



Universidad Zaragoza



**Departamento de
Física Teórica**
Universidad Zaragoza

Trabajo de Fin de Grado

RUPTURA ANÓMALA DE SIMETRÍAS EN TEORÍAS CUÁNTICAS

Alejandro Muro Bellosó[†]

Dirigido por
Dr. José Vicente García Esteve[‡]

Curso 2020/2021

[†]759731@unizar.es

[‡]esteve@unizar.es

Índice

1. Introducción:	
Consideraciones previas y ecuación de Heisenberg	1
2. Ruptura anómala de simetría conforme bidimensional	2
3. Ruptura de la degeneración accidental y Supersimetría en el átomo de hidrógeno	16
4. Conclusiones	23
Bibliografía	25
A. Invariancia conforme (caso clásico)	27
B. Invariancia conforme (caso cuántico)	29
C. Dominios de definición y sus parámetros:	
Introducción teórica	31
D. Dominios de definición y sus parámetros:	
Interacción Delta	33
E. Relación entre las diferentes formalizaciones de dominios para el caso con interacción delta	35
F. Cálculo del término anómalo	37
G. Cálculos con el átomo de hidrógeno	39
H. Dominios de definición y sus parámetros:	
Átomo de hidrógeno	40
I. Introducción teórica a Supersimetría	41

Resumen

En este trabajo se analizarán diversos sistemas físicos y las simetrías que los rigen. También se comprobará cómo estas simetrías pueden estar anómalamente rotas en función de los dominios de definición con que uno trabaje a la hora de emplear el formalismo de la Mecánica Cuántica. Así pues, el objetivo es mostrar cómo dichos dominios tienen una importancia capital y dan lugar a comportamientos inesperados.

1. Introducción: Consideraciones previas y ecuación de Heisenberg

Según los postulados que establecen el formalismo de la Mecánica Cuántica [1], los estados que describen completamente el sistema a estudiar se caracterizan mediante funciones de onda de cuadrado integrable $\Psi(\mathbf{r})$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} complejo y separable o bien por medio sus correspondientes *kets* $|\Psi\rangle$, cumpliéndose la relación

$$\Psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \Psi \rangle. \quad (1)$$

Los postulados también dictan que a cada magnitud física observable se le asocia un operador lineal y autoadjunto que actúa en un dominio denso del espacio de Hilbert ya mencionado. Estos dominios de definición son subespacios, dentro del espacio de Hilbert, sobre los que están definidos dichos operadores y es este hecho el que da lugar a las rupturas de simetrías que se tratarán aquí.

El estudio de los dominios de definición resulta de gran importancia al estudiar la evolución del promedio de un operador cualquiera B . Esta viene dada por la ecuación de Heisenberg comúnmente expresada como

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | B \Psi(t) \rangle = \left\langle \Psi(t) \left| \frac{\partial B}{\partial t} \Psi(t) \right. \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle \Psi(t) | [H, B] \Psi(t) \rangle, \quad (2)$$

donde H define al operador Hamiltoniano del sistema que, en el caso de considerar una sola partícula en nuestro sistema, puede escribirse

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (3)$$

expresión en la que aparecen los operadores vectoriales momento lineal $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ y posición $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n)$ siendo n la dimensión del sistema. Tenemos además un potencial $V(\mathbf{r})$ que actúa sobre la partícula.

Sin embargo, para que (2) sea aplicable debe darse la condición de que el dominio de definición del Hamiltoniano H permanezca invariante bajo la actuación del operador B ,

lo que puede expresarse matemáticamente de forma

$$B\Psi_H \in D(H) \quad \forall \Psi_H \in D(H), \quad (4)$$

donde $D(H)$ representa el dominio de definición del Hamiltoniano. En ese caso, al cumplirse para toda función de ondas en el dominio, podemos simplemente escribir

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [H, B]. \quad (5)$$

Por otro lado, si no se cumple lo expuesto en (4), nos vemos forzados a añadir un término adicional [2] de forma que, considerando al Hamiltoniano H como un operador autoadjunto, la expresión (2) queda escrita

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | B \Psi(t) \rangle &= \left\langle \Psi(t) \left| \frac{\partial B}{\partial t} \Psi(t) \right. \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \left(\langle H \Psi(t) | B \Psi(t) \rangle - \langle \Psi(t) | B H \Psi(t) \rangle \right) = \\ &= \left\langle \Psi(t) \left| \frac{\partial B}{\partial t} \Psi(t) \right. \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle \Psi(t) | [H, B] \Psi(t) \rangle + \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (6)$$

Se tiene así la ecuación de Heisenberg modificada, donde \mathcal{A} se conoce como el término adicional o anómalo, que toma la forma

$$\mathcal{A} = \frac{i}{\hbar} \langle \Psi(t) | (H^\dagger - H) B \Psi(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \left(\langle H \Psi(t) | B \Psi \rangle - \langle \Psi(t) | H B \Psi(t) \rangle \right). \quad (7)$$

Puede verse que \mathcal{A} es nulo si se cumple la condición (4) por la que $H^\dagger = H$ (\dagger denota el operador adjunto) al actuar sobre los estados $B\Psi(t) \in D(H)$ dado que se trata de un operador autoadjunto en su dominio. Recuperamos entonces la expresión usual (2).

En este trabajo estudiaremos sistemas en los que ciertas simetrías se encuentran anómalamente rotas. Esto es debido a que los generadores de dichas simetrías no dejan invariante el dominio de definición del operador Hamiltoniano tras actuar sobre estados pertenecientes a él. Son estos casos en los que la ecuación de Heisenberg modificada (6) entra en juego y verificaremos que es ésta la que se cumple tras obtener el término anómalo \mathcal{A} .

Además, para terminar, haremos un breve estudio de cómo afecta la elección de dominio de definición a la teoría supersimétrica del átomo de hidrógeno en los estados con momento orbital nulo $l = 0$.

2. Ruptura anómala de simetría conforme bidimensional

Nuestra atención se centra ahora en un sistema en dos dimensiones formado por una partícula libre sujeta a una interacción $\delta^2(\mathbf{r})$ en el origen, siendo el Hamiltoniano que lo describe de forma clásica

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \lambda \frac{1}{r} \delta(r), \quad (8)$$

con λ como parámetro de la interacción.

Antes de pasar al caso cuántico merece la pena ver cómo se comportan las simetrías clásicas. Para ello introducimos los generadores de la simetría conforme

$$D = tH - G = tH - \frac{1}{2}(\mathbf{r}\mathbf{p}), \quad (9)$$

$$K = -t^2H + 2tD + \frac{m}{2}R^2 = t^2H - t(\mathbf{r}\mathbf{p}) + \frac{m}{2}r^2, \quad (10)$$

que junto con el Hamiltoniano H permiten establecer ciertas relaciones usando el corchete de Poisson $\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$ con q_i y p_i las coordenadas y momentos generalizados. Tenemos así, consultando el [Apéndice A](#) para un desarrollo detallado

$$\{K, D\} = -K, \quad (11)$$

$$\{H, K\} = 2D, \quad (12)$$

$$\{D, H\} = -H. \quad (13)$$

Las ecuaciones clásicas del movimiento implican que para una magnitud $f(p, q, t)$ cualquiera se cumple

$$\frac{d}{dt}f(p, q, t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (14)$$

donde cabe notar el parecido con la ecuación de Heisenberg (2), cambiando corchetes de Poisson por conmutadores de Lie. En consecuencia en nuestro problema se tiene que

$$\frac{d}{dt}H = \frac{d}{dt}D = \frac{d}{dt}K = 0, \quad (15)$$

indicando que son constantes del movimiento.

Veamos qué sucede al pasar al caso cuántico. Para ello cuantizamos el Hamiltoniano anterior obteniendo

$$H \equiv H(r, \varphi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \lambda \frac{1}{r} \delta(r). \quad (16)$$

Si consideramos la extensión del Hamiltoniano a todo el espacio de Hilbert \mathcal{H} , es decir, $D(H) = \{f \in \mathcal{H} \mid Hf \in \mathcal{H}, f(0) \text{ finitos}\}$ con $\mathcal{H} = L^2(R_+, r dr) \otimes L^2(S_1, d\varphi)$ se tiene entonces que el Hamiltoniano propuesto es invariante de escala. Más concretamente, introduciendo una dilatación $r \rightarrow \alpha r$ ($r, \alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\alpha r)^2} + \frac{1}{(\alpha r)} \frac{\partial}{\partial(\alpha r)} + \frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} &= \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), & \frac{1}{(\alpha r)} \delta(\alpha r) &= \frac{1}{\alpha^2 r} \delta(r), \\ \implies H(\alpha r, \varphi) &= \frac{1}{\alpha^2} H(r, \varphi). \end{aligned} \quad (17)$$

Este hecho implica además que el sistema tratado permanece invariante bajo la actuación de los generadores del grupo conforme (que definen un álgebra de invariancia $SO(2, 1)$), dados por el propio Hamiltoniano definido en (16), el operador de dilatación D y el generador conforme K [3]. Estos últimos operadores se escriben ahora

$$D = tH - G = tH - \frac{1}{4}(\mathbf{rp} + \mathbf{pr}), \quad (18)$$

$$K = -t^2H + 2tD + \frac{m}{2}r^2 = t^2H - \frac{t}{2}(\mathbf{rp} + \mathbf{pr}) + \frac{m}{2}r^2. \quad (19)$$

Puede verse en el [Apéndice B](#) que se cumplen las siguientes reglas de conmutación formales (ignorando los dominios) usando los corchetes de Lie $[A, B] = AB - BA$

$$\frac{i}{\hbar}[K, D] = K, \quad (20)$$

$$\frac{i}{\hbar}[H, K] = -2D, \quad (21)$$

$$\frac{i}{\hbar}[D, H] = H, \quad (22)$$

de modo que sus promedios permanecen invariantes en el tiempo de acuerdo con (2)

$$\frac{d}{dt}\langle H \rangle = \frac{d}{dt}\langle D \rangle = \frac{d}{dt}\langle K \rangle = 0 \quad (23)$$

y hablamos de constantes del movimiento.

Notar ahora que las expresiones clásicas (11), (12) y (13) se relacionan con las expresiones cuánticas (20), (21) y (22) según

$$-\{A, B\} \longrightarrow \frac{i}{\hbar}[A, B]. \quad (24)$$

Además vemos que, usando (2) y (14), llegamos a que los operadores son constantes del movimiento y podemos pensar que la simetría se conserva al pasar del formalismo clásico al cuántico. Sin embargo, la ausencia de dominios de definición en el caso clásico implica que al cuantizar el sistema se pueden dar casos, en función del dominio estudiado, en los que la simetría se encuentre anómalamente rota al no poder implementarse cuánticamente. Es aquí donde tenemos que hacer uso de la ecuación de Heisenberg modificada (6) para hallar la evolución temporal y encontramos que (23) puede dejar de cumplirse.

Volviendo al Hamiltoniano, puede verse que si se mantienen la simetría conforme y la invariancia de escala es imposible tener un estado ligado con energía diferente de 0. Para probarlo supondremos que $\Psi(r, \varphi)$ representa un autoestado del Hamiltoniano $H(r, \varphi)$

$$H(r, \varphi)\Psi(r, \varphi) = E\Psi(r, \varphi). \quad (25)$$

Resulta entonces que al implementar una dilatación caracterizada por α

$$H(\alpha r, \varphi)\Psi(\alpha r, \varphi) = E\Psi(\alpha r, \varphi). \quad (26)$$

Ateniéndonos a lo expuesto en (17) podemos relacionar ambos resultados de modo que

$$\begin{aligned} H(\alpha r, \varphi)\Psi(\alpha r, \varphi) &= \frac{1}{\alpha^2}H(r, \varphi)\Psi(\alpha r, \varphi) = E\Psi(\alpha r, \varphi) \implies \\ \implies H(r, \varphi)\Psi(\alpha r, \varphi) &= \alpha^2 E\Psi(\alpha r, \varphi). \end{aligned} \quad (27)$$

Así $\Psi(\alpha r, \varphi)$ es también autoestado del Hamiltoniano $H(r, \varphi)$ cuyo autovalor depende de la dilatación α . Se tendrá por tanto un continuo de valores posibles que no tiene cabida en la discretización presente para los estados ligados y concluimos así que, en el caso de existir estados ligados, éstos solo pueden tener energía nula ($\alpha^2 \cdot 0 = 0$).

Sin embargo, resulta que sí que es posible encontrar autoestados del operador (16) con energía no nula. Concretamente, hallamos $\psi_g(r, \varphi) = C_g K_g(\alpha r) e^{ig\varphi}$, donde $0 < |g| < 1$, C_g es una constante de normalización y $K_g(z)$ es la función de Bessel modificada. Se trata de un estado ligado con energía $E = -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 (< 0)$ que pone en contradicción lo que hemos desarrollado anteriormente y sugiere que en algún caso la simetría conforme está rota.

Cabe entonces preguntarse la razón por la que esto sucede y la respuesta se encuentra en los dominios de definición, como uno podría a estas alturas esperarse.

Para estudiar esta situación de forma apropiada empezaremos por definir adecuadamente el dominio de definición del Hamiltoniano D_H de forma que sea denso en el espacio de Hilbert \mathcal{H} , así $\bar{D}_H = \mathcal{H}$ y es autoadjunto ($H^\dagger = H$) actuando en D_H . Para ello comenzamos eliminando las singularidades del origen por lo que, trabajando en $\mathbb{R}^2/\{0, 0\}$ y tomando coordenadas polares como antes

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (28)$$

Se tiene así el Hamiltoniano correspondiente a una partícula libre* y serán las condiciones de contorno en el dominio D_H las que darán cuenta de la interacción delta en el origen.

