La función maximal de Hardy-Littlewood

Pablo Ortiz Aladrén

Trabajo de fin de grado en Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Diciembre de 2021

Abstract

In this final degree project we will study the Hardy-Littlewood maximal operator in different settings.

In the first chapter we define the Hardy-Littlewood maximal operator of a locally integrable function f. The Hardy-Littlewood maximal operator will be proved to be positive and linear.

We will explain what it means that the Hardy-Littlewood maximal operator satisfies a (p,p)-weak inequality and that the Hardy-Littlewood maximal operator satisfies a (p,p)-strong inequality. Also we will prove that if a function satisfies a (p,p)-strong inequality, then it satisfies a (p,p)-weak inequality.

We will give an example to prove that the Hardy-Littlewood maximal operator doesn't satisfy the $(1,1)$-strong inequality.

We will show that the Hardy-Littlewood maximal operator satisfies the $(1,1)$-weak inequality. Moreover we will prove that for all p with $1 < p \leq \infty$, the Hardy-Littlewood maximal operator satisfies a (p,p)-strong inequality.

Next, if f is a locally integrable function we will show that

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\,dy = 0.$$

And as a consequence, if f is a locally integrable function

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x)$$

for almost every $x \in \mathbb{R}^n$.

After defining the Lebesgue set of a locally integrable function and using the previous limits, we see that if f is a locally integrable function, then almost every point belongs to the Lebesgue set.

To finish this chapter we define the bounded eccentricity $\{U_\alpha\}$ and prove that

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha)\to 0\\ z\in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y)dy = f(z)$$

for all point z which belongs to the Lebesgue set.

The target in the second chapter is to study the Hardy-Littlewood maximal operator in the set of the dyadic cubes.

We define dyadic cubes and give some basic properties of these sets.

Also we define the Hardy-Littlewood dyadic maximal operator $M_\triangle f$ and the conditional expectation of a locally integrable function f. We will relate the supreme of conditional expectations and the Hardy-Littlewood dyadic maximal operator.

We will see that the Hardy-Littlewood dyadic maximal operator is of $(1,1)$-weak type. Also we will prove that the limit of conditional expectations of a function f is the function f.

An important result, which will be used in the last chapter, is the Calderón-Zygmund decomposition. We prove that given an integrable function f and $\lambda > 0$, there exists a sequence $\{Q_j\}$ of dyadic cubes such as:

1. $f(x) \leq \lambda$ for almost every $x \notin \bigcup_j Q_j$.

2. $m(\cup_j Q_j) \leq \dfrac{1}{\lambda} ||f||_1$.

3. $\lambda < \dfrac{1}{m(Q_j)} \displaystyle\int_{Q_j} f \leq 2^n \lambda$.

We will give the relationship between the Hardy-Littlewood dyadic maximal operator $M_{\triangle} f$ and the Hardy-Littlewood maximal operator Mf. We will use this relationship to prove that the Hardy-Littlewood dyadic maximal operator satisfies a (p,p)-strong inequality with $1 < p$.

In the third chapter we will define the Hardy-Littlewood iterative maximal operator with order k of a locally integrable function f.

And to prove that the limit when k tends to infinite of the Hardy-Littlewood iterative maximal operator is $||f||_\infty$, we will give a previous lemma which says that the limit when k tends to infinite of a sequence $(c_k)_{k \geq 1}$ which belongs to $(0,1)$ and $c_{k+1} = (1-c_1)c_k + c_1$ for all $k \geq 1$ is 1.

Now, let w be a weight. In chapter four we study which conditions must w satisfy so as to have the (p,p)-weak inequality

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M^* f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx.$$

Firstly, we deduce some necessary conditions for the (p,p)-weak inequality. These conditions, which are known as the A_p-conditions, are proved to be sufficient, as well.

Finally, if a weight satisfies the A_p-condition, we will prove the (p,p)-weak inequality.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la función maximal de Hardy-Littlewood

En este capítulo vamos a utilizar como referencias los apartados [3], [5] y [7] de la bibliografía.

La función maximal tiene una gran importancia en matemáticas pues dada una función localmente integrable f y un conjunto V, que puede ser un cubo o una bola, la función controla los límites de la forma

$$\lim_{m(V)\to 0} \frac{1}{m(V)} \int_V f(y)dy.$$

La función maximal permite generalizar el teorema fundamental del cálculo integral clásico para espacios de medida de Lebesgue.

Este operador está relacionado con los operadores integrales de Calderón-Zygmund que juegan un papel importante en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Además muchos de los operadores clásicos del análisis cumplen una desigualdad de la forma

$$|Tf(x)| \leq |Mf(x)|$$

o similiar.

Definición. *Una función medible en $\mathbb{R}^n$ f se dice localmente integrable si para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ la función $f(x)\mathscr{X}_B(x)$ es integrable.*

Definición. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$. Se define la función maximal $Mf(x)$ como*

$$Mf(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y donde el supremo se toma sobre todas las bolas B que contienen a x. En el trabajo $m(B)$ es la medida de Lebesgue de B.

Teorema 1. *Dadas funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \geq 1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,*

1. $Mf \geq 0$.

2. $M(f+g) \leq Mf + Mg$.

3. $M(\lambda f) = |\lambda| Mf$.

Demostración. 1) Es inmediato, como $|f| \geq 0$

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy \geq \frac{1}{m(B)} \int_B 0 dy = 0.$$

Esto ocurre para toda bola que contiene a x por tanto

$$Mf \geq 0.$$

2) Dado cualquier $x \in \mathbb{R}^n$,

$$M(f+g)(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)+g(y)|\, dy.$$

Por las propiedades del valor absoluto

$$M(f+g)(x) \leq \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy + \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |g(y)|\, dy = Mf(x) + Mg(x).$$

3) Por las propiedades de las integrales

$$M(\lambda f)(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |\lambda f(y)|\, dy = |\lambda| \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy = |\lambda| Mf(x).$$

$\square$

Definición. *Sea $1 \leq p < \infty$. Se dice que el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo (p,p)-débil si hay alguna constante $C > 0$ de modo que para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y todo $\lambda > 0$,*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\})^{1/p} \leq \frac{C}{\lambda} ||f||_p .$$

Definición. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se dice que el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo (p,p)-fuerte si hay alguna constante $C > 0$ de modo que para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*

$$||Mf||_{L^p} \leq C ||f||_p .$$

Teorema 2. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función positiva y medible. Entonces para todo $\lambda > 0$,*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > \lambda\})^{1/p} \leq \frac{1}{\lambda} ||g||_p .$$

Demostración.

$$m(\{x\in\mathbb{R}^n : g(x) > \lambda\}) = m(\{x\in\mathbb{R}^n : (g(x))^p > \lambda^p\}) = \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:(g(x))^p>\lambda^p\}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{X}_{\{x\in\mathbb{R}^n:(g(x))^p>\lambda^p\}} dx.$$

Como $\frac{(g(x))^p}{\lambda^p} > 1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{X}_{\{x\in\mathbb{R}^n:(g(x))^p>\lambda^p\}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(g(x))^p}{\lambda^p} dx = \frac{1}{\lambda^p} ||g||_p^p .$$

$\square$

Consecuencia. *Poniendo $g = Mf$ (que enseguida veremos que es medible) se deduce que si M es de tipo (p,p)-fuerte entonces es de tipo (p,p)-débil. Al reves no es cierto. En lo que sigue vamos a probar que:*

1. *Mf es de tipo (p,p)-fuerte con $1 < p$.*
2. *Mf no es de tipo $(1,1)$-fuerte.*
3. *Mf es de tipo $(1,1)$-débil.*

Para las siguientes demostraciones necesitamos un resultado previo el teorema de recubrimiento de Vitali.

Teorema 3 (de recubrimiento de Vitali)**.** *Dada una colección finita $B = \{B_1, B_2, ..., B_N\}$ de bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$, existe una colección disjunta $\{B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_k}\} \subset B$ tal que*

$$m\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

Demostración. Tomamos una bola B_{i_1} de B que posea el mayor radio y eliminamos de B la bola B_{i_1} y todas las bolas que intersecan con B_{i_1}. Todas las bolas eliminadas están contenidas en la bola $\bar{B}_{i_1}$ que es la bola con el mismo centro de B_{i_1} y radio tres veces el radio de B_{i_1}.

