



Universidad
Zaragoza



Departamento de Física Teórica
Área de Física de la Tierra

Trabajo de Fin de Grado

Cálculos energéticos en planetas del Sistema Solar

Autor: Javier Pelegrina Cortés
Director: Profesor Amalio Fernández-Pacheco Pérez
Septiembre de 2021

Índice

1	Introducción	1
2	Breves comentarios sobre los planetas considerados	1
2.1	Presiones y temperaturas atmosféricas	2
3	El tiempo de residencia de la energía para atmósferas planetarias	4
3.1	El concepto de tiempo de residencia y su ampliación a energía	4
3.2	El tiempo de residencia de la energía como tiempo promedio de equilibrio en el Sol	6
3.3	Formas de energía en una atmósfera planetaria	7
3.4	Flujos energéticos. Diagramas de Trenberth.	10
3.5	Cálculo de tiempos de residencia	17
4	Comparación de τ con la constante radiativa τ_R	18
5	Modelo estocástico sencillo de ocupación de una caja	21
6	Conclusión	24
	Referencias	25
7	Apéndices	26
7.1	Comunicación con el Profesor John Harte	26
7.2	Datos atmosféricos utilizados	27

1 Introducción

El estudio de las atmósferas planetarias es de un gran interés para la astronomía y la astrobiología, ya que es fundamental comprenderlas en detalle para poder entender en profundidad cada planeta y para buscar indicios de vida en ellos, que es uno de los grandes objetivos de la exploración espacial.

Estudiar y describir una atmósfera planetaria es una tarea compleja, y hay una enorme cantidad de literatura sobre el tema. Las atmósferas se caracterizan con una gran cantidad de parámetros como son la presión, la temperatura, la densidad u otros más complejos como los flujos de energía, constantes radiativas, tipo de moléculas, composición química y muchos otros.

El objetivo de este trabajo es introducir y calcular una nueva magnitud que caracterice las atmósferas planetarias. Tomando un concepto bien conocido en química y física medioambiental, el tiempo de residencia de una sustancia, se pretende ampliarlo al tiempo de residencia de la energía en una atmósfera planetaria. Para ello necesitaremos hacer un estudio de algunos de los procesos que se dan en cada una de las atmósferas que consideramos.

2 Breves comentarios sobre los planetas considerados

En este trabajo se van a tratar las atmósferas de los planetas Venus, Marte, la Tierra y de uno de los satélites de Saturno, Titán. Por supuesto, nuestra atmósfera es la que más conocemos y cuyos procesos mejor sabemos describir. Para Venus y Marte esta elección en concreto se debe a que sus atmósferas se comportan de una forma similar a la de nuestro planeta. Si estudiamos el resto de planetas del Sistema Solar, vemos que Mercurio tiene una atmósfera extremadamente poco densa (sólo es capaz de producir una presión superficial de 1 nPa) y en los planetas gaseosos la atmósfera no tiene un límite inferior bien definido. En cuanto a los satélites del Sistema Solar, de los pocos que tienen atmósfera, únicamente la de Titán tiene una densidad comparable a la de la Tierra.

Hagamos ahora una breve descripción de estas atmósferas:

Venus

La atmósfera venusiana es muy diferente a la terrestre: formada en su mayor parte por dióxido de carbono, es la más densa del Sistema Solar (origina una presión superficial unas 90 veces mayor que la terrestre). Las nubes en Venus se extienden por toda la atmósfera y están formadas por ácido sulfúrico, lo que dificulta las observaciones de la superficie terrestre. En septiembre de 2020 se anunció la detección de fosfano (PH_3) en la atmósfera en unas cantidades que únicamente podían ser explicadas por la presencia de vida. Investigaciones posteriores apuntan a que se trata de un falso positivo causado por dióxido de azufre [1].

Marte

El 10 de febrero de 2021 amartizó el rover *Perseverance* de la NASA, una versión mejorada de su predecesor *Curiosity*, con el objetivo de investigar la posible presencia de vida en el pasado, analizar muestras y estudiar las condiciones para una posible futura misión tripulada. La atmósfera marciana es en su mayor parte dióxido de carbono y, comparada con la terrestre, muy poco densa; la presión superficial es menos del 1% que la de nuestro planeta. Esto se

debe a la reducida masa de Marte y por tanto a su menor velocidad de escape (5 km/s frente a los 11.2 km/s terrestres), lo que hace que las moléculas que constituyen la atmósfera en las capas más externas puedan escapar cuando son golpeadas por el viento solar o al colisionar unas con otras. En nuestro planeta esto sucede en mucha menor medida ya que está protegido del viento solar por la magnetosfera, característica de la que Marte carece. Venus tampoco tiene una magnetosfera, pero su velocidad de escape es similar a la de la Tierra (10.4 km/s).

Titán

Titán es la mayor luna de Saturno. Su atmósfera (descubierta por el astrónomo español Josep Comas i Solà), formada mayoritariamente por nitrógeno, presenta un gran enigma: su densidad es comparable a la terrestre, con una presión superficial de 1.5 veces la de nuestro planeta. Pero, con una masa planetaria de sólo el 2% de la Tierra, y por tanto una velocidad de escape de en torno a 2.5 m/s, debería perderse gran parte de la atmósfera por escape, y esta debería ser extremadamente menos densa de lo que es. En el resto de satélites de Saturno que tienen atmósferas, éstas son tan tenues que son prácticamente inexistentes. ¿Por qué no sucede esto en Titán?

La respuesta es que la comunidad científica no acaba de alcanzar un consenso. Algunas de las teorías son:

- Titán no tiene una magnetosfera así que su atmósfera debería ser vulnerable a la erosión por viento solar, pero durante casi toda su órbita está dentro del alcance de la magnetosfera de Saturno, que podría protegerlo.
- Una posible explicación para el origen de la atmósfera es que el satélite recibiera impactos de una gran cantidad de meteoritos que contenían amoníaco congelado. Por reacciones fotoquímicas, este amoníaco podría haberse convertido en el nitrógeno que forma la atmósfera. El metano, el segundo gas mayoritario, podría venir de la erupción de criovolcanes (volcanes que expulsan agua, amoníaco o metano).

2.1 Presiones y temperaturas atmosféricas

En este trabajo realizaremos un estudio de las energías de las atmósferas mencionadas y para ello necesitaremos conocer sus perfiles verticales de presión y temperatura. Disponemos de estos datos gracias a la exploración espacial, y con bastante detalle. Los datos utilizados de presión y temperatura de Marte, Venus y Titán han sido extraídos de [2], provenientes de sondas espaciales. Para los datos de la Tierra se ha usado la *US Standard Atmosphere* (Atmósfera Estándar), un modelo muy utilizado para nuestro planeta [3]. Todos ellos pueden consultarse en el apéndice.

Teniendo estos perfiles verticales, merece la pena representarlos gráficamente para ver qué forma toman en cada planeta y qué diferencias hay. En la Fig. 1 se representa la presión en función de la altura. En los planetas que no hay océanos (y por tanto no se puede medir altura sobre el nivel del mar) los astrónomos definen la altura cero como una superficie en concreto por convenio. Los datos experimentales de presión siempre siguen una exponencial decreciente en todas las atmósferas:

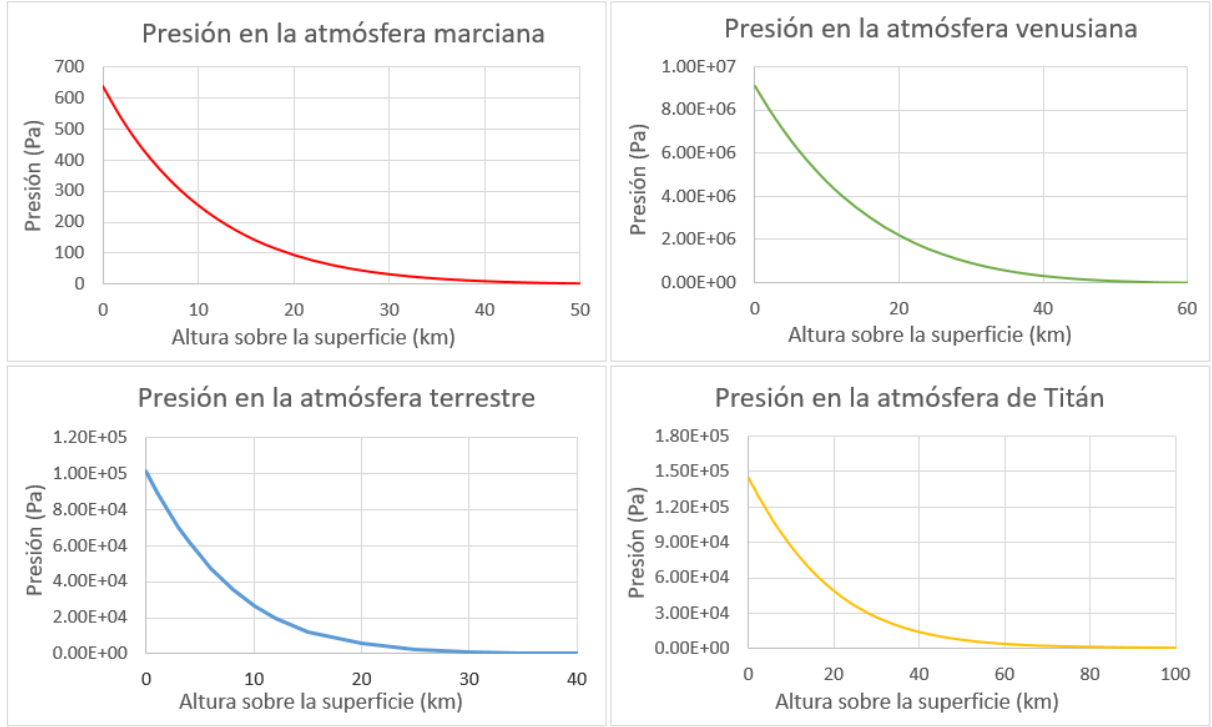


Fig. 1: Representación de presiones atmosféricas con los datos de [2] y [3].

Es fácil explicar el porqué, si consideramos la atmósfera como un conjunto de gases ideales y partiendo de la ecuación hidrostática $dp = -\rho g dz$, que nos indica la disminución de la presión p al aumentar la altura z (ρ es la densidad del gas y g la aceleración de la gravedad). Usando la relación de los gases ideales $pV = mRT \Rightarrow p = \rho RT$, con R la constante del gas y T la temperatura, se llega a la conocida ecuación hipsométrica:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \int_{z_1}^{z_2} -\frac{g}{RT} dz \Rightarrow p_2 = p_1 e^{-g\Delta z/RT}.$$

Donde la presión p_2 es aquella en una capa de la atmósfera que tiene inmediatamente por encima una capa que está a presión p_1 . Esta es una explicación simplificada pero útil a la hora de justificar el comportamiento de la presión. Vemos que siempre va a ser el mismo independientemente del gas que forme la atmósfera, y de ahí el perfil similar de presión para cada planeta.

A continuación se muestra la representación de la temperatura (Fig. 2). Para Marte y Venus la temperatura cae al alejarse de la superficie, ya que ésta es la mayor fuente de calor hacia la atmósfera. En la Tierra sucede lo mismo hasta llegar a la capa de ozono (de 15 a 50 km), donde aumenta la temperatura por absorción de radiación solar en esta molécula (ya que es un absorbente de UV eficaz). Superada la capa de ozono la temperatura vuelve a descender hasta llegar a la termosfera (desde 85 km), donde se absorbe prácticamente la totalidad de rayos X y radiación UV extrema ($\lambda \leq 120$ nm). En el caso de Titán, de nuevo la temperatura disminuye en la troposfera al alejarse de la superficie, pero se incrementa en la estratosfera. Esto se debe a que en toda esta capa hay una gran acumulación de aerosoles formados por hidrocarburos, que originan una niebla muy densa. Esta niebla se extiende cientos de kilómetros y es un buen absorbente de radiación solar, y dificulta además las observaciones de Titán desde nuestro planeta.

