la que trabajar. Este es un método más abstracto, es por ello por lo que se trabaja a posteriori.
- **Pendiente de una recta:**
    - Se busca que a partir de la **gráfica** de una función sepan dibujar la recta tangente a ésta en un punto de su dominio. De esta forma verán la correlación que existe entre la pendiente de la función y la de su recta tangente.
    - Una vez hayan adquirido la idea de que comparten pendiente y qué es lo que representa la recta tangente, les resultará más sencillo

obtenerla en forma de **ecuación**, ya que habrán asumido que el término que acompaña la incógnita es el equivalente a la pendiente.

- **Derivada de una función en un punto:**
    - Inicialmente se abordará este problema desde la base del concepto de derivada, a través de su **definición como límite**. Dado que con las técnicas anteriores ya han visto como la tasa de variación se ajusta más a la pendiente conforme disminuimos el tamaño de los incrementos, esto les conducirá a la idea de límite.

      El objeto de límite aparece también por primera vez en este curro, en la unidad anterior para ser más exactos, pertenece al mismo bloque de análisis.

      Por lo que consiste en seguir trabajando con incrementos, en base a ambas representaciones (gráficas y tablas de valores), pero tomando la función general y forzando dichos incrementos a un único punto aplicando el límite.
    - Otra forma de abordar este problema, es aplicando las **propiedades de las derivada**s de funciones, obteniendo directamente su expresión general. Es decir, a modo algebraico.

      Es el método más abstracto y complejo con el que van a trabajar, por lo que se acompañará de actividades en las que se muestren por un lado, la representación gráfica de la función, y por el otro la representación gráfica de su derivada correspondiente. De esta forma, verán de manera sencilla la relación entre la derivada y las variaciones de dirección de la función.

3.3 Sobre las tecnologías

Las tecnologías en las que se apoyan dichas técnicas son:

- Representación de una función en forma gráfica, tablas y algebraica.
- Definición de tasas de variación media e instantánea.
- Definición de recta secante, tangente y propiedades de las rectas paralelas.
- Propiedades de los límites
- Definición de derivada de una función en un punto.

- Definición de pendiente de una recta.
- Reglas y propiedades de derivación.

B) SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO

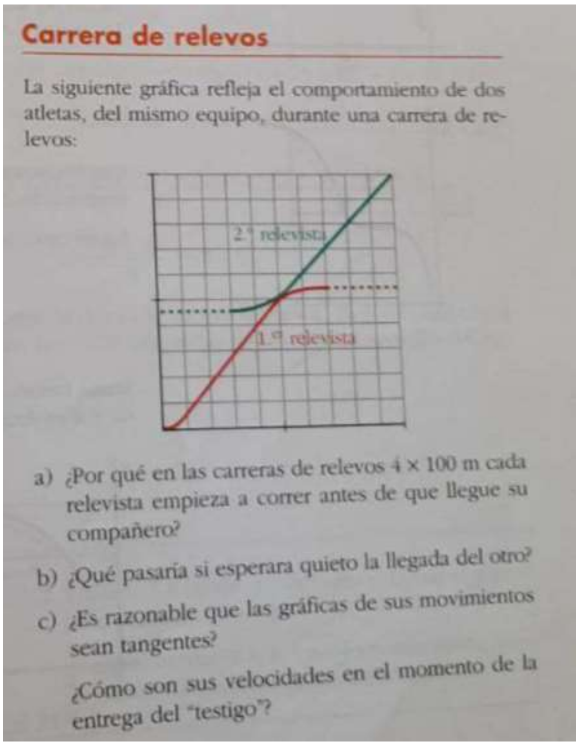
1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

El objeto matemático de las derivadas pertenece al Bloque 3 del currículo de Matemáticas I de primero de Bachillerato, Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo**. Esta la primera vez que ven este objeto los alumnos, por lo que es de vital importancia saber cómo introducirlas correctamente en su vida educativa.**

Para este estudio, vamos a analizar tres libros de texto: Matemáticas I de 1º de Bachillerato de los grupos ANAYA, SM y Santillana. Además, se añadirá el análisis de un libro de la editorial ANAYA perteneciente a la normativa LOGSE de 3º de BUP, equivalente a 1º de Bachiller de ahora.

Por lo general, se suelen presentar de manera epistemológica, es decir, hacen referencia a las razones por las que se conjeturaron en el pasado. Una buena manera de comprender las derivadas sería hacer que el alumnado se enfrentara a los mismos problemas que encontraron y tuvieron que resolver sus autores a lo largo de la historia. Sin embargo, se limita a presentar e informar de las razones en vez de buscar que el estudiante realice un proceso semejante al que dio origen al actual concepto de derivada.

Los libros analizados siguen la concepción clásica de derivada, comprenden su interpretación geométrica y su razón de cambio. Es por ello, por lo que se hace uso de estos dos conceptos, **recta tangente** de una curva en un punto y **velocidad instantánea** de movimientos no uniformes, para dar razón al objeto matemático de derivada. Hacen hincapié en la importancia y las grandes aportaciones de estos dos elementos a la ciencia. Aunque no suele ser tan habitual, también aparece la **optimización** como razón. Este es un campo más cercano al alumnado, les resulta más sencillo de entender conceptualmente, lo que puede ayudar a atraer su atención y crear interés en ellos.



Carrera de relevos

La siguiente gráfica refleja el comportamiento de dos atletas, del mismo equipo, durante una carrera de relevos:

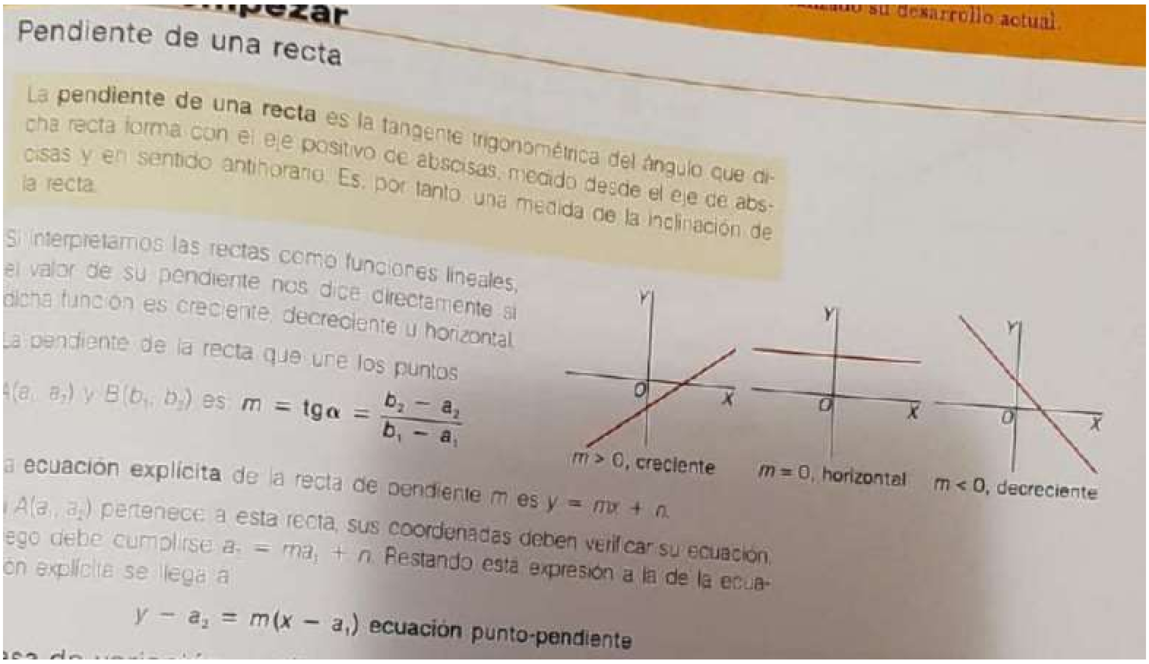
a) ¿Por qué en las carreras de relevos 4 × 100 m cada relevista empieza a correr antes de que llegue su compañero?

b) ¿Qué pasaría si esperara quieto la llegada del otro?

c) ¿Es razonable que las gráficas de sus movimientos sean tangentes?

¿Cómo son sus velocidades en el momento de la entrega del "testigo"?

Figura 1 Problema razón de ser ANAYA (tasas de variación)



Pendiente de una recta

La **pendiente de una recta** es la tangente trigonométrica del ángulo que dicha recta forma con el eje positivo de abscisas, medido desde el eje de abscisas y en sentido antihorario. Es, por tanto, una medida de la inclinación de la recta.

Si interpretamos las rectas como funciones lineales, el valor de su pendiente nos dice directamente si dicha función es creciente, decreciente u horizontal.

La pendiente de la recta que une los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ es: $m = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$

a **ecuación explícita** de la recta de pendiente m es $y = mx + n$.

$A(a_1, a_2)$ pertenece a esta recta, sus coordenadas deben verificar su ecuación, ego debe cumplirse $a_2 = ma_1 + n$. Restando esta expresión a la de la ecuación explícita se llega a

$$y - a_2 = m(x - a_1) \text{ ecuación punto-pendiente}$$

Figura 2 Problema razón de ser SM (pendiente de una recta)

Continúan **definiéndola** a partir del **límite**, establecida por Cauchy, relacionando ambos conceptos matemáticos. Por esta misma razón, es necesario que para cuando lleguen a este tema conozcan y entiendan el objeto de límite.

Una vez que aprenden a derivar, en el tema consecutivo, se tratan sus aplicaciones más directas, **crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad** de una función. Al fin y al cabo, se introduce la derivada con el objetivo de conseguir un estudio más completo de las funciones pudiendo llegar a su representación gráfica.

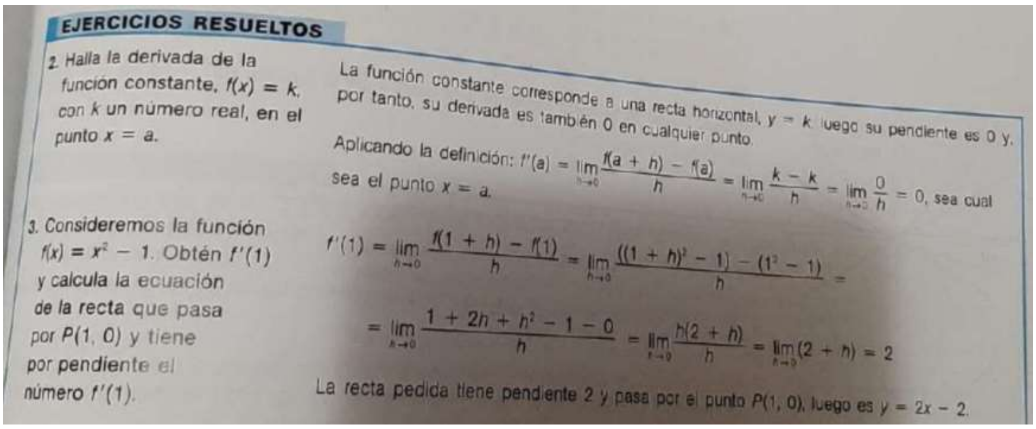
2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

El currículo de Bachillerato, Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, nos indica los contenidos que se deben abordar durante la unidad, los estándares de aprendizaje evaluables que sirven como referencia para determinar, a través de los criterios de evaluación, si han conseguido adquirirlos.

El mecanismo de realización de ejercicios se basa en la **repetición**, es decir, en los libros de texto se repite el mismo estilo de ejercicio en varios problemas. Además de ello, se inicia desde el modelo de problema más sencillo y básico para, poco a poco, llegar al más completo. De esta manera, se intenta asegurar que comprendan en su totalidad todos los conceptos amoldando paso a paso su mente.

Los **campos de problemas** que encontramos los podemos dividir en:

1. Aprender a derivar: aplicación de la definición como límite para obtener el valor de la derivada en un único punto y de las normas de derivación (derivadas de funciones elementales, de operaciones entre funciones y regla de la cadena).



EJERCICIOS RESUELTOS

2. Halla la derivada de la función constante, $f(x) = k$, con k un número real, en el punto $x = a$.

La función constante corresponde a una recta horizontal, $y = k$, luego su pendiente es 0 y, por tanto, su derivada es también 0 en cualquier punto.

Aplicando la definición: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$, sea cual sea el punto $x = a$.

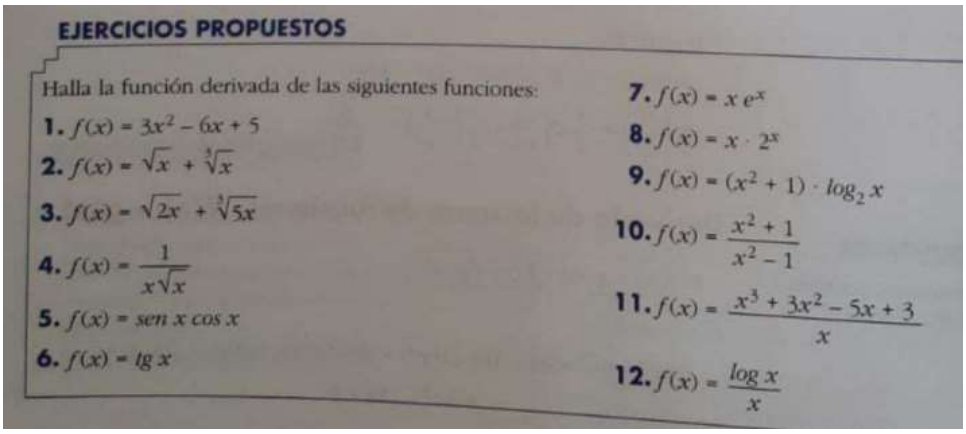
3. Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$. Obtén $f'(1)$ y calcula la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 0)$ y tiene por pendiente el número $f'(1)$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{((1+h)^2 - 1) - (1^2 - 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2 + h) = 2$$

La recta pedida tiene pendiente 2 y pasa por el punto $P(1, 0)$, luego es $y = 2x - 2$.