Sea V el conjunto de las bolas restantes. Elegimos la bola B_{i_2} de mayor radio de V y eliminamos de V la bola B_{i_2} y todas las bolas que intersecan con B_{i_2}.

Repetimos el proceso como mucho N veces para obtener una colección finita de bolas disjuntas $B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_k}$ con $k \leq N$.

Tomamos $\bar{B}_{i_j}$ la bola con el mismo centro que B_{i_j} y radio tres veces el radio de B_{i_j}. Ya que cualquier bola $\mathscr{B}$ en B interseca con alguna bola B_{i_j} y tendrá menor o igual radio que B_{i_j}, se tiene que $\mathscr{B} \subset \bar{B}_{i_j}$. Por tanto

$$m\left(\cup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq m\left(\cup_{j=1}^{k} \bar{B}_{i_j}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} m(\bar{B}_{i_j}) = 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

□

A continuación vamos a dar otras propiedades de la función maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 4. *Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

1. *Mf es medible.*
2. *Mf cumple que*
$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}) \leq \frac{3^n}{\alpha} ||f||_1,$$
para todo $\alpha > 0$ y donde $||f||_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$.
3. *$Mf(x) < \infty$ para casi todo x.*

Demostración. 1) Tomamos

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}.$$

Hay que probar que E_α es un conjunto medible. Para todo $y \in E_\alpha$ existe una bola B tal que $y \in B$ y

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(z)| dz > \alpha.$$

Todo punto $x \in B$ cumple la anterior ecuación por tanto pertenece a E_α. Esto demuestra que E_α es un conjunto abierto y por tanto medible.

2) Si $E_\alpha = \emptyset$ es el caso trivial ya que $m(\emptyset) = 0$ y $||f||_1 \geq 0$.

Supongamos ahora que $E_\alpha \neq \emptyset$.

Para cada $x \in E_\alpha$ existe una bola B que contiene a x tal que

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy > \alpha \quad o \quad m(B) < \frac{1}{\alpha} \int_B |f(y)| dy.$$

Fijamos un conjunto compacto $K \subset E_\alpha$. Por estar contenido en E_α $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_x$ donde B_x es una bola abierta que contiene a x y que cumple que $m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| dy$. Como K es compacto podemos elegir un recubrimiento finito de K, es decir, $K \subset \bigcup_{l=1}^{N} B_l$. Aplicando el teorema de recubrimiento de Vitali existe una subfamilia finita de bolas abiertas disjuntas en $\mathbb{R}^n$ $B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_k}$ con

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

Como $m(B_k) < \frac{1}{\alpha}\int_{B_k} |f(y)|\,dy$ para todo $k = 1,\ldots,N$

$$m(K) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}) \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha}\int_{B_{i_j}} |f(y)|\,dy = \frac{3^n}{\alpha}\int_{\bigcup_{j=1}^{k} B_{ij}} |f(y)|\,dy$$
$$\leq \frac{3^n}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy = \frac{3^n}{\alpha}\,||f||_1\,.$$

Como la medida de Lebesgue es regular interiormente $m(E_\alpha) = \sup_{K\subset E_\alpha} m(K)$ donde el supremo se toma sobre los conjuntos compactos K contenidos en E_α y $m(K) \leq \frac{3^n}{\alpha}\,||f||_1$ se cumple para todo subconjunto compacto K de E_α

$$m(E_\alpha) \leq \frac{3^n}{\alpha}\,||f||_1\,.$$

3) Como el conjunto $\{x : Mf(x) = \infty\} \subset \{x : Mf(x) > \alpha\}$ para todo α,

$$m(\{x : Mf(x) = \infty\}) \leq \lim_{\alpha\to\infty} m(\{x : Mf(x) > \alpha\}) \leq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{3^n}{\alpha}\,||f||_1 = 0.$$

Por tanto $Mf(x) < \infty$ para casi todo x. □

Antes del próximo resultado daremos un lema previo.

Lema 5. *Si f es una función medible en $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx = p\int_0^\infty t^{p-1} m(\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})dt.$$

Demostración. Aplicando el teorema de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{|f(x)|} pt^{p-1}dtdx$$

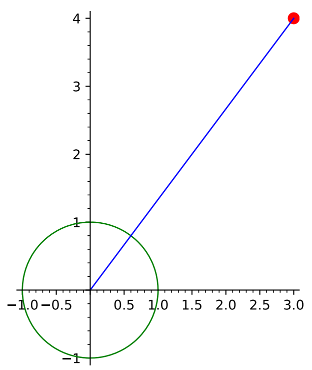
$$= \int_0^\infty pt^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{X}_{\{|f(x)|>t\}}dxdt = p\int_0^\infty t^{p-1} m(\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)| > t\})dt.$$

□

Ejemplo. *Sean $D = \{x\in\mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ y $f(x) = \mathscr{X}_D(x)$.*

$$||f||_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{X}_D(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{X}_D(x)dx = \int_D dy = m(D).$$

Fijamos una bola B, en concreto, $B = B(x,r)$ con $r = 1 + ||x||$.



En esta figura el punto rojo es un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$, la figura verde es el círculo de centro el origen y radio 1 y la recta azul une el punto rojo y el origen.

$$Mf(x) \geq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\,dy = \frac{1}{m(B)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{X}_D(y)\mathscr{X}_B(y)dy$$

$$= \frac{1}{m(B)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{X}_{D\cap B}(y)dy = \frac{1}{m(B)} \int_{D\cap B} dy = \frac{m(D\cap B)}{m(B)}.$$

Dado $y \in D$, $||y-x|| \leq ||y|| + ||x|| < 1 + ||x|| = r$. Entonces

$$\frac{m(D\cap B)}{m(B)} = \frac{m(D)}{m(B)} = \frac{m(D)}{c_n r^n} = \frac{C}{r^n}.$$

Para ver que $||Mf||_1 = \infty$ basta ver que $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||x||)^n} dx = \infty$.

Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{||x||^\lambda} dx < \infty$ si y solo si $\lambda > n$ y $||x|| + 1 \sim ||x||$ cuando $||x|| \to \infty$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||x||)^\lambda} dx < \infty \text{ si y solo si } \lambda > n.$$

En este caso $\lambda = n$ por tanto $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+||x||)^\lambda} dx = \infty$ y $||Mf||_1 = \infty$.

Teorema 6. *(estimación de tipo fuerte)*

Sean $n \geq 1, 1 < p \leq \infty$. Existe $C > 0$ tal que para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$||Mf||_p \leq C\,||f||_p\,.$$

Demostración. Si $p = \infty$.

Por ser $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ en casi todo punto. Usando la primera propiedad del teorema 1

$$|Mf(x)| = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\,dy \leq \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B ||f||_\infty\,dy = ||f||_\infty\,.$$

Tomando el supremo obtenemos el resultado.

Si $1 < p < \infty$.

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Fijamos un $\alpha > 0$ cualquiera y definimos estas funciones:

$$g = f\mathscr{X}_{\{x;|f(x)|>\frac{\alpha}{2}\}} \quad , \quad h = f\mathscr{X}_{\{x;|f(x)|\leq\frac{\alpha}{2}\}}.$$

Entonces, $f = g + h$.

Además, $|h(x)| \leq \frac{\alpha}{2}$ para todo x, luego $Mh(x) \leq \frac{\alpha}{2}$ para todo x. Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Mf(x) = M(g+h)(x) \leq Mg(x) + Mh(x) \leq Mg(x) + \frac{\alpha}{2}.$$

Si $Mf(x) > \alpha$ entonces $Mg(x) > \frac{\alpha}{2}$.