Optamos por definir primero el dominio del operador $d^2/d\varphi^2$. Estamos interesados en estudiar el efecto que tiene la interacción delta en las simetrías y, como no buscamos modelizar una nueva interacción restringiendo el dominio de definición de $d^2/d\varphi^2$, tomaremos condiciones de contorno cuasi/pseudo-periódicas para éste. Escribimos entonces

$$d_\theta = \left\{ f(\varphi) \in L^2(S_1, d\varphi) \left| f(0) = e^{-i2\pi\theta} f(2\pi), \frac{df}{d\varphi}(0) = e^{-i2\pi\theta} \frac{df}{d\varphi}(2\pi); \theta \in [0, 1) \right. \right\} \quad (29)$$

y usaremos

$$f \in D \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \right) \equiv d_\theta, \quad q \in D \left(\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \right)^\dagger \right), \quad (30)$$

donde \dagger denota el operador adjunto. Así, si buscamos que el operador sea autoadjunto en el dominio, deberá cumplirse, haciendo uso de la integración por partes

$$\begin{aligned} \left\langle q \left| \frac{d^2}{d\varphi^2} f \right. \right\rangle &= \int_0^{2\pi} q^* \frac{d^2 f}{d\varphi^2} d\varphi = \left| q^* \frac{df}{d\varphi} \right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{dq^*}{d\varphi} \frac{df}{d\varphi} d\varphi = \\ &= \underbrace{\left| q^* \frac{df}{d\varphi} \right|_0^{2\pi}}_{=0} - \underbrace{\left| \frac{dq^*}{d\varphi} f \right|_0^{2\pi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} \frac{d^2 q^*}{d\varphi^2} f d\varphi = \left\langle \frac{d^2}{d\varphi^2} q \left| f \right. \right\rangle \end{aligned} \quad (31)$$

*Notar que lo único que cambia es la eliminación del término con $\delta(r)$.

y esta expresión debe ser válida $\forall f, q$. Por ello

$$\left(q^*(2\pi) - e^{-i2\pi\theta} q^*(0) \right) \frac{df}{d\varphi}(2\pi) = 0 \implies q(0) = e^{-i2\pi\theta} q(2\pi), \quad (32)$$

$$\left(\frac{dq^*}{d\varphi}(2\pi) - e^{-i2\pi\theta} \frac{dq^*(0)}{d\varphi} \right) f(2\pi) = 0 \implies \frac{dq}{d\varphi}(0) = e^{-i2\pi\theta} \frac{dq}{d\varphi}(2\pi). \quad (33)$$

Podemos concluir finalmente que

$$D \left(\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \right)^\dagger \right) = D \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \right) \equiv d_\theta. \quad (34)$$

y el operador es autoadjunto en el dominio elegido. Sus autoestados $\xi(\varphi) \in d_\theta$ vendrán dados por

$$\xi_{n,\theta}(\varphi) \equiv \xi_g(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{ig\varphi} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{i(n+\theta)\varphi}, \quad (35)$$

donde $g = n + \theta$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Consecuentemente sus autovalores correspondientes serán $-g^2 = -(n + \theta)^2$.

A su vez el dominio del Hamiltoniano se puede escribir en función de las infinitas extensiones angulares caracterizadas por n y θ

$$D_H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} [D_{n,\theta}(R_+, r dr) \otimes \xi_{n,\theta}(\varphi)] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} [D_{n,\theta}(R_+, r dr) \otimes (2\pi)^{-(1/2)} e^{i(n+\theta)\varphi}] \quad (36)$$

con $D_{n,\theta}(R_+, r dr)$ tal que la parte radial del Hamiltoniano (28) sea autoadjunta

$$H_r^\theta = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(n + \theta)^2}{r^2} \right). \quad (37)$$

Para la obtención del dominio radial seguiremos el método de índices de von Neumann [4]. Consideramos inicialmente un dominio de definición inicial $D(H_r^\theta) \equiv D_{n,\theta}$ con funciones de soporte compacto[§] y tal que H_r^θ sea simétrico en él. Esto permite calcular sus índices de defecto resolviendo la ecuación espectral

$$\left(H_r^\theta \right)^\dagger \phi_\pm(r) = \pm i\Lambda \phi_\pm(r), \quad (38)$$

donde Λ es un número real positivo que se introduce a los efectos de mantener las dimensiones de la ecuación y donde $\phi_\pm(r) \in D \left(\left(H_r^\theta \right)^\dagger \right)$. A la dimensión de los subespacios engendrados por ϕ_+ y ϕ_- se le denota por d_+ y d_- respectivamente y atendiendo a su valor se tiene que

- Si $d_+ \neq d_-$, el operador no admite ninguna extensión autoadjunta.
- Si $d_+ = d_- = 0$, el operador es esencialmente autoadjunto y su adjunto coincide con su cierre por lo que basta tomar la extensión cerrada mínima de dicho operador.

[§]Se conocen como funciones de soporte compacto de un dominio aquellas funciones que se anulan fuera de un conjunto compacto.

- Si $d_+ = d_- \neq 0$, el operador admite infinitas extensiones autoadjuntas.

Introduciendo (37) en la ecuación espectral (38) llegamos a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(n+\theta)^2}{r^2} \right) \phi_{\pm} = \pm i\Lambda \phi_{\pm}. \quad (39)$$

Para facilitar su resolución introducimos el siguiente cambio de variables

$$z_+ = \zeta (-1)^{1/4} r, \quad z_- = \zeta (-1)^{3/4} r, \quad (40)$$

con $\zeta^2 = \frac{2m\Lambda}{\hbar^2}$. La expresión (39) queda así reescrita para cada función como

$$z_+^2 \frac{d^2 \phi_+}{dz_+^2} + z_+ \frac{d\phi_+}{dz_+} + (z_+^2 - g^2) \phi_+, \quad (41)$$

$$z_-^2 \frac{d^2 \phi_-}{dz_-^2} + z_- \frac{d\phi_-}{dz_-} + (z_-^2 - g^2) \phi_-. \quad (42)$$

Se trata pues de dos ecuaciones diferenciales de Bessel, una para cada variable, donde además se cumple que $g^2 = (n+\theta)^2 \geq 0$. Concretamente solo estamos interesados en $g \neq 0$ puesto que este caso particular ya fue tratado extensamente en [5]. Por lo tanto tendremos como solución en cada caso una combinación lineal de las funciones de Bessel de primera y segunda especie, $J_g(z_{\pm})$ y $Y_g(z_{\pm})$ respectivamente [6], puesto que son linealmente independientes entre sí para todo valor de g . Con ello

$$\phi_+ = A_+ J_g(z_+) + B_+ Y_g(z_+), \quad (43)$$

$$\phi_- = A_- J_g(z_-) + B_- Y_g(z_-). \quad (44)$$

Para extraer más información y proseguir nuestro desarrollo estudiaremos los comportamientos de las soluciones en los casos límite dados por los extremos del dominio:

- $r \rightarrow 0 \implies z_{\pm} \rightarrow 0$

Se tiene pues

$$J_g(z_{\pm} \rightarrow 0) \sim \frac{1}{\Gamma(g+1)} \left(\frac{1}{2} z_{\pm} \right)^g \propto r^g, \quad (45)$$

$$Y_g(z_{\pm} \rightarrow 0) \sim -\frac{\Gamma(g)}{\pi} \left(\frac{1}{2} z_{\pm} \right)^{-g} \propto r^{-g}. \quad (46)$$

Además deben tenerse en cuenta las condiciones de normalización, de modo que su norma sea finita. En particular el problema surge al integrar r^{-1} dado que el logaritmo diverge cuando $r \rightarrow 0$

$$\int r^{-2|g|} r dr < \infty \iff r^{-2|g|+1} > r^{-1} \iff |g| < 1. \quad (47)$$

Así $-1 < g < 1$ para que la ambas funciones de Bessel sean normalizables en el origen y

distinguimos:

- $g \geq 1$ y $Y_g(z_{\pm})$ no es normalizable, de modo que $B_{\pm} = 0$.
 - $g \leq -1$ y $J_g(z_{\pm})$ no es normalizable, de modo que $A_{\pm} = 0$.
- $r \rightarrow \infty \implies |z_{\pm}| \rightarrow \infty$

En esta situación

$$J_g(|z_{\pm}| \rightarrow \infty) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z_{\pm}}} \cos\left(z_{\pm} - \frac{1}{2}g\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (48)$$

$$Y_g(|z_{\pm}| \rightarrow \infty) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z_{\pm}}} \sin\left(z_{\pm} - \frac{1}{2}g\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (49)$$

Consecuentemente, en función de los casos anteriores, las funciones se escriben:

- $g \geq 1$ y $\phi_{\pm} = A_{\pm}J_g(z_{\pm})$ dado (47).

Sin embargo, puesto que $\mathfrak{I} z_{\pm} = (a \pm ib)r$ se tiene, usando relaciones trigonométricas

$$\cos\left(z_{\pm} - \left(\frac{1}{2}g\pi + \frac{1}{4}\pi\right)\right) = \cos(z_{\pm}) \cos\left(\frac{1}{2}g\pi + \frac{1}{4}\pi\right) + \sin(z_{\pm}) \sin\left(\frac{1}{2}g\pi + \frac{1}{4}\pi\right), \quad (50)$$

donde

$$\cos(z_{\pm}) = \cos((a \pm ib)r) = \frac{e^{iar} e^{\mp br} + e^{-iar} e^{\pm br}}{2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty, \quad (51)$$

$$\sin(z_{\pm}) = \sin((a \pm ib)r) = \frac{e^{iar} e^{\mp br} - e^{-iar} e^{\pm br}}{2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mp \infty. \quad (52)$$

Vemos entonces que $J_g(z_{\pm})$ diverge para $g \geq 1$ y no existen posibles soluciones para la función de ondas.

- $g \leq -1$ y $\phi_{\pm} = B_{\pm}Y_g(z_{\pm})$ dado (47).

Ahora, con $z_{\pm} = (a \pm ib)r$ se tiene

$$\sin\left(z_{\pm} - \left(\frac{1}{2}g\pi + \frac{1}{4}\pi\right)\right) = \sin(z_{\pm}) \cos\left(\frac{1}{2}g\pi + \frac{1}{4}\pi\right) - \cos(z_{\pm}) \sin\left(\frac{1}{2}g\pi + \frac{1}{4}\pi\right), \quad (53)$$

donde de nuevo

$$\cos(z_{\pm}) = \cos((a \pm ib)r) = \frac{e^{iar} e^{\mp br} + e^{-iar} e^{\pm br}}{2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty, \quad (54)$$

$$\sin(z_{\pm}) = \sin((a \pm ib)r) = \frac{e^{iar} e^{\mp br} - e^{-iar} e^{\pm br}}{2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mp \infty. \quad (55)$$

$\mathfrak{I} z_{+} \propto (-1)^{1/4} r$ y $z_{-} \propto (-1)^{3/4} r$ y queda claro que estamos ante números complejos.

Resulta entonces que $Y_g(z_{\pm})$ diverge para $g \leq -1$ y no encontramos posibles soluciones para la función de ondas.

Entonces si $|g| \geq 1$ no existen posibles soluciones para $\phi_{\pm}(r)$ de modo que los índices de defecto serán $d_+ = d_- = 0$ y el operador es esencialmente autoadjunto actuando en el dominio $D_{n,\theta}$.

Para $|g| < 1$ y $g \neq 0$ tanto $J_g(z_{\pm})$ como $Y_g(z_{\pm})$ son normalizables en el origen, de modo que basta con encontrar una combinación lineal de ellas que converja en el infinito. De entre las posibles combinaciones lineales existentes cabe destacar

$$H_g^{(1)}(z_{\pm}) = J_g(z_{\pm}) + iY_g(z_{\pm}), \quad (56)$$

$$H_g^{(2)}(z_{\pm}) = J_g(z_{\pm}) - iY_g(z_{\pm}), \quad (57)$$

que cumplen:

- $H_g^{(1)}(z_{\pm}) \rightarrow 0$ cuando $|z_{\pm}| \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) en el sector $0 < \arg\{z_{\pm}\} < \pi$.
- $H_g^{(2)}(z_{\pm}) \rightarrow 0$ cuando $|z_{\pm}| \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) en el sector $-\pi < \arg\{z_{\pm}\} < 0$.
- Son linealmente independientes entre sí para todo valor de z_{\pm} .

Cuando $|z_{\pm}| \rightarrow \infty$ las funciones toman la forma

$$H_g^{(1)}(z_{\pm}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z_{\pm}}} e^{i(z_{\pm} - \frac{1}{2}g\pi - \frac{1}{4}\pi)} \propto e^{iz_{\pm}}, \quad (58)$$

$$H_g^{(2)}(z_{\pm}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z_{\pm}}} e^{-i(z_{\pm} - \frac{1}{2}g\pi - \frac{1}{4}\pi)} \propto e^{-iz_{\pm}}. \quad (59)$$

Teniendo en cuenta que $z_{\pm} = \frac{\zeta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)r$ sucede que

$$H_g^{(2)}(z_+) \propto e^r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty, \quad (60)$$

$$H_g^{(1)}(z_-) \propto e^r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty. \quad (61)$$

Con lo que finalmente las soluciones para $\phi_{\pm}(r)$ quedan expresadas como

$$\phi_+(r) = C_+ H_g^{(1)}(z_+), \quad (62)$$

$$\phi_-(r) = C_- H_g^{(2)}(z_-), \quad (63)$$

donde C_{\pm} denotan las constantes de normalización.

Notar además que este resultado podría haberse obtenido considerando que $\arg\{z_+\} = \pi/4$ y $\arg\{z_-\} = -\pi/4$, de modo que según las propiedades que cumplen ambas funciones llegamos de nuevo a (62) y (63).

[¶] Si evaluamos adecuadamente $(-1)^{1/4}$ y $(-1)^{3/4}$.

De esta forma, se ha obtenido una solución para ϕ_+ y otra para ϕ_- . Por consiguiente los índices de defecto cumplen $d_+ = d_- \neq 0$ y el operador $H_r^\theta(r)$ admite infinitas extensiones autoadjuntas.

La teoría de índices de defecto permite construir dichas extensiones definiendo las isometrías entre las funciones ϕ_+ y ϕ_- debidamente normalizadas, de modo que $\phi_- = U\phi_+$ siendo U un operador unitario cuyos parámetros caracterizarán las posibles extensiones autoadjuntas. Por tanto, el dominio puede tomarse

$$D_{n,\theta}^U = \left\{ \psi \in L^2(R_+, r dr) \mid \psi = \psi_0 + C(\phi_+ + U\phi_+) \right\}, \quad (64)$$

donde C es una constante cualquiera y las funciones ψ_0 pertenecen al dominio de definición inicialmente impuesto, de modo que son funciones de soporte compacto y se anulan en los extremos del dominio

$$\psi_0(r=0) = \psi_0(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (65)$$

$$\left. \frac{\psi_0}{dr} \right|_{r=0} = \left. \frac{\psi_0}{dr} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (66)$$

Además, puesto que nos encontramos en el caso con $d_+ = d_- = 1$ tenemos que el operador U viene caracterizado por una fase, de modo que $U\phi_+ = e^{i\mu}\phi_-$ con $\mu \in [0, 2\pi)$.