Figura 3 Campo problemas 1 SM (definición de derivada)



EJERCICIOS PROPUESTOS

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

3. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

5. $f(x) = sen\, x \cos x$

6. $f(x) = tg\, x$

7. $f(x) = x\, e^x$

8. $f(x) = x \cdot 2^x$

9. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot log_2 x$

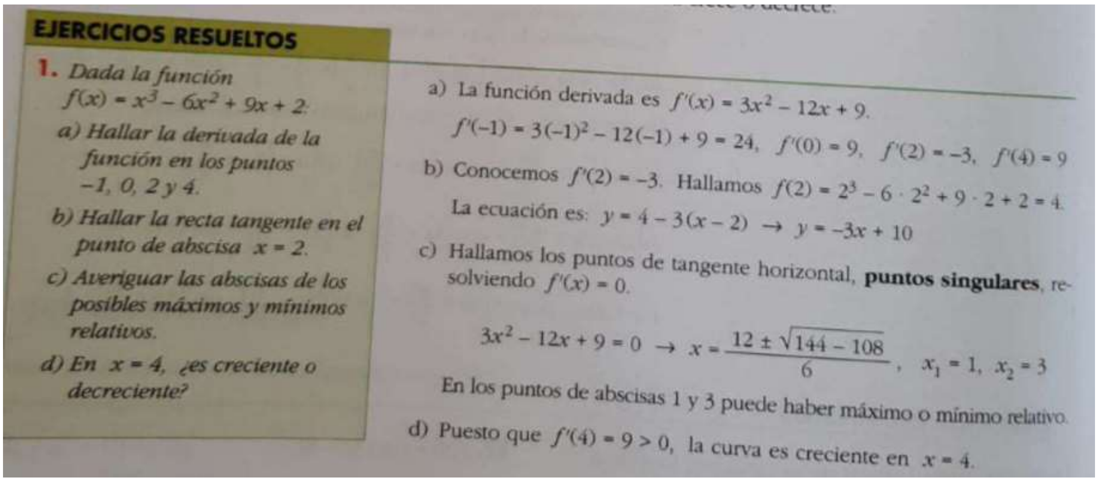
10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

11. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$

12. $f(x) = \dfrac{log\, x}{x}$

Figura 4 Campo problemas 1 ANAYA (derivada de una función)

2. <u>Aplicaciones/Funcionalidad de las derivadas</u>: los podemos subdividir en los problemas físicos (tasa de variación media e instantánea), de optimización, y geométricos (recta tangente, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad) con objetivo final la representación gráfica de una función.



EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Dada la función* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

a) Hallar la derivada de la función en los puntos −1, 0, 2 y 4.

b) Hallar la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$.

c) Averiguar las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.

d) En $x = 4$, *¿es creciente o decreciente?*

a) La función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 12(-1) + 9 = 24,\quad f'(0) = 9,\quad f'(2) = -3,\quad f'(4) = 9$

b) Conocemos $f'(2) = -3$. Hallamos $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 2 = 4$.

La ecuación es: $y = 4 - 3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 10$

c) Hallamos los puntos de tangente horizontal, **puntos singulares**, resolviendo $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6},\quad x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

En los puntos de abscisas 1 y 3 puede haber máximo o mínimo relativo.

d) Puesto que $f'(4) = 9 > 0$, la curva es creciente en $x = 4$.

Figura 5 Campo de problemas 2 ANAYA (aplicaciones de las derivadas)

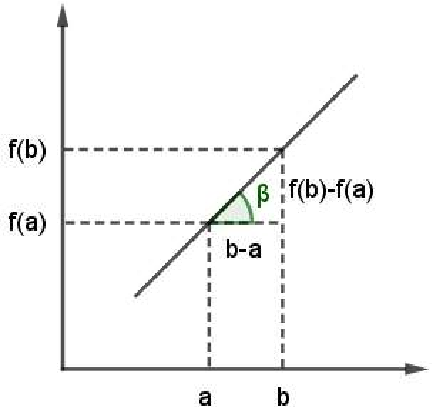
Las **técnicas** con las que se pueden resolver estos tipos de problemas son diversas. Se obtiene la pendiente entre dos puntos a través de la tasa de variación media (incrementos). También la pendiente de una recta de su propia definición. Tenemos:

1. Cálculo del valor de la derivada de una función en un determinado punto a través de dos métodos: Con la definición de derivada en un punto; Calculando la derivada de la función general y evaluarla posteriormente en el punto deseado.

2. Estudio de las funciones derivadas por tramos. Dos metodologías: Encontrar los puntos que anulan la función derivada, dar valores y ver si es positivo o negativo; Resolver directamente inecuaciones de esa misma función.

Tecnologías en las que se basan y fundamentan las estas técnicas:

- Concepto de pendiente de la representación gráfica de una función



$$y = m \cdot x + c$$

$$m = tg(\beta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$T.V.M.[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$T.V.I.(a) = T.V.M.[a, a + h] \; = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

- Definición de límite de funciones.

$$f(x) \; = L \; \Leftrightarrow \; \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \; \in Dom(f), 0 < |x - c| < \delta \mapsto |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Definición de derivada en un punto.

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Propiedades y reglas de derivación

Función: f(x)	**Derivada: f'(x)**
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = 1/x$

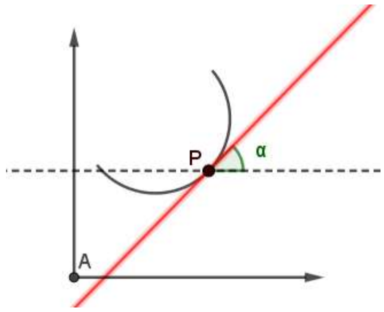
$f(x) = log_a(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot ln\,(a)}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot ln\,(a)$
$f(x) = sen(x)$	$f'(x) = cos(x)$
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sen(x)$
$f(x) = tg(x)$	$f'(x) = 1/cos^2(x)$

Función: f(x)	**Derivada: f'(x)**
$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x)\ \pm g(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$f(x)/g(x)$	$\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

$$(gof)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

- Características y representaciones de recta tangente de una curva.

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



- Definiciones y normas de las aplicaciones geométricas de las derivadas: función creciente y decreciente, cóncava y convexa, máximos y mínimos. Indagaremos con cuales trabaja y cómo las trata (definición, demostración, ejemplos,…)

f(x) crece en $x_0 \Leftrightarrow f(x)>f(x_0)$ siendo $x> x_0 \equiv f'(x_0)>0$ f(x) decrece en $x_0 \Leftrightarrow f(x)<f(x_0)$ siendo $x> x_0$, $\equiv f'(x_0)<0$ x_0 es un posible máximo o mínimo cuando $f'(x_0)=0$
f(x) es cóncava en $x_0 \Leftrightarrow f''(x_0)>0$ f(x) es convexa en $x_0 \Leftrightarrow f''(x_0)<0$ x_0 es un punto de inflexión cuando $f''(x_0)=0$

La editoriales ANAYA y Santillana, comparten metodologías y secuenciación muy similares. Ambos, comienzan la unidad con una breve introducción histórica de la a parición de las derivadas, mostrando la funcionalidad e importancia de éstas. SM en cambio, enfoca dicha introducción a su utilidad en el proceso de optimización.

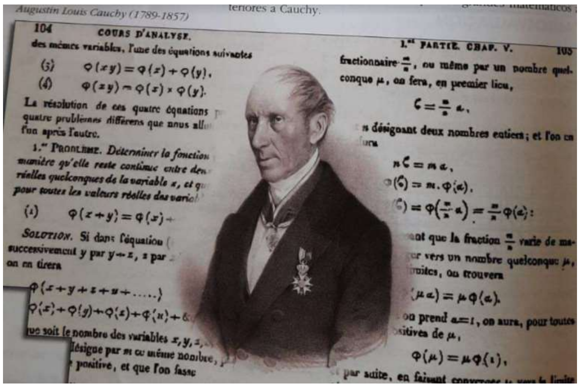
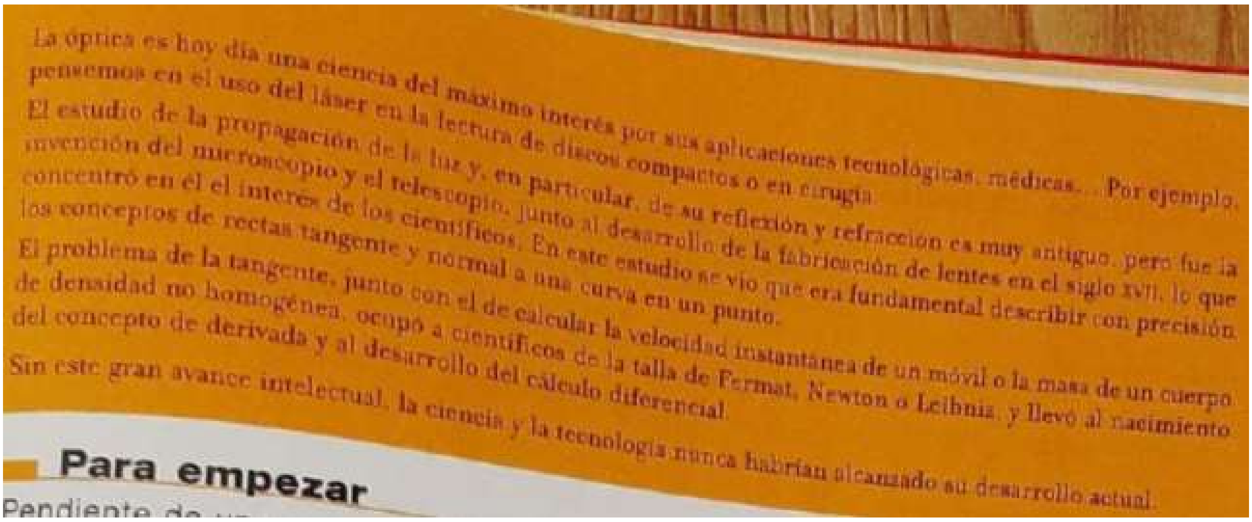


Figura 6 Introducción teórica ANAYA (Cauchy)


La óptica es hoy día una ciencia del máximo interés por sus aplicaciones tecnológicas, médicas... Por ejemplo, pensemos en el uso del láser en la lectura de discos compactos o en cirugía.

El estudio de la propagación de la luz y, en particular, de su reflexión y refracción es muy antiguo, pero fue la invención del microscopio y el telescopio, junto al desarrollo de la fabricación de lentes en el siglo XVII, lo que concentró en él el interés de los científicos. En este estudio se vio que era fundamental describir con precisión los conceptos de rectas tangente y normal a una curva en un punto.

El problema de la tangente, junto con el de calcular la velocidad instantánea de un móvil o la masa de un cuerpo de densidad no homogénea, ocupó a científicos de la talla de Fermat, Newton o Leibniz, y llevó al nacimiento del concepto de derivada y al desarrollo del cálculo diferencial.

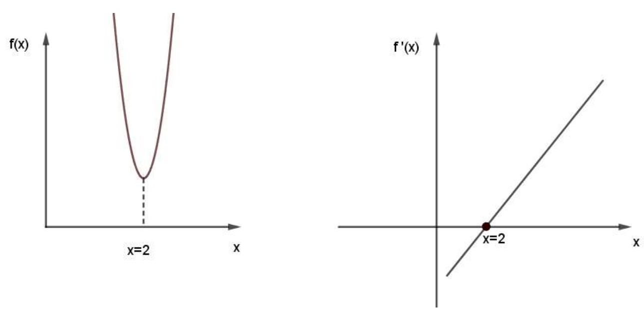
Sin este gran avance intelectual, la ciencia y la tecnología nunca habrían alcanzado su desarrollo actual.