Luego

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \alpha\}) \leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; Mg(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right).$$

Usando la propiedad 2 del teorema 4

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; Mg(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \frac{3^n}{\frac{\alpha}{2}} ||g||_1 = \frac{3^n 2}{\alpha} \int_{\{x;|f(x)|>\frac{\alpha}{2}\}} |f(x)|\,dx.$$

Por el lema 5

$$||Mf||_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p \, dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} m(\{x \in \mathbb{R}^n; Mf(x) > \alpha\}) \, d\alpha$$

$$\leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; Mg(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) d\alpha \leq p \int_0^\infty 3^n 2\alpha^{p-2} \left(\int_{\{x; |f(x)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(x)| \, dx\right) d\alpha.$$

Usando el teorema de Fubini

$$p \int_0^\infty 3^n 2\alpha^{p-2} \left(\int_{\{x; |f(x)| > \frac{\alpha}{2}\}} |f(x)| \, dx\right) d\alpha = 3^n 2p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} d\alpha\right) dx$$

$$= 3^n 2p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{p-1}}{p-1} |f(x)|^p \, dx = \frac{3^n 2^p p}{p-1} ||f||_p^p.$$

□

Teorema 7. *Sea f una función integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \, dy = 0$$

y

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. 1) Basta con probar que para cada $\alpha > 0$ el conjunto

$$E_\alpha = \left\{ x : \limsup_{\substack{m(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \, dy > 2\alpha \right\}$$

tiene medida nula ya que si esto ocurre el conjunto $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_{\frac{1}{n}}$ tiene medida nula y el conjunto E^C (que es el complementario de E) cumple que si $x \in E^C$

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \, dy = 0.$$

Fijando α, si g es continua con soporte compacto es una función acotada y $|g| \leq ||g||_\infty$

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |g(y) - g(x)| \, dy \leq \sup_{y\in B} |g(y) - g(x)| \, .$$

Por ser g continua dado $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que si $|y-x| < \delta$, $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$. Si B es cualquier bola tal que $x \in B$ con diámetro menor que δ, se tiene $\sup_{y\in B} |g(y) - g(x)| \leq \varepsilon$ y por lo tanto

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |g(y) - g(x)| \, dy \leq \varepsilon.$$

Por tanto $\lim\limits_{\substack{m(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |g(y) - g(x)| \, dy = 0$ para todo x.

Por densidad para cada $\varepsilon > 0$ existe una función g continua de soporte compacto tal que $||f-g||_1 < \varepsilon$.

Como

$$\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy$$

$$\leq \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-g(y)|\,dy+\frac{1}{m(B)}\int_B |g(y)-g(x)|\,dy+|g(x)-f(x)|$$

$$\leq M(f-g)(x)+\frac{1}{m(B)}\int_B |g(y)-g(x)|\,dy+|g(x)-f(x)|\,,$$

$$\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy\leq M(f-g)(x)+|g(x)-f(x)|\,.$$

Sean $F_\alpha=\{x: M(f-g)(x)>\alpha\}$ y $G_\alpha=\{x: |f(x)-g(x)|>\alpha\}$ entonces $E_\alpha\subset(F_\alpha\cup G_\alpha)$. Por la desigualdad de Chebyshev

$$m(G_\alpha)<\frac{1}{\alpha}\,||f-g||_1$$

y por el teorema 4 apartado 2)

$$m(F_\alpha)<\frac{3^n}{\alpha}\,||f-g||_1\,.$$

Así $m(E_\alpha)\leq\frac{3^n}{\alpha}\varepsilon+\frac{1}{\alpha}\varepsilon$. Como esto es cierto para todo $\varepsilon>0$ se deduce que $m(E_\alpha)=0$.

2) Para cada $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy-f(x)\right|=\left|\frac{1}{m(B)}\int_B (f(y)-f(x))dy\right|\leq\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy.$$

Basta con usar ahora el apartado 1). □

Una consecuencia del anterior teorema es el siguiente corolario.

Corolario 8. *Si f es una función localmente integrable, entonces para casi todo $x\in\mathbb{R}^n$*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy=0.$$

En particular para casi todo $x\in\mathbb{R}^n$

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy=f(x).$$

Demostración. Este teorema es de carácter local, pues dado $N\in\mathbb{N}$, si $|x|\leq N$, los valores de $\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy$ con diámetro de B menor que 1 dependen de las y tales que $|y|\leq N+1$. Así podemos suponer que $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

La segunda conclusión se obtiene de la primera ya que

$$\left|\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy-f(x)\right|=\left|\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)-f(x)dy\right|\leq\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy=0.$$

□

Definición. *Sean E un conjunto medible y $x\in\mathbb{R}^n$. Se dice que x es un punto de densidad de Lebesgue de E si*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{m(B\cap E)}{m(B)}=1.$$

Corolario 9. *Suponiendo que $E \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto medible entonces:*

1. *Casi todo $c \in E$ es punto de densidad de E.*

2. *Casi todo $c \notin E$ no es punto de densidad de E.*

Demostración. 1) Tomamos $c \in E$ cualquiera, una bola B que contiene a c y $f = \mathscr{X}_{E\cap B}$. La función f es integrable en $\mathbb{R}^n$.

Si $c \in E$, entonces $c \in E \cap B$ y $f(c) = 1$. Además,

$$\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = \frac{1}{m(B)}\int_B \mathscr{X}_{E\cap B}(y)dy = \frac{1}{m(B)}\int_{E\cap B} dy = \frac{m(B\cap E)}{m(B)}.$$

Aplicando el teorema 7

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ c\in B}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ c\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = f(c) = 1$$

para casi todo $c \in E$.

2) Si $c \notin E$, entonces $c \in E^C \cap B$ y $m(B) = m(E^C \cap B) + m(E\cap B)$

$$1 = \frac{m(B)}{m(B)} = \frac{m(E^C\cap B)}{m(B)} + \frac{m(E\cap B)}{m(B)}.$$

Tomando ahora $f = \mathscr{X}_{E^C\cap B}$ y siguiendo el mismo proceso que en el apartado 1) obtenemos que

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ c\in B}} \frac{m(B\cap E^C)}{m(B)} = \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ c\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = f(c) = 1$$

para casi todo $c \notin E$.

Por lo tanto

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ c\in B}} \frac{m(E\cap B)}{m(B)} = \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ c\in B}} \left(1 - \frac{m(E^C\cap B)}{m(B)}\right) = 1 - \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ c\in B}} \frac{m(E^C\cap B)}{m(B)} = 0.$$

Por tanto $\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ c\in B}} \frac{m(E\cap B)}{m(B)} = 0$ y no es punto de densidad en E. □

Definición. *Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Se define el conjunto de Lebesgue de f como el conjunto formado por todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

Nota 10.

1. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece al conjunto de Lebesgue de f si f es continua en x.

2. Si $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece al conjunto de Lebesgue de f

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = f(x).$$

Con esto la primera parte del corolario 8 se puede escribir así:

Corolario 11. *Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Casi todo punto pertenece al conjunto de Lebesgue de f.*

Definición. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Una colección de conjuntos $\{U_\alpha\}$ se dice que converge regularmente a x si existe una constante $c > 0$ tal que para cada U_α existe una bola B con $x \in B$, $U_\alpha \subset B$ y $m(U_\alpha) \geq cm(B)$.*

Corolario 12. *Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Si $\{U_\alpha\}$ converge regularmente a z entonces*

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha)\to 0 \\ z\in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y)dy = f(z)$$

para todo z en el conjunto de Lebesgue de f.

Demostración. Si $z \in B$ con $U_\alpha \subset B$ y $m(U_\alpha) \geq cm(B)$, entonces

$$\frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |f(y) - f(z)|\, dy \leq \frac{1}{cm(B)} \int_B |f(y) - f(z)|\, dy.$$

Como z pertenece al conjunto de Lebesgue

$$0 \leq \lim_{\substack{m(U_\alpha)\to 0 \\ z\in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |f(y) - f(z)|\, dy \leq \lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ z\in B}} \frac{1}{cm(B)} \int_B |f(y) - f(z)|\, dy = 0.$$

Y de aquí se deduce el resultado. □

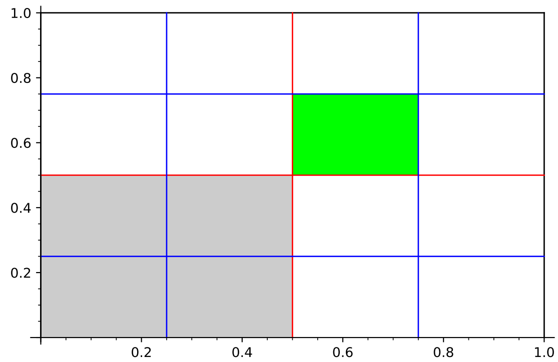
Capítulo 2

Función maximal diádica

A partir de los trabajos de las páginas [1], [4] y [7] de la bibliografía escribimos este capítulo.