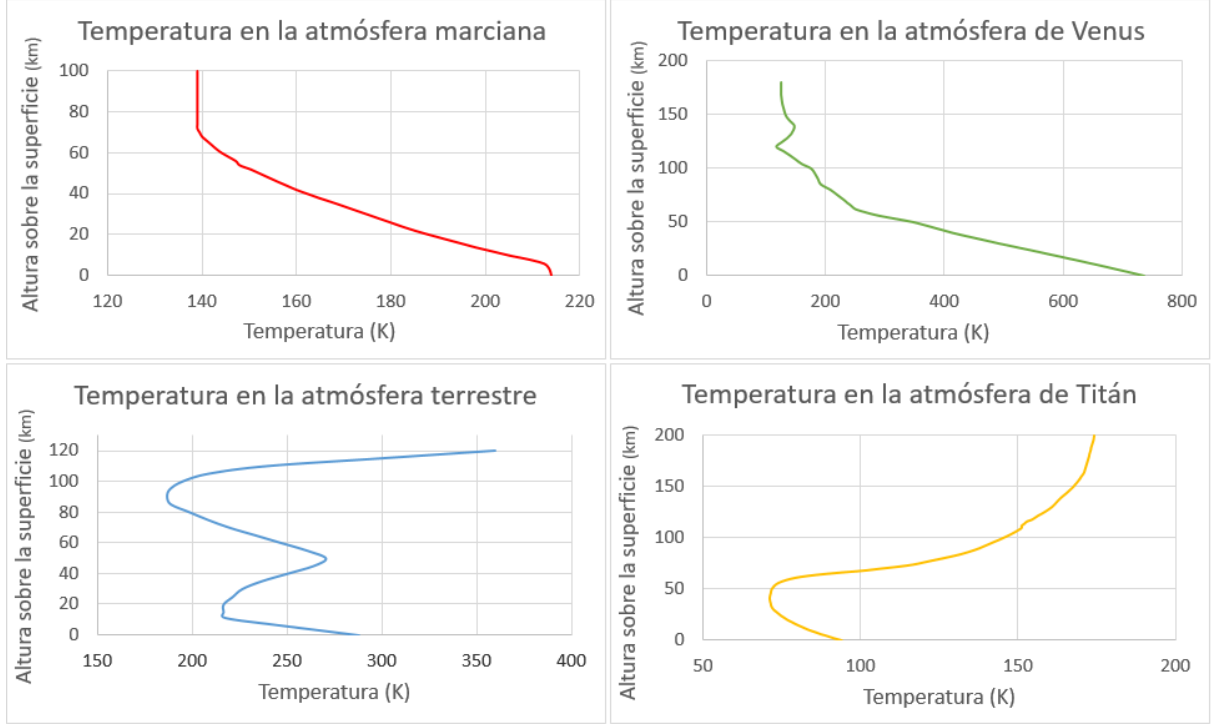


Fig. 2: Representación de temperaturas atmosféricas con los datos de [2] y [3].

3 El tiempo de residencia de la energía para atmósferas planetarias

3.1 El concepto de tiempo de residencia y su ampliación a energía

El objetivo de este trabajo es extender el concepto de tiempo de residencia de una sustancia a la energía de una atmósfera planetaria. Veamos en primer lugar qué es el tiempo de residencia para una sustancia, introduciendo un pequeño formalismo según [4].

Supongamos un sistema aislado que contiene una cierta cantidad M_0 de una sustancia formada por partículas, que entra al sistema con un flujo F_i y sale de él con un flujo F_o . Por tanto, las partículas o unidades que forman la sustancia se van renovando con el tiempo, y cada una de ellas habrá permanecido un tiempo diferente en el sistema. En el caso particular de que el flujo de entrada y el de salida sean iguales ($F_i = F_o$) la cantidad de sustancia no varía en el tiempo y estamos ante una situación estacionaria. En adelante supondremos que el sistema está en esta situación con flujos F_0 . El tiempo que una partícula ha permanecido en el sistema desde que ha entrado en él se denomina *edad* (t).

En primer lugar definimos la función $M(t)$ como la cantidad de sustancia que ha permanecido un tiempo dentro del sistema igual o menor que t .

Definimos también $\psi(t)$ como la función distribución de las edades de todas las partículas dentro del sistema, exigiendo su normalización:

$$\int_0^{\infty} \psi(t) dt = 1.$$

A continuación definimos la función acumulativa $F(t)$ como la cantidad de sustancia de edad menor o igual que t que abandona el sistema por unidad de tiempo. Cuando el sistema ha estado

en equilibrio durante un tiempo suficientemente grande, esta cantidad será precisamente el flujo F_0 :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = F_0.$$

Por último definimos $\varphi(t)$ como la función distribución de las edades de las partículas salientes, y será

$$\varphi(t) = \frac{1}{F_0} \frac{dF(t)}{dt}.$$

En el caso de un sistema en equilibrio, se cumple la siguiente relación:

$$F_0 - F(t) = M_0 \psi(t).$$

Recordemos que M_0 es la cantidad total de sustancia presente. Tomando derivadas a ambos lados de esta relación, sabiendo que F_0 y M_0 son constantes y utilizando la definición de φ :

$$F_0 - F(t) = M_0 \psi(t) \Rightarrow -\frac{dF(t)}{dt} = M_0 \frac{d\psi(t)}{dt} \Rightarrow -F_0 \varphi(t) = M_0 \frac{d\psi(t)}{dt} \Rightarrow \varphi(t) = -\frac{M_0}{F_0} \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

Ahora nos preguntamos ¿cuál es el tiempo promedio T de tránsito de las partículas? Es decir, ¿cuál es la edad promedio que tienen al salir? Esto no es más que la media de la distribución de edades salientes:

$$T = \int_0^{\infty} t \varphi(t) dt.$$

Hagamos este cálculo utilizando la definición de φ obtenida anteriormente.

$$T = \int_0^{\infty} t \varphi(t) dt = -\frac{M_0}{F_0} \int_0^{\infty} t \frac{d\psi(t)}{dt} dt = -\frac{M_0}{F_0} \int_0^{\infty} t d\psi(t).$$

Realizando una integración por partes queda:

$$T = -\frac{M_0}{F_0} \int_0^{\infty} t d\psi(t) = -\frac{M_0}{F_0} t \psi(t) \Big|_0^{\infty} + \frac{M_0}{F_0} \int_0^{\infty} \psi(t) dt.$$

Al aplicar el límite $t = 0$ se anula todo el término, y al aplicar $t = \infty$ tenemos $\psi(\infty) = 0$. Si ψ es la función distribución de edades de todas las partículas dentro del sistema, habiendo flujos de entrada y salida hay cero partículas con edad tan grande. El primer término es por tanto cero, y la integral que nos queda es precisamente la condición de normalización.

$$T = \frac{M_0}{F_0} \int_0^{\infty} \psi(t) dt = \frac{M_0}{F_0}.$$

En definitiva, si tenemos un sistema aislado con un flujo de salida que coincide con el de entrada y por tanto la cantidad de sustancia está en equilibrio estacionario, el tiempo promedio que las partículas pasan en el sistema o tiempo de residencia T es la cantidad total de sustancia en el sistema entre el flujo: $T = M/F$. El tiempo de residencia es un concepto utilizado frecuentemente en química y también en física medioambiental. Algunos ejemplos de su aplicación son el cálculo del tiempo de renovación del agua en el ciclo hidrológico o el cálculo concentración de contaminantes en lagos donde ha habido vertidos, entre otros.

Una vez que hemos definido el tiempo de residencia de una sustancia nuestro objetivo es ampliarlo a la energía de una atmósfera planetaria. Con respecto a la energía una atmósfera

puede considerarse un sistema aislado. El flujo energético de entrada puede tomar varias formas (radiación absorbida, calor...), y el flujo de salida es la radiación de onda larga emitida al espacio o a la superficie. Estos flujos son iguales y las atmósferas están en equilibrio estacionario, ya que si un flujo predominara la temperatura aumentaría o decrecería sistemáticamente y esto no es así (en la Tierra la temperatura aumenta por acción humana, en Titán puede que sí haya una pequeña diferencia entre flujos, como veremos más adelante). Para una atmósfera llamaremos al tiempo de residencia de la energía τ y será el cociente entre la energía total contenida en ella E y el flujo energético F :

$$\tau = \frac{E}{F}.$$

Como veremos más adelante los datos de flujos se expresan por unidad de superficie, de forma que será necesario calcular E por unidad de superficie. El tiempo de residencia de la energía τ nos informaría del tiempo promedio que permanece la energía en cada una de las atmósferas planetarias.

3.2 El tiempo de residencia de la energía como tiempo promedio de equilibrio en el Sol

Comencemos esta sección viendo el concepto de la escala temporal Kelvin-Helmholtz. Esta escala, referida al Sol, se define como

$$\tau_{KH} = \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}L_{\odot}} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ años.} \quad (1)$$

Donde M , R y L son masa, radio y luminosidad solares. τ_{KH} indica el orden de magnitud del tiempo que necesita la energía producida en el núcleo del Sol para llegar a su superficie. En la referencia [5], Stix muestra cómo τ_{KH} es también el tiempo que necesita un fotón producido en el núcleo para llegar a la superficie y que, además, es la escala temporal que el Sol necesita para recuperarse de una perturbación a gran escala.

Utilizando un modelo computacional basado en el Standard Solar Model, Stix muestra cómo tras una gran perturbación, consistente en aumentar en 2% la sección eficaz de la fusión pp , la luminosidad solar vuelve al equilibrio en torno a los 10^7 años, como se puede ver en la Fig. 3.

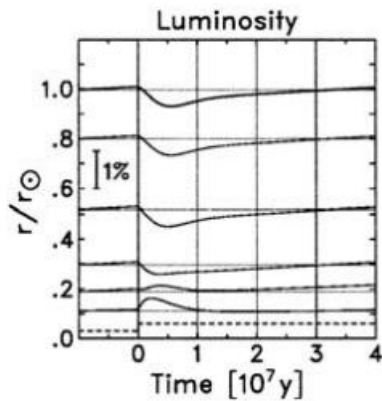


Fig. 3: Luminosidad solar tras la perturbación según [5].

Tras la perturbación (línea punteada), la luminosidad cambia y vuelve a su estado inicial entre una y tres veces la escala KH para cortezas solares de distinto radio ($r/r_{\odot}$). La barra vertical representa una variación del 1% respecto al valor de equilibrio.

Entonces, según lo que acabamos de ver, la escala KH sería el tiempo necesario que el Sol necesita para recuperarse de una perturbación a gran escala. Por perturbación a gran escala entendemos global, que afecte a todo el sistema.

Volviendo a la ecuación (1), notamos que también se cumple que $GM_{\odot}^2/R_{\odot} = |U|$, con U la energía potencial gravitatoria. En el Sol se cumple el teorema del virial $|U| = 2|E|$, con E la energía total [6]. Entonces,

$$\tau_{KH} = \frac{2|E|}{L_{\odot}}.$$

Que no deja de ser la energía dividida por el flujo. Vemos que la forma es similar al tiempo de residencia de la energía en una atmósfera planetaria, y además también podemos considerar el Sol en un estado estacionario a todos los efectos debido al enorme tiempo de vida de su combustible. Por analogía, en este trabajo proponemos que el tiempo de residencia de la energía τ también represente el orden de magnitud del tiempo que necesitaría una atmósfera para recuperarse y volver al equilibrio tras una gran perturbación.

En 2020 el director de este trabajo publicó un artículo detallando el proceso para el cálculo del tiempo de residencia de la energía para la atmósfera de la Tierra en *Nonlinear Processes in Geophysics* [7]. Además, en correspondencia con el Dr. John Harte, profesor de la universidad de Berkeley y reconocido físico medioambiental, éste expresó su apoyo al concepto del tiempo de residencia de la energía (este intercambio puede consultarse en el apéndice). Sabiendo que este tiempo de residencia de la energía τ que en este trabajo queremos introducir y determinar detalladamente está bien fundamentado y respaldado, comencemos a calcularlo para cada planeta.

Para determinar con exactitud τ , necesitamos conocer y estudiar en detalle tanto la energía total atmosférica E como los correspondientes flujos energéticos F . Comencemos con la energía atmosférica.

3.3 Formas de energía en una atmósfera planetaria

Para cualquier atmósfera, consideramos una columna de aire de un metro cuadrado de sección que se extiende desde la superficie planetaria hasta el fin de la atmósfera (este punto es aquel en el que la presión es nula, lo que significa que ya no hay más gases por encima). En esta columna de aire hay cuatro formas principales de energía por unidad de superficie:

- Energía potencial gravitatoria P al estar el gas sometido a la gravedad.
- Energía interna termodinámica del gas U .
- Energía cinética T por movimientos del gas.
- Energía latente L debida a transiciones de fase (para la Tierra, del agua).