Para empezar

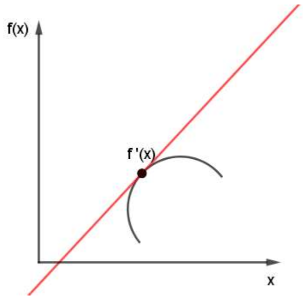
Figura 7 Introducción teórica SM (Optimización)

Distintos formatos de **representar** las derivadas:

1) Simbólica: $D(x) = f'(x) = df/dx$.
2) Verbal: como pendiente de una función.
3) Algebraica: $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
4) Gráfica:



5) Geométrica:



Tablas en las que se recogen el estudio de los libros:

	LOE			LOGSE
	ANAYA	**SM**	**Santillana**	**ANAYA**
Física	-	X	X	-
Geométrica	-	X	X	X
Optimización	X	-	-	-

Tabla 1 Razones de ser

	LOE			LOGSE
	ANAYA	**SM**	**Santillana**	**ANAYA**
Definición de derivada	X	X	X	-
Derivada de funciones	X	X	X	X
Pendiente de una recta	X		-	-
(De)crecimiento, máx. y mín., concavidad y convexidad	X	X	X	X
Optimización	X	-	X	-
Representación gráfica de funciones	X	X	X	X

Tabla 2 Campos de problemas

	LOE			LOGSE
	ANAYA	**SM**	**Santillana**	

Derivada de un punto con la definición	X	X	X	-
Derivada en un punto sustituyendo	X	X	X	-
Derivada de funciones básicas	X	X	X	X
Derivada de operaciones entre funciones	X	X	X	X
Derivada de funciones inversas	-	-	-	X
Regla de la cadena	X	X	X	X
Definición de pendiente	X	-	-	-
Tasas de variación media e instantánea	X	X	X	-
Recta tangente	X	X	X	-
(De)crecimiento, máx. y mín., concavidad y convexidad	X	X	X	X
Optimización	X	-	X	-
Representación gráfica de funciones	X	X	X	X

Tabla 3 Técnicas

	LOE			**LOGSE**
	ANAYA	**SM**	**Santillana**	**ANAYA**
Definición de pendiente de una recta	X	-	-	-
Definición de las tasas de variación media e instantánea	X	X	X	-
Propiedades de los límites (indeterminaciones 0/0)	X	X	X	X

Definición de derivada de una función en un punto	X	X	X	-
Propiedades y reglas de derivación	X	X	X	X
Definición de recta tangente	X	X	X	-
Definiciones y normas de la representación gráfica de una función (máx. y mín., (de)crecimiento,…)	X	X	X	X

Tabla 4 Tecnologías

	LOE			**LOGSE**
	ANAYA	**SM**	**Santillana**	**ANAYA**
Simbólica	X	X	X	X
Verbal	-	X	X	X
Algebraica	X	-	-	X
Gráfica	X	X	X	X
Geométrica	X	X	X	-

Tabla 5 Representaciones

En los tres libros de texto se tratan los mismos contenidos, pero con distintas metodologías. Comienzan definiendo la pendiente de una función y relacionándola con la tasa de variación media para, a partir de esta idea de incrementos, formalizar la definición de derivada a con el límite. Sin embargo, ANAYA y Santillana pasan directamente a la aplicación de las normas de derivación, mientras que SM busca demostrarlas. Esta es la mayor diferencia que he encontrado, SM tiene un enfoque más teórico matemático fundamentando todo con **demostraciones matemáticas** sencillas, además de que introduce el objeto a través de una **razón de ser distinta**. Por lo demás, contienen los mismos contenidos, en el mismo orden, utilizando los mismos formatos representativos, y mismos campos de problemas.

El libro de ANAYA de la LOGSE por lo contrario, dista en gran parte de ellos. **Lo primero de todo es que, para cuando llegaban a este curso, ya habían tratado las derivadas, no es la primera vez que las veían.** Por ello, omiten las primeras sesiones, realizan una breve introducción del curso anterior sin hacer una gran referencia a las razones de ser. Dan tecnologías por conocidas omitiendo sus campos de problemas correspondientes. A partir de ahí, sí que sigue una secuencia similar de los siguientes temas, añadiendo la derivada de las funciones inversas que en la actualidad sólo se menciona. Comparte con el libro actual de su editorial las demostraciones matemáticas.

Algo interesante es que, como en la LOGSE ya conocían las derivadas, aparecían en ese curso las integrales, siendo que en la LOE no se introducen hasta el curso siguiente.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Obstáculos epistemológicos: (Contreras, Luque, y Ordoñez, 2003)

1. Pendiente de la recta tangente: Leibniz implementa un nuevo método basado en las ideas de variable e infinitésimo, evita el concepto límite obteniéndola de la forma dxdy. El obstáculo es no explicitar el cambio continuo en el caso de que las secantes tienden a las tangentes.

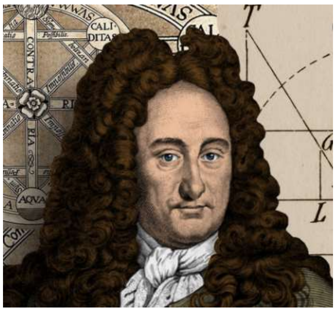


Figura 8 Gottfried Leibniz

2. Razón de cambio: Newton consiguió obtener las fluxoines correspondientes a unas fluentes por sus relaciones y expresión de fórmulas analíticas de curvas en forma de canónicas simples.

Figura 9 Isaac Newton

3. <u>Función:</u> La Teoría de las Funciones analíticas de Lagrange desarrolla en serie de potencias las funciones. Esta dificultad se aborda a través del Cálculo libre reduciendo el análisis algebraico de cantidades finitas.

Figura 10 Joseph Louis Lagrange

4. <u>Numérica</u>: el mayor problema está en el desarrollo de la teoría de convergencia de series del Curso de Análisis de Cauchy. El obstáculo es considerar que una función es derivable porque su derivada lo sea.

Figura 11 Augustin Louis Cauchy

Para conocer los **obstáculos**, dificultades y errores que los **alumnos de 1º de Bachillerato** que tienen en relación al objeto matemático de las derivadas, analizaremos el siguiente **estudio**: (González-García, Muñiz-Rodríguez, y Rodríguez-Muñiz, 2018)

1. Derivada de una función en un punto y relación entre tasa de cambio y derivada: Algunos estudiantes tenían problemas para obtener la derivada en un punto de expresión algebraica, sin embargo, para puntos conocidos sus valores lo resolvían con facilidad. Esto nos va a entender, que la dificultad se encuentra en la comprensión del lenguaje. Habían manejado previamente la tasa de cambio, pero es la primera vez que aparece el término de derivada y su relación con esta primera.
2. Función de derivada: Descubrimos múltiples errores en relación a las operaciones. Esto proviene a un mal aprendizaje de ciertos métodos y conceptos anteriores. Se vieron fallos en el cálculo de límites ya que no diferencian el límite en un punto con el valor de una función en ese mismo punto, no tienen bien interiorizado el concepto de límite.

   Ejemplo 1: $\lim_{h \to 0}(2 + h) = 2 + h$

   Ejemplo 2: El límite $\lim_{h \to 0}\left({}^{0}/_{h}\right)$ es una indeterminación 0/0 y no tiene solución.
3. Técnicas de derivación: derivada de funciones elementales y álgebra de las derivadas: Tenían problemas para aplicar las técnicas a la hora de derivar la función logarítmica, cuyo origen reside en el desconocimiento de ésta y liaban las reglas de derivación de productos con cocientes.

   Ejemplo 1: La derivada de $f(x) = cos\left(\frac{x+1}{x}\right)$ es $f'^{(x)} = -sen\left(\frac{x+1}{x}\right)$ porque la derivada de $\frac{x+1}{x}$ es $1/1 = 0$.

   Ejemplo 2: La derivada de $f(x) = 81 \cdot ln^4(x^2 + 3)$ es $f'(x) = 0$ porque la derivada de 81 es 0.
4. Técnicas de derivación: regla de la cadena: Encontramos varios errores y dificultades: problemas para identificar las componentes para desarrollar una función compuesta, inadecuada asimilación de las reglas simples y de la cadena de derivadas, y, centrándonos en la función logarítmica, no distinguen la potencia de un logaritmo con el logaritmo de una potencia, aplicando incorrectamente la regla de la cadena.
5. Interpretación geométrica de las derivadas: Muestran desde falta de conocimiento sobre conceptos básicos anteriores de geometría analítica en el plano como la ecuación punto-pendiente y explícita de una recta, y la

pendiente, como más avanzados debidos al lenguaje al obtener la ordenada del punto en el que se estudia la recta tangente.

6. Derivabilidad de funciones: No sabían cómo determinar límites de funcione que estaban definidas a trozos ya que cometían errores al sacar los laterales. Como hemos comentado previamente, no diferencian el límite de la función en un punto con el valor que adquiere dicha función en ese mismo punto, esto les lleva a cometer fallos en el cálculo de éstos y las condiciones que se deben dar para que una función sea derivable en un punto.

$$\textit{Ejemplo: } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

La función es derivable en x=0 porque $\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = 0$

De ello concluimos que, a pesar de que tienen un buen control de los procedimientos sistemáticos, tienen fallos al trabajar con expresiones algebraicas, malas elecciones a la hora de escoger una estrategia de resolución, y desconocimiento de ciertas formas de expresión de funciones. No comprenden la relación entre la derivada y la geometría, y no comprueban ni corroboran la veracidad ni acierto de la resolución.

Recogemos que tienen menos fallos en métodos sistemáticos, no comprenden el lenguaje, y se produce una algebrización de la derivada, ya que se encuentran más cómodos desde el punto de vista del álgebra y no geométrico. Como hemos mencionado, los alumnos se resisten a cambiar de método de resolución a pesar de que éste sea incorrecto ya que no tienen le habilidad de analizar la corrección del procedimiento.

Otro elemento a tratar, como bien indica Contreras et al. (2003), es la concepción que tienen los estudiantes sobre las distintas representaciones de una función. Trabajar las funciones expresadas en forma de gráficas y tablas ya que éstas facilitan, la comprensión del concepto de tasa de variación. Definir en el aula el lenguaje matemático que se va a utilizar ayuda a prever y minimizar las dificultades que ésta pueda conllevar. Finalmente, debemos enseñarles a tener un análisis lógico matemático que les permita repasar y verificar las resoluciones que llevan a cabo.

En definitiva, el estado de enseñanza-aprendizaje de la derivada es que parte de un **enfoque** puramente **algebraico**, dificultando la comprensión del objeto matemático.

C) SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO.

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el objeto?

Las matemáticas es una de las asignaturas más acumulativas a las que se deben enfrentar los estudiantes, es decir, en todo momento se recurren a contenidos abordados con anterioridad para poder avanzar en la materia.

En relación a las tasas de variación, el hecho de que hayan trabajado previamente con los conceptos físicos de velocidad media e instantánea puede facilitarles su significado. Para su obtención, deberán manejarse con **funciones** como **dependencia entre variables**, entendiendo su **dominio**, su **representación gráfica**, entendiendo su **crecimiento** y **decrecimiento**, y en formato de **tabla de valores**, del campo matemático del cálculo, y relacionar los incrementos con la tangente trigonométrica.

Con el objetivo de que asientan la idea de derivada como **pendiente**, se buscará que vean su representación geométrica. Será imprescindible que sepan representar la gráfica de una recta a partir de su ecuación y el proceso inverso, hallar la ecuación a partir de dos puntos y la pendiente. Entre los contenidos útiles se encuentran las ideas **de recta secante** y **tangente** a una curva, con las propiedades que éstas conllevan. También comprender la relación entre los términos de la ecuación explícita de una recta y su significado geométrico, como por ejemplo m equivale a la pendiente.

Por último, dado que la derivada se define como **límite**, será necesario que sepan trabajar con este objeto, especialmente con la indeterminación 0/0, también contenido en el campo del cálculo. En su desarrollo deberán saber manejar algunos elementos del álgebra como las **operaciones algebraicas** entre polinomios y su resolución.

En resumen

- Dependencia funcional entre dos variables
- Funciones sencillas: lineal, afín, cuadrática y su representación
- Pendiente, recta secante, recta tangente a una curva en un punto
- Tasa de Variación Media
- Operaciones con polinomios
- Concepto de límite

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera los adquiera?

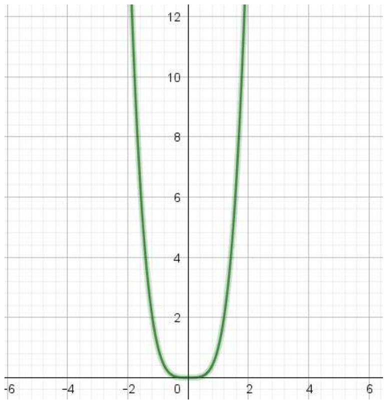
A lo largo de la etapa de la **Educación Secundaria Obligatoria**, la cual corresponde a la enseñanza previa al Bachillerato, y según indica el currículo oficial de la **Orden EDC/489/2016**, del 26 de mayo, en la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón incluido en el BOA del 02/06/2016, trabajan con los campos del álgebra, trigonometría y funciones donde se abordan los contenidos mencionados en el apartado anterior. El objeto de límite, sin embargo, no aparece hasta 1º de bachillerato en la unidad anterior. Por último, dentro del campo de física, se espera que, al estar en Matemáticas I de la modalidad de ciencias, hayan cursado tanto en los dos últimos cursos de la E.S.O. como en el mismo curso de 1º de Bachillerato física.

Sí bien es cierto, que no siempre como se debería ya que, por falta de tiempo, hay ocasiones en las que se tratan en menor medida en las que ni si quiera se llega. Oficialmente la enseñanza previa de un alumno de 1º de Bachillerato es suficiente para garantizar que se puede abordar las derivadas con éxito, pero, tanto las investigaciones citadas anteriormente como las reflexiones llevadas a cabo con el tutor de Practicum, como mi propia experiencia, la realidad es que el alumnado tiene muchas dificultades a la hora de abordar este importante objeto matemático. Muchas veces nos encontramos que todavía cometen errores al realizar operaciones con polinomios y expresiones algebraicas, y que carecen del conocimiento de ciertos contenidos geométricos ya que, al pertenecer de a las últimas unidades de la secuencia anual, no se llegan a dar.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos los posean?