Definición. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}^n$ y $k \in \mathbb{Z}$. Un cubo diádico en $\mathbb{R}^n$ de generación k es un conjunto de la forma*

$$Q = 2^{-k}(m + [0,1)^n).$$



La figura es un cubo diádico donde el cubo de lados negro es el cubo diádico de generación 0, los cubos de lados rojos son los cubos diádicos de generación 1 y los cubos de lados azules son los cubos diádicos de generación 2.

Además el cubo cuyo interior es de color azul claro es el cubo diádico de generación 1 con punto inicial el origen y el cubo cuyo interior es de color verde es el cubo diádico de generación 2 con punto inicial $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Definición. *Sea $k \in \mathbb{Z}$. Se define la familia de todos los cubos diádicos $\{Q_k\}$, donde Q_k denota el conjunto*

$$Q_k = \{Q : m(Q) = 2^{-nk}\}.$$

Además denotaremos por $\mathscr{Q} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k$.

Nota 13.

1. Fijado $k \in \mathbb{Z}$, todo $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece a un único cubo diádico de generación k.
2. Dos cubos diádicos o bien son disjuntos, o bien uno de ellos está contenido en el otro.
3. Dado un cubo diádico Q de generación k, existe un único Q^* de generación $k-1$ tal que $Q \subset Q^*$ y $m(Q^*) = 2^n m(Q)$. El cubo Q^* se llama el padre de Q.
4. Un cubo diádico de la familia Q_k está contenido en un único cubo diádico de cada familia Q_j donde $j < k$ y contiene 2^n cubos diádicos de la familia Q_{k+1}.
5. Un cubo cualquiera de lado menor que 2^k corta como mucho a 2^n cubos diádicos de generación k.

Lema 14. *Sea $Q_1, \dots, Q_N$ una colección finita de cubos diádicos con $N \in \mathbb{N}$. Entonces hay una subcolección de cubos diádicos disjuntos $Q_{n_1}, \dots, Q_{n_k}$ tal que*

$$Q_{n_1} \cup \dots \cup Q_{n_k} = Q_1 \cup \dots \cup Q_N.$$

Demostración. Tomamos Q_{n_i} como cubos diádicos maximales de la colección de cubos que no están contenidos en ningún otro cubo de esta colección $Q_1, \dots, Q_N$. Por la anterior nota tenemos que son disjuntos y cubren $Q_1, \dots, Q_N$. □

Definición. *Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Definimos la función maximal diádica de f como*

$$M_{\triangle} f(x) = \sup_{x \in Q} \left| \frac{1}{m(Q)} \int_Q f(y) dy \right|,$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y donde el supremo se toma sobre todos los cubos diádicos Q que contienen a x.

Definición. *Sean f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, Q_k la familia de cubos diádicos de generación k y $x \in \mathbb{R}^n$. Se define la esperanza condicional de f respecto a la σ-álgebra engendrada por Q_k como*

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in Q_k} \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q f \right) \mathscr{X}_Q(x).$$

La esperanza condicional cumple que para todo Q que pertenece a la σ-álgebra engredrada por Q_k

$$\int_Q f(x) dx = \int_Q E_k f(x) dx$$

Sea $\mathscr{Q} = \cup_k Q_k$. Entonces se cumple que

$$\int_{\mathscr{Q}} E_k f = \int_{\mathscr{Q}} f.$$

Además para cada k la familia de todos los cubos diádicos de generación k Q_k es una partición de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} E_k f = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Lema 15. *Sean f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, Q_k la familia de cubos diádicos de generación $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $E_k f(x)$ la esperanza condicional de f respecto a la σ-álgebra engredrada por Q_k. Entonces $E_k \circ E_{k+1}(f) = E_{k+1} \circ E_k(f) = E_{k+1}(f)$. Es decir, la esperanza condicional es monótona.*

Demostración. Dado Q un cubo diádico que pertenece a la σ-álgebra engredrada por Q_{k+1} también pertenece a la σ-álgebra engredrada por Q_k.

Como la esperanza condicional cumple que para todo Q que pertenece a la σ-álgebra engredrada por Q_k $\int_Q f(x)dx = \int_Q E_k f(x) dx$ entonces

$$\int_Q E_k(E_{k+1}(f)(x)) dx = \int_Q E_{k+1}(f)(x) dx$$

$$= \int_Q f(x) dx = \int_Q E_k(f)(x) dx = \int_Q E_{k+1}(E_k(f)(x)) dx.$$

□

Nota 16. Sean f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, Q_k la familia de cubos diádicos de generación k, $x \in \mathbb{R}^n$ y $E_k f(x)$ la esperanza condicional de f respecto a la σ-álgebra engredrada por Q_k. Entonces:

1) Todo $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece a un único cubo diádico de generación k. Por tanto $E_k f(x) = \sum_{Q \in Q_k} \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q f \right) \mathscr{X}_Q(x) = \frac{1}{m(Q_x)} \int_{Q_x} f(y) dy$ donde Q_x es el cubo diádico de generación k que contiene a x.

Así
$$M_\triangle f(x) = \sup_{x\in Q}\left|\frac{1}{m(Q)}\int_Q f(y)dy\right| = \sup_{x\in Q_x}\left|\frac{1}{m(Q_x)}\int_{Q_x} f(y)dy\right| = \sup_{k\in\mathbb{Z}}|E_k(f)|\,.$$

2)
$$||E_k(f)||_\infty \leq ||f||_\infty\,.$$

Además si $|E_k(f)| \leq ||f||_\infty$ en casi todo punto y $1 \leq p < \infty$
$$||E_k(f)||_p \leq ||f||_p\,.$$

Teorema 17. *Sean f una función integrable en $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}$ y $\lambda > 0$. Se tiene que*
$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda}\,||f||_1\,.$$

Además
$$\lim_{k\to\infty} E_k f(x) = f(x)$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. 1) Como $m\{x\in\mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > \lambda\} \leq m\{x\in\mathbb{R}^n : M_\triangle\,|f|\,(x) > \lambda\}$. Si $\{x\in\mathbb{R}^n : M_\triangle\,|f|\,(x) > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}\,||\,|f|\,||_1 = \frac{1}{\lambda}\,||f||_1$ entonces $m\{x\in\mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}\,||f||_1$. Se puede suponer por esto que $f > 0$ y es una función integrable en $\mathbb{R}^n$. Para todo $k \in \mathbb{Z}$
$$\Omega_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : E_k f(x) > \lambda, E_j f(x) \leq \lambda \;\; para \;\; todo \;\; j < k\right\}.$$

Por la definición de la función maximal diádica $M_\triangle f(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}}|E_k(f)|$. Si $y \in \cup_k\Omega_k$ existe algún k_1 tal que $y \in \Omega_{k_1}$. Como $E_k f(x) \leq |E_k f(x)| \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}}|E_k(f)| = M_\triangle f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda < E_k f(y)$ entonces $\lambda < M_\triangle f(y)$.

Además dado $y \in \{x \in \mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > \lambda\}$ por la definición de la función maximal diádica $\lambda < E_k(f)(y)$ para algún k y si existe un $j < k$ tal que $\lambda < E_j(f)(y)$ por el lema 15 $E_j(f)(y) > E_k(f)(y)$ lo cual contradice que $E_k(f)(y)$ sea máximo.

