Trabajo Fin de Máster

Funciones: una propuesta didáctica para Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de 4º ESO

Functions: a didactic proposal for Applications-Oriented Mathematics in 4^{th} ESO

Autora

Sara Embid Solano

Directora

Patricia Florentín Dueñas

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2020-2021

Agradecimientos

Gracias a los profesores de matemáticas del IES Valdespartera por acogerme durante el curso 2020-2021 y permitirme formar parte de su comunidad.

Asimismo, gracias al personal del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas (Esp. Matemáticas) de la Universidad de Zaragoza. A Pablo, Sergio, José Mari, Alberto y Víctor, gracias.

A Patricia Florentín por dirigir este trabajo, orientarme y alentarme a continuar en la investigación en didáctica de las matemáticas. Gracias por su tiempo, su compañía, el periodo de prácticas y los consejos para el futuro.

A mis compañeros de máster que me tienen como referente para saber cómo se escribe una palabra y se asombran con el mimo que dedico a los trabajos grupales. A Laura, a Lucía, a Fernando, a Nacho, a Adrián, a Rebeca, a Iván, a Javier, a Cecilia, gracias. Mención especial tiene Cecilia, por apoyarme siempre y ver en mí cualidades deseables para ser una buena profesora de matemáticas.

Por supuesto, agradecer a toda mi familia, y a mi pareja, quien confía en mí incondicionalmente y critica, desde el cariño, la estética de todos mis trabajos.

A toda persona a la que alguna vez he dado clase y ha conseguido aprender algo conmigo, gracias. En estos tiempos y siempre, es necesario agradecer a los alumnos, sin ellos, la docencia no tendría sentido y estos trabajos serían un conjunto vacuo de papeles desdibujados.

Enormemente agradecida a todos.

Índice

A. Objeto matemático

1. Introducción

El presente documento expone lo que debiera ser una propuesta didáctica para la enseñanza de funciones en 4º ESO, en Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. La memoria se acoge a los requisitos técnicos formulados desde la asignatura Trabajo fin de Máster (Esp. Matemáticas) del Máster de Profesorado de E.S.O. y Bachillerato.

Como otros conceptos matemáticos, que pueden entenderse como una abstracción de conceptos de otros campos, el concepto de función es una abstracción de la idea de ley científica que sirve para el estudio de los fenómenos de cambio (Deulofeu, De la Fuente y Vilaplana, 2021). Las funciones, someramente descritas, se componen de una regla que asigna a cada entidad de un conjunto de partida una y sólo una entidad en el conjunto de llegada. Si bien esta idea conceptual ha sido ampliamente consensuada por el cuerpo docente, Sánchez y Llinares (2003) encuentran diferencias significativas en las formas de afrontar la enseñanza: lo que resulta prioritario para ciertos profesores (aspecto operacional y modo algebraico de representación), para otros es secundario, priorizando las representaciones gráficas y la resolución de problemas. Ante casuísticas como la señalada, la didáctica de la matemática se impone para crear conciencia sobre la diversidad de representantes de la noción de función y cómo el uso de unos u otros queda supeditado al contexto de interés y los problemas enunciados. El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (1989) menciona que los estudiantes que pueden aplicar diferentes representaciones del mismo concepto matemático tienen una apreciación más profunda de la coherencia y belleza de las matemáticas.

Para el alumnado, el conocimiento de las funciones posibilita un acercamiento al paradigma matemático al tener que interpretar críticamente contextos reales regidos por relaciones comprensibles para su nivel. La orientación elegida, enseñanzas aplicadas, tiene por objeto lograr conexiones significativas entre la enseñanza reglada y el entorno más próximo del estudiante, lo cotidiano. Por ello, la realización de una propuesta didáctica adecuada para enseñar funciones resulta crucial y motiva la presente memoria. La investigación que ocupa las páginas siguientes indagará en situaciones propias de los procesos de instrucción matemática. La memoria recogerá, entre otros, la situación curricular, un análisis de libros de texto, un análisis epistemológico, una secuencia didáctica, la relación de campos de problemas, técnicas y tecnologías y la evaluación.

2. Currículo

Para la elaboración de la propuesta didáctica se seguirá lo indicado en la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la ESO y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, atendiendo a los contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje y competencias clave sobre funciones integrados en el bloque homónimo ("Funciones"):

Tabla 1. Bloque de funciones para Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas en 4º ESO

Contenidos	Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Estudios de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales. La tasa de variación media como medida de una función en un intervalo.
Criterios de evaluación	Crit.MAAP.4.1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas. Cri.MAAP.4.2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representan relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.
Estándares de aprendizaje	*Est.MAAP.4.1.1.* Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional (lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa y exponencial), asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas. *Est.MAAP.4.1.2.* Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad). *Est.MAAP.4.1.3.* Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno, a partir de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores. *Est.MAAP.4.1.4.* Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. *Est.MAAP.4.1.5.* Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa y exponenciales.

	Est.MAAP.4.2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales. *Est.MAAP.4.2.2.* Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. *Est.MAAP.4.2.3.* Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica utilizando tanto lápiz y papel como medios informáticos. *Est.MAAP.4.2.4.* Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando y argumentando la decisión. *Est.MAAP.4.2.5.* Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas.
Competencias clave	CSC – Competencias sociales y cívicas CD – Competencia digital CAA- Competencia de aprender a aprender CMCT – Competencia matemática y en ciencia y tecnología

3. Relación de campos de problemas, técnicas y tecnologías

Con objeto de clarificar los apartados sucesivos, se han seleccionado tres categorías que permiten tipificar los campos de problemas (CP), las técnicas (T) y las tecnologías (TEC) involucradas en el desarrollo habitual del proceso de enseñanza de funciones en 4º ESO, en Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Estas categorías son: concepto de función y descriptores, sistemas de representación y equivalencias, cualidades de las funciones y estudio. El siguiente esquema ilustra la relación entre los campos de problemas, técnicas y tecnologías presentes en una misma categoría:

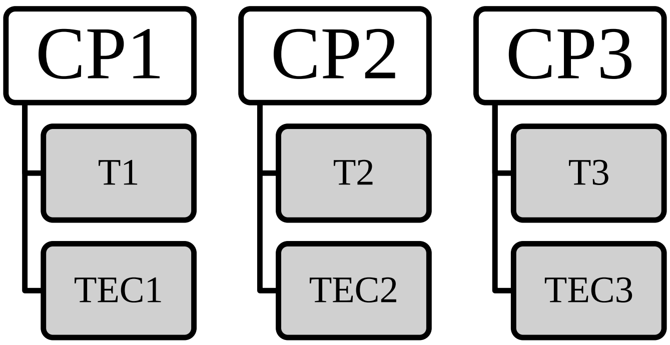


Figura 1. Relación entre campos de problemas, técnicas y tecnologías

A continuación, se detalla el contenido específico al que refiere cada indicador:

Tabla 2. Selección de campos de problemas con sus identificadores correspondientes

Indicador	**Campo de problemas**
CP1	Concepto de función y descriptores 1. Enunciado 2. Tabla de valores 3. Gráfica 4. Expresión algebraica
CP2	Sistemas de representación y equivalencias (1,2) Paso de enunciado a tabla de valores (1,3) Paso de enunciado a gráfica (1,4) Paso de enunciado a expresión algebraica (2,1) Paso de tabla de valores a enunciado (2,3) Paso de tabla de valores a gráfica (2,4) Paso de tabla de valores a expresión algebraica (3,1) Paso de gráfica a enunciado (3,2) Paso de gráfica a tabla de valores (3,4) Paso de gráfica a expresión algebraica (4,1) Paso de expresión algebraica a enunciado (4,2) Paso de expresión algebraica a tabla de valores (4,3) Paso de expresión algebraica a gráfica
CP3	Cualidades de las funciones y estudio 1. Dominio. Imagen. Cortes con los ejes 2. Crecimiento. Extremos relativos 3. Continuidad. Periodicidad

Tabla 3. Selección de técnicas con sus identificadores correspondientes

Indicador	**Técnicas**
T1	1. Estudio de la relación funcional entre dos variables, una dependiente (x) y una independiente (y) viendo si a cada valor de x le corresponde un único valor de y.
T2	1. Selección de datos numéricos relevantes para la construcción de tablas de valores y gráficas adecuadas a la relación funcional. 2. Identificación de la relación funcional entre las variables dependiente e independiente para la construcción de una expresión algebraica. 3. Expresión de un enunciado plausible, realista y coherente que se ajuste a la relación funcional.
T3	1. Detección de los intervalos para los que las variables dependiente e independiente están definidas dada la relación funcional. 2. Análisis de los puntos en que las variable dependiente e independiente se anulan dada la relación funcional (si los hay). 3. Interpretación adecuada de la tasa de variación media como medida del crecimiento de una función. 4. Estudio de los saltos o discontinuidades (si los hay). 5. Observación de ciclos repetitivos (si los hay).

Tabla 4. Selección de tecnologías con sus identificadores correspondientes

Indicador	**Tecnologías**
TEC1	1. Definición de función. 2. Representación verbal, tabular, gráfica y algebraica de una función.
TEC2	1. Representación verbal, tabular, gráfica y algebraica de una función.
TEC3	1. Definición de dominio de una función. 2. Definición de recorrido o imagen de una función. 3. Definición de tasa de variación media y extremos relativos. 4. Definición de función continua. 5. Definición de función periódica.

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje

1. Análisis didáctico

Las investigaciones en didáctica de las Matemáticas que sirven al presente estudio de investigación se inscriben en la denominada *teoría constructivista*, que sostiene que el conocimiento matemático es reconstruido por cada individuo y es una manifestación de experiencias personales que provienen tanto de su mundo cotidiano como de la experiencia escolar (Wheatley,1991). En este sentido, encontramos diversas publicaciones que ahondan tanto en la definición de función como en sus formas de representación.

Akkoç y Tall (2002) señalan que los estudiantes a los que se les introduce el objeto matemático de función traen implícita su comprensión del lenguaje junto con todas sus experiencias previas, obstaculizando una correcta interpretación del concepto matemático. Ya Vinner (1983) hacía una distinción entre el *concepto definición* usado por las personas que ejercen la Matemática y el *concepto imagen* generado en la mente de todos aquellos que se aproximan a ella. Martínez de la Rosa (2015) coincide en que lo más frecuente es que un estudiante ignore el concepto definición y responda de acuerdo con su concepto imagen, conteniendo incluso ideas imprecisas o equivocadas.

Por su parte, Figuereido, Contreras y Blanco (2015, p.70) ponen el foco en las definiciones conceptuales que coexisten actualmente, revelando que el concepto definición ni siquiera es único para este momento concreto de la enseñanza:

1. Función como expresión analítica. Definición de Johann Bernoulli (1718): "Una función de una magnitud variable es una expresión analítica, compuesta por una magnitud y por constantes".

2. Función como covariación entre cantidades o magnitudes variables. Definición de Leonard Euler (1755): "Cuando unas cantidades dependen de otras de tal forma que al variar las últimas varían las primeras, entonces a las primeras se les llaman funciones de las segundas".

3. Función como correspondencia unívoca entre conjuntos. Definición de Peter Dirichlet (1837): "y es función de x si a cada valor de x corresponde un valor completamente determinado de y; además, no es importante el método con el cual se establece la correspondencia señalada".

La exploración del concepto basada en la noción formal de Dirichlet supone un alto grado de generalización y abstracción difícilmente alcanzable por el alumnado de Secundaria. Sierpinska (1988) señala que la definición formal de función oculta la verdadera naturaleza de este concepto, con lo que introducir funciones a estudiantes por su definición moderna es un error didáctico, una inversión anti-didáctica. La conceptualización de función aceptada, desde un punto de vista didáctico, admite representaciones en diferentes registros, cada uno con diversos alcances y limitaciones (Sastre-Vázquez, Rey y Boubée, 2008). Sierra-Vázquez, González-Astudillo y López-Esteban (1998) siguen la línea mencionada y ven preferible una aproximación más informal; los sistemas de representación que consideran son: descripción verbal, tablas, gráficas y expresiones algebraicas. Janvier (1987) esquematiza en el siguiente cuadro los procesos de interacción-traducción presentes entre dichos sistemas:

	Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Expresiones algebraicas
Descripción verbal		Medida	Croquis	Modelo
Tablas	Lectura de relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste numérico
Gráficas	Lectura de relaciones gráficas	Tabulación		Ajuste gráfico
Expresiones algebraicas	Lectura de relaciones simbólicas	Tabulación	Croquis	

Figura 2. Procesos de interacción entre sistemas de representación. Extraído de Janvier (1987).

2. Análisis de libros de texto

La comunidad educativa matemática concede una importancia notoria a los libros de texto; ya el informe Cockroft (1985) revelaba que los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula. Además, Schubring (1987) señaló que estos determinan la enseñanza más que los propios decretos gubernamentales. Dada la magnitud de manuales que pueden ser susceptibles de ser investigados, se ha realizado una selección de cuatro libros de texto procurando un carácter actual y una difusión relativamente amplia. El objetivo de la investigación será establecer el tratamiento dado a la noción de función y sus representantes, mediante su análisis.

Los libros seleccionados se pueden clasificar, según las normativas del periodo al que pertenecen, en dos grupos: a) LOE y b) LOMCE. La denominación "Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas" no se tuvo hasta que entró en vigor la ley LOMCE (2013), con lo que el libro anterior a esta fecha no contempla este título y dentro de su carácter unificado para *4º ESO*, refiere a "Matemáticas Opción A" para las enseñanzas aplicadas. Los dos libros que tienen un carácter más actual (2021), están disponibles en formato pdf para su libre descarga y uso bajo la licencia Creative Commons (Apuntes Marea Verde) y bajo los derechos de autor y propiedad del GRUPO ANAYA, S.A.U., respectivamente. Los cuatro libros a los que se les ha realizado el análisis son:

Tabla 5. Selección de libros de texto con sus identificadores correspondientes.

Identificador	**Libro de texto**
LT1	Domenech, J. C. (2008). *Matemáticas, 4º ESO.* Alcoy, España: Marfil, S.A.
LT2	Pérez, C. (2016). *Matemáticas enseñanzas aplicadas serie soluciona 4º ESO.* Madrid, España: Santillana Educación, S.L.
LT3	Moya, P., & Zuasti, N. (2021). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas: 4ºA de ESO.* Recuperado de https://www.apuntesmareaverde.org.es/
LT4	Cólera, J., & Gaztelu, I. (2021). Matemáticas orientadas a las enseñanzas Aplicadas 4º. ESO. Profesorado. Anaya + Digital. Anaya. Recuperado de https://www.anayaeducacion.es/

Para analizar la introducción escolar del objeto matemático de función, seleccionamos el concepto de función en sus diferentes representaciones. Elegimos, para ello, los cuatro indicadores que señalábamos en CP1. Por su interés, se recoge una transcripción de las definiciones conceptuales halladas en los libros de texto:

Tabla 6. Definiciones conceptuales halladas en los libros de texto analizados

	Definición conceptual
LT1	Hay una dependencia funcional si a cada valor de la variable independiente, le corresponde un único valor de la variable dependiente. Estas correspondencias verifican una propiedad: "A cada elemento del conjunto inicial le corresponde un único elemento del conjunto final" y reciben el nombre de funciones.

LT2	Una función es una relación entre dos variables numéricas, x e y, en la que a cada valor de x le corresponde un único valor de y.
LT3	Una función es una relación entre dos magnitudes de forma que, a cada valor cualquiera de una, llamada variable independiente ("x"), le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la llamada variable dependiente ("y").
LT4	Una función liga dos variables numéricas a las que, habitualmente, se las llama x e y: x es la variable independiente. y es la variable dependiente. La relación entre las variables mediante la función f asocia a cada valor de x un único valor de y.

En LT1, la introducción del objeto matemático se realiza mediante una serie de actividades contextualizadas (panaderías, reparaciones, fábricas, etc.) que orientan al alumno hacia el reconocimiento de relaciones funcionales. Por su parte, los libros restantes otorgan una preponderancia del concepto definición sobre los demás elementos, no permitiendo una contextualización adecuada. Aunque LT2 dedica un espacio exiguo a las cotizaciones en bolsa, LT3 a la cochinilla roja y LT4 a las aportaciones de matemáticos, estos supuestos introductorios apenas inciden en la formación de un concepto imagen significativo. Tras la definición conceptual, los modos de representación escogidos se revelan, haciendo mención explícita de aquellos que cada libro considera oportunos:

Tabla 7.Modos de representación explicitados en los libros de texto analizados

	Modos de representación
LT1	La relación de dependencia funcional puede venir dada por una ley, regla o fórmula (…) Una función puede venir determinada también por un enunciado, una gráfica o por una tabla.
LT2	Las funciones se pueden expresar de distintas formas: un enunciado que represente la relación entre las variables, una expresión algebraica, una tabla de valores, una gráfica.
LT3	Las relaciones funcionales se pueden establecer mediante una tabla de valores, una gráfica o una expresión matemática o fórmula.
LT4	Las funciones nos vienen dadas de muy diversas formas: mediante su gráfica, por una tabla de valores, por una fórmula o mediante una descripción verbal (enunciado).