A continuación, se van a exponer un ejercicio de ejemplo que nos servirán como evaluación inicial y observar si presentan los contenidos necesarios para abordar el tema. También nos servirán para obtener información de cómo de adquiridos los tienen y si comprenden las relaciones entre éstos y sus características.

Ejercicio 1 Observa la siguiente gráfica que representa una función:



a) Obtén los valores de y para los valores de x = -1,0,1, tanto a partir de la gráfica como con la expresión de la función.
b) ¿Dónde dirías que hay un mínimo en la gráfica? ¿La gráfica crece o decrece a la izquierda de éste? ¿y a la derecha?
c) Calcula la tasa de variación/velocidad media entre los puntos x = 0,2
d) Dibuja la recta tangente a la función en el punto (0,0). ¿Cuál será su pendiente? ¿Cuál es la ecuación que la describe?

De esta forma, no sólo nos aseguramos de ver si poseen o no todos los contenidos necesarios, sino que también vemos hasta qué punto los tienen y si ven las relaciones entre éstos.

D) SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO.

1. ¿Cuál es las razones de ser que vas a tener en cuenta?

Las funciones están presentes en nuestro día a día, aunque a veces estén escondidas y no se vea su aplicación directa. En la vida cotidiana se encuentran numerosas nociones de correspondencia y relación, las cuales recogen a las funciones:

> Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto. (Terrazas, s.f.)

Muchos elementos de la naturaleza se describen a través de las funciones y sus aplicaciones, también tienen un papel de vital importancia en la economía y sociedad ya que, a partir de ellas, se pueden realizar pronósticos y proyecciones de tendencia.

Con la intención de atraer la atención del alumnado hacia las derivadas y motivarles en su estudio, mostraremos su utilidad práctica desde el inicio, lo cual nos servirá de introducción. Utilizaremos sus múltiples aplicaciones tanto en el campo de la física, optimización de problemas, estudio de funciones en general.

Comenzaremos hablando de tasa de variación media buscando la relación con la velocidad media y aplicándola a otros incrementos de magnitudes. Con ésta se introducirá la pendiente de una recta y su ecuación explícita. A partir de ello se tratará el concepto de paralelismo y recta tangente, conceptos muy importantes debidas a sus aplicaciones. También se trabajará la tasa de variación o velocidad instantánea relacionando los límites con la variación y la pendiente.

En definitiva, la razones de ser serán la derivada como razón de cambio entre dos magnitudes, como la velocidad, y la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

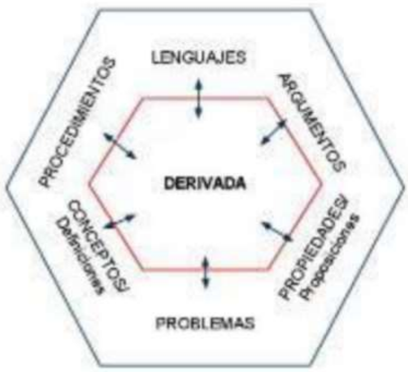
2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

> La noción de derivada surge al pretender determinar la inclinación de la tangente a una curva en un punto de ella, y al dar sentido matemático al concepto de velocidad instantánea. Las aproximaciones a la resolución de estos dos problemas tienen una formulación matemática común [...]. (De Guzmán, M. y B. Rubio, 1992, p.179)

De aquí se entiende, el origen de las derivadas a partir de estos conceptos físicos y matemáticos (García, Moreno, Badillo, y Azcárate, 2011). La historia de las derivadas comenzó de la mano de Newton y Leibinz (finales del siglo XVII) a través del cálculo infinitesimal. Aunque fue Fermat, en 1630, quien elaboró el método de estudio de máximos y mínimos. Newton entendía las curvas como el resultado del movimiento continuo de un punto.

DIDÁCTICA CLÁSICA DE LAS DERIVADAS

Un modelo teórico de la búsqueda de este estudio, es el Enfoque Onto-Semiótico, EOS (Godino y Batanero, 1994). Indaga en los significados y elementos que han caracterizado a la derivada a lo largo del tiempo y, con éstos, construye el significado global de referencia. Consiste en, a partir de los objetos primarios y origen de la derivada, formar una concepción completa y genérica. (Izquierdo, 2010). Objetos involucrados:



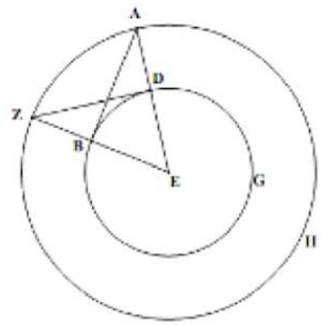
Todos ellos son conocidos como configuraciones epistémicas, y pueden verse desde distintos puntos de vista llamados facetas duales, que son:

Basándose en el modelo descrito, Pino-Fan, Díaz Godino, y Font Moll (2011) realizan una búsqueda de las múltiples configuraciones epistémicas de la derivada y los significados parciales que ha habido de ésta, y poder dar a la derivada un significado global. En las siguientes líneas, se encuentran las 9 configuraciones epistémicas históricas que se han encontrado y los 3 problemas que surgieron para llegar a ellas.

Problema en el trazo de tangentes:

La tangente en la matemática griega:

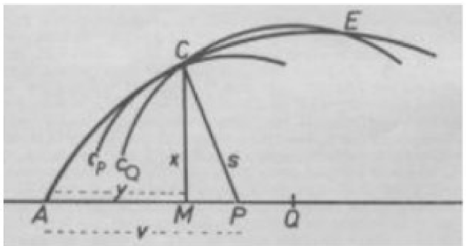
Solución de Euclides a trazar una recta en un punto dado a partir de la curva:



Partimos del problema de Euclides en el que hay que encontrar la recta tangente de una determinada curva. Analizando la solución al que llega Euclides, vemos que es extensiva, es decir, no es una solución generalizada, se limita a casos particulares. El lenguaje implementado corresponde a la geometría sintética y los conceptos y definiciones utilizados se encuentran en la obra de Euclides Los elementos. Por último, la metodología es una combinación de las construcciones geométricas, características de los matemáticos griegos, y el lenguaje y argumentación de la geometría sintética.

Métodos algebraicos para hallar tangentes:

Método del círculo de Descartes para trazar la normal a una curva en un punto:



El lenguaje pasa de ser descripciones puramente geométricas al álgebra en forma de ecuaciones y una geometría más analítica. Su método de resolución consistía en interpretar un problema geométrico con ecuaciones algebraicas para, una vez que se obtiene dicha ecuación en su manera más simplificada, obtenía su solución por geometría. Al igual que el lenguaje, los argumentos y proposiciones en los que se basa el problema son algebraicos fundamentados por las proposiciones geométricas analíticas.

Descartes buscaba conseguir un único método general con el que resolver cada problema, por lo que este método en concreto es aplicable a cualquier curva algebraica, sin embargo, este problema se complica en el caso de que estas ecuaciones algebraicas no sean de sencillos cálculos.

Métodos infinitesimales para calcular tangentes:

Calcular la subtangente de una curva a partir de su educación.

La solución que da Barrow a este problema se compone de tres normas surgidas de propiedades, definiciones y argumentos. Estas definiciones de tangente son su concepto como posición límite de la secante cuando la altura y anchura tienden a cero, como idea intuitiva de límite, y como idea intuitiva de derivada. Los argumentos y el lenguaje en cambio, se conservan los geométricos, algebraicos e infinitesimales. Estas ideas son interesantes ya que constituyen los primeros métodos y/o reglas generales.

Estudio de la variación:

<u>Sobre la variación en la edad media:</u>

Regla de Merton:

> Si un cuerpo se mueve uniformemente acelerado durante un periodo de tiempo, la distancia recorrida será la misma que si se hubiera movido ese mismo tiempo con una velocidad constante cuyo valor sea el promedio de la inicial y final (velocidad instantánea en el punto medio).

Ley artificial:

> Si una forma se mantiene con una intensidad la primera mitad de un periodo de tiempo, en el siguiente cuarto ésta es el doble, y sigue este incremento en los octavos y demás subdivisiones, la intensidad media del periodo total será la intensidad que tenía en la mitad de dicho periodo, es decir, el doble de la inicial.

Estos ejemplos de situaciones-problemas (la regla de Merton y la ley artificial), son a su vez, ejemplos típicos de proposiciones, puesto que se empleaban en la resolución de nuevas situaciones-problemas.

Oresme, en su resolución de la regla de Merton, introduce alguna idea interesante e innovadora: medición con segmentos de magnitudes físicas, relación entre distintas variables, introducción de las coordenadas a través de gráficas, disminución de la variación en los extremos, y cálculo de distancias a través de la suma continua del área generada debajo. El lenguaje y los procedimientos implementados en la demostración son puramente geométricos, aunque Merton añade también descriptivos. En términos generales, es extensiva, todavía no disponían de métodos generalizados.

<u>Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes:</u>

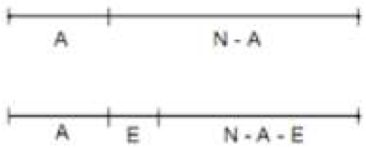
Oresme establece que el espacio que recorre un móvil equivale al área que se genera al graficar su velocidad vs tiempo. Galileo establece que, si se representa el desplazamiento en función del tiempo, su dirección es la misma que la de la tangente a la trayectoria, y la velocidad corresponde a la pendiente de ésta.

En esta metodología se continúa tratando los problemas que surgen en el trazado de tangentes de forma generalizada, es extensiva. El álgebra y la geometría analítica son la base de los procedimientos y lenguajes utilizados.

Cálculo de máximos y mínimos:

<u>Las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos:</u>

Métodos de los extremos de Fermat para dividir un segmento en dos partes de manera que su producto tenga el valor máximo:



El lenguaje que usa Fermat para solucionar este problema es también algebraico, gráfico y descriptivo, y las argumentaciones son geométricas, algebraicas y de cantidades infinitesimales. Algunas de las definiciones más relevantes que aparecen son las de límite y derivada.

Derivada como fluxión:

<u>Cálculo de fluxiones:</u>

Newton incorpora nuevas definiciones, notaciones y expresiones en el cálculo infinitesimal y el método más importante, el de cálculo de fluxiones. Los problemas a los que se enfrentó Newton consistían en calcular velocidades y determinar máximos, mínimos, tangentes y curvaturas a través de sus propios algoritmos, se trata de un modelo intensivo dado el gran abanico de problema en los que se pueden implementar los algoritmos de Newton.

Derivada como cociente de diferenciales:

<u>Cálculo de diferencias:</u>

Leibniz elaboró resoluciones a los problemas sobre máximos, mínimos, tangentes y puntos de inflexión. Fue el creador del término cálculo diferencial y de sus fórmulas. Dichas fórmulas son con las que se trabaja a día de hoy, es más, uno de sus objetivos era un lenguaje simbólico general. Mientras que Newton ve las curvas de forma dinámica, Leibniz las ve como un conjunto de segmentos rectos de longitud infinitesimal.

La derivada como límite:

La derivada como límite:

Los problemas que se abordan son en búsqueda de dar soluciones a problemas de la física, y dar una base fundamental a los métodos de Newton y Leibniz. Se incorporan definiciones en el Cálculo Infinitesimal como el de función y límite, el lenguaje usado es, en su mayoría, algebraico, y, a veces, geométrico, y los procedimientos son aritméticos. Aquí ya no se encuentran las incoherencias de infinitésimos, ya se ha establecido el análisis infinitesimal en base a la aritmética.

Comparando esto con el apartado anterior, vemos que algunas de las razones de ser sí serán compartidas mientras que tras serán tratadas posteriormente como otros campos de problemas.

Entre el primer grupo encontramos la recta tangente que elemento principal de aparición de las derivadas ya que, ya en el pasado, resultaba muy útil su puesta en práctica dentro de la geometría. También su significado de variación de magnitudes y como límite, donde aparecerían los conceptos de tasa de variación media e instantánea.

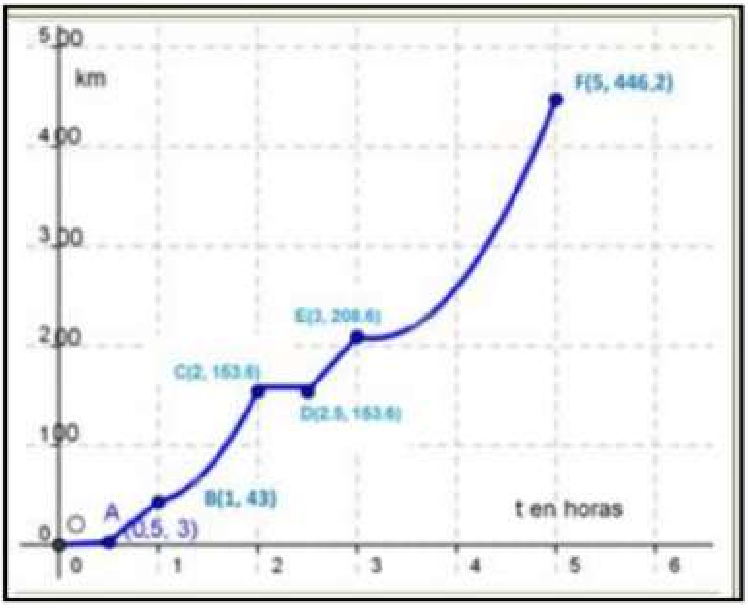
El estudio de la derivada como fluxiones, cociente entre diferenciales y cálculo de máximos y mínimos, se dejarán en cambio para otro tipo de campos de problemas para más adelante. No como razones de ser para introducir las derivadas, sino como aplicaciones en las que se ponen en práctica.