Estos cuatro tipos de energía son los que puede haber en la columna de aire y entre los cuales puede haber transferencias. Por ejemplo, un paquete de aire que experimente un aumento de energía interna debido a un incremento de temperatura ascenderá a una capa atmosférica superior más fría, perdiendo el exceso de temperatura y ganando energía potencial gravitatoria. A continuación estudiemos cada uno de los cuatro tipos, empezando por la energía potencial P . Vamos a seguir el desarrollo que hacen los profesores Peixoto y Oort en su texto *Physics of climate* [8], obra de referencia en este campo.

La energía potencial gravitatoria (recordemos que por unidad de superficie, como todas las demás) se define como

$$P = \int_0^{\infty} g\rho z dz,$$

donde g es la aceleración de la gravedad, ρ la densidad del aire y z la altura. Como es de esperar, siendo energía potencial gravitatoria, se integra a la altura. Haciendo uso de la ecuación

hidrostática $dp = -g\rho dz$ se puede escribir

$$P = \int_0^\infty -zdp.$$

Recurriendo a $d(zp) = pdz + zdp \rightarrow -zdp = pdz - d(zp)$ se realiza una integración por partes que resulta en

$$P = \int_0^\infty -zdp = \int_0^\infty pdz - \int_0^\infty d(zp) = \int_0^\infty pdz - 0. \quad (2)$$

La integral a $d(zp)$ se anula ya que en la superficie tenemos $z = 0$ y para z máxima tenemos $p = 0$, en cualquier planeta que consideremos. Hemos conseguido una expresión de P que necesita una integral a la altura y a la presión, que cambia con la altura. Gracias a los perfiles verticales de presión conocemos todos los datos necesarios para calcular P . Sin embargo, desarrollemos más la expresión de P . A continuación suponemos que los gases en el interior de la columna están bien descritos por el modelo del gas ideal y, mediante $p = \rho RT$, llegamos a otra forma de expresar P por unidad de volumen que utilizaremos más adelante:

$$P = \int_0^\infty \rho RT dz = R \int_0^\infty \rho T dz.$$

Donde T es la temperatura y R es la constante del gas en la columna. Como las atmósferas están formadas por una variedad de gases, se utiliza una constante R ponderada con cada gas constituyente, que veremos a continuación. La densidad ρ y la temperatura T tendrán una dependencia con la altura z .

Pasemos a la energía interna de la columna U , que se define mediante la energía interna del gas ideal:

$$U = \int_0^\infty c_v \rho T dz.$$

En esta expresión c_v es el calor específico a volumen constante, que de nuevo tiene en cuenta la presencia de varios gases. Recordemos que densidad y temperatura dependerán de la altura. U y P no son independientes. Si definimos la energía estática S , que es la suma de ambas:

$$S = U + P = c_v \int_0^\infty \rho T dz + R \int_0^\infty \rho T dz = (c_v + R) \int_0^\infty \rho T dz = c_p \int_0^\infty \rho T dz.$$

Donde c_p es el calor específico a presión constante. Antes de continuar recordemos que la cantidad c_p/R depende del gas: $c_p/R = 7/2$ para diatómicos y $c_p/R = 4$ para triatómicos. Conociendo esto, dividamos ahora S por R :

$$\frac{S}{R} = \frac{c_p}{R} \int_0^\infty \rho T dz \implies S = R \left(\frac{c_p}{R} \right) \int_0^\infty \rho T dz = \frac{7}{2}P \text{ o bien } 4P.$$

El valor de S depende entonces del gas considerado. Como ya hemos dicho las atmósferas planetarias están compuestas por una variedad de gases, de forma que el valor c_p/R no es exactamente el teórico. Esto puede consultarse en la Tabla 1.

Tabla 1: Composiciones atmosféricas y constantes según [9].

	Venus	Tierra	Marte	Titán
Gas predominante (%)	CO ₂ (96.5)	N ₂ (78)	CO ₂ (95.3)	N ₂ (94.2)
Segundo gas (%)	N ₂ (3.485)	O ₂ (21)	N ₂ (2.6)	CH ₄ (5.6)
Tercer gas (%)	SO ₂ (0.015)	Ar (0.93)	Ar (1.9)	H ₂ (0.1)
R (Jkg ⁻¹ K ⁻¹)	188.9	287.1	188.9	290.0
c_v (Jkg ⁻¹ K ⁻¹)	661.2	722.3	642.3	754.0
c_p (Jkg ⁻¹ K ⁻¹)	850.1	1004.0	831.2	1044.0
c_p/R	4.5	3.5	4.4	3.6

Los valores reales son próximos a los teóricos, ya que en las atmósferas que consideramos el gas predominante es diatómico o triatómico, con menores cantidades de otros gases que justifican el cambio en c_p/R . Vemos entonces que conociendo P determinamos automáticamente S , y de ahí U . P se calcula mediante una integración numérica según la ecuación (2), usando los datos de presiones atmosféricas que pueden consultarse en el apéndice. Todos estos datos se basan en medidas convencionales para nuestro planeta o en observaciones mediante sondas espaciales en los demás casos. En la Tabla 2 se presentan los valores de P , U y S para cada atmósfera.

Tabla 2: Valores de P , U y S calculados.

	Venus	Tierra	Marte	Titán
P (J/m ²)	$1.24 \cdot 10^{11}$	$7.50 \cdot 10^8$	$6.68 \cdot 10^6$	$2.63 \cdot 10^9$
U (J/m ²)	$4.31 \cdot 10^{11}$	$1.84 \cdot 10^9$	$2.25 \cdot 10^7$	$6.79 \cdot 10^9$
S (J/m ²)	$5.55 \cdot 10^{11}$	$2.59 \cdot 10^9$	$2.91 \cdot 10^7$	$9.42 \cdot 10^9$

En lo referente a incertidumbre, en toda la literatura consultada ha resultado imposible encontrar fuentes que contengan perfiles verticales de presión donde se incluya la incertidumbre de las medidas. Se ha asumido por tanto una desviación de ± 1 en la última cifra significativa de cada dato de presión utilizado. Al calcular la incertidumbre final total resulta ser menor del 1% para cada una de las tres magnitudes en todas las atmósferas. Es por tanto despreciable y además, como veremos más adelante, los flujos energéticos introducen una incertidumbre mayor y dominante.

Analicemos los resultados. Como es de esperar, la energía estática que almacena la atmósfera marciana es la menor, debido a su baja densidad. Para Venus sucede lo opuesto: contiene la mayor energía al ser la atmósfera más densa de las consideradas. Para la Tierra y Titán se tienen los mismos órdenes de magnitud, al ser las atmósferas más similares entre sí. La de Titán tiene densidad y presiones algo mayores, por lo que sus valores energéticos son superiores.

Hasta ahora hemos descrito las dos primeras formas de energía, quedando la energía latente L y cinética T para tener la energía total $E = P + U + L + T$. En el caso de la Tierra sabemos según [8] que $(T + L)/S \sim 0.04$, de forma que podremos decir que en nuestra atmósfera $E \approx S$ sin cometer un error importante.

El proceso sería más simple si esto que sucede en la Tierra sucediera también en el resto de atmósferas y pudiéramos tomar $E \approx S$. Sin embargo, no es tan sencillo hacer esta afirmación. En lo referente a T podemos hacernos una idea aproximada de si es pequeña respecto a S en las demás atmósferas mediante la siguiente relación, también según [8]:

$$\frac{T}{S} \sim \left(\frac{v_v}{v_s} \right)^2.$$

Donde v_v y v_s son la velocidad del viento y la velocidad del sonido, respectivamente. Para poder decir que $T \ll S$ necesitaríamos una velocidad del sonido mucho mayor que la del viento, a lo largo de toda la columna de aire. La velocidad del sonido depende del gas por el que se propaga de la forma

$$v_s = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} RT},$$

Podemos utilizar la mayor velocidad del viento registrada en cada atmósfera para ponernos en el caso más desfavorable, donde T/S sería la mayor posible.

- Para Marte sabemos que en la superficie la sonda *Viking* registró vientos máximos de 26.8 m/s, durante una tormenta de polvo [10]. En la superficie sabemos que $T = 214$ K y por tanto $v_s = 228.7$ m/s, de forma que $T/S \sim 0.013$.
- Según la sonda *Messenger* [11] sabemos que los vientos en Venus alcanzan una velocidad máxima de 143 m/s entre 75 y 90 km de altitud. Si tomamos 75 km tendremos $T = 220$ K y $v_s = 231.2$ m/s, lo que nos da, con vientos de 143 m/s, $T/S \sim 0.4$. En este caso está claro que no se cumple que $T \ll S$.
- Gracias a la misión *Huygens* [12] sabemos que la máxima velocidad del viento en Titán es de 105 m/s a 120 km de altura, y que disminuye al decrecer la altura. A 120 km tenemos $T = 155.3$ K y $v_s = 249.7$ m/s, por lo que $T/S \sim 0.18$. No es lo suficientemente pequeño.

Entonces para Marte podríamos decir que $T \ll S$ con seguridad, pero no en Venus ni Titán.

Por último queda el factor L asociado a cambios de fase de sustancias atmosféricas. En la Tierra recordemos que $(T + L)/S \sim 0.04$, por lo que podemos despreciar L . En el resto de atmósferas no se tiene información suficiente sobre L por lo que no vamos a incluirlo.

En el caso de la atmósfera terrestre podemos tomar $E \approx S$, pero en el resto de casos no tiene por qué ser una buena aproximación. Como vamos a utilizar la energía para el cálculo del tiempo de residencia $\tau = E/F$, en el resto de atmósferas τ será una cota inferior.

3.4 Flujos energéticos. Diagramas de Trenberth.

En esta sección nos encargaremos del denominador de τ : los flujos energéticos.

Estudiemos en primer lugar el flujo de radiación incidente sobre un planeta con el tratamiento de Wells [13]. Llamemos $\mathcal{E}$ al total de radiación saliente del Sol a través de todas las longitudes de onda e imaginemos una esfera de radio r concéntrica. Asumiendo que el flujo de radiación solar es igual en todas direcciones y llamando $Q(r)$ al flujo por unidad de área a una distancia r del centro del Sol, el flujo de radiación total a través de la esfera imaginaria es $4\pi r^2 Q(r)$. Entonces, $\mathcal{E} = 4\pi r^2 Q(r)$, y de ahí $Q(r) = \mathcal{E}/(4\pi r^2)$. Q se denomina *constante solar planetaria*, y vemos que se puede determinar para cualquier planeta a una distancia dada del Sol conociendo la radiación total saliente del mismo $\mathcal{E}$.

Q para la Tierra se ha podido determinar mediante medidas satelitales como $Q = 1360$ W/m², y sabemos que r (distancia entre Tierra y Sol) es $r \approx 150 \cdot 10^9$ m. Recordamos que la distancia real varía en torno a un 3% por la órbita elíptica del planeta, pero es un efecto mínimo que podemos despreciar. Sucede lo mismo para el resto de planetas. Con esto, $\mathcal{E} = 3.85 \cdot 10^{26}$ W. Utilizando como r la distancia media de cada planeta al Sol, tenemos sus constantes solares:

Tabla 3: Constantes solares planetarias calculadas, con r según [14], [15], [16] y [17].

	Venus	Tierra	Marte	Titán
$r (\cdot 10^9 \text{ m})$	108	150	228	1400
$Q (\text{W/m}^2)$	2623	1360	589	15

Usemos ahora Q para calcular la radiación solar incidente en un planeta considerado esférico.

Un planeta intercepta un disco de radiación de área πR^2 , con R el radio planetario. Siendo el área del planeta $4\pi R^2$, la radiación solar incidente por unidad de área es $(Q\pi R^2)/(4\pi R^2) = Q/4$. El último concepto importante es el equilibrio de flujo: el flujo energético entrante (absorbido) en una atmósfera (solar o por reflexión de la superficie) es igual al flujo saliente, ya que todas las atmósferas planetarias están en equilibrio energético. Si esto no fuera cierto se observaría un aumento o una disminución de la temperatura atmosférica con el tiempo.

Los flujos energéticos entrantes y salientes y los procesos que siguen dentro de las atmósferas son bien conocidos y se representan visualmente en los llamados *diagramas de Trenberth* (Fig. 4, 7, 8 y 9). Estos diagramas son útiles para determinar rápidamente los flujos energéticos, las contribuciones de la atmósfera y la superficie y el albedo planetario, entre otros. El albedo α es la fracción de energía solar incidente en un planeta que es reflejada de vuelta al espacio, por cualquier causa (hay reflexión por la atmósfera o por la superficie). Veamos a continuación con detalle estos diagramas extraídos de Read [18], donde se determinan a través de complejos modelos teóricos y numéricos. Nótese que, efectivamente, la radiación incidente es $Q/4$.