Como regla general, se escogen los modos explicitados en el currículo aragonés: “enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica”. Tan solo LT3 muestra un comportamiento diferenciado, no mencionando explícitamente que las funciones pueden venir dadas por enunciados verbales. Para cuantificar la presencia de estos indicadores (1,2,3,4), se ha realizado un muestreo que incluye un total de 172 ejercicios y ejemplos previos a la introducción de funciones prototípicas (lineales, cuadráticas, etc.). Los porcentajes se han tomado sobre el total de actividades de cada libro de texto redondeando a la unidad.

Tabla 8.Porcentajes de presencia de los descriptores tomados sobre el total de actividades de cada libro de texto

	Enunciado	**Tabla**	**Gráfica**	**Exp. Algebraica**	**TOTAL**
LT1	25%	13%	53%	9%	100%
LT2	21%	5%	36%	38%	100%
LT3	48%	7%	30%	15%	100%
LT4	17%	7%	59%	17%	100%
TOTAL	26%	7%	44%	23%	100%

De acuerdo con las mediciones realizadas, los libros de texto que priorizan el lenguaje gráfico sobre el resto de las representaciones son LT1, LT3 y LT4, destacando este último (59%). LT2, en cambio, da un tratamiento similar al lenguaje gráfico y al lenguaje algebraico con porcentajes del 36% y 38%, respectivamente. Por otro lado, resulta escaso el tratamiento tabular en los cuatro libros de texto, sólo superando el 10% (13%) en LT1.

Con estos datos, se concluye que no hay un tratamiento equitativo de los cuatro lenguajes con presencia (verbal, tabular, gráfico y algebraico) en el total de actividades examinadas. Aunque los pesos normalizados otorgados a lo verbal y algebraico se acercan a $\frac{1}{4}$ del total (26% y 23% respectivamente), en lo tabular y gráfico hay un desajuste evidente. Se otorga, aproximadamente, un $\frac{1}{20}$ del total a la representación en forma de tabla de valores (7%) y un $\frac{9}{20}$ del total a la representación gráfica (44%). A nivel curricular, consideramos que lo referente al Cri.MAAP.4.2. no puede ser convenientemente aplicado puesto que faltan ejemplos y actividades que permitan al alumnado analizar la información proporcionada a partir de tablas.

En lo relativo a los sistemas de representación, hemos seleccionado el muestreo anterior (n=172) y lo hemos sometido a un nuevo análisis. Recogemos las veces en que la actividad nos remite a los indicadores de CP1 y distinguimos si lo hace para que deduzcamos otra expresión de la función dada (CP2) o cualidades de una posible función (CP3). El análisis revela que se presentan tareas que involucran el paso de unas formas de representación a otras en torno al 40% de las ocasiones (67 de las 172 actividades); lo cuantificamos en la siguiente tabla ($n = 67$):

Tabla 9. Presencia del paso entre sistemas de representación

	(1,2)	**(1,3)**	**(1,4)**	**(2,3)**	**(2,4)**	**(3,1)**	**(4,2)**	**(4,3)**	**TOTAL**
LT1	1	2	5	2	2	1	1	1	15
LT2	5	0	4	3	0	0	2	8	22
LT3	2	4	7	0	1	1	1	3	19
LT4	0	5	1	0	2	3	0	0	11
TOTAL	8	11	17	5	5	5	4	12	67

Las cuatro subcategorías de las que no se tiene evidencia son (2,1), (3,2), (3,4) y (4,1), es decir, no encontramos actividades en las que se especifique que es necesario realizar una transformación de tabla de valores a enunciado, de gráfica a tabla de valores, de gráfica a fórmula y de fórmula a enunciado, respectivamente. El hecho de que (3,2) no aparezca y (2,3) tenga una presencia residual (7%) resulta paradójico puesto que desde el currículo aragonés se tiene un estándar de aprendizaje (Est.MAAP.4.2.4.) para valorar la capacidad de relacionar tablas de valores y gráficas.

En los supuestos de CP3 (105 de las 172 actividades), en vez de cuantificar las veces que aparecen sus subcategorías (dominio-imagen, cortes con los ejes, crecimiento-extremos relativos, continuidad-periodicidad), cuantificaremos las veces en que es usado el lenguaje verbal, tabular, gráfico y algebraico para estudiarlas. De esta manera, comprendemos la importancia o peso relativo de cada lenguaje (1-enunciado, 2-tabla, 3-gráfica y 4-expresión algebraica) en el estudio de las cualidades o características de una función; lo cuantificamos en la siguiente tabla ($n = 105$):

Tabla 10. Presencia de los distintos lenguajes para el estudio de cualidades de una función

	1	**2**	**3**	**4**	**TOTAL**
LT1	0	0	16	1	17
LT2	5	0	24	15	44
LT3	3	1	9	1	14
LT4	1	1	21	7	30
TOTAL	9	2	70	24	105

El análisis de los datos refleja que, alrededor del 40% de las veces, las gráficas son analizadas en sí mismas no esperando de ellas ningún tipo de transformación. Lo mismo sucede con las fórmulas (en torno a un 14%), los enunciados (5% aproximadamente) y las tablas de valores (sobre el 1%). Además, el total de los libros analizados prioriza el lenguaje gráfico sobre los demás lenguajes.

3. Análisis de obstáculos, errores y dificultades

Al analizar los libros de texto, poníamos el foco, en primer lugar, en la definición conceptual del objeto matemático de función. Dubinsky y Wilson (2013) recopilaron información sobre las dificultades conceptuales en categorías: saber qué es y qué no es una función, la representación de funciones y la notación funcional.

En la primera de estas categorías (saber qué es y qué no es una función), encontraron que parte del alumnado asocia una función con la existencia de una expresión analítica particular o un trazo continuo despojando a las funciones a trozos, las funciones constantes o los puntos discretos de la condición de función en su concepto imagen.

En la segunda categoría (la representación de funciones), se remitieron, entre otros, al estudio de Akkoç y Tall (2002) por las conexiones que establece entre las distintas formas de representación del objeto matemático de función: definición, entrada-salida, diagrama, par ordenado, tabla, gráfica y fórmula.

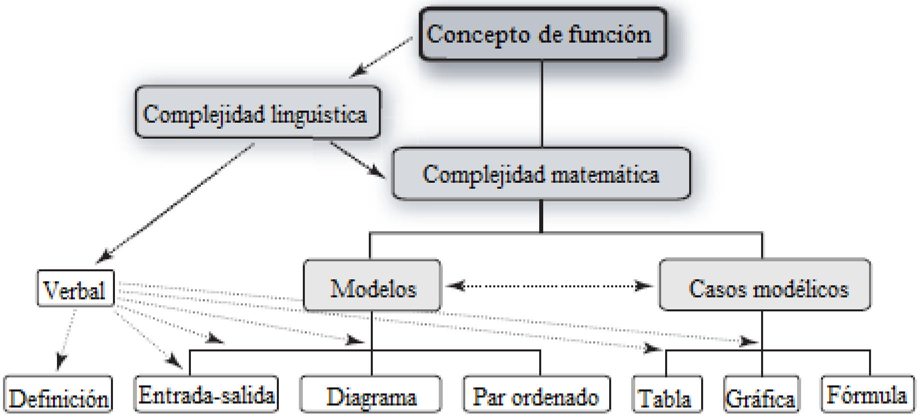


Figura 3. Concepto de función. Adaptada de Akkoç y Tall (2002).

Cada una de estas expresiones tiene sus particularidades y suele presentarse de forma aislada, lo que dificulta, en parte, que los estudiantes puedan hacerse un concepto imagen adecuado de la noción de función. La distinción entre modelos y casos modélicos crea asimismo confusiones pues, generalmente, los estudiantes sólo son capaces de tratar como tabla de valores, gráfica o fórmula subtipos de funciones perfectamente de-limitadas (lineales, cuadráticas, etc.). El uso de funciones genéricas suele quedar reservado para aquellos alumnos que han dado un salto en abstracción y toman en consideración la concepción estructural de función, infrecuente en grupos de 4º ESO Aplicadas.

En la tercera categoría (la notación funcional), nos remiten al estudio de Vinner y Dreyfus (1989), quienes encontraron serias dificultades en la interpretación de $y = f(x)$. En sus investigaciones, vieron que muchos estudiantes interpretan dicha expresión como producto de una variable "f" por una variable "x", lo que les aleja de las ideas de correspondencia y variable. Las dificultades conceptuales señaladas a lo largo de las tres categorías se deben, generalmente, a obstáculos de corte ontogenético, es decir, a las limitaciones propias del desarrollo cognitivo de los estudiantes, en nuestro caso, quienes cursan 4º ESO Aplicadas.

Según el *Shell Centre for Mathematical Education* (1990), muchos alumnos están familiarizados con gráficas, tablas de valores y expresiones algebraicas, y pueden manipularlas con razonable exactitud; pero son incapaces de interpretar características globa-les de funciones cuando estas están incrustadas en contextos realistas. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) tratan errores que surgen, con mayor probabilidad, entre aquellos estudiantes que han estado expuestos a funciones que se relacionan con contenidos concretos de la vida cotidiana. En muchos casos, parece que este perfil de alumnado tiende a equiparar el concepto de dependencia con el concepto de causalidad. Así, esa dependencia de intuiciones previas conlleva atribuciones excesivas: un evento causa otro. Otros errores que se derivan de un tratamiento no abstracto de las gráficas son: asignar más significado a la escala del que presenta matemáticamente, dar sentido a la pendiente como altura en vez de como medida de la tasa de variación media, y ver un gráfico como una imagen.

Por su parte, Deulofeu (2001) entiende que la dificultad fundamental reside en tratar a las funciones como proceso y pretender que sean a su vez entendidas como objeto. Capacitar al alumnado para utilizar las funciones elementales introduciendo, además, el lenguaje algebraico y la traducción entre sistemas de representación conlleva obstáculos didácticos al tratar con un concepto de función todavía en un estado primitivo.

Sobre el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones, Ortega y Pecharromán (2014) señalan confusiones en los puntos que pertenecen o no al dominio y recorrido de la función, confusiones identificando los ejes de abscisas y ordenadas, es-tudio de la monotonía moviéndose por los puntos de la gráfica en vez de considerar los tramos de los intervalos en los que se muestra la propiedad y estudio de los extremos con los puntos más altos o más bajos respecto el eje de abscisas, entre otros.

C. Conocimientos previos del alumno

1. Conocimientos necesarios y relación con el aprendizaje adquirido

Las mentes de los alumnos no son lienzos en blanco. Cada alumno va construyendo o reconstruyendo personalmente un significado sobre la base de los significados ya construidos previamente (Miras, 1993). Incidiendo en este aspecto, Ball, Thames y Phelps (2008) señalan la importancia de un profesor que pueda dar un sentido matemático al trabajo de los estudiantes.

Para afrontar el aprendizaje de funciones en 4º ESO, en Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, los alumnos deberían haber sido capaces de integrar nociones básicas sobre: números reales, ecuaciones de primer y segundo grado, geometría elemental de figuras planas y tridimensionales, proporcionalidad y dependencia lineal y cuadrática presentes en cursos anteriores. Asimismo, conocer la idea de función y estar familiarizados con la lectura de relaciones numéricas, gráficas y simbólicas de manera que puedan traducir entre las distintas formas de representación y comprendan sus limitaciones.

Las funciones son un objeto matemático que tiene su introducción escolar en 1º de ESO. Según la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la ESO y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, en 1º de ESO debe explicarse la representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados, la noción de variable dependiente e independiente y las funciones de proporcionalidad directa, es decir, $y = mx$, donde y representa la variable independiente, x la dependiente y m la pendiente o constante de proporcionalidad.

En 2º de ESO, los conocimientos que deben explicarse involucran ya cualidades propias de funciones cualesquiera como son el crecimiento y decrecimiento, continuidad y discontinuidad, cortes con los ejes, máximos y mínimos, periodicidad, etc. A funciones prototípicas como las de proporcionalidad directa, se suman las funciones lineales: $y = mx + n$ donde n representa la ordenada en el origen o corte con el eje y. En 3º de ESO, en Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, se incide en el análisis de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano. De igual modo, se remarca la importancia de la utilización de modelos lineales que sirvan al estudio de situaciones provenientes de la vida cotidiana y se inicia el estudio de las funciones cuadráticas: $y = ax^2 + bx + c$, con a, b, c coeficientes no nulos.

2. Actividades de detección de conocimientos previos

Basándonos en los cursos anteriores, los alumnos deberían tener los conocimientos previos ya asentados. A pesar de ello, se planteará una primera sesión que comprenderá tres partes diferenciadas:

1. Cuéntame algo que sepas relacionado con las funciones (acorde con tu nivel)
2. Propón un problema sobre funciones que te parezca realista
3. Cuéntame cómo resolverías las siguientes actividades (sin resolverlas)

Las dos primeras partes se inspiran en un artículo donde se propone un tipo de evaluación inicial que permita buscar nuevas formas de enfocar los contenidos para procurar que ciertos errores no aparezcan:

> Estoy seguro de que todo el mundo sabe algo relacionado con las matemáticas y de que a diario se os plantean problemas que tienen que ver con ellas. Por eso, en una cara de un folio me vais a contar algo que sepáis de matemáticas (acorde con vuestro nivel) y en la otra cara me vais a proponer un problema.
>
> (Mercado, 2007, p.34).

Para la tercera parte, se proponen tres ejercicios que nos remiten a nociones matemáticas relacionadas con el objeto matemático de función: números reales, ecuaciones de primer y segundo grado y geometría elemental de figuras planas y tridimensionales:

Ej. 1. [Números reales] Representa, de la forma más exacta posible, los siguientes números reales: (2/3, 3/2), (-13/4, 3.25), (-3. 66666…, -3.3333333333…), (7/6, $-\sqrt{2}$).

Ej. 2. [Ecuaciones de primer y segundo grado] En un juego de ordenador, dos coches llevan trayectorias diferentes: $y=x+4$, $y=-x^2+6x$ ¿Se llegan a encontrar? Analiza numérica y gráficamente la situación.

Ej. 3. [Geometría elemental de figuras planas y tridimensionales] Los lados de la base de un prisma rectangular miden 2.5 cm y 4 cm. ¿Podrías calcular el área de la base? ¿y su área total? ¿necesitas algún dato adicional? Halla la expresión de la función que da el área total según la altura.

D. Razones de ser del objeto matemático

1. Razón de ser elegida y razón de ser histórica

El concepto de función es inherentemente difícil para los alumnos cualquiera que sea el método de enseñanza (Ruiz, 1998). Partiendo de esa premisa, y entendiendo que el conocimiento matemático es un tipo de conocimiento de naturaleza dual que conjuga aspectos internos (estructura formal) con aspectos externos (resolución de problemas reales) (Rochera, Gregori y Goñi, 1990), trataremos de orientar el aprendizaje de funciones hacia esta segunda, sin menoscabo de la primera. En la introducción (apartado A.1), señalábamos que la orientación elegida tiene por objeto lograr conexiones significativas entre la enseñanza reglada y el entorno más próximo del estudiante, lo cotidiano. De esta manera, posibilitamos una conexión entre la realidad física y la teórica estudiando relaciones funcionales que estén presentes en fenómenos que acontecen a nuestro alrededor ya sean físicos, químicos, biológicos, geológicos, económicos o sociales. La razón de ser con que se introducirán las funciones supone la modelización de situaciones cotidianas en que se relacionan dos magnitudes sujetas a cambios a través de diversos lenguajes: verbal, tabular, gráfico y algebraico.

La conceptualización de función con la que trabajamos hoy en Secundaria es fruto de numerosos acercamientos al pensamiento funcional que pueden rastrearse en los anales de la historia, ganando en precisión y abstracción a partir del siglo XVII. Aunque la evolución histórica admite numerosas caracterizaciones por períodos, usaremos la dada por Díaz Gómez (2013): Antigüedad, Edad Media y Período Moderno.

Antigüedad (2000 a.c. – 600 a.c.). En este período comienzan a desarrollarse algunas manifestaciones que implícitamente contienen la noción de función. Pedersen (1974) señala que, en culturas primitivas como los babilonios ya existía el instinto de funcionalidad: “función no sólo es fórmula, es también una relación que asocia elementos de dos conjuntos”. A través de las observaciones directas de fenómenos enlazados por una relación aritmética, como los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol, los babilonios eran capaces de rellenar unas tablillas astronómicas que les permitían realizar predicciones (Sastre-Vázquez, Rey y Boubée, 2008).

Edad Media (500 – 1500). En esta etapa surge una teoría primitiva de funciones en la que se analiza la dependencia de una cantidad variable sobre otra (Díaz Gómez, 2013). Al instinto funcional de la Antigüedad, se suma el que podríamos denominar: “función es gráfica” atribuido a Oresme. Nicolás de Oresme, pensador y teólogo del siglo XIV, describió las leyes de la naturaleza como relaciones de dependencia entre dos magnitudes señalando que todo lo que varía se puede imaginar como una cantidad continua representada mediante un segmento rectilíneo (Sastre Vázquez, Rey y Boubée, 2008). Sin embargo, faltó el lenguaje algebraico con el que expresar la ley de variación o correspondencia entre variables (Boyer, 1946).