3. Diseña problemas que se constituyan en razones de ser.

Lo idóneo cuando se aborda un nuevo objeto matemático que aparece por primera vez en lo que a lo académico confiere, sería realizar el mismo proceso histórico que conllevó a su aparición. Consistiría en implementar una metodología que implicará que el alumnado desarrollará la misma evolución lógica y mental al enfrentarse a los mismos problemas y obstáculos a los que tuvieron que hacer frente sus inventores en su momento.

Dado que esto podría implicar un alto grado de complejidad para los estudiantes, esta metodología se implicará hasta cierta medida. Se plantearán los problemas de forma que vayan descubriendo por ellos mismos y asimilando los contenidos, pero de forma siempre guiada. Algo también imprescindible que debe caracterizar a este tipo de problemas, es que deben ser altamente contextualizados, de tal manera que el alumnado pueda seguir el hilo del problema y vea en todo momento su aplicación práctica, su funcionalidad.

Ejercicio 2 (Marea Verde, 2019b) Jorge y Adela han ido de viaje desde Madrid hacia Alicante. Han salido a las 12 horas. Llevan un aparato que les dice en todo momento cuánto tiempo llevan viajando desde que salieron y los kilómetros que llevan recorridos. Por eso saben que a la hora de haber salido de casa sólo han recorrido 43 kilómetros y que a las 2 horas han recorrido 153,6 kilómetros. Han representado gráficamente la función tiempo (horas) y distancia recorrida (km). Los tramos OA, AB, CD y DE los han representado los segmentos, y los tramos BC y EF con parábolas.



a) ¿Qué distancia han recorrido en total?

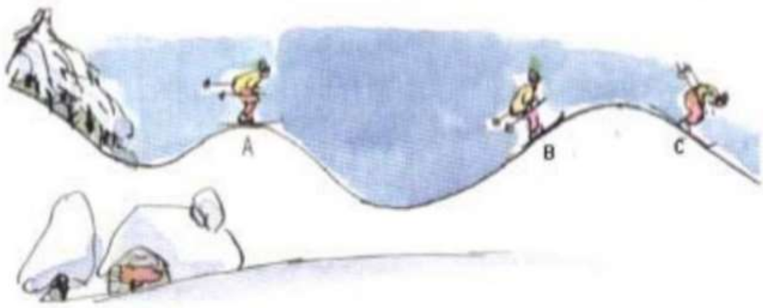
b) ¿Cuánto tiempo han tardado?

c) ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche durante el viaje?

d) ¿Cuál ha sido la velocidad media entre los instantes 1 y 3? ¿Y entre los instantes 3 y 5 horas?

e) En autovía la velocidad máxima permitida es de 120km/h, ¿crees que en algún momento se ha sobrepasado? ¿Puedes estar seguro?

Ejercicio 3 (Obtenido de Font, 2000) Observa la imagen y responde las siguientes cuestiones.

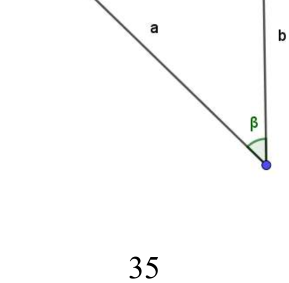


a) ¿En cuál de estos tres momentos le cuesta más esquiar? ¿Por qué?
b) Utiliza una regla y prolonga los esquíes en los puntos A, B y C. ¿Qué clase de recta se obtiene?
c) Si consideramos que el perfil de la montaña es la gráfica de una función, ¿cuál es el valor de la derivada de la función en A? ¿Qué signo tiene la derivada de la función en los puntos B y C?

Como podemos comprobar, ambos ejercicios son muy guiados de manera que, partiendo de cero, vayan descubriendo paso a paso los objetos y sus características que los describen. De esta forma no sólo los descubren, sino que también los comprenden y asientan los conocimientos. Se trabaja tanto de manera visual como mecánica, y sobre todo bajo un punto de vista siempre contextualizado.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Previamente al Ejercicio 2, se repasarán los conceptos físicos de velocidad media e instantánea calculándolos para algunos ejemplos. De esta forma, no sólo los recordarán, sino que también servirán como introducción a lo nuevo. Se recordarán los triángulos rectángulos y el Teorema de Pitágoras junto a las ecuaciones que lo describen:



$$180° = 90° + \alpha + \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$sen\alpha = {}^{b}/_{a}$ $\quad$ $cos\alpha = {}^{c}/_{a}$ $\quad$ $tg\alpha = {}^{b}/_{c}$

$sen\beta = {}^{c}/_{a}$ $\quad$ $cos\beta = {}^{b}/_{a}$ $\quad$ $tg\beta = {}^{c}/_{b}$

Además, se realizarán límites sencillos de funciones dejándoles claro que el objeto de límite seguirá siendo necesario y que no deben olvidarlo de la unidad anterior.

Para el Ejercicio 3, se les volverá a explicar la recta tangente. Se les dibujará varias curvas en el plano incorporando en cada una el ángulo con la horizontal y, para concluir, se repasará qué significa cada término de la ecuación de una recta y cómo se obtiene a partir de dos puntos dados del dominio o a partir de un único punto y la pendiente.

E) SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS.

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

1. **CP1: Problemas relacionados con la razón de ser**
   En la página 33 encontramos dos problemas en los que se trabajan las razones de ser de las derivadas y podrían implementarse perfectamente en el aula al comienzo de la unidad.

2. **CP 2: Problemas a la derivada de una función en un punto por aproximación numérica**
   Con este tipo de problemas se busca que el alumnado, ahora que ya relaciona variación de una función con su pendiente y ésta con la recta tangente, consiga ver la derivada de una función como una variación/incremento infinitesimal, al igual que en el caso de la velocidad instantánea.
   Ejercicio 4 (Azcárate *et al*, 1996) Queremos calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función f(x)=x2 en el punto de abscisa 1. Para ello:

a) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo [0, 1.5]. Hazlo en papel milimétrico y escoge la misma unidad para los dos ejes de manera que una unidad sea de 10 c, procurando hacer la gráfica con la máxima precisión en el entorno del punto de abscisa 1.

b) Traza aproximadamente la recta tangente y calcula su pendiente. Compara el resultado con el obtenido por tus compañeros. ¿Es posible calcular el valor exacto de la pendiente de la tangente? ¿Cuántos puntos de una recta se necesitan para determinar su dirección y por lo tanto para calcular su pendiente? Y en cambio, ¿cuántos puntos de la recta tangente conoces con total precisión?

c) Calcula la pendiente de la recta que corta la gráfica (recta secante) en los puntos de abscisa 1 y 1,5. Hazlo con toda precisión utilizando las coordenadas de los dos puntos obtenidas mediante la fórmula de la función.

d) Pon el resultado obtenido en el apartado anterior en el lugar que le corresponda en la siguiente tabla. Competa las tablas haciendo lo mismo para otras rectas secantes de modo que todas corten la curva en dos puntos: uno común a todas ellas, el punto de abscisa 1, y el otro, un punto de abscisa x cercano a 1.

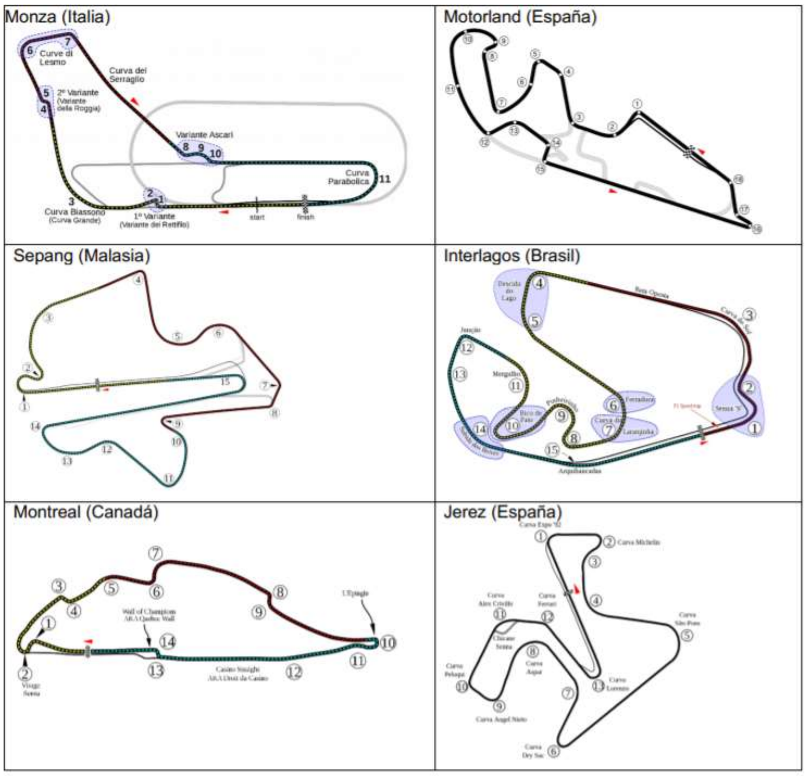
x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
f(x)					
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

x	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
f(x)					
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

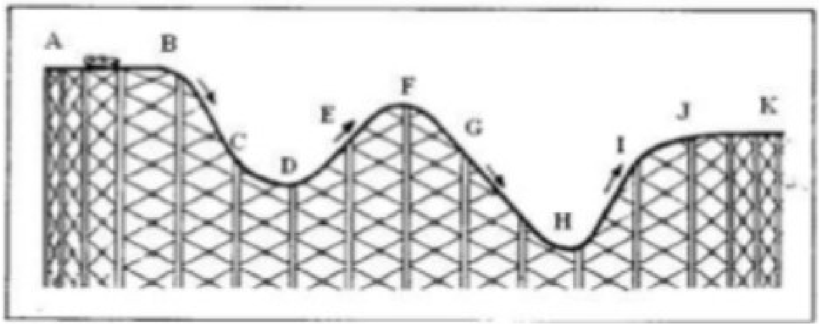
3. **CP 3: Relacionar la gráfica de una función con la de su derivada**

Con este campo de problemas se quiere que interioricen más la idea de derivada como variación de su función. También que comiencen a intuir por sí mismos la forma que tendrá la función derivada a partir de la función original. Además, aunque todavía no se den los máximos y mínimos como tal, comenzarán a observar los cambios de crecimiento y la relación entre los puntos en los que la función alcanza sus valores máximos y mínimos con el comportamiento de la derivada.

Ejercicio 5 (Matemáticas) **El circuito misterioso**. La siguiente gráfica representa la velocidad de un coche de fórmula 1 en la segunda vuelta de un circuito. ¿Sabrías decir de qué circuito es? Explícalo, indicando todas las suposiciones que realices. La banderita de cuadros indica la salida.



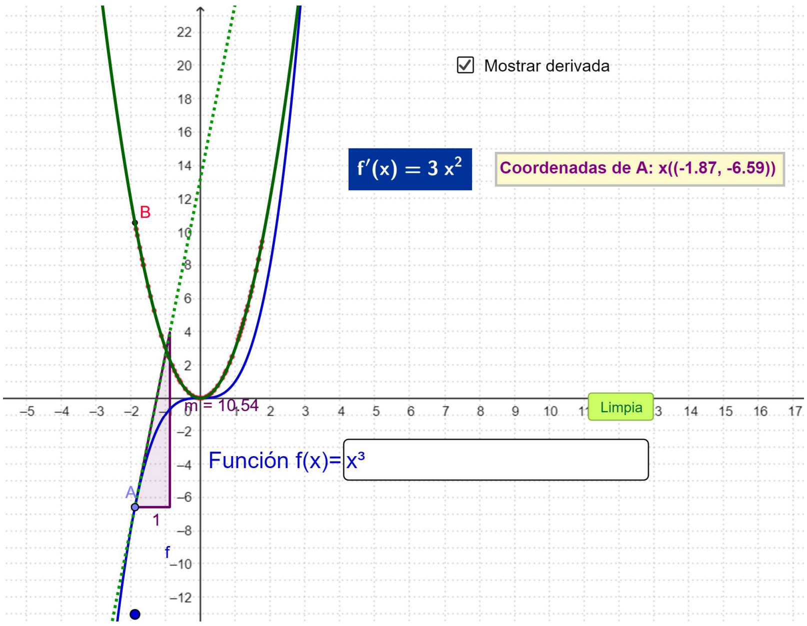
Ejercicio 6 (Dagosli, s.f.) **La montaña rusa**. El dibujo muestra la pista de una montaña rusa en la que los coches viajas entre A y B a una velocidad lenta y constante. ¿Cómo variará la velocidad de estos coches cuando van de A a G? Describe tu respuesta por escrito y mediante una gráfica.