Con todo esto podemos finalmente escribir el dominio de definición como

$$D_{n,\theta}^\mu = \left\{ \psi \in L^2(R_+, r dr) \mid \psi = \psi_0 + C(\phi_+ + e^{i\mu}\phi_-) \right\}. \quad (67)$$

Otra forma más conveniente de escribir el dominio consiste en caracterizar las posibles extensiones autoadjuntas por medio de un parámetro real que denotaremos por β^{**} . Se tiene así tras realizar las pertinentes cuentas que pueden encontrarse en el [Apéndice D](#)

$$\begin{aligned} D_g^\beta &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)), H_r^\theta f \in L^2((0, \infty)) \mid \lim_{r \rightarrow 0} \left((\alpha_0 r)^{|g|} f(r) \right) = \right. \\ &= \left. \beta \lim_{r \rightarrow 0} \left((\alpha_0 r)^{-|g|} f(r) - \lim_{r' \rightarrow 0} \left((\alpha_0 r')^{|g|} f(r') \right) (\alpha_0 r)^{-2|g|} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (68)$$

En el caso particular con $\beta = 0$ se tiene la extensión autoadjunta de Friedrich [7], que además implica tomar $\lambda = 0$ en (16). Esta extensión se corresponde con el dominio asociado a una partícula libre sin interacción puntual delta en el origen.

El resto de casos con $\lambda \neq 0$ se corresponden por tanto con las extensiones de $\beta \neq 0$ y la interacción del potencial delta se tiene en cuenta en el dominio de definición [5][8].

Podemos establecer una relación^{§§} entre los dominios $D_{n,\theta}^\mu$ (67) y $D_g^\beta \equiv D_{n,\theta}^\beta \equiv D^\beta$ (68) tomando $f(r) = \psi(r)$ y $\alpha_0 = \zeta = \frac{2m\Lambda}{\hbar^2}$. Estudiando el comportamiento de las funciones en el límite cuando $r \rightarrow 0$ se llega a la conclusión de que para pertenecer al dominio D_g^β el

^{**} β es función del parámetro ν definido en [7], del que se puede consultar un resumen en el [Apéndice C](#).

^{§§}Para mayor detalle conviene consultar el [Apéndice E](#).

parámetro característico β debe tomar el valor

$$\beta = i \frac{2^{3g}}{\pi} \Gamma(g) \Gamma(g+1) \frac{e^{i\mu}(1-i)^{-g} - (1+i)^{-g}}{(1+i)^g + e^{i\mu}(1-i)^g} \quad \text{si } 0 < g < 1, \quad (69)$$

$$\frac{1}{\beta} = i \frac{2^{3g}}{\pi} \Gamma(g) \Gamma(g+1) \frac{e^{i\mu}(1-i)^{-g} - (1+i)^{-g}}{(1+i)^g + e^{i\mu}(1-i)^g} \quad \text{si } -1 < g < 0. \quad (70)$$

Notar pues que basta invertir la expresión de β cuando g cambia de signo.

Vemos que β es dependiente del parámetro μ y de n y θ a través de $g = n + \theta$ y además puede comprobarse que efectivamente toma valores reales. Para ello comprobamos que

$$i \frac{e^{i\mu}(1-i)^{-g} - (1+i)^{-g}}{(1+i)^g + e^{i\mu}(1-i)^g} \in \mathbb{R} \quad (71)$$

y como el resto de factores que entran en juego en las expresiones (69) y (70) son reales

$$\beta \equiv \beta(g, \mu) \equiv \beta(n, \theta, \mu) \in \mathbb{R} \quad \text{con } -1 < g < 1, g \neq 0. \quad (72)$$

Con todo lo anterior podemos escribir que el comportamiento cuando $r \rightarrow 0$ de las funciones pertenecientes a D_g^β será de la forma

$$\psi(r \rightarrow 0) \sim C \left((\alpha r)^{|g|} + \beta (\alpha r)^{-|g|} \right), \quad (73)$$

donde C es una constante que permite la normalización de la función.

De forma más extensa, particularizando para los distintos valores de β , esto implica

$$\psi(r \rightarrow 0) \sim C \left((\alpha r)^g + \beta (\alpha r)^{-g} \right) \quad \text{si } 0 < g < 1, \quad (74)$$

$$\psi(r \rightarrow 0) \sim C \left(\beta (\alpha r)^g + (\alpha r)^{-g} \right) \quad \text{si } -1 < g < 0. \quad (75)$$

Para ver que esto es así hacemos uso de (45) y (46) y suponemos una función

$$f(r \rightarrow 0) \sim a \left((\alpha r)^{|g|} + b (\alpha r)^{-|g|} \right). \quad (76)$$

Si queremos que $f(r)$ pertenezca al dominio de definición del Hamiltoniano dado por (68) entonces debe cumplirse

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left((\alpha_0 r)^{|g|} f(r) \right) &= \beta \lim_{r \rightarrow 0} \left((\alpha_0 r)^{-|g|} f(r) - \lim_{r' \rightarrow 0} \left((\alpha_0 r')^{|g|} f(r') \right) (\alpha_0 r)^{-2|g|} \right), \\ ab \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^{|g|} &= \beta a \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \iff \beta = b \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^{2|g|}. \end{aligned} \quad (77)$$

Volviendo a la expresión de $f(r)$ inicialmente supuesta

$$f(r \rightarrow 0) \sim a \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^{|g|} \left((\alpha_0 r)^{|g|} + b \frac{\alpha_0^{|g|}}{\alpha^{2|g|}} r^{-|g|} \right) = a \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^{|g|} \left((\alpha_0 r)^{|g|} + \beta (\alpha_0 r)^{-|g|} \right). \quad (78)$$

Podemos ver entonces que $\psi(r)$ y $f(r)$ toman la misma forma y por tanto pertenecen al dominio de definición D_g^β , como pretendíamos demostrar. El parámetro β que determina la extensión del dominio vendrá caracterizado por la expresión $\beta = b(\alpha_0/\alpha)^{2|g|}$.

Retomando el hilo del estudio de nuestro Hamiltoniano, recordamos que inicialmente vimos que su dominio era invariante bajo la actuación de los operadores D y K . Sin embargo, al encontrarnos en el dominio D_H dado por

$$D_H = \bigoplus_g \left[D_g^\beta \otimes (2\pi)^{-1/2} e^{ig\varphi} \right] \quad (79)$$

la situación es diferente y el dominio no permanece invariante tras actuar con dichos operadores. Para mostrarlo estudiamos la acción del operador G sobre el dominio de definición. Recordando la expresión de este operador

$$G = \frac{1}{4}(\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \left(\mathbb{1} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (80)$$

y tomando $\psi(r \rightarrow 0) \sim C \left((\alpha r)^{|g|} + \beta(\alpha r)^{-|g|} \right) \in D_g^\beta$

$$\begin{aligned} G\psi(r) \Big|_{r \rightarrow 0} &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \left(\psi + r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \Big|_{r \rightarrow 0} \sim \frac{1}{2} C \frac{\hbar}{i} \left(\left((\alpha r)^{|g|} + \beta(\alpha r)^{-|g|} \right) + |g| \left((\alpha r)^{|g|} - \beta(\alpha r)^{-|g|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} C \left((1 + |g|)(\alpha r)^{|g|} + (1 - |g|)\beta(\alpha r)^{-|g|} \right) = C' \left((\alpha r)^{|g|} + \beta'(\alpha r)^{-|g|} \right), \end{aligned} \quad (81)$$

con

$$\beta' = \beta \frac{1 - |g|}{1 + |g|} \neq \beta, \quad C' = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} (1 + |g|) C. \quad (82)$$

Se tiene así que, puesto que el caso $g = 0$ esta descartado^{¶¶}, el dominio D_g^β (y por tanto el dominio D_H) no permanece invariante bajo la actuación de G como puede verse dada la diferencia de β' respecto a β una vez actúa el operador. Consecuentemente, el dominio no será invariante bajo la actuación de D y K y la simetría establecida anteriormente de forma general estará rota de forma anómala en este dominio.

Notar que en el caso de la extensión de Friedrich tenemos $\beta = 0$ y trivialmente $\beta' = \beta = 0$ de modo que el dominio permanece invariante bajo G .

Regresando al caso $\beta \neq 0$ resulta entonces que las funciones del dominio no presentarán invariancia de escala y podrán existir estados ligados normalizables con energía distinta de 0. Para ver esto comprobaremos que, como ya mencionamos, es posible encontrar autoestados ligados de energía no nula

$$H_r \phi_g = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{g^2}{r^2} \right) \phi_g = -|E_g| \phi_g. \quad (83)$$

^{¶¶}En dicho caso las funciones del dominio toman otra forma y por consiguiente no podemos aplicar (82). Sin embargo, como se mostró en [5], también hay ruptura de invariancia.

Para resolver la ecuación introducimos el siguiente cambio de variable

$$z = \alpha r \quad \text{con} \quad \alpha^2 = \frac{2m|E_g|}{\hbar^2}, \quad (84)$$

de modo que la ecuación anterior queda reescrita

$$z^2 \frac{d^2 \phi_g}{dz^2} + z \frac{d\phi_g}{dz} - (z^2 + g^2) \phi_g = 0. \quad (85)$$

Se trata de nuevo de una ecuación de Bessel, cuya solución que se adapta a las condiciones del problema tratado [6] viene dada por

$$\phi_g(r) = C_g K_g(z), \quad (86)$$

donde de nuevo C_g es una constante que permite la normalización de la función y $K_g(z)$ es la función de Bessel modificada que tiene la propiedad de tender a 0 cuando $|z| \rightarrow \infty$, es decir, cuando $r \rightarrow \infty$. Tras realizar las cuentas pertinentes para obtener el valor de C_g y añadiendo la dependencia angular de φ

$$\psi_g(\mathbf{r}) \equiv \psi_g(r, \varphi) = \phi_g(r) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ig\varphi} = \left(\alpha \sqrt{\frac{2 \sin(g\pi)}{g\pi}} K_g(\alpha r) \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ig\varphi}, \quad (87)$$

cuyo autovalor de energía viene dado por (84)

$$E_g = -\frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2. \quad (88)$$

Estos son precisamente el autoestado y autovalor que se ofrecieron como solución al principio de la sección y queda probado que es posible su obtención.

Notar además que, cuando $r \rightarrow 0$ y en consecuencia $z \rightarrow 0$,

$$K_g(z \rightarrow 0) \sim z^{-g} (2^{g-1} \Gamma(g)) + z^g (2^{-g-1} \Gamma(-g)) \quad (89)$$

y haciendo uso de (68), considerando $f(r) = \phi_g(r)$ y $\alpha_0 = \alpha = \frac{\sqrt{2m|E_g|}}{\hbar}$ de acuerdo con (84), se concluye que $\phi_g(r)$ pertenece a D_g^β con un valor para el parámetro

$$\beta = 4^g \frac{\Gamma(g)}{\Gamma(-g)} \quad \text{si } 0 < g < 1, \quad (90)$$

$$\beta = \frac{1}{4^g \frac{\Gamma(g)}{\Gamma(-g)}} = 4^{-g} \frac{\Gamma(-g)}{\Gamma(g)} \quad \text{si } -1 < g < 0. \quad (91)$$

Podemos tomar una expresión reducida de modo que

$$\beta = 4^{|g|} \frac{\Gamma(|g|)}{\Gamma(-|g|)} \in \mathbb{R} \quad \text{si } -1 < g < 1, g \neq 0. \quad (92)$$

Esto permite escribir en el límite cuando $r \rightarrow 0$

$$\phi_g(r \rightarrow 0) \sim \alpha \sqrt{\frac{2 \sin(|g|\pi)}{|g|\pi}} \left(2^{-(1+|g|)} \Gamma(-|g|) \left((\alpha r)^{|g|} + 4^{|g|} \frac{\Gamma(|g|)}{\Gamma(-|g|)} (\alpha r)^{-|g|} \right) \right). \quad (93)$$

Una vez obtenida la expresión de dicho autoestado podemos obtener el término anómalo de la ecuación de Heisenberg modificada para el operador D (podría hacerse igualmente con K), que deberá ser distinto de 0 para explicar esta situación. Se tiene así, según (7)

$$\mathcal{A} = \frac{i}{\hbar} \langle \psi_g | (H^\dagger - H) D \psi_g \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \psi_g | (H^\dagger - H) G \psi_g \rangle, \quad (94)$$

donde los operadores usados toman sus expresiones de (28) y (18)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (95)$$

$$D = tH - G, \quad G = \frac{1}{4} (\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \left(\mathbb{1} + r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (96)$$

Retomando los cálculos pertinentes

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{i}{\hbar} \langle \psi_g | (H^\dagger - H) G \psi_g \rangle = -\frac{i}{\hbar} \left(\langle \psi_g | H^\dagger G \psi_g \rangle - \langle \psi_g | H G \psi_g \rangle \right) = \\ &= \int_0^\infty \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{g^2}{r^2} \right) \phi_g^* \left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g r dr - \\ &= \int_0^\infty \frac{\hbar^2}{4m} \phi_g^* \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{g^2}{r^2} \right) \left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g r dr = \\ &= \left[\frac{\hbar^2}{4m} \left(r \frac{d\phi_g^*}{dr} \right) \left(\left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g \right) \right]_0^\infty - \left[\frac{\hbar^2}{4m} \phi_g^* \left(r \frac{d}{dr} \left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g \right) \right]_0^\infty, \quad (97) \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la integración por partes.

Puesto que $\phi_g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ la contribución a la integral se dará con $r \rightarrow 0$. Introduciendo (93) en esta expresión permite obtener finalmente, según las cuentas del Apéndice F

$$\mathcal{A} = -\frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 \left[\frac{2 \sin(|g|\pi)}{|g|\pi} \left(2^{-(1+|g|)} \Gamma(-|g|) \right)^2 4^{|g|} \frac{\Gamma(|g|)}{\Gamma(-|g|)} (-2|g|^2) \right]. \quad (98)$$

Consultando [6] puede verse que para los posibles valores de g , es decir $-1 < g < 1$ con $g \neq 0$, encontramos que

$$\frac{2 \sin(|g|\pi)}{|g|\pi} \left(2^{-(1+|g|)} \Gamma(-|g|) \right)^2 4^{|g|} \frac{\Gamma(|g|)}{\Gamma(-|g|)} (-2|g|^2) = 1, \quad (99)$$

de forma que podemos tomar, para todo valor de g aceptable

$$\mathcal{A} = -\frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 = -|E_g|. \quad (100)$$

Además, este resultado se mantiene en el límite $|g| \rightarrow 0$ y consecuentemente el resultado

ya obtenido en [5] queda aquí incluido.