Así
$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > \lambda\} = \cup_k\Omega_k.$$

Por la definición de la función maximal diádica de Hardy-Littlewood y por ser Ω_k disjuntos se tiene que
$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > \lambda\}) = \sum_k m(\Omega_k) \leq \sum_k \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega_k} E_k f$$
$$= \frac{1}{\lambda}\int_{\cup_k\Omega_k} E_k f \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} E_k f = \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} f = \frac{1}{\lambda}\,||f||_1\,.$$

2)

Sea g continua. Dado $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que si $|y-x| < \delta$, $|g(y)-g(x)| < \varepsilon$. Si Q es el único cubo de $\{Q_k\}$ tal que $x \in Q$ con diagonal menor que δ, se tiene $|g(y)-g(x)| \leq \varepsilon$ y por lo tanto
$$|E_k g(x) - g(x)| = \left|\sum_{Q\in Q_k}\left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q g(y)dy\right)\mathscr{X}_Q(x) - g(x)\right| = \left|\sum_{Q\in Q_k}\left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q g(y)-g(x)dy\right)\mathscr{X}_Q(x)\right|$$
$$\leq \sum_{Q\in Q_k}\left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q |g(y)-g(x)|\,dy\right)\mathscr{X}_Q(x) \leq \varepsilon.$$

Por tanto
$$\lim_{k\to\infty} E_k g(x) = g(x)$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por densidad para cada $\varepsilon > 0$ existe una función g continua tal que $||f-g||_1 < \varepsilon$. Tomando $f_k = E_k f$ para todo k, $g_k = E_k g$ y $\lambda > 0$

$$|f_k(x) - f(x)| = |f_k(x) - f(x) \pm g_k(x) \pm g(x)| \leq |f_k(x) - g_k(x)| + |g_k(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$$

$$\leq M_{\triangle}(f-g)(x) + |g_k(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|\,.$$

Por tanto

$$\limsup_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| \leq M_{\triangle}(f-g)(x) + |g(x) - f(x)|\,.$$

Sean $F_\lambda = \{x : M_{\triangle}(f-g)(x) > \lambda/2\}$ y $G_\lambda = \{x : |f(x) - g(x)| > \lambda/2\}$. Entonces

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| > \lambda\} \subset (F_\lambda \cup G_\lambda).$$

Por la desigualdad de Chebyshev

$$m(G_\lambda) < \frac{2}{\lambda}\, ||f-g||_1$$

y por el apartado 1) del teorema

$$m(F_\lambda) < \frac{2}{\lambda}\, ||f-g||_1\,.$$

Así $m(\{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{2}{\lambda}\varepsilon + \frac{2}{\lambda}\varepsilon$.

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$ se deduce que $m(\{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| > \lambda\}) = 0$.

Además

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in Q_k} E_k(f \mathscr{X}_Q)(x) \mathscr{X}_Q(x) \;\; con \;\; k \geq 0$$

y $f\mathscr{X}_Q$ es integrable. Entonces f es localmente integrable y $\lim_{k\to\infty} E_k f(x) = f(x)$ en casi todo punto $x \in Q$ para todo $Q \in Q_k$. Luego también se cumple para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. □

Teorema 18. *(Descomposición de Calderón-Zygmund) Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $f > 0$ y $\lambda > 0$. Entonces existe una sucesión de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ que cumple:*

1. *$f(x) \leq \lambda$ para casi todo $x \notin \bigcup_j Q_j$.*
2. *$m(\cup_j Q_j) \leq \frac{1}{\lambda}\, ||f||_1$.*
3. *$\lambda < \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f \leq 2^n \lambda$.*

Demostración. 1) Sean Ω_k los conjuntos descritos como en el anterior teorema. Descomponemos los Ω_k en cubos diádicos disjuntos Q_k que forman una familia $\{Q_j\}$.

Sea $x \notin \bigcup_j Q_j$, es decir, $x \notin \cup_k \Omega_k$. Entonces si $E_k f(x) \leq \lambda$ para todo k, como $\lim_{k\to\infty} E_k f(x) = f(x)$ en casi todo punto $x \notin \bigcup_j Q_j$

$$f(x) \leq \lambda \;\; en \;\; casi \;\; todo \;\; punto \;\; x \notin \bigcup_j Q_j.$$

2) Usando la misma descomposición del apartado anterior

$$m(\cup_j Q_j) = m(\cup_k \Omega_k) = m(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\triangle} f(x) > \lambda\}).$$

Por la desigualdad vista en el anterior teorema

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} ||f||_1 .$$

3) Todo $Q_j \subset \{Q_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ cumple que $Q_j \subset \Omega_k$ para algún k. Por la definición de los Ω_k tenemos

$$\lambda < \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f.$$

Consideramos la familia de cubos $\{Q_j^*\}$ donde Q_j^* es el padre de Q_j. Entonces

$$\frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f \leq \frac{m(Q_j^*)}{m(Q_j)m(Q_j^*)} \int_{Q_j^*} f = \frac{2^n m(Q_j)}{m(Q_j)m(Q_j^*)} \int_{Q_j^*} f \leq 2^n \lambda.$$

□

Lema 19. *Sean f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{Q}^n$. Existen constantes C_n' y C_n que dependen de n, tales que*

$$C_n' Mf(x) \leq M_\triangle f(x) \leq C_n Mf(x).$$

Demostración. Sea Q un cubo tal que $x \in Q$. Entonces $Q \subset B(x, d_Q)$, donde $B(x, d_Q)$ es la bola de centro x de radio d_Q con d_Q la diagonal del cubo Q. Por el teorema de Pitágoras $d_Q^2 = n l_Q^2$, donde l_Q es la longitud del lado del cubo Q. Usando la definición de la medida de Lebesgue

$$m(Q) = l_Q^n = \frac{1}{\sqrt{n}^n} d_Q^n \quad y \quad m(B(x, d_Q)) = c_n d_Q^n.$$

Así tenemos que

$$\left| \frac{1}{m(Q)} \int_Q f(y)dy \right| \leq \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(y)| dy = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}^n} d_Q^n} \int_Q |f(y)| dy \leq \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}^n} d_Q^n} \int_{B(x,d_Q)} |f(y)| dy$$

$$= \frac{c_n}{\frac{1}{\sqrt{n}^n}} \frac{1}{c_n d_Q^n} \int_{B(x,d_Q)} |f(y)| dy = \frac{c_n}{\frac{1}{\sqrt{n}^n}} \frac{1}{m(B(x,d_Q))} \int_{B(x,d_Q)} |f(y)| dy \leq \frac{c_n}{\frac{1}{\sqrt{n}^n}} Mf(x).$$

Esto ocurre para todo cubo Q que contenga a x por tanto también ocurre para el supremo, por lo que $M_\triangle f(x) \leq C_n Mf(x)$ con $C_n = \frac{c_n}{\frac{1}{\sqrt{n}^n}}$.

Veamos la otra desigualdad. La bola $B(x,r)$ está contenida en un cubo Q_x de lado $2r$ con r>0. Como $m(Q_x) = (2r)^n$

$$\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy = \frac{1}{c_n r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \leq \frac{1}{c_n r^n} \int_{Q_x} |f(y)| dy$$

$$= \frac{2^n}{c_n} \frac{1}{2^n r^n} \int_{Q_x} |f(y)| dy = \frac{2^n}{c_n} \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_x} |f(y)| dy \leq \frac{2^n}{c_n} M_\triangle f(x).$$

Por tanto $C_n' Mf(x) \leq M_\triangle f(x)$. □

Proposición 20. *Sean $1 < p \leq \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ una función. Se cumple que*

$$||M_\triangle f||_p \leq ||f||_p .$$

Demostración. Caso $p=\infty$.

Por ser la integral de $\left|\frac{1}{m(Q)}\int_Q f(y)dy\right| \geq 0$

$$\left|\sup_{x\in Q}\left|\frac{1}{m(Q)}\int_Q f(y)dy\right|\right| = \sup_{x\in Q}\left|\frac{1}{m(Q)}\int_Q f(y)dy\right|.$$

Por tanto

$$\sup_{x\in Q}\left|\frac{1}{m(Q)}\int_Q f(y)dy\right| \leq \sup_{x\in Q}\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f(y)|\,dy \leq \sup_{x\in Q}\frac{1}{m(Q)}\int_Q ||f||_\infty\, dy$$
$$= ||f||_\infty \sup_{x\in Q}\frac{1}{m(Q)}\int_Q dy = ||f||_\infty .$$

Tomando el supremo obtenemos el resultado.