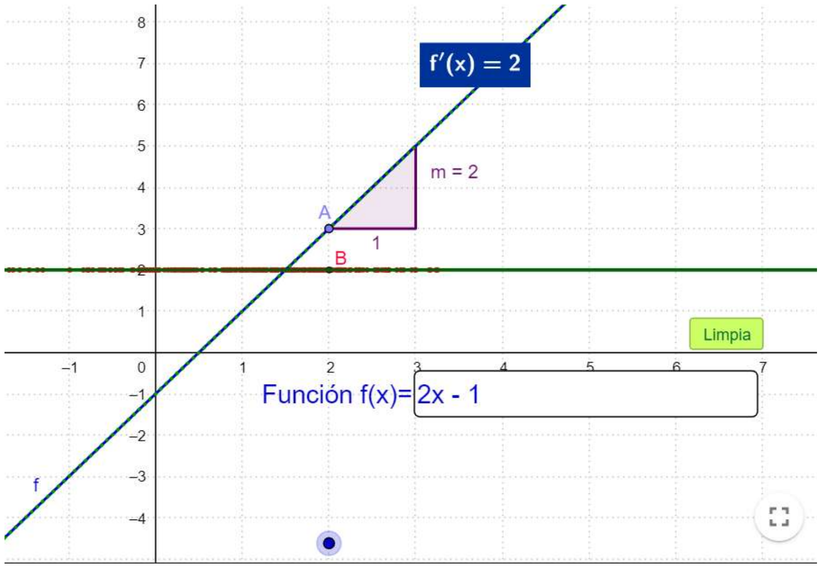


Ejercicio 7 (Almora, s.f.) Abrid con tu compañero en GeoGebra el archivo que se os ha proporcionado. Escribid en el cuadro de la función las siguientes expresiones y observad la gráfica que aparece de la derivada:

a) f(x)=x; f(x)=x^2; f(x)=x^3; f(x)=x^4; f(x)=x^5.
   ¿Hay alguna manera de relacionarlas? ¿podrías estimar una regla de derivación para estas funciones (potencias)?

b) Repite el apartado anterior para las funciones: f(x) = 1/x^5; f(x) = 1/x^4; f(x) = 1/x^3; f(x) = 1/x2; f(x) = 1/x^1.





4. **CP 4: Cálculo algebraico de la función derivada, en un punto y su expresión general**

   Ahora que ya se ha incorporado la derivada a la cultura de la clase y comprenden su significado y lo que ésta implica, vamos a centrarnos en su obtención y en su enfoque más algebraico para que apliquen técnicas de derivación. Este campo estará constituido por problemas que arecerán de contextualización y se basarán en la aplicación de las técnicas y reglas de derivación a través de la repetición.

   Ejercicio 8 Obtén la expresión de la función derivada a través del cálculo de incrementos de la función: y=x3+2x2-3x-1.

   Ejercicio 9 Sea la función $f(x) = \frac{3x^2-5x}{x+1}$. Calcula:

   a) f'(x)
   b) f'(3) y f'(1)
   c) ¿Es lo mismo f'(3-1) que f'(3)-f'(1)?

   Ejercicio 10 Escribe las funciones elementales de las siguientes sus funciones y halla sus derivadas:

   a) $f(x)=\ln(2x^2)$
   b) $f(x)=10^{x+3}$
   c) f(x)=cos(3x-1)

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir dichos problemas?

La evolución de las técnicas será tal que se pasará de las más sencillas a aquellas nuevas que suelen resultar más complejas. Se comenzará abordando los problemas con técnicas no exactas, pero sí conocidas para, poco a poco, ir aplicando otras técnicas **capacitadoras** necesarias que nos llevarán a la final. Esto es debido a que se trata de la primera vez que se ven las derivadas por lo que las técnicas a implementar resultan novedosas por lo que, para facilitar el llegar a éstas, se relacionan con otras ya conocidas.

1. **CP 1:** Como se ha comentado, partiremos de técnicas ya trabajadas. Empezamos con la **tasa de variación media**, como variación de una función tanto en formato **gráfica**, **tabla de valores** y expresión de **ecuación**. Ya conocen esta metodología dada su estrecha relación con la velocidad media. Continuamos con la **tasa de variación instantánea**. Para ésta será necesario avanzar en la técnica anterior ya que buscamos acercarnos a la **definición de derivada.** Utilizaremos la misma técnica, pero acotando a rangos menores para pasar a la técnica del **incremento mínimo**, h, y terminar con la técnica del **límite** cuando dicho incremento tiende a 0.
   La idea de derivada como **pendiente** parte de su representación **gráfica** para obtenerla a partir del Teorema de Pitágoras. Esta representación gráfica, facilitará la visualización de sus características y aplicaciones. Terminaremos con la técnica de expresarla con su ecuación de recta.
2. **CP 2:** Las técnicas para el cálculo de la **derivada** de una función en un punto **por aproximación** son las misma que las de la **tasa de variación instantánea**.
3. **CP 3:** Se implementarán técnicas puramente visuales. Consiste en **relacionar** y comparar la **variación** de la función original con el comportamiento de la función **derivada**. Esto les acercará a las ideas de crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimo que se darán en el siguiente tema.
4. **CP 4:** Serán las técnicas necesarias en este apartado las complejas y desconocidas a las que deben enfrentarse. No han dado nada similar previamente por lo que se abordarán desde cero. Con los campos anteriores se quiere allanar el camino. Aparecen las técnicas de derivación de funciones elementales, de operaciones entre estas funciones y la regla de la cadena.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología que se va seguir dependerá de cada campo de problema, ya que no todos presentan la isma dificultad ni generar los mismos obstáculos ni necesidades. Por lo general, se comenzarán por los problemas más sencillos y que requieren para su resolución sólo conocimientos básicos ya conocidos. De esta forma, se busca partir de algo ya sabido hacia el descubrimiento de algo nuevo buscando las relaciones entre éstos a través de pasos intermedios.

La metodología implementada en el **primer campo de problemas**:

1. Se les entregará un documento a cada estudiante con el enunciado del problema de tal manera que la primera resolución sea individual. De esta forma nos aseguramos de que todos hagan el esfuerzo de indagar en la respuesta ya que, en este campo, todos los contenidos necesarios son ya conocidos por todos, deberían de ser capaces de resolverlos sin ayuda.
2. Estarán sentados de dos en dos, por lo que, una vez hayan realizado un primer intento por ellos mismos, puedan debatir o preguntarse por parejas. Así buscamos no sólo que se ayuden en el caso de que hayan encontrado alguna dificultad, sino también que vean un mismo problema desde distintos puntos de vista descubriendo que en muchas ocasiones no hay un único camino para hallar la solución correcta.
3. Por último, se realizará la corrección del ejercicio completo por parte de toda la clase conjunta en la que será el alumnado quien lo resuelva haciendo la puesta en común, aunque siempre guiado y supervisado por el profesorado.

En el **segundo campo de problemas**, las técnicas siguen siendo conocidas, pero aumentan el nivel de complejidad, ya que una de ellas (límite) apareció por primera vez muy recientemente cabiendo la posibilidad de que increpen los obstáculos respeto a ella:

1. Comenzaran trabajando directamente en parejas. Esto facilitará el trabajo y además de que en algunos ejercicios no tienen la posibilidad de realizarse de manera individual ya que será necesario compartir ordenador por requerir el uso de la aplicación digital de GeoGebra.
2. Dado su alto nivel de dificultad, el problema será corregido apartado por apartado por el profesor, éste guiará y seguirá el avance de cada grupo

pasándose por éstos e interactuando con los alumnos, incluso interviniendo con su ayuda en el caso de que fuese necesario cuando se encuentren con obstáculos. De esta manera nos aseguraremos de que ningún grupo se quede descolgado y que todos sigan y entiendan el proceso, lo cual es vital para adquirir de manera concienciada el significado y cálculo de derivada.

El **tercer campo de problemas** es el más intuitivo, visual y sencillo:

1. Debida a su caracterización gráfica, requerirá también la utilización GeoGebra, por lo que el alumnado trabajará en parejas. Ello a su vez amenizará y divertirá a los estudiantes el desarrollo de la sesión al tratarse de una actividad muy dinámica y atractiva hacia ellos.
2. La corrección final del ejercicio completo será grupal con la puesta en común de toda la clase, siempre guiada y supervisada por el profesorado.

Para el **cuarto y último campo de problemas**, la metodología será muy distinta a los otros ya que, en este caso, las técnicas trabajadas son completamente nuevas. En las anteriores se buscaba un mayor trabajo en grupo ya que se incitaba paso a paso al descubrimiento de nuevas técnicas de manera que su desarrollo lógico y mental sea tal que adquieran completamente los objetos matemáticos. Aquí en cambio, se va a trabajar a través del método de la repetición para que memoricen las propiedades y reglas.

1. El profesorado realizará algunos ejercicios a modo de ejemplo en la pizarra.
2. El alumnado realizará múltiples ejercicios de derivar funciones de forma individual de todos los formatos de funciones posibles, aunque algunos de ellos se deberán elaborar en casa por falta de tiempo lectivo.
3. Por último, serán corregidos por el profesor en la pizarra para toda la clase.

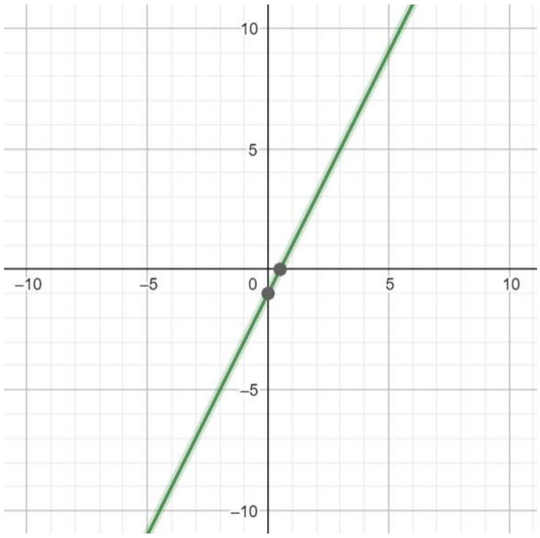
F) SOBRE LAS TÉCNICAS.

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

La forma de plantear los problemas dependerá que qué técnica buscamos que utilicen y trabajen. De hecho, en un mismo ejercicio se les puede pedir que lo realicen a través de varias técnicas.

Un ejercicio en el que se trabajaría el concepto de pendiente desde las distintas técnicas de la definición de **pendiente**, desde los conceptos de **tasas de variación media e instantánea**, la **definición de derivada** y la aplicación directa de derivada, **forma algebraica**, es:

Ejercicio 11 Observa la siguiente gráfica que representa una recta:



a) Calcula su la tasa de variación media aplicando el Teorema de Pitágoras entre los incrementos de los ejes.
b) Recoge en una tabla las coordenadas de tres puntos. Calcula las tres tasas de variación media a través de su expresión entre los puntos.
c) Obtén la expresión de esta recta.

Sea la función:

$$f(x)=x^2$$

d) Sustituye los valores x = (0, 0.25, 1, 2, 3) en dicha expresión y realiza un boceto en la misma gráfica.
e) Calcula la tasa de variación instantánea de la función en el punto de corte con la recta.
f) Deriva la función y sustituye en ésta el punto.

Con objeto de que asientan las derivadas de funciones básicas, derivadas de operaciones de funciones y la regla de la cadena, se realizarán múltiples ejercicios sobre ellos para que, sin tener que memorizarlos, los aprendan con la metodología de repetición.

Ejercicio 12 Calcula las derivadas de las funciones:

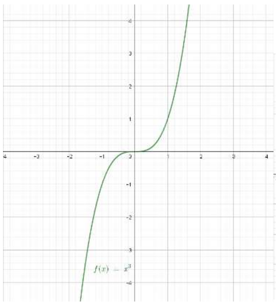
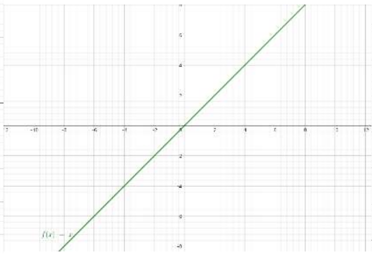
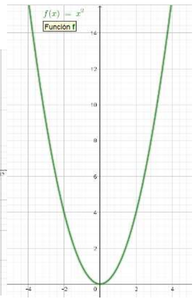
a) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{\sqrt{2x}-3x^2}$

b) $g(x) = senx \cdot ln(2x)$

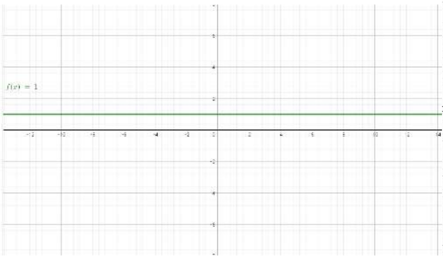
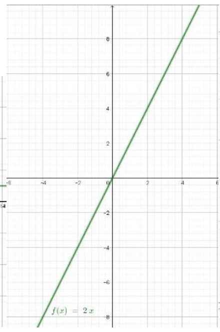
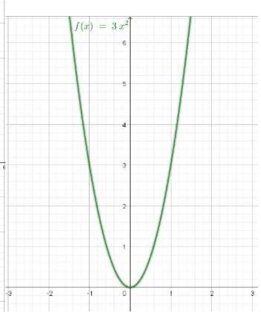
c) $h(x) = 2^{x^2-x}$

Ejercicio 13 Une las gráficas de las funciones de la primera columna con las de sus derivadas de la segunda.