El hecho de que D no mantenga invariante el dominio de definición D_H hace que aparezca la contribución extra del término anómalo \mathcal{A} de modo que es necesario emplear la versión modificada de la ecuación de Heisenberg.

Veamos esto hallando la derivada temporal del promedio del operador dilatación $\langle D \rangle$ haciendo uso de los estados ligados hallados anteriormente con (87) y (93)

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv \psi_g(r, \varphi) = \phi_g(r) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ig\varphi}, \quad (101)$$

$$\phi_g(r \rightarrow 0) \sim \alpha \sqrt{\frac{2 \sin(|g|\pi)}{|g|\pi}} \left(2^{-(1+|g|)} \Gamma(-|g|) \left((\alpha r)^{|g|} + 4^{|g|} \frac{\Gamma(|g|)}{\Gamma(-|g|)} (\alpha r)^{-|g|} \right) \right), \quad (102)$$

junto con (18)

$$D = tH - G, \quad G = \frac{1}{4} (\mathbf{rp} + \mathbf{pr}) = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \left(\mathbf{1} + r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (103)$$

Escribamos entonces

$$\langle D \rangle = t \langle H \rangle - \langle G \rangle = t \langle \psi_g | H \psi_g \rangle - \langle \psi_g | G \psi_g \rangle. \quad (104)$$

Para hallar el resultado hemos de recordar que ψ_g son autoestados del Hamiltoniano, de modo que

$$\langle \psi_g | H \psi_g \rangle = -|E_g| = -\frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2. \quad (105)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle \psi_g | G \psi_g \rangle &= \int_0^\infty \phi_g^* G \phi_g r dr = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \int_0^\infty \phi_g^* \left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g r dr = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \left(1 + \int_0^\infty \phi_g^* \left(r^2 \frac{d\phi_g}{dr} \right) dr \right). \end{aligned} \quad (106)$$

Es evidente que no presenta dependencia temporal, por lo que

$$\frac{d}{dt} \langle G \rangle = 0 \quad (107)$$

y así

$$\frac{d}{dt} \langle D \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi_g | D \psi_g \rangle = \frac{d}{dt} \left(-t \frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 = \mathcal{A}, \quad (108)$$

cumpliendo la ecuación de Heisenberg modificada, que recordando (6), toma la forma

$$\frac{d}{dt} \langle D \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi_g | D \psi_g \rangle = \underbrace{\left\langle \psi_g \left| \frac{\partial D}{\partial t} \psi_g \right. \right\rangle}_{=0} + \frac{i}{\hbar} \langle \psi_g | [H, D] \psi_g \rangle + \mathcal{A} = \mathcal{A}. \quad (109)$$

La nulidad de esa suma de términos ya se demostró en (23) usando $\frac{\partial D}{\partial t} = H$ y $\frac{i}{\hbar} [D, H] = H$.

3. Ruptura de la degeneración accidental y Supersimetría en el átomo de hidrógeno

El conocido caso del átomo de hidrógeno no relativista puede estudiarse [9] como un núcleo constituido por un protón alrededor del cuál orbita un electrón de modo que la interacción se puede modelar por medio de la fuerza de Coulomb entre ambas partículas. Considerándolo como un sistema de dos partículas podemos estudiarlo desde el sistema de referencia centro de masas y, puesto que el núcleo es mucho más masivo que el electrón, la posición del centro de masas se puede aproximar a la posición del protón que constituye el núcleo. Asimismo la masa reducida μ puede aproximarse a la del electrón.

El potencial causante de la interacción puede escribirse como $V(r) = -\frac{e^2}{r}$, en unidades del sistema cgs. Como se trata de la interacción entre dos partículas estamos ante un potencial central (que por tanto presenta simetría esférica) por lo que resulta cómodo emplear coordenadas polares esféricas. Además, aprovechándonos de la simetría del problema, tomaremos funciones de ondas que sean tanto autoestados del Hamiltoniano H como autoestados de \mathbf{L}^2 y L_z . Concretamente se expresarán como

$$\psi_{l,m}(\mathbf{r}) = R_l(r)Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (110)$$

donde $Y_l^m(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos y la función de ondas radial $R_l(r)$ satisface la siguiente ecuación radial con $\mu = \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}\right)^{-1} \approx m_e$

$$\left(\frac{\mathbf{p}_r^2}{2m_e} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r}\right) R_l(\mathbf{r}) = ER_l(\mathbf{r}), \quad (111)$$

donde $l(\geq 0)$ es un número cuántico entero que cuantifica el momento angular orbital y

$$\mathbf{p}_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}. \quad (112)$$

Para facilitar los cálculos realizamos la sustitución

$$R_l(r) \equiv \frac{1}{r} u_l(r), \quad (113)$$

donde $u_l(r)$ se conoce como la función de ondas radial reducida y satisface la ecuación radial reducida

$$H_l u_l(r) = E u_l(r), \quad (114)$$

con el Hamiltoniano H_l expresado de forma

$$H_l = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{r}. \quad (115)$$

Introduciendo las definiciones

$$\varrho = \frac{\sqrt{8m_e|E|}}{\hbar}r, \quad \lambda = \frac{e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m_e}{2|E|}}, \quad (116)$$

podemos reescribir (114) tomando $\bar{u}_l(\varrho) \equiv u_l(r)$

$$\frac{d^2\bar{u}_l(\varrho)}{d\varrho^2} + \left(\frac{\lambda}{\varrho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right) \bar{u}_l(\varrho) = 0. \quad (117)$$

El método comúnmente usado para resolver este tipo de ecuaciones se basa en considerar el comportamiento asintótico de $\bar{u}_l(\varrho)$. Para ello estudiamos los siguientes casos:

- $r \rightarrow 0 \iff \varrho \rightarrow 0$

Los términos predominantes permiten tomar

$$\frac{d^2\bar{u}_l}{d\varrho^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}\bar{u}_l = 0 \quad (118)$$

y se extrae como solución $\bar{u}_l(\varrho) \sim \varrho^{-l}, \varrho^{l+1}$.

Sin embargo, debemos tener en cuenta las condiciones de normalización de modo que hay que ser cauteloso con ϱ^{-l} puesto que puede causar problemas ($l \geq 0$). Actuando como en la sección anterior

$$\int \varrho^{-2l} d\varrho < \infty \iff \varrho^{-2l} > \varrho^{-1} \iff l < \frac{1}{2} \implies l = 0. \quad (119)$$

Si se toma $\bar{u}_l(\varrho) = \varrho^{l+1}$ la condición de normalización se cumple para todo valor de l (recordando que estamos en el caso $\varrho \rightarrow 0$).

Aquí pretendemos realizar un estudio sobre el estado fundamental de modo que $l = 0$ y decidimos tomar $\bar{u}_l(\varrho) \sim \varrho^{-l}$, en el presente caso asintótico.

- $r \rightarrow \infty \iff \varrho \rightarrow \infty$

Los términos que predominan son ahora

$$\frac{d^2\bar{u}_l}{d\varrho^2} - \frac{1}{4}\bar{u}_l = 0, \quad (120)$$

lo que permite tomar $\bar{u}_l(\varrho) \sim e^{-\varrho/2}$ como única solución. Se ha tenido en cuenta que debe ser normalizable y por tanto la exponencial positiva (que también es posible solución) queda descartada.

Una vez estudiados los comportamientos de la función $\bar{u}_l(\varrho)$, resulta conveniente definir una función $v_l(\varrho)$ tal que

$$\bar{u}_l(\varrho) = \varrho^{-l} e^{-\varrho/2} v_l(\varrho). \quad (121)$$

Introduciendo esta expresión para $\bar{u}_l(\varrho)$ en (117) se tiene, tras una serie de pasos detallados en el Apéndice G, la siguiente ecuación

$$\varrho \frac{d^2 v_l(\varrho)}{d^2 \varrho} + (-2l - \varrho) \frac{dv_l(\varrho)}{d\varrho} - (-l - \lambda) = 0. \quad (122)$$

Resulta entonces que estamos ante una ecuación hipergeométrica confluyente de parámetros $b = -2l$ y $a = -l - \lambda$, cuya solución general viene dada por una combinación lineal de las siguientes funciones

$$M(a, b, \varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \varrho^n}{(b)_n n!} = 1 + \frac{a\varrho}{b} + \frac{(a)_2 \varrho^2}{(b)_2 2!} + \dots + \frac{(a)_n \varrho^n}{(b)_n n!} + \dots, \quad (123)$$

$$U(a, b, \varrho) = \frac{\pi}{\sin(\pi b)} \left(\frac{M(a, b, \varrho)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - \varrho^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, \varrho)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right), \quad (124)$$

donde se ha usado $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$ y $(a)_0 = 1$.

Puesto que el caso $l = 0$ nos brinda $b = 0$ se tiene que la función $M(a, b, \varrho)$ es divergente y deberemos tomar entonces únicamente $U(a, b, \varrho)$ como posible solución y así

$$\bar{u}_l(\varrho) = A e^{-\varrho/2} U(-\lambda, 0, \varrho) \quad (125)$$

donde A es una constante que permite la normalización de la función de ondas.

Cabe preguntarse si la solución que se obtiene en caso de tomar $\bar{u}_l(\varrho \rightarrow 0) \sim \varrho^{l+1}$ es igualmente válida y como se relaciona con la ya obtenida. Para ello seguimos los mismos pasos anteriores y llegamos a

$$\varrho \frac{d^2 v_l(\varrho)}{d^2 \varrho} + (2l + 2 - \varrho) \frac{dv_l(\varrho)}{d\varrho} - (l + 1 - \lambda) = 0. \quad (126)$$

De nuevo en el caso $l = 0$ solo podemos contar con la función $U(1 - \lambda, 2, \varrho)$ y tomamos por solución

$$\bar{u}_l(\varrho) = B \varrho e^{-\varrho/2} U(1 - \lambda, 2, \varrho), \quad (127)$$

con B una nueva constante de normalización.

Este resultado es perfectamente válido y además puede demostrarse que coincide con (125). Para ello nos referimos a la siguiente propiedad de la función $U(a, b, \varrho)$ [6], que expresa

$$U(a, 1 - n, \varrho) = \varrho^n U(a + n, 1 + n, \varrho). \quad (128)$$

Si se toma $a = -\lambda$ y $n = 1$ queda explícita la relación buscada

$$U(-\lambda, 0, \varrho) = \varrho U(1 - \lambda, 2, \varrho), \quad (129)$$

de modo que se demuestra así la coincidencia de soluciones (con $A = B$), que es lo que uno podía esperar dada la validez de ambas.

Retomando el hilo de nuestros razonamientos en la sección anterior, todavía cabe hallar el dominio de definición del Hamiltoniano que, para $l = 0$, engloba las funciones de onda previamente halladas y en el cual el operador es autoadjunto. Tal dominio es

$$D_H = \left[D_0^\nu \otimes \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \right], \quad (130)$$

puesto que $\psi_{0,0}(r) \equiv \psi_{l=m=0}(r) = R_0(r)Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}}u_0(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r}}\bar{u}_0(\varrho)$ que solo depende de la coordenada radial al ser el armónico esférico independiente de θ y φ ($l = 0$). El dominio correspondiente al subespacio con $l = 0$ puede caracterizarse mediante un parámetro que denominaremos ν y escribimos $D_0^\nu \equiv D_{l=0}^\nu$ de acuerdo con el [Apéndice H](#)

$$\begin{aligned} D_0^\nu &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)), H_l f \in L^2((0, \infty)) \left| \nu \lim_{r \rightarrow 0} (f(\rho)) = \right. \right. \\ &= \left. \lim_{r \rightarrow 0} \left(\rho^{-1} f(\rho) - \lim_{r' \rightarrow 0} (f(\rho')) (\rho^{-1} - \Lambda \log(\rho) - \Lambda/2) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (131)$$

En este caso tomamos $\rho = \varrho = \frac{\sqrt{8m_e|E|}}{\hbar}r$ y $\Lambda = \lambda = \frac{e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m_e}{2|E|}}$ coincidiendo con las expresiones en (116). Teniendo en cuenta las autofunciones que se han obtenido en el caso $l = 0$ (125) o (127) y analizando su comportamiento asintótico, se encuentra que una vez que se ha fijado la extensión autoadjunta (se fija el valor de ν para D_0^ν), los posibles valores de λ vienen dados por las soluciones de la ecuación

$$\nu = \lambda \left(\frac{3}{2} - 2\gamma - \psi(1 - \lambda) \right), \quad (132)$$

donde γ es la constante de Euler con valor numérico $\gamma \approx 0.577216$ y $\psi(1 - \lambda)$ representa la función digamma evaluada en $1 - \lambda$.

El caso particular definido en el límite $\nu \rightarrow \infty$ se conoce como la extensión autoadjunta de Friedrich [7], que se establece como el dominio de definición que el alumno comúnmente acostumbra a estudiar y para el que las soluciones de (132) son $\lambda = n$ (con $n = 1, 2, \dots$ cualquier entero mayor que cero).

Resulta de gran interés analizar las simetrías e invariancias que presenta el átomo de hidrógeno en un caso general [9] (tomando $l \neq 0$ de forma que salimos del dominio establecido D_0^ν o tomando la extensión de Friedrich en dicho dominio). Entonces el Hamiltoniano del átomo de hidrógeno es invariante bajo el álgebra de Lie $\mathbf{SO}(4) \approx (\mathbf{SU}(2) \otimes \mathbf{SU}(2))/\mathbf{Z}_2$ generada por los operadores \mathbf{I} y \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{L} + \sqrt{-\frac{m_e}{2H}} \mathbf{M} \right], \quad \mathbf{I} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{L} - \sqrt{-\frac{m_e}{2H}} \mathbf{M} \right], \quad (133)$$

donde \mathbf{L} y \mathbf{M} denotan el operador vectorial momento angular orbital y el operador de

Runge-Lenz respectivamente

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{2m_e} (\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{p}) - \frac{e^2}{r} \mathbf{r}. \quad (134)$$

De este modo y tras operar se obtiene que $[\mathbf{I}, H] = [\mathbf{K}, H] = 0$ y el dominio de definición tomado para el Hamiltoniano permanece invariante bajo la actuación de dichos operadores. Aparece así la degeneración (accidental) del espectro del Hamiltoniano, que puede entenderse reescribiendo el Hamiltoniano en función de estos operadores

$$H = -\frac{m_e e^4}{2} \frac{1}{2(\mathbf{I}^2 + \mathbf{K}^2) + \hbar^2}. \quad (135)$$

Dado que tanto \mathbf{I} como \mathbf{K} cumplen las reglas de conmutación propias de los momentos angulares, se comportarán como tales y esto permite que, eligiendo una base común de autoestados de H , \mathbf{I}^2 , I_z , \mathbf{K}^2 y K_z , los autovalores del Hamiltoniano queden expresados

$$E_{i,k} = -\frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2 \frac{1}{2i(i+1) + 2k(k+1) + 1}, \quad (136)$$

donde $\alpha = e^2/\hbar c$ denota la constante de estructura fina e i y k se corresponden con números cuánticos enteros asociados a los operadores \mathbf{I}^2 y \mathbf{K}^2 .