La Tierra

El diagrama de flujos dentro de nuestra atmósfera es el siguiente:

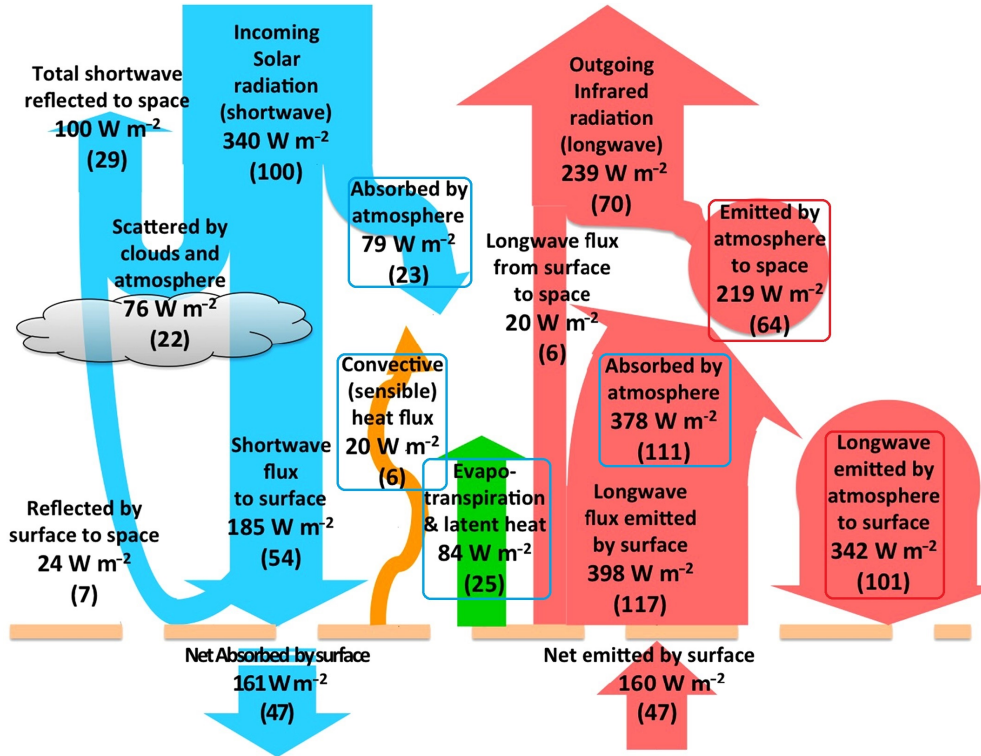


Fig. 4: Flujos energéticos en la Tierra según [18]

Las incertidumbres en estos flujos no vienen dadas en el artículo de Read [18], pero sí en sus fuentes ([19] y [20]). Veamos los flujos energéticos entrantes o salientes de la atmósfera y los totales.

Flujos entrantes, recuadrados en azul en el diagrama:

- Onda corta solar: $79 \pm 6.6 \text{ W/m}^2$.
- Flujo de convección: $20 \pm 5 \text{ W/m}^2$.
- Evaporación, transpiración y calor latente: $84 \pm 5 \text{ W/m}^2$.
- Onda larga desde superficie: $378 \pm 6.4 \text{ W/m}^2$.
- Total: $561 \pm 11.6 \text{ W/m}^2$

Flujos salientes, recuadrados en rojo:

- Onda larga emitida por la atmósfera al espacio: $219 \pm 3 \text{ W/m}^2$.
- Onda larga emitida por la atmósfera a la superficie: $342 \pm 6 \text{ W/m}^2$.
- Total: $561 \pm 6.7 \text{ W/m}^2$.

Como podemos ver, considerando las incertidumbres, podemos decir que el flujo entrante y el saliente coinciden. Recordemos que el aumento de la temperatura atmosférica se debe a la acción humana.

Esta Fig. 4 puede sernos útil para explicar varios fenómenos importantes en física atmosférica que se dan en todos los planetas, aunque no de igual forma. El primero es el efecto invernadero. Nótese cómo de los 398 W/m^2 de onda larga emitidos por la superficie, 20 pueden atravesar la atmósfera y escapar al espacio, pero 378 se absorben en la atmósfera, de los cuales una parte se reemitirá a la superficie y otra al espacio. Esta parte que se reemite a la superficie causa un aumento de la temperatura superficial, y es el llamado efecto invernadero. La cantidad de radiación absorbida depende de las moléculas presentes en la atmósfera y también de la altura (donde habrá menor densidad de moléculas), como podemos ver en la Fig. 5.

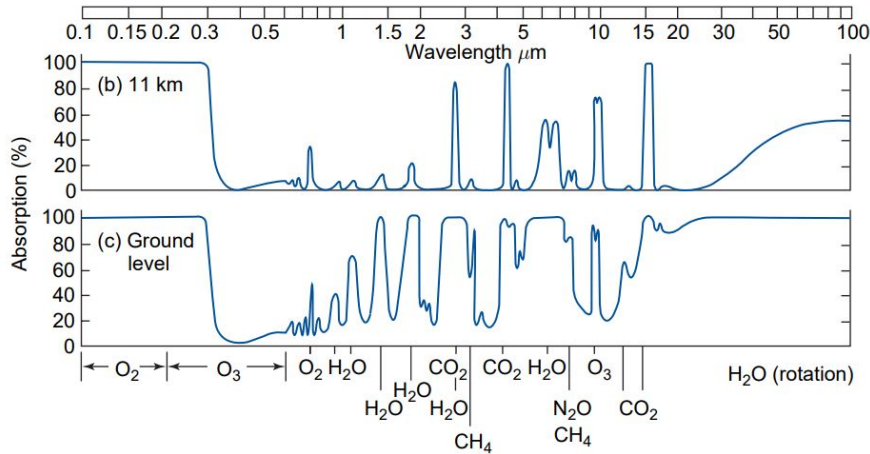


Fig. 5: Bandas de absorción de distintas moléculas en nuestro planeta según la longitud de onda incidente, en la superficie y a 11 km de altura según Wallace y Hobbs. [21].

Como se puede ver las principales moléculas absorbentes de radiación infrarroja y por tanto responsables del efecto invernadero son CO_2 , O_2 , O_3 , H_2O y CH_4 , ambas presentes en mayor o menor medida en nuestra atmósfera. El CO_2 y el CH_4 son aquellos cuya concentración aumenta

debido a la acción humana. Un aumento en la concentración de los gases implica mayor absorción y por tanto un incremento de la temperatura superficial.

La radiación de onda larga desde la superficie que consigue escapar al espacio a través de la atmósfera lo hace mediante la llamada *ventana atmosférica*, que es el conjunto de rangos de longitud de onda donde la absorción es mínima, por ejemplo de 8 a 12 μm en la Fig. 5 (b) (salvo por la banda del ozono). Los 20 W/m^2 que escapan lo hacen a través de todos los rangos de la ventana atmosférica.

Otro factor que afecta enormemente a la energía que recibe un planeta es el albedo, que ya hemos definido como la fracción de la radiación entrante que es reflejada de vuelta al espacio y no se absorbe. El albedo tiene una componente debida a la reflexión de la radiación que llega a la superficie (en el diagrama, *reflected by surface to space*), y otra componente debida a la reflexión por parte de la atmósfera (*scattered by clouds*). El albedo superficial de nuestro planeta depende de la contribución de todos los distintos tipos de superficie que puede reflejar la radiación incidente. A modo ilustrativo veamos los más comunes:

Tabla 4: Albedo de cada superficie según [13].

Superficie	Océano	Bosque	Pradera	Campo	Desierto	Hielo	Nieve
α (%)	2-10	6-18	7-25	10-20	35-45	20-70	70-80

En vistas a esta tabla tiene sentido preguntarse si el albedo varía con las estaciones, y efectivamente es un hecho que sucede: hay una variación en torno al 2% del albedo a lo largo del año, causada por la acumulación de una mayor cantidad de nieve en el hemisferio norte en invierno y por el crecimiento o decrecimiento del hielo antártico en el hemisferio sur.

A esta componente superficial hay que añadir el albedo debido a la atmósfera, que se debe principalmente a reflexión por las nubes, al estar éstas formadas por pequeños cristales de hielo.

Lo último a tener en cuenta es que el albedo depende del ángulo de incidencia: la absorción máxima sucede en ángulos normales y la reflexión máxima en ángulos casi paralelos a la superficie. Esto nos da una dependencia con la elevación del Sol y por tanto con la latitud, como podemos ver en la Fig. 6.

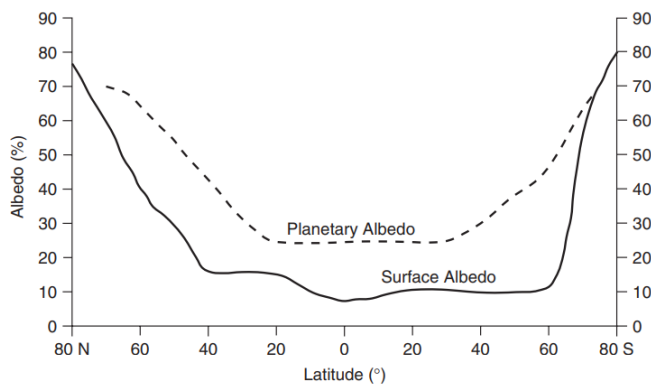


Fig. 6: Albedo y latitud según [13].

Todos estos efectos se combinan para dar el albedo medio final $\alpha \approx 29\%$. Hemos visto que los mayores responsables del flujo entrante y saliente en una atmósfera son los gases de efecto invernadero y el albedo. Veamos cómo son en los demás planetas.

Notemos primero el rápido crecimiento del albedo superficial hacia las regiones polares. Como estas regiones ocupan menos del 8% de la superficie, aunque su albedo es grande por la presencia de nieve, su contribución no lo es tanto. Otra característica es que el albedo superficial no tiene la misma distribución en ambos hemisferios, pero el albedo total sí. Esto nos indica que la atmósfera es el componente fundamental del albedo, como hemos visto en el diagrama anterior.

Venus

El diagrama de flujos en Venus es el siguiente:

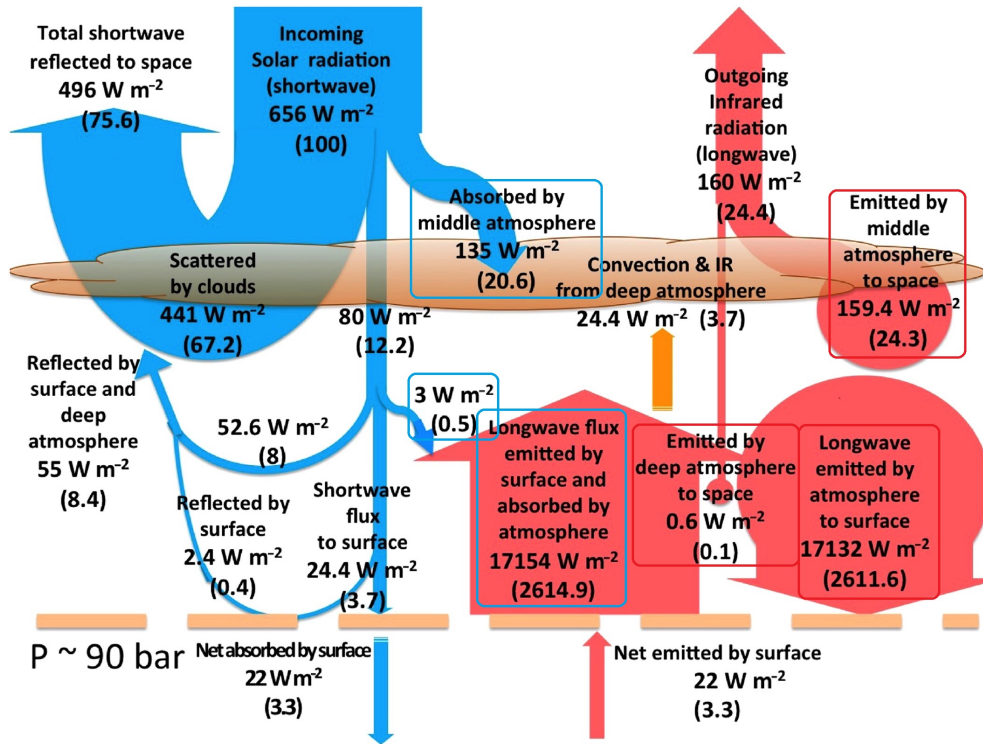


Fig. 7: Flujos energéticos en Venus según Read [18].