Período moderno (1650 en adelante). La palabra “función” aparece en el estudio de curvas con problemas referidos a longitudes, áreas y tangentes. Leibniz (1646 - 1716) fue el primer matemático en utilizar el término función para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, introduciendo, además, los términos: constante, variable, coordenadas y parámetro (Sastre Vázquez, Rey y Boubée, 2008). Por su parte, Euler (1707 - 1783) precisó la noción de función definiendo constante y cantidad variable y proponiendo la notación $f(x)$ (Farfán y García, 2005). Bernouilli (1700 -1782) presentó su definición analítica en 1718 (apartado B.1.) y años después, desde 1720 hasta 1820, comenzó a desarrollarse una nueva disciplina cuyo objeto de estudio fueron las funciones: el Análisis. Las funciones que fueron aplicadas con anterioridad, en el Cálculo, suscitaban debate según si debían ser representadas geométricamente (en la forma de una curva), analíticamente (en la forma de una fórmula), o lógicamente (en la forma de una definición) (Sastre Vázquez, P., Rey, G. y Boubée, G., 2008). El debate quedó parcialmente resuelto con Dirichlet (1805 - 1859) y su expresión de función con significado independiente del concepto de expresión analítica (Youschkevitch, 1976).

Durante más de 3500 años, se trabajó con objetos matemáticos que llevaban implícita la noción de función, pero fueron necesarios más de 200 años para la formación del concepto (Sastre Vázquez, P., Rey, G. y Boubée, G., 2008). El breve recorrido epistemológico que se ha realizado evidencia que la noción de función ha estado ligada a varios representantes con problemas que siguen las leyes de la naturaleza. En definitiva, la razón de ser elegida: “la modelización de situaciones cotidianas en que se relacionan dos magnitudes sujetas a cambios a través de diversos lenguajes: verbal, tabular, gráfico y algebraico” coincide con la razón de ser histórica que dio origen al término.

2. Problema relacionado con la razón de ser elegida

El problema escogido es una adaptación de uno de los problemas propuestos por el *Shell Centre for Mathematical Education* (1990, p. 200).

Prob. 1. [Elaborando una revista] Un grupo de amigos quieren sacar algún dinero elaborando y vendiendo su propia revista. Un profesor amable se ofrece a ayudar dando facilidades y papel gratis, al menos para los primeros números. Haz una lista de todas las decisiones importantes que deberían tomar. Por ejemplo: ¿Cuál debe ser el tamaño de la revista? ¿Cuántos redactores harán falta? ¿Cuánto tiempo llevará escribirla?

a) Algunas de las cuestiones de tu lista dependerán de otras. Por ejemplo:
   -Para un número fijo de redactores, cuanto más larga sea la revista…
   -Para un tamaño fijo de revista, cuantos más redactores haya...
   Completa los puntos suspensivos, escribe otras relaciones y haz gráficas en cada caso. Explica con palabras la forma de cada una de tus gráficas.

b) El grupo decide investigar cuántos compradores potenciales hay en el instituto, produciendo una revista de prueba y realizando una encuesta entre 100 alumnos preguntándoles: ¿Cuánto dinero estarías dispuesto a pagar por esta revista? Sus datos fueron:

Precio (€)	0	0.50	1	1.50	2
Personas (n)	100	82	58	40	18

¿A qué precio deberían cobrar la revista para conseguir el máximo beneficio?

c) Después de unos cuantos números, el profesor decide que debe cobrar a los alumnos 0.20€ por revista por el papel y la reproducción. ¿A cuánto deberían cobrar la revista?

3. Implementación en el aula

Este problema está pensado para ser utilizado a título introductorio, presentando el objeto matemático de función desde su razón de ser modeladora. Al tratarse de un problema abierto, se considera oportuno trabajarlo primero individualmente y después en grupos pequeños de 3-4 personas durante una sesión completa. La metodología empleada sigue lo descrito por el Shell Centre for Mathematical Education (1990, pp. 255-269): fase individual, fase cooperativa y puesta en común para su institucionalización.

En esta primera fase, los alumnos dedicarán 5 minutos a pensar los problemas por sí mismos y realizar anotaciones en sus cuadernos respectivos. No se trata de dar respuestas formales sino de ser conscientes de las dificultades más inmediatas que encuentran ey las lagunas de conocimiento presentes. Es probable que algunos no recuerden qué forma deberían tener ciertas gráficas o cómo se construían, por ello, pasar del trabajo individual al grupal les servirá para compartir impresiones y crear redes de apoyo mutuo.

En la segunda fase, los alumnos deberán trabajar cooperativamente durante 30 minutos. Aquellos que han tenido menores dificultades, ayudarán a sus compañeros a comprender lo qué se pide y recordarán aquellos conocimientos que otros tenían ya olvidados o no llegaron a interiorizar. La idea es llegar a plasmar sobre una ficha de grupo una solución conjunta donde las aportaciones individuales de unos y otros sean tenidas en cuenta. Durante todo el proceso, el profesor estará disponible para resolver dudas y guiar a aquellos que se encuentren bloqueados. Eventualmente, el profesor podrá parar la clase y proponer pistas en la pizarra de manera que todos conozcan cierta información y puedan avanzar al unísono. Por ejemplo, en la pregunta 3 sobre el máximo beneficio puede insistir en que una gráfica puede ayudarles a ver la expresión analítica oculta en la tabla de valores.

En la tercera y última fase de 15 minutos de duración, un portavoz de cada grupo expondrá sus conclusiones al resto de la clase. Una vez que todos los grupos hayan tenido ocasión de participar, el profesor complementará la puesta en común evidenciando las nociones matemáticas que así considere. Por ejemplo, puede conectar los contenidos de la pregunta 1 con las nociones de proporcionalidad que vieron en temas anteriores y recordar los modelos funcionales que deberían conocer: lineales y cuadráticos. Con esta puesta en común se pretende que la definición de función haya sido tratada y que sus descriptores verbales, analíticos, tabulares y gráficos hayan sido comentados.

E. Campo de problemas

1. Relación de problemas

A continuación, se enuncian los problemas seleccionados para trabajar con el objeto matemático de función según los campos de problemas recogidos en la tabla introductoria (apartado A.3).

CP1. Concepto de función y descriptores

Prob. 2. [Enunciado] Para la cena de Nochebuena, vamos a cocinar un pavo. Consultando un libro de recetas, hemos visto que el tiempo de cocinado de un pavo de 2 kg es de 3 horas. Si escogemos un pavo más grande, por cada kg extra deberemos cocinarlo media hora más. Si en total tenemos 4h30 para cocinar, ¿cuántos kg pesará el pavo? ¿qué sucede si escogemos un pavo más pequeño? ¿y más grande? ¿existe una función que relacione el número de kg con el tiempo de cocinado? ¿cuál sería la variable dependiente y la independiente? Acompaña tus conclusiones con diagramas, tablas, fórmulas o gráficas.

Prob. 3*. [Tabla de valores] En una copistería de Rosales del Canal, se hacen ofertas según el número de impresiones a color formato DIN A-4:

Impresiones (n)	Precio por unidad (€)
1-49	0,10
50-99	0,09
100-199	0,08
200 en adelante	0,07

Un alumno del IES Valdespartera se ha dado cuenta de que hacer 49 fotocopias sale más caro que hacer 54, ¿por qué? ¿existe una función que relacione el número de impresiones con el precio por unidad? ¿cuál sería la variable dependiente y la independiente? Puedes acompañar tus conclusiones con diagramas, tablas, fórmulas o gráficas.

** Adaptado de Cólera y Gaztelu (2021, p.123).*

Prob. 4*. [Gráfica] Estas gráficas muestran la variación de los sentimientos de un estudiante durante un día típico. Su rutina es la siguiente: despertarse, ir a la escuela, asamblea, ciencias, descanso, matemáticas, comida, juegos, descanso, francés, volver a casa, hacer los deberes, jugar a la pelota e ir a la cama.

Intenta explicar la forma de la gráfica asignando a cada tramo la actividad que corresponda, ¿existe una función que relacione el estado de ánimo con la actividad? ¿cuál sería la variable dependiente y la independiente? Acompaña tus conclusiones con diagramas.

Prob. 5. [Expresión algebraica] Manuel vende cupones para una lotería que se organiza todos los años en Borja, su pueblo. Para calcular la comisión que percibe le han dado la siguiente expresión: $y = 0.8x$, ¿cuántos cupones necesita vender para ganar 100€? ¿existe una función que relacione el dinero que gana con el número de cupones vendidos? ¿cuál sería la variable dependiente y la independiente? Acompaña tus conclusiones con diagramas, tablas, fórmulas o gráficas.

CP2. Sistemas de representación y equivalencias

Prob. 6. [Paso de enunciado a tabla de valores] En la cafetería del IES Valdespartera, el camarero decide anotar lo que cuesta una oferta de desayuno válida para un mínimo de dos personas: café con leche y pincho de tortilla. Si esta oferta de desayuno son 2.50 € por pareja, ¿cuánto tendrán que pagar grupos de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 amigos? Si necesitas algún dato adicional da valores coherentes justificando tu respuesta.

Número de amigos (n)	Precio total del desayuno (€)
1	…

* *Adaptado del Shell Centre for Mathematical Education (1990, p. 232).*

Prob. 7. [Paso de enunciado a gráfica] Representa gráficamente y resuelve:

a) Un peatón sale a dar un paseo caminando a 4 Km/h. Media hora más tarde sale en su busca un ciclista a 10 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarle?

b) Un depósito contiene 240 l de agua y recibe el caudal de un grifo que aporta 9 l por minuto. Un segundo depósito contiene 300 l y recibe un caudal de 4 l por minuto. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que ambos depósitos tengan la misma agua?

c) En el contrato de trabajo, a un vendedor de libros se le ofrecen dos alternativas:

A: Sueldo fijo mensual de 1 000 €.

B: Sueldo fijo mensual de 800 € más el 20% de las ventas que haga.

¿A cuánto tienen que ascender sus ventas mensuales para ganar lo mismo con las dos?

Prob. 8*. [Paso de enunciado a expresión algebraica] Con una cartulina que mide 40 cm × 30 cm queremos construir una caja para guardar nuestros ejercicios de Matemáticas. Para ello, cortamos un cuadrado de lado x en cada esquina. Halla la función que relaciona el volumen de la caja con la longitud del lado de los cuadrados cortados.

Prob. 9. [Paso de tabla de valores a enunciado] ¿Qué cantidad de agua había antes de empezar a llenar el recipiente o lugar elegido? Inventa un enunciado de manera que puedas construir la tabla a partir de él.

Horas transcurridas (h)	1	2	3	4	5	6
Cantidad de agua (m^3)	130	155	180	205	230	255

Prob. 10*. [Paso de tabla de valores a gráfica] Un nadador se deja caer desde un trampolín. Su entrenador ha medido el espacio que recorre cada cuatro décimas de segundo mediante un método fotográfico. El nadador frena por completo a los 15 m.

Tiempo (s)	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8
Espacio (m)	0	0,8	3,1	7,1	12,5	14	14,5	15

a) Representa la gráfica espacio-tiempo.

b) ¿Podrías decir en qué momento entró en el agua? ¿Qué velocidad estimas que llevaba?

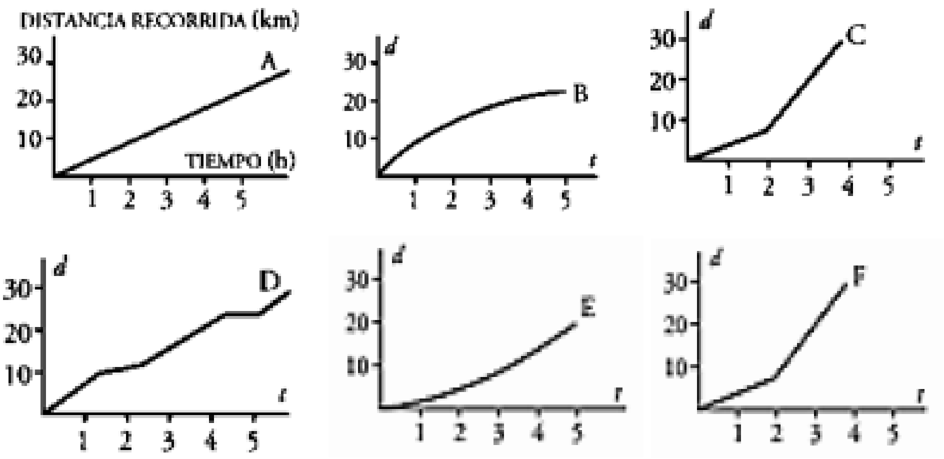
c) ¿Qué altura tiene el trampolín?

** Adaptados de Cólera y Gaztelu (2021, pp.129-131).*

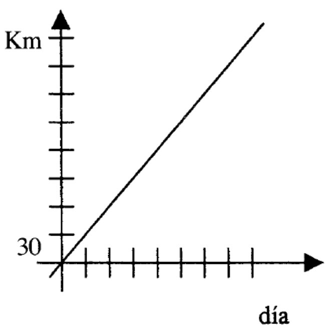
Prob. 11. [Paso de tabla de valores a expresión algebraica] El IES Valdespartera ha organizado un viaje a EE. UU. y necesita cambiar euros por dólares americanos. En el banco le han proporcionado una tabla. Si cuando realiza el cambio en una oficina le cobran, además, una comisión fija de 7.5 €, ¿cómo quedaría la fórmula? ¿y si a la vuelta necesitasen cambiar dólares a euros?

Dinero ($)	20	50	100	175	260	380	500	999
Dinero (€)	16,39	40,99	81,92	143,45	213,12	311,49	409,85	818,89

Prob. 12*. [Paso de gráfica a enunciado] Las gráficas muestran la marcha de seis montañeros. Inventa un enunciado para cada una de ellas de manera que tus compañeros puedan adivinar a quién se corresponde.

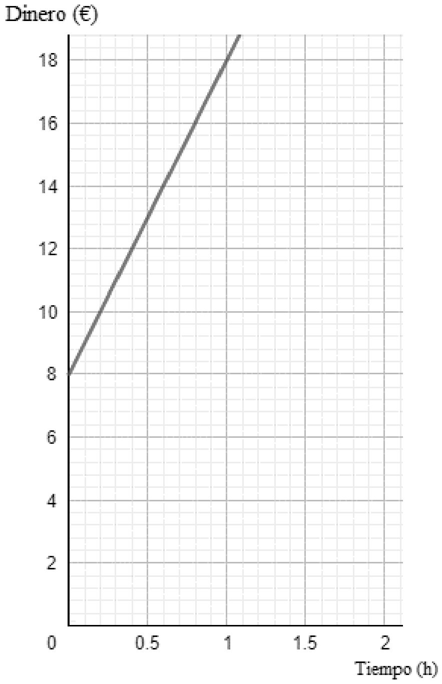


Prob. 13*. [Paso de gráfica a tabla de valores] Un peregrino quiere cubrir la distancia de Astorga a Santiago de 240 km. La siguiente gráfica ilustra la progresión tras t días, construye una tabla de valores que represente la distancia recorrida cada día.



**Adaptados de Rivas, Ramos y Ortiz (2015, p.277) y Sierra-Vázquez, González-Astudillo y López Esteban (1998, p.98), respectivamente.*

Prob. 14. [Paso de gráfica a expresión algebraica] Un carpintero cobra cierta cantidad por desplazamiento y cierta cantidad por cada hora de trabajo. Halla la ecuación que da el dinero que cobra en función del tiempo. La siguiente gráfica ilustra la situación:



Prob. 15. [Paso de expresión algebraica a enunciado] Manuel ha comprado cierto producto a granel y un frasco de cristal en una tienda de su barrio. Interpreta la siguiente expresión: $y = 4x \ + 0.5$ e inventa un enunciado realista que se resuelva con ella.

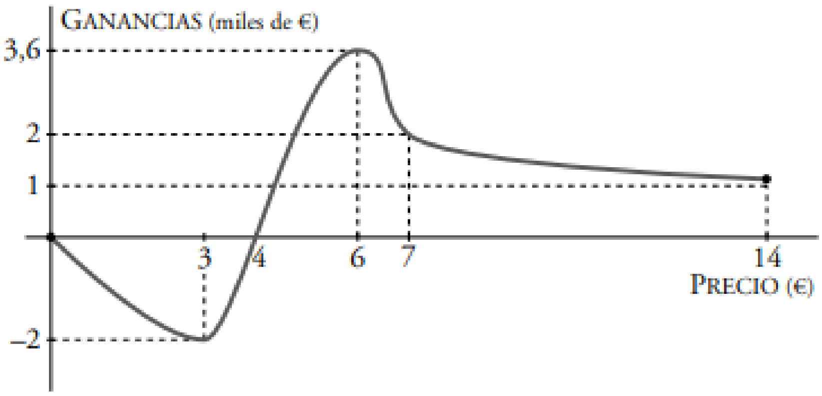
Prob. 16*. [Paso de expresión algebraica a tabla de valores] La ley de Ohm relaciona el voltaje V (normalmente 220 voltios) con la intensidad de corriente I y la resistencia R. Da valores a R y obtén una tabla. Dicha ley se expresa así:

$$I = \frac{V}{R}$$

Prob. 17*. [Paso de expresión algebraica a gráfica] En una de las ciudades más contaminadas del planeta, la concentración de uno de los múltiples gases que contaminan su aire, en microgramos por metro cúbico, durante la década de los años ochenta se podía obtener por la fórmula: $C(t) = 100 + 10t - 0.5t^2$ con t (en años) contados a partir del de 1980. Da la gráfica que representa dicha función desde 1980 hasta la actualidad.