Introducimos ahora un nuevo número cuántico entero definido como $n = 2i + 1$. Además, dado que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = 0$ resulta que $\mathbf{I}^2 = \mathbf{K}^2$ y entonces $i = k$. Con estas consideraciones la expresión para los autovalores arroja el resultado

$$E_n \equiv E_{i,k} = -\frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2 \frac{1}{n^2}, \quad (137)$$

que es la expresión de la energía que acostumbramos a obtener para todo valor de l . Estos valores ponen de manifiesto la degeneración accidental de la energía en el átomo de hidrógeno cuyo origen es dinámico y se debe al grupo simetrías expuestas anteriormente que dejan invariante el Hamiltoniano. Este grupo resulta mayor que el esperado grupo de las rotaciones y por tanto hay una mayor degeneración.

No obstante, en el sector $l = 0$, estos desarrollos y resultados obtenidos dejan de tener validez cuando nos salimos de la extensión de Friedrich y por lo tanto $\nu \not\rightarrow \infty$ (por ejemplo añadiendo una interacción delta en el origen como ya se trató en la sección anterior). En este caso se rompe la degeneración accidental y los autovalores del Hamiltoniano en el sector $l = 0$ toman toman la siguiente forma

$$E_n = -\frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2 \frac{1}{\lambda_n^2}, \quad (138)$$

con λ_n dado en función del parámetro ν que define la extensión según (132).

Como se indicó anteriormente, en el caso en que $\nu \rightarrow \infty$, λ_n toma valores enteros y recuperamos la expresión habitual, es decir (137).

Concluimos entonces que, actuando en $l = 0$ con una extensión autoadjunta distinta de la Friedrich, la simetría establecida por los operadores \mathbf{K} y \mathbf{I} se encuentra anómalamente rota al no poder ser implementada cuánticamente en este dominio de definición. Para demostrarlo basta tomar la función de ondas usando (125) perteneciente al dominio D'_0 y actuar sobre ella con cualquiera de los operadores tratados para ver cómo la función resultante no pertenece al dominio.

La función de ondas en el límite cuando $r \rightarrow 0$ queda

$$\psi_{0,0}(r \rightarrow 0) = R_0(r)Y_0^0(\theta, \varphi)\Big|_{r \rightarrow 0} \sim -C \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\lambda\Gamma(-\lambda)} r^{-1}, \quad (139)$$

con C una constante de normalización y donde no aparecen las coordenadas angulares (estamos trabajando con $l = 0$).

Ambos operadores vectoriales \mathbf{I} y \mathbf{K} son, en el caso de $l = 0$ proporcionales a \mathbf{M} , de modo que es suficiente con ver la actuación de M_z

$$M_z \psi_{0,0}(r)\Big|_{r \rightarrow 0} = \left(-e^2 \frac{z}{r}\right) \psi_{0,0}\Big|_{r \rightarrow 0} \sim \left(C \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\lambda\Gamma(-\lambda)}\right) \frac{e^2}{r^2} z. \quad (140)$$

La simple comparación del resultado con (139) permite asegurar que el nuevo estado no pertenece a D'_0 y tras proceder de igual forma con el resto de componentes del operador obtenemos que igualmente se salen del dominio. Se tiene así que \mathbf{M} y por consiguiente los operadores que generan el álgebra de Lie \mathbf{I} y \mathbf{K} no dejan invariante el dominio de definición del Hamiltoniano tomado en el sector $l = 0$. Por tanto (137) no puede aplicarse y la degeneración accidental del átomo de hidrógeno se encuentra anómalamente rota. Por otro lado, en el caso de $l \neq 0$ o tomando la extensión de Friedrich, la invariancia se mantiene, así como la degeneración y expresión habitual de los autovalores del Hamiltoniano.

Podríamos a su vez calcular el término anómalo \mathcal{A} y ver cómo se cumple la ecuación de Heisenberg modificada para cualquier componente de \mathbf{I} o \mathbf{K} , al igual que se hizo en la sección anterior. Sin embargo resulta mucho más interesante e instructivo comprobar como la Supersimetría en el átomo de hidrogeno con momento angular orbital nulo ($l = 0$) se encuentra espontáneamente rota en el dominio de definición que estamos tratando. Para ello emplearemos el formalismo de la Mecánica Cuántica Supersimétrica (SQM) [10], del que podemos ver un mayor desarrollo en el [Apéndice I](#). Sin embargo, para los resultados y conclusiones que se pretenden obtener bastará con unas nociones fundamentales.

Este formalismo se basa en la existencia de un superpotencial $W(x)$ tal que permite definir los siguientes operadores

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (141)$$

$$A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x). \quad (142)$$

Estos a su vez permiten obtener una pareja de Hamiltonianos

$$H_1 = A^\dagger A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}, \quad (143)$$

$$H_2 = AA^\dagger = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \quad V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}. \quad (144)$$

Los potenciales $V_1(x)$ y $V_2(x)$ obtenidos a partir del superpotencial $W(x)$ se conocen como una pareja de potenciales supersimétricos.

Los Hamiltonianos (143) y (144) son semi-definidos positivos por lo que sus autovalores deben cumplir $E_n^{(1,2)} \geq 0$. Sin embargo, cabe notar que los autovalores de ambos Hamiltonianos están relacionados entre sí. Para ello cabe ver que con H_1 dado por (143)

$$H_1 \psi_n^{(1)} = A^\dagger A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}. \quad (145)$$

Si ahora multiplicamos ambos lados por el operador A obtenemos:

$$AH_1 \psi_n^{(1)} = AA^\dagger A \psi_n^{(1)} = H_2 \left(A \psi_n^{(1)} \right) = E_n^{(1)} \left(A \psi_n^{(1)} \right). \quad (146)$$

Lo que implica que si $\psi_n^{(1)}$ son autoestados de H_1 con autovalor $E_n^{(1)}$, $A \psi_n^{(1)}$ son también autoestados de H_2 con idénticos autovalores $E_n^{(1)}$.

El mismo razonamiento puede llevarse a cabo tomando inicialmente los autoestados $\psi_n^{(2)}$ de H_2 dado por (144) y se obtiene

$$A^\dagger H_2 \psi_n^{(2)} = A^\dagger AA^\dagger \psi_n^{(2)} = H_1 \left(A^\dagger \psi_n^{(2)} \right) = E_n^{(2)} \left(A^\dagger \psi_n^{(2)} \right). \quad (147)$$

Vemos así que la aplicación de A o A^\dagger nos permite pasar de autoestados de H_1 a autoestados de H_2 y viceversa. Además el autovalor asociado se mantiene invariable.

Cabe mencionar que es costumbre trabajar con H_1 por defecto y así lo haremos en el resto del escrito.

La relación mostrada a partir de (145) y (146) se rompe en el caso en que $A \psi_0^{(1)} = 0$, es decir, cuando el estado fundamental de H_1 queda “aniquilado” por el operador A . Entonces este autoestado está desapareado (a diferencia del resto) y H_2 preserva el espectro de energías de H_1 a excepción del autovalor asociado a este estado, el nivel fundamental.

En este tipo particular de casos se dice que la Supersimetría (SUSY) permanece sin romper y podemos además establecer las principales relaciones entre autoestados y autovalores de H_1 y H_2 particularizadas a la situación

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0, \quad (148)$$

$$\psi_n^{(2)} \propto A \psi_{n+1}^{(1)}, \quad (149)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} \propto A^\dagger \psi_n^{(2)}. \quad (150)$$

En el caso del átomo de hidrógeno (interacción de Coulomb tridimensional) los estados a los que se refiere la teoría de la Mecánica Cuántica Supersimétrica son las funciones de ondas radiales reducidas $\bar{u}_l(\varrho) \equiv u_l(r)$. Si además tomamos dichas funciones pertenecientes al dominio de definición D_0' para el átomo de hidrógeno, puede observarse que la actuación del operador A sobre la función de ondas radial reducida resulta en una nueva función no nula y por tanto podemos afirmar que la Supersimetría se encuentra espontáneamente rota para ese dominio de $l = 0$. Para ello debemos conocer primero la forma del superpotencial. Tomando unidades tales que $\hbar = 2m = 1$ escribimos

$$W(r) = \frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{l+1}{r} \stackrel{l=0}{=} \frac{e^2}{2} - \frac{1}{r}. \quad (151)$$

Haciendo uso ahora de (141) con $x \equiv r$ y $\hbar = 2m = 1$ obtenemos el operador buscado

$$A(l=0) = \frac{d}{dr} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{r}. \quad (152)$$

Simplemente resta ver su actuación sobre $u_0(r)$ que, por comodidad, evaluaremos en límite cuando $r \rightarrow 0$

$$A(l=0)u_0(r)\Big|_{r \rightarrow 0} \sim \left(\frac{d}{dr} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{r} \right) \left(-\frac{C}{\lambda\Gamma(-\lambda)} \right) = \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{r} \right) \left(-\frac{C}{\lambda\Gamma(-\lambda)} \right), \quad (153)$$

donde C permite la normalización.

Obviamente la función resultante es distinta de 0 y, por tanto, podemos afirmar que la Supersimetría esta anómalamente rota cuando estudiamos este dominio del Hamiltoniano. Si se toma $l \neq 0$ o la extensión de Friedrich con $l = 0$, la actuación del operador A da como resultado un valor nulo y la Supersimetría permanece sin romper.

4. Conclusiones

A lo largo de todo el trabajo se han proporcionado ejemplos de cómo simetrías que clásicamente eran perfectamente aplicables llegan a encontrarse anómalamente rotas al tratarlas de forma cuántica. Esto se debe, como ya ha sido mencionado en ciertas ocasiones, a que la aparición de dominios asociados a los observables una vez cuantizamos el sistema puede impedir la implementación del álgebra de invariancia correspondiente. Más específicamente, la ruptura de simetría se produce cuando los operadores que generan dicha simetría no dejan invariante el dominio de definición del Hamiltoniano y consecuentemente llega a aparecer un término anómalo cuya implementación requiere de la ecuación de Heisenberg modificada. La validez de esta ecuación ha sido comprobada en el caso bidimensional de la partícula libre sometida a una interacción delta en el origen demostrando así la ruptura de simetría conforme para el dominio tomado con $g \neq 0$.

Respecto a los dominios de definición, es notable mencionar cómo en el caso bidimensional la contribución angular del momento lineal produce infinitas extensiones angulares

en el dominio. Todas ellas dependen de $g = n + \theta \in \mathbb{R}$ y se solapan con el dominio radial que hemos visto depende de un parámetro (β en nuestro caso). Esto no es así en el caso del átomo de hidrógeno tridimensional donde la contribución angular queda cuantificada en función del número cuántico $l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ proporcional a $l(l+1)/r^2$. Luego, particularizando como hicimos al caso $l = 0$, solo existe una única extensión angular.

Es más, en este caso, dado que repetir la obtención del término \mathcal{A} no aportaba mucho, nos centramos en ver cómo la Supersimetría se encontraba espontáneamente rota ya que el operador A era incapaz de “aniquilar” el estado fundamental, con $l = 0$, perteneciente a un dominio con valores de ν finitos.

Finalmente añadir que este trabajo ha sido escrito intentando enfocar y enfatizar la relevancia que tienen los dominios de los operadores a la hora de afrontar el estudio de muy diferentes sistemas. Aunque en un primer contacto con el formalismo mecanocuántico no se tengan en cuenta para facilitar el aprendizaje del alumno, su utilidad es digna de mención y aquí se intenta ofrecer un estudio más profundo y complementar lo aprendido en el Grado. Prueba de ello son los numerosos apéndices que a continuación se disponen.

Bibliografía

- [1] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Lalöe, and Susan Reid Hemley. *Quantum mechanics*. A Wiley-Interscience publication. Wiley [u.a.], New York, NY [u.a.], 1977. ;.
- [2] J. G. Esteve. Anomalies in conservation laws in the hamiltonian formalism. *Phys. Rev. D*, 34:674–677, Jul 1986.
- [3] V D’Alfaro, S Fubini, and G Furlan. Conformal invariance in quantum mechanics. *Nuovo Cimento A*, 34(CERN-TH-2115):569–612. 57 p, Jan 1976.
- [4] J. G. Esteve. Apuntes de la asignatura mecánica cuántica. Disponibles en Moodle.
- [5] J. G. Esteve. Origin of the anomalies: The Modified Heisenberg equation. *Phys. Rev. D*, 66:125013, 2002.
- [6] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ninth dover printing, tenth gpo printing edition, 1964.
- [7] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, and H. Holden. *Solvable Models in Quantum Mechanics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [8] Vinicius Salem, Ramon F. Costa, Edilberto O. Silva, and Fabiano M. Andrade. Self-adjoint extension approach for singular hamiltonians in $(2 + 1)$ dimensions. *Frontiers in Physics*, 7:175, 2019.
- [9] J.D. Garcia, A. Galindo, L. Alvarez-Gaume, and P. Pascual. *Quantum Mechanics I*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [10] Avinash Khare. Supersymmetry in quantum mechanics. *AIP Conference Proceedings*, 744(1):133–165, 2004.
- [11] R. Jackiw. Delta function potentials in two-dimensional and three-dimensional quantum mechanics. 1 1991.
- [12] W. Bulla and F. Gesztesy. Deficiency indices and singular boundary conditions in quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 26(10):2520–2528, 1985.