En este caso, sí que se menciona la incertidumbre de los flujos en la fuente [18]: "los flujos energéticos coinciden con las observaciones disponibles en torno a un $\pm 10\%$ ". Vamos a considerar entonces una incertidumbre del 10% en cada flujo.

Flujos entrantes, recuadrados en azul en el diagrama:

- Onda corta absorbida por la atmósfera media: $135 \pm 13.5 \text{ W/m}^2$.
- Onda corta absorbido por la atmósfera baja: $3 \pm 0.3 \text{ W/m}^2$.
- Onda larga desde la superficie absorbida por toda la atmósfera: $17154 \pm 1715.4 \text{ W/m}^2$.
- Total: $17292 \pm 1715.5 \text{ W/m}^2$.

Flujos salientes, recuadrados en rojo:

- Onda larga emitida por la atmósfera media al espacio: $159.4 \pm 15.9 \text{ W/m}^2$.
- Onda larga emitida por la atmósfera profunda al espacio: $0.6 \pm 0.06 \text{ W/m}^2$.
- Onda larga emitida por la atmósfera hacia la superficie: $17132 \pm 1713.2 \text{ W/m}^2$.
- Total: $17292 \pm 1713.3 \text{ W/m}^2$.

De nuevo los totales de entrada y de salida coinciden considerando la incertidumbre y la atmósfera venusiana está en equilibrio energético.

Nótese la gran proporción de radiación solar entrante que es reflejada por la atmósfera (496 de 656 W/m^2). En Venus, debido a flujos de convección desde la superficie, hay una gran cantidad de nubes muy densas formadas por gotas de ácido sulfúrico. El ácido sulfúrico refleja gran parte de la radiación incidente, por lo que la contribución atmosférica al albedo domina sobre la

superficial. El albedo de Venus es el mayor de todos los planetas del Sistema Solar ($\alpha \approx 76\%$), y de ahí que el planeta refleje tanta luz y se pueda distinguir de las estrellas fácilmente en el cielo nocturno.

Otra característica de Venus es su marcado efecto invernadero, mucho más pronunciado que en la Tierra. En Venus apenas es apreciable el efecto de la ventana atmosférica ya que su atmósfera se compone en un 96.5% de CO_2 , que como hemos visto es un potente gas de efecto invernadero.

Marte

El diagrama de Trenberth de Marte es el siguiente:

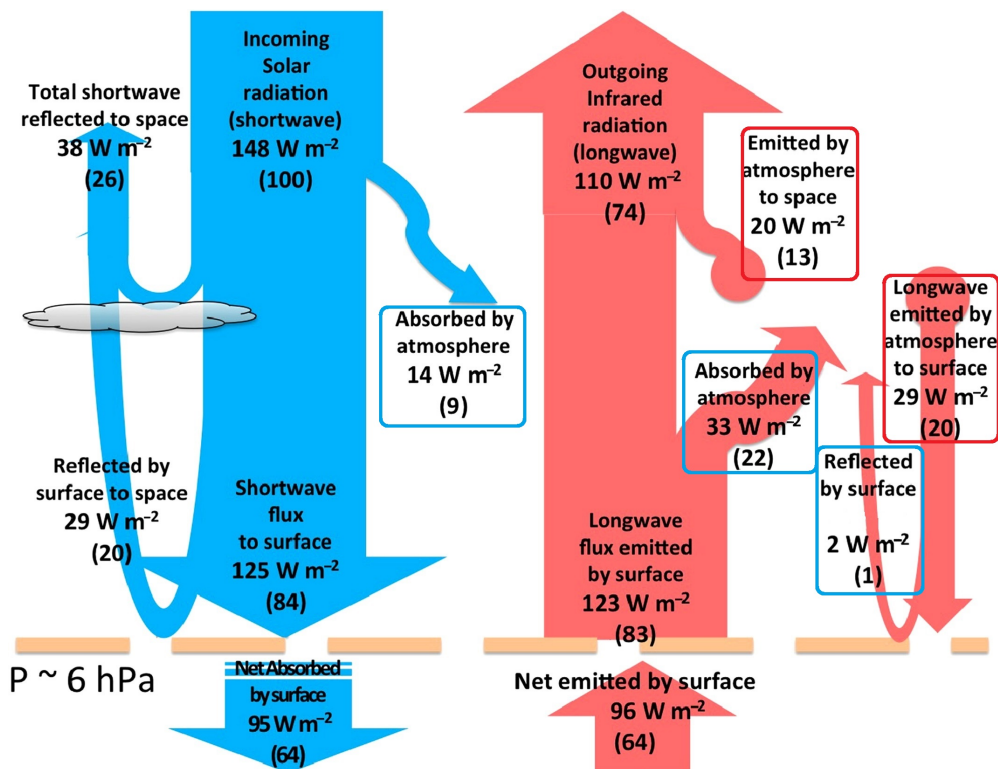


Fig. 8: Flujos energéticos en Marte según Read [18].

Para determinar estos flujos Read [18] utiliza un modelo "con una incertidumbre de en torno al 6-12%". Siendo conservadores, supondremos una incertidumbre del 12% en cada flujo.

Flujos entrantes:

- Onda corta desde el Sol absorbida por la atmósfera: $14 \pm 1.68 \text{ W/m}^2$.
- Onda larga desde la superficie absorbida por la atmósfera: $33 \pm 3.96 \text{ W/m}^2$.
- Onda larga reflejada por la superficie y absorbida en la atmósfera: $2 \pm 0.24 \text{ W/m}^2$.
- Total: $49 \pm 4.31 \text{ W/m}^2$.

Flujos salientes:

- Onda larga desde la atmósfera al espacio: $20 \pm 2.4 \text{ W/m}^2$.
- Onda larga desde la atmósfera a la superficie: $29 \pm 3.48 \text{ W/m}^2$.
- Total: $49 \pm 4.23 \text{ W/m}^2$.

Y de nuevo el flujo entrante y saliente son compatibles.

Podemos ver cómo en el caso de Marte la mayor contribución al albedo proviene de la superficie, ya que la atmósfera es muy poco densa y tiene una menor concentración de moléculas que puede reflejar la radiación incidente. En lo referente al albedo superficial, puede ir desde el 10% en zonas con alta presencia de rocas basálticas volcánicas (más oscuras) al 60% en zonas cubiertas de polvo de óxido férrico (más rojizo y claro), según datos de la misión *Mars Orbiter* [22].

En lo referente al efecto invernadero, vemos que la mayoría de la radiación emitida desde la superficie puede escapar (110 de 123 W/m^2). Pese a que la atmósfera de Marte es predominantemente de CO_2 , como en Venus, no sucede el efecto invernadero tan marcado que hay en Venus ya que la densidad atmosférica es mucho menor en Marte (por ejemplo, en la superficie es unas 4000 veces menor).

Titán

La distancia entre Titán y el Sol es casi 10 veces mayor que entre la Tierra y el Sol, y esto se pone de manifiesto en el reducido flujo solar entrante de 3.7 W/m^2 . Aún así esta pequeña cantidad de energía es capaz de originar movimientos energéticos apreciables dentro de la atmósfera e incluso un ciclo hidrológico basado en metano líquido y gaseoso, que lleva a la formación de nubes de metano, indicando la presencia de flujos de convección desde la superficie.

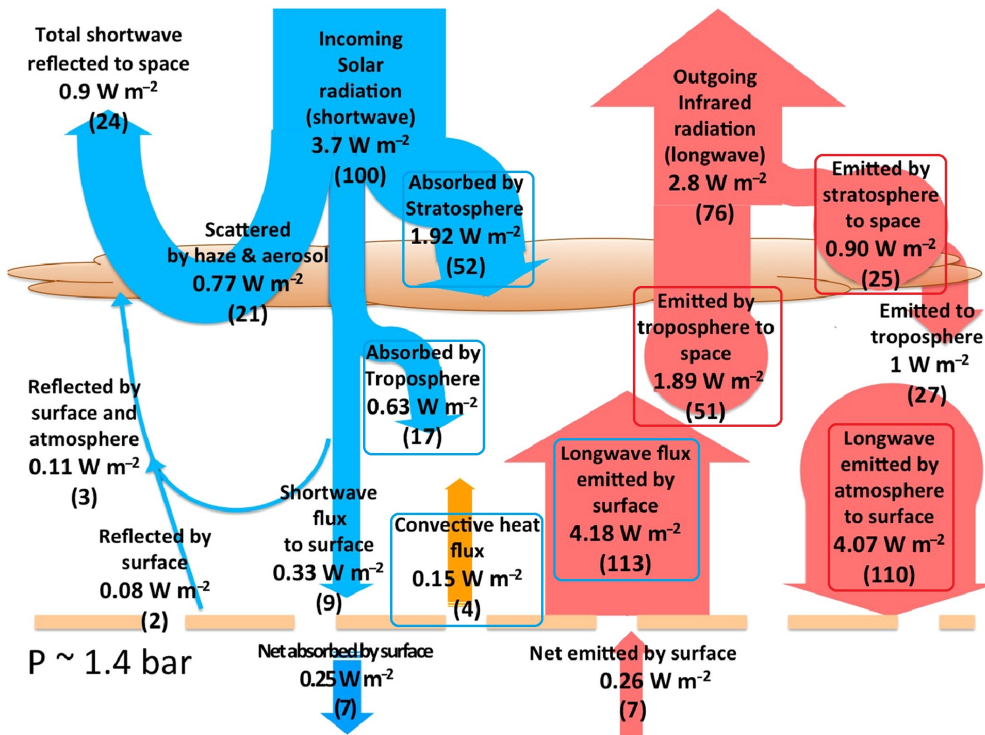


Fig. 9: Flujos energéticos en Titán según Read [18]. Notar niebla estratosférica (*haze*).

En este caso ni Read [18] ni sus fuentes indican ningún valor de incertidumbre. Siendo conservadores, vamos a suponer que es del 12%, el mayor porcentaje de incertidumbre de los que hemos considerado en los demás casos.

Flujos entrando a la atmósfera:

- Onda corta desde el Sol absorbida por la estratosfera: $1.92 \pm 0.23 W/m^2$.
- Onda corta desde el Sol absorbida por la troposfera: $0.63 \pm 0.08 W/m^2$.
- Flujo de convección: $0.15 \pm 0.02 W/m^2$.
- Onda larga emitida por la superficie: $4.18 \pm 0.50 W/m^2$.
- Total: $6.88 \pm 0.56 W/m^2$.

Flujos salientes:

- Onda larga emitida por la estratosfera al espacio: $0.9 \pm 0.11 W/m^2$.
- Onda larga emitida por la troposfera al espacio: $1.89 \pm 0.23 W/m^2$.
- Onda larga emitida por la atmósfera a la superficie: $4.07 \pm 0.49 W/m^2$.
- Total: $6.86 \pm 0.55 W/m^2$.

En este caso vemos cómo Titán podría no estar en equilibrio, y este es un hecho conocido que se menciona en [18]. De todas formas, la posible diferencia entre el flujo de entrada y el de salida es casi inapreciable. Ésta diferencia podría causar un calentamiento lento de la atmósfera. La mayor absorción sucede en la estratosfera, que, como ya hemos comentado, está cubierta por una capa densa de niebla, formada por hidrocarburos. Esto hace que en Titán la troposfera y la estratosfera estén bien diferenciadas, y se estudian por separado como podemos ver en el diagrama. En Titán también hay un ciclo hidrológico análogo al de la Tierra, pero basado en el metano. Es interesante cómo en Titán se dan fenómenos atmosféricos complejos, pero con una cantidad de energía entrante mínima.

3.5 Cálculo de tiempos de residencia

Ahora que ya conocemos la energía presente en una atmósfera y los flujos por los que se renueva (ambas cantidades por unidad de área), podemos calcular el tiempo de residencia de la energía como $\tau = E/F$. Hemos visto que F_i y F_o tienen distintas incertidumbres por lo que no son exactamente iguales. Debido a esto se hace una media pesada de las incertidumbres: $\sigma_F = (\sigma_{F_i}^{-2} + \sigma_{F_o}^{-2})^{-1/2}$. Para Titán haremos el promedio de los dos flujos. De esta forma ya tenemos en todos los planetas un único flujo con su incertidumbre y calculamos $\tau = E/F$. Los resultados se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5: Resultados de tiempo de residencia.