Funciones:

Derivadas:

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Las técnicas que se trabajan en los problemas son:

- Ecuación de pendiente.
- Ecuaciones de tasas de variaciones media e instantánea.
- Ecuación de derivada a través del límite.
- Derivadas de funciones básicas.
- Derivadas de operaciones entre funciones.
- Regla de la cadena.

El alumnado deberá conocer por lo tanto, las ecuaciones que permiten calcular la pendiente de una función y sus tasas de variación media e instantánea. También deberán conocer la función que define una derivada en un punto y saber manejar los límites, especialmente para indeterminaciones del tipo 0/0.

Por último, tendrán que aprender las derivadas de las funciones básicas y las reglas de derivación. También saber aplicarlas y diferenciarlas. Esta última parte es la más nueva y compleja, por lo que como he mencionado, se realizarán múltiples ejemplos en clase y mandarán ejercicios del libro para casa. Con esto se busca que practiquen y así conseguir que asientan las derivadas de funciones sin la necesidad de que las memoricen.

Las derivadas es un objeto que dan por primera vez y que para conseguir entenderlas del todo se requiere trabajarlas intensamente realizando una gran cantidad de ejercicios. Por ello, se les entregará un documento con un amplio número de ejercicios y, tras pasar unos días, se les entregará otro con las soluciones desarrolladas y explicadas. También se les otorgará de momentos de dudas.

3. Dichas técnicas, ¿están adecuadas al campo de problemas?

Los campos de problemas se elaboran a partir de las técnicas que se buscan trabajar. Además, nos dan la posibilidad de combinarlas en un mismo ejercicio, lo cual les enseña que no hay una única manera correcta de afrontar un problema y también la relación que hay entre los distintos conceptos.

También ayuda a que ganen cierta autonomía y libertad a la hora de desarrollar un problema. Con el último campo de problemas se muestra la importancia y utilidad de las técnicas que se trabajan en los campos anteriores. Dejan de ser cálculos abstractos a tener una funcionalidad gráfica.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología para implementar las técnicas consistirá en comenzar la más sencilla y que ya conozcan para ir aumentando poco a poco el nivel de dificultad de las técnicas.

Se iniciará explicando y trabajando la pendiente de una función, ya que la han trabajado previamente en varias ocasiones y están muy familiarizado con ella. Continuaremos con las tasas de variación media e instantánea. Éstas son sencillas de entender debido a su gran relación con la pendiente y son ecuaciones sencillas de cocientes, además de su estrecha relación con los conceptos físicos de velocidad media e instantánea.

A partir de éstas y su visión gráfica, se pasará ya al nuevo objeto, las derivadas. Primero estableceremos la definición con la ecuación de límite en un punto. El objeto de límite lo conocen de antes pero no demasiado, por lo que habrá que contar con que pueden seguir teniendo obstáculos. Seguiremos con las derivadas de funciones básicas. Al principio los verán como algo complejo, pero a través de ejemplos y trabajar con ellas no suelen tener problemas mayores. Con ellas, se abordarán las derivadas de operaciones entre funciones y la regla de la cadena. Esto suele costar más ya que combina las derivadas de funciones más otras normas.

Por último, ya no se incorporarán nuevas técnicas, pero sí se utilizarán las que hemos trabajado para realizar otro campo de problemas para el estudio de la representación gráfica de funciones.

G) SOBRE LAS TECNOLOGÍAS (JUSTIFICACIÓN DE LAS TÉCNICAS).

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Con el objetivo de que los estudiantes vean la utilidad de las tecnologías en las que se basan los problemas que se van a trabajar, se elaborarán de manera que éstos estén altamente contextualizados de manera que recojan la funcionalidad y aplicaciones de ellas en la vida real.

El razonamiento con el que se justificará la introducción de nuestro objeto matemático será el mismo por el que se justificaron sus razones de ser a lo largo de la historia, es decir, aquellas que llevaron a su necesidad de aparición. De esta forma experimentarán el mismo desarrollo epistemológico que sus autores.

Dentro de éstas encontramos la tasa de variación media de una función, la cual se puede dar en formato de gráfica, tabla o expresión algebraica. Se puede justificar geométricamente relacionándola directamente con la pendiente y a través de su definición. Una vez definida la tasa de variación media, se tomarán cada vez rangos menores acercándonos así a la idea intuitiva de límite lo cual justificará la definición de tasa de variación instantánea.

De manera más visual, encontramos la razón de ser dada por la recta tangente. Ésta será justificada tanto por su representación gráfica intuitiva, su razonamiento geométrico y por su definición en forma de expresión algebraica.

Una vez argumentada la funcionalidad de nuestro objeto matemático, pasamos a definirlo. La definición de derivada de una función en un punto como el límite de un pequeño incremento que tiende a cero tiene como origen de razonamiento la tasa de variación instantánea.

Por último, se trabajarán las tecnologías en las que se basan las derivadas de las funciones, reglas, normas y propiedades de las derivadas.

2. ¿Quién va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Las técnicas se irán justificando por sí solas en el desarrollo de las sesiones a través de su aparición y aplicación en los problemas planteados a resolver. Serán los propios estudiantes quienes lleguen a ellas progresivamente justificándolas con la anterior, ya que los distintos problemas se diseñan de tal manera que cada apartado justifique y facilite el siguiente. No obstante, el profesor deberá asegurarse de que sean capaces de llegar a éstas guiando e interviniendo si fuese necesario. También será el encargado de incorporarlas en la cultura de la clase para ser posteriormente utilizadas.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los aspectos del objeto matemático.

Como se indica en el apartado anterior, será el profesor el encargado de institucionalizar las tecnologías. Una vez realizados los problemas introductorios iniciales de cada tecnología, los cuales se caracterizan por ser contextualizados, intuitivos y de razonamiento, el profesor las institucionalizará definiendo y demostrándolas. Esto resulta útil para, posteriormente, trabajarlas con otro formato de problemas basados en otros métodos menos contextualizados y razonados, sino más metódicos y reiterativos para asegurar su adquisición y manejo.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Como ya se ha argumentado con anterioridad, seguirán una metodología guiada y progresiva en la que se pasará de una a otra justificándose entre sí a través de sus relaciones. Se irá de la más sencilla, intuitiva y conocida por el alumnado, a las más compleja, completa y exacta.

H) SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA.

1. Indica la secuenciación y establece una duración temporal aproximada.

A continuación, se va a proponer una secuencia didáctica para implementar en el aula, en la que se introduzca y aborde el objeto matemático de las derivadas siguiendo la metodología anteriormente argumentada haciendo uso de los ejercicios ya expuestos y otro tipo éstos.

Dicha secuencia estará formada por un total de **11 sesiones de 50 minutos cada una**, en las cuales se va a entrar más en detalle. Comenzaremos utilizando la primera como evaluación inicial para obtener información del nivel que presentan sobre el tema y si han adquirido correctamente los contenidos previos necesarios para, con ésta, poder adaptar el resto de actividades al alumnado, y para introducir nuestro objeto. Las demás sesiones, exceptuando la última, se centrarán en avanzar y trabajar en los contenidos recogidos en el currículo. Para la sesión final se elaborará una prueba en la que se tengan que poner en práctica todos los procesos aprendidos, reservándola así como evaluación final del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Sesión 1: (C.P. 1: razones de ser)

En busca de acercarles y despertar su interés hacia el concepto de derivada, se introducirá ésta a través de sus razones de ser de tasas de variación y recta tangente mostrándoles así su funcionalidad.

Ambas ideas deberían ser ya sabidas, se planteará el Ejercicio 1 como evaluación inicial. De esta forma tendrán que demostrar que conocen las tasas de variación media e instantánea, relacionándolas con las velocidades físicas, la ecuación de una recta y su relación con la pendiente de ésta, y el cálculo del límite de una función cuando aparece el caso de la indeterminación 0/0, lo cual han dado justo en el tema anterior. Esta tarea supondrá 30 minutos de la clase.

Para los 20 minutos restantes, se repasarán dichos conceptos a través de la metodología explicada en el apartado de las razones de ser.

Sesión 2: (C.P. 1: razones de ser)

En la segunda sesión se trabarán estas razones de ser desde un punto de vista más contextualizado de forma que terminen de comprender su significado matemático y comiencen a descubrir y relacionar con éstos las derivadas de una función. Para ello dedicaremos la clase completa a realizar los Ejercicio 2 y Ejercicio 3.

Sesión 3: (C.P. 2: aproximación por cálculo numérico a la derivada)

Una vez completado el primer campo de problemas relacionados con las razones de ser, pasaremos al segundo el cual trata de aproximar la derivada de una función a través del cálculo numérico. Para ello se empleará la sesión completa para realizar el

Ejercicio 4 implementado la metodología ya argumentada. Dado que será necesario el uso de GeoGebra, ésta se llevará a cabo en el aula de informática.

Sesión 4: (C.P. 3: relacionar gráficas de funciones con las de sus derivadas)

Continuaremos el desarrollo de la secuencia abordando el campo de problemas 3, el cual consiste en relacionar la gráfica de una función con la de su función derivada. En esta sesión se realizarán los Ejercicio 5 y Ejercicio 6, los cuales tienen una alta relación.

Sesión 5: (C.P. 3: relacionar gráficas de funciones con las de sus derivadas)

A este tercer campo de problemas le dedicaremos dos sesiones ya que la representación gráfica de una función suele ser una de las cosas que más dificultades y obstáculos les generan. En esta sesión nos trasladaremos igualmente al aula de informática para trabajar con GeoGebra el Ejercicio 7.

Sesión 6: (C.P. 3: relacionar gráficas de funciones con las de sus derivadas)

En esta sesión se realizará un pequeño "juego" interactivo en el que se pondrá en juego los aprendido en las sesiones anteriores de manera divertida y entretenida para ellos.

La metodología sería la siguiente:

Se le entregará a cada estudiante un trozo de cartón en el cual hay dibujada la gráfica de una función y se dividirá la clase en dos equipos. Un miembro de cada uno jugará contra uno del otro al judo "Quién es quién" pero con las funciones con el objetivo de conseguir el cartón del otro.

Para describirlas deberán implementar expresiones como: pasa por el punto x, tiene pendiente nula, positiva o negativa e tal rango, presenta x máximos y/o mínimos, corta el eje ordenado/coordenado por x, … Y deberán anotar aquellas cuya respuesta sea sí (esto les resultará útil para la segunda parte de la actividad).

Una vez consiguen el pedazo de cartón, los pondrán todo en común con las respuestas por grupos y se colocará en el centro del aula otros nuevos cartones que contendrán las gráficas de las funciones derivadas de todas las funciones de ambos equipos.

La segunda parte de la actividad consistirá en unir los cartones de las funciones que poseen con los del centro con las derivadas, por ello las anotaciones antes comentadas les facilitará la tarea. Deberán trabajar en equipo para ser más rápidos y "ganará" aquel equipo que termine antes.

Sesión 7: (C.P. 4: reglas de derivación)

Una vez vista la parte más contextualizada, conocida, sencilla e intuitiva, pasamos al campo de problemas 4, cálculo algebraico de las derivadas. Dado que nos centramos en una adecuada introducción dando una mayor importancia a las razones de ser y contextualización de las derivadas, se reservará un mayor número de sesiones para los tres primeros campos de problemas que para este cuarto.

Primero, se mostrarán y explicarán las tablas de derivación de funciones sencillas y elementales para posteriormente trabajarlas a través de ejemplos con el objetivo de comprenderlas y memorizarlas. A continuación, se realizará el mismo proceso para las tablas de derivadas de operaciones entre funciones elementales.

Se les explicará y reiterará la importancia y necesidad de realizar múltiples y diversos ejercicios tipo, entre ellos el Ejercicio 8, ya que la repetición mecánica es el único método de aprenderse las normas de derivación y asegurarse saber derivar.

Sesión 8: (C.P. 4: reglas de derivación)

Aquí aparecerá el último concepto que se quiere trabajar, la regla de la cadena. Se explicará de manera pausada y se realizarán múltiples ejemplos ya que se trata del método más complejo que se aborda, además de recoger las derivadas de funciones elementales y de operaciones entre éstas. En el tiempo restante se comenzará a realizar los Ejercicio 9 y Ejercicio 10.

<u>Sesión 9</u>: (C.P. 4: reglas de derivación)

La metodología de esta sesión será similar a la 7 añadiendo todas las reglas y normas de derivación.

<u>Sesión 10</u>: (Repaso todos C.P.)

La última clase antes de la prueba de evaluación final ser reservará para dudas y cuestiones que les hayan podido surgir a lo largo de las sesiones y todavía no hayan solventado. También se hará repaso de lo que pueda entrar en esta prueba realizando hincapié en aquello que hayan mostrado mayores dificultades a lo largo del desarrollo de éstas.