A. Invariancia conforme (caso clásico)

En el caso de una partícula libre en un sistema bidimensional, el Lagrangiano \mathcal{L} y el Hamiltoniano H se escriben en coordenadas polares

$$\mathcal{L} = H = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right), \quad (154)$$

donde el punto sobre las variables indica la derivada respecto al tiempo.

Puesto que el origen es un punto singular, hemos prescindido de él así como de la interacción delta. Sin embargo un tratamiento más completo (y que escapa de los objetivos buscados) puede consultarse el trabajo de Jackiw [11].

Con estas consideraciones podemos determinar las coordenadas generalizadas q_i y los momentos generalizados p_i

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad (155)$$

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{r}, \quad p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = mr^2\dot{\theta}. \quad (156)$$

Esto permite reescribir el Hamiltoniano anterior como

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} \right). \quad (157)$$

En el formalismo clásico los generadores del álgebra de invariancia $SO(2,1)$ son, junto con el Hamiltoniano

$$D = tH - G = tH - \frac{1}{2}(\mathbf{r}\mathbf{p}), \quad (158)$$

$$K = -t^2H + 2tD + \frac{m}{2}R^2 = t^2H - t(\mathbf{r}\mathbf{p}) + \frac{m}{2}r^2. \quad (159)$$

Ahora, haciendo uso corchete de Poisson $\{A, B\}$ definido como

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \quad (160)$$

obtenemos las siguientes expresiones teniendo en cuenta que $\mathbf{r}\mathbf{p} = q_1 p_1$:

$$\begin{aligned} \{D, H\} &= -\{G, H\} = -\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \\ &= -\left(\frac{1}{2}p_1 \frac{1}{m}p_1 - \frac{1}{2}q_1 \left(-\frac{1}{m} \frac{p_2^2}{q_1^3} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2m} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} \right) = -H. \end{aligned} \quad (161)$$

$$\{H, K\} = 2t\{H, D\} + \frac{m}{2}\{H, r^2\}, \quad (162)$$

$$\{H, r^2\} = \{H, q_1^2\} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_1^2}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial q_1^2}{\partial q_i} \right) = -2q_1 \frac{1}{m} p_1, \quad (163)$$

$$\implies \{H, K\} = 2tH - \frac{m}{2} \frac{2}{m} q_1 p_1 = 2tH - q_1 p_1 = 2D. \quad (164)$$

$$\{K, D\} = -t^2\{H, D\} + \frac{m}{2}\{r^2, D\} = -t^2\{H, D\} + \frac{m}{2} (t\{r^2, H\} - \{r^2, G\}), \quad (165)$$

$$\{r^2, D\} = t\{r^2, H\} - \{r^2, G\}, \quad (166)$$

$$\{r^2, G\} = \{q_1^2, G\} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial q_1^2}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial q_1^2}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = 2q_1 \frac{1}{2} q_1 = q_1^2, \quad (167)$$

$$\implies \{K, D\} = -t^2 H + \frac{m}{2} \left(t \left(\frac{2}{m} q_1 p_1 \right) - q_1^2 \right) = -t^2 H + t(q_1 p_1) - \frac{m}{2} q_1^2 = -K. \quad (168)$$

B. Invariancia conforme (caso cuántico)

El Hamiltoniano de una partícula libre en un sistema bidimensional con interacción $\delta^2(\mathbf{r})$ se escribe, sin tener en cuenta los dominios

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \lambda \frac{1}{r} \delta(r), \quad (169)$$

donde

$$\mathbf{p}^2 \psi = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right). \quad (170)$$

Tenemos los operadores que, junto con el Hamiltoniano H , definen el álgebra de invariancia $SO(2,1)$

$$D = tH - G = tH - \frac{1}{4} (\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{r}), \quad (171)$$

$$K = -t^2 H + 2tD + \frac{m}{2} r^2 = t^2 H - \frac{t}{2} (\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{r}) + \frac{m}{2} r^2. \quad (172)$$

Previamente estudiamos la actuación de los siguientes operadores

$$\mathbf{r}\mathbf{p} \psi = \frac{\hbar}{i} r \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (173)$$

$$\mathbf{p}\mathbf{r} \psi = \frac{\hbar}{i} \nabla(\mathbf{r}\psi) = \frac{\hbar}{i} (\psi \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \psi) = \frac{\hbar}{i} \left(2\psi + r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad (174)$$

de modo que ahora podemos comprobar las relaciones de conmutación usando ahora los corchetes de Lie definidos según

$$[A, B] = AB - BA. \quad (175)$$

Procedemos entonces a la obtención de las relaciones de conmutación buscadas:

$$[D, H] = -[G, H] = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2m} [\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{r}, \mathbf{p}^2] + \lambda \left[\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{r}, \frac{1}{r} \delta(r) \right] \right), \quad (176)$$

$$[\mathbf{r}\mathbf{p}, \mathbf{p}^2] = -2\frac{\hbar}{i} \mathbf{p}^2, \quad [\mathbf{p}\mathbf{r}, \mathbf{p}^2] = -2\frac{\hbar}{i} \mathbf{p}^2, \quad (177)$$

$$\left[\mathbf{r}\mathbf{p}, \frac{1}{r} \delta(r) \right] = -2\frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \delta(r), \quad \left[\mathbf{p}\mathbf{r}, \frac{1}{r} \delta(r) \right] = -2\frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \delta(r), \quad (178)$$

$$\implies \frac{i}{\hbar} [D, H] = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2m} \left(-4\frac{\hbar}{i} \mathbf{p}^2 \right) + \lambda \left(-4\frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \delta(r) \right) \right) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \lambda \frac{1}{r} \delta(r) = H. \quad (179)$$

$$[H, K] = 2t [H, D] + \frac{m}{2} [H, \mathbf{r}^2] , \quad (180)$$

$$[H, \mathbf{r}^2] = \frac{1}{2m} [\mathbf{p}^2, \mathbf{r}^2] = \frac{1}{m} \frac{\hbar}{i} (\mathbf{rp} + \mathbf{pr}) , \quad (181)$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{i}{\hbar} [H, K] &= \frac{i}{\hbar} \left(2t \left(-\frac{\hbar}{i} H \right) + \frac{m}{2} \left(\frac{1}{m} \frac{\hbar}{i} (\mathbf{rp} + \mathbf{pr}) \right) \right) = \\ &= -2tH + \frac{1}{2} (\mathbf{rp} + \mathbf{pr}) = -2D . \end{aligned} \quad (182)$$

$$[K, D] = -t^2 [H, D] + \frac{m}{2} [\mathbf{r}^2, D] = -t^2 [H, D] + \frac{m}{2} (t [\mathbf{r}^2, H] - [\mathbf{r}^2, G]) , \quad (183)$$

$$[\mathbf{r}^2, G^2] = \frac{1}{4} [\mathbf{r}^2, \mathbf{rp} + \mathbf{pr}] , \quad (184)$$

$$[\mathbf{r}^2, \mathbf{rp}] = -2\frac{\hbar}{i} \mathbf{r}^2 , \quad [\mathbf{r}^2, \mathbf{pr}] = -2\frac{\hbar}{i} \mathbf{r}^2 , \quad (185)$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{i}{\hbar} [K, D] &= \frac{i}{\hbar} \left(-t^2 \left(-\frac{\hbar}{i} H \right) + \frac{m}{2} \left(\frac{t}{2m} \left(-2\frac{\hbar}{i} (\mathbf{rp} + \mathbf{pr}) \right) - \frac{1}{4} \left(-4\frac{\hbar}{i} \mathbf{r}^2 \right) \right) \right) = \\ &= t^2 H - \frac{t}{2} (\mathbf{rp} + \mathbf{pr}) + \frac{m}{2} \mathbf{r}^2 = K . \end{aligned} \quad (186)$$

C. Dominios de definición y sus parámetros: Introducción teórica

En $L^2((0, \infty))$ consideramos el operador de Schrödinger minimal [7][12]

$$\dot{h} = -\frac{d^2}{dr^2} + \lambda(\lambda - 1)r^{-2} + \gamma r^{-1} + \alpha r^{-a} + W, \quad D(\dot{h}) = C_0^\infty((0, \infty)), \quad (187)$$

donde se cumplen las condiciones

$$W \in L^2((0, \infty)) \text{ evaluado real}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 2, \quad 1/2 \leq \lambda < 3/2. \quad (188)$$

Entonces h , la clausura de \dot{h} , tiene índices de defecto (1,1) y todas sus extensiones auto-adjuntas h_ν se pueden caracterizar por

$$h_\nu = -\frac{d^2}{dr^2} + \lambda(\lambda - 1)r^{-2} + \gamma r^{-1} + \alpha r^{-a} + W, \quad (189)$$

con su respectivo dominio

$$D(h_\nu) = \left\{ g \in L^2((0, \infty)), hg \in L^2((0, \infty)) \mid \nu g_{0,\lambda} = g_{1,\lambda} \right\}, \quad (190)$$

donde $-\infty < \nu \leq \infty$ y además $g_{0,\lambda}$ y $g_{1,\lambda}$ son los valores de frontera definidos como

$$g_{0,\lambda} = \lim_{r \rightarrow 0} g(r)/G_\lambda^{(0)}(r), \quad (191)$$

$$g_{1,\lambda} = \lim_{r \rightarrow 0} [g(r) - g_{0,\lambda}G_\lambda^B(r)]/F_\lambda^{(0)}(r). \quad (192)$$

Se ha usado para ello

$$F_\lambda^{(0)}(r) = r^\lambda, \quad G_\lambda^{(0)}(r) = \begin{cases} -r^{1/2} \log(r) & \text{si } \lambda = 1/2, \\ (2\lambda - 1)^{-1} r^{1-\lambda} & \text{si } 1/2 < \lambda < 3/2. \end{cases} \quad (193)$$

Además

$$F_\lambda(r) = F_\lambda^{(0)}(r) - \int_0^r dr' g_\lambda^{(0)}(r, r') V(r') F_\lambda(r'), \quad (194)$$

con

$$V(r) = \gamma r^{-1} + \alpha r^{-a} + W(r), \quad (195)$$

$$g_\lambda^{(0)}(r, r') = G_\lambda^{(0)}(r) F_\lambda^{(0)}(r') - G_\lambda^{(0)}(r') F_\lambda^{(0)}(r). \quad (196)$$

A partir de estas expresiones podemos obtener

$$G_\lambda(r) = F_\lambda(r) \int_r^{r_0} dr' [F_\lambda(r')]^{-2}, \quad 1/2 \leq \lambda < 3/2, \quad r \leq r_0. \quad (197)$$

Así, $G_\lambda^B(r)$ denota la expansión asintótica de $G_\lambda(r)$ cuando $r \rightarrow 0$ hasta orden r^t , $t \leq 2\lambda - 1$.

Cabe además mencionar que el caso particular con $g_{0,\lambda} = 0$ (de modo que $\nu \rightarrow \infty$) representa la conocida como extensión de Friedrich. Esta extensión juega un papel importante y se discutirá en cada caso particular tratado.

D. Dominios de definición y sus parámetros: Interacción Delta

En el caso que nos atañe tenemos el Hamiltoniano dado por (37)

$$H_r^\theta = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{g^2}{r^2} \right). \quad (198)$$

Sin embargo buscamos expresarlo de forma que podamos compararlo con (187). Esto se consigue mediante el empleo del operador unitario $U : L^2(\mathbb{R}^+, r dr) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+, dr)$ [8]. Así las funciones $f(r)$ del dominio de H_r^θ se transforman como $q(r) = (Uf)(r) = r^{1/2}f(r)$ y esto permite tomar las siguientes expresiones

$$\|q(r)\|^2 = \int \left(r^{1/2} f^*(r) \right) \left(r^{1/2} f(r) \right) dr = \int f^*(r) f(r) r dr = \|f(r)\|^2, \quad (199)$$

$$\frac{d}{dr} f = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^{1/2}} q \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^{3/2}} q + \frac{1}{r^{1/2}} \frac{d}{dr} q, \quad (200)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} f = \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r^{1/2}} q \right) = \frac{3}{4} \frac{1}{r^{5/2}} q - \frac{1}{r^{3/2}} \frac{d}{dr} q + \frac{1}{r^{1/2}} \frac{d^2}{dr^2} q, \quad (201)$$

$$\begin{aligned} \langle H_r^\theta \rangle &= \langle f | H_r^\theta f \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int f^* \left(\frac{d^2}{dr^2} f + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f - \frac{g^2}{r^2} f \right) r dr = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int \left(\frac{1}{r^{1/2}} q^* \right) \left(\frac{1}{r^{1/2}} \frac{d^2}{dr^2} q + \frac{1}{4} \frac{1}{r^{5/2}} q - \frac{g^2}{r^{5/2}} q \right) r dr = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int q^* \left(\frac{d^2}{dr^2} q + \left(\frac{1}{4} - g^2 \right) \frac{1}{r^2} q \right) dr = \langle q | H_r^\theta q \rangle. \end{aligned} \quad (202)$$

O lo que es lo mismo

$$\langle H_r^\theta \rangle = \langle f | H_r^\theta f \rangle = \left\langle (U^{-1}q) \left| H_r^\theta (U^{-1}q) \right. \right\rangle = \left\langle q \left| U H_r^\theta U^{-1} q \right. \right\rangle. \quad (203)$$

De modo que podemos considerar, actuando sobre $q(r)$

$$\tilde{h} = U H_r^\theta U^{-1} \equiv -\frac{d^2}{d\rho^2} + \left(g^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\rho^2}, \quad (204)$$

donde se ha definido una constante genérica α_0 de forma que

$$\rho = \alpha_0 r. \quad (205)$$

Se tiene por consiguiente, por comparación con (187)

$$\alpha = \gamma = W = 0, \quad \lambda = \frac{1 \pm 2|g|}{2}. \quad (206)$$

Notar que debe cumplirse $1/2 \leq \lambda < 3/2$ y por ello debemos tomar $\lambda = \frac{1+2|g|}{2}$, dado que en el dominio $|g| < 1$, se cumple perfectamente la relación siendo $\lambda = 1/2$ en el caso $g = 0$ ya estudiado en [5].