	Venus	Tierra	Marte	Titán
E (J/m^2)	$5.55 \cdot 10^{11}$	$2.59 \cdot 10^9$	$2.91 \cdot 10^7$	$9.42 \cdot 10^9$
F (W/m^2)	17292 ± 1212.26	561 ± 5.8	49 ± 3.0	6.87 ± 0.39
τ (d)	371.5 ± 26.0	53.4 ± 0.6	6.9 ± 0.4	15870.2 ± 903.8

Recordemos que en el caso de la Tierra hemos aproximado la energía como la suma de la contribución potencial e interna ya que sabemos con seguridad que las contribuciones cinética y latente son mínimas. En los demás planetas no podemos asegurar esto, de forma que al hacer la aproximación $E \approx S = P + U$ el resultado τ es una cota inferior.

El sentido físico de τ es el tiempo promedio que una unidad de energía permanece en la atmósfera, desde que entra en ella hasta que se expulsa por radiación. En este trabajo también queremos intentar probar si τ es además una escala temporal del orden del tiempo que necesita

una atmósfera para volver al equilibrio tras una perturbación global, mediante la renovación de energía a través del flujo, lo cual veremos más adelante.

Como era de esperar, a mayor energía en la atmósfera y menor flujo energético, mayor será el tiempo que la energía permanece en ella.

4 Comparación de τ con la constante radiativa τ_R

El tiempo de residencia de la energía es un parámetro que se aplica a energías y flujos a escala global, por lo que no se puede aplicar cuando, por ejemplo, en un punto determinado de la atmósfera la temperatura aumenta o disminuye ligeramente por cualquier motivo. En ese caso se utiliza la constante radiativa τ_R . Para estudiarla necesitamos repasar primero el conocido concepto de temperatura efectiva del cuerpo negro de un planeta T_e .

Sabemos que la temperatura atmosférica se mantiene constante (salvo acción humana en nuestro planeta). Esto se deduce de que el ritmo con el que la energía llega a un planeta es el mismo con el que sale de él, como hemos comprobado. La energía entrante toma la forma de radiación solar infrarroja de onda corta y calienta la atmósfera, y, por contacto con ella, la superficie. La energía saliente es infrarroja de onda larga emitida hacia el espacio exterior. Un planeta es por tanto un cuerpo emisor de radiación de onda larga.

Si consideramos un planeta como un cuerpo negro a temperatura T , por la ley de Stefan la emisión de radiación electromagnética total hacia el espacio a lo largo de todas las longitudes de onda es $E = \sigma T^4$, con σ la constante de Stefan-Boltzmann. Como un planeta está en equilibrio energético, hay una temperatura de equilibrio T_e (llamada temperatura efectiva del cuerpo negro) para la que la cantidad de radiación emitida será la misma que la recibida. Siendo $Q/4$ el flujo energético solar entrante y α el albedo tendremos una ecuación para el equilibrio

$$\frac{Q}{4}(1 - \alpha) = \sigma T_e^4.$$

Con esta ecuación sabemos qué temperatura debería tener un planeta para estar en equilibrio respecto a la energía entrante y saliente.

Por ejemplo, sabiendo que en la Tierra $Q/4 = 340 \text{ W/m}^2$ y $\alpha = 0.3$, se tiene $T_e = 255 \text{ K}$. Cabe preguntarse por qué esta temperatura no se corresponde con la temperatura media en la superficie de 288 K . Esto se debe a que la mayoría de la radiación saliente al espacio es emitida desde la atmósfera y no desde la superficie (recordemos la Fig. 4), y los 255 K se corresponderán con la temperatura en una capa de la atmósfera determinada. Si usamos la ley de Wien para calcular la longitud de onda de máxima radiación, $\lambda_{max}T = 2897 \mu\text{mK}$, con la T_e obtenida de 255 K se tiene que esta longitud de onda es de unos $11 \mu\text{m}$, por lo que la emisión de radiación para T_e sucede en torno a la mitad del rango infrarrojo ($1 \text{ mm} - 700 \text{ nm}$). En esta zona del espectro el agua y el dióxido de carbono son buenos absorbentes y emisores de radiación, por lo que una atmósfera con nubes (formadas en su mayoría por agua) como es la nuestra tiene una buena habilidad para absorber y reemitir radiación infrarroja. Esta habilidad se traduce en una reemisión de radiación a la superficie terrestre y por tanto un aumento de la temperatura de la misma. Si la atmósfera fuera transparente a la radiación, la temperatura superficial terrestre estaría más cerca de T_e .

Calculando la temperatura efectiva para las demás atmósferas tenemos:

Tabla 6: Temperaturas efectivas y superficiales.

	Venus	Tierra	Marte	Titán
$T_e (K)$	230	255	210	84
$T_s (K)$	760	288	214	94

En primer lugar comparemos las temperaturas efectivas entre planetas. Venus recibe el mayor flujo solar y podríamos pensar que esto se debe traducir en la mayor T_e . Sin embargo, como hemos visto, la superficie suele estar cubierta por nubes muy densas de ácido sulfúrico, que reflejan en torno al 76% de la radiación solar, y presenta el mayor albedo del Sistema Solar. De esta forma, pese a su proximidad al Sol, Venus tiene una temperatura efectiva menor que la Tierra. La de Marte también es algo menor, ya que recibe algo menos de la mitad de radiación solar que la Tierra. Titán está a la mayor distancia del Sol, y en comparación recibe una energía mucho menor y por tanto su temperatura efectiva es la menor de todas.

Podemos comparar también las temperaturas efectivas y las superficiales. La densa atmósfera de Venus reemite una enorme cantidad de radiación a la superficie, por lo que la ésta presenta la mayor temperatura. La masa de la atmósfera marciana es unas 200 veces menor que la terrestre por lo que, aunque en Marte hay una gran presencia de CO_2 (que como hemos dicho reemite radiación a la superficie), solamente se produce un incremento en la superficie de unos 10 K. La atmósfera terrestre también contiene gases de efecto invernadero y con una densidad apreciable, por lo que la temperatura superficial es unos 30 K mayor que la efectiva. Utilizaremos estos datos de T_e a continuación.

En una atmósfera pueden darse perturbaciones térmicas a menor escala en forma de una pequeña desviación de la temperatura de equilibrio en un punto determinado de la atmósfera. Para este tipo de perturbaciones la zona afectada vuelve al equilibrio de forma radiativa (incrementando la radiación en el equilibrio para aumentos de temperatura y disminuyéndola para decrecimientos). Veámoslo a continuación, siguiendo el tratamiento de Wells [13], donde se aplica a perturbaciones del orden del Kelvin.

Supongamos que se libera instantáneamente una cierta cantidad de energía en la superficie y a causa de esto la temperatura atmosférica aumenta una cantidad ΔT . La radiación que se emitiría al espacio pasaría a ser $\sigma(T_e + \Delta T)^4$, por lo que se rompería el equilibrio radiativo previo al emitir más radiación que la entrante. Esto supondría que la atmósfera se enfriaría, y el mismo razonamiento para el caso de un cambio ΔT negativo nos daría un calentamiento.

Si consideramos una atmósfera con masa por unidad de área M con un calor específico a presión constante c_p , su inercia térmica será Mc_p . Esta magnitud nos indica cómo de rápido la atmósfera volvería a su situación inicial. La tasa de cambio de la temperatura atmosférica tras la perturbación dT/dt se podrá expresar como

$$Mc_p \frac{dT}{dt} = \frac{Q}{4}(1 - \alpha) - \sigma(T_e + \Delta T)^4,$$

esto es, proporcional a la diferencia entre la radiación entrante y la emitida. Sabemos que podemos reescribir el primer sumando, y además extraer un factor común T_e :

$$Mc_p \frac{dT}{dt} = \sigma T_e^4 - \sigma(T_e + \Delta T)^4 = \sigma T_e^4 - \sigma T_e^4 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_e}\right)^4.$$

Como hemos supuesto una perturbación pequeña será $\Delta T/T_e \ll 1$, por lo que podemos

hacer un desarrollo en serie de Taylor del paréntesis, tomando sólo los dos primeros términos:

$$Mc_p \frac{dT}{dt} \approx \sigma T_e^4 - \sigma T_e^4 \left(1 + 4 \frac{\Delta T}{T_e} \right) = -4\sigma T_e^3 \Delta T.$$

La temperatura en un instante de tiempo dado será $T = T_e + \Delta T$, y al no depender T_e del tiempo tenemos que $dT/dt = d\Delta T/dt$. Entonces llegamos a

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{4\sigma T_e^3}{Mc_p} \Delta T.$$

La solución de esta ecuación diferencial es sencilla:

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 e^{-\frac{4\sigma T_e^3}{Mc_p} t} = \Delta T_0 e^{-t/\tau_r}.$$

Donde hemos definido la constante de relajación radiativa o tiempo de residencia radiativo $\tau_r = (Mc_p)/(4\sigma T_e^3)$. La masa por unidad de área M puede expresarse como $M = p/g$, siendo p la presión atmosférica que hay en el punto donde sucede la pequeña perturbación y g la aceleración de la gravedad en la superficie. De esta forma nos queda τ_r en función de parámetros constantes (σ), de otros que dependen únicamente del planeta (c_p, T_e, g) o que dependen del punto en cuestión (p).

$$\tau_r = \frac{c_p p}{4\sigma T_e^3 g}.$$

Entonces, dado un punto determinado de la atmósfera donde se disequilibra la temperatura, τ_R nos informa del orden de tiempo necesario para volver al equilibrio de forma radiativa. Veamos cuánto vale en la superficie de cada planeta:

Tabla 7: τ_R en la superficie de cada planeta.

	T_e (K)	c_p (Jkg ⁻¹ K ⁻¹)	p (Pa)	g (ms ⁻²)	τ_R (d)
Venus	230	850.1	9119250	8.9	3100
Tierra	255	1004	101330	9.8	32
Marte	210	831.2	636	3.7	0.72
Titán	84	1044	144000	1.4	9600

A alturas cercanas a la superficie (troposfera baja), la presión es tan grande que los tiempos de vuelta al equilibrio mediante el mecanismo de radiación son extremadamente largos, por lo que es un mecanismo ineficiente. A alturas tan bajas, para volver al equilibrio, las atmósferas lo hacen de forma más eficiente mediante convección. Tiene sentido preguntarse por τ_R en capas de mayor altura, donde la radiación es más eficiente. Sin embargo, tampoco tiene sentido hablar de τ_R a alturas demasiado grandes, donde no puede darse el mecanismo de radiación por la bajísima densidad del aire (recordemos que decrece exponencialmente con la altura). Según Pierrehumbert [23] la altura donde se da la máxima emisión de radiación al espacio se localiza mediante

$$p_r = p_s \left(\frac{T_e}{T_s} \right)^{c_p/R}.$$

Donde p_r es la presión de esta altura de emisión máxima y p_s y T_s son la temperatura y presión superficiales. Calculando τ_R con los valores de p_r resulta

Tabla 8: τ_R en la altura de mayor radiación.

	P_s (Pa)	T_s (K)	p_r (Pa)	z a p_r (km)	τ_R (d)
Venus	9119250	760	63830	53	22
Tierra	101330	288	66208	3.5	21
Marte	636	214	~ 636	0	0.72
Titán	144000	94	96052	8	6385.7

Debido a la mínima diferencia entre la temperatura efectiva y superficial de Marte la altura más eficiente de cara a la radiación sigue siendo la inmediatamente superficial. En el resto de atmósferas vemos una disminución apreciable de la constante radiativa, lo que significa que la radiación es más eficiente y se vuelve al equilibrio tras una pequeña perturbación más rápido.

Podemos hacer una comparación de la constante radiativa calculada de esta manera con el tiempo de residencia de la energía τ . Recordemos sus valores:

Tabla 9: Tiempo de residencia de la energía τ .

	Venus	Tierra	Marte	Titán
τ (d)	371.5 ± 26.0	53.4 ± 0.6	6.9 ± 0.4	15870.2

En todos los casos τ es mayor que τ_R . Esto tiene sentido, ya que recordemos que τ nos da una idea de la permanencia y renovación de energía en una atmósfera de forma global, y no localizada como es τ_R . Nótese también como τ_R depende del punto donde se calcula mediante la presión, y es aplicable únicamente en zonas concretas de la atmósfera. Sin embargo, τ se calcula con energías y flujos globales y no depende en absoluto del punto donde se calcula. τ depende exclusivamente del planeta y su atmósfera.

5 Modelo estocástico sencillo de ocupación de una caja

Al introducir el concepto de tiempo de residencia de la energía τ , por analogía con un desarrollo de Stix [5] para el Sol, sugerimos que τ podría indicar también la escala temporal que una atmósfera necesita para volver al equilibrio tras una perturbación a escala global. Comprobar esto empíricamente es difícil, ya que por perturbación a escala global nos referimos, por ejemplo, a un incremento o decremento súbito y apreciable del flujo energético solar que un planeta recibe, o a un cambio repentino en la atmósfera que modifique sensiblemente su capacidad para absorber, reflejar o reemitir ese flujo. En nuestro planeta tal cosa no ha sucedido recientemente, ni tampoco, que se sepa, en Marte, Venus o Titán.