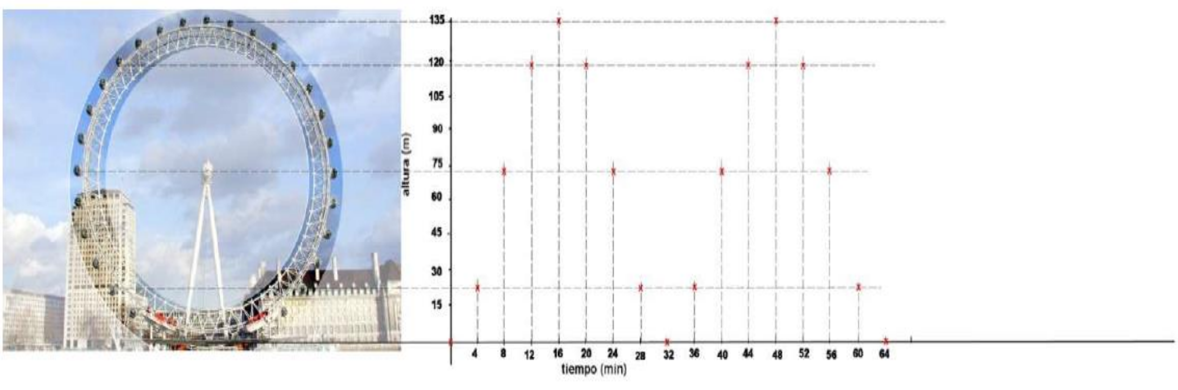
** Adaptados de Domenech (2008, pp.102-106).*

Prob. 18. [Dominio. Imagen. Cortes con los ejes. Extremos relativos] Una compañía lanzó al mercado una nueva marca de zumo. Durante los años que estuvo comercializándose, se estudió el nivel de rentabilidad, analizando la relación que había entre las ganancias (en miles de euros) y el precio que ponían a cada botella (en euros). El resultado de este análisis queda reflejado en la siguiente gráfica:



a) ¿A qué precio máximo se comercializó la botella? ¿Ha sido rentable en todo momento? ¿Puedes estimar qué habría ocurrido si no se hubiese interrumpido la producción?
b) ¿Entre qué precios descendieron las ganancias? ¿Y entre cuáles ascendieron? ¿Para qué precios se alcanzaron las mínimas (o las máximas) ganancias? ¿Cuáles fueron?
c) ¿Cómo varían las ganancias en los intervalos [3, 4] y [4, 6], según varía el precio de la botella? ¿Y en los intervalos [6, 7] y [7, 14]?

Prob. 19*. [Continuidad] Las cabinas de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Dibuja la gráfica uniendo mediante una curva los puntos rojos.



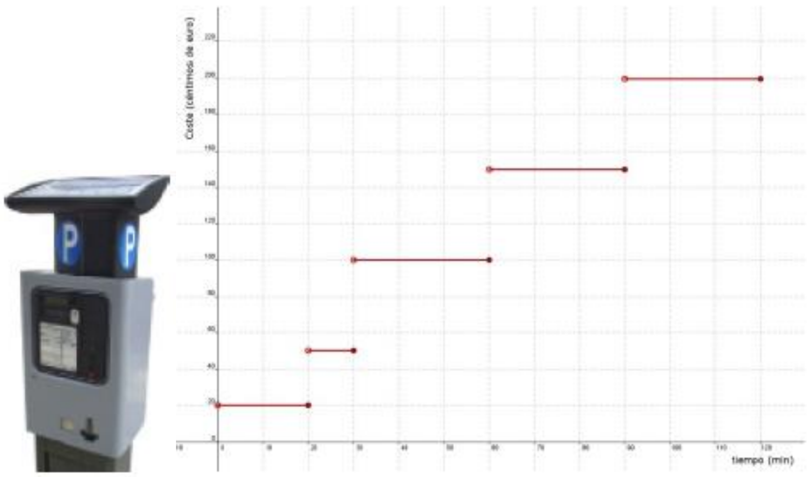
a) Al dibujar, ¿has levantado el lápiz del papel? ¿Qué puedes decir de esta función?

b) ¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa nuestra cabina? ¿Cuántas vueltas hay reflejadas en la gráfica? ¿Podríamos seguir dibujándola?

c) ¿Crees que es una función periódica? ¿Por qué? ¿Cuál será el periodo?

d) ¿En qué momentos del viaje estamos en lo más alto? ¿Cuántos máximos ves en la función y en qué puntos? ¿Hay algún mínimo? ¿Son relativos o absolutos? ¿Crees que hay más? Si el viaje se alarga, ¿en qué instante se alcanzaría 4º máximo? ¿Y el 4º mínimo?

Prob. 20*. [Periodicidad] Los parquímetros de las ciudades, como las llamadas «zonas azules», cobran al usuario en función del tiempo que tiene aparcado su vehículo. Normalmente, el precio no aumenta de forma lineal (por segundos), sino por tramos. La siguiente gráfica muestra el coste del parquímetro en función del tiempo.



Alguien ha emborronado el cartel con las tarifas del parquímetro, ¿podrías completarlo?

TARIFAS	
TIEMPO	PRECIO euros
Hasta min ___	
Entre min y 1/2 h ___	
Entre y h ___	1
Entre 1h y min ___	
Entre min y h___	

¿Es esta función periódica? ¿Y continua? Justifica tus respuestas

* *Adaptados de Alonso y Sogero (s.f., pp.9-11)*

2. Implementación en el aula

Toda actividad humana se puede describir como la activación de praxeologías, asumiendo que toda práctica (praxis) aparece siempre acompañada de un discurso(logos), es decir, una descripción, explicación o racionalidad (Bosch y Gascón, 2009). Los problemas escogidos admiten técnicas (praxis) que pueden variar con respecto a las que habitualmente se introducen con los libros de texto, variando asimismo las justificaciones.

Los alumnos creen, generalmente, que dar una función es equivalente a dar una fórmula sencilla. Por ello, se han diseñado problemas en CP1 que recuerden que las funciones pueden venir dadas, además de por su expresión algebraica, por un enunciado, una tabla de valores o una gráfica. Si atendemos a la función dada por un enunciado (CP1.1.), los alumnos pueden argumentar que el tiempo de cocinado se relaciona con el peso sin necesidad de ver una asignación explícita del tipo $y = 0.5x + 3$. Asimismo, al dar una función mediante una tabla inusual o una gráfica (CP1.2., CP1.3.), los alumnos argumentan prestando atención a tramos y no a expresiones algebraicas. Tres de los cuatro libros de texto analizados introducían el concepto de función a través de la definición formal sin mencionar problemas introductorios, hecho que hemos querido subsanar con los problemas escogidos, en especial, con el problema relacionado con la razón de ser elegida (Prob.1). Los docentes ejercerán de guía durante el momento del primer encuentro y/o momento exploratorio. Además, el hecho de señalar en los problemas 2, 3, 4 y 5 que se pueden acompañar las conclusiones con diagramas, tablas, fórmulas o gráficas, alienta a los alumnos a emplear técnicas de índole muy diverso que pueden superar incluso las expectativas del profesorado necesitando trabajo autónomo previo (deberes).

Los problemas de CP2, por su parte, complementan la oferta existente en los libros de texto analizados al incluir, además, cuatro de los que no se tenía presencia, es decir, un problema que implica la transformación de tabla de valores a enunciado, otro de gráfica a tabla de valores, otro de gráfica a fórmula y otro de fórmula a enunciado (Probs. 9, 13, 14 y 15). Los alumnos suelen trabajar con tablas de valores con datos perfectamente determinados que no admiten discusión; sin embargo, en el problema 6 se les pide que, en caso de no tener datos suficientes, den valores coherentes a los datos faltantes justificándolo. Ello implica el uso de técnicas no definidas que deberán ajustarse específicamente al enunciado en cuestión; en este caso, interpretar que, si la oferta por pareja son 2.50€, una persona debería pagar un valor indeterminado (y discutible) superior a 1.25€.

El problema 7 tiene su interés por ser idóneo para trabajar la competencia digital con la herramienta GeoGebra (Hohenwarter, 2019) hecho nuevamente infrecuente en las propuestas didácticas habituales de los libros de texto. Este tipo de problema admite al menos tres técnicas para su resolución: tanteo, sistema de ecuaciones y punto de corte de dos rectas dadas gráficamente. El enunciado especifica claramente los requerimientos (“representa gráficamente la situación y resuelve”), lo que debería llevar a los alumnos a escoger la última de las tres opciones. Los estudiantes serán trasladados al aula de informática para que descubran, individualmente, la diferencia entre la solución dada por métodos tradicionales (papel y bolígrafo) y la dada por ordenador con la calculadora gráfica de GeoGebra. Se esperan representaciones como las que se presentan a continuación:

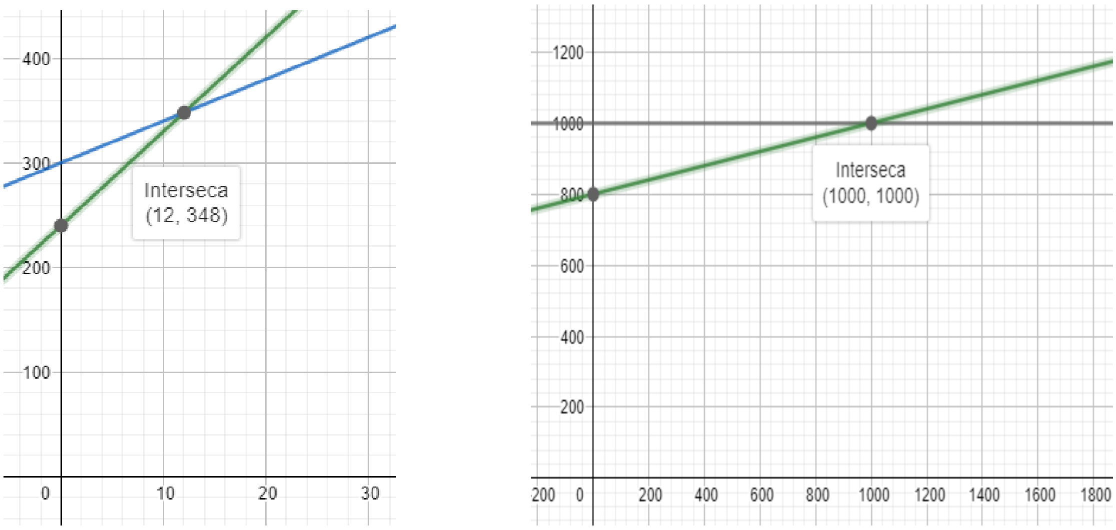


Figura 4. Imágenes de construcciones realizadas con GeoGebra para la resolución del problema 7b) y 7c).

El hecho de proporcionar un entorno digital hace que puedan surgir cuestiones adicionales a las que suelen hacerse sobre el papel; por ejemplo: ¿es correcto que las rectas estén definidas para valores de x negativos ? Esto puede generar momentos de debate que deberán ser correctamente gestionados por el docente, quien hará preguntas oportunas en caso de que no surjan naturalmente entre los estudiantes.

A su vez, problemas como el 9, 12 y 15 inciden en dinámicas inusuales similares al problem-posing, proporcionando un marco adecuado que facilita los procesos creativos. Los alumnos deberán estar preparados para presentar enunciados plausibles atendiendo a los contextos específicos proporcionados por las tablas de valores, gráficas o expresiones algebraicas. Por la complejidad de la tarea, se les permite el trabajo grupal.

Con carácter general, primará el trabajo colaborativo en la línea del apartado D.3. salvo para aquellos problemas en los que su uso esté desaconsejado; por ejemplo: el de construcción de tablas de valores y gráficas (Prob. 7). La relación completa de problemas para los que se decide optar por el trabajo individual o grupal está recogida en la secuenciación (apartado H).

Los problemas relacionados con la construcción de fórmulas (Probs. 8, 11 y 14) no comportan modificaciones relevantes de las técnicas iniciales puesto que el análisis de libros de texto reveló que son habituales en la práctica escolar. No obstante, el problema 13 del que no se tenían indicios en los manuales escolares merece una mención distintiva. Este problema fue adaptado de un artículo de investigación sobre traducción entre sistemas de representación (Sierra-Vázquez, González-Astudillo y López Esteban, 1998) e involucra técnicas novedosas al no tener los ejes numerados. Los alumnos que se enfrenten a él podrán optar, bien por numerar los ejes repartiendo equitativamente la cantidad final entre las marcas sobre los mismos, bien por construir directamente la tabla de valores sin realizar esa numeración. El contexto realista proporciona un sustento lo suficientemente fidedigno para estar relacionado con la razón de ser modeladora que se ha elegido en esta propuesta didáctica.

Finalmente, los problemas de CP3, se inspiran en situaciones realistas y coherentes dentro de una propuesta para la modalidad de Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas de 4º de ESO. Estos problemas sirven, entre otras, para trabajar la competencia social y cívica y la competencia de aprender a aprender por su carácter integrador y su presentación previa a la institucionalización de técnicas. La relación completa de problemas en los que se trabaja, con mayor esmero una competencia sobre las demás está recogida, como sucedía con lo individual o grupal, en la secuenciación (apartado H).

La diferencia entre los problemas 18, 19 y 20 y los que habitualmente encontramos en los libros de texto reside, fundamentalmente, en el carácter contextualizado de estos primeros sobre la descontextualización total que suele primar en los segundos. En la práctica escolar, es habitual dar gráficas sin enunciado (o con enunciados poco descriptivos o directamente insignificantes) y exigir la comprobación de una lista de cualidades (crecimiento y decrecimiento, continuidad y discontinuidad, cortes con los ejes, máximos y mínimos, periodicidad, etc.). Los problemas presentados, en cambio, alientan el uso de técnicas de resolución específicas al servicio del enunciado teniendo que interpretar detalles adicionales como el término “rentabilidad” y su relación con valores positivos para x.

F. Técnicas

A continuación, se enuncian los ejercicios seleccionados para trabajar con funciones según las técnicas recogidas en la tabla introductoria (apartado A.3).

1. Relación de ejercicios

T1. Concepto de función y descriptores

Ej. 4*. [T1.1 - Enunciado] Indica, razonando tu respuesta, si la relación entre los siguientes pares de magnitudes puede corresponder o no a una función.

a) Edad de una persona y su altura.

b) Perímetro de la base de una pirámide y su volumen.

c) La suma de dos ángulos de un triángulo y el ángulo restante.

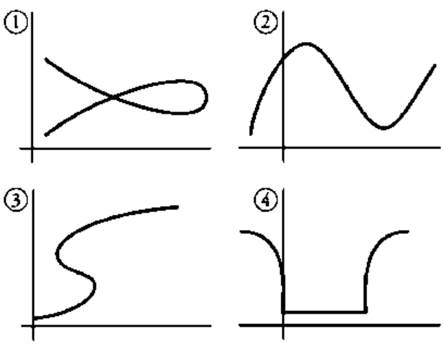
d) Tiempo que se practica un deporte y cantidad de agua consumida.

Ej. 5. [T1.1 - Tabla de valores] Indica, razonando tu respuesta, si los valores de las siguientes tablas pueden corresponder o no a una función.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	10	18	24	28	30	30	28

x	0	1	2	3	4	3	2	1
y	0	10	18	24	28	30	34	38

Ej. 6*. [T1.1 - Gráfica] Indica, razonando tu respuesta, cuáles de las siguientes gráficas pueden corresponder o no a una función.



** Adaptados de Pérez (2016, p.120) y Cólera y Gaztelu (2016, p.235) respectivamente.*

Ej. 7. [T1.1 - Expresión algebraica] Indica, razonando tu respuesta, si las siguientes expresiones algebraicas pueden corresponder o no a una función.

a) $y = 2x + 2$ b) $y = \sqrt{x+3}$ c) $y = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 7}$ d) $y = \sqrt{x^2}$

T2. Sistemas de representación y equivalencias

Ej. 8*. [T2.1 – Construcción de tablas de valores y gráficas] Existen infinitos rectángulos de área 36 m^2 y diferente perímetro cada uno.

a) Construye una tabla para los valores que consideres oportunos.

b) Dibuja la gráfica que representa la función largo-ancho (y viceversa).

Ej. 9. [T2.1 – Construcción de tablas de valores] La ley de caída libre de los cuerpos viene dada por $h(t) = \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la constante de gravedad 9,8 m/s^2.

a) Construye una tabla para los valores de t que consideres oportunos.

b) Dibuja la gráfica.

Ej. 10*. [T2.2 – Construcción de expresiones algebraicas] Escribe expresiones algebraicas que representen las situaciones siguientes.

a) Volumen de agua que pierde un grifo que gotea 1,5 l cada hora.

b) Precio de un viaje en taxi que cobra 2.20 € por la bajada de bandera y 0.95 € por cada minuto de viaje.