En el caso de que $1<p<\infty$.

Por el anterior lema anterior $M_\triangle f(x) \leq C_n Mf(x)$ para toda función f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y para todo $x\in\mathbb{R}^n$.

Por el teorema 6 $||Mf||_p \leq C\,||f||_p$. Así

$$\left|\left|M_\triangle f\right|\right|_p \leq C_n\,||Mf||_p \leq C_n C\,||f||_p = c_p\,||f||_p .$$

□

Capítulo 3

Función maximal reiterada

Este capítulo sobre la maximal reiterada se obtiene de una revista que es la referencia [6] de la bibliografía.

Definición. *Sean f una función localmente integrable y $k \in \mathbb{N}$. Se define la función maximal de Hardy-Littlewood reiterada de orden k como*

$$M^k f(x) = M(M^{k-1} f)(x)$$

donde Mf es la función maximal de Hardy-Littlewood.

Además $M^1 f(x) = Mf(x)$.

El siguiente lema es esencial para probar que el límite cuando k tiende a infinito de la función maximal de Hardy-Littlewood reiterada de orden k de una función f es la norma infinito de f.

Lema 21. *Dada una sucesión $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ que cumple*

1. *$c_1 \in (0,1)$,*
2. *$c_{k+1} = (1-c_1)c_k + c_1$ para todo $k \geq 1$,*

entonces $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 1$.

Demostración. Vamos a demostrar por inducción que $c_k \in (0,1)$ para todo $k \geq 1$.

Para $k = 1$ es evidente ya que por la condición (1) $0 < c_1 < 1$.

Suponiendo que $0 < c_{k-1} < 1$. Por la condición (2)

$$c_k = (1-c_1)c_{k-1} + c_1.$$

Como $0 < c_1, c_{k-1} < 1$ y $0 < (1-c_1) < 1$ tenemos que $0 < (1-c_1)c_{k-1} < (1-c_1) < 1$.

Así $0 < (1-c_1)c_{k-1} + c_1 < 1$ y $c_k \in (0,1)$ para todo $k \geq 1$.

Como

$$c_{k+1} - c_k = (1-c_1)c_k + c_1 - c_k = c_1(1-c_k) > 0$$

la sucesión $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ es monótona creciente.

Por tanto la sucesión tiene límite y $l = \lim_{k\to\infty} c_k \in (0,1]$. Por (2) $l = \lim_{k\to\infty} c_{k+1} = \lim_{k\to\infty}(1-c_1)c_k + c_1$ entonces $l = (1-c_1)l + c_1$. Es decir, $0 = c_1(1-l)$ luego $l = 1$.

Así

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 1.$$

□

Teorema 22. *Sean $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} M^{k+1} f(x) = ||f||_{\infty}.$$

Demostración. Si $||f||_\infty = 0$ la demostración es trivial ya que

$$Mf(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy \le \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B ||f||_\infty\, dy = ||f||_\infty .$$

Así $Mf(x) = 0$.

Veremos por inducción que $M^k f(x) \le ||f||_\infty$ para todo $k \ge 1$.

El caso de $k = 1$ lo hemos probado antes.

Suponemos que $M^k f(x) \le ||f||_\infty$.

Para $k+1$

$$M^{k+1} f(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B \left|M^k f(y)\right| dy \le \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B ||f||_\infty\, dy = ||f||_\infty .$$

Si $||f||_\infty \ne 0$ para todo $\varepsilon \in (0, ||f||_\infty)$ podemos definir el conjunto

$$W_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \ge ||f||_\infty - \varepsilon\}.$$

Para todo punto fijo $a \in \mathbb{R}^n$ existe un $R > 0$ tal que

$$m(W_\varepsilon \cap B(a,R)) \ge \frac{1}{2} m(W_\varepsilon).$$

Sea $V_\varepsilon = W_\varepsilon \cap B(a,R)$ y

$$S(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \textit{ es un punto de Lebesgue de } f \textit{ y } M^k(f), k = 1,2,...\}.$$

Cuando $y \in V_\varepsilon \cap S(f)$ $\;|f(y)| \ge ||f||_\infty - \varepsilon$ por pertenecer y a V_ε , también ya que $y \in S(f)$ $\;M^k f(y) \ge ||f||_\infty - \varepsilon$ para todo $k \ge 1$.

Sea $x \in B(a,R)$ por la definición de función maximal de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) \ge \frac{1}{m(B(a,R))} \int_{B(a,R)} |f(y)|\, dy.$$

Además ya que $V_\varepsilon \subseteq B(a,R)$

$$\frac{1}{m(B(a,R))} \int_{B(a,R)} |f(y)|\, dy \ge \frac{m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))m(V_\varepsilon)} \int_{V_\varepsilon} |f(y)|\, dy \ge \frac{m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))}(||f||_\infty - \varepsilon).$$

Llamando $r = \dfrac{m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))} > 0$ tenemos que $Mf(x) \ge r(||f||_\infty - \varepsilon)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
M^2 f(x) &\ge \frac{1}{m(B(a,R))} \int_{B(a,R)} |Mf(y)|\, dy \\
&= \frac{1}{m(B(a,R))} \int_{V_\varepsilon} |Mf(y)|\, dy + \frac{1}{m(B(a,R))} \int_{B(a,R)\setminus V_\varepsilon} |Mf(y)|\, dy \\
&\ge \frac{m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))}(||f||_\infty - \varepsilon) + \frac{m(B(a,R)) - m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))} \frac{1}{m(B(a,R)) - m(V_\varepsilon)} \int_{B(a,R)\setminus V_\varepsilon} |Mf(y)|\, dy \\
&\ge \frac{m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))}(||f||_\infty - \varepsilon) + \frac{m(B(a,R)) - m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))} r(||f||_\infty - \varepsilon) = (r + r(1-r))(||f||_\infty - \varepsilon).
\end{aligned}$$

Creamos la sucesión $c_1 = r$ y $c_{k+1} = c_1 + (1 - c_1)c_k$ para todo $k \ge 1$.

Entonces $M^2 f(x) \ge c_2(||f||_\infty - \varepsilon)$ para todo $x \in B(a,R)$.

Por inducción suponemos que para todo $x \in B(a,R)$

$$M^k f(x) \ge c_k(||f||_\infty - \varepsilon).$$

Entonces

$$M^{k+1}f(x) \geq \frac{1}{m(B(a,R))}\int_{B(a,R)} \left|M^k f(y)\right| dy$$

$$= \frac{1}{m(B(a,R))}\int_{V_\varepsilon} \left|M^k f(y)\right| dy + \frac{1}{m(B(a,R))}\int_{B(a,R)\setminus V_\varepsilon} \left|M^k f(y)\right| dy$$

$$\geq \frac{m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))}(||f||_\infty - \varepsilon) + \frac{m(B(a,R)) - m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))}\frac{1}{m(B(a,R)) - m(V_\varepsilon)}\int_{B(a,R)\setminus V_\varepsilon} \left|M^k f(y)\right| dy$$

$$\geq \frac{m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))}(||f||_\infty - \varepsilon) + \frac{m(B(a,R)) - m(V_\varepsilon)}{m(B(a,R))}c_k(||f||_\infty - \varepsilon)$$

$$= (r + c_k(1-r))(||f||_\infty - \varepsilon) = (c_1 + c_k(1-c_1))(||f||_\infty - \varepsilon) = c_{k+1}(||f||_\infty - \varepsilon).$$

Por el lema anterior $\liminf_{k\to\infty} M^k f(x) \geq ||f||_\infty - \varepsilon$ así cuando $\varepsilon \to 0$

$$\liminf_{k\to\infty} M^k f(x) \geq ||f||_\infty .$$

Por la definición de la función maximal de Hardy-Littlewood, tenemos que

$$\limsup_{k\to\infty} M^k f(x) \leq ||f||_\infty .$$

Luego

$$\lim_{k\to\infty} M^k f(x) = ||f||_\infty$$

para todo $x \in B(a,R)$. Haciendo que $R \to \infty$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

Capítulo 4

Acotación con pesos

En este capítulo vamos a usar la referencia [2] de la bibliografía.