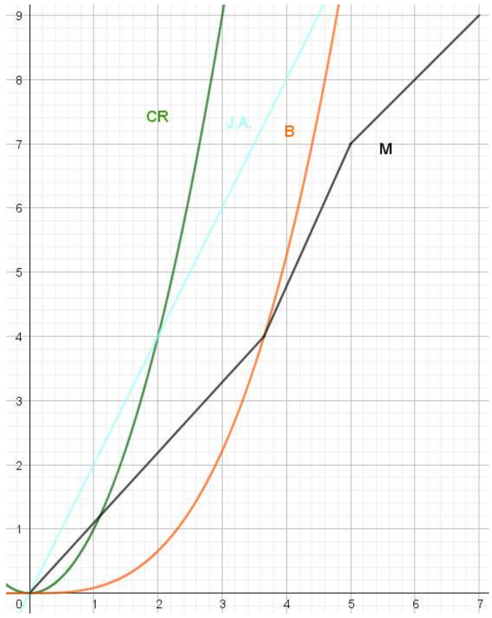
<u>Sesión 11</u>: (Evaluación todos C.P.)

Por último, para terminar y cerrar la secuencia, se empleará toda la última sesión para realizar la prueba de evaluación final, examen, en la que tendrán que poner aprueba todo lo aprendido en las anteriores ya que se abordarán todos los conceptos. Los procesos necesarios para su resolución no distarán de los trabajados en clases, además de tener ejercicios de todos los niveles de dificultad de tal manera que sea más que asequible para quien haya trabajado de manera constante y correcta a lo largo de la secuencia.

H) SOBRE LA EVALUACIÓN.

1. Diseña una prueba escrita que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

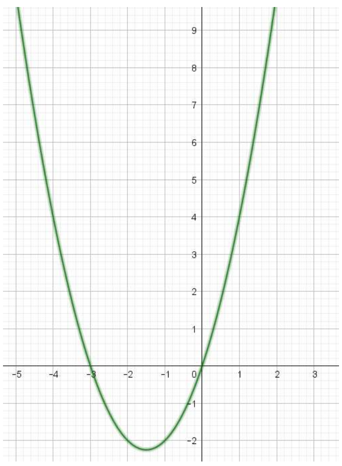
Problema 1 Estamos viendo el partido de fútbol entre el Barcelona y el Real Madrid. Marcelo le realiza un pase en profundidad a Cristiano Ronaldo, pero éste tiene muy cerca a Messi, Jordi Alba y Bale. La siguiente gráfica representa la velocidad que lleva cada uno en cada instante:



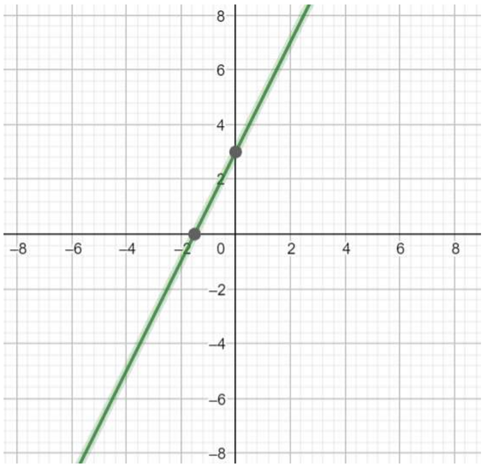
1. ¿Cuál será la velocidad media de cada jugador?
2. ¿Se chocarán en algún momento? ¿Cuál será la tasa de variación del final respecto a esos puntos?
3. ¿Qué jugador se hará con la pelota a los 9 metros? ¿Por qué?
4. Calcula la velocidad instantánea que llevará Cristiano cuando coja la pelota siendo su función de velocidad: $f(x)=x^2$.

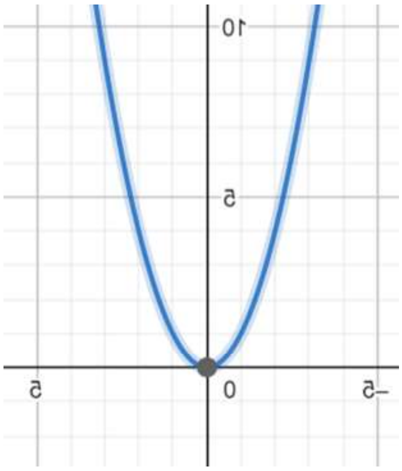
Problema 2 Dada la función $f(x)=x^2+3x$.

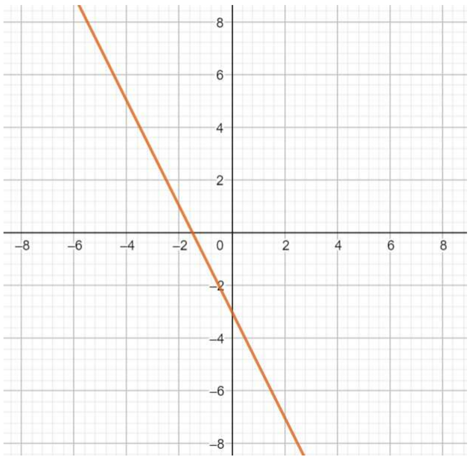
a) Calcula la pendiente de dicha función entre los puntos x = 0 y x = 0,2 y entre x = 0 y x = 0,1 y la derivada de ésta misma aplicando la definición.
b) Obtén la expresión de la recta tangente a esta función para los puntos x=0 y x=1.
c) Dibuja ambas rectas en la siguiente gráfica de la función:



d) ¿Cuál será la gráfica de su derivada?

I. 

II. 

III. 

Problema 3 Calculas las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 - \sqrt{x}$

b) $f(x) = \cos(2x) + e^x$

c) $f(x) = \frac{2x^2+4}{x-1}$

d) $f(x) = log_{10}(x+1) * 10^x$

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

1. Con este problema se pondrán en práctica sus conocimientos sobre el cálculo de las tasas de variación media e instantánea tanto a partir de una gráfica dada como a partir de una tabla de valores. También se trabajan las funciones en formato gráfico, tabla de valores y algebraica, relacionando todas éstas. (C.P. 1)
2. El segundo problema resulta útil para evaluar si comprenden la relación de las rectas tangentes a una función en un punto con su pendiente, si saben dibujarla y obtener su ecuación. Además, deberán calcular el valor de la derivada de una función en un punto a través del cálculo por aproximación numérica y aplicando su definición, donde tendrán que demostrar su manejo con los límites de las funciones. Por último, también deberán demostrar que saben relacionar la gráfica de una función con la de su derivada. (C. P. 1, 2 y 3)
3. En el tercer y último problema son necesarias las reglas, normas y propiedades de derivación para completarlo. (C. P. 4)

3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Problema 1

1. C.R.: $\frac{9\,m}{3\,s} = 3\,m/s$ J.A.: $\frac{9\,m}{4{,}5\,s}$ B.: $\frac{9\,m}{4{,}8\,s}$ M.: $\frac{9\,m}{7\,s}$
2. Sí.

   C.R. y J.A. en el metro 4 a los 2 segundos:

   C.R.: $T.V.M.[2{,}3] = \frac{9-4\,m}{3-2\,s} = 5\,m/s$

   J.A.: $T.V.M.[4{,}5.2] = \frac{9-4\,m}{4{,}5-2\,s} = \frac{5\,m}{2{,}5\,s} = 2\,m/s$

   B. y M. en el metro 4 a los 3,6 segundos:

   B.: $T.V.M.[3.6{,}4.8] = \frac{9-4\,m}{4{,}8-3{,}6\,s} = \frac{5}{1{,}2}\,m/s$

   M.: $T.V.M.[3.6{,}7] = \frac{9-4\,m}{7-3{,}6\,s} = \frac{5}{3{,}4}\,m/s$
3. C.R., porque llega a los 9 metros en el menor tiempo.

4. $T.V.I.[x=3] = \lim_{h\to 0} T.V.M.[3,3+h] =$

$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{3+h-3} = \lim_{h\to 0}\frac{9+h^2+6h-9}{h} = \frac{0}{0} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(h+6)}{h} = \lim_{h\to 0} h+6 = 6$

Problema 2

- $\frac{f(0,2)-f(0)}{0,2-0} = \frac{0,2^2+3\cdot 0,2-0}{0,2} = \frac{0,04+0,6}{0,2} = \frac{0,64}{0,2} = \frac{64}{2} = 32$

  $$\frac{f(0,1)-f(0)}{0,1-0} = \frac{0,1^2+3\cdot 0,1-0}{0,1} = \frac{0,01+0,3}{0,1} = \frac{0,31}{0,1} = \frac{31}{1} = 31$$

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+3\cdot(x+h)-x^2-3x}{h}$$

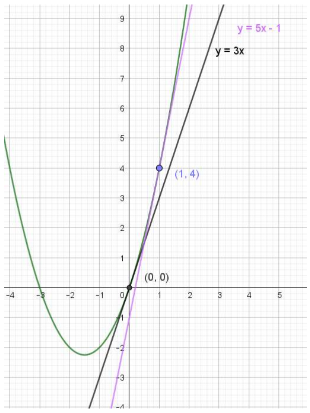
  $$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh+3h}{h} = \frac{0}{0}$$

  $$= \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(h+2x+3)}{h} = \lim_{h\to 0} h+2x+3 = 2x+3$$

- $\left(y-f(x_0)\right) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

  $x_0 = 0$: $(y-0) = 3\cdot(x-0) \to y = 3x$

  $x_0 = 1$: $(y-4) = 5\cdot(x-1) \to y = 5x-1$

- 

- I.

Problema 3

a) $f'(x) = 4x^3+9x^2-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $f'(x) = 2\cdot sen(2x)+e^x$

c) $f'(x) = \frac{2\cdot(x^2-2x-2)}{(x-1)^2}$

d) $f'(x) = \frac{10^x}{(x+1)\cdot\ln(10)} + log_{10}(x+1)\cdot 10^x\cdot\ln(10)$

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Previamente a la calificación, es conveniente organizar en grupos las distintas tareas según el peso que tienen sobre la evaluación. Para ello, nos ayudaremos del estudio realizado por Mengual, Albarracín, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén, y Núria (2019):

- **Tareas principales**: corresponden a aquellas con las que se evalúan los contenidos propios del tema. Es por ello, por lo que tienen un mayor peso en la calificación. Con éstas se pretende evaluar la adquisición de las tecnologías descritas por el alumnado.
- **Tareas auxiliares**: éstas son más metódicas, no evalúan tanto los conceptos teóricos sino los métodos resolutivos, es decir, las técnicas. Debido a su carácter instrumental, tendrán un papel secundario en la calificación. Dentro de éstas encontramos:
    - ❖ Específicas: recogen las nuevas técnicas aprendidas en el curso actual, pudiendo generar mayor obstáculo.
    - ❖ Generales: abordan un campo más amplio de técnicas entre las cuales están aquellas que han trabajado en cursos anteriores y deberían manejar con facilidad.

A partir de estas tareas, podemos dividir los problemas en dos categorías:

- **C1:** se caracterizan por ser más sencillas ya que no son necesarias las tareas auxiliares, consisten en aplicaciones directas y metódicas de un procedimiento. (Problema 1, Problema 2)
- **C2:** son más complejos ya que no son tan metódicos, sino que requieren pensar, y aparecen también tareas auxiliares. (Problema 3)

Recopilando lo anterior, se propone el modelo denominamos **Criterios de Calificación por Categorización de Tareas (CCCT)** sobre la penalización de errores:

TAREAS AUXILIARES GENERALES

Conjunto de errores ≤ 1/3 de la puntuación

Continuar proceso calificación

TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS

Conjunto de errores ≤ 2/3 de la puntuación

Continuar proceso calificación

TAREAS PRINCIPALES

Conjunto de errores ≤ Total de la puntuación

Bibliografía

Almora, O. R. (s.f.). *GeoGebra*. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/XYthvCdC

Apuntes Marea Verde. (2019b). Recuperado de https://www.apuntesmareaverde.org.es/

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E. y Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.

Contreras, A., Luque, L., y Ordoñez, L. (2003). Una perspectiva de la enseñanza aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en Bachillerato y Universidad. *Revista de Educación, 331*, 399-419.

Dagosli. (s.f.). *Slideshare*. Recuperado de https://es.slideshare.net/dagosli/aplicaciones-de-la-derivada-27133589

De Guzmán, M., y B. Rubio. (1992). *Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático: Estrategias del pensamiento matemático* (Vol. 2). Madrid: Ediciones Pirámide, S. A.

Font, V. (2000) *Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x): el caso de la función seno.* Uno: revista de didáctica de las matemáticas. 25, 21-40

García, L., Moreno, M., Badillo, E., y Azcárate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas. *Economía, 31*, 137-171.

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*(14), 325-355.

González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta, 47(4)*, 449-462.

Izquierdo, J. M. (2010). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Sevilla.

Matemáticas, S. A. (s.f.). Olimpiada Matemática aragonesa XXIX. Preparación.

Mengual, E., Albarracín, L., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A., y Núria, G. (2019). Diseño de criterios para reducir la variabilidad en la calificación de exámenes de matemáticas en prueas de acceso a la universidad. *PNA, 13*(2), 62-83.

Muñoz-Escolano J.M. y Martínez-Juste S. (2020). *Innovación e investigación educativa en matemáticas.* [Apuntes académicos]. ADDUnizar.

Orden ECD/ /2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (s.f.).

Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, en la que se aprueba y autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (s.f.).

Pino-Fan, L., Díaz Godino, J., y Font Moll, V. (2011). Faceta Epistémica Del Conocimiento. *Educacao Matematica Pesquisa, 13*, 141-178.

Terrazas, S. M. (s.f.). *Matemáticas en movimiento*. Recuperado de http://www3.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/Introducci%C3%B3n.html