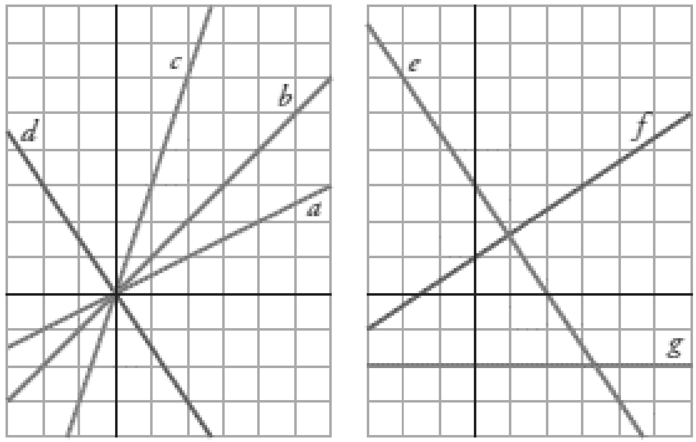
Ej. 11. [T2.2 – Construcción de expresiones algebraicas] Encuentra una expresión algebraica que represente las funciones siguientes.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	-1	-2	-3

x	2	3	5	7	9	11	12
y	0	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5

** Adaptados de Cólera y Gaztelu (2021, pp.111-120).*

Ej. 12*. [T2.2 – Construcción de expresiones algebraicas] Halla la expresión de las siguientes funciones a partir de sus gráficas.



Ej. 13. [T2.3 – Expresión de enunciados] Interpreta las siguientes expresiones e inventa un enunciado realista que se resuelva con cada una de ellas.

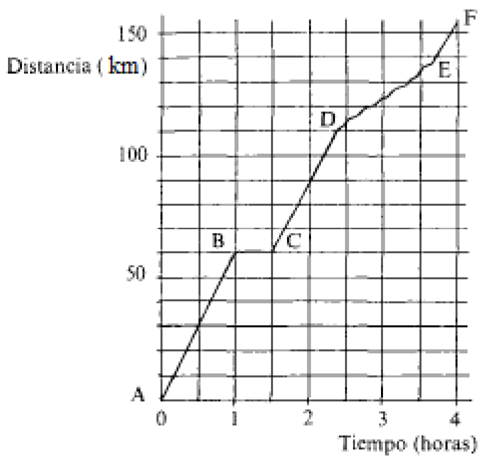
a) $y = 4x$

b) $y = -x$

c) $y = -x + 1$

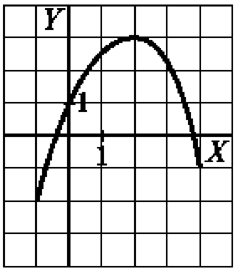
d) $y = -3x - 2$

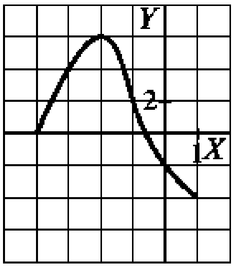
Ej. 14*. [T2.3 – Expresión de enunciados] Describe cada parte del viaje, haciendo uso de la gráfica y explica qué ocurre de A a B, de B a C, de C a D, de D a E y de E a F.

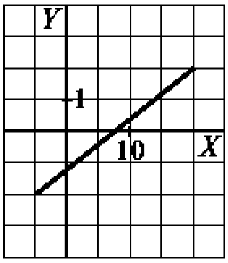


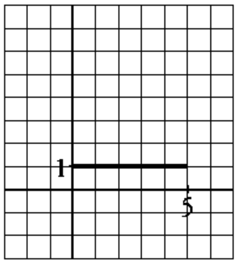
** Adaptados de Cólera y Gaztelu (2016, p.244) y del Shell Centre for Mathematical Education (1990, p. 149) respectivamente.*

Ej. 15. [T3.1, 3.2 – Dominio. Recorrido. Puntos de corte] Calcula el dominio y el recorrido de las siguientes funciones. Indica también los puntos de corte con los ejes.









Ej. 16*. [T3.3 - Crecimiento] Representa gráficamente las siguientes rectas y calcula su TVM en [-2,4]. ¿Qué observas?

a) $y = -x + 2$

b) $y = -3x + 2$

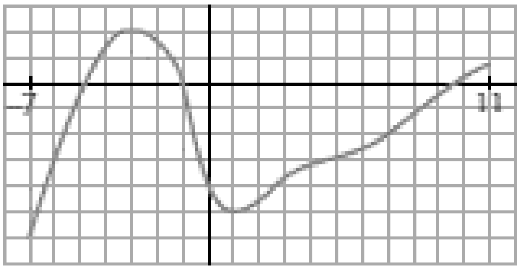
Ej. 17*. [T3.3 - Crecimiento] Determina el tipo de crecimiento de las siguientes funciones en los intervalos.

a) $y = 4x^2 - 3x + 4$ en [-1,0]

b) $y = \frac{x^2+1}{x-3}$ en [1,2]

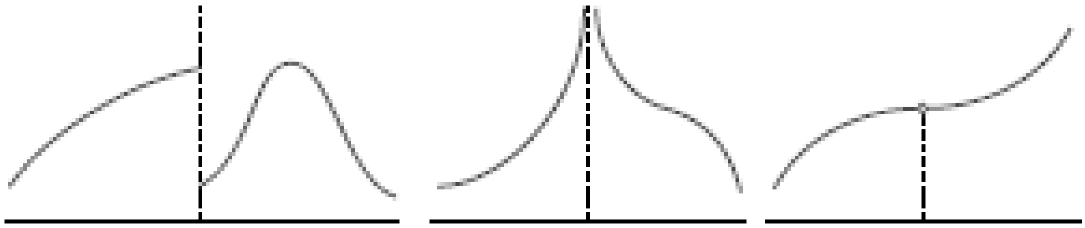
c) $y = 4x^3 - x^2 + 1$ en [2,3]

Ej. 18*. [T3.3 – Extremos relativos] Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones. ¿Cuáles son sus máximos y mínimos relativos?

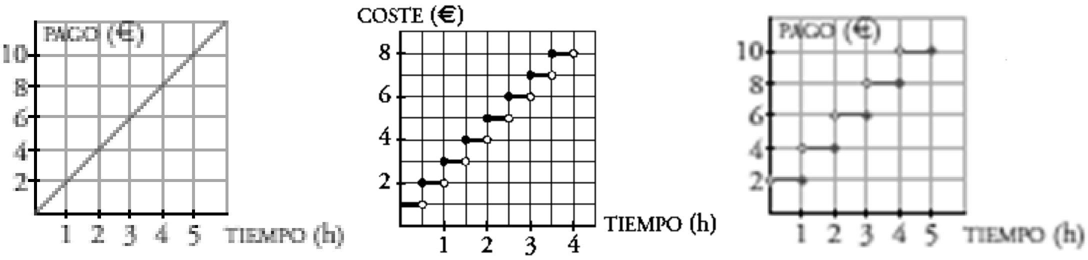


**Adaptados de Pérez (2016, p.121) y Cólera y Gaztelu (2021, p.125).*

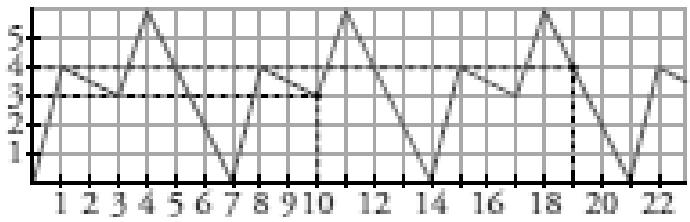
Ej. 19*. [T3.4 - Continuidad] Averigua si las siguientes funciones son continuas.



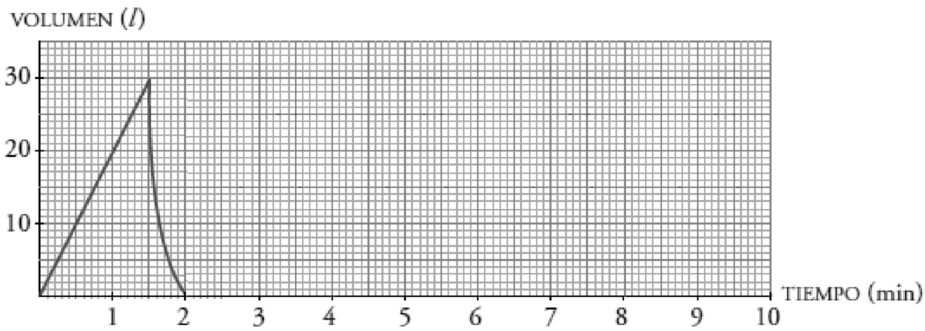
Ej. 20*. [T3.4 - Continuidad] Existen aparcamientos que cobran por "horas". Indica cuánto cuesta 1h en cada una de las tres situaciones, ¿son funciones continuas?



Ej. 21*. [T3.5 - Periodicidad] Averigua si la función representada por la gráfica es periódica y calcula los valores de la función en los puntos de abscisa x=10 y x=1778.



Ej. 22*. [T3.5 - Periodicidad] La cisterna de unos servicios públicos se llena y se vacía, automáticamente, cada dos minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica. Dibuja la gráfica correspondiente a 10 minutos. ¿Cuánta agua habrá en la cisterna en 1h 9 min 30s?



**Adaptados de Cólera y Gaztelu (2021, p.124-128).*

2. Implementación en el aula

Parece existir una tendencia bastante general a la algoritmización, aunque no toda técnica es necesariamente de naturaleza algorítmica y no todo proceso es forzosamente axiomatizable (Chevallard, 1999). Las técnicas que se ejercitan con los ejercicios planteados permiten optimizar el proceso de resolución de problemas y abordar, a través de la práctica dirigida, ejercicios de naturaleza similar. La valoración de la adecuación de las técnicas al campo de problemas, deberá realizarse por parte de los estudiantes, ya que serán ellos quienes, generalmente, trabajarán con ellas y mostrarán sus conclusiones en la pizarra ordinaria o la pizarra digital según disponibilidad. El docente actuará como gestor del aprendizaje poniendo en común las estrategias que considere oportunas y tomando en consideración al error como pieza clave del proceso de enseñanza-aprendizaje. Naturalmente, si la dinámica de aula así lo aconsejase, expondría la técnica necesaria para la resolución particular de alguno de los ejercicios, no asumiendo que los alumnos conocen (y recuerdan) técnicas óptimas para cada uno de los ejercicios que se les plantean. Los contenidos de los que se ocupa esta unidad didáctica ya han sido trabajados en cursos anteriores (apartado C.1), lo que debería inhibir el "bloqueo de la hoja en blanco" y mostrar estudiantes que, al menos, intentan aproximaciones iniciales a las tareas pedidas.

En los ejercicios asociados a CP1 (Ejs. 4,5,6 y 7), se ponen de manifiesto el conjunto de técnicas asociadas, es decir, T1. En este grupo encontramos T.1.1 con sus modificaciones, según si la función es representada por un enunciado, una tabla de valores, una gráfica o una fórmula. Con carácter general, pueden emplearse una serie de pasos similares a los que se presentan a continuación:

Paso 1: Identificar y aislar las dos variables.

Paso 2: Estudiar la relación de dependencia entre las dos variables.

Paso 3: Comprobar si para cada valor de una variable, existe un único valor perfectamente determinado de la otra (o dar un contraejemplo con dos valores).

En ejercicios como el 5 y el 7 donde la relación la de dependencia ya está explicitada (se conoce la variable dependiente, y, y la independiente, x), basta realizar el paso 3. Mientras que en las tablas de valores la comprobación es inmediata, las gráficas admiten la llamada "prueba vertical", es decir, trazado de rectas perpendiculares al eje de abscisas para comprobar si alguna es cortada más de una vez por el grafo candidato a función.

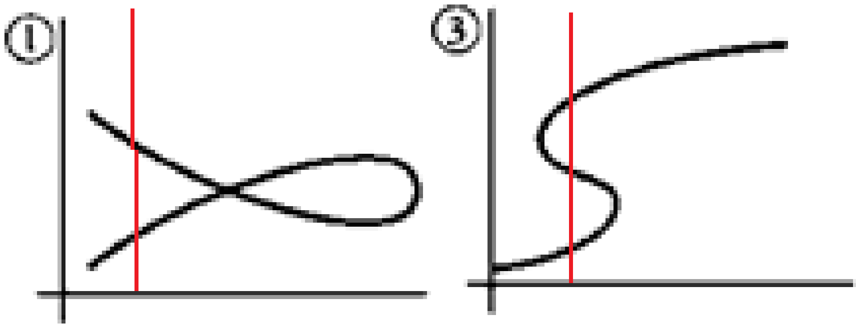


Figura 5. Ejemplo de aplicación de la prueba vertical en el ejercicio 6.

En los ejercicios asociados a CP2 (Ejs. 8-14), se ponen de manifiesto las técnicas del grupo T2. Para la construcción de tablas de valores y gráficas (T2.1), se debe reflexionar, en primer lugar, sobre el carácter de la relación funcional: si los datos representan valores aislados (variables discretas) o aceptan cualquier valor dentro de un intervalo (variable continua). En el primer caso, los puntos se representan sin una línea que los una, mientras que, en el segundo, se debe trazar una curva aproximada que una los puntos representados. En ejercicios como el 8, la pista del enunciado ("existen infinitos rectángulos") inclina a los estudiantes a trazar una curva que una los puntos que decidan representar. Para seleccionar datos relevantes, deben prestar atención, nuevamente, a las variables y ver en qué intervalos se encuentran definidas; por ejemplo: existen magnitudes físicas para las que no tiene sentido tomar valores negativos (longitud, área, etc.).

En los ejercicios que exigen la construcción de expresiones algebraicas (T2.2), se deberá prestar especial atención al lenguaje empleado en el enunciado. Si la situación que se pretende representar está dada por un enunciado verbal, deberán usar T2.2 modificada a tal supuesto, buscando partículas que supongan la pista definitiva para encontrar una expresión operativa, por ejemplo: "por", "cada", "fijo", etc. En el apartado a) del ejercicio 10, por ejemplo, "$1{,}5l$ cada hora" nos remite a la expresión buscada, dando a entender que la variable dependiente, y, se corresponde con la cantidad en litros y la variable independiente, x, con el tiempo en horas. El valor numérico permite bien obtener directamente la expresión buscada, bien crear una tabla de valores previa a la expresión algebraica: $y = 1.5x$. En las tablas de valores, la búsqueda de patrones y la condición de regularidad resultará fundamental para conseguir la expresión algebraica que mejor se ajuste a los datos. Una primera aproximación puede realizarse con el ajuste a funciones lineales dividiendo los valores de y entre los valores de x para obtener la pendiente de la recta $y = mx + n$, otra con el ajuste a funciones cuadráticas del tipo $y = ax^2 + bx + c$, etc.

En gráficas que representan funciones lineales como las del ejercicio 12, podrá hacerse la prueba de la pendiente. Para ello, se trazarán segmentos paralelos y perpendiculares al eje de abscisas que permitan cuantificar distancias y se tomará el cociente entre la distancia vertical y la horizontal. La siguiente imagen ilustra una prueba realizada sobre dos rectas particulares:

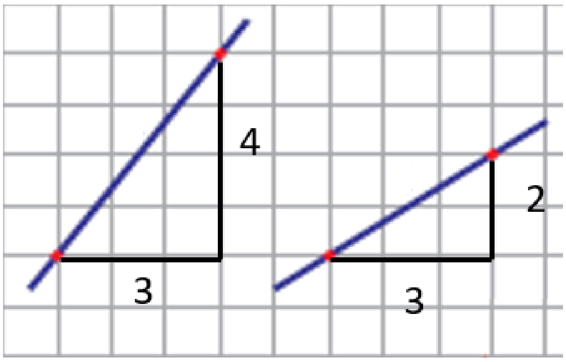


Figura 6. Ejemplo del cálculo de la pendiente en las rectas $y = \frac{4}{3}x$ *e* $y = \frac{2}{3}x$.

El tercer subgrupo de CP2 lo componen ejercicios que están planteados para la construcción de enunciados (T2.3). Este tipo de ejercicios son los que resultan más difíciles de algoritmizar pues el resultado es altamente creativo y la resolución muy abierta. Si se dan expresiones algebraicas relativas a funciones lineales, la modificación de la técnica implicaría una interpretación adecuada de la pendiente y la ordenada en el origen. El valor numérico atribuido a estos dos parámetros (junto a su signo), permitiría establecer un punto de partida propicio, pudiendo acudir a dependencias lineales prototípicas como son distancia-tiempo, volumen-tiempo, masa-precio, etc. En las gráficas, deben tenerse en cuenta, asimismo, estos parámetros, valorando las situaciones de reposo y actividad y cuantificando la velocidad con la pendiente si se trata de relaciones distancia-tiempo.

Por último, en los ejercicios asociados a CP3 (Ejs. 15-22), se emplean las técnicas del grupo T3. En el ejercicio 15, se recorre el tramo de la recta de abscisas representado y se observa para qué valores de la variable independiente hay gráfica dibujada, o dicho de otro, para qué valores de x existe la función dada. Asimismo, para el cálculo del recorrido, se recorre el eje de ordenadas observando para qué valores de la variable dependiente, y, hay gráfica (T3.1). Para los puntos de corte con los ejes, basta observar nuevamente la gráfica y ver cuando esta corta a los ejes de abscisas y ordenadas, es decir, en qué puntos de coordenadas $(x_0, 0)$ y $(0, y_0)$, respectivamente. (T3.2). Es importante que los estudiantes atiendan a la escala y no otorguen valores asumiendo que un cuadradito es un “1”.