Siguiendo con el desarrollo para cualquier g en su posible rango de valores llegamos fácilmente en este caso a

$$F_\lambda(\rho) = F_\lambda^{(0)}(\rho) = \rho^\lambda = \rho^{(1+2|g|)/2}, \quad (207)$$

$$G_\lambda^{(0)}(\rho) = (2\lambda - 1)^{-1} \rho^{1-\lambda} = \frac{1}{2|g|} \rho^{(1-2|g|)/2} = G_\lambda^B(\rho). \quad (208)$$

Podemos entonces caracterizar el dominio (190) por un parámetro real ν de modo que para funciones $f(r) \equiv f(\rho)$ del dominio

$$\begin{aligned} \nu \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{\rho^{1/2} f(\rho)}{\frac{1}{2|g|} \rho^{(1-2|g|)/2}} \right) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{\rho^{1/2} f(\rho)}{\rho^{(1+2|g|)/2}} - \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left(\frac{\rho'^{1/2} f(\rho')}{\frac{1}{2|g|} \rho'^{(1-2|g|)/2}} \right) \frac{1}{2|g|} \frac{\rho^{(1-2|g|)/2}}{\rho^{(1+2|g|)/2}} \right), \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\rho^{|g|} f(\rho) \right) &= \frac{1}{2|g|} \frac{1}{\nu} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\rho^{-|g|} f(\rho) - \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left(\rho'^{|g|} f(\rho') \right) \rho^{-2|g|} \right). \end{aligned} \quad (209)$$

Por conveniencia redefinimos el parámetro que caracteriza las posibles extensiones auto-adjuntas introduciendo β , también real

$$\beta = \frac{1}{2|g|} \frac{1}{\nu}. \quad (210)$$

Escribimos así

$$\begin{aligned} D_g^\beta &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)), H_r^\theta f \in L^2((0, \infty)) \mid \lim_{r \rightarrow 0} \left((\alpha_0 r)^{|g|} f(r) \right) = \right. \\ &= \left. \beta \lim_{r \rightarrow 0} \left((\alpha_0 r)^{-|g|} f(r) - \lim_{r' \rightarrow 0} \left((\alpha_0 r')^{|g|} f(r') \right) (\alpha_0 r)^{-2|g|} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (211)$$

En este caso la extensión de Friedrich ($\nu \rightarrow \infty$) viene dada por $\beta = 0$.

E. Relación entre las diferentes formalizaciones de dominios para el caso con interacción delta

Podemos establecer una relación entre los dominios en (67) y (68), de modo que $D_g^\beta \equiv D_{n,\theta}^\beta \equiv D^\beta$, tomando $f(r) = \psi(r)$ y $\alpha_0 = \zeta = \frac{2m\Lambda}{\hbar^2}$. Estudiando el comportamiento de las funciones en el límite cuando $r \rightarrow 0$

$$J_g(z_\pm) \sim \frac{1}{\Gamma(g+1)} \left(\frac{1}{2}z_\pm\right)^g, \quad (212)$$

$$Y_g(z_\pm) \sim -\frac{\Gamma(g)}{\pi} \left(\frac{1}{2}z_\pm\right)^{-g}, \quad (213)$$

$$\begin{aligned} \phi_+(r) &= H_g^{(1)}(z_+) = J_g(z_+) + iY_g(z_+) \sim \\ &\sim \frac{1}{\Gamma(g+1)} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha_0 \frac{1+i}{\sqrt{2}} r\right)\right)^g - i \frac{\Gamma(g)}{\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha_0 \frac{1+i}{\sqrt{2}} r\right)\right)^{-g}, \end{aligned} \quad (214)$$

$$\begin{aligned} \phi_-(r) &= H_g^{(2)}(z_-) = J_g(z_-) - iY_g(z_-) \sim \\ &\sim \frac{1}{\Gamma(g+1)} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha_0 \frac{1-i}{\sqrt{2}} r\right)\right)^g + i \frac{\Gamma(g)}{\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha_0 \frac{1-i}{\sqrt{2}} r\right)\right)^{-g}. \end{aligned} \quad (215)$$

De acuerdo con (67) la función de ondas se puede escribir

$$\begin{aligned} \psi &\sim C \left[\frac{1}{\Gamma(g+1)} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha_0 \frac{1+i}{\sqrt{2}} r\right)\right)^g - i \frac{\Gamma(g)}{\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha_0 \frac{1+i}{\sqrt{2}} r\right)\right)^{-g} + \right. \\ &\quad \left. e^{i\mu} \left(\frac{1}{\Gamma(g+1)} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha_0 \frac{1-i}{\sqrt{2}} r\right)\right)^g + i \frac{\Gamma(g)}{\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha_0 \frac{1-i}{\sqrt{2}} r\right)\right)^{-g} \right) \right] = \\ &= C \left[\frac{2^{-\frac{3}{2}g}}{\Gamma(g+1)} ((1+i)^g + e^{i\mu}(1-i)^g) (\alpha_0 r)^g + \right. \\ &\quad \left. i \frac{2^{\frac{3}{2}g}}{\pi} \Gamma(g) (-(1+i)^{-g} + e^{i\mu}(1-i)^{-g}) (\alpha_0 r)^{-g} \right]. \end{aligned} \quad (216)$$

Para pertenecer al dominio en (68) el parámetro característico β toma el valor

$$\beta = i \frac{2^{3g}}{\pi} \Gamma(g) \Gamma(g+1) \frac{e^{i\mu}(1-i)^{-g} - (1+i)^{-g}}{(1+i)^g + e^{i\mu}(1-i)^g} \quad \text{si } 0 < g < 1, \quad (217)$$

$$\frac{1}{\beta} = i \frac{2^{3g}}{\pi} \Gamma(g) \Gamma(g+1) \frac{e^{i\mu}(1-i)^{-g} - (1+i)^{-g}}{(1+i)^g + e^{i\mu}(1-i)^g} \quad \text{si } -1 < g < 0. \quad (218)$$

Notar pues que basta invertir la expresión de β cuando g cambia de signo.

Vemos también que β es dependiente del parámetro μ y de n y θ a través de $g = n + \theta$.

Además puede comprobarse que efectivamente β toma valores reales

$$\begin{aligned}
 & i \frac{e^{i\mu}(1-i)^{-g} - (1+i)^{-g}}{(1+i)^g + e^{i\mu}(1-i)^g} = \\
 & = i \frac{e^{i\mu}(1-i)^{-g} - (1+i)^{-g}}{(1+i)^g + e^{i\mu}(1-i)^g} \frac{(1-i)^g + e^{-i\mu}(1+i)^g}{(1-i)^g + e^{-i\mu}(1+i)^g} = \\
 & = i \frac{e^{i\mu} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^g - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^g - e^{-i\mu}}{2^g + e^{-i\mu}(1+i)^{2g} + e^{i\mu}(1-i)^{2g} + 2^g} = \\
 & = i \frac{i 2 \sin \mu + \left(\frac{2i}{2}\right)^g - \left(\frac{-2i}{2}\right)^g}{2^{g+1} + \Re\{e^{-i\mu}(1+i)^{2g}\}} = \\
 & = i \frac{i 2 \sin \mu + i 2\Im\{(i)^g\}}{2^{g+1} + \Re\{e^{-i\mu}(2i)^g\}} \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\beta \equiv \beta(g, \mu) \equiv \beta(n, \theta, \mu) \in \mathbb{R} \quad \text{para } -1 < g < 1, g \neq 0.$$

F. Cálculo del término anómalo

Dicho término toma la forma

$$\mathcal{A} = \frac{i}{\hbar} \langle \psi_g | (H^\dagger - H) D \psi_g \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \psi_g | (H^\dagger - H) G \psi_g \rangle, \quad (219)$$

donde los operadores usados toman sus expresiones de (28) y (18)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (220)$$

$$D = tH - G, \quad G = \frac{1}{4} (\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{i} \left(\mathbf{1} + r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (221)$$

Así pues

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{i}{\hbar} \langle \psi_g | (H^\dagger - H) G \psi_g \rangle = -\frac{i}{\hbar} \left(\langle \psi_g | H^\dagger G \psi_g \rangle - \langle \psi_g | H G \psi_g \rangle \right) = -\frac{i}{\hbar} \langle H \psi_g | G \psi_g \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle \psi_g | H G \psi_g \rangle = \\ &= \int_0^\infty \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{g^2}{r^2} \right) \phi_g^* \left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g r dr - \\ &\quad \int_0^\infty \frac{\hbar^2}{4m} \phi_g^* \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{g^2}{r^2} \right) \left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g r dr = \\ &= \int_0^\infty \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_g^*}{dr} \right) \right) \left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g dr - \\ &\quad \int_0^\infty \frac{\hbar^2}{4m} \phi_g^* \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g \right) \right) dr = \\ &= \left[\frac{\hbar^2}{4m} \left(r \frac{d\phi_g^*}{dr} \right) \left(\left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g \right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\hbar^2}{4m} \left(r \frac{d\phi_g^*}{dr} \right) \frac{d}{dr} \left(\left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g \right) dr - \\ &\quad \left[\frac{\hbar^2}{4m} \phi_g^* \left(r \frac{d}{dr} \left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g \right) \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{d\phi_g^*}{dr} \right) r \frac{d}{dr} \left(\left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g \right) dr = \\ &= \left[\frac{\hbar^2}{4m} \left(r \frac{d\phi_g^*}{dr} \right) \left(\left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g \right) \right]_0^\infty - \left[\frac{\hbar^2}{4m} \phi_g^* \left(r \frac{d}{dr} \left(1 + r \frac{d}{dr} \right) \phi_g \right) \right]_0^\infty. \end{aligned} \quad (222)$$

Puesto que $\phi_g(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ la contribución a la integral se dará con $r \rightarrow 0$, que recordando (93) escribimos

$$\begin{aligned} \phi_g(r \rightarrow 0) &\sim \alpha \sqrt{\frac{2 \sin(|g|\pi)}{|g|\pi}} \left(2^{-(1+|g|)} \Gamma(-|g|) \left((\alpha r)^{|g|} + 4^{|g|} \frac{\Gamma(|g|)}{\Gamma(-|g|)} (\alpha r)^{-|g|} \right) \right) = \\ &= a \left((\alpha r)^{|g|} + \beta (\alpha r)^{-|g|} \right), \end{aligned} \quad (223)$$

con

$$a = \alpha \sqrt{\frac{2 \sin(|g|\pi)}{|g|\pi}} \left(2^{-(1+|g|)} \Gamma(-|g|) \right), \quad \beta = 4^{|g|} \frac{\Gamma(|g|)}{\Gamma(-|g|)}, \quad (224)$$

de acuerdo con (92).

Finalmente

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= -\frac{\hbar^2}{4m} a^2 |g| \left((\alpha r)^{|g|} - \beta (\alpha r)^{-|g|} \right) \left((1 + |g|) (\alpha r)^{|g|} + \beta (1 - |g|) (\alpha r)^{-|g|} \right) + \\
 &\quad \frac{\hbar^2}{4m} a^2 \left((\alpha r)^{|g|} + \beta (\alpha r)^{-|g|} \right) \left((1 + |g|) |g| (\alpha r)^{|g|} - \beta (1 - |g|) |g| (\alpha r)^{-|g|} \right) = \\
 &= -\frac{\hbar^2}{4m} a^2 (2\beta(1 - |g|)|g| - 2\beta(1 + |g|)|g|) = \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 \left[\frac{2 \sin(|g|\pi)}{|g|\pi} \left(2^{-(1+|g|)} \Gamma(-|g|) \right)^2 4^{|g|} \frac{\Gamma(|g|)}{\Gamma(-|g|)} (-2|g|^2) \right]. \tag{225}
 \end{aligned}$$

G. Cálculos con el átomo de hidrógeno

Dada la ecuación

$$\frac{d^2\bar{u}_l(\varrho)}{d\varrho^2} + \left(\frac{\lambda}{\varrho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right) \bar{u}_l(\varrho) = 0 \quad (226)$$

consideramos soluciones de la forma

$$\bar{u}_l(\varrho) = \varrho^{-l} e^{-\varrho/2} v_l(\varrho). \quad (227)$$

Realizando las siguientes operaciones matemáticas

$$\frac{d\bar{u}_l(\varrho)}{d\varrho} = -l\varrho^{-(l+1)} e^{-\varrho/2} v_l(\varrho) - \frac{1}{2}\varrho^{-l} e^{-\varrho/2} v_l(\varrho) + \varrho^{-l} e^{-\varrho/2} \frac{dv_l(\varrho)}{d\varrho}, \quad (228)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{u}_l(\varrho)}{d^2\varrho} &= l(l+1)\varrho^{-(l+2)} e^{-\varrho/2} v_l(\varrho) + \frac{l}{2}\varrho^{-(l+1)} e^{-\varrho/2} v_l(\varrho) - l\varrho^{-(l+1)} e^{-\varrho/2} \frac{dv_l(\varrho)}{d\varrho} + \\ &\quad \frac{l}{2}\varrho^{-(l+1)} e^{-\varrho/2} v_l(\varrho) + \frac{1}{4}\varrho^{-l} e^{-\varrho/2} v_l(\varrho) - \frac{1}{2}\varrho^{-l} e^{-\varrho/2} \frac{dv_l(\varrho)}{d\varrho} - \\ &\quad l\varrho^{-(l+1)} e^{-\varrho/2} \frac{dv_l(\varrho)}{d\varrho} - \frac{1}{2}\varrho^{-l} e^{-\varrho/2} \frac{dv_l(\varrho)}{d\varrho} + \varrho^{-l} e^{-\varrho/2} \frac{d^2v_l(\varrho)}{d^2\varrho} = \\ &= v_l(\varrho) e^{-\varrho/2} \left(l(l+1)\varrho^{-(l+2)} + l\varrho^{-(l+1)} + \frac{1}{4}\varrho^{-l} \right) + \\ &\quad \frac{dv_l(\varrho)}{d\varrho} e^{-\varrho/2} \left(-2l\varrho^{-(l+1)} - \varrho^{-l} \right) + \frac{d^2v_l(\varrho)}{d^2\varrho} e^{-\varrho/2} \left(\varrho^{-l} \right), \end{aligned} \quad (229)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{\varrho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right) \bar{u}_l(\varrho) &= \left(\frac{\lambda}{\varrho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right) \left(\varrho^{-l} e^{-\varrho/2} v_l(\varrho) \right) = \\ &= v_l(\varrho) e^{-\varrho/2} \left(\lambda\varrho^{-(l+1)} - \frac{1}{4}\varrho^{-l} - l(l+1)\varrho^{-(l+2)} \right), \end{aligned} \quad (230)$$

podemos sustituir en (226) para finalmente obtener

$$\varrho \frac{d^2v_l(\varrho)}{d^2\varrho} + (-2l - \varrho) \frac{dv_l(\varrho)}{d\varrho} - (-l - \lambda) = 0. \quad (231)$$

H. Dominios de definición y sus parámetros: Átomo de hidrógeno

En este caso el Hamiltoniano que actúa sobre la función de ondas radial reducida queda

$$H_l = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{e^2}{r}, \quad (232)$$

actuando sobre $u_l(r)$.