Definición. *Un peso w es una función medible (con respecto a la medida de Lebesgue) definida en $\mathbb{R}^n$ y localmente integrable que toma valores en $[0,\infty]$.*

Definición. *Sean w un peso y $1 \leq p < \infty$. Definimos*

$$L^p(w) = \left\{ f \ medible \ definida \ en \ \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, w(x)dx < \infty \right\},$$

$$L^\infty(w) = \left\{ f \ medible \ definida \ en \ \mathbb{R}^n : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty \right\}$$

y

$$L^p_{loc}(w) = \left\{ f \ medible \ definida \ en \ \mathbb{R}^n : \int_K |f(x)|^p \, w(x)dx < \infty \ para \ todo \ K \subset \mathbb{R}^n \ compacto \right\}.$$

Definición. *Sean f una función, $1 \leq p \leq \infty$ y w un peso. Se define la norma p de f como sigue*

Si $1 \leq p < \infty$

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, w(x)dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

Definición. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$. Se define la función maximal $M^* f(x)$ como*

$$M^* f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(y)| \, dy$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x.

Sean f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Existen constantes C'_n y C_n que dependen de n, tales que

$$C'_n M f(x) \leq M^* f(x) \leq C_n M f(x).$$

Teorema 23. *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$, w un peso, $1 \leq p < \infty$ y $C > 0$. Si $||M^* f||_p \leq C\,||f||_p$, entonces para todo $\lambda > 0$*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M^* f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, w(x)dx.$$

Demostración. Por la desigualdad de Chebyshev

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M^*f(x) > \lambda\}) = w(\{x \in \mathbb{R}^n : (M^*f)^p(x) > \lambda^p\}) \leq \frac{1}{\lambda^p} ||M^*f||_p^p \leq \frac{C}{\lambda^p} ||f||_p^p.$$

□

Lema 24. *Sean f una función no negativa, Q un cubo en el que* $f(Q) = \int_Q f > 0$ *y* λ *un número tal que* $0 < \lambda < \frac{f(Q)}{m(Q)}$. *Entonces*

$$Q \subset \{x \in \mathbb{R}^n : M^*(f\mathscr{X}_Q)(x) > \lambda\}.$$

Demostración. Sea $x \in Q$. Por la definición de función maximal

$$M^*(f\mathscr{X}_Q)(x) \geq \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(y)| \, \mathscr{X}_Q(y) dy = \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(y)| \, dy = \frac{1}{m(Q)} \int_Q f(y) dy = \frac{f(Q)}{m(Q)} > \lambda.$$

□

Teorema 25. *Sean* $1 \leq p < \infty$, *w un peso y* $C > 0$ *de modo que para cualquier* $f \in L^p(w)$ *y cualquier* $\lambda > 0$, $w(\{x \in \mathbb{R}^n : M^*f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx$. *Entonces:*

1. $w(Q) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx$.
2. $w(Q) \left(\frac{f(Q)}{m(Q)}\right)^p \leq C \int_Q |f|^p w$.
3. *Tomando* $f = \mathscr{X}_S$ *con* $S \subset Q$, $\quad w(Q) \left(\frac{m(S)}{m(Q)}\right)^p \leq Cw(S)$.

Demostración. 1) Como $Q \subset \{x \in \mathbb{R}^n : M^*(f\mathscr{X}_Q)(x) > \lambda\}$

$$w(Q) \leq w(\{x \in \mathbb{R}^n : M^*(f\mathscr{X}_Q)(x) > \lambda\}).$$

Luego, por hipótesis,

$$w(Q) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \mathscr{X}_Q(x) w(x) dx = \frac{C}{\lambda^p} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx.$$

2) Como 1) ocurre para todo $\lambda < \frac{f(Q)}{m(Q)}$ entonces haciendo que $\lambda \to \frac{f(Q)}{m(Q)}$

$$w(Q) \left(\frac{f(Q)}{m(Q)}\right)^p \leq C \int_Q |f|^p w.$$

3) Usando $f = \mathscr{X}_S$, $\quad f(Q) = \int_Q f = \int_Q \mathscr{X}_S = m(S)$ y $\int_Q |f|^p w = \int_Q \mathscr{X}_S w = \int_S w = w(S)$. Entonces por el apartado 2)

$$w(Q) \left(\frac{m(S)}{m(Q)}\right)^p \leq Cw(S).$$

□

Corolario 26. *Con las condiciones del teorema anterior, se tiene:*

1. $w > 0$ *en casi todo punto salvo si es identicamente nula.*
2. *w es localmente integrable salvo si es identicamente infinita.*

Demostración. 1) Si $w = 0$ en un conjunto de medida positiva S, como

$$w(Q) \left(\frac{m(S)}{m(Q)}\right)^p \leq Cw(S) = 0$$

$w(Q) = 0$ para todo Q que contenga a S. Luego $w = 0$ en casi todo punto de Q.

2) Si $w(Q) = \infty$ para algún Q y por el apartado 3 del anterior teorema también se cumple para todo $S \subset Q$. □

Usando el apartado 3) del teorema 25 con $p = 1$

$$\frac{w(Q)}{m(Q)} \leq C \frac{w(S)}{m(S)}.$$

Sea $a = \text{ínf}\{w(x) : x \in Q\}$ el ínfimo esencial salvo conjuntos de medida nula. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $S_\varepsilon \subset Q$ tal que $m(S_\varepsilon) > 0$ y $w(x) \leq a + \varepsilon$, para todo $x \in S_\varepsilon$. Entonces

$$\frac{w(Q)}{m(Q)} \leq C(a + \varepsilon) \quad \textit{para todo } \varepsilon > 0$$

y

$$\frac{w(Q)}{m(Q)} \leq C \inf_{x \in Q} w(x).$$

De lo anterior obtenemos la siguiente definición.

Definición. *Se llama clase de pesos A_1 al conjunto de pesos w que satisfacen la siguiente condición, existe $C > 0$ tal que*

$$\frac{w(Q)}{m(Q)} \leq C w(x)$$

en casi todo punto $x \in Q$ y para todo cubo Q. A esto se le llama condición A_1.

Nota 27. La anterior condición también se puede escribir como

$$M^* w(x) \leq C w(x)$$

para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Usando el apartado 2) del teorema 25 para $p > 1$ y tomando $f = w^{-\frac{1}{p-1}} \mathscr{X}_Q$

$$w(Q) \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^p \leq C \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}.$$

De aquí se obtiene la siguiente definición.

Definición. *Sea $1 \leq p < \infty$. Se llama clase de pesos A_p al conjunto de pesos w que satisfacen la siguiente condición, existe $C > 0$ tal que para todo cubo Q*

$$w(Q) \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^p \leq C \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}},$$

o sea,

$$\left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C.$$

A esto se le llama condición A_p.

Teorema 28. *Sean w un peso y $1 \leq p < \infty$. Son equivalentes:*

1. *Existe $C > 0$ tal que para toda $f \in L^p(w)$ y para toda $\lambda > 0$*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M^* f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx.$$

2. *$w \in A_p$.*

Demostración. La necesidad de que $w \in A_p$ lo hemos probado antes.

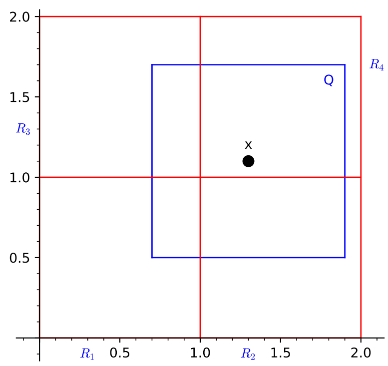
Suponemos que $f \geq 0$.

Sea $p = 1$. Suponemos que $w \in A_1$. Tomando una sucesión de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ como en el teorema de descomposición de Calderón-Zygmund. Como en el teorema 17 se puede ver que $\cup_j Q_j = \{x \in \mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > \lambda\}$.