Los ejercicios que implican detectar cualidades de funciones dadas a través de gráficas (crecimiento y decrecimiento, continuidad y discontinuidad, cortes con los ejes, máximos y mínimos, periodicidad, etc.) son fácilmente llevables al aula por medio de pizarras digitales o pizarras blancas rotulables sobre las que se pueda videoproyectar. Esta metodología pone de relevancia los beneficios de las nuevas tecnologías y facilita las labores de corrección por parte de alumnos y docentes. A continuación, se muestra un ejemplo del potencial del método:

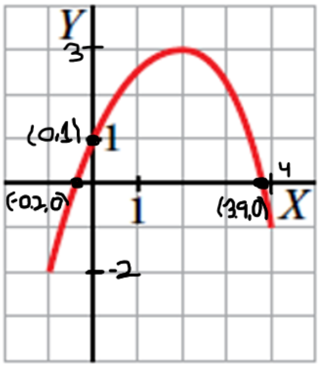


Figura 7. Ejemplo de resolución del ej.15 llevado al aula.

Sobre los ejercicios que implican el uso de T3.3 (Ejs. 16,17 y 18), se intentará que razonen sin dar a conocer la formulación explícita de la tasa de variación media a priori. Para hacerse una idea del crecimiento se les insistirá en que traten de cuantificar cuántas unidades aumenta o disminuye la variable dependiente, y, por cada unidad de la variable independiente, x, y relacionen esto con el crecimiento o decrecimiento. Como ya habrán trabajado con la pendiente en ejercicios previos, se introducirá el concepto de tasa de variación media como pendiente de la recta secante a la función $f(x)$, que pasa por los puntos de abscisas a y b, de manera que puedan conectar los conocimientos anteriores con los nuevos. Además, este modo de proceder podrá darles la idea “intuitiva” y ostensiva de aproximar curvas mediante rectas.

Los ejercicios sobre continuidad (Ej.19 y 20) se resolverán siguiendo la manida regla de “si puede dibujarse de un solo trazo, es continua” (T3.4). Aunque este modo de proceder es poco ortodoxo, el nivel de la clase no permite aproximaciones mucho más formales. Se incidirá en la idea de “salto” o “discontinuidad” con los parquímetros sin más detalle adicional, no llegando a clasificar los distintos tipos de discontinuidades que existen. Los dos ejercicios de periodicidad se resuelven, bien realizando una o varias copias de la gráfica, bien evaluando la función en el punto de abscisa $x - nT$, con T el período, x la abscisa del valor dado y n el número de copias anteriores a la dada (T3.5).

G. Tecnologías

Chevallard (1999) entiende por tecnología un discurso racional que permite justificar las técnicas para asegurarse que éstas permiten realizar las tareas y problemas de su campo. En la propuesta didáctica para la enseñanza de funciones, estos discursos racionales se darán, generalmente, por parte del profesor, cuando el alumnado se haya enfrentado a situaciones problemáticas que promuevan la reflexión y la indagación sin haber recibido instrucción previa sobre los contenidos siguiendo la metodología expuesta por Bingolbali y Bingolbali (2019). En total, hemos enunciado siete tecnologías diferenciadas que se corresponden, mayoritariamente, con definiciones (apartado A.3).

Sobre la definición de función (TEC.1.1), señalamos que hay una dependencia funcional si a cada valor de la variable independiente, le corresponde un único valor de la variable dependiente. Con el problema relacionado con la razón de ser (Prob.1), se espera que los alumnos reflexionen sobre la idea de dependencia y unicidad, para que, concluyan, debidamente guiados, que " y es una función de x si cada valor de x le corresponde un valor de y, esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$". El andamiaje del que se dispone en 4º ESO, en Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, no permite justificaciones como las del grupo Bourbaki, quienes en 1939 definieron el concepto en términos conjuntistas.

Sobre la representación verbal, tabular, gráfica y algebraica de una función (TEC1.2 y 2.1), incidiremos en lo señalado por Dirichlet (1837): "y es función de x si a cada valor de x corresponde un valor completamente determinado de y; además, no es importante el método con el cual se establece la correspondencia señalada". Sierra-Vázquez, González-Astudillo y López-Esteban (1998) señalan que los matemáticos tienen que ajustarse a ciertas reglas, pues manipulando por igual los símbolos, comparten conocimiento e incrementan el número de conexiones dentro de un concepto mejorando su comprensión. De este modo, justificaremos a los alumnos la necesidad de referirse a una función matemática con una cierta sintaxis para que ellos mismos puedan comunicarse eficientemente en las actividades grupales. Focalizando la atención en la necesidad de una comunicación matemática precisa, daremos, con los discursos racionales señalados, justificaciones para los grupos de técnicas asociadas a CP1 y CP2, es decir, T1 y T2.

Sobre las cualidades de las funciones y estudio (TEC3), matizamos cada una de las cinco definiciones que se señalan en el momento posterior a los problemas:

- Se llama dominio de definición de una función, f, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función (TEC3.1).
- Se llama recorrido de una función, f, al conjunto de valores que toma la función. Es decir, al conjunto de valores de y para los cuales existe la función (TEC3.2).
- Se llama dominio de definición de una función, f, y se designa por $Dom\ f$, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función (TEC3.3).
- Se llama tasa de variación media de la función f en el intervalo $[a, b]$ al cociente entre la variación de la función y la longitud del intervalo (TEC3.4).

$$TVM([a,b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

  - Una función es creciente cuando al aumentar los valores de x, también lo hacen los de y. En ellas, la TVM es positiva.
  - Una función es decreciente cuando al aumentar los valores de x, los de y disminuyen. En ellas, la TVM es negativa.
  - Una función tiene un máximo en el punto de abscisa $x = a$ cuando pasa de ser creciente a decreciente en ese punto.
  - Una función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = a$ cuando pasa de ser decreciente a creciente en ese punto.
- Se llama función periódica a aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama periodo (TEC3.5).

Con estos razonamientos y definiciones, lo que se pretende es que las técnicas queden justificadas y los estudiantes sean partícipes en momentos constitutivos del entorno tecnológico. Insistiremos, a lo largo de las dieciséis sesiones previstas, en la importancia de realizar esquemas y aplicar técnicas de estudio propias de otras disciplinas a la matemática. Pediremos, a los estudiantes, que rellenen una ficha como la que se presenta a continuación para tener una referencia del entendimiento que están llevando a cabo de las técnicas, pues tendrán que reescribirlas e interpretarlas gráficamente.

FUNCIONES Y GRÁFICAS

LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

DOMINIO Y RECORRIDO

- Una función asocia a cada valor de x ……………………
- El tramo de valores de x para los cuales hay valores de y se llama ……………………
- El tramo de todos los posibles valores de y se llama ……………………

PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

Puntos de intersección con los ejes cartesianos.

- El eje horizontal se llama de …………………… y el punto de corte se tiene con……………………
- El eje vertical se llama de …………………… y el punto de corte se tiene con. ……………………
- Cada punto de la gráfica tiene dos ……………………

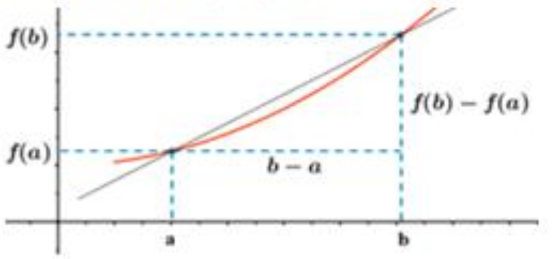
VARIACIONES DE UNA FUNCIÓN

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Para estudiar las variaciones de una función, tenemos que mirar su gráfica de izquierda a derecha.

Si una función es creciente,entonces su tasa de variación media (TVM) es……………………

Si una función es decreciente, entonces su tasa de variación media (TVM) es……………………



MÁXIMOS Y MÍNIMOS

- Si en una función hay un punto más alto que los puntos que lo rodean, se dice que ese punto es ……………………

HAZ UN DIBUJO:

- Si una función tiene un punto más bajo que los que lo rodean, se dice que ese punto es ……………………

HAZ UN DIBUJO:

- A la izquierda de un máximo, la función es …………… y a la derecha es ……………………
- A la izquierda de un mínimo, la función es …………… y a la derecha es ……………………

TENDENCIAS DE UNA FUNCIÓN

- Una **función** es **periódica** cuando……………………
- El **período** de una función es……………………

CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDADES

- Una función es continua cuando ……………………

DIBUJA UN EJEMPLO:

- Si la función presenta saltos en su gráfica, se dice que es……………………

DIBUJA UN EJEMPLO:

Figura 8. Ficha auxiliar para la justificación de las técnicas. Adaptada de Cólera y Gaztelu (2016).

Para institucionalizar los contenidos de la unidad didáctica, se seguirá, siempre que esté previsto en la secuenciación (apartado H), una metodología similar a la esbozada en el apartado D.3. Inicialmente, se trabajará el problema relacionado con la razón de ser dada por la modelización de situaciones cotidianas en que se relacionan dos magnitudes sujetas a cambios a través de diversos lenguajes: verbal, tabular, gráfico y algebraico. Este problema permite reflexionar sobre T1 e insta, al profesor, a tomar las producciones de los alumnos como objeto facilitador de la institucionalización, incorporando al acervo cultural de la clase el conjunto de tecnologías referenciado. Como los problemas que le siguen (Probs. 2,3,4 y 5) se incluyen también en CP1, se aprovecharán las casuísticas propias de la resolución en grupo para dar las justificaciones y razonamientos que los estudiantes necesiten para terminar de perfilar ese concepto de función.

A la formación del concepto imagen de función, contribuirá también la aplicación de técnicas de los grupos T1 y T2 en los ejercicios que comprenden del 1 al 14 y en los problemas que abarcan del 6 al 17. Como se señalaba con anterioridad, focalizaremos la atención en la necesidad de una comunicación matemática precisa y el uso de una sintaxis adecuada en lo referente a T2. Las soluciones a las actividades señaladas serán comentadas y aquellos aspectos incorrectos tratados para su posterior corrección por parte de aquellos grupos de estudiantes que se hallen receptivos a participar, o, en última instancia, del profesor.

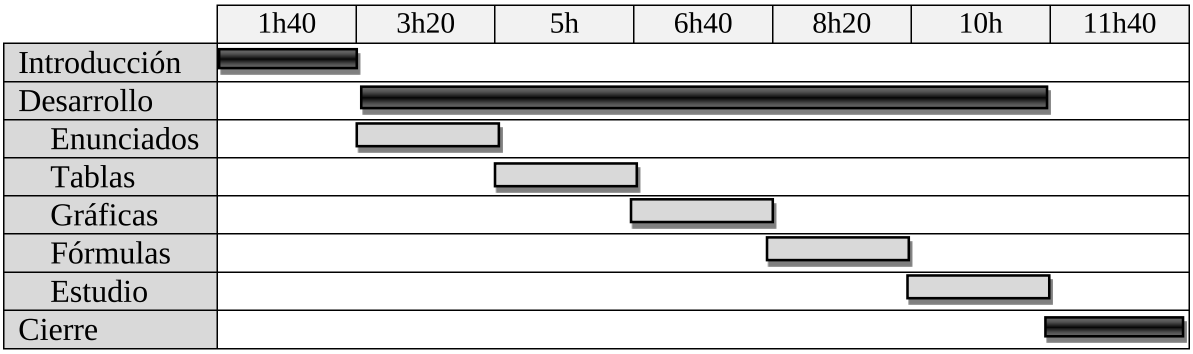
Por último, en los contenidos relativos a CP3, se institucionalizará siguiendo una dinámica similar, apoyada por la ficha auxiliar para la justificación de las técnicas de la página precedente. Los problemas 18, 19 y 20 serán candidatos ideales para volver a introducir las definiciones que deberían conocer desde 2º de ESO (apartado C.1). Asimismo, ejercicios que contribuirán a la consolidación de los conceptos de dominio, recorrido, crecimiento, decrecimiento, máximo, mínimo, continuidad y periodicidad de una función son los que comprenden del 15 al 22. Cualquiera de estos problemas y ejercicios es susceptible de ser utilizado como actividad previa a un momento de institucionalización siempre que la dinámica de aula así lo requiera y los estudiantes así lo soliciten.

En definitiva, el profesor utilizará discursos racionales para enunciar las tecnologías y justificarlas a todo el grupo-clase con el beneplácito de estudiantes que participan activamente a través de la resolución de problemas. La prueba escrita de evaluación contendrá también aspectos ligados a las tecnologías al interrogar sobre si determinado objeto es una función, si otro es una función continua y otro una función periódica.

H. Secuencia didáctica y cronograma

La propuesta de secuenciación elegida sigue una estructura aparentemente clásica: introducción, desarrollo y cierre. Para la realización del cronograma, se ha tenido en cuenta que, en 4º de ESO se disponen de cuatro horas lectivas semanales. Si se quiere realizar la unidad didáctica en aproximadamente tres semanas, deberemos dedicar 11h40 repartidas en 14 sesiones de 50 minutos, incluyendo las sesiones de evaluación o cierre.

Tabla 11. Cronograma



Introducción (1h40). Se dedican dos sesiones a familiarizarse con el objeto matemático de función, con un aprendizaje basado en la resolución de problemas. El hilo conductor es el reconocimiento de relaciones funcionales a partir de problemas pensados para introducir la razón de ser y los descriptores de CP1.

Desarrollo (8h20). Se dedican once sesiones a la realización de problemas y ejercicios relativos a los campos de problemas y técnicas señalados en el apartado A.3. La distribución elegida responde a un tratamiento equitativo de los cuatro descriptores, reservando dos sesiones para cada uno de ellos. Finalmente, se dedican las tres últimas sesiones íntegramente a CP3 con un estudio general de las cualidades de las funciones.

Cierre (1h40). Se dedican dos sesiones para la realización de la prueba escrita y su corrección, por parte del profesor. Al final, los estudiantes deberán rellenar un cuestionario de evaluación de la docencia de forma que el docente tenga información sobre su desempeño y pueda corregir aquellos aspectos en los que debe mejorar.

Para la secuencia didáctica, se ha realizado una tabla codificada según los apartados A.2, A.3, E.1 y F.1 de la memoria. Para indicar la modalidad de trabajo, se ha señalado su variante individual con Ind y la grupal con Gr. El material necesario se señala con F (ficha) u O (ordenador). La tabla que recoge la secuencia didáctica es la siguiente:

Tabla 12. Secuencia didáctica

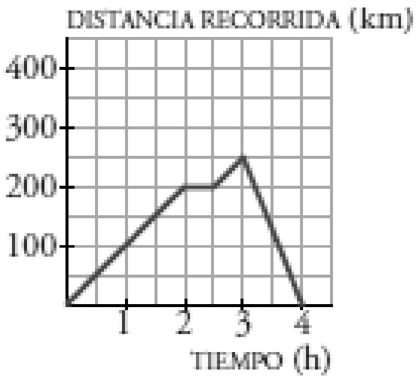
Introducción	**1**	Actividades de detección de conocimientos previos - Ejs. 1, 2 y 3	Ind – F
	2	Problema relacionado con la razón de ser elegida + CP1 Prob.1 – Elaborando una revista Probs.2, 3, 4 y 5 – T1.1 – TEC1.1 y 1.2 (Deberes)	Gr – F CSC CMCT
Enunciados	**3**	CP1 + CP2 – De fórmulas a enunciados Ej. 4, Prob. 15 y Ej. 13 – T1.1 y 2.3 – TEC 1.1 y 2.1	Gr – F CAA
	4	CP2 – De tablas de valores y gráficas a enunciado Probs. 9 y 12, Ej. 14 – T1.1 y 2.3 – TEC1.1 y 2.1	Gr – F CAA
Tablas de valores	**5**	CP1 + CP2 – De fórmulas y enunciados a tablas Ej. 5, Probs. 16 y 6– T1.1 y 2.1 – TEC1.1 y 1.2	Ind – F CMCT
	6	CP2 – Construcción de tablas y gráficas Prob. 13, Ej. 8 y 9 y Prob. 10 – T1.1 y 2.1 – TEC1.1 y 2.1 Ficha auxiliar para la justificación de las técnicas	Ind – F CMCT CAA
Gráficas	**7**	CP2 - Paso de enunciados a gráficas con GeoGebra Prob. 7 – T1.1 y 2.1 – TEC2.1	Ind – O CD
	8	CP2 + CP3 – Dominio, recorrido y puntos de corte Ej.6, Prob. 17 y Ej.15 – T2.1, 3.1 y 3.2 -TEC2.1, 3.1 y 3.2	Ind - O CMCT
Fórmulas	**9**	CP1 + CP2 - Construcción de fórmulas Prob. 8, Ej.10, Prob. 11 y Ej. 11 – T1.1 y 2.2 – TEC2.1	Gr – F CMCT
	10	CP2 + CP3 – Crecimiento. TVM. Extremos relativos Prob. 14 y 18, Ejs. 16, 17 y 18 – T3.3 – TEC3.3	Gr – F CMCT
Estudio general	**11**	CP3 – Continuidad Prob. 19 y Ejs. 19 y 20 – T3.4 – TEC3.4	Gr – F CAA
	12	CP3 – Periodicidad Prob. 20 y Ejs. 21 y 22 – T3.5 – TEC3.5	Gr – F CSC
Cierre	**13**	Prueba escrita de evaluación	Ind – F
	14	Corrección. Cuestionario de evaluación de la docencia	Ind – O

I. Evaluación

1. Prueba escrita

A continuación, se transcribe la prueba escrita con la que se evalúan los conocimientos adquiridos a lo largo de la unidad. Tiene una duración aproximada de una hora.