A continuación queremos comprobar si dado un sistema simple aislado, que contiene una sustancia formada por partículas discretas con flujos de entrada y salida que se comportan análogamente a como lo haría una atmósfera, tras una perturbación necesita un tiempo del orden del tiempo de residencia para volver al equilibrio.

Para ello diseñamos un modelo estocástico sencillo consistente en una caja que contiene en el equilibrio N_0 partículas, y en cada unidad de tiempo entran y salen partículas. Definimos una cantidad F de forma que en cada unidad de tiempo siempre entran en la caja F partículas, y salen una cantidad de forma que se intente mantener el equilibrio (como haría una atmósfera): si en un momento dado en la caja hay N partículas, con probabilidad $N^x/(N^x + N_0^x)$ saldrán F .

El parámetro x es un número positivo que nos permite ajustar el modelo y, tras probar varios valores, llegamos a que $x = 10$ reproduce bien los resultados esperados.

- Si $N > N_0$, $N^x/(N^x + N_0^x) > 1/2$: favorece la salida de partículas para volver al equilibrio.
- Si $N < N_0$, $N^x/(N^x + N_0^x) < 1/2$: favorece la salida de partículas.

La evolución temporal del número de partículas dentro de la caja es una oscilación en torno al valor de equilibrio N_0 , cuando la simulación parte ya con la caja ocupada por N_0 partículas:

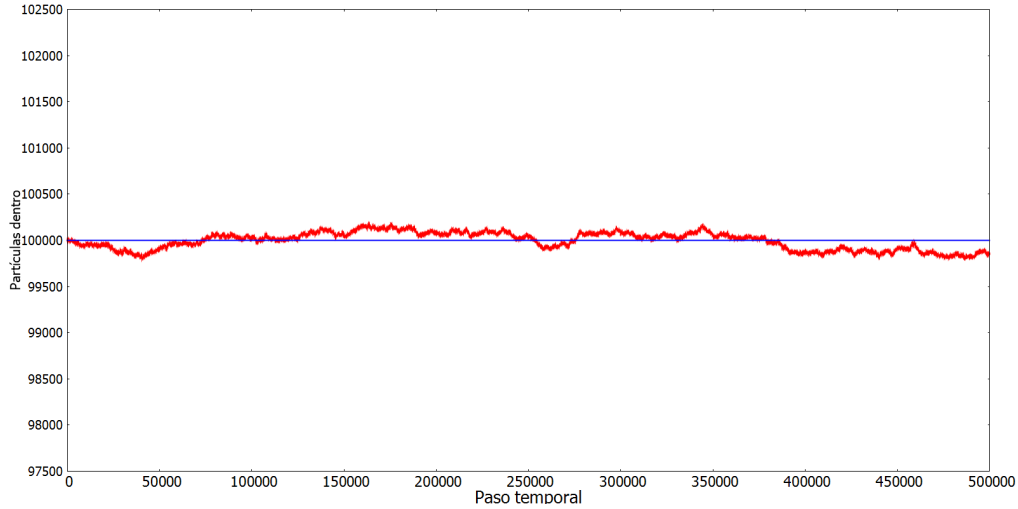


Fig. 10: Simulación promedio del equilibrio en torno a $N_0 = 10^5$, iniciando con $N = N_0$ y $F = 10$, para $x = 10$.

En las atmósferas estudiadas la razón energía/flujo va desde 10^5 a 10^6 . Nuestras simulaciones se han hecho con $N_0 = 10^5$ partículas y $F = 1$ partícula por paso temporal, de forma que $N_0/F = 10^5$, intentando acercarnos a la razón de las atmósferas reales. x controla la amplitud de esta oscilación: al aumentar x la amplitud disminuye y hay menor desviación del equilibrio.

Vemos otra prueba de cómo el modelo reproduce correctamente la situación de equilibrio haciendo el histograma de ocupación, es decir, medir con qué frecuencia hay en la caja un cierto número de partículas:

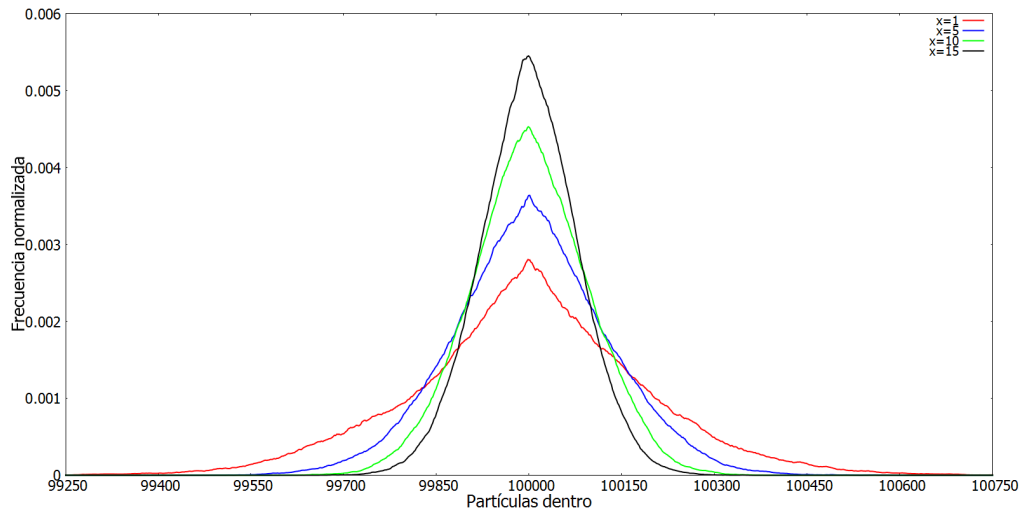


Fig. 11: Histograma de ocupación, tras promediar un gran número de simulaciones en equilibrio con los parámetros anteriores y x variable.

Se comprueba como efectivamente la media de los histogramas está en N_0 y se favorece el equilibrio, y cómo se estrechan al aumentar x .

Viendo cómo este simple modelo reproduce bien un sistema aislado que tiende a conservar el equilibrio, podemos poner a prueba la hipótesis del tiempo de residencia como orden de tiempo para volver al equilibrio tras una perturbación sustancial. Vamos a hacer lo análogo al proceso de Stix [5]: modificar el flujo. Con parámetros $N_0 = 10^5$, $F = 10$ y por tanto $\tau = 10^4$, tomamos un sistema que lleva un tiempo en equilibrio y en un instante aumentamos bruscamente el flujo a $F = 11$, lo cual es un incremento del 10%, cantidad similar a la perturbación de Stix. Hacemos también la misma simulación disminuyendo a $F = 9$:

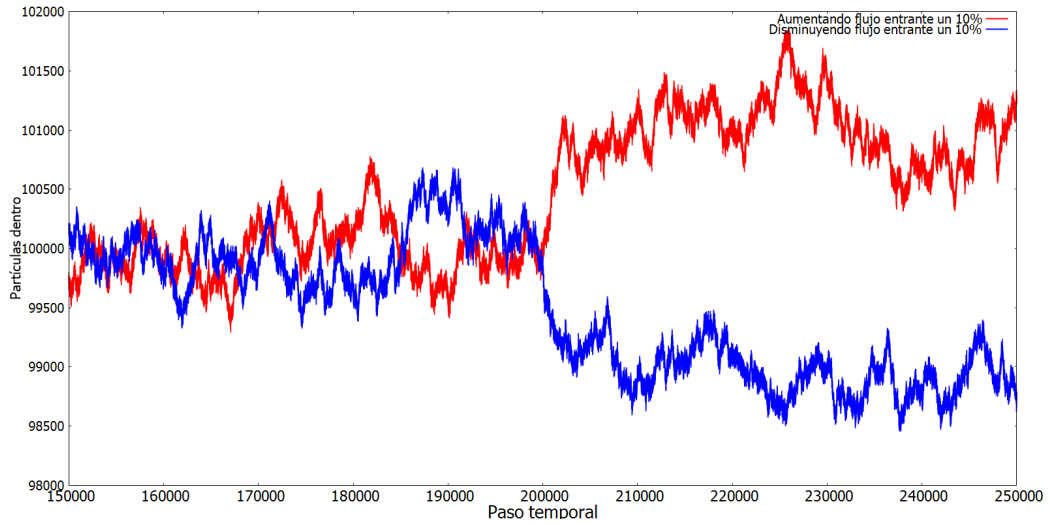


Fig. 12: Simulación del sistema alcanzando un nuevo equilibrio tras modificarse un 10% el flujo, con $x = 10$. Nótese cómo con un $F = 10$ las oscilaciones son mayores.

En la Fig. 12 la perturbación se introduce en el paso temporal número 200000 y vemos cómo el nuevo equilibrio se alcanza en torno al paso 210000: compatible con el tiempo de residencia. A continuación introducimos la perturbación de otra forma: partiendo del equilibrio con $N_0 = 10^5$, $F = 1$ y $\tau = 10^5$, súbitamente añadimos o eliminamos un 5% de las partículas presentes:

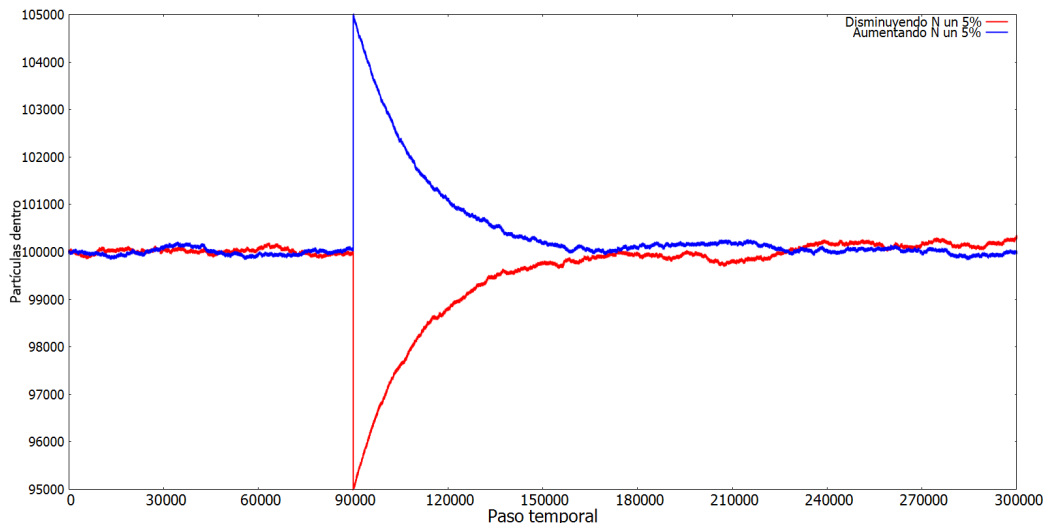


Fig. 13: Simulación del sistema volviendo al equilibrio tras modificar el número de partículas, con $x = 10$.

En la gráfica anterior la perturbación se introduce en el paso temporal 90000 y en torno al 180000 el sistema ya se ha recuperado. De nuevo el tiempo de recuperación es similar a τ .

En vistas al resultado de esta simulación simple, el tiempo de residencia sí que nos informa aproximadamente del orden de tiempo necesario para volver al equilibrio en un sistema que favorece el equilibrio estacionario, con flujos de entrada y salida iguales. Ampliar este resultado a una atmósfera y asegurar categóricamente que lo que acabamos de ver también se cumple para las atmósferas planetarias no sería correcto, sin embargo. Está claro que no podemos saltar de un modelo tan simple a toda una atmósfera, que es un sistema increíblemente complejo. Lo que tenemos asegurado es que la base del tiempo de residencia para sistemas simples cumple lo que esperábamos, y desde aquí se necesitará hacer más estudios o desarrollar modelos más finos para confirmar o no la teoría del tiempo de residencia de la energía para toda una atmósfera.

6 Conclusión

El objetivo de este trabajo ha sido tomar un concepto sencillo y bien comprendido como es el tiempo de residencia de una sustancia y, de forma novedosa, aplicarlo al caso de una atmósfera planetaria. En base a una analogía con la escala KH solar y un artículo publicado por Stix [5], también hemos tratado de comprobar que el tiempo de residencia de la energía nos daría una idea del tiempo que una atmósfera requiere para volver al equilibrio tras una perturbación global.