Buscamos comparar esta expresión con (187) escribiendo

$$h_\nu = -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\Lambda}{\rho}, \quad (233)$$

con la introducción de una constante genérica α_0 tal que

$$\rho = \alpha_0 r, \quad \Lambda = \frac{2m_e e^2}{\hbar^2 \alpha_0}. \quad (234)$$

Se tiene entonces

$$\alpha = W = 0, \quad \gamma = -\Lambda, \quad \lambda = 1. \quad (235)$$

Resulta así que

$$F_\lambda^{(0)}(\rho) = \rho^\lambda = \rho, \quad (236)$$

$$G_\lambda^{(0)}(\rho) = (2\lambda - 1)^{-1} \rho^{1-\lambda} = 1 \quad (237)$$

$$\begin{aligned} G_\lambda^B(\rho) &= 1 + \alpha [(2-a)(3-a)]^{-1} [1 + 2(1-a)^{-1}] \rho^{2-a} + \gamma \rho \log(\rho) + \frac{\gamma}{2} \rho = \\ &= 1 - \Lambda \rho \log(\rho) - \frac{\Lambda}{2} \rho. \end{aligned} \quad (238)$$

Queda entonces el dominio caracterizado por un parámetro real ν según (190)

$$\begin{aligned} D_0^\nu &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)), H_l f \in L^2((0, \infty)) \left| \nu \lim_{r \rightarrow 0} (f(\rho)) = \right. \right. \\ &= \left. \lim_{r \rightarrow 0} \left(\rho^{-1} f(\rho) - \lim_{r' \rightarrow 0} (f(\rho')) (\rho^{-1} - \Lambda \log(\rho) - \Lambda/2) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (239)$$

La extensión de Friedrich vendrá dada en este caso por $\nu \rightarrow \infty$.

I. Introducción teórica a Supersimetría

El formalismo básico de la Mecánica Cuántica Supersimétrica (SQM) [10] se basa en la existencia de un superpotencial $W(x)$ tal que permite definir los operadores

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (240)$$

$$A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x). \quad (241)$$

Estos a su vez permiten obtener una pareja de Hamiltonianos

$$H_1 = A^\dagger A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}, \quad (242)$$

$$H_2 = AA^\dagger = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \quad V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}. \quad (243)$$

Los potenciales $V_1(x)$ y $V_2(x)$ obtenidos a partir del superpotencial $W(x)$ se conocen como una pareja de potenciales supersimétricos.

Los Hamiltonianos (242) y (243) son semi-definidos positivos

$$\langle H_1 \rangle = \langle \psi | H_1 \psi \rangle = \langle \psi | A^\dagger A \psi \rangle = \langle A \psi | A \psi \rangle = \|A \psi\|^2 \geq 0, \quad (244)$$

$$\langle H_2 \rangle = \langle \psi | H_2 \psi \rangle = \langle \psi | A A^\dagger \psi \rangle = \langle A^\dagger \psi | A^\dagger \psi \rangle = \|A^\dagger \psi\|^2 \geq 0, \quad (245)$$

por lo que sus autovalores deben cumplir $E_n^{(1,2)} \geq 0$.

Sin embargo, cabe notar que los autovalores de ambos Hamiltonianos están relacionados entre sí. Para H_1 dado por (242) tenemos

$$H_1 \psi_n^{(1)} = A^\dagger A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}. \quad (246)$$

Si ahora multiplicamos ambos lados por el operador A obtenemos:

$$A H_1 \psi_n^{(1)} = A A^\dagger A \psi_n^{(1)} = H_2 (A \psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)} (A \psi_n^{(1)}). \quad (247)$$

Lo que implica que si $\psi_n^{(1)}$ son autoestados de H_1 con autovalor $E_n^{(1)}$, $A \psi_n^{(1)}$ son también autoestados de H_2 con idénticos autovalores $E_n^{(1)}$.

El mismo proceso puede llevarse a cabo tomando inicialmente los autoestados $\psi_n^{(2)}$ de H_2 dado por (243) y se obtiene

$$A^\dagger H_2 \psi_n^{(2)} = A^\dagger A A^\dagger \psi_n^{(2)} = H_1 (A^\dagger \psi_n^{(2)}) = E_n^{(2)} (A^\dagger \psi_n^{(2)}). \quad (248)$$

Vemos así que la aplicación de A o A^\dagger nos permite pasar de autoestados de H_1 a autoestados de H_2 y viceversa. Además el autovalor asociado se mantiene invariable.

Cabe mencionar que es costumbre trabajar con H_1 por defecto y así lo haremos a lo largo de todo el escrito.

La relación mostrada a partir de (246) y (247) se rompe en el caso en que $A\psi_0^{(1)} = 0$, es decir, cuando el estado fundamental de H_1 queda “aniquilado” por el operador A de modo que este autoestado está desapareado (a diferencia del resto) y H_2 preserva el espectro de energías de H_1 a excepción del autovalor asociado a este estado, el nivel fundamental.

Nosotros estamos interesados en este tipo particular de casos, en los que se dice que la supersimetría (SUSY) permanece sin romper. Podemos además establecer las principales relaciones entre autoestados y autovalores de H_1 y H_2 particularizadas a la situación

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0, \quad (249)$$

$$\psi_n^{(2)} \propto A\psi_{n+1}^{(1)}, \quad (250)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} \propto A^\dagger \psi_n^{(2)}. \quad (251)$$

Una imagen ayuda a visualizarlo

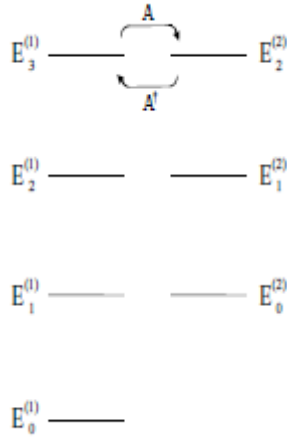


Figura 1: Representación gráfica de la relación entre los espectros de H_1 y H_2 [10]. Los operadores A y A^\dagger indican el cambio de autoestados como se muestra en (250) y (251). Notar que todos los niveles tienen una pareja supersimétrica mientras que el fundamental está desapareado y por consiguiente no puede obtenerse a partir de autovalores de H_2 .

La condición $A\psi_0^{(1)} = 0$ puede emplearse, si el superpotencial $W(x)$ es conocido y usando (240), para determinar el estado fundamental como

$$\psi_0^{(1)} = N \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y)dy\right), \quad (252)$$

con N una constante que permite la normalización de la función de ondas.

Por otro lado, si lo que conocemos es el estado fundamental $\psi_0^{(1)}$ la condición $A\psi_n^{(1)}$ nos proporciona la forma del superpotencial

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\frac{d}{dx}\psi_0^{(1)}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)}. \quad (253)$$

En resumidas cuentas, cuando SUSY permanece sin romper, tomando un potencial perfectamente resoluble $V(x)$ con n autoestados y siendo E_0 la energía del nivel fundamental, podemos tomar $V_1(x) = V(x) - E_0$ cuyo nivel fundamental es de energía nula por construcción. Se obtiene así H_1 con sus respectivos n autoestados y, de acuerdo con lo desarrollado arriba, podemos hallar asimismo el Hamiltoniano H_2 con sus $n - 1$ autoestados. Posteriormente, a partir de H_2 podemos obtener otro Hamiltoniano H_3 con $n - 2$ autoestados y, actuando sucesivamente, podemos construir una jerarquía de $n + 1$ Hamiltonianos H_1, H_2, \dots, H_{n+1} con $n, n - 1, \dots, 0$ autoestados respectivamente.

Con todo esto en mente procedemos a introducir el concepto de invariancia de de forma (*Shape Invariance*), lo que nos permitirá generalizar el método de operadores empleado para la resolución del oscilador armónico (operadores “aniquilación” y “destrucción”) a toda clase de potenciales de forma invariante (SIPs).

Cuando la pareja de potenciales supersimétricos $V_1(x)$ y $V_2(x)$ definidos en (242) y (243) presentan una forma similar y difieren únicamente en los parámetros que en ellos aparecen se dice que son de forma invariante. De forma más precisa, se debe cumplir la condición

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1), \quad (254)$$

donde a_1 es un set de parámetros, $a_2 = f(a_1)$ y $R(a_1)$ es independiente de x .

Entonces podemos decir que $V_1(x; a_1)$ y $V_2(x; a_1)$ son de forma invariante.

Usando la condición (254) y la jerarquía de Hamiltonianos ya tratada se pueden obtener los niveles de energía y los autoestados de todo SIP cuando la supersimetría no está rota.

Comenzaremos la discusión partiendo de los Hamiltonianos $H_{1,2}$ cuyos autoestados y autovalores están relacionados por supersimetría y, puesto que SUSY permanece sin romper

$$E_0^{(1)}(a_1) = 0, \quad (255)$$

$$\psi_0^{(1)}(x; a_1) = N \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y; a_1) dy\right), \quad (256)$$

usando resultados anteriores.

Con (254) y añadiendo a ambos lados el operador de energía cinética $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ llegamos a:

$$H_2(x; a_1) = H_1(x; a_2) + R(a_1). \quad (257)$$

Puesto que los Hamiltonianos difieren en una constante resulta evidente que sus respectivos autovalores diferirán entre sí por la misma constante y además sus autoestados serán proporcionales entre sí:

$$E_0^{(2)}(a_1) = E_0^{(1)}(a_2) + R(a_1) \stackrel{E_0^{(1)}=0}{=} R(a_1), \quad (258)$$

$$\psi_0^{(2)}(x; a_1) \propto \psi_0^{(1)}(x; a_2) \stackrel{(\text{??})}{\propto} \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y; a_2) dy\right). \quad (259)$$

En virtud de (249) podemos obtener el autovalor del primer nivel excitado

$$E_1^{(1)}(a_1) = E_0^{(2)}(a_1) = R(a_1) \quad (260)$$

y usando (251) se obtiene el autoestado correspondiente

$$\psi_1^{(1)}(x; a_1) \propto A^\dagger(x; a_1) \psi_0^{(2)}(x; a_1) \stackrel{(\text{??})}{\propto} A^\dagger(x; a_1) \psi_0^{(1)}(x; a_2). \quad (261)$$

Pueden generalizarse los pasos seguidos y obtener así el espectro ligado completo de H_1 junto con sus autoestados. Para ello construimos una serie de Hamiltonianos H_s con $s = 1, 2, 3, \dots$ notando que si H_1 presenta n estados ligados se podrán construir n Hamiltonianos H_2, H_3, \dots, H_{n+1} tales que el p -ésimo Hamiltoniano H_p poseerá el mismo espectro que H_1 a excepción de los primeros $p - 1$ niveles, que estarán ausentes.

Con el sucesivo empleo de (254) llegamos a

$$\begin{aligned} H_s &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_s(x; a_1) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \underline{V_1(x; a_s)} + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k), \end{aligned} \quad (262)$$

donde $a_s = f^{s-1}(a_1)$ donde el superíndice en f indica que la función se aplica $s - 1$ veces sobre a_1 : $a_s = f(a_{s-1}) = f(f(a_{s-2})) = \dots$

Si ahora comparamos H_s con H_{s+1} , el cual en virtud de (254) y (262) se expresa como

$$\begin{aligned} H_{s+1} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_{s+1}) + \sum_{k=1}^s R(a_k) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \underline{V_2(x; a_s)} + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \end{aligned} \quad (263)$$

y esto implica que H_s y H_{s+1} forman una pareja supersimétrica y por lo tanto presentan el mismo espectro de energías ligadas con la excepción del estado fundamental de H_s cuya energía es, usando que $E^{(1)} = 0$

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k). \quad (264)$$

Si ahora procedemos a la inversa y vamos obteniendo H_{s-1} a partir de H_s y así sucesivamente, finalmente alcanzaremos los Hamiltonianos H_2 y H_1 . Nuestra atención se centra en este último, cuya energía del nivel fundamental es nula y la energía del resto de niveles, véase la energía del n -ésimo nivel $E_n^{(1)}$, coincide con la del nivel fundamental del Hamiltoniano H_{n+1} .

Esto implica que el espectro completo de autovalores de H_1 viene dado por

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k); \quad E_0^{(1)} = 0. \quad (265)$$

En lo que respecta a los autoestados correspondientes es fácil ver que dado el estado fundamental $\psi_0^{(n+1)}(x; a_1) \propto \psi_0^{(1)}(x; a_{n+1})$ de H_{n+1} definido como en (256)

$$\psi_0^{(1)}(x; a_{n+1}) \propto \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y; a_{n+1}) dy\right), \quad (266)$$

mediante el empleo del operador $A^\dagger(x; a_n)$ permite la obtención, según (261), de

$$\psi_1^{(1)}(x; a_n) \propto A^\dagger(x; a_n) \psi_0^{(1)}(x; a_{n+1}). \quad (267)$$

Actuando ahora con $A^\dagger(x; a_{n-k})$ sucesivamente desde $k = 1$ hasta llegar a $k = n - 1$ permite obtener finalmente el autoestado del nivel n -ésimo de H_1

$$\psi_2^{(1)}(x; a_{n-1}) \propto A^\dagger(x; a_{n-1}) \psi_1^{(1)}(x; a_n) \propto A^\dagger(x; a_{n-1}) A^\dagger(x; a_n) \psi_0^{(1)}(x; a_{n+1}), \quad (268)$$

...

$$\psi_n^{(1)}(x; a_1) \propto \underbrace{A^\dagger(x; a_1) \cdot \dots \cdot A^\dagger(x; a_n)}_{n \text{ operadores}} \psi_0^{(1)}(x; a_{n+1}), \quad (269)$$

donde faltaría normalizar las funciones de onda para obtener la expresión final buscada. Puede verse finalmente como el resultado obtenido resulta ser una generalización del

método de construcción seguido en el caso del oscilador armónico unidimensional.

Así mediante (265) y (269) hemos sido capaces de ofrecer expresiones explícitas que permiten obtener la totalidad del espectro de energías ligadas del Hamiltoniano H_1 junto con sus autoestados.