1) La gráfica muestra el viaje de un camionero en una autopista sin límite de velocidad. *(2 pto.)*



a) Calcula la velocidad que lleva el camión en cada uno de los cuatro tramos *(0.75p)*

b) Dí cuál es el signo de la pendiente en el último tramo, ¿qué significa? *(0.25p)*

c) Describe el viaje haciendo uso del lenguaje de funciones que has aprendido **(***1p)*

2) El precio del café (por kg) está escondido en un cartel que dice y=12.40x *(2 pto.)*

a) ¿Cuánto cuesta el kg de café? Da los precios de 1,2,3 y 4 kg. *(0.25p)*

b) Explica qué significa y=12.40x, da la variable dependiente e independiente*(0.5p)*

c) ¿Es una función? Justifica tu respuesta. *(0.25p)*

d) Si compramos ¼ kg, ¿cuál es el precio? *(0.25p)*

e) ¿Cuántos kg hay que comprar para pagar 186€? *(0.25p)*

f) ¿Qué ocurriría si con el café te obligan a comprar un frasco de cristal a 1,55€? Da la fórmula y repite los apartados d) y e). *(0.5p)*

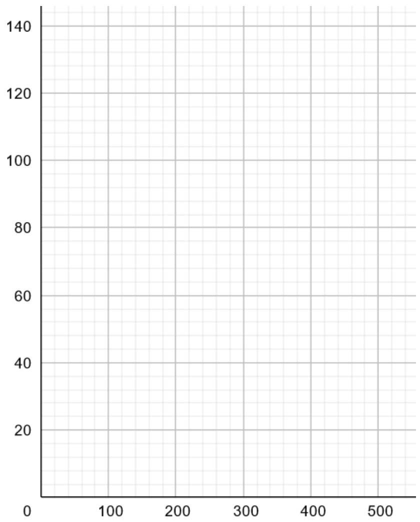
3) En una agencia de alquiler de coches cobran 50€ fijos más 0,20 € por cada kilómetro recorrido. En otra agencia cobran 20 € fijos más 0,30 € por cada kilómetro recorrido. *Puedes llamarlas Agencia A y Agencia B. (2 pto.)*

a) Define la variable dependiente e independiente. *(0.25p)*

b) Usa tablas de valores para A y B (Da los precios de 0, 100, 200 y 300 km). *(0.25p)*

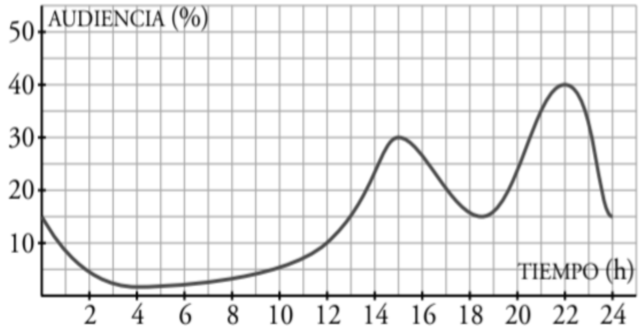
c) Obtén la ecuación de la función que nos da el gasto total según los kilómetros recorridos para cada una de las dos agencias. *(0.25p)*

d) Representa las dos funciones indicando en los ejes las variables. *(0.5p)*



e) Analiza cuál de las dos agencias es mejor según los kilómetros que vayamos a recorrer y da una justificación adecuada. *(0.75p)*

4) Esta curva muestra la audiencia de Aragón TV en un día de abril de 2021. *(2 pto)*

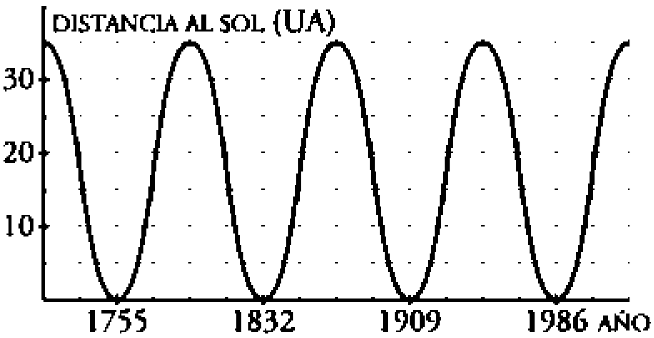


a) ¿Cuánto tiempo estuvo Aragón TV emitiendo? ¿qué rango de valores tomó la audiencia? Relaciona esta información con el dominio y el recorrido. *(0.5p)*

b) ¿Cuáles fueron los momentos de mayor audiencia? ¿y menor? Relacionalo con los máximos y mínimos de la función. *(0.75p)*

c) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿A qué crees que se deben? Da una justificación de por qué a determinadas horas la audiencia sube o baja. *(0.75p)*

5) La curva representa la distancia al Sol del cometa Halley con el paso del tiempo. *(1.5 pto.)*

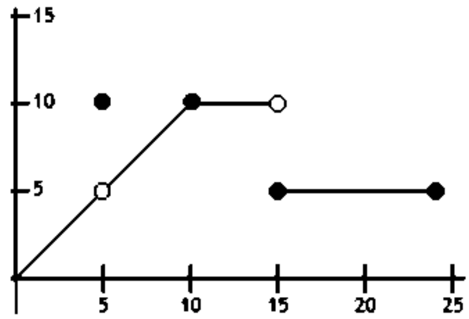


a) ¿Es una función periódica?¿Por qué? *(0.25p)*

b) ¿En qué momentos está más cerca del Sol? ¿Y más lejos? ¿Por qué? *(0.75p)*

c) ¿En qué año volverá a acercarse al Sol? ¿Coincide con un mínimo o máximo? *(0.5p)*

6) Un agente financiero está estudiando la gráfica que proporciona los valores en bolsa de las acciones de una empresa (en miles de €) a lo largo de un día (24 h). *(0.5 pto.)*



a) ¿Es una función continua?¿Por qué? *(0.25p)*

b) ¿Qué valores obtiene al cabo de 5h?¿y en 15h? *(0.25p)*

2. Aspectos evaluables, respuestas esperables y criterios de calificación

La siguiente tabla recoge los campos de problemas, técnicas y tecnologías presentes en cada uno de los ejercicios de los que se compone la prueba escrita de evaluación.

Tabla 13. Relación de campos de problemas, técnicas y tecnologías en la prueba escrita

Ejercicio	Campo de problemas	Técnicas	Tecnologías
1	CP1.3 CP2-(3,1) CP3.2	T1.1 T2.3 T3.3	TEC2.1 TEC3.3
2	CP1.4 CP2-(1,4)-(4,2)	T1.1 T2.2	TEC1.1 TEC2.1
3	CP1.1 CP2-(1,4)-(4,2)-(2,3)	T1.1 T2.1 T2.3	TEC1.1 TEC2.1
4	CP1.3 CP3.1 CP3.2	T1.1 T3.1 T3.3	TEC3.1 TEC3.2 TEC3.3
5	CP1.3 CP3.1 CP3.3	T1.1 T3.2 T3.4	TEC3.5
6	CP1.3 CP3.1 CP3.3	T1.1 T3.5	TEC3.4

Como puede observarse, la prueba escrita recoge la totalidad de técnicas y tecnologías que han sido analizadas. Respecto a los dos primeros campos de problemas, se ha optado por presentar las funciones en lenguaje verbal, gráfico y algebraico y reservar el tabular para casos concretos en que deben obtenerse valores puntuales, bien para representación gráfica, bien para analizarlos en sí mismos. El tercer campo de problemas se ha trabajado de manera contextualizada comprobando (y justificando) la lista de cualidades que son objeto de análisis durante la unidad didáctica de funciones: dominio, imagen, cortes con los ejes, crecimiento, extremos relativos, continuidad y periodicidad. El tratamiento de los cortes con los ejes se realiza, indirectamente, en el problema 5 al preguntar: “en qué año volvería a acercarse al Sol”.

Asimismo, en todos los ejercicios de la prueba existen tareas evaluables relacionadas con el bloque tecnológico al interrogar sobre el significado del signo de la pendiente, la variable dependiente y la independiente, si determinado objeto es una función, si otro es una función continua y otro una función periódica. La adecuación de las descripciones verbales, la corrección sintáctica, la reformulación de los problemas, la reflexión sobre los resultados y la comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de referencia son otros de los aspectos evaluables a los que se prestará atención a la hora de otorgar la puntuación máxima que ha sido fijada en cada uno de los apartados.

A continuación, se presenta la tabla que recoge los criterios de evaluación, estándares de aprendizaje y competencias clave asociados a cada uno de los ejercicios de los que se compone la prueba escrita de evaluación. La tabla se encuentra codificada según los dictámenes del currículo aragonés (apartado A.2).

Tabla 14. Relación de criterios de evaluación, estándares de aprendizaje y competencias clave en la prueba escrita

Ejercicio	Crit.MAAP.	Est.MAAP.	Competencias clave
1	4.1 y 4.2	4.1.4 y 4.2.3	CMCT, CAA
2	4.1	4.1.5	CMCT
3	4.1 y 4.2	4.1.1, 4.1.3, 4.1.5, 4.2.2 y 4.2.4	CMCT, CSC
4	4.1 y 4.2	4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.2.1 y 4.2.3	CMCT
5	4.1 y 4.2	4.1.2, 4.1.3, 4.2.1 y 4.2.3	CMCT
6	4.1 y 4.2	4.1.2, 4.1.3, 4.2.1 y 4.2.3	CMCT

Por lo general, se han aplicado los dos criterios definidos en el bloque de funciones y la mayoría de sus concreciones, faltando la que refiere a la destreza con que se utilizan elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas (Est.MAAP.4.2.5). Asimismo, se han aplicado ciertos criterios del bloque I o bloque transversal:

Crit.MAAP.1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

- Est.MAAP.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).
- Est.MAAP.1.2.5. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas.

Crit.MAAP.1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos funcionales de la realidad cotidiana a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.

- Est.MAAP.1.6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y del mundo matemático, identificando los conocimientos matemáticos necesarios.
- Est.MAAP.1.6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

A la hora de resolver cada uno de los ejercicios de la prueba escrita, existen respuestas probables que, como docentes, debemos anticipar para ajustar así el modelo de corrección a lo esperable y poder evaluar en consecuencia. A continuación, se muestran dos respuestas esperadas para cada actividad, una de ellas correcta y otra incorrecta.

Ejercicio 1. Camionero

a) Pendiente en cada tramo

Respuesta esperada 1: Correcta

$TVM[0,2] = 100$

$TVM[2, 2.5] = 0$

$TVM[2.5,3] = 100$

$TVM[3,4] = -250$

Respuesta esperada 2: Incorrecta

$TVM[0,2] = 200$

$TVM[2.5,3] = 50$

$TVM[3,4] = -250$

b) Signo de la pendiente

Respuesta esperada 1: Correcta

El signo es negativo, si (0,0) es el punto de partida, el conductor regresa a él

Respuesta esperada 2: Incorrecta

El signo es positivo, la velocidad nunca puede ser negativa.

c) Descripción de la gráfica

Respuesta esperada: Abierta

El camionero inicia su viaje por autopista y va a 100km/h durante 2 horas. Después, para media hora a estirar las piernas en un área de servicio y comer un bocata.
Vuelve a la autopista y conduce otra media hora a la velocidad anterior, 100km/h. Tras esto, decide regresar al punto de partida y conduce a 250 km/h ya que no hay límite de velocidad. En total, ha estado 4 horas fuera de casa y ha recorrido 500 km (250 de ida y 250 de vuelta).

Ejercicio 2. El cartel del precio del café

a) Precios de 1, 2, 3 y 4 kg de café

Respuesta esperada 1: Correcta

Peso (kg)	1	2	3	4
Precio (€)	12.40	24.80	37.20	49.60

Respuesta esperada 2: Correcta

12.40 x 1 = 12.40 12.40 x 2 = 24.80

12.40 x 3 = 37.20 12. 40 x 4 = 49.60

b) Significado de $y = 12.40x$

Respuesta esperada 1: Correcta

x – variable independiente (kg)

y- variable dependiente (€)

Respuesta esperada 2: Incorrecta

x – variable dependiente (kg)

y- variable independiente (€)

c) ¿Es una función?

Respuesta esperada 1: Correcta

Sí, porque no hay dos precios distintos para una misma cantidad de kg

Respuesta esperada 2: Correcta

Sí, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y

d) Precio de ¼ kg

Respuesta esperada: Correcta

12.40: 4 = 3.10 €

e) Kg por 186€

Respuesta esperada: Correcta

186: 12.40 = 15 kg

f) Frasco de cristal a 1.55€

Respuesta esperada 1: Correcta

$y = 12.40x + 1.55$

$3.10 + 1.55 = 4.65$ €

$(186 - 1.55): 12.40 = 14.875$ kg

Respuesta esperada 2: Incorrecta

$y = 1.55 + 12.40$

$3.10 + 1.55 = 4.65$ €

$186 : 12.40 - 1.55 = 13.45$ kg

Ejercicio 3. Agencias de alquiler de coches

a) Variable dependiente e independiente

Respuesta esperada 1: Correcta

x – variable independiente (km)

y- variable dependiente (€)

Respuesta esperada 2: Incorrecta

x – variable dependiente (km)

y- variable independiente (€)

b) Tabla de valores

Respuesta esperada 1: Correcta

Distancia (km)	0	100	200	300
Precio (€)	50	70	90	110

Distancia (km)	0	100	200	300
Precio (€)	20	50	80	110

Respuesta esperada 2: Incorrecta

Distancia (km)	0	100	200	300
Precio (€)	0	70	90	110

Distancia (km)	0	100	200	300
Precio (€)	0	50	80	110

c) Ecuación

Respuesta esperada 1: Correcta

$y = 0.20x + 50$

$y = 0.30x + 20$

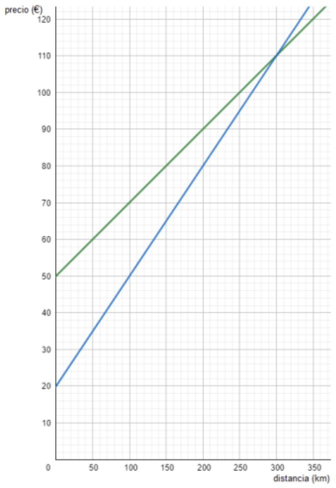
Respuesta esperada 2: Incorrecta

$y = 50x + 0.20$

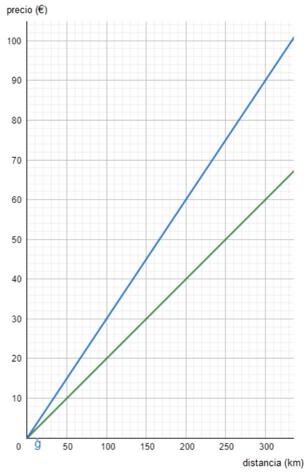
$y = 20x + 0.30$

d) Gráfica

Respuesta esperada 1: Correcta



Respuesta esperada 2: Incorrecta



e) ¿Qué agencia es mejor?

Respuesta esperada 1: Correcta

Menos de 300 km, la A es más barata.

300 km, A o B, es lo mismo.

Más de 300 km, la B es más barata.

Respuesta esperada 2: Incorrecta

Es mejor la B, sale siempre más barato. Al inicio los dos cobran lo mismo, 0.

Ejercicio 4. Audiencia de Aragón TV

a) Dominio y recorrido

Respuesta esperada 1: Correcta

$Domf = [0,24]$ y recorrido [2,40]

Respuesta esperada 2: Incorrecta

Dominio 24 y recorrido 40.

b) Máximos y mínimos

Respuesta esperada 1: Correcta

Máximos: (15,30) y (22,40)

Mínimos: (4,2) y (18.5, 15)

Respuesta esperada 2: Incorrecta

Máximos: (30,15) y (40,22)

Mínimos: (2,4) y (15, 18.5)

c) Crecimiento y decrecimiento

Respuesta esperada 1: Correcta	*Respuesta esperada 2:* Incorrecta
Crece: (4,15) U (18.5, 22)	Crece: (15,4) U (22,18.5)
Decrece: (0,4) U (15, 18.5) U (22,24)	Decrece: (4,0) U (18.5,15) U (24,22)

Ejercicio 5. Cometa Halley

a) Función periódica

Respuesta esperada 1: Correcta	*Respuesta esperada 2:* Incorrecta
Sí, porque se repite cada 77 años.	Sí, se dibuja sin levantar el lápiz.

b) Cortes con los ejes

Respuesta esperada 1: Correcta	*Respuesta esperada 2:* Incorrecta
Más cerca: (1755,0), (1832,0), …	Más cerca: (1793.5, 35), (1870.5, 35) …
Más lejos: (1793.5, 35), (1870.5, 35)…	Más lejos: (1755,0), (1832,0), …

c) ¿Cuándo volverá a acercarse al Sol?

Respuesta esperada 1: Correcta	*Respuesta esperada 2:* Incorrecta
$1986 + 77 = 2063$	$1986 + 38.5 = 2024.5$

Ejercicio 6. Valores en bolsa

a) Función continua

Respuesta esperada 1: Correcta	*Respuesta esperada 2:* Incorrecta
No, se dibuja levantando el lápiz.	Sí, se dibuja sin levantar el lápiz.

b) Valores

Respuesta esperada 1: Correcta	*Respuesta esperada 2:* Incorrecta
10 000 y 5 000 €	5 000 y 10 000 €

En la evaluación se sigue el modelo de tercios de Gairín, Muñoz y Oller (2012). Estos autores sostienen que los errores no son “graves” o “leves” en sí mismos; sino que su importancia queda asociada a la tarea en la que aparecen y a la relación de ésta tarea con el objetivo principal de la evaluación. Por ello, definiremos las tareas principales (TP), las tareas auxiliares específicas (TAE) y las tareas auxiliares generales (TAG):

Tabla 15. Relación de tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales.