Para calcular los tiempos de residencia de la energía hemos tenido que hacer un estudio detallado de en primer lugar las formas de energía atmosféricas y cómo son en cada planeta, y en segundo lugar de los flujos energéticos entrantes, salientes e interiores en cada atmósfera. Por el camino hemos tenido la oportunidad de estudiar y describir procesos importantes que afectan al resultado de nuestros cálculos.

Los tiempos de residencia de la energía se han calculado en cada atmósfera y después se han comparado con la constante radiativa. Siendo el tiempo de residencia de la energía un cálculo que involucra a todo el planeta, resulta ser mayor que la constante radiativa, y además es independiente del punto donde se calcula, a diferencia de la constante radiativa. El tiempo de residencia se calcula mediante parámetros globales y depende únicamente del planeta.

Por último hemos intentado comprobar si en el caso de un sistema sencillo que tiende a preservar el equilibrio de una sustancia en su interior su tiempo de residencia es del orden del tiempo necesario para recuperarse de una perturbación. Este modelo tan sencillo se parece a una atmósfera en el hecho de que intenta mantener el equilibrio, pero no es en absoluto comparable en grado de complejidad. Hemos mostrado cómo efectivamente el tiempo de vuelta al equilibrio por lo menos es del orden del tiempo de residencia, por lo que existe una mínima base para nuestra teoría.

Referencias

- [1] M A Thompson. The statistical reliability of 267-ghz jcmt observations of venus: no significant evidence for phosphine absorption. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 2020.
- [2] Agustín Sánchez Lavega. *An Introduction to Planetary Atmospheres*. CRC Press, 2011.
- [3] US Comittee on Extension to the Standard Atmosphere. *U. S. Standard Atmosphere*. National Aeronautics and Space Administration, 1976.
- [4] Bert Bolin y Henning Rhode. A note on the concepts of age distribution and transit time in natural reservoirs. *Tellus B: Chemical and Physical Meteorology*, 1973.
- [5] Michael Stix. On the time scale of energy transport in the Sun. *Solar Physics*, 2003.
- [6] Kippenhahn, R. y Weigert, A. *Stellar Structure and Evolution*. Springer Verlag, 1994.
- [7] Carlos Osácar, Manuel Membrado y Amalio Fernández-Pacheco. Brief communication: Residence time of energy in the atmosphere. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2020.
- [8] José P. Peixoto y Abraham Oort. *Physics of climate*. Springer, 1992.
- [9] Planetary Atmospheres Node (NASA). Gas constant. https://atmos.nmsu.edu/education_and_outreach/encyclopedia/gas_constant.htm, 2020.
- [10] W Sheehan. *The planet Mars: a History of Observation and Discovery*. University of Arizona Press, 1996.
- [11] Javier Peralta et al. Venus’s winds and temperatures during the MESSENGER’s flyby: An approximation to a three-dimensional instantaneous state of the atmosphere. *Geophysical Research Letters*, 2017.
- [12] Michael Bird et al. The vertical profile of winds on Titan. *Nature*, 2006.
- [13] Neil C. Wells. *The atmosphere and ocean*. Wiley-Blackwell, 2012.
- [14] Planetary Science Communications team (NASA JPL). Venus in depth. <https://solarsystem.nasa.gov/moons/saturn-moons/titan/in-depth/>, 2021.
- [15] Planetary Science Communications team (NASA JPL). Earth in depth. <https://solarsystem.nasa.gov/moons/saturn-moons/titan/in-depth/>, 2021.
- [16] Planetary Science Communications team (NASA JPL). Mars in depth. <https://solarsystem.nasa.gov/moons/saturn-moons/titan/in-depth/>, 2021.
- [17] Planetary Science Communications team (NASA JPL). Titan in depth. <https://solarsystem.nasa.gov/moons/saturn-moons/titan/in-depth/>, 2021.
- [18] P. L. Read et al. Global energy budgets and ‘Trenberth diagrams’ for the climates of terrestrial and gas giant planets. *Royal Meteorological Society*, 2015.
- [19] Stephens et al. An update on earth’s energy balance in light of the latest global observations. *Nature Geoscience*, 2012.
- [20] Wild et al. The global energy balance from a surface perspective. *Springer Verlag*, 2012.
- [21] John M. Wallace y Peter V. Hobbs. *Atmospheric science*. Academic Press, 2006.
- [22] Indian Space Research Organisation. Global albedo map of mars. <https://www.isro.gov.in/pslv-c25-mars-orbiter-mission/global-albedo-map-of-mars>, 2021.
- [23] R. T. Pierrehumbert. *Principles of Planetary Climate*. Cambridge University Press, 2010.

7 Apéndices

7.1 Comunicación con el Profesor John Harte

A continuación se reproduce el mensaje que el director de este trabajo envió al Profesor John Harte de Berkeley para conocer su opinión sobre el concepto de tiempo de residencia de la energía. El doctor Harte es un reconocido investigador especializado en la aplicación de la física a problemas medioambientales, con varios libros publicados.

----- Mensaje Original -----

Asunto: Residence time of energy in the atmosphere

Fecha: 2020-04-23 11:06

De: amalio <amalio@unizar.es>

Destinatario: jharte@berkeley.edu

Dear Prof. Harte,

Please find enclosed in this email our paper "Residence time of Energy in the

Atmosphere" which has just been accepted for publication in "Nonlinear Processes in Geophysics".

In this work, following a similar approach as atmospheric chemists, when they define a

residence time in the atmosphere for each type of molecular species, we define a residence time for the energy in the atmosphere. We consider the atmosphere as a big box where energy is in equilibrium: In e.g. annual time averages, the energy influx is equal to the energy out flux, so that the energy stored in the box keeps constant. Under this hypothesis, and inserting accepted values for the energy stock and for the

energy influxes, the result for the residence time of energy in the atmosphere is about two months.

As far as we know, this time scale is not coincident with any known periodic phenomenon in meteorology. However, a comparison with Solar Physics has lead us to conclude that this time scale is what the atmosphere would need to reach a new steady state, after having received

a global thermal perturbation.

Any comment or criticism from you about the content of this paper would be very welcome.

I'd like to take this opportunity to express my admiration for your books, which have always been a source of inspiration to me.

Sincerely yours,

Amalio Fernández-Pacheco

Seguidamente se incluye su respuesta positiva:

----- Mensaje Original -----

Asunto: Re: Residence time of energy in the atmosphere

Fecha: 2020-04-23 19:28

De: John Harte <jharte@berkeley.edu>

Destinatario: amalio <amalio@unizar.es>

This looks good to me. In my Spherical Cow book I had used the concept of residence time of energy in the atmosphere to come up with an estimate of the urban heat island effect. And I had given students in a class I taught the same problem as in your article: residence of tropospheric energy. My answer agreed with yours. I like the way you interpreted it.

Keep well in these difficult times,

John

John Harte
Professor of the Graduate School
Ecosystem Sciences
ERG/ESPM
310 Barrows Hall
University of California
Berkeley, CA 94720 USA
jharte@berkeley.edu

7.2 Datos atmosféricos utilizados

Los datos para la Tierra se han extraído de [3] y provienen de medidas directas. Los datos para el resto de planetas se recogen en [2] y son resultado de misiones espaciales.

Tabla 10: Datos en la Tierra

z (km)	p (Pa)	T (K)
0	101330	288.15
1	89880	281.65
2	79500	275.15
3	70120	268.66
4	61660	262.17
5	54050	255.68
6	47220	249.19
8	35650	236.22
10	26500	223.25
12	19400	216.15
15	12110	216.65
20	5529	216.65
25	2549	221.55
30	1197	226.51
35	574.6	236.51
40	287.1	250.35
45	149.1	264.16
50	79.78	270.65
55	42.53	260.77
60	21.96	247.02
65	10.93	233.29
70	5.221	219.59
75	2.388	208.4
80	1.052	198.64
85	0.496	188.89
90	0.184	186.87
95	0.076	188.42
100	0.032	195.08
105	0.014	208.84
110	0.007	240
115	0.004	300
120	0.003	360

Tabla 11: Datos en Marte

z (km)	p (Pa)	T (K)
0	636	214
2	529.9788	213.8
4	441.384	213.4
6	368.244	212.4
8	305.916	209.2
10	253.7864	205
12	209.88	201.4
14	172.674	197.8
16	141.4764	194.6
18	116.07	191.4
20	94.7004	188.2
22	77.0196	185.2
24	62.4552	182.5
26	50.562	180
28	40.7676	177.5
30	32.8176	175
32	26.3304	172.5
34	21.0516	170
36	16.77132	167.5
38	13.3242	164.8
40	10.5576	162.4
42	8.3316	160
44	6.56352	158
46	5.1516	156
48	4.03224	154.1
50	3.1482	152.2
52	2.45496	150.3
54	1.90164	148
56	1.474884	147.2
58	1.139712	145.7
60	0.878952	144.2
62	0.676068	143
64	0.519612	142
66	0.398136	141
68	0.304644	140
70	0.233412	139.5
72	0.17808	139
74	0.136168	139
76	0.104113	139
78	0.079627	139
80	0.060865	139

Tabla 12: Datos en Venus

z (km)	p (Pa)	T (K)
0	9119250	735
2	8024940	720
4	7052220	705
6	6170693	689
8	5390490	674
10	4681215	658
12	4063133	642
14	3515978	626
16	3029618	609
18	2593920	593
20	2219018	576
22	1884645	560
24	1590803	543
26	1347623	526
28	1124708	509
30	935229.8	492
32	773109.8	476
34	635307.8	460
36	518784	444
38	420898.8	428
40	338425.5	413
42	270537.8	400
44	213795.8	387
46	168199.5	374
48	131722.5	361
50	101325	347
52	77412.3	328
54	58059.23	308
56	42759.15	289
58	30904.13	274
60	21987.53	261

Tabla 13: Venus cont.

z (km)	p (Pa)	T (K)
62	15401.4	250
64	10639.13	245
66	7335.93	241
68	5015.588	236
70	3404.52	232
75	1215.9	220
80	412.3928	208
85	128.6828	192
90	37.3889	187
95	10.3352	182
100	2.75604	175
104	0.85	160
108	0.27	150
112	0.08	140
116	0.021	129
120	0.00517	117
124	0.0012	125
128	0.00033	135
132	0.000099	142
136	0.000033	146
140	1.26E-05	147
144	5.65E-06	140
148	2.83E-06	134
152	1.54E-06	131
156	8.68E-07	129
160	5.02E-07	127
164	3E-07	126
168	1.84E-07	125
172	1.13E-07	125
176	7.2E-08	125
180	4.73E-08	125

Tabla 14: Datos en Titán

z (km)	p (Pa)	T (K)
0	144000	93.9
0.5	140000	93.3
1	137000	92.7
1.5	134000	92.1
2	130000	91.5
3	124000	90.5
4	118000	89.5
5	112000	88.5
6	106000	87.3
8	95700	85.5
10	85900	83.6
12	77000	82.1
14	68800	80.6
16	61400	79.2
18	54700	78
20	48700	76.7
22	43200	75.7
24	38300	74.7
26	34000	73.9
28	30000	73.1
30	26500	72.3
32	23500	71.8
34	20700	71.5
36	18300	71.4
38	16100	71.2
40	14200	71.1
42	12600	71.1
44	11100	71.2
46	9810	71.4
48	8670	71.5
50	7670	71.7
52	6790	72.2
54	6010	72.8
56	5340	73.8
58	4750	75.4
60	4230	77.6
62	3790	80.9
64	3420	85.9
66	3100	92.6
68	2830	100.5
70	2600	106.1
72	2400	111.9
74	2230	116.6

Tabla 15: Titán cont.

z (km)	p (Pa)	T (K)
76	2070	119.7
78	1930	122.7
80	1800	125.8
82	1680	128.8
84	1570	131.5
86	1470	133.8
88	1380	135.8
90	1300	137.6
92	1220	139.1
94	1150	140.6
96	1080	142.1
98	1020	143.7
100	961	145.1
102	906	146.5
104	856	147.8
106	808	149
108	763	150.1
110	722	151
112	682	151
114	645	151.9
116	610	152.6
118	578	154.3
120	548	155.3
122	519	156.3
124	491	157.5
126	466	158.6
128	442	159.6
130	419	160.5
132	390	161.2
134	378	161.8
136	359	162.4
138	341	163
140	324	163.7
142	308	164.5
144	293	165.3
146	278	166
148	265	166.7
150	252	167.4
152	240	167.9
154	229	168.5
156	217	169
158	207	169.5
160	197	169.9