Sea Q_j^2 el cubo con el mismo centro que Q_j y el doble del lado de Q_j para cada cubo Q_j en $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Queremos ver que $\{x \in \mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > 4^n\lambda\} \subset \cup_j Q_j^2$.

Sea $x \notin \bigcup_j Q_j^2$. Sea Q un cubo cualquiera centrado en x y $k \in \mathbb{Z}$ el único entero tal que $2^{k-1} \leq l(Q) < 2^k$ donde $l(Q)$ es el lado del cubo Q. El cubo Q corta como mucho a 2^n cubos diádicos de lado 2^{k-1}: $R_1, R_2, \ldots, R_m$ con $m \leq 2^n$.



¿ Puede ser $R_i = Q_j$ para algún j? Más en general: sea R un cubo diádico tal que $R_i \subseteq R$; ¿Puede ser $R = Q_j$ para algún j?

No, porque como se ve en la figura $x \in R^2$ y sin embargo $x \notin \bigcup_j Q_j^2$.

Así que, por la construcción de los Q_j, deducimos que $\frac{1}{m(R_i)} \int_{R_i} f \leq \lambda$.

Por tanto

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q f \leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{m(Q)} \int_{Q\cap R_i} f = \sum_{i=1}^m \frac{m(R_i)}{m(Q)} \frac{1}{m(R_i)} \int_{Q\cap R_i} f$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{2^{kn}}{m(Q)} \frac{1}{m(R_i)} \int_{Q\cap R_i} f \leq \sum_{i=1}^m \frac{2^{kn}}{m(Q)} \frac{1}{m(R_i)} \int_{R_i} f.$$

Como $2^{k-1} \leq l(Q)$

$$\sum_{i=1}^m \frac{2^{kn}}{m(Q)} \frac{1}{m(R_i)} \int_{R_i} f \leq \sum_{i=1}^m \frac{2^{kn}}{m(Q)} \lambda \leq 2^n m\lambda \leq 4^n\lambda.$$

Es decir, para todo $x \notin \bigcup_j Q_j^2$ se tiene que $M_\triangle f(x) \leq 4^n\lambda$, de donde se obtiene que $\{x \in \mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > 4^n\lambda\} \subset \cup_j Q_j^2$. Por las desigualdades entre las funciones maximales esto también se cumple para el operador $M^* f$.

Como $m(Q_j^2) = 2^n m(Q_j)$

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M_\triangle f(x) > 4^n\lambda\}} w(x)dx \leq \sum_j \int_{Q_j^2} w(x)dx = \sum_j \frac{m(Q_j^2)}{m(Q_j^2)} \int_{Q_j^2} w(x)dx = \sum_j 2^n \frac{m(Q_j)}{m(Q_j^2)} \int_{Q_j^2} w(x)dx.$$

Usando el apartado 3 del teorema de descomposición de Calderón-Zygmund y las desigualdades entre los operadores maximales de Hardy-Littlewood

$$\sum_j 2^n \frac{m(Q_j)}{m(Q_j^2)} \int_{Q_j^2} w(x)dx \leq \frac{2^n}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} f(y) \left(\frac{1}{m(Q_j^2)} \int_{Q_j^2} w(x)dx \right) dy \leq \frac{2^n}{\lambda} \int_{\cup_j Q_j} f(y) M^* w(y) dy$$

$$\leq \frac{2^n}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)M^*w(y)dy \leq C\frac{2^n}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)w(x)dy$$

y

$$w(\{x\in\mathbb{R}^n : M^*f(x)>\lambda\}) \leq C\frac{2^n}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)w(x)dy.$$

Sea $p>1$ y suponemos que $w\in A_p$. Usando la desigualdad de Hölder y que $w\in A_p$

$$\left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f|\right)^p = \left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f|\,w^{\frac{1}{p}}w^{-\frac{1}{p}}\right)^p$$

$$\leq \left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q |f|^p w\right)\left(\frac{1}{m(Q)}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq \frac{1}{m(Q)}\int_Q |f|^p w\ C\left(\frac{w(Q)}{m(Q)}\right)^{-1}.$$

De aquí se deduce que

$$w(Q) \leq \left(\frac{m(Q)}{f(Q)}\right)^p \int_Q |f|^p w. \tag{4.1}$$

Sea ahora $f\in L^p(w)$. Podemos suponer que $f\in L^1$ ya que si no lo hubieramos razonado con $f_k = f\mathscr{X}_{B(0,k)}$ con $B(0,k)$ la bola de centro 0 y radio $k>0$ de donde obtendriamos constantes independientes de k.

Tomando una sucesión de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ como en el teorema de descomposición de Calderón-Zygmund pero con $4^{-n}\lambda$ en lugar de λ, $\cup_j Q_j = \{x\in\mathbb{R}^n : M^*f(x)>\lambda\}$.

Sea Q_j^3 el cubo con el mismo centro que Q_j y el triple del lado de Q_j para cada cubo Q_j en $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ hay que dilatar tres veces en lugar de dos porque estamos usando M^*.

De manera análoga al caso de $p=1$ tenemos que $\{x\in\mathbb{R}^n : M^*f(x)>\lambda\}\subset \cup_j Q_j^3$.

Usando la función $f=\mathscr{X}_{Q_j}$ en la desigualdad (4.1) y como $Q_j\subset Q_j^3$

$$w(Q_j^3) \leq \left(\frac{m(Q_j^3)}{f(Q_j^3)}\right)^p \int_{Q_j^3}|f|^p w = \left(\frac{m(Q_j^3)}{m(Q_j)}\right)^p \int_{Q_j^3}\mathscr{X}_{Q_j}w = \left(\frac{m(Q_j^3)}{m(Q_j)}\right)^p w(Q_j).$$

Usando lo anterior y la desigualdad (4.1)

$$w(\{x\in\mathbb{R}^n : M^*f(x)>\lambda\}) \leq \sum_j w(Q_j^3) \leq 3^{np}\sum_j w(Q_j) \leq 3^{np}\sum_j \left(\frac{m(Q_j)}{f(Q_j)}\right)^p \int_{Q_j}|f|^p w.$$

Por la construcción de $\{Q_j\}$ $\frac{f(Q_j)}{m(Q_j)} > 4^{-n}\lambda$. Así

$$3^{np}\sum_j\left(\frac{m(Q_j)}{f(Q_j)}\right)^p\int_{Q_j}|f|^p w \leq 3^{np}\sum_j\left(\frac{4^n}{\lambda}\right)^p\int_{Q_j}|f|^p w = 3^{np}\left(\frac{4^n}{\lambda}\right)^p\int_{\cup_j Q_j}|f|^p w \leq 3^{np}\left(\frac{4^n}{\lambda}\right)^p\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p w.$$

□

Observación. *Aunque no lo vamos a ver la acotación (p,p)- fuerte con* $1<p\leq\infty$ *se cumple si y solo si* $w\in A_p$.

Bibliografía

[1] E. AGORA. *Integrales Singulares en el Análisis Armónico*, SEPTEMBER,2007. http://www.maia.ub.edu/~soria/Master-Elona.pdf.

[2] J. DUOANDIKOETXEA ZUAZO. *Análisis de Fourier*. *Universidad Autónoma de Madrid*, *(1995)*.

[3] G. J. FLORES. *Interpolación de operadores en espacios L^p*. https://rdu.unc.edu.ar/bitstream/handle/11086/24/15251.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[4] J. PARCET. *Teoría de Littlewood-Paley*. https://www.icmat.es/miembros/parcet/parcet_ICMAT/Papers_files/Littlewood-Paley.pdf.

[5] E. M. STEIN, Y R. SHAKARCHI. *Real Analysis*. *Princeton University*, *(2005)*.

[6] M. WEI, X. NIE, D. WU, D. YAN. *A note on Hardy-Littlewood maximal operators*. *J. Inequal. Appl.2016*, *paper no.21*, *13 páginas*. https://journalofinequalitiesandapplications.springeropen.com/articles/10.1186/s13660-016-0963-x#Equ2.

[7] Y. WU. *Funciones maximales y Operadores promedio*. *Universidad de Sonora*, *June.2017*. https://lic.mat.uson.mx/tesis/YingyingWu.pdf.