TAREAS	**Principales**		TP1. Estudiar la relación funcional entre dos variables.
			TP2. Interpretar la tasa de variación media.
			TP3. Traducir entre enunciado y expresión algebraica.
			TP4. Traducir entre tablas de valores y gráfica.
			TP5. Traducir entre gráfica y enunciado.
			TP6. Traducir entre expresión algebraica y tabla de valores.
			TP7. Estudiar el dominio y recorrido de una función.
			TP8. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función.
			TP9. Estudiar los máximos y mínimos de una función.
			TP10. Estudiar la periodicidad de una función.
			TP11. Estudiar la continuidad de una función.
	Auxiliares	**Específicas**	TAE1. Cálculo aritmético de la tasa de variación media.
			TAE2. Resolución de ecuaciones.
			TAE3. Manejo de la escala y las magnitudes.
			TAE4. Lectura de gráficas de izquierda a derecha.
			TAE5. Identificación de la variable dependiente e independiente.
		Generales	TAG1. Notación matemática y corrección sintáctica.
			TAG2. Adecuación de las descripciones verbales.
			TAG3. Procesos de razonamiento y discursos racionales.
			TAG4. Interpretación de las soluciones en el contexto de referencia.

Una vez descritas las tareas, procedemos a asociarlas con los ejercicios de las pruebas. De acuerdo con este modelo, las tareas principales pueden descontar el total de la puntuación, las auxiliares específicas hasta dos tercios y las auxiliares generales hasta un tercio de la puntuación total. Como este modelo nos proporciona cotas superiores, habrá errores que serán valorados por debajo de este umbral.

Ejercicio 1. *(2 puntos repartidos en tres apartados: 0.75, 0.25 y 1, respectivamente).*

Tareas involucradas: TP2, TP5, TAE1, TAE3, TAE4, TAG1, TAG2, TAG3 y TAG4

Modelo de tercios:

- Errores relacionados con TP2, TP5 hasta 0.75, 0.25 y 1 punto según apartado:
    - No responde o responde mal al apartado a): hasta 0.75.
    - Responde bien a la pregunta, pero no considera el tramo en el que la velocidad es nula: hasta 0,25.
    - No responde o responde mal al apartado b): hasta 0.25.
    - Responde bien al apartado b), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0.1.
    - No responde o responde mal al apartado c): hasta 1
- Errores relacionados con TAE1, TAE3 y TAE4 hasta 0.5, 0.17 y 0.66 puntos según apartado:
    - Calcula mal la tasa de variación media: hasta 0.4.
    - Cuenta cada cuadradito como si fuese 100 en vez de 50: hasta 0.3.
    - Lee mal la gráfica y no pone el signo negativo en TVM [3,4]: hasta 0.2.
    - Interpreta TVM [3,4] como velocidad negativa: hasta 0.1.
- Errores relacionados con TAG1, TAG2, TAG3 y TAG4 hasta 0.25, 0.08 y 0.33 puntos según apartado:
    - Da una descripción poco realista o directamente incoherente: hasta 0.3.
    - No integra el contexto del camionero en la descripción: hasta 0.3.
    - No reflexiona sobre la velocidad de 250 km/h: hasta 0.1.
    - Se confunde al escribir alguno de los términos: hasta 0.1.
    - No escribe con una notación matemática adecuada: hasta 0,05 puntos

Ejercicio 2. *(2 puntos repartidos en seis apartados: 0.25, 0.5, 0.25, 0.25, 0.25 y 0.5, respectivamente).*

Tareas involucradas: TP1, TP6, TAE2, TAE5, TAG1 y TAG3.

Modelo de tercios:

- Errores relacionados con TP1 y TP6 hasta 0.25, 0.5, 0.25, 0,25, 0.25 y 0.5 puntos según apartado:
    - No responde o responde mal al apartado a): hasta 0.25.
    - No responde o responde mal al apartado b): hasta 0.5.
    - Responde bien al apartado b), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0.25.

- No responde o responde mal al apartado c): hasta 0.25.
- Responde bien al apartado c), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0.15.
- No responde o responde mal al apartado d): hasta 0.25.
- No responde o responde mal al apartado e): hasta 0.25.
- No responde o responde mal al apartado f): hasta 0.25.
- No responde o responde mal al apartado c): hasta 0.5.

- Errores relacionados con TAE2 y TAE5 hasta 0.17, 0.33, 0.17, 0,17, 0.17 y 0.33 puntos según apartado:
  - Despeja mal las variables en e): hasta 0.17 cada una.
  - Nombra la variable dependiente e independiente al revés: hasta 0.33.
  - Opera inadecuadamente en d), e) y f): hasta 0.17 cada una.
  - No consigue pasar de enunciado a expresión algebraica: hasta 0.33
  - Confunde la pendiente y la ordenada en el origen: hasta 0.17.
- Errores relacionados con TAG1 y TAG3 hasta 0.08, 0.17, 0.08, 0,08, 0.08 y 0.17 puntos según apartado:
  - Se confunde al escribir alguno de los términos: hasta 0.05.
  - No escribe con una notación matemática adecuada: hasta 0,05.
  - Encadena operaciones en f) haciendo un uso incorrecto de la sintaxis: hasta 0.05.

Ejercicio 3. *(2 puntos repartidos en cinco apartados: 0.25, 0.25, 0.25, 0.5 y 0.75, respectivamente).*

Tareas involucradas: TP2, TP3, TP6, TAE4, TAE5, TAG1, TAG2, TAG3 y TAG4

Modelo de tercios:

- Errores relacionados con TP2, TP3 y TP6 hasta 0.25, 0.25, 0.25, 0,5 y 0.75 puntos según apartado:
  - No responde o responde mal al apartado a): hasta 0.25.
  - Responde bien al apartado a), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0.15.
  - No responde o responde mal al apartado b): hasta 0.25.
  - No responde o responde mal al apartado c): hasta 0.25.
  - No responde o responde mal al apartado d): hasta 0.5.
  - No responde o responde mal al apartado e): hasta 0.75.
  - Responde bien al apartado e), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0.5.

- Errores relacionados con hasta TAE4 y TAE5 hasta 0.17, 0.17, 0.17, 0,33 y 0.5 puntos según apartado:
    - Nombra la variable dependiente e independiente al revés: hasta 0.15.
    - Opera inadecuadamente en b): hasta 0.15.
    - No consigue pasar de enunciado a expresión algebraica: hasta 0.15.
    - Traza rectas que no se ajustan a la expresión algebraica: hasta 0.25.
    - Confunde la pendiente y la ordenada en el origen: hasta 0.15.
    - Confunde ordenadas y abscisas: hasta 0.25.
- Errores relacionados con TAG1, TAG2, TAG3 y TAG4 hasta 0.08, 0.08, 0.08, 0,17 y 0.25 puntos según apartado:
    - Se confunde al escribir alguno de los términos: hasta 0.1.
    - No escribe con una notación matemática adecuada: hasta 0.05 puntos
    - No integra el contexto de las agencias en el análisis: hasta 0.25.
    - Da un análisis poco detallado: hasta 0.25.

Ejercicio 4. *(2 puntos repartidos en tres apartados: 0.5, 0.75 y 0.75, respectivamente).*

Tareas involucradas: TP7, TP8, TP9, TAE4, TAG1, TAG2, TAG3 y TAG4.

Modelo de tercios:

- Errores relacionados con TP7, TP8 y TP9 hasta 0.5, 0.75 y 0.75 puntos según apartado:
    - No responde o responde mal al apartado a): hasta 0.5.
    - Responde bien al apartado a), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0.25.
    - No responde o responde mal al apartado b): hasta 0.75.
    - Responde bien al apartado b), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0.25.
    - No responde o responde mal al apartado c): hasta 0.75.
    - Responde bien al apartado c), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0.25.

- Errores relacionados con TAE4 hasta 0.33, 0.5 y 0.5 puntos según apartado:
    - Confunde ordenadas y abscisas: hasta 0.25.
    - Lee mal la gráfica y mira el crecimiento sobre el eje de ordenadas: hasta 0.4.
    - Confunde dominio y rango: hasta 0.3.
    - Trata a los intervalos como puntos: hasta 0.1.

- Al estudiar extremos relativos, omite algún mínimo o máximo: hasta 0.3
- Estudia los máximos y mínimos como si fueran intervalos: hasta 0.4.

- Errores relacionados con TAG1, TAG2, TAG3 y TAG4 hasta 0,17, 0.25 y 0.25 puntos según apartado:
  - No escribe con una notación matemática adecuada: hasta 0.05 puntos.
  - Se confunde al escribir alguno de los términos: hasta 0.05 puntos.
  - No integra el contexto de las audiencias en el análisis: hasta 0.25.

Ejercicio 5. *(1.5 puntos repartidos en tres apartados: 0.25, 0.5 y 0.75, respectivamente).*

Tareas involucradas: TP10, TAE4, TAG1, TAG2, TAG3 y TAG4.

Modelo de tercios:

- Errores relacionados con TP10 hasta 0,25, 0.5 y 0.75 puntos según apartado:
  - No responde o responde mal al apartado a): hasta 0.25
  - Responde bien al apartado a), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0,15
  - No responde o responde mal al apartado b): hasta 0.75
  - Responde bien al apartado b), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0,25
  - No responde o responde mal al apartado c): hasta 0.5
- Errores relacionados con TAE4 hasta 0,17, 0.33 y 0.5 puntos según apartado:
  - Calcula mal el periodo: hasta 0.15.
  - Confunde máximos y mínimos: hasta 0.25.
  - Confunde los cortes con el eje de abscisas con los cortes con el eje de ordenadas: hasta 0.15.
  - Estudia los máximos y mínimos como si fueran intervalos: hasta 0.4.
- Errores relacionados con TAG1, TAG2, TAG3 y TAG4 hasta 0.08, 0.17 y 0.25 puntos según apartado:
  - No escribe con una notación matemática adecuada: hasta 0.05 puntos
  - Se confunde al escribir alguno de los términos: hasta 0.05 puntos
  - No integra el contexto del cometa en el análisis: hasta 0.25.

Ejercicio 6. *(0.5 puntos repartidos en 2 apartados: 0.25 y 0.25, respectivamente).*

Tareas involucradas: TP11, TAE3, TAE4 y TAG1.

Modelo de tercios:

- Errores relacionados con TP11 hasta 0.25 puntos según apartado:
    - No responde o responde mal al apartado a): hasta 0.25
    - Responde bien al apartado a), pero no lo justifica o lo hace mal: hasta 0,15
    - No responde o responde mal al apartado b): hasta 0.25
- Errores relacionados con TAE3 y TAE4 hasta 0.17 puntos según apartado:
    - No tiene en cuenta el enunciado y da el resultado de b) en euros, en vez de en miles de euros: hasta 0.15 puntos
    - Lee la gráfica de arriba a abajo para b) y responde mal: hasta 0.15 puntos
- Errores relacionados con TAG1 hasta 0,08 puntos según apartado:
    - Se confunde al escribir alguno de los términos en b): hasta 0,05 puntos
    - No escribe con una notación matemática adecuada: hasta 0,05 puntos
    - No integra el contexto de la bolsa en el análisis: hasta 0.25.

3. Cuestionario de evaluación de la docencia

Como señalábamos en la secuencia didáctica (apartado H), la última sesión incluirá un cuestionario de evaluación de la docencia que deberá ser rellenado por la parte discente. El cuestionario será implementado en Google Forms y tendrá una estructura similar a la que se presenta a continuación, pudiendo variar si la situación así lo requiere:

Sobre la profesora.

	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Neutral	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
Explica de manera clara y ordenada					
Pone ejemplos útiles					
Fomenta la participación y el respeto					
Muestra entusiasmo por la asignatura					

Sobre las clases.

	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Neutral	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
Las clases son entretenidas y útiles					
La cantidad de ejercicios es suficiente					
El examen final es apropiado					
Los resúmenes de teoría son útiles					

¿Qué crees que podría hacer tu profesora para mejorar?

____

____

____

¿Te gustaría volver a dar esta unidad con esta profesora?

- ☐ *Sí*
- ☐ *No*
- ☐ *Otra:* ____

Pon una nota a tu profesora (de 0 a 10).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

J. Bibliografía

Akkoç, H., & Tall, D. (2002). The simplicity, complexity and complication of the function concept. In *PME conference* (Vol. 2, pp. 2-025).

Alayo, F., & Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* Centro de Publicaciones. Ministerio de Educación y Ciencia.

Alonso, Ricardo y Sogero, Carmen (s.f.) *Funciones muy reales (3º y 4º ESO) - Unidad didáctica para el trabajo de las competencias.* Gobierno de Aragón.

Arnal Bailera, A. y Beltrán Pellicer, P. (2021). *Colección de apuntes de la asignatura de Diseño de Actividades para el Aprendizaje de Matemáticas, del Máster en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas*. Universidad de Zaragoza.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Bingolbali, F., & Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *31*(3), 237-257.

Bosch, M., & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. In *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 89-114). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Boyer, C. B. (1946). *Proportion, equation, function. Three steps in the development of a concept.* Scripta Mathematica. 12, 5-13.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-265.

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. El informe Cockcroft.* Madrid: MEC.

Cólera, J., & Gaztelu, I. (2016). *Matemáticas 2º ESO. Profesorado.* Madrid: Anaya.

Cólera, J., & Gaztelu, I. (2021). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas Aplicadas 4º. ESO. Profesorado. Anaya + Digital. Anaya.* Recuperado de https://www.anayaeducacion.es/

Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué? ¿cómo? aportaciones de la investigación. *X Jornadas para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, X JAEM, Zaragoza. Ponencia P41*, 367-377.

Deulofeu, J., De la Fuente, A., & Vilaplana, L. (2021). Funciones: modelización, representaciones y autorregulación. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas*, (91), 32-

39.

Díaz, J. L. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza*, *4*, 13-25.

Domenech, J. C. (2008). *Matemáticas, 4º ESO.* Alcoy, España: Marfil, S.A.

Dubinsky, E., & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 83-101.

Embid, S. (2021). *Practicum II: Informe sobre la Impartición de clases*. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Embid, S. (2021). *Investigación e Innovación en Matemáticas: Informe sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones*. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Figueiredo, C. A., Contreras, L. C. y Blanco, L. J. (2015), "Concepto de función: definición, representación y ejemplificación en la enseñanza y aprendizaje", en Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M. T. y Moreno, M. (eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*, La Laguna, Tenerife, Universidad de la Laguna, pp. 67-80.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. & Oller, A.M. (2012). *Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas.* En Investigación en Educación Matemática XVI, pp. 261-274. Jaén: SEIEM.

Hohenwarter, M. et al. (2019). GeoGebra. Obtenido de https://www.geogebra.org/

Janvier, C. E. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Londres: LEA. Publ.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: *Tasks, learning, and teaching.* Review of Educational Research, 60*(1), 1–63.*

Martinez Juste, S., Muñoz Escolano, J.M. (2021). *Colección de apuntes de la asignatura de Diseño curricular e instruccional de Matemáticas, del Máster en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas*. Universidad de Zaragoza.

Martinez Juste, S., Muñoz Escolano, J.M. (2021). *Colección de apuntes de la asignatura de Innovación e Investigación educativa en Matemáticas, del Máster en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas*. Universidad de Zaragoza.

Mercado, A. I. (2007). Matemáticas el primer día de curso, un nuevo enfoque de la evaluación inicial. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (56), 33-38.

Moya, P., & Zuasti, N. (2021). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas: 4ºA de ESO*. Recuperado de https://www.apuntesmareaverde.org.es/

Miras, M. (1993). Un punto de partida para el aprendizaje de nuevos contenidos: los conocimientos previos. *El constructivismo en el aula*, 47-63.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la ESO y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón

Ortega, T., & Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones.

Pedersen, O. (1974). Logistics and the theory of functions: An essay in the history of Greek mathematics. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences 24*(94), 29-50.

Pérez, C. (2016). *Matemáticas enseñanzas aplicadas serie soluciona 4º ESO.* Madrid, España: Santillana Educación, S.L.

Rivas, M., Ramos, P., & Ortiz, K. (2015). Una introducción al estudio de las funciones.

Rochera, M. J., Gregori, E. B., & Goñi, J. O. (1990). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. In Desarrollo psicológico y educación (pp. 487-508). Alianza.

Ruiz, H.L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Sánchez, V., & Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of mathematics teacher education*, *6*(1), 5-25.

Sastre Vázquez, P., Rey, G. y Boubée, G. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*, 141-155.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the learning of mathematics*, *7*(3), 41-51.

Sierpinska, A. (1988). Epistemological remarks on functions. In *Proceedings of 12 Inter. Conf. of PME*.

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T., & López Esteban, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, 14, (3), 293–305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education*, 20(4), 356-366.

Wheatley, G. H. (1991), *Constructivist perspectives on science and mathematics learning*, Science education, vol. 75(1), 9-21.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19 th century. *Archive for History of exact Sciences*, *16*(1), 37-85.